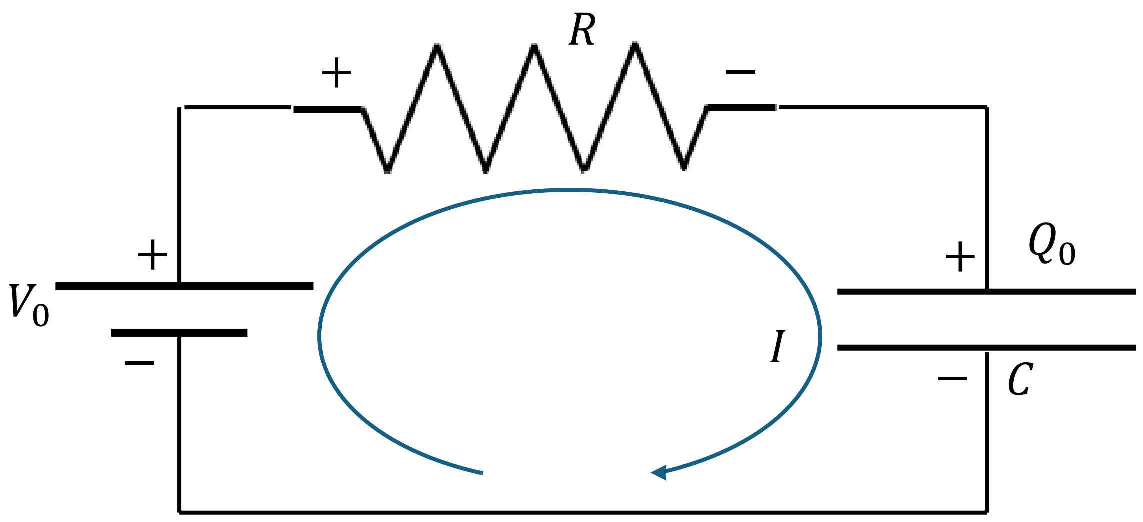
Circuitos dependientes del tiempo

Veamos ahora el circuito de carga de un capacitor.



Supongamos que tenemos un capacitor C cargado inicialmente con una carga Q_0, y se lo alimenta con una fuente V_0 que tiene una resistencia R.
Suponemos que circula una corriente I en algún sentido y, en base al sentido elegido, aplicamos las diferencias de potencial sobre los elementos pasivos.

Si comenzamos, por ejemplo, por el borne negativo de la pila y circulamos la malla en sentido horario, tendremos:

$$V_0 - R\,I - \frac{Q}{C} = 0$$

Se puede demostrar rigurosamente, por la ecuación de continuidad, que

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

donde $Q(t)$ es la carga en el capacitor al tiempo t.

Entonces la ecuación de la malla se puede escribir como:

$$R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0$$

dando lugar a una ecuación diferencial lineal de primer orden para la carga.

Además, tenemos la condición inicial $Q(0) = Q_0$, lo que determinará unívocamente la solución.

Entonces, procederemos como en el circuito $R - L$, para resolver la ecuación diferencial.

$$Q(t) = Q_P(t) + Q_H(t)$$

Propondremos $Q_P(t) = K \quad cte. \quad \rightarrow \frac{dQ_P}{dt} = 0$

$$\therefore \quad R\,0 + \frac{1}{C}K = V_0 \quad \rightarrow \quad K = V_0 C \quad \Rightarrow \quad Q_P(t) = V_0 C$$

Por otro lado, propondremos $Q_H(t) = e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad \frac{dQ_H}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$

Entonces, la ecuación homogénea queda $R\,\lambda\,e^{\lambda t} + \frac{1}{C}e^{\lambda t} = 0$

$\rightarrow \quad e^{\lambda t}\left(R\lambda + \frac{1}{C}\right) = 0$ Como la exponencial es siempre distinta de cero, tendremos que

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{RC}}$$

Definimos $\tau_C \equiv RC \quad ; \quad [\tau_C] = seg$ Verificarlo!

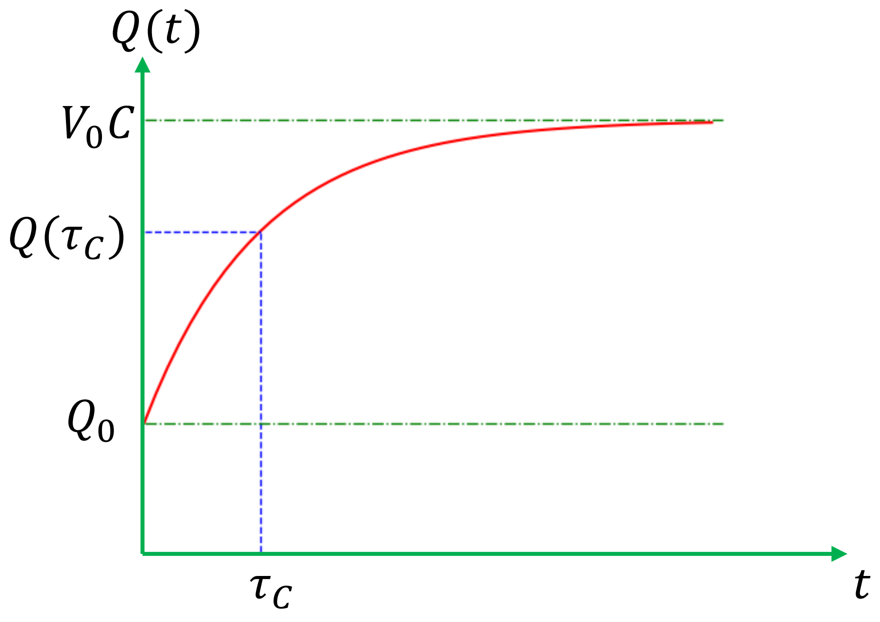
Entonces $Q_H(t) = A\, e^{-t/\tau_c}$ con $A \in \mathbb{R}$

De modo que todas las soluciones de la ecuación diferencial del circuito son de la forma

$Q(t) = V_0 C + A e^{-t/\tau_c}$ con $A \in \mathbb{R}$ La constante A sale por la condición inicial

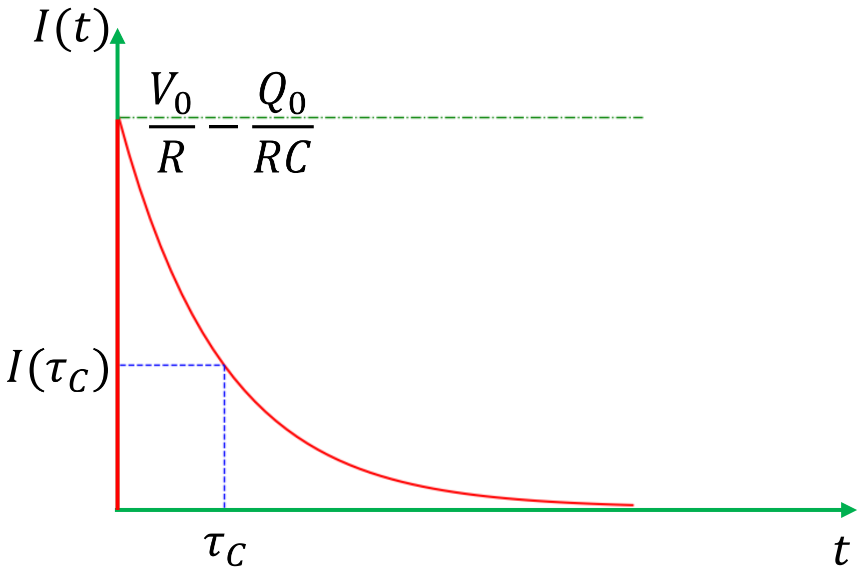
$Q(0) = V_0 C + A = Q_0 \quad \rightarrow \quad A = Q_0 - V_0 C$ Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} Q(t) &= V_0 C + (Q_0 - V_0 C) e^{-t/\tau_c} \\ I(t) &= \left(\frac{V_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}\right) e^{-t/\tau_c} \end{aligned}}$$



Como vemos, la solución particular coincide con el valor de la carga a tiempos muy largos.
El tiempo característico τ_C nos habla del tiempo que tarda el capacitor en cargarse completamente. Si bien matemáticamente, ese tiempo es infinito, en la práctica podemos afirmar que para $t = 5\tau_C$ ya está cargado.

$\lim_{R\to 0} \tau_C = 0$ por lo tanto, cuanto más pequeña es la resistencia, más rápido se carga el capacitor.



La corriente en este circuito sí es discontinua en el instante inicial, tomando el máximo valor absoluto que tiene y luego, decae a cero a medida que se carga el capacitor.

Si calculamos la diferencia entre la potencia entregada por la fuente y la disipada por la resistencia, tenemos que

$$P_{Neta} = P_f - P_R = V_0 I(t) - R I^2(t) = I(t)\big(V_0 - R\, I(t)\big) = I(t)\frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} Q(t) \frac{dQ}{dt}$$

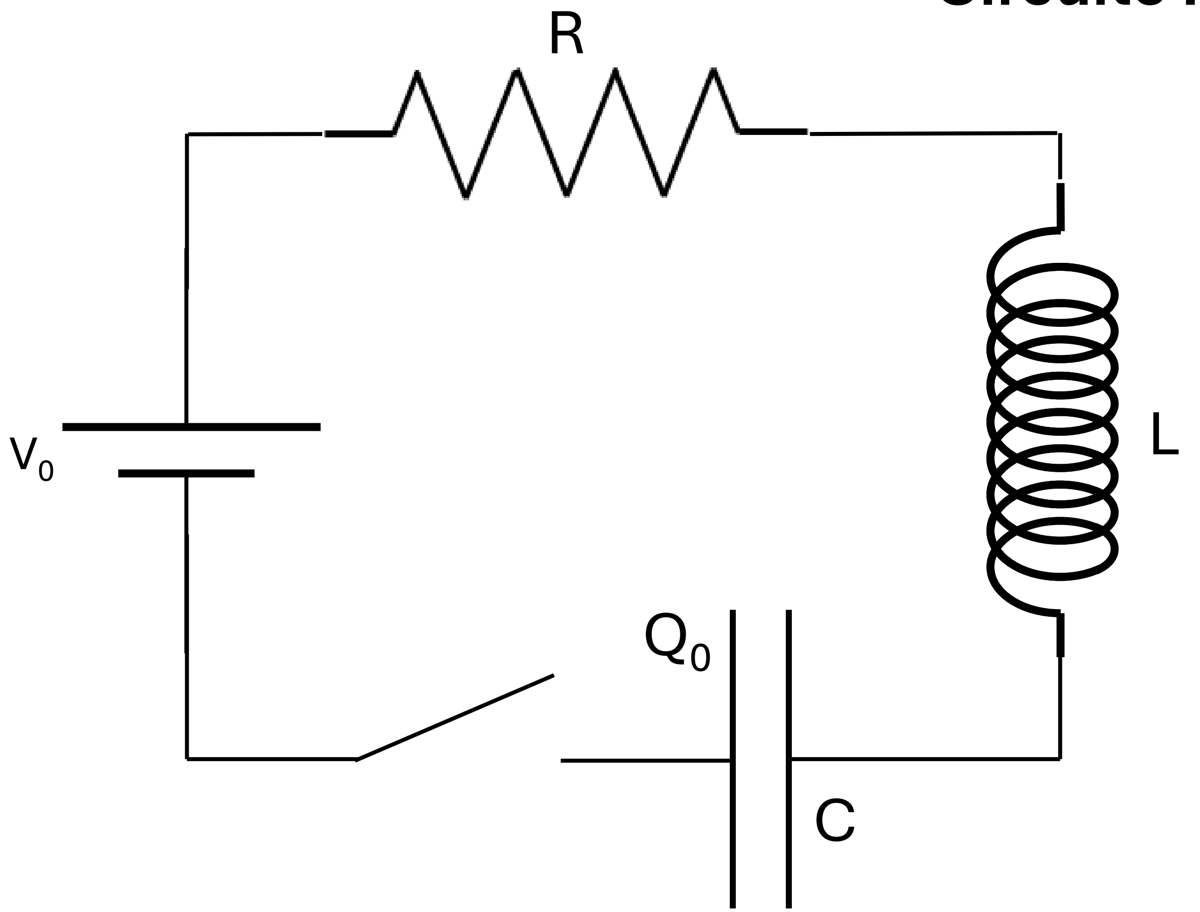
Entonces $$P_{Neta} dt = \frac{1}{C} Q\, dQ$$

Si integramos esta potencia en todo el tiempo, tendremos la energía almacenada en el capacitor

$$\int_0^\infty P_{Neta} dt = \int_0^\infty \frac{1}{C} Q\, dQ = \frac{1}{2C}\left(Q^2(t=\infty) - Q_0^2\right)$$

Esta es la energía final que gana el capacitor menos la energía con la que empezó.

Circuito R-L-C serie

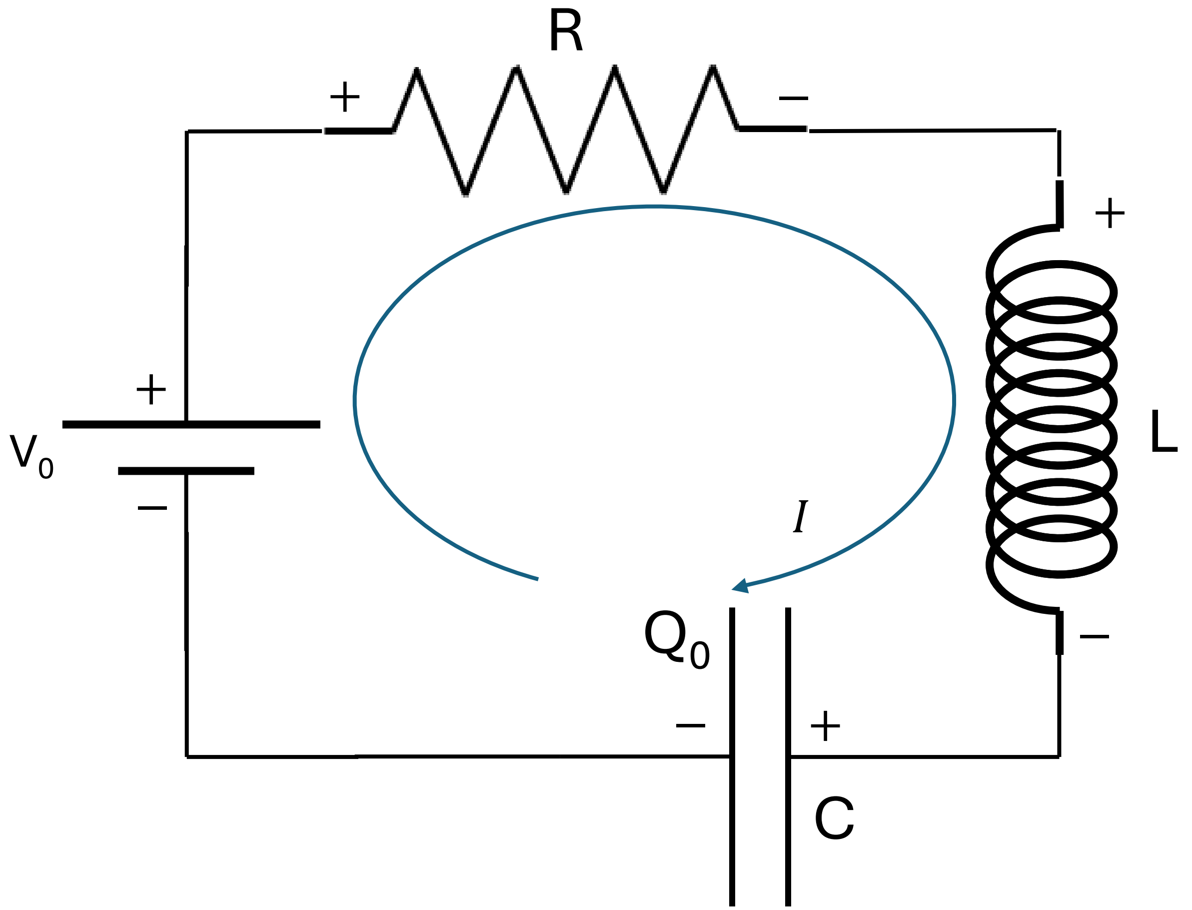


Tenemos ahora un circuito $R - L - C$ serie, alimentado por una pila. El capacitor tiene inicialmente una carga Q_0 y hay una llave que cierra el circuito para que comience a circular la corriente.

Las condiciones iniciales serán:

$$
\begin{aligned}
Q(0) &= Q_0 \\
I(0) &= \frac{dQ}{dt}(0) = 0
\end{aligned}
$$

Cuando cerramos la llave, el circuito se verá del siguiente modo:



La ecuación de la malla será

$$V_0 - R\,I - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0$$

Si reemplazamos la corriente por la derivada de la carga y reordenamos, tendremos que

$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de orden 2, razón por la cual tenemos dos condiciones iniciales

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_0 \\ \frac{dQ}{dt}(0) &= 0 \end{aligned}$$

El método para halla la solución es igual al utilizado en los anteriores circuitos, salvo que ahora el espacio vectorial de soluciones de la ecuación homogénea tiene dimensión 2, es decir, necesitamos encontrar dos funciones linealmente independientes entre sí que sean solución de la ecuación diferencial homogénea para generar el espacio de soluciones.

$Q(t) = Q_P(t) + Q_H(t)$ Propondremos $Q_P(t) = K \quad cte.$ $\rightarrow \dfrac{dQ_P}{dt} = 0$ y $\dfrac{d^2Q_P}{dt^2} = 0$

$L\,0 + R\,0 + \dfrac{1}{C}K = V_0 \quad \rightarrow \quad K = V_0 C$ como en el caso anterior

Para la ecuación homogénea, propondremos $Q_H(t) = e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad \dfrac{dQ_H}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \dfrac{d^2Q_H}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Reemplazando, $L\,\lambda^2 e^{\lambda t} + R\lambda e^{\lambda t} + \dfrac{1}{C}e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t}\left(L\lambda^2 + R\,\lambda + \dfrac{1}{C}\right) = 0$

Entonces, los valores de λ serán las raíces del polinomio $L\lambda^2 + R\,\lambda + \frac{1}{C} = 0$

$\therefore \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ Llamaremos $\tau_L = \frac{L}{R}$ y $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Las soluciones tienen diferente forma funcional según se relacionen los parámetros del circuito

- Caso 1: sobreamortiguado $\frac{R}{2L} > \omega_o$ Llamamos $\beta \equiv \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_L}\right)^2 - \omega_0^2}$ $0 < \beta < \frac{1}{2\tau_L}$

$\rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2\tau_L} + \beta \quad , \lambda_2 = -\frac{1}{2\tau_L} - \beta$ $\Longrightarrow$ $Q_H(t) = A\, e^{-\frac{t}{2\tau_L} + \beta t} + B e^{-\frac{t}{2\tau_L} - \beta t}$ $A, B \in \mathbb{R}$

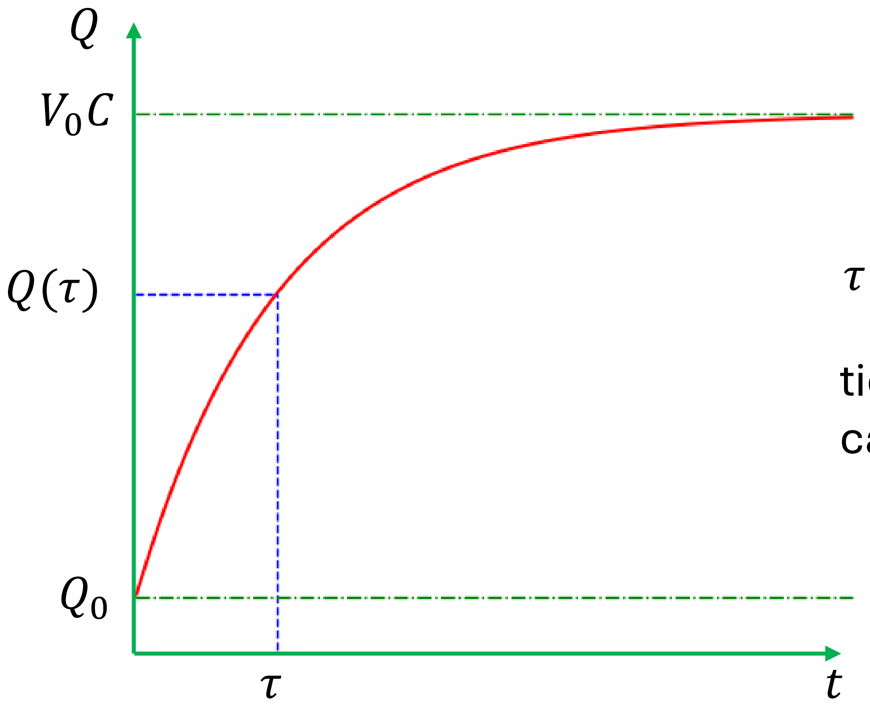
Podemos reescribir $Q_H(t) = e^{-\frac{t}{2\tau_L}}\left(A\, e^{\beta t} + B e^{-\beta t}\right)$

Acá se ve que, para cualquier valor de A y B, $\lim_{t \to \infty} Q_H = 0$

Entonces $Q(t) = V_0 C + e^{-1/2\tau_L}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right)$ y $I(t) = e^{-1/2\tau_L}\left[A\left(\beta - \frac{1}{2\tau_L}\right)e^{\beta t} - B\left(\beta + \frac{1}{2\tau_L}\right)e^{-\beta t}\right]$

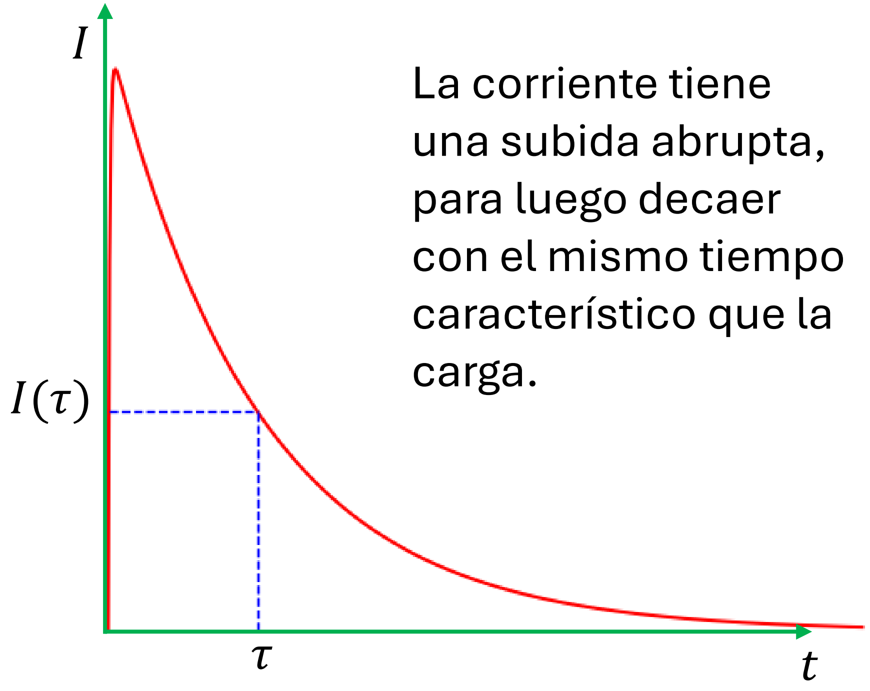
Los valores de A y B salen por las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} Q(0) &= Q_0 = V_0 C + A + B \\ I(0) &= 0 = A\left(\beta - \frac{1}{2\tau_L}\right) - B\left(\beta + \frac{1}{2\tau_L}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= \frac{(Q_0 - V_0 C)}{2}\left(1 + \frac{1}{2\tau_L \beta}\right) \\ B &= \frac{(Q_0 - V_0 C)}{2}\left(1 - \frac{1}{2\tau_L \beta}\right) \end{aligned}$$



$$\tau \equiv \frac{2\tau_L}{1 - 2\tau_L \beta}$$

tiempo característico



La corriente tiene una subida abrupta, para luego decaer con el mismo tiempo característico que la carga.

- Caso 2: amortiguamiento crítico $\frac{R}{2L} = \omega_o$

Este es un caso muy raro, pues debe darse la igualdad entre los parámetros exacta, pero lo consideramos por completitud.

Si ${}^{R}/_{2L} = \omega_0$, entonces sólo hay un valor de λ que surge como raíz del polinomio $\lambda_1 = -\frac{R}{2L}$

Esto significa que debemos hallar otra función, independiente de $e^{\lambda_1 t}$, que sea solución de la ecuación homogénea. Se propone, entonces,

$$Q_H(t) = t\, e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad \frac{dQ_H}{dt} = e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t}\ , \qquad \frac{d^2Q_H}{dt^2} = 2\lambda e^{\lambda t} + t\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Reemplazando tendremos:

$$L\left(2\lambda e^{\lambda t} + t\lambda^2 e^{\lambda t}\right) + R\left(e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t}\right) + \frac{t}{C}\, e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}\left[\left(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C}\right)t + (2L\lambda + R)\right] = 0$$

Para que sea $0\ \forall t$, el polinomio dentro del corchete debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{rcl} L\lambda^2 + R\lambda + \dfrac{1}{C} & = & 0 \\ 2L\lambda + R & = & 0 \end{array}\right\}$$

Estas son 2 ecuaciones con una sola incógnita, pero en este caso, como ${R^2}/{4L^2} = {1}/{LC}$, el sistema sobredeterminado tiene solución para

$$\lambda = -\frac{R}{2L}$$

Entonces, las dos soluciones independientes de la ecuación homogénea serán:

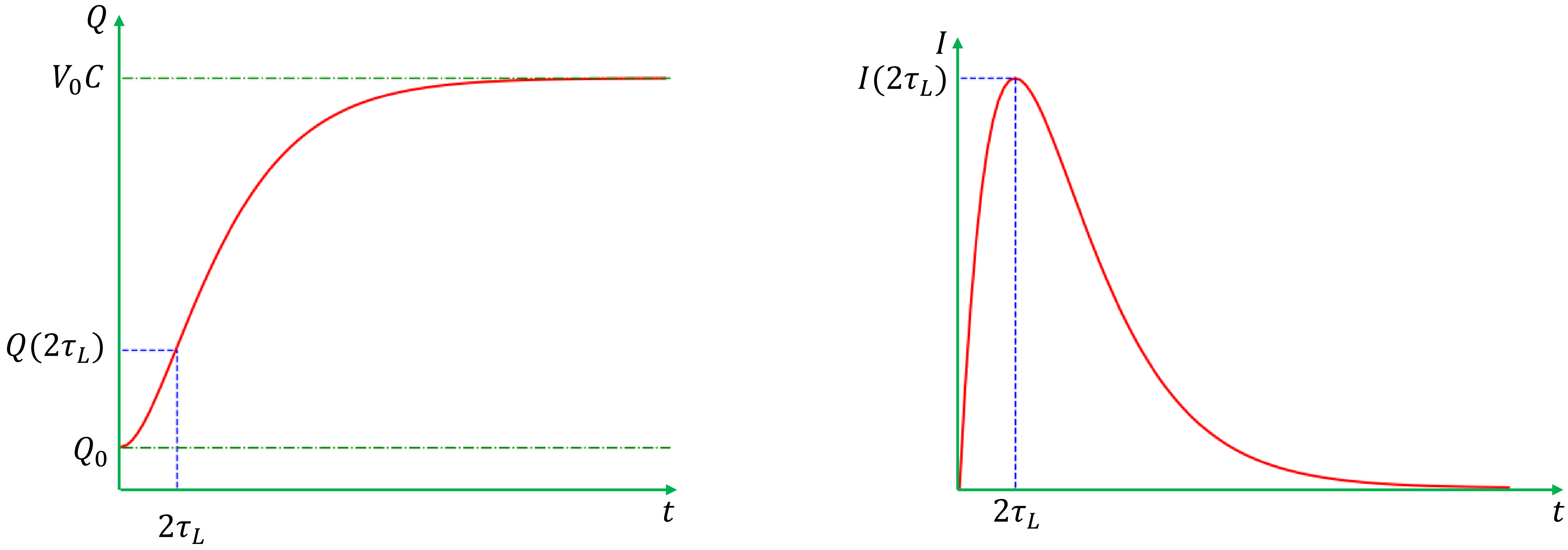
$$Q_H(t) = e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \qquad \text{y} \qquad Q_H(t) = t\, e^{-\frac{t}{2\tau_L}}$$

Así, la solución completa será de la forma $Q(t) = V_0 C + (A + Bt)e^{-\frac{t}{2\tau_L}}$, $I(t) = \left[-\dfrac{A}{2\tau_L} + B\left(1 - \dfrac{t}{2\tau_L}\right)\right] e^{-\frac{t}{2\tau_L}}$

con $A, B \in \mathbb{R}$

Los valores de A y B salen por las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} Q(0) = Q_0 = V_0 C + A \\ I(0) = 0 = B - \dfrac{A}{2\tau_L} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} A = Q_0 - V_0 C \\ B = \dfrac{Q_0 - V_0 C}{2\tau_L} \end{array}$$



Los comportamientos de las curvas son muy similares a los del caso 1, aunque con el menor tiempo de estabilización al equilibrio.

- Caso 3: oscilatorio amortiguado $\frac{R}{2L} < \omega_o$ Llamamos $\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau_L}\right)^2}$

$\rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2\tau_L} + i\omega_1 \quad , \lambda_2 = -\frac{1}{2\tau_L} - i\omega_1$ $\Longrightarrow$ $Q_H(t) = A\, e^{-\frac{t}{2\tau_L} + i\omega_1 t} + B e^{-\frac{t}{2\tau_L} - i\omega_1 t}$ $A, B \in \mathbb{C}$

Importante: los coeficientes A y B deben ser complejos para que el resultado sea real.

Para evitar el uso de números complejos, ya que los resultados deben ser reales, podemos escribir las exponenciales complejas como su forma trigonométrica cartesiana.

$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\ \operatorname{sen}\alpha$ De este modo, las soluciones para la ecuación homogénea se podrán escribir como:

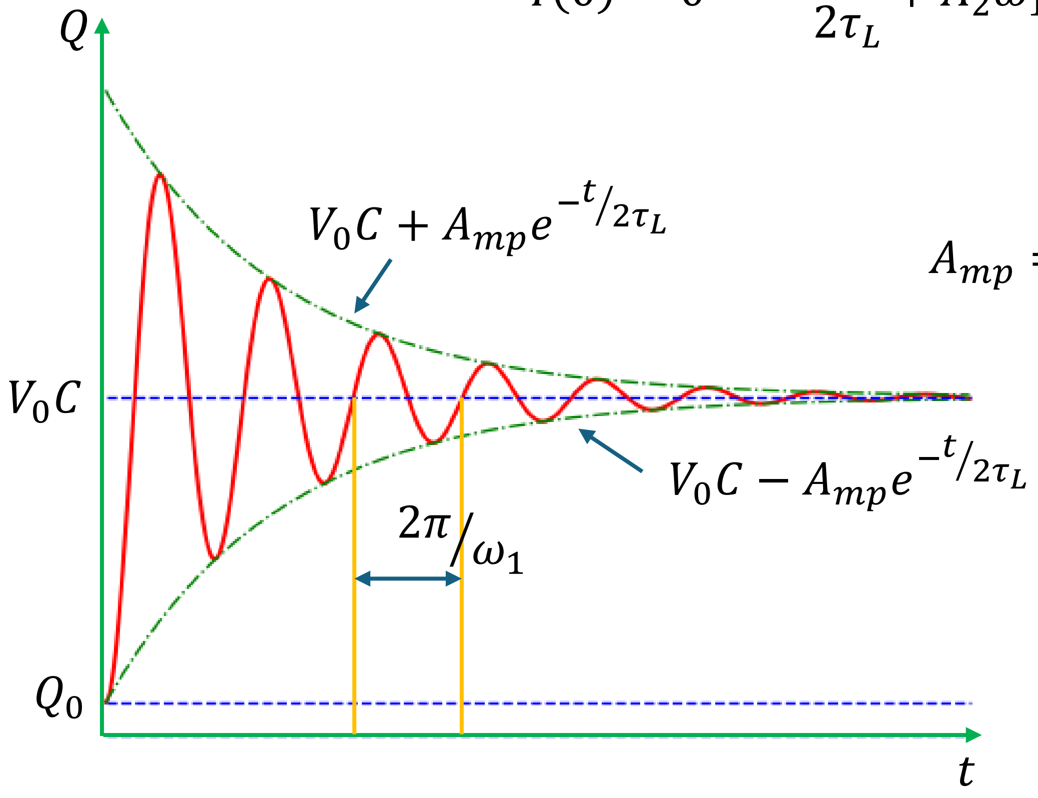
$$Q_H(t) = e^{-\frac{t}{2\tau_L}}[A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t)]$$

donde ahora $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ y son un reagrupamiento de los coeficientes iniciales.

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} Q(t) &= V_0 C + e^{-\frac{t}{2\tau_L}}[A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t)] \\ I(t) &= e^{-\frac{t}{2\tau_L}}\left[\left(-\frac{A_1}{2\tau_L} + A_2\omega_1\right)\cos(\omega_1 t) - \left(A_1\omega_1 + \frac{A_2}{2\tau_L}\right)\operatorname{sen}(\omega_1 t)\right] \end{aligned}$$

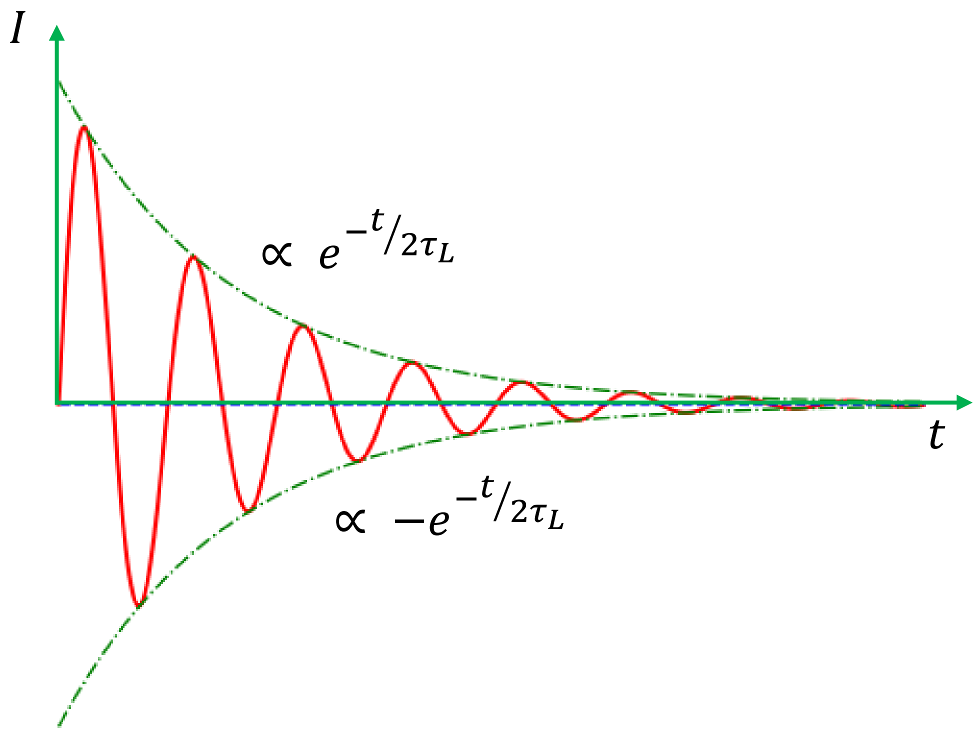
Los valores de A_1 y A_2 salen por las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} Q(0) &= Q_0 = V_0C + A_1 \\ I(0) &= 0 = -\frac{A_1}{2\tau_L} + A_2\omega_1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} A_1 &= Q_0 - V_0C \\ A_2 &= \frac{Q_0 - V_0C}{2\tau_L\omega_1} \end{aligned}$$



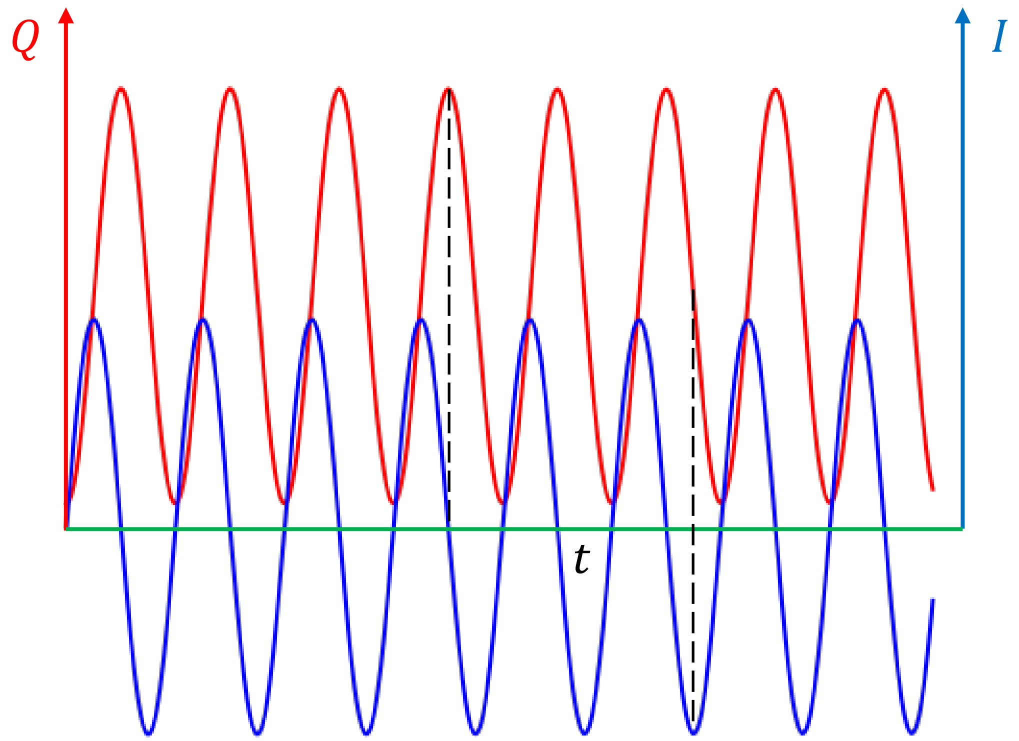
$$A_{mp} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

La carga comienza en Q_0 y en el equilibrio será V_0C $(= Q_f)$, pero llega a ese valor con una oscilación previa de frecuencia ω_1. Es importante encontrar el máximo valor que puede tomar en el transitorio para asegurarse que cumple con las tolerancias de los dispositivos involucrados.



La corriente también se anula en el estacionario, pero oscilando hasta llegar a su valor final. La frecuencia de oscilación es, al igual que en la carga, ω_1. Y del mismo modo, es importante conocer el valor absoluto máximo que puede tomar esta función para no sobrecargar los elementos del circuito.

Dentro de este caso podemos tomar como caso límite la situación $R \to 0$. Si la resistencia del circuito es despreciable, tendremos un sistema $L - C$.
Si $R = 0$, $\tau_L \to \infty$ y $\omega_1 = \omega_0$. Entonces, lo que sucede es que la energía queda “entretenida” entre el inductor y el capacitor, sin llegar en ningún momento al valor de equilibrio.



Acá vemos un gráfico de la carga y la corriente en función del tiempo. La amplitud de la oscilación se mantiene constante, porque no hay envolvente de caída. La frecuencia de oscilación de ambas curvas es la frecuencia natural del sistema ω_0. La línea punteada muestra cómo el máximo de una de las curvas coincide con el cero (o el valor de equilibrio) de la otra.

En cualquiera de los casos acá presentados, la energía entregada por la fuente se disipa parcialmente en la resistencia y se almacena transitoriamente en el inductor y en el capacitor. Si el sistema llega al equilibrio ($R > 0$), la energía no disipada en la resistencia terminará almacenada en el capacitor.

Si partimos de la ecuación diferencial original

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V_0$$

y la multiplicamos miembro a miembro por la corriente

$$LI\frac{dI}{dt} + RI^2 + \frac{1}{C}QI = V_0 I$$

reagrupando y multiplicando ambos miembros por dt tendremos que:

$$LI\,dI + RI^2 dt + \frac{1}{C}Q\frac{dQ}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = V_0\frac{dQ}{\cancel{dt}}\cancel{dt}$$

Entonces,

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} V_0\, dQ - \int_0^t R\, I^2(t')\, dt' = \int_0^{I(t)} L\, I\, dI + \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{Q}{C} dQ$$

Resulta

$$V_0(Q(t) - Q_0) - \int_0^t R\, I^2(t')\, dt' = \frac{1}{2}L\, I^2(t) + \frac{1}{2}\frac{[Q^2(t) - Q_0^2]}{C}$$

Esto significa que la energía disipada en la resistencia, por ejemplo, a tiempos muy largos será:

$$E_R(t \to \infty) = \int_0^\infty R\, I^2(t)\, dt = \frac{1}{2}CV_0^2 + Q_0\left(\frac{Q_0}{2C} - V_0\right)$$

Si el capacitor comienza descargado, la resistencia disipará una energía igual a la almacenada en el capacitor.