Métodos Numéricos

Prof. Dr. Jonatha Costa

2024

Organização

1 Resolução de Sistemas Não-Lineares
- Fundamentos
- Método da Bisseção
- Método Regula-Falsi
- Método Newton-Raphson
- Método da Secante

MN aplicados à Engenharia

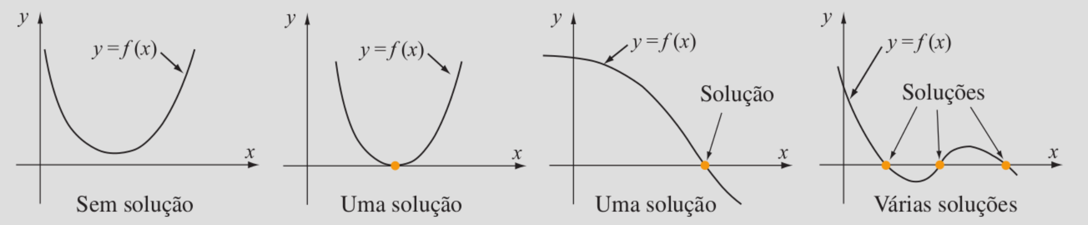
- Apresentar conteúdo de Resolução de Equações Não-Lineares
  - Método da Bisseção
  - Método Regula-Falsi
  - Método Newton-Raphson
  - Método da Secante

MN aplicados à Engenharia

Fundamentos de Resolução de Sistemas Não-Lineares

- Equações precisam ser resolvidas em todas áreas da engenharia.
- Consiste em determinar o(s) valor(es) de x tal que $f(x) = 0$.

Figura: Existência de solução em curvas



Fonte: GILAT,(2008)

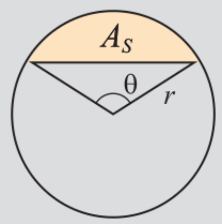
- Um número real ξ é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$.

MN aplicados à Engenharia

Fundamentos

- Em alguns casos as soluções podem ser reais ou imaginárias.
- Seja o exemplo da área do segmento sombreado é dado por:

Figura: Área de setor



Fonte: GILAT,(2008)

- $A_s = \frac{1}{2}r^2(\theta - sen(\theta))$
- A determinação de θ em função de A_S e r conhecidos não é possível através de solução analítica.
- Utilizam-se os métodos numéricos para encontrar uma solução aproximada para tanto.

MN aplicados à Engenharia

Zeros de funções reais

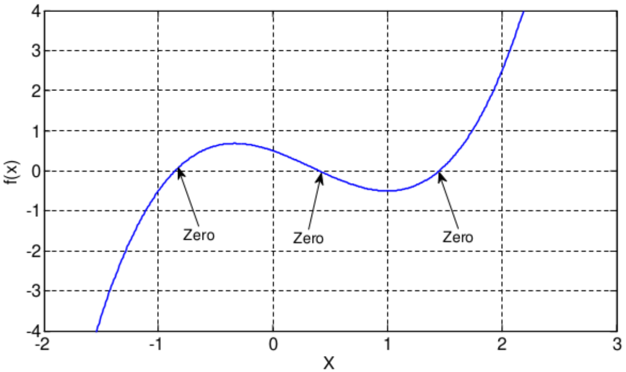
- Quais os zeros das funções:
  - $f(x) = x - 3$;
  - $f(x) = x^2 - 4x - 5$;
  - $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1/2$

MN aplicados à Engenharia

Zeros de funções reais

- Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo I. Denomina-se zero desta função todo $x \in I$, tal que $f(x) = 0$.

Figura: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1/2$



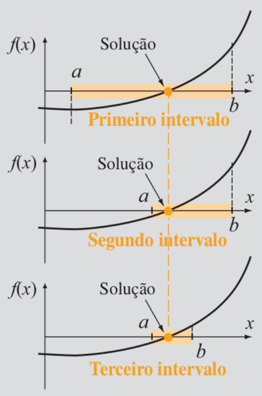
Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia

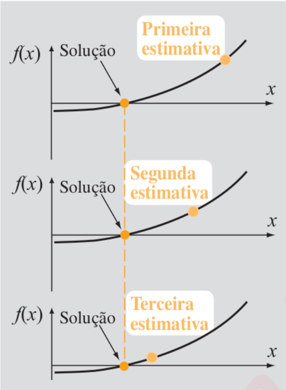
Como obter as raízes de uma equação qualquer?

Figura: Método de obtenção das raízes

(a) Confinamento



(b) Método aberto



Fonte: GILAT,(2008)

MN aplicados à Engenharia

Boas práticas

- Definir a faixa de busca ou isolamento das raízes;
- Estabelecer uma faixa de erro aceitável e tolerância para a aproximação;
- Refinar a busca por meio de um processo iterativo até que a solução tenha uma precisão prefixada.

MN aplicados à Engenharia

- **Estimação de Erros em Soluções Numéricas - Erro real**
  Seja x_{TS} a solução exata tal que $f(x_{TS}) = 0$, e seja x_{NS} uma solução numérica aproximada tal que $f(x_{NS}) = \varepsilon$, em que ε é um número muito pequeno.
  - Deve ser criado algum critério para verificar se uma solução é precisa.
  - *Erro real*

$$erro\ real = x_{TS} - x_{NS}$$

Este critério não é tão útil, visto que x_{TS} não é conhecido!

- **Estimação de Erros em Soluções Numéricas - Tolerância em $f(x)$:**
  - Ao invés de considerar o erro na solução, verifica-se o desvio de $f(x_{NS})$ em relação a zero.
  - Tolerância em f: $tolerancia = \left|f(x_{TS}) - f(x_{NS})\right| = \left|0 - \varepsilon\right| = \left|\varepsilon\right|$

MN aplicados à Engenharia

- **Estimação de Erros em Soluções Numéricas - Tolerância na solução:**
  - É útil quando métodos de confinamento são usados na determinação numérica.
  - Assume-se que a solução numérica é o ponto central de um intervalo com uma tolerância tal que:

$$x_{NS} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\pm\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

- **Estimação de Erros em Soluções Numéricas - Erro relativo estimado**
  - Usado quando as soluções numéricas são calculadas iterativamente.
  - É dado por:

$$erro\ relativo\ estimado = \left|\frac{x_{NS}^{n} - x_{NS}^{(n-1)}}{x_{NS}^{(n-1)}}\right|$$

MN aplicados à Engenharia

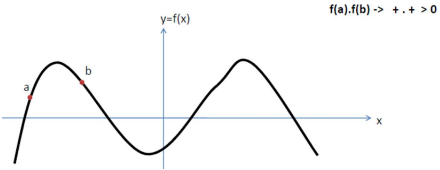
Fase 01 -Confinamento das raízes

- **Teorema 1**. Seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$.
  Se $f(a)f(b) \leq 0$, então $\exists$ pelo menos um ponto $x = x_0$ entre a e b que é solução de $f(x) = 0$.

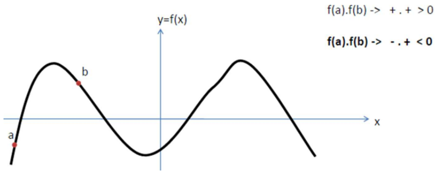
MN aplicados à Engenharia

Figura: Existência de zeros na função

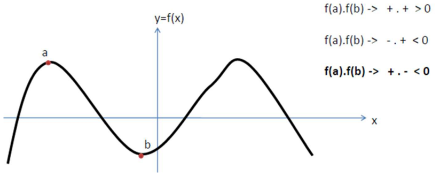
(a) caso 1



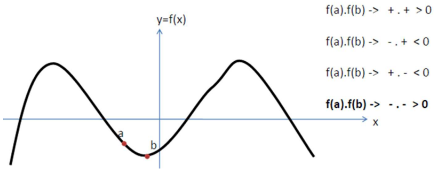
(b) caso 2



(c) caso 3



(d) caso 4



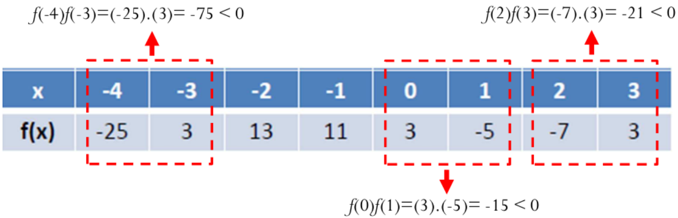
Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia

Fase 01 -Confinamento das raízes

Ex.: Para encontrar os zeros da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ pode-se construir uma tabela de valores para $f(x)$ e se analisar os sinais, conforme a tabela abaixo.

Figura: Confinamento de raízes



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-25	3	13	11	3	-5	-7	3

Fonte: DIAS,(2019)

Portanto, nos intervalos $[-4, -3]$, $[0, 1]$ e $[2, 3]$, $\exists$ pelo menos uma raiz real da função. Como trata-se de um polinômio do 3 grau, pode-se dizer que existe apenas uma raiz em cada intervalo.

MN aplicados à Engenharia

Fase 02 -Confinamento das raízes

Critério de Parada:
Considerando $\overline{x}$ a raiz aproximada com precisão ε, o qual normalmente é da ordem de 10^{-6}:

(i) $|\overline{x} - \xi| < \epsilon$

(ii) $|f(\overline{x})| < \epsilon$

Como realizar o teste (i), uma vez desconhecido o ξ?

Uma forma é reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração.
Seja $[a, b]$ tal que $\xi \in [a, b]$ $(b - a) < \epsilon$.

Então $\forall x \in [a, b], |x - \varepsilon| < \xi$ e, portanto, $\forall x \in [a, b]$ pode ser tomado como $\overline{x}$.

MN aplicados à Engenharia

Fase 02 -Confinamento das raízes (Método da Bisseção)

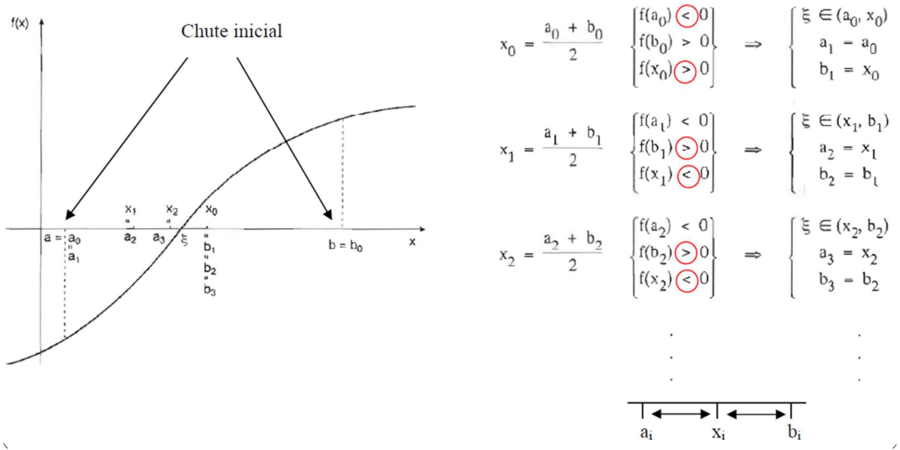
Para se aproximar de uma raiz, o princípio da bisseção consiste em reduzir o intervalo inicial testando o sinal de $f(x)$ para o ponto médio do intervalo.

- Considerando o intervalo $[a, b]$, $x = \frac{a+b}{2}$
- Se $f(a).f(x) < 0$, o novo intervalo é $[a, \frac{a+b}{2}]$
- Se $f(b).f(x) < 0$, o novo intervalo é $[\frac{a+b}{2}, b]$

MN aplicados à Engenharia

Fase 02 - Refinamento (Método da Bisseção)

Figura: Método da Bisseção



Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia

Método da Bisseção

Figura: *Script* Método da Bisseção

```
% Solução de equações não lineares
clear all;clc; pkg load symbolic; format bank
%**************************************************************
F=inline('8-4.5*(x-sin(x))');
%****************************************%********************
a=2;    b=3;                                    % Kick-off
imax=50; tol=0.001;
%****************************************%********************
disp("Método da Bisseção!")
fprintf("\niteração \ta\tb\tc\tFa\tFb\tFx\n")
tic
for(i=1:imax)
%****************************************%********************
  x=(a+b)/2;   toli=(b-a)/2;
  fprintf("%5d\t%11.4f %8.4f%8.4f%8.4f%8.4f%8.4f\n",i,a,b,x,F(a),F(b),F(x))
%****************************************%********************
 if (F(a)*F(x)<0)  a=a; b=x; end   %Raiz entre a e xmed => novo 'b'
 if (F(a)*F(x)>0)  a=x; b=b; end   %Raiz entre b e xmed => novo 'a'
%****************************************%********************
  if (toli<tol)
  fprintf("\nSoluçao %.4f alcançada após %d iterações! \n",x,i);
  break
  end
end

fprintf("Tempo de processamento t=%f(s)\n\n",toc)
%****************************************%********************
```

Fonte: AUTOR,(2020)

MN aplicados à Engenharia

Método da Bisseção

Figura: Resultados Método da Bisseção

```
Método da Bisseção!

iteração         a        b        c        Fa       Fb       Fx
    1         2.0000   3.0000   2.5000   3.0918  -4.8650  -0.5569
    2         2.0000   2.5000   2.2500   3.0918  -0.5569   1.3763
    3         2.2500   2.5000   2.3750   1.3763  -0.5569   0.4341
    4         2.3750   2.5000   2.4375   0.4341  -0.5569  -0.0557
    5         2.3750   2.4375   2.4062   0.4341  -0.0557   0.1907
    6         2.4062   2.4375   2.4219   0.1907  -0.0557   0.0678
    7         2.4219   2.4375   2.4297   0.0678  -0.0557   0.0062
    8         2.4297   2.4375   2.4336   0.0062  -0.0557  -0.0248
    9         2.4297   2.4336   2.4316   0.0062  -0.0248  -0.0093
   10         2.4297   2.4316   2.4307   0.0062  -0.0093  -0.0016

Soluçao 2.4307 alcançada após 10 iterações!
Tempo de processamento t=0.002587(s)
```

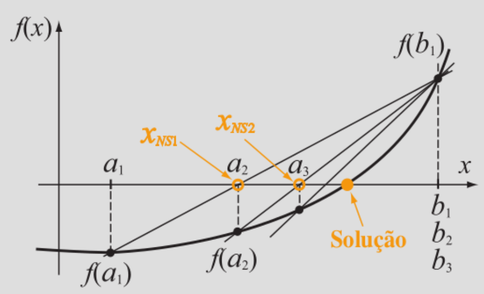
Fonte: AUTOR,(2020)

MN aplicados à Engenharia

Fase 02 - Refinamento (Método regula falsi)

- Também chamado de método da **falsa posição** ou de interpolação linear.
- É um método de confinamento utilizado para se obter a solução de uma equação $f(x) = 0$ quando se tem conhecimento que a solução está dentro de um intervalo $[a, b]$ e $f(x)$ é contínua.

Figura: Método da Bisseção



Fonte: GILAT,(2008)

MN aplicados à Engenharia

Fase 02 - Refinamento (Método regula falsi)

- Para um intervalo $[a, b]$, a equação da linha reta que conecta os dois pontos $(b, f(b))$ e $(a, f(a))$ é dada por:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$$

- O ponto x_{NS} onde a reta cruza o eixo x é determinado pela equação a seguir, considerando $f(x) = 0$:

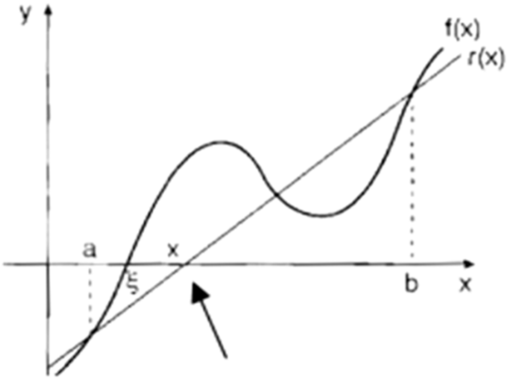
$$x_{NS} = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}$$

MN aplicados à Engenharia

Fase 02 - Refinamento (Método regula falsi)

- Graficamente este ponto x é a interseção entre o eixo das abcissas (x) e a reta $r(x)$ que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Figura: Refinamento



Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia

Figura: *Script* Método da Falsa Posição

```
% Solução de equações não lineares
clear all;clc; pkg load symbolic; format bank
F=inline('8-4.5*(x-sin(x))');
%*********************************%*****************
a=2;    b=3;  imax=30;  tol=0.001;
%*********************************%*****************
disp("Método da Falsa Posição!")
fprintf("\niteração \ta\tb\tc\tFa\tFb\tFx\n")
%*********************************%*****************
tic
for(i=1:imax)
x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a));
toli=(b-a)/2;
fprintf("%5d\t%11.4f %8.4f%8.4f%8.4f%8.4f%8.4f\n",i,a,b,x,F(a),F(b),F(x))
if (F(a)*F(x)>0) a=x; else b=x; end
%*********************************%*****************
 if (toli<tol)
  fprintf("\nSoluçao %.4f alcançada após %d iterações! \n",x,i);
  break
  end
end
fprintf("Tempo de processamento t=%f(s)\n\n",toc)
```

Fonte: AUTOR,(2020)

MN aplicados à Engenharia

Figura: Resultados da Falsa Posição

Método da Falsa Posição!

iteração	a	b	c	Fa	Fb	Fx
1	2.0000	3.0000	2.3886	3.0918	-4.8650	0.3287
2	2.3886	3.0000	2.4273	0.3287	-4.8650	0.0252
3	2.4273	3.0000	2.4302	0.0252	-4.8650	0.0019
4	2.4302	3.0000	2.4304	0.0019	-4.8650	0.0001
5	2.4304	3.0000	2.4305	0.0001	-4.8650	0.0000
6	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
7	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
8	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
9	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
10	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
11	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
12	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
13	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
14	2.4305	3.0000	2.4305	0.0000	-4.8650	0.0000
15	2.4305	2.4305	2.4305	0.0000	0.0000	0.0000

Soluçao 2.4305 alcançada após 15 iterações!
Tempo de processamento t=0.003625(s)

Fonte: AUTOR,(2020)

MN aplicados à Engenharia

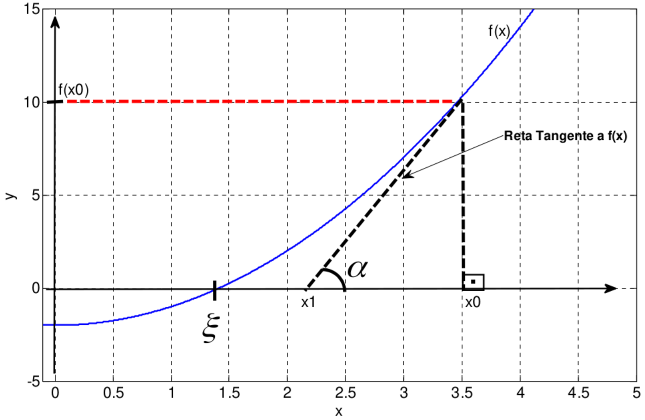
Método de Newton-Raphson

- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir de interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das absissas.
- x_0 - atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidade da raiz.

MN aplicados à Engenharia

Método de Newton-Raphson

Figura: Interpretação Gráfica

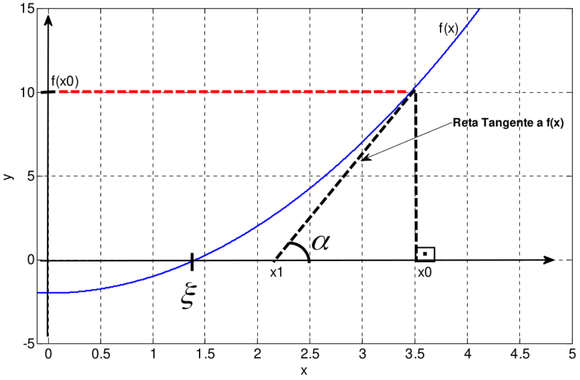


Fonte: DIAS,(2019)

MN aplicados à Engenharia

Método de Newton-Raphson

Figura: Interpretação Gráfica



Fonte: DIAS,(2019)

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1}$$

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

Como: $tg(\alpha) = f'(x_0)$

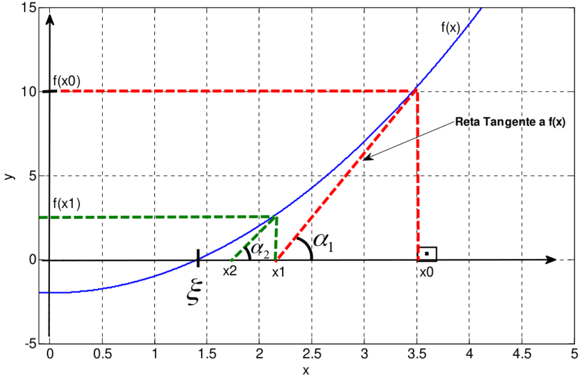
Portanto:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

MN aplicados à Engenharia

Método de Newton-Raphson

Figura: Interpretação Gráfica



Fonte: DIAS,(2019)

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2}$$

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2}$$

Como: $tg(\alpha) = f'(x_1)$

Portanto:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

MN aplicados à Engenharia

Método de Newton-Raphson

Se forem realizadas diversas aproximações

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Conclui-se que:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

em que $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

MN aplicados à Engenharia

Método de Newton-Raphson

Testes de parada:

- Erro estimado

$$|\varepsilon| = |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_d$$

- Erro relativo estimado

$$|\varepsilon_R| = \left|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right| < \varepsilon$$

- Tolerância em $f(x)$

$$\left|f(x_{k+1})\right| < \varepsilon_d$$

MN aplicados à Engenharia

Método de Newton-Raphson

Algoritmo:

- Avaliar o $f'(x)$
- Usar o x_i para estimar o próximo valor estimado da raiz (x_{i+1})

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Encontrar o erro relativo aproximado $\mid \in_a \mid$

$$\mid \in_a \mid = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| x100$$

- Se $\mid \in_a \mid > \in_s$, então volta-se ao passo 2, se não interrompe-se o algoritmo.

MN aplicados à Engenharia

Método de Newton-Raphson

Vantagens:

- Rapidez no processo de convergência;
- Desempenho elevado.

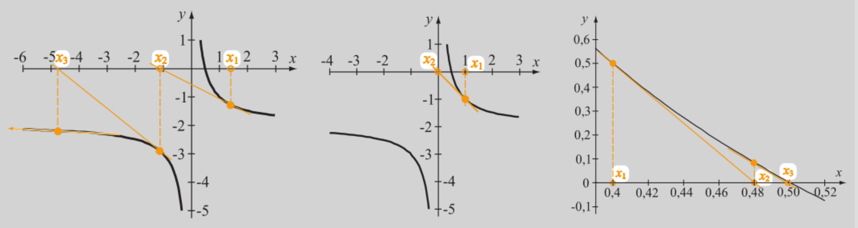
Desvantagens:

- Necessidade da obtenção de $f'(x)$ - o que pode ser impossível em determinados casos;
- O cálculo do valor numérico de $f'(x)$ a cada iteração

MN aplicados à Engenharia

Erros de Convergência

Figura: Método de Newton usando diferentes pontos de partida

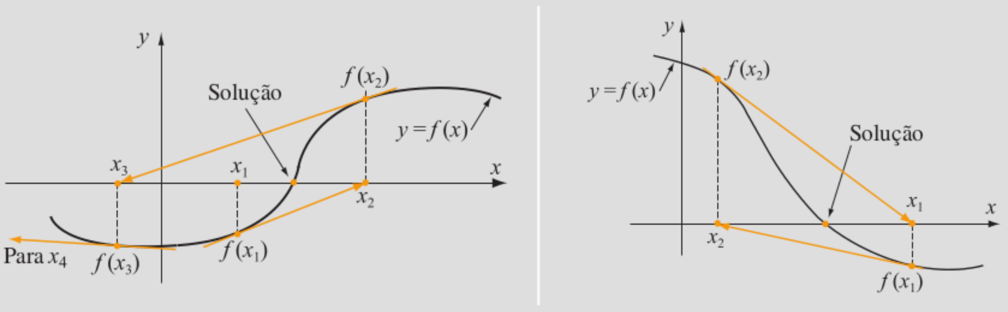


Fonte: GILAT,(2008)

Perceba a relação causa-efeito a partir de ponto de início (x_0) nos itens a,b e c.

MN aplicados à Engenharia

Figura: Erros de Convergência



Fonte: GILAT,(2008)

MN aplicados à Engenharia

Figura: *Script* Método da Newton-Raphson

```
clear all;clc; pkg load symbolic; format bank
%***********************************%********************
f=@(x)(8-4.5*(x-sin(x))); g=(diff(sym(f))); df=matlabFunction(g);clc;
disp("Método de Newton-Raphson")
%***********************************%********************
Err=0.001; tol=Err*0.1; imax=30;
Xest=2; tic              % valor inicial
%***********************************%********************
for(i=1:imax)
  Xsn = Xest-f(Xest)/df(Xest); % Xsn = x(i+1) ; Xest=x(i);
    %***********************************%********************
      if (abs((Xsn-Xest)/Xest) < Err)             % Erro < x(i+1)-xi)/xi|
        Xsn = Xest;
        fprintf("\nSoluçao %.4f alcançada após %d iterações! \n",Xsn,i)
      break
      end
    %***********************************%********************
      if (abs(f(Xsn))< Err)                            % Tol < f(xi)
      fprintf('\nSoluçao %.4f alcançada com %d iteraçoes e tolerancia %6.f!\n',
      Xsn,i,f(Xsn))
      break
      end
    %***********************************%********************
      if i==imax                        % Maximo de iteraçoes
        fprintf("\nSolução não alcançada com %d iterações\n", i)
        Xsn=('Sem resposta!')
      break
      end
    %***********************************%********************
  Xest=Xsn;
end
%***********************************%********************
fprintf("Tempo de processamento t=%f(s)\n\n",toc)
```

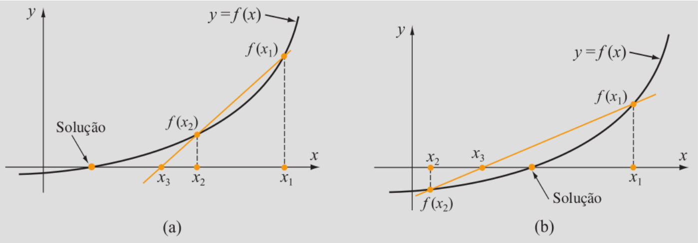
Fonte: AUTOR,(2020)

MN aplicados à Engenharia

Método da Secante

- Utiliza dois pontos na vizinhança da solução para determinar a nova solução estimada.

Figura: Método da Secante-Pontos de vizinhança



Fonte: GILAT,(2008)

- Em que $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$
- Termo geral: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}$

MN aplicados à Engenharia

Método da Secante

Figura: *Script* Método da Secante

```
clear all;clc;
%***************************************%********************
f=@(x)(8-4.5*(x-sin(x)));
Err=0.001; tol=Err; imax=30;
x1=2  ;     x2=3;     tic    % valores inicial
%***************************************%********************
for(i=1:imax)
    Xsn=x2-f(x2)*(x1-x2)/(f(x1)-f(x2));
  if (abs((Xsn-x2)/x2) < Err)            % Erro < x(i+1)-xi)/xi
    Xsn = x2;
    fprintf("\nSoluçao %.4f alcançada após %d iterações! \n",Xsn,i)
  break
  end
  %***************************************%********************
  if (abs(f(Xsn))< Err)                         % Tol < f(xi)
  fprintf("\nSoluçao %.4f alcançada com %d iteraçoes e tolerancia %6.f! \n",
  Xsn,i,f(Xsn))
  break
  end
  %***************************************%********************
  if i==imax                         % Maximo de iteraçoes
    fprintf("\nSolução não alcançada com %d iteraç~oes\n", i)
    Xsn=('Sem resposta!')
  break
  end
%***************************************%********************
x1=x2;  x2=Xsn;
end
%***************************************%********************
fprintf("Tempo de processamento t=%f(s)\n\n",toc)
```

Fonte: AUTOR,(2020)

Exercícios

- **Veja a lista de exercícios na web**
- **Veja a lista de códigos em:** `https://github.com/jonathacosta/NM`