Métodos Numéricos

Prof. Dr. Jonatha Costa

2024

Organização

1. Ponto flutuante, armazenamento de dados e erros
   - Conceitos
   - Representação EE 754/2008
   - Erros em soluções Numéricas
   - Desastres

MN aplicados à Engenharia: Objetivo da aula

- Apresentar conteúdo de :
  - Aritmética de ponto flutuante
  - Armazenamento de dados no computador
  - Erros de arredondamento e de truncamento

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Sejam as grandezas:

- Massa do Elétron: $9 \times 10^{-28} gramas$
- Massa do Sol: $2 \times 10^{33} gramas$
- Faixa de variação: $> 10^{60}$
- Representação de grandezas extremas
  - 000000000.1324468585133
  - 1367634123544 5403.341464684654

Como representar tais números de modo equânime?

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

- Solução: notação científica:

$$Algarismo \times Base^{expoente}$$

- Sistema de representação de maneira que a faixa de variação dos números seja independente do número de dígitos significativos dos números representados.
- Ponto flutuante

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Representação em Ponto flutuante - base decimal

Para acomodar números grandes e pequenos, números reais são escritos na representação em ponto flutuante (também chamada de notação científica) e cuja a forma:

$$d, ddddd \times 10^p$$

Nessa representação, um algarismo é escrito à esquerda da vírgula decimal, e o resto dos algarismos significativos é escrito à direita da vírgula. O número $0, dddddd$ é chamado de **mantissa**.

- $6519, 23$ é escrito como $6, 51923 \times 10^3$
- $0, 00000391$ é escrito como $3, 91 \times 10^{-6}$

A potência de 10^p, representa a ordem de grandeza do número(O), a qual é estruturada como $(p + 1)$ se a ordem for menor que 5.

Exemplo:

- $3, 91 \times 10^{-6}$ é da ordem de $10^{-6}.O(10^{-6})$
- $6, 51923 \times 10^3$ é da ordem de $10^4.O(10^4)$.

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Representação em Ponto flutuante - base binária

A representação binária em ponto flutuante tem a forma:

$$1, bbbbb \times 2^{bbb}$$

Nessa forma, a mantissa é $0, bbbbbb$, e a potência de 2 é chamada de expoente. Tanto a mantissa quanto o expoente são escritos na forma binária.

Para representar um número decimal em Ponto flutuante - base binária deve-se proceder a normalização do número e depois a conversão do número para a representação binária.
Um número n, portanto, deve ser dividido e multiplicado pela *maior potência de 2*, imediatamente menor

que o próprio número n. Depois tanto a mantissa quanto o expoente são escritos na forma binária, posto que a parte inteira é 1.

Exemplo: Como é escrito 50_{10} em binário? E na representação de ponto flutuante binária?

1. Normalizar - $50_{10} = \dfrac{50}{2^5} \times 2^5 = 1,5625 \times 2^5$
2. Converter mantissa - $0,5625_{10} = 1001_2$
3. Converter expoente - $5_{10} = 101_2$
4. Compor o número - $1,1001 \times 2^{101}$

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Representação em Ponto flutuante - exemplo

Formato	***Número***
Decimal	81

Base binária	**Expoente**
2	6
2^6 < 81 ?	Ok

Resultado Ponto flutuante decimal

$\frac{81}{(2\text{^}6)}$ x (2^6) → 1,265625 x (2^6)

Parte inteira	1
Parte fracionária	0,265625
Expoente	6

Ponto flutuante decimal para binário

1,265625 x (2^6) → ?

Conversão para binário - parte inteira

1=1

Conversão para binário - mantissa 010001

0,265625	x 2 =	0,53125	0
0,53125	x 2 =	1,0625	1
0,0625	x 2 =	0,125	0
0,125	x 2 =	0,25	0
0,25	x 2 =	0,5	0
0,5	x 2 =	1	1
0	x 2 =	0	

Conversão para binário - expoente

6 110

Resultado Ponto flutuante binário

1,265625 x (2^6) → 1,010001 x (2^110)

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Representação em Ponto flutuante - exemplo

Método alternativo

1. Converter o número decimal para binário
   $81_{10} = 1010001_2$
2. Deslocar a vírgula para direta e registrar o número de deslocamentos
   $1,010001$ e 6 deslocamentos.
3. Converter a quantidade de deslocamentos para binário
   $6_{10} = 110_2$
4. Reescrever o número unindo os termos acima
   $1,010001\ x\ 2^{110}$

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Representação em Ponto flutuante

Distribuição dos bits na representação IEEE 754/2008

Tipo	Sinal	Expoente	Mantissa
Simples (32 bits)	bit 31	bits 30-23	bits 22-0
Dupla (64 bits)	bit 63	bit 62-52	bits 51-0

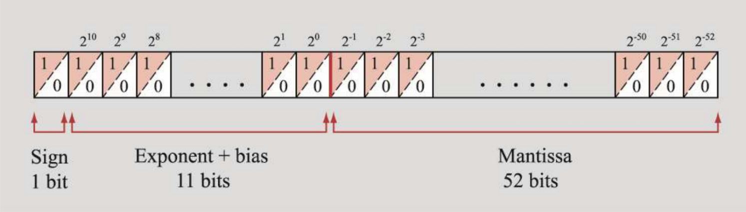
- Precisão simples 32 bits (dupla 64 bits)
- 1 bit para o sinal de número em ambas as precisões
- 8 bits para o expoente (11 bits para o expoente) + polarização (127 simples e 1023 dupla)
- 23 bits para a mantissa (52 bits para a mantissa)

A polarização é introduzida para se evitar o uso de um dos bits para representar o sinal do expoente (uma vez que o expoente pode ser positivo ou negativo).

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Resumo:

Figura: Representação IEEE 754/2008 - Processador de 64 bits



Fonte: GILAT,(2008)

Processador de 64 bits:

1 bit para sinal, 11 bits para o expoente e 52 bits para a mantissa, bias $= 1023$

Processador de 32 bits:

1 bit para sinal, 8 bits para o expoente e 23 bits para a mantissa, bias $= 127$

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Qual a representação do número 81 decimal na norma IEEE 754/2008 precisão de 32 e 64 bits?

- 81_{10} em ponto flutuante *binário* resulta em $1,010001\ x\ (2^{110})$, conforme já visto.
- Precisão simples (32 bits)
  - Bit 31 (sinal) = positivo 0;
  - Bits 23 ao 30 (expoente com bias de 127) $= 6_{10} + 127_{10} = 133_{10} = 10000101_2$
  - Bits 00 ao 22 (mantissa) $= 010001_2$
  - Logo: **0 | 10000101 | 01000100000000...0000 - 32bits**
- Precisão dupla (64 bits)
  - Bit 63 (sinal) = positivo 0;
  - Bits 52 ao 62 (expoente com bias de 1023) $= 6_{10} + 1023_{10} = 1029_{10} = 10000000101_2$
  - Bits 00 ao 51 (mantissa) $= 010001_2$
  - Logo: **0 | 10000000101 | 01000100000...0000 - 64bits**
- Nota:

  Lembre-se de que a sintaxe é : *sinal + expoente + mantissa*!

MN aplicados à Engenharia: Aritmética de Ponto flutuante

Representação em Ponto flutuante
Considerações

- Mais bits para a mantissa fornece mais precisão (t)
- Mais bits para o expoente, aumenta o range de valores (e).
- O tamanho da palavra do computador depende de características internas à arquitetura do mesmo. Em geral, os microcontroladores tem tamanho de palavra de 16 bits, os microcomputadores padrão PC tem tamanho de palavra de 32 bits, 64 bits ou mais.

Figura: Encapsulamentos de processadores

Fonte: Autor desconhecido

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Erros em soluções numéricas

- Erros de arredondamento
- Erros de truncamento
- E rro total

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Erros de arredondamento

- Os números são representados em computador através de um número finito de bits.
- Os números podem ser encurtados e descartados ou arredondados.

Exemplo:

Figura: Erros de arredondamento

$$2/3 = 0{,}666666\ldots$$

$$2/3 = \underbrace{0{,}6666}\ \text{ou}\ \underbrace{0{,}6667}$$

Encurtado / arredondado

Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Erros de arredondamento:

Exemplo: Efetue a subtração entre dois números reais $p = 9890,9$ e $q = 9887,1$ mantendo o formato original, encurtando e arredondando os valores para três algarismos significativos.

- $p - q = 9890,9 - 9887,1 = 3,8$ (formato original)
- Se apenas três algarismos são permitidos na mantissa, tem-se a **representação em ponto flutuante**:
    - $p - q = 9,890\ x\ 10^3 - 9,887\ x\ 10^3 = 0,003\ x\ 10^3 = 3$ (corte)
    - $p - q = 9,891\ x\ 10^3 - 9,887\ x\ 10^3 = 0,004\ x\ 10^3 = 4$ (arredondamento)

A diferença verdadeira (exata) entre os números é de 3,8. Esses resultados mostram que, no presente problema, o arredondamento leva a um valor mais próximo à resposta verdadeira.

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Exemplo

- Considere a equação quadrática $x^2 - 100,0001x + 0,01 = 0$, para a qual as soluções exatas são $x_1 = 100$ e $x_2 = 0,0001$.
- As soluções podem ser calculadas com a fórmula quadrática $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, o que, em ambiente de simulador computacional Matlab/Octave resultando em: $x_1 = 99.99990000000000$ e $x_2 = 1.000000000033197e - 004$.
- O valor calculado no simulador para x_2 não é exato devido a erros de arredondamento. Tais erros ocorrem no numerador da expressão de x_2 . Como b é negativo, o numerador envolve a subtração de dois números que são quase iguais.
- Em alguns casos, a forma das expressões matemáticas pode ser mudada para uma forma diferente, menos propensa a erros de arredondamento como: $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\left(\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right) = \dfrac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$.
- O que resulta e $x_2 = 1.000000000000000e - 004$.

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Erros de truncamento:

- Ocorrem quando os métodos numéricos usados na solução de um problema utilizam uma aproximação.
- **Exemplo**: A função sen(x) pode ser aproximada pela série de Taylor.

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

- O valor exato do $sen(\pi/6) = 0,5$
- Usando **um** termo da série de Taylor: $sen(\pi/6) = (\pi/6) = 0,5235988$
- Usando **dois** termos $sen(\pi/6) = \frac{\pi}{6} - \frac{(\pi/6)^3}{3!} = 0,4996742$

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Erro total (Erro real)

- A solução numérica é uma aproximação sempre inclui erros de arredondamento e, dependendo do método numérico utilizado, também pode incluir erros de truncamento.
- Juntos, os erros de arredondamento e de truncamento resultam no erro numérico total incluído na solução numérica.
- **Erro total** - ou erro real, é a diferença entre a solução verdadeira (exata) e a solução numérica sendo expresso por :

$$ErroReal = SolucaoExata \; - \; SolucaoNumerica$$

- **Erro relativo** - valor absoluto da razão entre o erro real e a solução exata sendo expresso por:

$$Erro\ Relativo\ Real = \frac{Erro\ Real}{Solucao\ Exata}$$

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

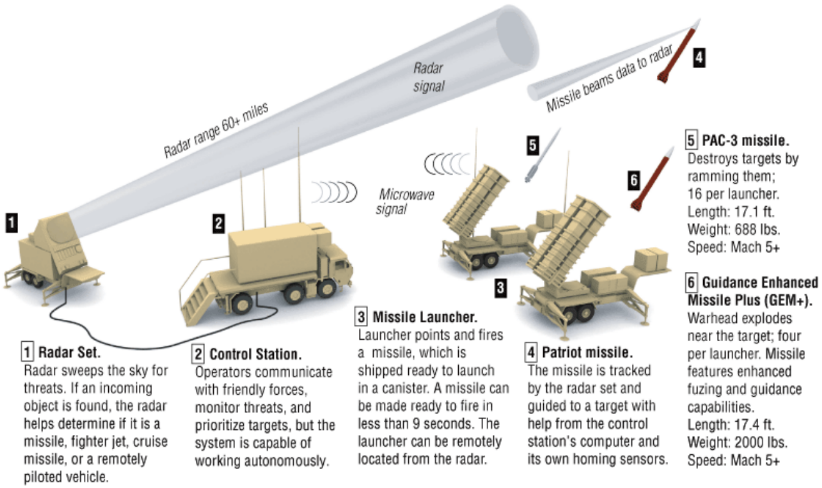
Desastres causados por erros numéricos:

Figura: Defesa antiaérea - Patriot

Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia

Figura: Defesa antiaérea - Patriot



Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Desastres causados por erros numéricos:

Figura: Míssel Iraniano

Fonte:DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Desastres causados por erros numéricos:

O que aconteceu?

- Dia 25 de fevereiro de 1991 – Guerra do Golfo;
- Arábia Saudita – Sistema Patriot falhou na interceptação de mísseis SCUD; – Morte de 28 soldados americanos;
- Para prever onde mísseis estarão, ambos tempo e velocidade precisam ser números reais;
- O tempo em dezenas de segundos era multiplicado por 1/10 para produzir o tempo em segundos;

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Desastres causados por erros numéricos:

- 1/10 quando convertido para base binária resulta em uma dízima com período igual a 104 bits;
- Patriot possuía um registrador de 24 bits;
- Conversão binária de 1/10
  0.00011001100110011001100**11001100**...
- O registrador do Patriot gravou
  0.00011001100110011001100
- Erro gerado
  0.00000000000000000000000**11001100**...

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Desastres causados por erros numéricos

- Tempo depois de 100 horas
  $0.000000095x100x60x60x10 = 0,34$ segundos
- Velocidade do Scud $= 1.676m/s$
  Distância percorrida em $0,34$ segundos $= 0,5km$
- Quem foi o responsável?
  O projetista? O exército americano? Operadores?

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Desastres causados por erros numéricos

Figura: Ariane 5

Fonte: DIAS,(2019)

Explosão do foguete francês Ariane 5.

- Em 4 de junho de 1996, menos de um minuto após o lançamento, o foguete francês Ariane 501 se autodestruiu.
- Foi indicada pelo CNES (Centro Nacional de Estudos Espaciais) e pela ESA (Agência Espacial Européia) uma comissão para investigar a ocorrência.
- Comissão indica um erro no software de controle como a origem na falha do lançamento.

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Desastres causados por erros numéricos

Figura: Ariane 5

Fonte: DIAS,(2019)

A investigação preliminar dos dados de voo revelou:

- Comportamento do lançador em condições nominais, até 36 segundos após a decolagem.
- Falha do sistema de referência inercial (SRI) secundário, seguido imediatamente de falha do sistema de referência inercial em operação.
- Guinada dos bocais dos sistemas de propulsão até o seu ângulo máximo, causando uma guinada abrupta do veículo.
- Autodestruição do lançador, disparada corretamente como consequência da ruptura das juntas entre os sistemas de propulsão sólidos e o primeiro estágio.

MN aplicados à Engenharia: Erros em soluções numéricas

Desastres causados por erros numéricos

Figura: Ariane 5

Fonte: DIAS,(2019)

A investigação preliminar dos dados de voo revelou:

- A origem da falha foi confinada ao sistema de controle, mais especificamente, aos dois sistemas referenciais inerciais (SRI), que nitidamente deixaram de funcionar, por volta de $36,7s$ após a decolagem.
- A anomalia interna de *software* do SRI ocorreu durante a execução de uma conversão de dados de um número de 64 bits em ponto flutuante para um inteiro de 16 bits com sinal. O valor do número em ponto flutuante era maior do que poderia ser representado pelo inteiro de 16 bits com sinal. O resultado foi um operando inválido.

Exercícios

Veja a lista de exercícios na web