Métodos Numéricos

Prof. Dr. Jonatha Costa

2024

Organização

1 Conceitos de Cálculo
- Conceitos
- Diferenciação
- Antiderivadas

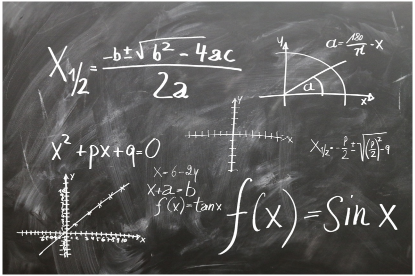
2 Algebra Linear e EDO
- Conceitos
- Operações
- Matrizes
- Equações diferenciais

Fundamentos Matemáticos

Objetivo da aula

- Estudar o conceito de *Cálculo Numérico*;
- Revisar conceitos de funções, relação de limite, derivada e integral.

Figura: Fundamentos



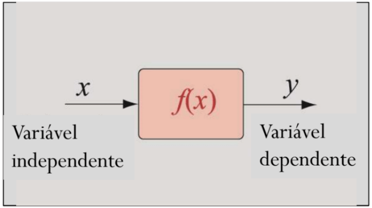
Fonte: Autor desconhecido

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Função

Uma função escrita como $y = f(x)$ associa um único número y *(variável dependente)* a cada valor de x *(variável independente)*, conforme GILAT(2008) e DIAS(2018).

Figura: Relação $y = f(x)$



Fonte: GILAT (2008)

- Domínio - faixa de valores de x;
- Imagem - faixa de valores de y;
- Intervalo fechado - [a,b];
- Intervalo aberto - (a,b);

Note que uma função pode conter mais de uma variável independente, como: $T = f(x, y); T_1 = f(x, y, z) \dots$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Limite de uma função

Se uma função $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de um número L à medida que x tende a um número a vindo da direita ou da esquerda, então diz-se que o limite de $f(x)$ tende a L à medida que x tende a a.

Termo geral:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = L$$

Se a função $f(x)$ é definida em (m, n) com $a \subset (m, n)$ e $L \in \mathbb{R} \rightarrow$ para $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que se

$0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Escolhendo um δ arbitrariamente pequeno, faz-se $f(x)$ se aproximar de L.

Vídeos auxiliares para revisão de limite:

1. *Definição formal de Limite*
2. *Limites Laterais*

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Continuidade de uma função

Uma função $f(x)$ é dita contínua em $x = a$ quando:

- $f(a)\ \exists$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)\ \exists$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Uma função é contínua em um intervalo aberto (a, b) se for contínua em cada ponto do intervalo. Uma função contínua em todo eixo real $(-\infty, +\infty)$ é chamada de **contínua em todo o domínio**.

Vídeos auxiliares:

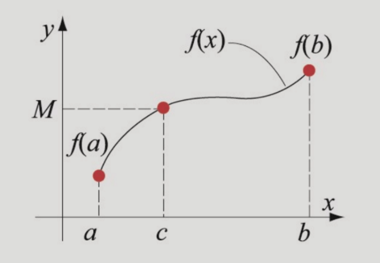
1. *Limites e continuidade*
2. *Limites Infinitos*
3. *Limites no infinito*
4. *Limites trigonométricos*
5. *Limites exponenciais*

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Teorema do valor intermediário

Se uma função $f(x)$ é contínua no intervalo fechado [a,b], então $\exists$ pelo menos um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M$.

Figura: Função contínua



Fonte: GILAT,(2008)

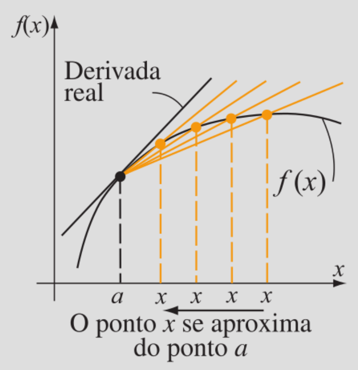
- Perceba que este teorema diz que $\exists$ pelo menos um número c, mas não fornece um método para encontrar seu valor.
- É chamado de *Teorema da Existência* e implica que o gráfico de uma função contínua não pode apresentar um salto vertical.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - A derivada de uma função

A derivada primeira, ou simplesmente derivada, de $y = f(x)$ em um ponto $x = a$ no domínio de f é representada por $\frac{dy}{dx}$, y', $\frac{df}{dx}$ ou $f'(a)$, e definida como:

Figura: Derivada



Fonte: GILAT,(2008)

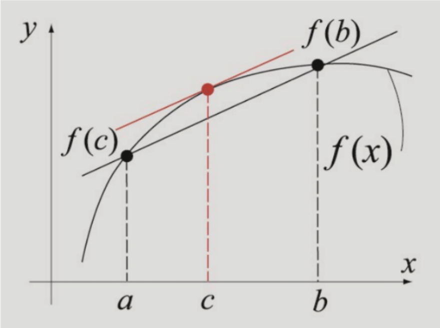
- $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- Em que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é a inclinação das secantes que conectam os pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$;
- Diz-se, portanto, que a derivada é a inclinação da reta tangente à curva naquele ponto;
- Percepção de $\frac{dy}{dx}$
  1. **Inclinação da reta tangente** à curva descrita por $y = f(x)$ em um ponto, útil na obtenção de pontos máximos e mínimos de $f(x)$, pois nesse ponto a inclinação de reta é nula.
  2. **Taxa de variação** da função $y = f(x)$ em relação a x, representa quão rapidamente y varia à medida que x varia.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Teorema do valor médio para derivadas

Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado [a,b] e derivável no intervalo aberto (a,b), então $\exists$ um número c dentro deste último intervalo, tal que:

Figura: Valor médio entre [a,b]



Fonte: GILAT,(2008)

- $$f'(c) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
- Em outras palavras, $\exists$ um ponto c dentro do intervalo tal que o valor da derivada de $f(x)$ apresenta a mesma inclinação da linha secante entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- **Vídeos auxiliares:**
  1. *Taxa de variação*
  2. *Função derivada*
  3. *Regras de derivadas*

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Regras de diferenciação

Regras de diferenciação

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Regras de diferenciação

Sejam as $f(x), g(x)$ funções contínuas $\in \mathbb{R}$. Seguem-se as regras:

1. Se $f(x) = a$, então $f'(x) = 0$.
   $f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$

2. Se $f(x) = a.x$, então $f'(x) = a$.
   $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

3. $[a.f(x)]\ ' = a.f'(x)$.
   $f(x) = 3x; \rightarrow [3.f(x)]' = 9$

4. Se $f(x) = x^a$, então $f'(x) = a.x^{(a-1)}$ (Regra do tombo)
   $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

5. $[f(x) + g(x)]\ ' = f'(x) + g'(x)$ (Derivada da soma)
   $f(x) = x^3; g(x) = 2x; \rightarrow [x^3 + 2x]' = (3x^2 + 2)$

6. $[f(x)g(x)]\ ' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Regra do produto)
   $f(x) = x^3; g(x) = 2x; \rightarrow [x^3.2x]' \rightarrow (3x^2.2x + x^3.2) = 8x^3$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Regras de diferenciação

Sejam as $f(x), g(x)$ funções contínuas $\in \mathbb{R}$.Seguem-se as regras:

1. $[f(x)/g(x)]\ ' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Regra do quociente)
   $f(x) = x^3; g(x) = 2x; \rightarrow [\frac{x^3}{2x}]' \rightarrow (3x^2.2x - x^3.2)/4x^2 = x$
2. Se $f(x)$ é inversível (bijetora), $f^{-1}(p) = g(p)$ e $g(p) = q, f'(q) \neq 0 \rightarrow [g(p)]' = \frac{1}{f'(g(p))}$
   $f(x) = x^3; g(x) = \sqrt[3]{x}; \rightarrow [g(x)]' = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{3(g(x))^2} = \dfrac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Regra da cadeia

Sejam as $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ funções contínuas $\in \mathbb{R}$. Qual o valor de $[f(g(x))]'$ ou $(f\ o\ g)'(x)$?

- A regra da cadeia é utilizada na diferenciação de funções compostas: $(f\ o\ g)'(x) = (f'\ o\ g).g'$ ou $(f'(g(x)).g'(x))$
- Termo geral

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Logo: **(f o g)'(x)** $= [(x^2 + 1)^3]' = (3(x^2 + 1)^2).(2x) = 6x(x^2 + 1)$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Integral de uma função

- Integral **indefinida**
  - Se $g(x)$ é a derivada de $f(x)$, então tem-que $g(x) = \frac{df(x)}{dx}$, portanto, a **integral indefinida** (ou a anti-derivada) de $g(x)$ é $f(x)$, dada por:

$$\int g(x)dx = f(x)$$

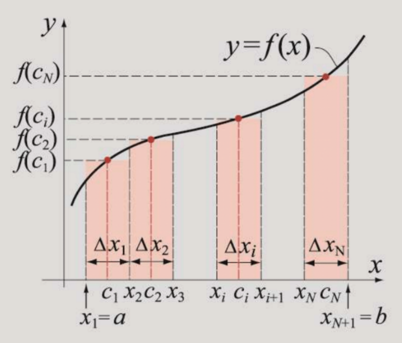
- Integral **definida**
  - Uma **integral definida** é, por sua vez, uma integral em um intervalo fechado [a,b], conhecido como limites de integração.
  - A integral definida é um número, existe em um intervalo fechado $[a, b]$ e pode ser obtida através da soma de Riemann.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Integral de uma função

Uma integral definida $\int_a^b g(x)dx = f(x)$ é definida como limite da Soma de Riemann quando a largura de todos os subintervalos de [a,b] tende a zero.

Figura: Soma de Riemann



Fonte: GILAT,(2008)

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

- Logo a integral é a área sob a curva $y = f(x)$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Teorema fundamental do cálculo (TFC)

- Primeiro TFC
  - Expressa a conexão entre a diferenciação e a integração.
  - Se uma função $f(x)$ é contínua ao longo do intervalo fechado [a,b] e $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

- Segundo TFC
  - Permite que se avalie a derivada de uma integral definida;
  - Se $f(x)$ é uma função contínua ao longo de um intervalo aberto contendo o número a, então, para cada x no intervalo

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(\xi)d\xi\right] = f(x)$$

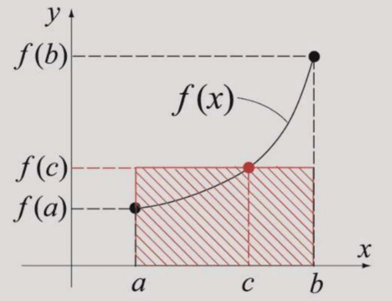
em que, ξ é uma variável que muda representando a coordenada ao longo do intervalo.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Teorema do valor médio para integrais

- Primeiramente, mencionamos que a integral representa a área sob a curva $y = f(x)$.
- Seja a área do retângulo mais baixo definida por $f(a)(b-a)$ e do mais alto por $f(b)(b-a)$.

Figura: Teorema para integrais



Fonte: GILAT,(2008)

- O Teorema do valor médio para integrais diz que em algum lugar entre estes dois retângulos, existe um retângulo $f(c)(b-a)$ cuja área é igual à área sob a curva.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Valor médio de uma função

- O valor de $f(c)$ que aparece no *teorema do valor médio* para integrais, é representado por $\langle f \rangle$, tal que:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Cálculo - Exercícios de revisão

- Aplique o teorema do valor intermediário para mostrar:
  - $f(x) = -x^4 + 2x + 4$ tem uma raiz no intervalo [1, 2].
  - $g(x) = cos(x) - x^2$ tem uma raiz no intervalo $[0, \pi/2]$.

Fundamentos Matemáticos

Lista de vídeos auxiliares para revisão

(α) Playlist Cálculo I - https://goo.gl/Wkn6SR

(β) Playlist Cálculo II - https://goo.gl/Q2P5Aj

(γ) Playlist Cálculo III - https://goo.gl/XXMCkS

(δ) Playlist Cálculo IV - https://goo.gl/9NhM93

Opção

(ε) Playlist Cálculo I - http://tiny.cc/qcbksz

Organização

1 Conceitos de Cálculo
  - Conceitos
  - Diferenciação
  - Antiderivadas

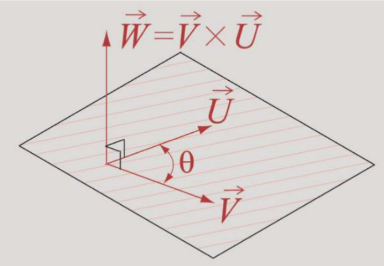
2 Algebra Linear e EDO
  - Conceitos
  - Operações
  - Matrizes
  - Equações diferenciais

Fundamentos Matemáticos

Objetivo da aula

- Estudar o conceito de Álgebra Linear
- Revisar conceitos de vetores, espaço, representações n-dimensionais, operações com vetores, matrizes e suas propriedades;
- Revisar estruturas de matrizes com EDO

Figura: Vetores no espaço 3D



Fonte: GILAT,(2008)

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Vetores

- São grandezas matemáticas ou físicas que possuem módulo e direção.
- Já escalares apresentam apenas o módulo.

Exemplos:

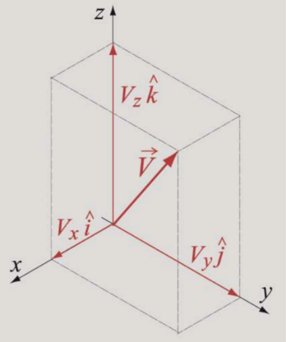
- **Vetores** - Força, momento e aceleração
- **Escalares** - Massa, comprimento e volume

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Vetores

Uma das maneiras usadas para representar uma grandeza vetorial é por meio do uso de uma seta curta orientada à direita e posta sobre uma letra qualquer, como em $\overrightarrow{\mathbf{V}}$.

Figura: Representação gráfica



Fonte: GILAT,(2008)

- $\overrightarrow{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$
  em que, $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ são os vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente.

- São definidos por linhas ou colunas.

- $\overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} V_x V_y V_z \end{bmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Vetores

- Módulo de um vetor (comprimento no espaço cartesiano):

$$|\overrightarrow{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

- Direção de um vetor (vetor unitário na direção do vetor):

$$\hat{V} = \frac{\overrightarrow{V}}{|\overrightarrow{V}|} = \frac{V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

em que,
$l = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}}$, $m = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}}$, $n = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}}$

os quais são os cossenos direcionais e correspondem ao cosseno dos ângulos entre o vetor e os eixos do sistema de coordenadas, x, y e z, respectivamente.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Operações com vetores

Considerações iniciais:

- Primeiro, dois vetores são iguais se apresentarem a mesma quantidade de linhas ou colunas, e se todos os seus elementos em posições equivalentes forem iguais.
- Algumas operações matemáticas são definidas por vetores, outras não.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Transposta de vetores

A **transposta** de um vetor transforma um vetor linha ($1\ x\ n$) em um vetor coluna ($n\ x\ 1$), e vice-versa.

- $\overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} V_1, V_2, \ldots, V_n \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{Transposta} \quad \overrightarrow{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$
- $\overrightarrow{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{Transposta} \quad \overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} V_1, V_2, \ldots, V_n \end{bmatrix}$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Soma e subtração de vetores

Dois vetores podem ser somados ou subtraídos se forem do mesmo tipo e do mesmo tamanho.

Seja: $\vec{V} = \left[V_1, \ldots, V_n\right]$ e $\vec{U} = \left[U_1, \ldots, U_n\right]$

$$\vec{V} + \vec{U} = \left[V_1 + U_1, V_2 + U_2, \ldots, V_n + U_n\right] \text{ (Soma)}$$

$$\vec{V} - \vec{U} = \left[V_1 - U_1, V_2 - U_2, \ldots, V_n - U_n\right] \text{ (Subtração)}$$

(*) Note ser elemento-a-elemento!

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Multiplicação de um vetor por um escalar

Cada um dos elementos do vetor deve ser multiplicado pelo escalar.

Seja: $\overrightarrow{V} = \left[V_1, \ldots, V_n\right]$ e o escalar α. Tem-se que o produto daquele por este vale:

$$\alpha.\overrightarrow{V} = \left[\alpha.V_1, \alpha.V_2, \ldots, \alpha.V_n\right]$$

A mesma propriedade se aplica quando se tem um vetor coluna.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Multiplicação de dois vetores

Produto interno ou escalar de dois vetores

Sejam os vetores $\overrightarrow{V} = \left[V_1, \ldots, V_n\right]$ e $\overrightarrow{U} = \left[U_1, \ldots, U_n\right]$. O produto escalar entre eles vale:

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{U} = V_1.U_1 + V_2.U_2 + \cdots + V_n.U_n$$

Intepretação geométrica:

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{U} = |\overrightarrow{V}|.|\overrightarrow{U}|.cos(\theta)$$

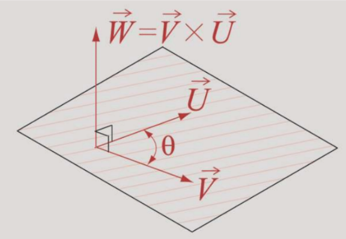
em que, $|\overrightarrow{V}|$ e $|\overrightarrow{U}|$ são os módulos dos vetores e θ é o ângulo entre os dois vetores.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Multiplicação de dois vetores

- Produto vetorial ou cruzado (resulta em um outro vetor perpendicular aos dois vetores do produto)

Figura: Produto vetorial



Fonte: GILAT,(2008)

Sejam os vetores:

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$$

$$\vec{U} = U_x\hat{i} + U_y\hat{j} + U_z\hat{k}$$

O produto vetorial entre eles vale:

$$\vec{W} = \vec{V} \otimes \vec{U} = (V_yU_z - V_zU_Y)\hat{i} + (V_zU_x - V_xU_z)\hat{j} + (V_xU_y - V_yU_x)\hat{k}$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Multiplicação de dois vetores

- Interpretação geométrica – produto vetorial

$$|\overrightarrow{W}| = |\overrightarrow{V}||\overrightarrow{U}|.sen(\theta)$$

em que $|\overrightarrow{V}|$ e $|\overrightarrow{U}|$ são os módulos dos vetores e (θ) é o ângulo formado entre estes.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Dependência e independência linear entre vetores

- Dois ou mais vetores são Linearmente Independentes(LI) se

$$\alpha_1 \overrightarrow{V_1} + \alpha_2 \overrightarrow{V_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{V_n} = 0$$

e, portanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Caso contrário, serão Linearmente Dependentes (LD).

Exemplo: Sejam $\overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{W} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

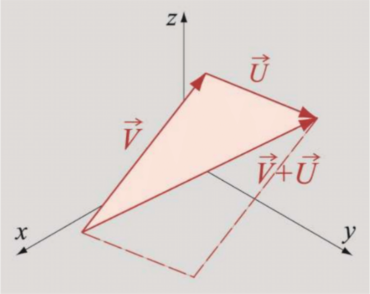
Apenas $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{U}$ são LI, pois não existe uma combinação linear entre eles.
Entretanto, como $2.\overrightarrow{V} + 3.\overrightarrow{U} - \overrightarrow{W} = 0$,$\overrightarrow{W}$ é LD, pois existe uma combinação linear entre os vetores. Neste caso, tem-se $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$ e $\alpha_3 = -1$.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Desigualdade triangular

- A soma de dois vetores pode ser representada por um paralelograma.

Figura: Desigualdade triangular



Fonte: GILAT,(2008)

- A soma do comprimento de dois lados de um triângulo deve ser sempre maior ou igual ao comprimento do terceiro lado.

$$|\vec{V}+\vec{U}| \leq |\vec{V}|+|\vec{U}|$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Matrizes

- Uma matriz é um arranjo retangular de números.
- Duas matrizes são iguais se tiverem o mesmo tamanho e se todos os seus elementos localizados nas mesmas posições forem iguais.
- O tamanho de uma matriz se refere ao número de linhas e colunas.

Notação:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Operações com Matrizes

- Multiplicação por um escalar
  Se $[a] = [a_{ij}]$ é uma matriz e α um escalar, $\alpha\ [a] = [\alpha a_{ij}]$

- Soma e subtração de duas matrizes
  Duas matrizes podem ser somadas ou subtraídas se forem do mesmo tipo e tiverem a mesma quantidade de elementos.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Operações com Matrizes

- Transposta de uma matriz: transforma suas linhas em colunas e vice-versa.

$$[a]^T = [a_{ij}^T] = [a_{ji}]$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -4 \\ 7 & -2 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{bmatrix}$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Operações com Matrizes

- Multiplicação de matrizes

* Perceba que os elementos internos da multiplicação(q) são iguais!

$$[c]_{mn} = [a]_{m\,\boxed{q}}[b]_{\boxed{q}\,n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (2.4 + -1. - 5) & (2.9 + -1.2) & (2.1 + -1.4) & (2. - 30 + -1.6) \\ (8.4 + 3. - 5) & (8.9 + 3.2) & (8.1 + 3.4) & (8. - 3 + 3.6) \\ (63.4 + 7. - 5) & (6.9 + 7.2) & (6.1 + 7.4) & (6. - 3 + 7.6) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 16 & -2 & -12 \\ 17 & 78 & 20 & -6 \\ -11 & 68 & 34 & 24 \end{bmatrix}$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Matrizes Especiais

- **Matriz quadrada**: apresenta a mesma quantidade de linhas e colunas;
- **Matriz diagonal**: é um tipo de matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são diferentes de zero e o restante são zeros;
- **Matriz triangular** superior: tipo de matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos e representada por $[U]$;
- **Matriz triangular** inferior: tipo de matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são nulos e representada por $[L]$.

(*) Veja que o termo faz referência à parte não nula da matriz.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Matrizes Especiais

- **Matriz identidade**: tipo de matriz diagonal em que todos os termos da diagonal principal são iguais a unidade;
- **Matriz zero**: é uma matriz em que todos os elementos são nulos;
- **Matriz simétrica**: é uma matriz quadrada em que $[a]^T = [a]$;
- **Matriz inversa**: equivale a uma divisão entre matrizes.

$$[a].[a]^{-1} = [a]^{-1}.[a] = [I]$$

, em que I é a matriz identidade.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Operações com Matrizes

Propriedades:

- $[a] \pm [b] = [b] \pm [a]$
- $([a] \pm [b]) \pm [c] = [a] \pm ([b] \pm [c])$
- $\alpha([a] \pm [b]) = \alpha[a] \pm \alpha[b]$, em que α é escalar
- $(\alpha \pm \beta)([a]) = \alpha[a] \pm \beta[a]$, em que α e β são escalares

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Operações com Matrizes

Propriedades:

- Se $[a]$ e $[b]$ são matrizes quadradas, então $[a].[b] \neq [b].[a]$;
- $([a] \pm [b]).[c] = [a].[c] \pm [b].[c]$, sendo que a ordem influencia a multiplicação;
- $\alpha([a].[b]) = (\alpha[a]).[b] = [a].\alpha[b]$, em que α é um escalar;
- $([a]^T)^T = [a]$;
- $([a]^{-1})^{-1} = [a]$;
- Se $\exists$ $([a].[b]) \rightarrow ([a].[b])^T = [b]^T.[a]^T$
- Se [a] e [b] são quadradas, de mesmo tamanho e possuem inversa, então $([a].[b])^{-1} = [b]^{-1}.[a]^{-1}$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Determinante de uma Matriz

- É definido apenas para matrizes quadradas e sua solução fornece informações úteis sobre a solução de um conjunto de equações simultâneas.

$$\boxed{\mathrm{det(A)} = |\mathrm{A}|}$$

- $[A] = [a_{11}] \rightarrow det(A) = a_{11}$
- $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$
- $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = \begin{matrix} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ -a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{13}.a_{23}.a_{32} \end{matrix}$

Fundamentos Matemáticos

Seja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{vmatrix} \rightarrow [A][X] = [B]$$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Regra de Cramer e a solução de sistemas de equações lineares simultâneas

Solução pela **Regra de Cramer** Vídeo: Sarrus Cramer

Perceba, a partir do produto matricial $[A][X] = [B]$, que a coluna da variável desejada(x_i) é substituída pela coluna de termos independentes.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \dots$$

$$x_1 = \frac{det(x_1)}{det(A)}; x_2 = \frac{det(x_2)}{det(A)}; \dots$$

Nota: $\exists\ \mathbf{X} \Leftrightarrow det(A) \neq 0 \rightarrow [A]$ é $L.I$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Álgebra Linear - Norma de uma matriz

- Equivale a um módulo de um vetor.
- Como $|A|$ define o módulo de um vetor, tem-se que $||A||$ é a norma de uma matriz.
- Propriedades
  - $||\ [A]\ || \geq 0$ e $||\ [A]\ || = 0 \Leftrightarrow [A] = 0$
  - $\forall\alpha,\ ||\ \alpha\ .[A]\ || = |\ \alpha|.||[A]\ ||$, em que α é um escalar
  - $||\ [A] + [B]\ || \leq ||\ [A]\ || + ||\ [B]\ ||$ (desigualdade triangular)

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Equações Diferenciais - EDO

- Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
- Apresentam uma variável dependente y, uma independente x e derivadas ordinárias da variável dependente.
- Podem ser:
  - **Lineares** - em que a dependência em y e em suas derivadas é linear;
    Exemplo: $\dfrac{dy}{dx} - 10x = 0$
  - **Não-Lineares** - em que os coeficientes são funções de y ou de suas derivadas, o lado direito $r(x)$, em (1), for uma função não-linear de y, ou se o termo linear $a_1(x)y$ for trocado por uma função não-linear de y.
    Exemplo: $y\dfrac{d^2y}{dt^2} + sen(y) = 4$

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Equações Diferenciais - EDO

Forma padrão(canônica) de uma EDO:

$$a_{n+1}(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_n(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_3(x)\frac{d^3 y}{dx^2} + a_2(x)\frac{dy}{dxn + a_1(x)y} = r(x) \tag{1}$$

- Uma EDO linear pode ser escrita na forma padronizada, conforme (1);
  - Note que, em (1), todos os coeficiente $a(x)$ são funções apenas da variável independente x.

- Escrita na forma padronizada, conforme Eq(1), uma EDO é dita **homogênea** quando $r(x) = 0$, ou seja, o lado direito da equação é zero e, não-homogênea quando $r(x) \neq 0$.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Equações Diferenciais - EDO

- A ordem de uma EDO é determinada pela ordem da **maior derivada** presente na equação;
- Quando a variável independente x é a posição e as restrições são especificadas em duas diferentes posições, elas são chamadas de **condições de contorno**;
- Quando a variável independente x é o tempo e as restrições são especificadas em um único instante, elas são chamadas de **condições iniciais**.

Fundamentos Matemáticos

Conceitos de Equações Diferenciais com mais de uma variável independente

- Uma função pode ter mais de uma variável independente;
- A função associa um único número z (variável dependente) a cada combinação de valores de x e y (variáveis independentes), como: $z = f(x, y) = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$
- Para uma função $z = f(x, y)$, a derivada parcial de f em relação as variáveis é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

em que $f_x(f_y)$ é determinada com o cálculo da derivada da função em relação a $x(y)$ assumindo que $y(x)$ seja uma constante.

Fundamentos Matemáticos

Matriz Jacobiana

- Uma função (F), com domínio e imagem no espaço euclidiano $m\ x\ n$ dimensional, definida por um vetor de m componentes tal que cada componente é uma função (f_i) n-dimensional pode ter as derivadas parciais dessas funções organizadas numa matriz m x n, chamada de Matriz Jacobiana e definida como:

$$\mathbf{F}(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- O Jacobiano, definido como **determinante** da Matriz Jacobiana, é uma grandeza que aparece na solução de sistemas de equações não-lineares simultâneas e tem aplicabilidade na mudança de variáveis em integrais múltiplas.

$$[\mathbf{J}] = det(\mathbf{F}(f_1, f_2, \ldots, f_m))$$

Fundamentos Matemáticos

Série de Taylor

- Sendo $f(x)$ uma função derivável $(n+1)$ vezes em um intervalo $[a,b]$ que contém um ponto $x = x_0$, para cada z $\in$ $[a,b]$ $\exists$ $x = \xi$ entre x e x_0 tal que:

  $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\bigg|_{x=x_0} + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}\bigg|_{x=x_0} +$$

  $R_n(x)$,

  em que o resíduo R_n é dado por $R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\bigg|_{x=\xi}$

- A expansão de uma função em série de Taylor é uma maneira de encontrar o valor dessa função em um ponto próximo a algum ponto onde se conhece o valor da função. A função é representada pela soma de termos de uma série convergente.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Exercícios

- **Veja a lista de exercícios na web**
- **Veja a lista de códigos em:** `https://github.com/jonathacosta/NM`