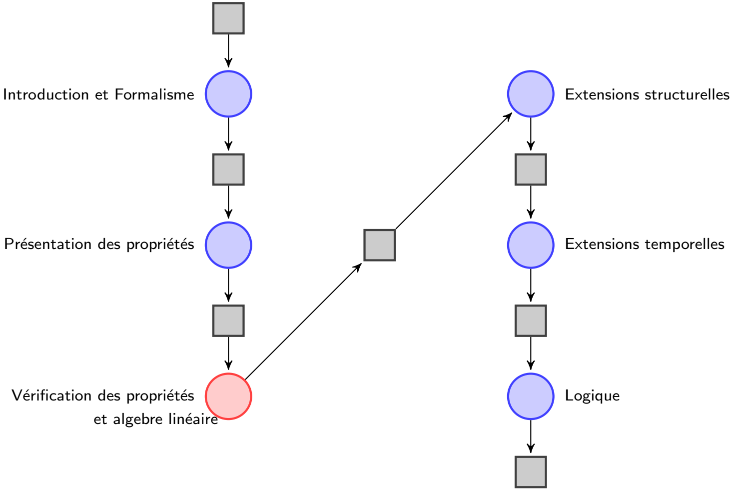
Réseaux de Petri: Vérification des propriétés

Pascal Racloz, Didier Buchs

Université de Genève

16 octobre 2017


Introduction et Formalisme
Présentation des propriétés
Vérification des propriétés
et algebre linéaire
Extensions structurelles
Extensions temporelles
Logique

Les concepts introduits

- Arbre et graphe de marquage
- Arborescence et graphe de couverture

Graphe des marquages

L' idée la plus naturelle pour étudier un réseau est de construire son graphe des marquages accessibles.

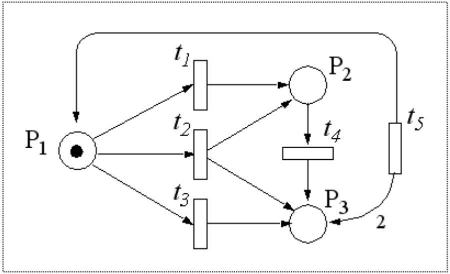
- Graphe fini

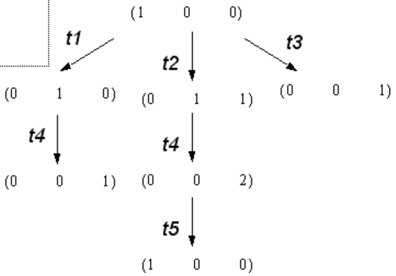
C'est la situation la plus favorable car alors toutes les propriétés peuvent être déduites simplement par inspection de celui-ci.

- Graphe infini

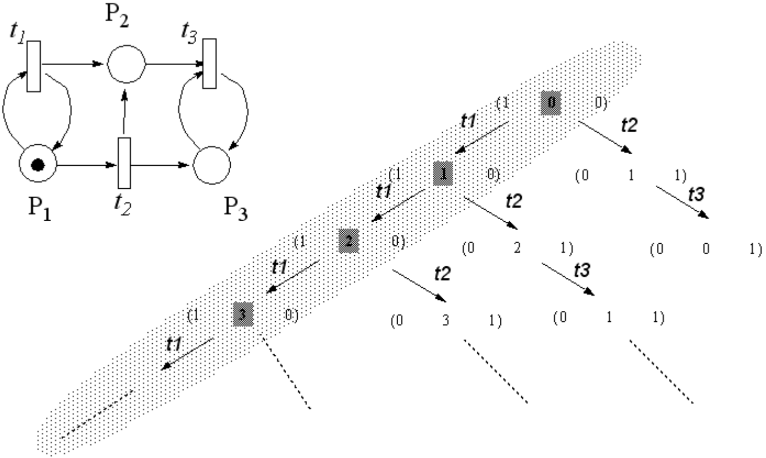
Dans ce cas, on construit un autre graphe appelé *graphe de couverture* permettant de déduire certaines propriétés.

Arbre, graphe fini

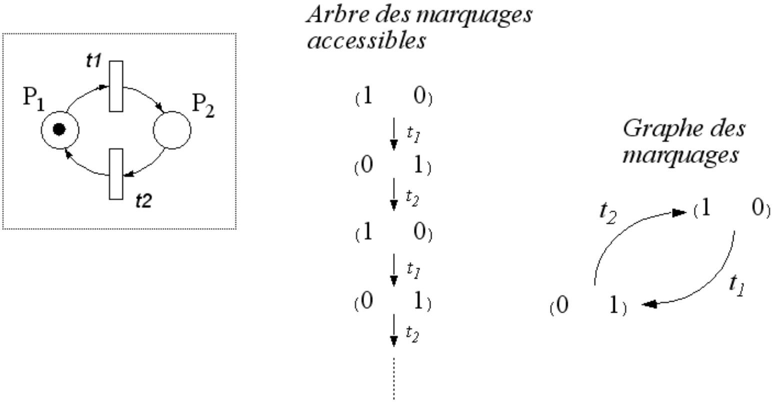




Arbre, graphe infini



Arbre et graphe



Le symbole ω

- Ce symbole peut être considéré comme représentant une quantité arbitrairement grande de jetons. $\omega \notin \mathbb{N}$.
- Propriétés de ω : pour toute constante (entière) n

$$\omega + n = \omega$$

$$\omega - n = \omega$$

$$n < \omega$$

$$donc\ \omega \leq \omega$$

- Ce symbole va servir à construire l'arbre de couverture dans le cas d'un graphe des marquages infini

L'algorithme de construction de l'arborescence de couverture

- Définitions, notations
  - $\mathbb{N}_\omega$ est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$
  - $\mathbb{N}_\omega^m$ est donc un vecteur a m composantes dans N_ω
  - Pour $Q \in \mathbb{N}_\omega^{|P|}$, $Q^{-1}(\omega) = \{p \in P | Q(p) = \omega\}$
- L'arborescence de couverture, notée $AC(N)$ où $N = (R, M_0)$ est un réseau marqué, est une arborescence (S, X, μ, λ, r) où
  - les sommets de S sont étiquetés par des vecteurs de $\mathbb{N}_\omega^m$, $\mu : S \to \mathbb{N}_\omega^m$ (m=$|P|$=cardinal(P))
  - r est la racine, $\mu(r) = M_0$.
  - les arcs de $X \subseteq S \times S$ sont étiquetés par des transitions de T, $\lambda : X \to T$

L'algorithme

$AC(N) = (S, X, \mu, \lambda, r)$ est construite par la procédure suivante :

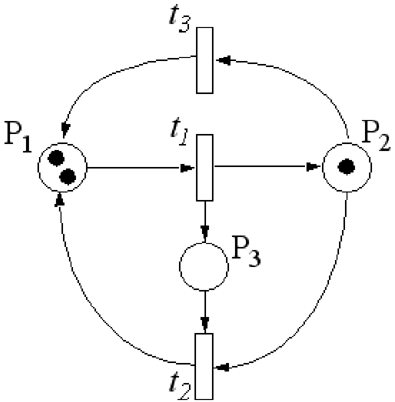
- (1) La racine r est étiquetée par M_0
- (2) Un sommet s étiqueté par $Q \in \mathbb{N}_\omega^m$ n'a pas de successeur si et seulement si
  - soit il existe sur le chemin de r à s un sommet s' étiqueté également par Q
  - soit il n'existe pas de transition t telle que $Entree(., t) \subseteq Q$
- (3) Si s étiqueté par Q ne vérifie pas les conditions de (2), alors pour toute transition t telle que $Entree(., t) \subseteq Q$, il existe un sommet s' successeur de s. L'arc (s,s') est étiqueté par t, le sommet s' est étiqueté par Q', où Q' est défini comme suit :
  - Si il existe sur le chemin de r à s' un sommet s'' étiqueté par Q'' avec $Q'' \subseteq Q + C(., t)$, alors pour tout p telle que $Q''(p) < Q(p) + C(p, t)$ on a $Q'(p) = \omega$.
  - Dans le cas contraire $Q'(p) = Q(p) + C(p, t)$.

continuer en 2 avec un sommet non exploré.

Exercice

- Arbre de couverture

Construire l'arbre de couverture du réseau suivant :



Exercice (...)

Graphe de couverture

- Le graphe de couverture, noté GC(N), est obtenu de l'arborescence de couverture en fusionnant les sommets étiquetés par les mêmes éléments (vecteurs) et redirigeant les arcs entre les sommets ainsi obtenus.
- Propriétés
  - Il est toujours possible de construire le graphe de couverture, celui-ci est fini (terminaison).
  - Si s est une séquence de franchissement telle que $M_0 \xrightarrow{s} M$ alors il existe un chemin dans GC(N) partant de M_0 conduisant à un sommet Q tel que

$$\forall p \in P, M(p) \leq Q(p)$$

  - Q 'couvre' P, d'où le nom du graphe.

Terminaison

Degré d'un graphe
Nombres d'arcs sortant d'un noeud

Lemme de Koenig Soit A un arbre de degré fini, comportant un nombre de noeuds infini. L'arbre A admet alors une branche infinie.

Lemme d'Extraction
Soit m0,m1,... une suite infinie de vecteurs de $\mathbb{N}^m$, $\{$m0,m1,...$\}$ est infini
Cette suite admet alors une sous suite croissante.

Terminaison

Preuve de la terminaison : Par l'absurde, alors l'arbre de couverture est infini.

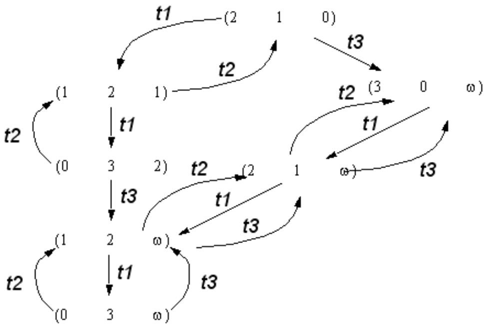
D'après Koenig cet arbre contient une branche infinie. Le lemme d'extraction pour $\mathbb{N}_\omega^m$ indique que l'on peut extraire une sous-branche infinie croissante (même strictement à cause de la condition de continuation de la procédure).

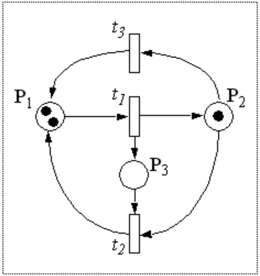
Par l'arithmétique de $\mathbb{N}_\omega^m$ les ω ne peuvent disparaitre sur une branche, supposons que sur une branche deux noeuds aient même $\omega - composantes$. Cela signifie aucune création de nouvelles $\omega - composantes$ ce qui est en contradiction avec la condition de poursuite de l'exploration.

Le nombre de création de nouvelles composantes ω est bornées par la taille en places ! ! $\Rightarrow$ contradiction.

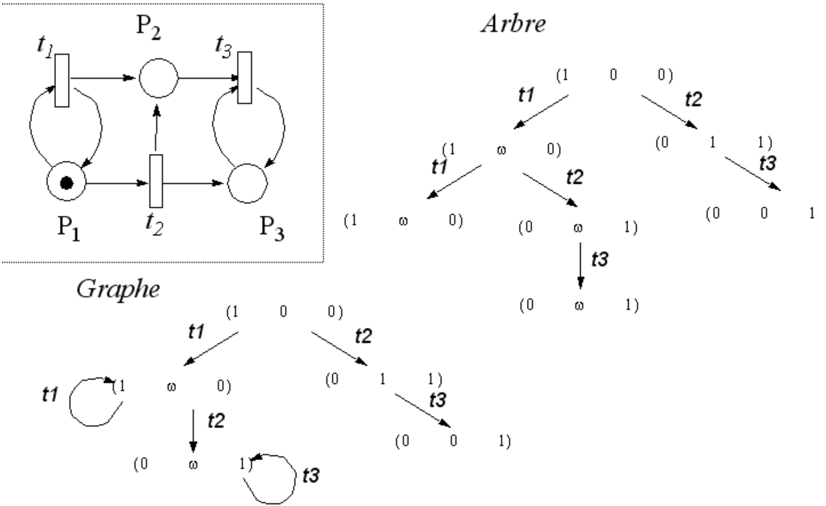
(Suite exercice)

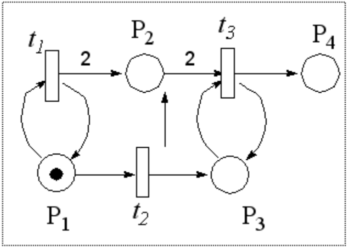
Graphe de couverture

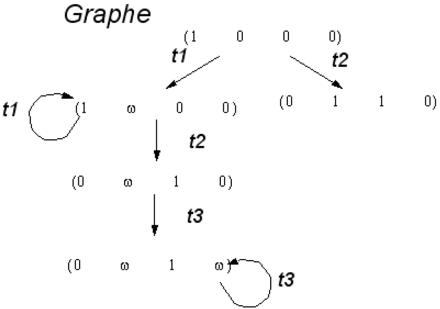




Arborescence de couverture







Couverture:

$M_0 = (1, 0, 0, 0)$

$s = t_1 t_1 t_1 t_2 t_3 \qquad M_0 \xrightarrow{s} M$

$M = (0, 4, 1, 1)$ couvert par $(0, \omega, 1, \omega)$

Couvert mais pas accessible:

$M' = (0, 5, 1, 7)$

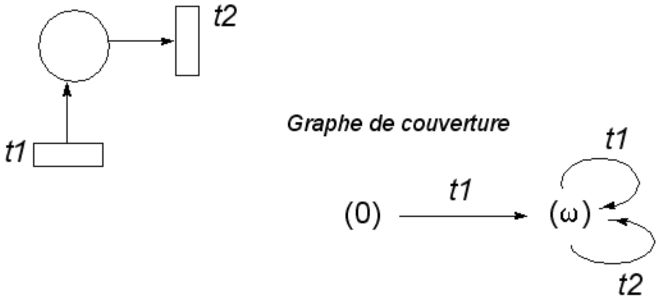
Réseau borné et graphe de couverture

- Un réseau marqué N est non-borné si et seulement si il existe un sommet Q de GC(N) tel que $Q^{-1}(\omega) \neq \emptyset$
- Une place p d'un réseau marqué N est non-bornée si il existe un sommet Q de GC(N) tel que $Q(p) = \omega$
- Si le réseau marqué N est borné, le graphe de couverture et le graphe des marquages sont identiques

Limitation du graphe de couverture

- Le symbole ω correspond à une perte d'information
- D'une manière générale, ce graphe ne permet pas de répondre à des questions concernant
  - L'accessibilité d'un marquage
  - La vivacité du réseau
- Mais dans certains cas oui...

Perte d'information dans le graphe de couverture



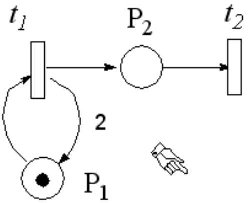
- Le mot

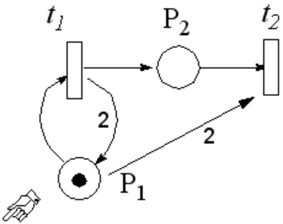
  t1 t2 t2

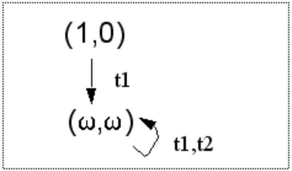
  étiquette bien un chemin du graphe de couverture partant de M_0 et pourtant la séquence n'est pas tirable depuis M_0.

Perte d'information (suite)

Graphe de couverture identique mais comportement différent...







Accessibilité

- Dans le cas d'un réseau **borné** un marquage M est atteignable si et seulement si le graphe des marquages accessibles contient un noeud représentant M.
- Dans le cas d'un réseau **non-borné**, il est impossible de vérifier à l'aide d'un graphe de couverture si M est accessible. On peut 'seulement' vérifier qu'il existe un marquage M' tel que $M' \supseteq M$.

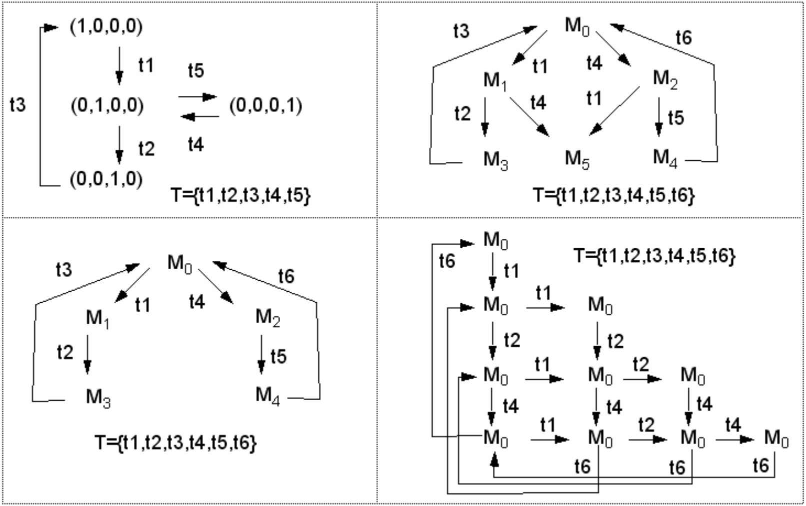
Rappels

- **Composante fortement connexe** d'un graphe :
sous-graphe tel qu'il existe un chemin (orienté) entre tout point A et tout point B de ce sous-graphe.
- **Arc sortant** d'une composante fortement connexe :
arc qui a comme sommet origine un sommet de cette composante et comme extrémité un sommet qui n'appartient pas à cette composante.

Réseau borné et vivacité

- Une **transition** t d'un rdP borné est **vivante** si et seulement si, partant d'un noeud quelconque du graphe des marquages accessibles, il existe un chemin orienté contenant un arc marqué t. La transition t est vivante si et seulement si chaque composante fortement connexe et sans arc sortant du graphe contient un arc marqué t.
- Un **rdP** borné est **vivant** si et seulement si chaque composante fortement connexe du graphe qui n'a pas d'arc sortant contient au moins un arc marqué par chaque transition.
- Un **rdP** borné est **sans blocage** si et seulement si chaque noeud de son graphe est origine d'au moins un arc.

Exercices (rdP bornés) que peut-on dire ?

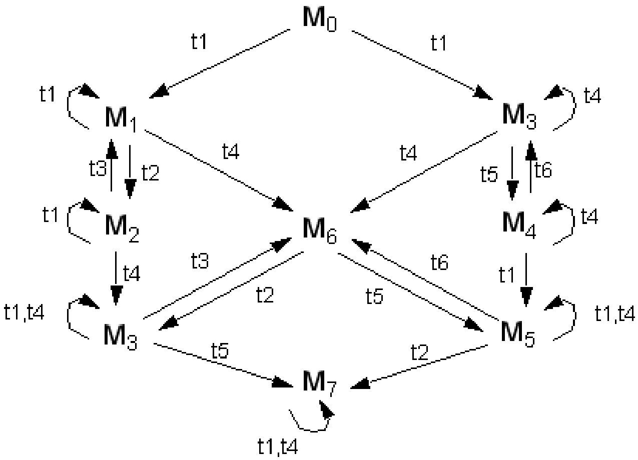


Réseau non borné et vivacité

- Une **transition** t d'un rdP non borné n'est **pas vivante** si le graphe de couverture possède une composante fortement connexe sans arc sortant dans laquelle aucun arc n'est marqué t.
- Un **rdP** non borné nest **pas vivant** si son graphe de couverture possède au moins une composante fortement connexe sans arc sortant et dont l'union des transitions attachées aux arcs n'est pas l'ensemble des transitions.
- Un **rdP** non borné est **avec blocage** si son graphe de couverture contient un noeud qui n'est l'origine d'aucun arc.

Exercice

- RdP non borné : que peut-on dire ? (T=t1,t2,t3,t4,t5,t6)

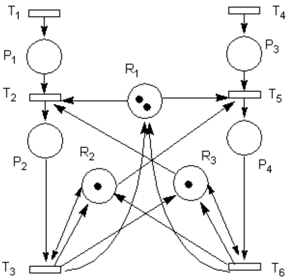


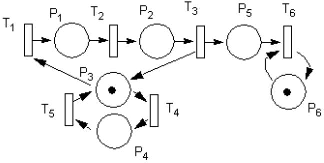
Réseau borné, réversibilité et état d'accueil

- Un **rdP** borné est **réversible** si et seulement si son graphe des marquages accessibles est fortement connexe.
- Un **rdP** borné accepte un état d'accueil si et seulement si son graphe des marquages atteignables possède une et une seule composante fortement connexe sans arc sortant. De plus l'ensemble des marquages figurant dans cette composante donne l'ensemble des état d'accueil.
- Si un rdP possède un état d'accueil, son graphe de couverture possède une et une seule composante fortement connexe sans arc sortant. Si de plus il est réversible, il existe un marquage M' de cette composante tel que $M'(p) = M_0(p)$ ou $M'(p) = \omega, \forall p \in P$.

Exercice

- Réversibilité : construire les graphes de couverture des rdP suivants, que peut-on déduire ?





Résumé

- L'algorithme de construction du graphe de couverture se termine toujours, permet de déduire des propriétés sur le 'bornage' des places et sur l'inaccessibilité de certains marquages.
- Le graphe de couverture et le graphe des marquages sont identiques si toutes les places sont bornées. Dans le cas contraire, il y a perte de certaines informations.