Métodos Numéricos

Prof. Dr. Jonatha Costa

2024

Organização

MN aplicados à Engenharia: Objetivo da aula

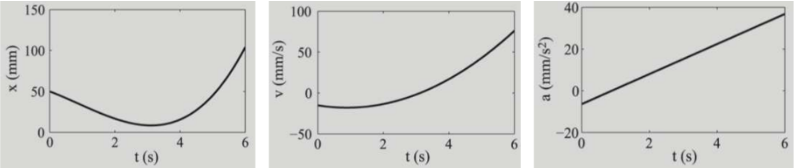
- Apresentar conceitos de diferenciação
- Revisar estruturas de operação de diferenciação
- Apresentar a interpretação gráfica de diferenciação
- Apresentar estruturas de diferenciação: progressiva, regressiva e central

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

Fundamentos

- É a taxa na qual uma grandeza varia.

Figura: Curvas de deslocamento mm/s



Fonte: GILAT,(2008)

- Em um circuito elétrico: a corrente elétrica(i) é a taxa de variação da carga q, a corrente em um capacitor está relacionada à derivada temporal da tensão(v).
- Na análise da condução de calor, a quantidade de fluxo de calor(ϕ) é determinada a partir da derivada da temperatura(Δt);

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

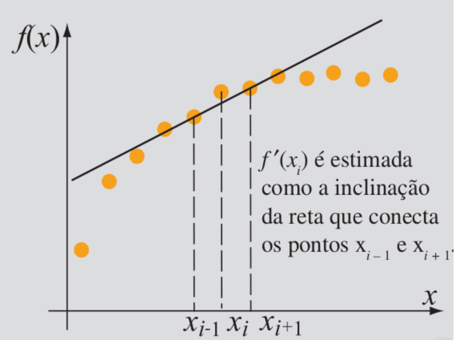
Fundamentos

- A diferenciação é usada na obtenção dos **máximos** e **mínimos** de uma função.
- A *teoria de Métodos Numéricos*, solução por aproximação, é usada quando a diferenciação de uma função é difícil ou impossível através de uma solução analítica.
- A diferenciação numérica é usada em um conjunto de pontos discretos, medidos ou gravados em experimentos.

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

Derivada por diferenças finitas

Figura: Derivada por diferenças



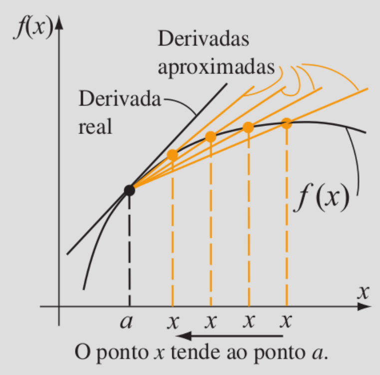
Fonte: GILAT,(2008)

- A aproximação da derivada em um ponto x_i se baseia nos valores dos pontos na vizinhança de x_i.
- A aproximação depende da precisão dos pontos, do espaçamento entre eles e da expressão específica usada na aproximação.
- A **derivada** no ponto x_i é aproximada pela inclinação da reta que liga o ponto antes de x_i ao ponto após x_i .
- Problemas de ruído penalizam este tipo de aproximação.

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

Derivada por diferenças finitas

Figura: Derivada aproximada



Fonte: GILAT,(2008)

- Definição do Cálculo

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) = lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

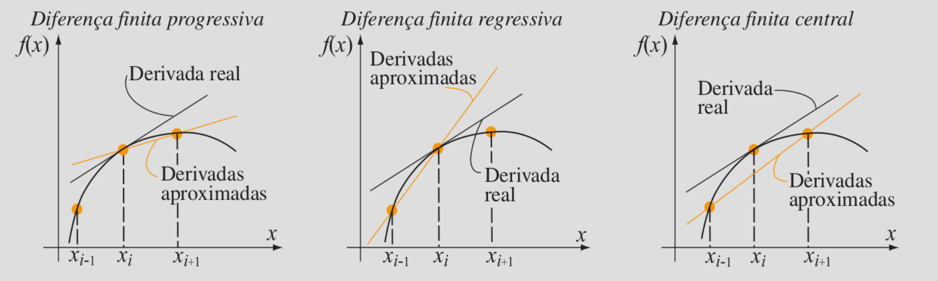
- É o valor da inclinação da **reta tangente** à função em $x = a$, obtida com a escolha de um ponto x próximo a $x = a$ e o cálculo da inclinação da reta que conecta os dois pontos.
- *Precisão* aumenta à medida que $x \to a$ tal que no imite em que o ponto x tende ao ponto a, a derivada é a inclinação da reta tangente a $f(x)$ em $x = a$.
- Na aproximação de derivadas utilizando diferenças finitas, valores da função em diferentes pontos na vizinhança do ponto $x = a$ são utilizados na estimativa da inclinação.

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

- Na aproximação de derivadas usando diferenças finitas, valores da função em diferentes pontos na vizinhança do ponto $x = a$ são usados na estimativa da inclinação.
- As fórmulas de diferenças finitas progressiva, regressiva e central são as mais simples aproximações da derivada por diferenças finitas.
- Diferença finita
    - *Progressiva* de x_{i+1} a x_i.
    - *Regressiva* de x_i a x_{i-1}.
    - *Central* de x_{i+1} a x_{i-1}.

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

Figura: Equações de diferença para a derivada primeira



Fonte: GILAT,(2008)

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}; \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}; \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

Exemplo I

Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule numericamente a derivada primeira no ponto $x = 3$ aplicando as fórmulas de diferenças finitas progressiva, regressiva e central, usando:

(a) os pontos $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$.

Compare os resultados com a derivada exata (analítica).

- Diferenciação analítica: $f'(x) = 3.x^2 = f'(3) = 3.3^2 = 27$

(a) Diferenciação numérica:

  * Diferenciação finita progressiva:
  $$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{4^3-3^3}{1} = 37 \rightarrow Erro = \left|\frac{37-27}{27}.100\right| = 37,04\%$$
  * Diferenciação finita regressiva:
  $$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{3^3-2^3}{1} = 19 \rightarrow Erro = \left|\frac{19-27}{27}.100\right| = 29,63\%$$
  * Diferenciação finita central:
  $$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{4^3-2^3}{2} = 28 \rightarrow Erro = \left|\frac{28-27}{27}.100\right| = 3,704\%$$

- $Nota : Erro_{relativo} = \left|\frac{Y_{aproximado} - Y_{real}}{Y_{real}}.100\right| = Y\%$

MN aplicados à Engenharia: Diferenciação Numérica

Exemplo I

Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule numericamente a derivada primeira no ponto $x = 3$ aplicando as fórmulas de diferenças finitas progressiva, regressiva e central, usando:

(a) os pontos $x = 2,75$, $x = 3$ e $x = 3,25$.

Compare os resultados com a derivada exata (analítica).

- Diferenciação analítica: $f'(x) = 3.x^2 = f'(3) = 3.3^2 = 27$

(b) Diferenciação numérica:

* Diferenciação finita progressiva:
$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{f(3,25) - f(3)}{3,25 - 3} = \frac{3,25^3 - 3^3}{0,25} = 29,3125 \rightarrow Erro = \left|\frac{29,3125 - 27}{27}.100\right| = 8,565\%$$
* Diferenciação finita regressiva:
$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{f(3) - f(2,75)}{3 - 2,75} = \frac{3^3 - 2,75^3}{1} = 24,8125 \rightarrow Erro = \left|\frac{24,8125 - 27}{27}.100\right| = 8,102\%$$
* Diferenciação finita central:
$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{f(3,25) - f(2,75)}{3,25 - 2,75} = \frac{3,25^3 - 2,75^3}{3,25 - 2,75} = 27,0625 \rightarrow Erro = \left|\frac{27,0625 - 27}{27}.100\right| = 0,2315\%$$

- $Nota : Erro_{relativo} = \left|\frac{Y_{aproximado} - Y_{real}}{Y_{real}}.100\right| = Y\%$

Conclusão: Erro depende fortemente da distância entre os pontos!

MN aplicados à Engenharia

Figura: Solução computacional

```
X=[2,3,4]
ponto_p=3                         # Função filtro para localizar o ponto_p na lista
i=filter(lambda n:n == ponto_p,X)  # Índice de locação do ponto na lista X
i=X.index(ponto_p)
f=lambda x:x**3                   # Função de análise f(x)=x³
df = lambda x:3*x**2              # Derivada Analítica incluída manualmente

der = df(ponto_p)                 # Derivada numérica
dprog  =( f(X[i+1]) - f(X[i]) ) / (X[i+1]-X[i])
dcentr =( f(X[i+1]) - f(X[i-1]))/ (X[i+1]-X[i-1])
dregr  =( f(X[i]) - f(X[i-1]) ) / (X[i]-X[i-1])

print('-'*15),print("  RESULTADOS"),print('-'*15)
print("Dif.Analítica \tDif.Prog\tDif.Central\tDif.Regr")
print(f" \t{der}\t  {dprog}         \t  {dcentr}     \t   {dregr}")

# ***************************************************************************
# Resultados do erros
E=[]
E.append(round(abs(dprog-der)/der,2))
E.append(round(abs(dcentr-der)/der,2))
E.append(round(abs(dregr-der)/der,2))
print(f"\n Erros:\t\t {E[0]*100}%        \t  {E[1]*100}%     \t   {E[2]*100}%")
```

Fonte: Autor,(2020)

Figura: Resultados

```
---------------
  RESULTADOS
---------------
Dif.Analítica   Dif.Prog        Dif.Central     Dif.Regr
        27       37.0            28.0            19.0

 Erros:          37.0%           4.0%            30.0%
```

Fonte: Autor,(2020)

(*)Dados de entrada: $x = [2\ 3\ 4]$ e $p = 3$

MN aplicados à Engenharia

Em um experimento de vibração, um bloco de massa m é preso a uma mola com dureza k e a um amortecedor com coeficiente de amortecimento c. Para que o experimento tenha início, o bloco é retirado da posição de equilíbrio e solto. A posição do bloco em função do tempo é gravada em uma freqüência de 5 Hz (5 vezes por segundo). Os dados no intervalo $4 \leq t \leq 8s$ são dados dispostos nas colunas 1 (x-(cm)) e coluna 2(t-(s)) da matriz ao lado:
Pede-se:

(a) A velocidade do bloco é a derivada da posição em relação ao tempo. Use a fórmula de diferença finita central para calcular a velocidade nos tempos $t = 5s$ e $t = 6s$.

(b) Escreva uma função no Matlab/Octave (Python) que calcule a derivada de uma função descrita por um conjunto de pontos. A função deve calcular a derivada no primeiro e no último ponto usando as fórmulas de diferenças finitas progressiva e regressiva, respectivamente, e usando a fórmula de diferença finita central nos demais pontos.

Figura: x(cm) e t(s)

-5.87000	4.00000
-4.23000	4.20000
-2.55000	4.40000
-0.89000	4.60000
0.67000	4.80000
2.09000	5.00000
3.31000	5.20000
4.31000	5.40000
5.06000	5.60000
5.55000	5.80000
5.78000	6.00000
5.77000	6.20000
5.52000	6.40000
5.08000	6.60000
4.46000	6.80000
3.72000	7.00000
2.88000	7.20000
2.00000	7.40000
1.10000	7.60000
0.23000	7.80000
-0.59000	8.00000

Fonte: (Autor,2020)

MN aplicados à Engenharia

(a) Calculando a velocidade pela diferenciação finita central

t=5s $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=xi} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=5} = \frac{f(5,2) - f(4,8)}{5,2 - 4,8} = \frac{3,31 - 0,67}{0,4} = 6,6\ cm/s$

t=6s $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=xi} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=6} = \frac{f(6,2) - f(5,8)}{6,2 - 5,8} = \frac{5,77 - 5,55}{0,4} = 0,55\ cm/s$

(b) - Script

MN aplicados à Engenharia

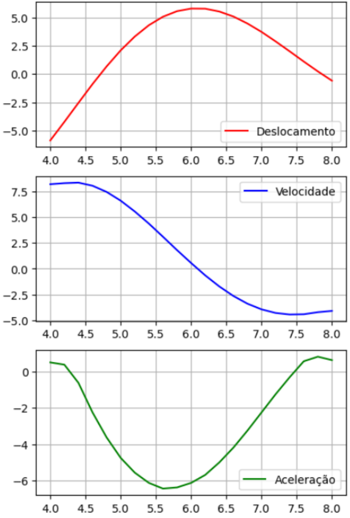
Figura: Script e gráficos

```python
# Solução utilizando vetor de zeros e atualizando-o
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Dados
t=np.arange(4,8.2,0.2)
x=np.array([-5.87, -4.23, -2.55, -0.89, 0.67, 2.09, 3.31, 4.31,
            5.06, 5.55, 5.78, 5.77, 5.52, 5.08, 4.46, 3.72, 2.88,
            2.00,1.10, 0.23, -0.59])

def derive(X,Y):                               # Derivadas
    dx=np.zeros(len(x))                        # Vetores de derivadas
    i=0                                        # Primeiro elemento do vetor
    dx[i] = (Y[i+1] - Y[i] ) / (X[i+1]-X[i])   # Progressiva
    i=-1                                       # Último elemento do vetor
    dx[-1] = (Y[i] - Y[i-1] ) / (X[i]-X[i-1])  # Regressiva
    for i in range(1,len(x)-1):                # Elementos intermediários
        dx[i] = (Y[i+1] - Y[i-1])/ (X[i+1]-X[i-1]) # Central
    return dx

def graf(t,x,vel,acc):
    labels=['Deslocamento','Velocidade','Aceleração']
    colors=['r','b','g']
    plt.figure(figsize=(5,8))
    for i,j in enumerate([x,vel,acc]):
        plt.subplot(3,1,i+1)
        plt.plot(t,j,label = labels[i],color=colors[i])
        plt.legend(),plt.grid(True)

vel,acc = derive(t,x), derive(t,derive(t,x))
graf(t,x,vel,acc)
```



Fonte: (Autor,2024)

MN aplicados à Engenharia

Diferenciação Numérica usando a expansão da série de Taylor

- A partir da expansão em série de Taylor pode-se deduzir as fórmulas de diferenças finitas progressiva, regressiva e central.
- Essas fórmulas fornecem uma estimativa da derivada em um ponto usando valores de pontos em sua vizinhança.
- O número de pontos usados nos cálculos varia com a fórmula, e os pontos podem estar à frente, atrás ou em ambos os lados do ponto onde se calcula a derivada.
- Uma vantagem do uso da expansão em série de Taylor na dedução das fórmulas está no fato de ela fornecer uma estimativa do **erro de truncamento** presente na aproximação.

MN aplicados à Engenharia

Diferença finita progressiva com dois pontos para a derivada primeira

- $f(x_{i+1})$ aproximado pela série de Taylor em termos do valor da função e de suas derivadas no ponto xi resulta em:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x_i)}{4!}h^4 + \ldots$$

  $h = x_{i+1} - x_i$ é a distância entre os pontos.
- Reescrevendo as equações com **dois termos e um resíduo**(ξ) (valor entre x_i e x_{i+1}) tem-se:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$$

- Isolando-se o **termo de interesse** $f'(x_i)$ tem-se:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2!}h$$

- Um valor aproximado de $f'(x_i)$ introduz um erro de truncamento (discretização). Declarando como zero o termo de $f(\xi)$ o erro de truncamento é da ordem de h(escrito como $O(h)$), por ser este proporcional àquele.

MN aplicados à Engenharia

Diferença finita progressiva com dois pontos para a derivada primeira

Portanto:

- **Erro de truncamento** - erro dado em função da distância entre pontos vale:

$$Erro\ de\ truncamento = \frac{f''(\xi)}{2!}h = O(h)$$

- **Aproximação** da derivada primeira finita progressiva por Série de Taylor

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - O(h)$$

MN aplicados à Engenharia

A mesma estrutura de aproximação para a derivada primeira é usada,portanto, para:

- Diferença finita regressiva com dois pontos resultando em:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - O(h)$$

- Diferença finita central com dois pontos resultando em:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{h} - O(h^2)$$

Na aproximação por diferença central o erro de truncamento é da ordem de h^2. Isso indica que a aproximação por diferença central fornece uma aproximação mais precisa para a derivada!

MN aplicados à Engenharia

Aproximação de derivadas finitas por **Série de Taylor** - *Derivada primeira*

- **Derivada primeira com 2 pontos**
  - Diferença progressiva - $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$ com $O(h)$
  - Diferença regressiva - $f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$ com $O(h)$
  - Diferença central - $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{h}$ com $O(h^2)$
- **Derivada primeira com 3 pontos**
  - Diferença progressiva - $f'(x_i) = \dfrac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{2h}$ com $O(h^2)$
  - Diferença regressiva - $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-1}) + 3f(x_i)}{2h}$ com $O(h^2)$
- **Derivada primeira com 4 pontos** - necessita de x_{i-2} *a* x_{i+1}
  - Diferença central
    $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i-2}) - 8f(x_{i-1}) + 8f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{12h}$ com $O(h^4)$

MN aplicados à Engenharia

Aproximação de derivadas finitas por **Série de Taylor** - *Derivada segunda*

- **Derivada segunda com 3 pontos**
    - Diferença progressiva - $f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{h^2}$ com $O(h)$
    - Diferença regressiva - $f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i-2}) - 2f(x_{i-1}) + f(x_i)}{h^2}$ com $O(h)$
    - Diferença central - $f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2}$ com $O(h^2)$
- **Derivada segunda com 4 pontos**
    - Diferença progressiva - $f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i+1}) + 4f(x_{i+2}) - f(x_{i+3})}{h^2}$ com $O(h^2)$
    - Diferença regressiva - $f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i-3}) + 4f(x_{i-2}) - 5f(x_{i-1}) + 2f(x_i)}{h^2}$ com $O(h^2)$
- **Derivada segunda com 5 pontos** - central necessita de x_{i-2} *a* x_{i+2}
    - Diferença central $f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i-2}) + 16f(x_{i-1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{12h^2}$ com $O(h^4)$

MN aplicados à Engenharia

Aproximação de derivadas finitas por **Série de Taylor** - *Derivada terceira*

- **Derivada terceira com 4 pontos**
  - Diferença progressiva - $f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_i) + 3f(x_{i+1}) - 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})}{h^3}$ com $O(h)$
  - Diferença regressiva - $f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-2}) - 3f(x_{i-1}) + f(x_i)}{h^3}$ com $O(h)$
  - Diferença central - $f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i-2}) + 2f(x_{i-1}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{2h^3}$ com $O(h^2)$
- **Derivada terceira com 5 pontos**
  - Diferença progressiva - $f'''(x_i) = \dfrac{-5f(x_i) + 18f(x_{i+1}) - 24f(x_{i+2}) + 14f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+4})}{2h^3}$ com $O(h^2)$
  - Diferença regressiva - $f'''(x_i) = \dfrac{3f(x_{i-4}) - 14f(x_{i-3}) + 24f(x_{i-2}) - 18f(x_{i-1}) + 5f(x_i)}{2h^3}$ com $O(h^2)$
- **Derivada terceira com 6 pontos** - central necessita de x_{i-2} *a* x_{i+3}
  - Diferença central $f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i-3}) - 8f(x_{i-2}) + 13f(x_{i-1}) - 13f(x_{i+1}) + 8f(x_{i+2}) - f(x_{i+3}))}{8h^3}$ com $O(h^4)$

MN aplicados à Engenharia

Exemplo comparativo

MN aplicados à Engenharia

Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule numericamente a derivada primeira no ponto $x = 3$ aplicando as fórmulas de diferenças finitas progressiva, regressiva e central, usando:

(a) os pontos $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$.

(b) os pontos $x = 3$, $x = 3,25$ e $x = 3,5$.

Compare os resultados com a derivada exata (analítica).

- Diferenciação analítica: $f'(3) = 3.3^2 = 27$
- Diferenciação numérica com três pontos:

  (a) os pontos $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$.
  $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{2h} = \frac{-3f(3) + 4f(4) - f(5)}{2(4-3)} = \frac{-3.(27) + 4.(64) - (125)}{2(4-3)} = 25 \rightarrow$
  $Erro = \left|\frac{25-27}{27}.100\right| = 7,4\%$

  (b) os pontos $x = 3$, $x = 3,25$ e $x = 3,5$.
  $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{2h} = \frac{-3f(3) + 4f(3,25) - f(3,5)}{2(3,25-3)} = \frac{-3.(27) + 4.(3,25^3) - (3,5^3)}{2(0,25} =$
  $26,875 \rightarrow Erro = \left|\frac{26,875-27}{27}.100\right| = 0,46\%$

MN aplicados à Engenharia

Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule numericamente a derivada primeira no ponto $x = 3$ aplicando as fórmulas de diferenças finitas progressiva, regressiva e central, usando:

- Para os pontos $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$, tem-se:
  - Resultado de 37 com erro de $37,04\%$ - Diferença finita progressiva com 2 pontos
  - Resultado de 25 com erro de $7,04\%$ - Diferença finita progressiva com 3 pontos
- Para os pontos $x = 3$, $x = 3,25$ e $x = 3,5$, tem-se:
  - Resultado de $26,875$ com erro de $0,46\%$ - Diferença finita progressiva com 2 pontos
- Os resultados mostram que a diferença finita progressiva com três pontos fornece uma derivada **primeira** muito mais precisa do que a diferença finita progressiva com dois pontos.
- Para $h = 1$, o erro cai de $37,04\%$ para $7,4\%$.
- Para $h = 0,25$, o erro cai de $8,57\%$ para $0,46\%$.

MN aplicados à Engenharia

Considere a função $f(x) = \frac{2^x}{x}$. Calcule numericamente a derivada segunda no ponto $x = 2$ aplicando a fórmula de diferença central com três pontos, usando:

(a) os pontos x = 1,8, x = 2 e x = 2,2.

(b) os pontos x = 1,9, x = 2 e x = 2,1.

- **Solução analítica** - A derivada segunda da função $f(x) = \frac{2^x}{x}$ é

$$f''(x) = \frac{2^x[ln(2)^2]}{x} - \frac{2.2^x[ln(2)]}{x^2} + \frac{2.2^x}{x^3}$$

  de modo que o valor da derivada em $x = 2$ é **f''(2) = 0,5746**.

- **Diferenciação numérica**

Figura: Solução python $f''(x)$

```
import sympy as sp
f=lambda x:(2**x)/x
def derivada(k,ordem=1):
        x = sp.Symbol('x')
        fun = k(x)
        dh=sp.diff(fun,x,ordem)
        return sp.lambdify(x,dh,'numpy')
df = derivada(f,2)
df(2)
```

```
0.5746116667165122
```

Fonte: Autor,(2024)

MN aplicados à Engenharia

Considere a função $f(x) = \frac{2^x}{x}$. Calcule numericamente a derivada segunda no ponto $x = 2$ aplicando a fórmula de diferença central com três pontos, usando:

(a) os pontos x = 1,8, x = 2 e x = 2,2.

(b) os pontos x = 1,9, x = 2 e x = 2,1.

- **Diferenciação numérica**

Figura: Solução Python itens ‘a’ e ‘b’

```
a,b =[1.8,2,2.2],[1.9,2,2.1]
def der_st(X):
    h=X[0]-X[1]
    y=[2**x/x for x in X]
    df=(y[0]-2*y[1]+y[2])/h**2 # central
    return round(df,6)
print(der_st(a), der_st(b))
```

```
0.577482 0.575324
```

Fonte: Autor,(2024)

- Erro do item (a):
  $erro = \frac{0{,}577482 - 0{,}5746}{0{,}5746}.100 = \mathbf{0{,}5016\%}$
- Erro do item (b):
  $erro = \frac{0{,}575324 - 0{,}5746}{0{,}5746}.100 = \mathbf{0{,}126\%}$

Os resultados mostram que a fórmula da derivada central com três pontos fornece uma aproximação bastante precisa para o valor da derivada segunda.

Exercícios

Veja a lista de exercícios na web