Métodos Numéricos

Prof. Dr. Jonatha Costa

2024

Organização

MN aplicados à Engenharia

- Apresentar conteúdo de Integração Numérica
    - Método do retângulo, ponto central e trapézio
    - Método 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson

MN aplicados à Engenharia

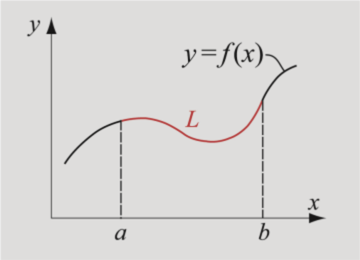
Exemplo de uso

(a) Comprimento de uma curva: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

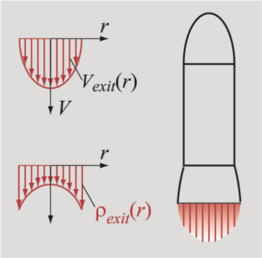
(b) Impulsão de um foguete: $T = \int_0^R 2\pi\rho(r)V_{saida}^2(r)dr$

Figura: Aplicação de integração numérica

(a) Comprimento de curva



(b) Impulsão de foguete



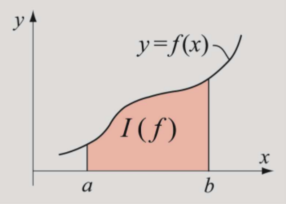
Fonte: GILAT,(2008)

MN aplicados à Engenharia

Introdução

- Seja f(x) uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então existe a função primitiva $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.
- O valor da integral definida de $f(x)$ pode ser calculado usando (Fórmula de Newton-Leibniz):

Figura: $Integral\ definida(antiderivada)$



Fonte: GILAT,(2008)

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde $f(x)$, chamada de integrando, é função da variável independente x, enquanto a e b são os limites de integração. Graficamente, o valor da integral corresponde à área sombreada sob a curva de $f(x)$ entre a e b.

MN aplicados à Engenharia

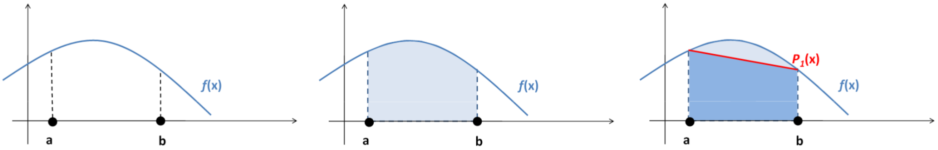
Introdução

- A função $f(x)$ é aproximada por uma função $p(x)$, mais simples cuja primitiva é mais fácil de se obter.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

Figura: Delimitação de intervalo e área entre $[a, b]$

(a) Intervalo (b) Área do intervalo (c) Limitação em $p_1(x)$



Fonte: DIAS,(2019)

I $\approx$ área delimitada por $P_1(x)$ no intervalo $[a, b]$

MN aplicados à Engenharia

Introdução

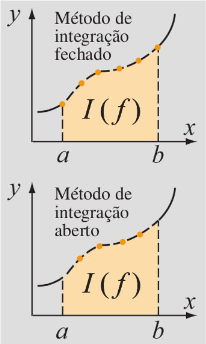
- Os métodos de integração **numérica** aproximam valores de integrais definidas.
- A integração numérica é útil quando:
  - * Não se conhece a função $f(x)$. Tem-se apenas uma tabela de valores para f.
  - * f é conhecida, mas é muito complexa, o que dificulta a determinação da primitiva.
  - A ideia básica é substituir $f(x)$ por um polinômio que a aproxime razoavelmente no intervalo $[a, b]$.
  - Assim o problema se resume à integração de polinômios, o que é trivial de realizar.

MN aplicados à Engenharia

Introdução Existem vários métodos disponíveis para o cálculo numérico de integrais. Em cada um desses métodos, uma fórmula é deduzida para calcular o valor aproximado de uma integral a partir dos pontos fechado discretos do integrando.

- Métodos fechados - os pontos finais do intervalo (e o integrando) são usados na fórmula que estima o valor da integral.
  - Método trapezoidal
  - Método de Simpson
- Métodos abertos - o intervalo de integração se estende além do limite especificado pelos pontos finais
  - Método do ponto central

Figura: Métodos de integração



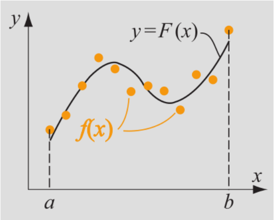
Fonte: GILAT,(2008)

MN aplicados à Engenharia

Fórmula de Newton-Cotes

- Há vários métodos que podem ser usados para calcular o valor de uma integral a partir dos pontos discretos do integrando. Dentre estes, as fórmulas de Newton-Cotes são as mais comumente empregadas.
  - O valor do integrando é estimado entre os pontos discretos empregando-se uma função de fácil integração, analítica ou interpolada a partir de pontos discretos do integrando original.
- Seja $f(x)$ uma função definida por um conjunto discreto de pontos é possível obter uma curva $F(x)$ que melhor se ajuste a estes pontos.

Figura: Fórmula de Newton-Cotes



Fonte: GILAT,(2008)

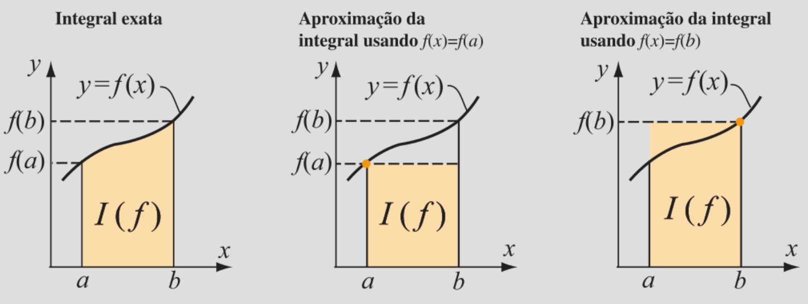
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b F(x)dx$$

MN aplicados à Engenharia

Método do Retângulo Simples

- Consiste em assumir que $f(x)$ é uma constante dentro do intervalo $[a, b]$.

Figura: Método do Retângulo



Fonte: GILAT,(2008)

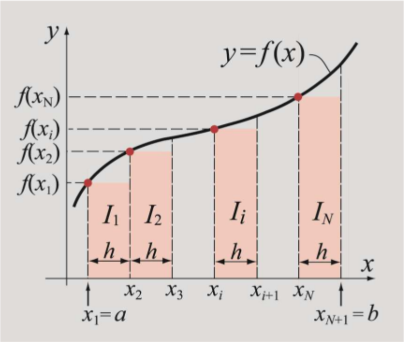
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) \approx f(b)(b-a)$$

MN aplicados à Engenharia

Método do Retângulo Composto

- Visa reduzir o erro apresentado no método do retângulo, criando N subintervalos.

Figura: Método do Retângulo Composto



Fonte: GILAT,(2008)

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

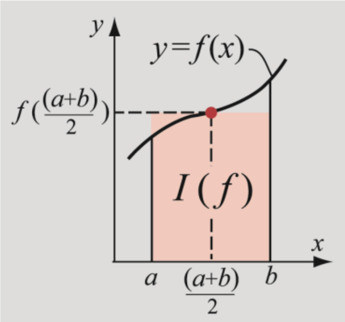
(*) Quando os subintervalos têm a mesma largura h, doutro modo os várias intervalos permanecem desagrupados.

MN aplicados à Engenharia

Método do Ponto Central

- É uma melhoria em relação ao Método do Retângulo, onde ao invés de aproximar o integrando usando os valores da função em $x = a$ ou $x = b$, utiliza-se o valor do integrando no meio do intervalo $x = \frac{(a+b)}{2}$.

Figura: Método do Ponto Central



Fonte: GILAT,(2008)

$$I(f) = \begin{cases} \int_a^b f(x)dx = \\ \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx = \\ f(\frac{a+b}{2}).(b-a) \end{cases}$$

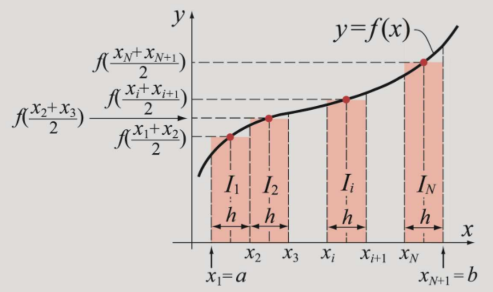
(*) Este método é mais preciso do que o método do retângulo simples porque, para uma função crescendo (conforme figura), as regiões da área abaixo da curva que são ignoradas podem ser compensadas de forma aproximada pelas regiões incluídas acima da curva.

MN aplicados à Engenharia

Método do Ponto Central Composto

- É uma melhoria em relação ao Método do Ponto Central.

Figura: Método do Ponto Central Composto



Fonte: GILAT,(2008)

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx =$$

$$I(f) = h\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_i + x_{(i+1)}}{2}\right)$$

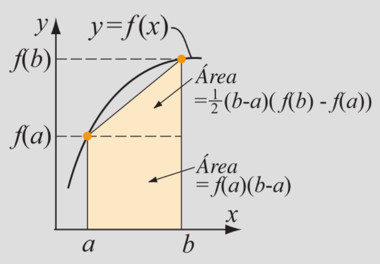
A integral em cada subintervalo é calculada usando o método do ponto central, e o valor total da integral é obtido com a soma dos valores das integrais obtidos nos subintervalos.

MN aplicados à Engenharia

Método do Trapézio Simples

- A ideia da regra do trapézio é aproximar a função $f(x)$ por um polinômio de 1 ordem (reta).
- Nessa aproximação a integral da função $f(x)$ pode ser aproximada pela área de um trapézio.

Figura: Método simples



Fonte: GILAT,(2008)

- O uso do polinômio interpolador de Newton entre os pontos $x = a$ e $x = b$ resulta em:

* $f(x) \approx f(a) + (x-a)f[a,b] = f(a) + (x-a)\dfrac{[f(b)-f(a)]}{b-a}$

- Realizando a integração analítica:
  - $I(f) \approx \displaystyle\int_a^b \left(f(a) + (x-a)\frac{[f(b)-f(a)]}{b-a}\right)dx$
  - $I(f) \approx f(a)(b-a) + \dfrac{1}{2}[f(b)-f(a)](b-a)$
- Simplificando : $I(f) \approx \dfrac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a)$

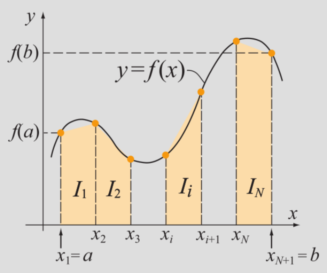
Neste método, a área abaixo da curva f(x) é aproximada pela área de um trapézio (retângulo + triângulo)

MN aplicados à Engenharia

Método do Trapézio Composto

- A integral ao longo do intervalo $[a, b]$ pode ser avaliada de forma mais precisa com a **subdivisão** do intervalo, a avaliação da integral em cada um dos subintervalos (com o método trapezoidal) e a **soma** dos resultados.
- O primeiro ponto é $x_1 = a$ e o último ponto é $x_{N+1} = b$ (são necessários $N + 1$ pontos para definir N intervalos).

Figura: Método composto



Fonte: GILAT,(2008)

- A aplicação do método trapezoidal em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ resulta em:
  * $I_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{[f(x_i) + f(x_{i+1})]}{2}(x_{i+1} - x_i)$
- Substituindo a aproximação trapezoidal:
  - $I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}[f(x_i) + f(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i)$
- Simplificando : $I(f) \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}[\ f(x_{i+1}) + f(x_i)\ ]$
- Programação: $I(f) \approx \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]+h\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$, caso h tenha larguras idênticas.

MN aplicados à Engenharia

Exemplos adaptado de gilat- Distância percorrida por um avião em desaceleração

Um Boeing de massa $m = 97000$ kg aterrissa a uma velocidade de $93m/s$ e liga os seus reversos em $t = 0$. A força F aplicada no avião à medida que ele reduz a sua velocidade é dada por $F = -5v^2 - 570000$, onde v é a velocidade do avião. Usando a segunda lei de Newton do movimento e da dinâmica dos fluidos, a relação entre a velocidade e a posição x do avião pode ser escrita como: $mv\frac{dv}{dx} = -5v^2 - 570000$, onde x é a distância medida a partir da localização do jato em $t = 0$. Determine a distância percorrida pelo avião antes que sua velocidade se reduza a $40m/s$ usando o *método trapezoidal composto*.

- **Solução analítica:**
  - Isolando dx tem-se: $\dfrac{97000vdv}{(-5v^2 - 570000)} = dx$
  - Integrando em ambos os lados tem-se:
    $$\int_0^x dx = -\int_{93}^{40} \frac{97000v}{5v^2 + 570000}dv = \int_{40}^{93} \frac{97000v}{5v^2 + 570000}dv$$
  - Resolvendo a integral tem-se: $z = 5u^2 + 570000$ e, portanto, $x = 574,1494m$

MN aplicados à Engenharia

Exemplo adaptado de Gilat,(2008) : Distância percorrida por um avião em desaceleração

Figura: Solução computacional

```
clc; clear all;
%**************************
f= @(v)(97000*v/(5*v^2+570000)); % função
a= 40;                           %limite inferior
b= 93;                           %limite superior
Ns=[10 100 1000];                %Intevalos

for(j=1:3)
  N=Ns(j);
  %**************************
  h=(b-a)/N;                  % largura dos intervalos
  x=a:h:b;                    % vetor x de coordenadas dos subintervalos
  for(i=1:N+1)
    F(i)=f(x(i));             % vetor f(x) de imagem das coordenadas
  end
  %**************************
   I(j)=h*(F(1)+F(N+1))/2 + h*sum(F(2:N)); % Método trapezoidal
end
%**************************
g=int(sym(f));clc;            % Solução analítica
dg=matlabFunction(g);         % Def. antideriv. de f.
sx=dg(b)-dg(a)
%**************************
for(k=1:length(I))            % Erros
Er(k) = abs( (I(k)-sx)*100/sx );
end
%**************************
sx =  574.15                      % Solução analítica
I = 574.09   574.15   574.15      % Solução m.trapezio N=[10 100 1000]
Er = 1.1134e-02   1.1134e-04   1.1134e-06 % Erros em percentual
```

Fonte: Autor,(2020)

MN aplicados à Engenharia

Exemplo adaptado de gilat- Distância percorrida por um avião em desaceleração
Resultado da integral por método "analítico": 574.14941316747

Tabela: Resultado dos métodos

Método	**Resultado da integral**	**Erro**(%)
Retângulo $f(x) = f(a)$	355.778546712803	38.0338046937918
Retângulo $f(x) = f(b)$	779.644350952719	35.7911953008144
Ponto central	577.385584212426	0.563646146932926
Trapézio simples	567.711448832761	1.1213046964887
Retângulo composto	572.02944491021	0.369236336159371
Ponto central composto	574.149732785691	0.0000556681264015 56
Trapézio composto	574.148773931409	0.000111336186410645

Fonte: Autor,(2020)

Métodos compostos usando N=100.

MN aplicados à Engenharia

Exemplo adaptado de gilat- Distância percorrida por um avião em desaceleração

Figura: Scritp comparativo dos métodos

```
clc; clear all;
%****************************
f=@(x)(97000*x/(5*x.^2+570000)); a=40;b=93;  % Função e limites
for(j=1:7)                                  % 7 métodos
   N=100;h=(b-a)/N;x=a:h:b;                 % Intervalos, largura e subintervalos
   soma=0;                                  % Acumulador de soma
   if (j==1) I(j)=f(a)*(b-a);end            % RETÂNGULO SIMPLES f(x)=f(a)
  if (j==2) I(j)=f(b)*(b-a);end             % RETÂNGULO SIMPLES f(x)=f(b)
  if (j==3) I(j)=f((a+b)/2)*(b-a);end       % PONTO CENTRAL     f(x)=f((a+b)/2)
  if (j==4) I(j)=((f(a)+f(b))/2)*(b-a);end % TRAPÉZIO
  if (j==5)                                 % RETÂNGULO COMPOSTO
    for(i=1:N) soma=soma+f(x(i))*h; end;I(j)=soma; end
  if(j==6)                                  % PONTO CENTRAL COMPOSTO
    for(i=1:N) soma=soma+f((x(i)+ x(i+1))/2)*h; end; I(j)=soma; end
  if(j==7) ;                                % TRAPÉZIO COMPOSTO
  for(i=1:N) soma=soma + 0.5*(f(x(i))+f(x(i+1)))*(x(i+1)-x(i)); end;
    I(j)=soma; end
end

g=int(sym(f));  dg=matlabFunction(g);   % SOLUÇÃO ANALÍTICA - antideriv. de f.
sx=dg(b)-dg(a);
for(k=1:length(I)) Er(k) = abs( (I(k)-sx)*100/sx ); end;  % Erros
clc;
fprintf('Valor da solução analítica %f.\n',sx)      % Resultados
fprintf('\t\t  Métodos    Valores dos métodos \t Erros\n')
Val_Er=[(1:7)' I' Er']
```

Fonte: Autor,(2020)

MN aplicados à Engenharia

Métodos de Simpson

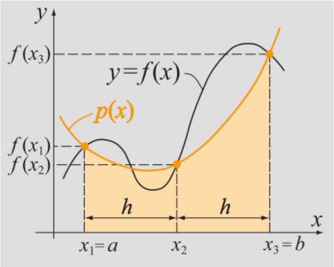
- O método trapezoidal aproxima o integrando por uma linha reta. Em tese, uma melhor aproximação pode ser obtida com a representação do integrando como uma função não-linear de fácil integração.
- Uma classe de métodos com essa característica (regras ou métodos de Simpson) usa para aproximar o integrando polinômios:
  - quadráticos (método de Simpson 1/3)
  - cúbicos (método de Simpson 3/8)

MN aplicados à Engenharia

Método de 1/3 de Simpson Simples

- Um polinômio quadrático (de segunda ordem) é usado para aproximar o integrando
- Os coeficientes do polinômio quadrático são determinados a partir de três pontos: $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$ e $x_3 = b$ tal que $p(x) = \alpha + \beta(x - x_1) + \gamma(x - x_1)(x - x_2)$ onde α,β e γ são constantes desconhecidas tais que o polinômio deve passar por todos os pontos, $p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2)$ e $p(x_3) = f(x_3)$.
- O que resultado em: $\alpha = f(x_1)$,$\beta = [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)$ e $\gamma = \dfrac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{2(h)^2}$, onde $h = (b-a)/2$
- E, portanto:
$$I = \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_3} p(x)dx =$$
$$I = \frac{h}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

Figura: Simpson 1/3



Fonte: GILAT,(2008)

* Logo:
$$I = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

O nome 1/3 no método vem do fator de 1/3 multiplicando a expressão entre colchetes.

MN aplicados à Engenharia

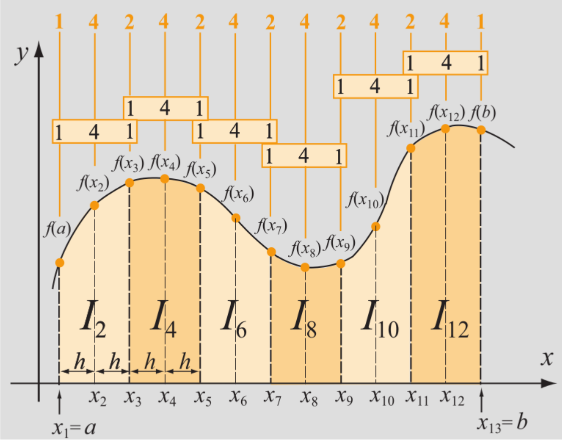
Método de 1/3 de Simpson Composto

- No método de Simpson 1/3 composto divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de largura h, onde $h = (b - a)/N$
- O método de Simpson 1/3 é aplicado em dois subintervalos adjacentes de cada vez, por serem necessários 3 pontos para definir um polinômio quadrático. Portanto, o intervalo total deve ser dividido em um *número par de subintervalos.*
- A integral ao longo de 2 intervalos adjacentes $[x_{i-1}, x_i]$ e $[x_i, x_{i+1}]$ fica definida como: $I_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$, onde $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$
- Agrupados em termos similares resulta em:
  $I(f) \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=2,4,6}^{N} f(x_i) + 2\sum_{j=3,5,7}^{N-1} f(x_j) + f(b)\right]$, onde $h = (b - a)/N$
- Condições necessárias
  - Os subintervalos devem ser **igualmente** espaçados.
  - O número de subintervalos no domínio $[a, b]$ deve ser um número **par**

MN aplicados à Engenharia

Método de 1/3 de Simpson Composto

Figura: Soma ponderada - Simpson 1/3 composto



Fonte: GILAT,(2008)

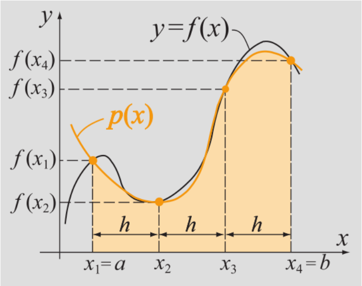
- $I(f) \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=2,4,6}^{N} f(x_i) + 2\sum_{j=3,5,7}^{N-1} f(x_j) + f(b)\right]$
- A equação é uma soma ponderada da função nos pontos que definem os subintervalos tal que o peso é 4 nos pontos x_i **pares** e 2 x_i nos **ímpares** (exceto o primeiro e o último ponto).
- Estes são os pontos centrais de cada *par de subintervalos adjacentes*.
- Cada ponto é usado uma vez como o ponto final à direita de um par de subintervalos, e uma vez como o ponto final à esquerda do par de subintervalos seguinte.

MN aplicados à Engenharia

Método de 3/8 de Simpson

- Um polinômio cúbico (de terceira ordem) é usado para aproximar o integrando
- Os coeficientes do polinômio quadrático são determinados a partir dos pontos: $x_1 = a$,$x_4 = b$ e dois pontos x_2 e x_3 que dividem o intervalo em três seções iguais, tal que: $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, onde c_3 , c_2 , c_1 e c_0 são constantes avaliadas a partir da condição que diz que passa pelos pontos $p(x_1) = f(x_1)$,$p(x_2) = f(x_2)$, $p(x_3) = f(x_3)$ e $p(x_4) = f(x_4)$.
- Resultando em:
  $$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{3}{8}h[f(a)+3f(x_2)+3f(x_3)+f(b)]$$
- O valor da integral é mostrado como a **área sombreada** entre a curva $p(x)$ e o eixo x. Note que a equação é uma soma ponderada dos valores de $f(x)$ nos dois pontos finais $x_1 = a$ e $x_4 = b$, e nos pontos x_2 e x_3 que dividem o intervalo em três seções de largura(h) iguais.

Figura: Simpson 3/8



Fonte: GILAT,(2008)

* Logo:
  $$I = \frac{3}{8}h[f(a) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(b)]$$

O nome 3/8 no método vem do fator de 3/8 multiplicando a expressão entre colchetes.

MN aplicados à Engenharia

Método de 3/8 de Simpson Composto

- No método de Simpson 3/8 composto divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de largura h, em que $h = (b - a)/N$
- Sendo necessários 4 pontos para definir um **polinômio cúbico**, o método é aplicado em **três** subintervalos adjacentes de cada vez e, portanto, o número de subintervalos dever ser divisível por 3.
- A integral ao longo de **3 intervalos** adjacentes para 4 grupos fica definida como: $I(f) \approx \frac{3h}{8}(f(a) + 3[f(x_2) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_9) + f(x_{11}) + f(x_{12})] + 2([f(x_4) + f(x_7) + f(x_{10})] + f(b))$
- No caso geral que envolve a divisão do domínio $[a, b]$ em N subintervalos (em que N é pelo menos 6 e divisível por 3), resulta em:

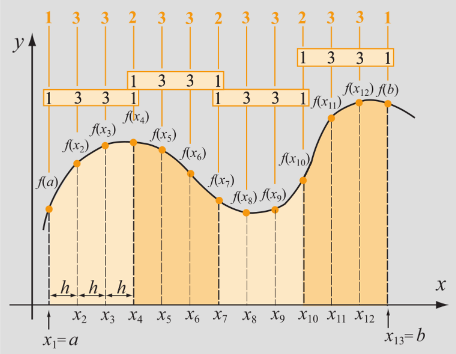
$$I(f) \approx \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3\sum_{i=2,5,8}^{N-1}[f(x_i) + f(x_{i+1}]) + 2\sum_{j=4,7,10}^{N-2} f(x_j) + f(b)\right],$$

  em que $h = (b - a)/N$
- Condições necessárias
  - Os subintervalos devem ser **igualmente** espaçados.
  - O número de subintervalos no domínio $[a, b]$ deve ser um número divisível por 3.

MN aplicados à Engenharia

Método de 3/8 de Simpson Composto

Figura: Soma ponderada - Simpson 3/8 composto



Fonte: GILAT,(2008)

- Uma combinação dos métodos de Simpson pode ser usada para realizar a integração quando houver um número ímpar qualquer de subintervalos.
- Isso é feito usando o método de Simpson 3/8 nos três primeiros $([a, x_2], [x_2, x_3] e [x_3, x_4])$ ou nos três últimos subintervalos $([x_{N-2}, x_{N-1}], [x_{N-1}, x_N]$ e $[x_N, x_b])$, aplicando-se o método de Simpson 1/3 no número restante (par) de subintervalos.

MN aplicados à Engenharia

Exemplo adaptado de gilat- Distância percorrida por um avião em desaceleração
Resultado da integral por método "analítico": 574.14941316747

Tabela: Resultado dos métodos - Simpson

Método	Resultado da integral	Erro(%)
1/3 Simpson	574.160872419205	0.00199586579239805
3/8 Simpson	574.154491982205	0.000884580671689455
1/3 Simpson Composto	574.149413169273	3.14101915880905e-10
3/8 Simpson Composto	574.149413171202	6.50024440177668e-10

Fonte: Autor,(2020)

Métodos compostos usando N=100.

MN aplicados à Engenharia

Figura: Scritp comparativo dos métodos

```
clc; clear all; pkg load symbolic; format long g
%**************************
f=@(x)(97000*x/(5*x.^2+570000)); a=40;b=93;  % Função e limites
for(j=1:4)                                     %
   N=100;h=(b-a)/N;x=a:h:b;                    % Intervalos, largura e subinterval
   %*****************************************************************
  if (j==1) tic;h=(b-a)/2;                          % 1/3 simpson
    I(j)=(h/3)*(f(a)+ 4*f((a+b)/2)+f(b) ); t(j)=toc; end
  if (j==2) tic;h=(b-a)/3; x2=a+h; x3=a+2*h; % 3/8 simpson
    I(j)=(3*h/8)*(f(a)+ 3*f(x2)+3*f(x3)+f(b)); t(j)=toc;end
  if (j==3) tic;
    part=0; part=0; if(mod(N,2)==0) N=N;else N=N+1;end    % N par
     h=(b-a)/N;x=a:h:b;                              % 1/3 simpson composto
     for(i=2:N)
        if (mod(i,2)==0) part=part+4*f(x(i)); else part=part+2*f(x(i));end
     end
     I(j)= (f(a)+part+f(b))*h/3;t(j)=toc;
  end
  if (j==4) tic;
      if(mod(N,3)==0) N=N;else                      % N div 3
      while(mod(N,3)!=0)
      N=N+1;  end; end
    part1=0;part2=0; h=(b-a)/N; x=a:h:b;           % 3/8 simpson composto
       for(i=2:3:N)
        part1=part1+3*(f(x(i))+f(x(i+1))); end
       for(i=4:3:N)
        part2=part2+2*(f(x(i)));           end
  I(j)= (f(a)+part1+part2+f(b))*h*3/8;
  t(j)=toc;
  end
end
%******************************************************
g=int(sym(f));  dg=matlabFunction(g);   % SOLUÇÃO ANALÍTICA - antideriv. de f.
sx=dg(b)-dg(a);
for(k=1:length(I)) Er(k) = abs( (I(k)-sx)*100/sx ); end;clc;  % Erros
fprintf('\n\nValor da solução analítica %f.\n\n',sx)          % Resultados
fprintf(' Valores dos métodos \t Erros\n')
Val_Er=[ I' Er' t']
```

Fonte: Autor,(2020)

Exercícios

Veja a lista de exercícios na web