

# Métodos Numéricos

Prof. Jonatha Costa

2024

# MN aplicados à Engenharia

---

- Apresentar conteúdo de Integração Numérica
  - Método do retângulo, ponto central e trapézio
  - Método 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson

# Organização

---

## ① Integração Numérica

Introdução-conceitos

Método do Retângulo e do Ponto Central

Método dos Trapézios

Métodos de Simpson

# MN aplicados à Engenharia

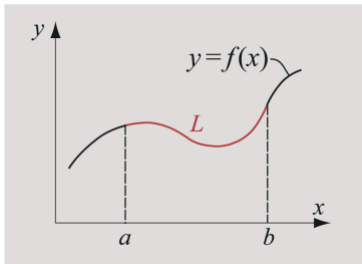
## Exemplo de aplicação

(a) Comprimento de uma curva:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

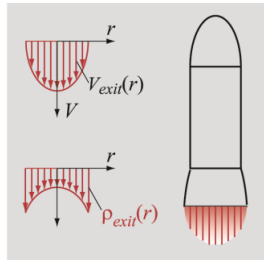
(b) Impulsão de um foguete:  $T = \int_0^R 2\pi\rho(r)V_{sada}^2(r)dr$

**Figura:** Aplicação de integração numérica

(a) Comprimento de curva



(b) Impulsão de foguete



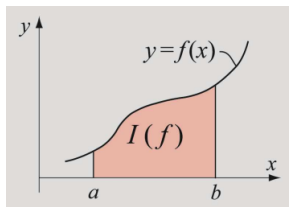
Fonte: GILAT,(2008)

# MN aplicados à Engenharia

## Introdução

- Seja  $f(x)$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ , então existe a função primitiva  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x)$ .
- O valor da integral definida de  $f(x)$  pode ser calculado usando (Fórmula de Newton-Leibniz):

**Figura:** *Integral definida (antiderivada)*



$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde  $f(x)$ , chamada de integrando, é função da variável independente  $x$ , enquanto  $a$  e  $b$  são os limites de integração. Graficamente, o valor da integral corresponde à área sombreada sob a curva de  $f(x)$  entre  $a$  e  $b$ .

Fonte: GILAT,(2008)

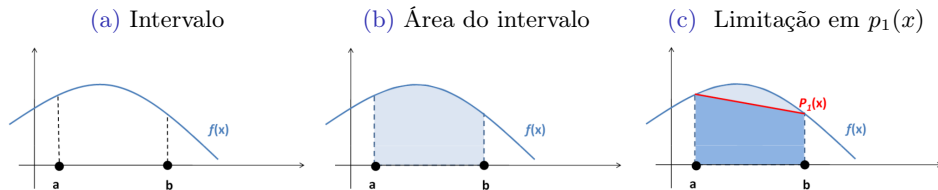
# MN aplicados à Engenharia

## Introdução

- A função  $f(x)$  é aproximada por uma função  $p(x)$ , mais simples cuja **primitiva** é mais fácil de se obter.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

Figura: Delimitação de intervalo e área entre  $[a, b]$



Fonte: DIAS,(2019)

$I \approx$  área delimitada por  $P_1(x)$  no intervalo  $[a, b]$

# MN aplicados à Engenharia

---

## Introdução

- Os métodos de integração **numérica** aproximam valores de integrais definidas.
- A integração numérica é útil quando:
  - \* Não se conhece a função  $f(x)$ , mas tem-se apenas uma tabela de valores para  $f$ ;
  - \* A função  $f$  é conhecida, mas é muito complexa, o que dificulta a determinação da primitiva.
- A ideia básica é substituir  $f(x)$  por um polinômio que aproxime-a razoavelmente no intervalo  $[a, b]$ ;
- Assim o problema se resume à integração de polinômios, o que é trivial de realizar.

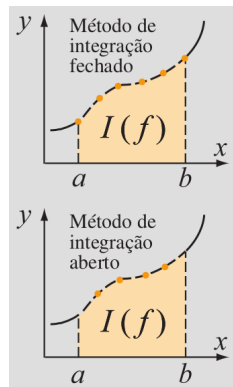
# MN aplicados à Engenharia

## Introdução

Existem vários métodos disponíveis para o cálculo numérico de integrais. Em cada um desses métodos, uma fórmula é deduzida para calcular o valor aproximado de uma integral a partir dos pontos fechado discretos do integrando.

- **Métodos fechados** - os pontos finais do intervalo (e o integrando) são utilizados na fórmula que estima o valor da integral.
  - Método trapezoidal
  - Método de Simpson
- **Métodos abertos** - o intervalo de integração se estende além do limite especificado pelos pontos finais
  - Método do ponto central

Figura: Métodos de integração



Fonte: GILAT,(2008)





# Organização

---

## ① Integração Numérica

Introdução-conceitos

Método do Retângulo e do Ponto Central

Método dos Trapézios

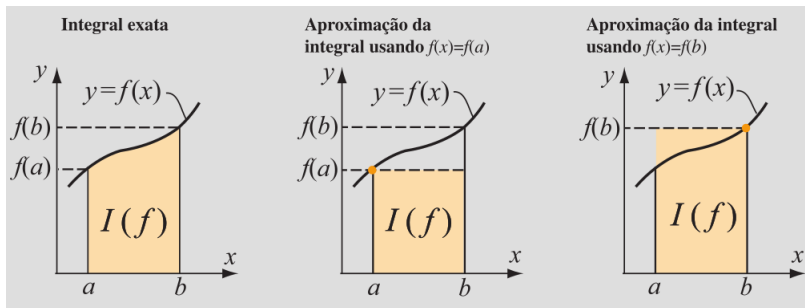
Métodos de Simpson

# MN aplicados à Engenharia

## Método do Retângulo Simples

- Consiste em assumir que  $f(x)$  é uma constante dentro do intervalo  $[a, b]$ .

Figura: Método do Retângulo



Fonte: GILAT,(2008)

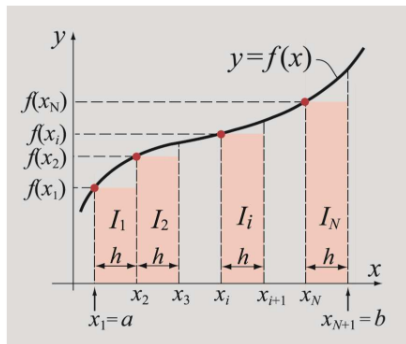
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) \approx f(b)(b-a)$$

# MN aplicados à Engenharia

## Método do Retângulo Composto

- Visa reduzir o erro apresentado no método do retângulo, criando  $N$  subintervalos.

Figura: Método do Retângulo Composto



$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

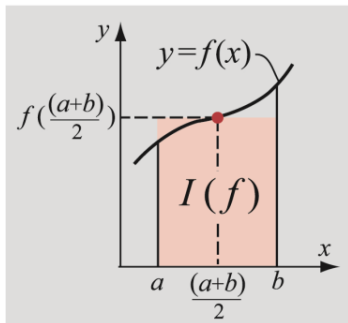
(\*) Quando os subintervalos têm a mesma largura  $h$ , doutro modo os vários intervalos permanecem desagrupados.

Fonte: GILAT,(2008)

## Método do Ponto Central

- É uma melhoria em relação ao Método do Retângulo, em que ao invés de aproximar o integrando usando os valores da função em  $x = a$  ou  $x = b$ , utiliza-se o valor do integrando no meio do intervalo  $x = \frac{(a+b)}{2}$ .

Figura: Método do Ponto Central



$$I(f) = \begin{cases} \int_a^b f(x)dx = \\ \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx = \\ f(\frac{a+b}{2}).(b-a) \end{cases}$$

(\*) Este método é mais preciso do que o método do retângulo simples porque, para uma função crescendo (conforme figura), as regiões da área abaixo da curva que são ignoradas podem ser compensadas de forma aproximada pelas regiões incluídas acima da curva.

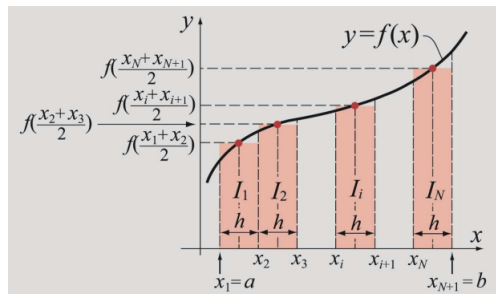
Fonte: GILAT,(2008)

# MN aplicados à Engenharia

## Método do Ponto Central Composto

- É uma melhoria em relação ao Método do Ponto Central.

Figura: Método do Ponto Central Composto



$$I(f) = \int_a^b f(x)dx =$$

$$I(f) = h \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_i + x_{(i+1)}}{2}\right)$$

A integral em cada subintervalo é calculada utilizando o método do ponto central, e o valor total da integral é obtido com a soma dos valores das integrais obtidos nos subintervalos.

Fonte: GILAT,(2008)

# Organização

---

## ① Integração Numérica

Introdução-conceitos

Método do Retângulo e do Ponto Central

**Método dos Trapézios**

Métodos de Simpson





## Método do Trapézio Composto

- A aplicação do método trapezoidal em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  resulta em:

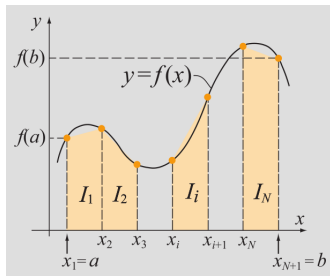
$$* \quad I_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{[f(x_i) + f(x_{i+1})]}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

- $I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [f(x_i) + f(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i)$

- Simplificando-se :  $I(f) \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N [ f(x_{i+1}) + f(x_i) ]$

- Programação:  $I(f) \approx \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]+h \sum_{i=1}^N f(x_i)$ , caso  $h$  tenha larguras idênticas.

Figura: Método composto



Fonte: GILAT,(2008)

# MN aplicados à Engenharia

## Exemplo adaptado de GILAT,2008 - Distância percorrida por um avião em desaceleração

Um Boeing de massa  $m = 97000$  kg aterrissa a uma velocidade de  $93 \text{ m/s}$  e liga os seus reversos em  $t = 0$ . A força  $F$  aplicada no avião à medida que ele reduz a sua velocidade é dada por  $F = -5v^2 - 570000$ , onde  $v$  é a velocidade do avião. Utilizando a segunda lei de Newton do movimento e da dinâmica dos fluidos, a relação entre a velocidade e a posição  $x$  do avião pode ser escrita como:  $mv \frac{dv}{dx} = -5v^2 - 570000$ , em que  $x$  é a distância medida a partir da localização do jato em  $t = 0$ . Determine a distância percorrida pelo avião antes que sua velocidade se reduza a  $40 \text{ m/s}$  utilizando *método trapezoidal composto*.

- Solução analítica:

- Isolando-se  $dx$  tem-se:  $\frac{97000v dv}{(-5v^2 - 570000)} = dx$

- Integrando-se em ambos os lados tem-se:

$$\int_0^x dx = - \int_{93}^{40} \frac{97000v}{5v^2 + 570000} dv = \int_{40}^{93} \frac{97000v}{5v^2 + 570000} dv$$

- Resolvendo a integral tem-se:  $z = 5u^2 + 570000$ , portanto,  $x = 574,1494 \text{ m}$

# MN aplicados à Engenharia

Exemplo adaptado de Gilat,(2008) : Distância percorrida por um avião em desaceleração

Figura: Solução computacional, *script* em Octave/Matlab

```

1 clc; clear all;
2 %*****
3 f = @(v)(97000*v/(5*v^2+570000)); % função
4 a = 40; %limite inferior
5 b = 93; %limite superior
6 Ns=[10 100 1000]; %Intervalos
7
8 for(j=1:3)
9     N=Ns(j);
10    %*****
11    h=(b-a)/N; % largura dos intervalos
12    x=a:h:b; % vetor x de coordenadas dos subintervalos
13    for(i=1:N+1)
14        F(i)=f(x(i)); % vetor f(x) de imagem das coordenadas
15    end
16    %*****
17    I(j)=h*(F(1)+F(N+1))/2 + h*sum(F(2:N)); % Método trapezoidal
18 end
19 %*****
20 g=int(sym(f));clc; % Solução analítica
21 dg=matlabFunction(g); % Def. antideriv. de f.
22 sx=dg(b)-dg(a)
23 %*****
24 for(k=1:length(I)) % Erros
25     Er(k) = abs( (I(k)-sx)*100/sx );
26 end
27 %*****
28 sx = 574.15 % Solução analítica
29 I = 574.09 574.15 574.15 % Solução m.trapezio N=[10 100 1000]
30 Er = 1.1134e-02 1.1134e-04 1.1134e-06 % Erros em percentual

```

Fonte: Autor,(2020)

## Métodos Numéricos

# MN aplicados à Engenharia

Exemplo adaptado de Gilat,(2008) : Distância percorrida por um avião em desaceleração

Figura: Solução computacional, *script* em Python

```
import numpy as np
import scipy.integrate as integrate

f=lambda x: 97000*x/(5*x**2 + 570000)
a,b = 40,93
Ns=[10,100,1000]
for j in Ns:
    N=j #Total de intervalos
    h=(b-a)/N # Largura de cada intervalo
    x=np.arange(a,(b+h),h) # Intervalo particionado a:h:b
    s=0
    for i in range(N): # Trapézio composto
        s+=0.5*( f(x[i]) + f(x[i+1]))*h
    print(f'\nSolução para {N} partes é {round(s,4)}')

g,e=integrate.quad(f,a,b)
print(f'\nSolução analítica {round(g,4)}, via comando quad - scipy')
```

Fonte: Autor,(2024)

# MN aplicados à Engenharia

Exemplo adaptado de GILAT, (2008) - Distância percorrida por um avião em desaceleração

Figura: Script comparativo dos métodos

```

1 clc; clear all;
2 %*****
3 f=@(x)(97000*x/(5*x.^2+570000)); a=40;b=93; % Função e limites
4 for(j=1:7) % 7 métodos
5     N=100;h=(b-a)/N;x=a:h;b; % Intervalos, largura e subintervalos
6     soma=0; % Acumulador de soma
7     if (j==1) I(j)=f(a)*(b-a);end % RETÂNGULO SIMPLES f(x)=f(a)
8     if (j==2) I(j)=f(b)*(b-a);end % RETÂNGULO SIMPLES f(x)=f(b)
9     if (j==3) I(j)=f((a+b)/2)*(b-a);end % PONTO CENTRAL f(x)=f((a+b)/2)
10    if (j==4) I(j)=(f(a)+f(b))/2*(b-a);end % TRAPÉZIO
11    if (j==5) % RETÂNGULO COMPOSTO
12        for(i=1:N) soma=soma+f(x(i))*h; end;I(j)=soma; end
13    if(j==6) % PONTO CENTRAL COMPOSTO
14        for(i=1:N) soma=soma+f((x(i)+ x(i+1))/2)*h; end; I(j)=soma; end
15    if(j==7) ; % TRAPÉZIO COMPOSTO
16        for(i=1:N) soma=soma + 0.5*(f(x(i))+f(x(i+1)))*(x(i+1)-x(i)); end;
17        I(j)=soma; end
18    end
19
20 g=int(sym(f)); dg=matlabFunction(g); % SOLUÇÃO ANALÍTICA - antideriv. de f.
21 sx=dg(b)-dg(a);
22 for(k=1:length(I)) Er(k) = abs( (I(k)-sx)*100/sx ); end; % Erros
23 clc;
24 fprintf('Valor da solução analítica %f.\n',sx) % Resultados
25 fprintf('\t\t Métodos Valores dos métodos \t Erros\n')
26 Val Er=[(1:7)' I' Er']

```

Fonte: Autor,(2020)

# MN aplicados à Engenharia

**Exemplo adaptado de gilat- Distância percorrida por um avião em desaceleração**

Resultado da integral por método "analítico": **574.14941316747**

**Tabela:** Resultado dos métodos

Método	Resultado da integral	Erro(%)
Retângulo $f(x) = f(a)$	355.778546712803	38.0338046937918
Retângulo $f(x) = f(b)$	779.644350952719	35.7911953008144
Ponto central	577.385584212426	0.563646146932926
Trapézio simples	567.711448832761	1.1213046964887
Retângulo composto	572.02944491021	0.369236336159371
Ponto central composto	574.149732785691	0.000055668126401556
Trapézio composto	574.148773931409	0.000111336186410645

Fonte: Autor,(2020)

*Métodos compostos usando  $N=100$ .*

# Organização

---

## ① Integração Numérica

Introdução-conceitos

Método do Retângulo e do Ponto Central

Método dos Trapézios

Métodos de Simpson

# MN aplicados à Engenharia

---

## Métodos de Simpson

- O método trapezoidal aproxima o integrando por uma linha reta. Em tese, uma melhor aproximação pode ser obtida com a representação do integrando como uma função não-linear de fácil integração.
- Uma classe de métodos com essa característica (regras ou métodos de Simpson) utiliza para aproximar o integrando polinômios:
  - quadráticos (método de Simpson 1/3)
  - cúbicos (método de Simpson 3/8)



# MN aplicados à Engenharia

## Método de 1/3 de Simpson Simples

- Um polinômio quadrático (de segunda ordem) é utilizado para aproximar o integrando
- Os coeficientes do polinômio quadrático são determinados a partir de três pontos:  $x_1 = a$ ,  $x_2 = (a + b)/2$  e  $x_3 = b$  tal que  $p(x) = \alpha + \beta(x - x_1) + \gamma(x - x_1)(x - x_2)$  em que  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são constantes desconhecidas tais que o polinômio deve passar por todos os pontos,  $p(x_1) = f(x_1)$ ,  $p(x_2) = f(x_2)$  e  $p(x_3) = f(x_3)$ .

- O que resultado em:

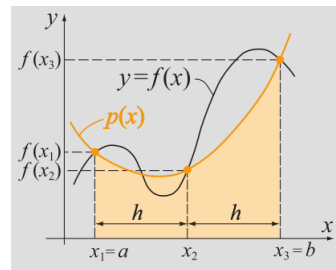
$$\alpha = f(x_1), \beta = [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1) \text{ e } \gamma = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{2(h)^2}, \text{ onde } h = (b - a)/2$$

- Portanto:

$$I = \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx \approx \int_{x_1}^{x_3} p(x) dx =$$

$$I = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

Figura: Simpson 1/3



Fonte: GILAT,(2008)

\* Logo:

$$I = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

O nome 1/3 no método vem do fator de 1/3 multiplicando a expressão entre colchetes.

# MN aplicados à Engenharia

## Método de 1/3 de Simpson Composto

- No método de Simpson 1/3 composto divide-se o intervalo  $[a, b]$  em  $N$  subintervalos de largura  $h$ , em que  $h = (b - a)/N$
- O método de Simpson 1/3 é aplicado em dois subintervalos adjacentes de cada vez, por serem necessários 3 pontos para definir um polinômio quadrático. Portanto, o intervalo total deve ser dividido em um *número par de subintervalos*.
- A integral ao longo de 2 intervalos adjacentes  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $[x_i, x_{i+1}]$  fica definida como:  $I_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$ , onde  $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$
- Agrupados em termos similares resulta em:
$$I(f) \approx \frac{h}{3} \left[ f(a) + 4 \sum_{i=2,4,6}^N f(x_i) + 2 \sum_{j=3,5,7}^{N-1} f(x_j) + f(b) \right], \text{ em que } h = (b - a)/N$$
- Condições necessárias
  - Os subintervalos devem ser **igualmente** espaçados.
  - O número de subintervalos no domínio  $[a, b]$  deve ser um número **par**

### Método de 1/3 de Simpson Composto

- Cada ponto é utilizado uma vez como o ponto final à direita de um par de subintervalos, e uma vez como o ponto final à esquerda do par de subintervalos seguinte.

27 / 33

# MN aplicados à Engenharia

## Método de 3/8 de Simpson

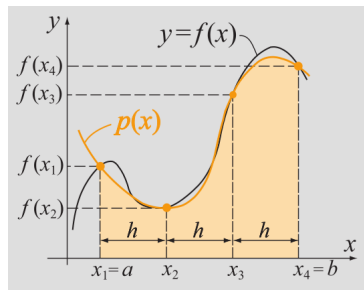
- Um polinômio cúbico (de terceira ordem) é utilizado para aproximar o integrando
- Os coeficientes do polinômio quadrático são determinados a partir dos pontos:  $x_1 = a, x_4 = b$  e dois pontos  $x_2$  e  $x_3$  que dividem o intervalo em três seções iguais, tal que:  $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ , em que  $c_3, c_2, c_1$  e  $c_0$  são constantes avaliadas a partir da condição que diz que passa pelos pontos  $p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2), p(x_3) = f(x_3)$  e  $p(x_4) = f(x_4)$ .

- Resultando em:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{3}{8}h[f(a) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(b)]$$

- O valor da integral é mostrado como a **área sombreada** entre a curva  $p(x)$  e o eixo  $x$ . Note que a equação é uma soma ponderada dos valores de  $f(x)$  nos dois pontos finais  $x_1 = a$  e  $x_4 = b$ , e nos pontos  $x_2$  e  $x_3$  que dividem o intervalo em três seções de largura( $h$ ) iguais.

Figura: Simpson 3/8



Fonte: GILAT,(2008)

\* Logo:

$$I = \frac{3}{8}h[f(a) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(b)]$$

O nome 3/8 no método vem do fator de 3/8 multiplicando a expressão entre colchetes.

# MN aplicados à Engenharia

## Método de 3/8 de Simpson Composto

- No método de Simpson 3/8 composto divide-se o intervalo  $[a, b]$  em  $N$  subintervalos de largura  $h$ , em que  $h = (b - a)/N$
- Sendo necessários 4 pontos para definir um **polinômio cúbico**, o método é aplicado em **três** subintervalos adjacentes de cada vez e, portanto, o número de subintervalos dever ser divisível por 3.
- A integral ao longo de **3 intervalos** adjacentes para 4 grupos fica definida como:  

$$I(f) \approx \frac{3h}{8}(f(a) + 3[f(x_2) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_9) + f(x_{11}) + f(x_{12})] + 2([f(x_4) + f(x_7) + f(x_{10})] + f(b)))$$
- No caso geral que envolve a divisão do domínio  $[a, b]$  em  $N$  subintervalos (em que  $N$  é pelo menos 6 e divisível por 3), resulta em:

$$I(f) \approx \frac{3h}{8} \left[ f(a) + 3 \sum_{i=2,5,8}^{N-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] + 2 \sum_{j=4,7,10}^{N-2} f(x_j) + f(b) \right],$$

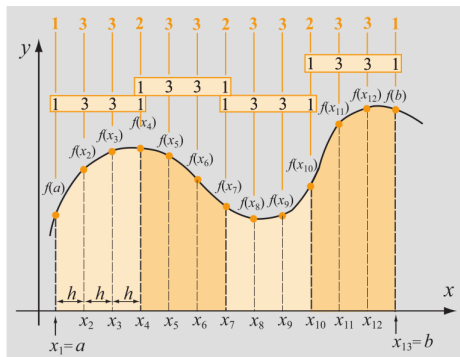
em que  $h = (b - a)/N$

- Condições necessárias**
  - Os subintervalos devem ser **igualmente** espaçados.
  - O número de subintervalos no domínio  $[a, b]$  deve ser um número divisível por 3.

# MN aplicados à Engenharia

## Método de 3/8 de Simpson Composto

Figura: Soma ponderada - Simpson 3/8 composto



Fonte: GILAT,(2008)

- Uma combinação dos métodos de Simpson pode ser utilizada para realizar a integração quando houver um número ímpar qualquer de subintervalos.
- Isso é feito utilizando o método de Simpson 3/8 nos três primeiros  $([a, x_2], [x_2, x_3] e [x_3, x_4])$  ou nos três últimos subintervalos  $([x_{N-2}, x_{N-1}], [x_{N-1}, x_N]$  e  $[x_N, x_b])$ , aplicando-se o método de Simpson 1/3 no número restante (par) de subintervalos.

# MN aplicados à Engenharia

**Exemplo adaptado de gilat- Distância percorrida por um avião em desaceleração**

Resultado da integral por método "analítico": 574.14941316747

**Tabela:** Resultado dos métodos - Simpson

Método	Resultado da integral	Erro(%)
1/3 Simpson	574.160872419205	0.00199586579239805
3/8 Simpson	574.154491982205	0.000884580671689455
1/3 Simpson Composto	574.149413169273	3.14101915880905e-10
3/8 Simpson Composto	574.149413171202	6.50024440177668e-10

Fonte: Autor,(2020)

*Métodos compostos usando  $N=100$ .*

# MN aplicados à Engenharia

Figura: *Script* comparativo dos métodos

```

2  clc; clear all; pkg load symbolic; format long g
3  %*****
4  f=@(x)(97000*x/(5*x.^2+570000)); a=40;b=93; % Função e limites
5  for(j=1:4)
6      N=100;h=(b-a)/N;x=a:h:b; % Intervalos, largura e subinterval
7      %*****
8      if (j==1) tic;h=(b-a)/2; % 1/3 simpson
9      I(j)=(h/3)*(f(a)+ 4*f((a+b)/2)+f(b)); t(j)=toc; end
10     if (j==2) tic;h=(b-a)/3; x2=a+h; x3=a+2*h; % 3/8 simpson
11     I(j)=(3*h/8)*(f(a)+ 3*f(x2)+3*f(x3)+f(b)); t(j)=toc;end
12     if (j==3) tic;
13     part=0; part=0; if(mod(N,2)==0) N=N;else N=N+1;end % N par
14     h=(b-a)/N;x=a:h:b; % 1/3 simpson composto
15     for(i=2:N)
16         if (mod(i,2)==0) part=part+4*f(x(i)); else part=part+2*f(x(i));end
17     end
18     I(j)= (f(a)+part+f(b))*h/3;t(j)=toc;
19 end
20 if (j==4) tic;
21     if(mod(N,3)==0) N=N;else % N div 3
22         while(mod(N,3)!=0)
23             N=N+1; end; end
24     part1=0;part2=0; h=(b-a)/N; x=a:h:b; % 3/8 simpson composto
25     for(i=2:3:N)
26         part1=part1+3*(f(x(i))+f(x(i+1))); end
27     for(i=4:3:N)
28         part2=part2+2*(f(x(i))); end
29     I(j)= (f(a)+part1+part2+f(b))*h*3/8;
30     t(j)=toc;
31 end
32 end
33 %*****
34 g=int(sym(f)); dg=matlabFunction(g); % SOLUÇÃO ANALÍTICA - antideriv. de f.
35 sx=dg(b)-dg(a);
36 for(k=1:length(I)) Er(k) = abs( (I(k)-sx)*100/sx ); end;clc; % Erros
37 fprintf('\n\nValor da solução analítica %f.\n\n',sx) % Resultados
38 fprintf('Valores dos métodos \t Erros\n')
39 Val_Er=[ I' Er' t' ]

```



# Referências

---

- ÁVILA, Sérgio Luciano. Cálculo numérico aplicado à engenharia elétrica com MATLAB
- COSTA, Jonatha R. **Notas de aula: Métodos Numéricos**, disponível em <https://github.com/jonathacosta/NM>, acessado em 04 de set. de 2024.
- COSTA, Jonatha R. **Códigos em Python**. Disponível em <https://github.com/jonathacosta/NM>, acessado em 04 de set. de 2024.
- GILAT, Amos. MATLAB com aplicações em engenharia. Bookman Editora, 2009.
- PUD - Programa da Unidade Didática. Bacharelado em Controle e Automação, IFCE, *campus* Maracanaú. Disponível em [https://ifce.edu.br/maracanau/menu/cursos/superiores/bacharelados/controle\\_automacao/pdf/pudseca-1.pdf@@download/file/PUD\\_Controle\\_Aut\\_2019.pdf](https://ifce.edu.br/maracanau/menu/cursos/superiores/bacharelados/controle_automacao/pdf/pudseca-1.pdf@@download/file/PUD_Controle_Aut_2019.pdf), acessado em 04 de set. de 2024.