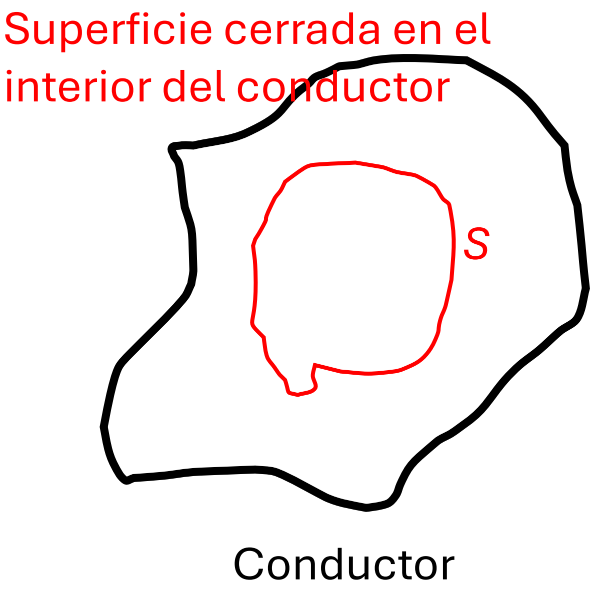
Conductores

Los conductores son materiales donde hay cargas libres que pueden moverse por todo el material conductor. La carga del conductor es la resultante del balance de cargas: en efecto, un conductor descargado no es un conductor sin cargas, sino un material donde hay tantas cargas positivas como negativas.

En esta parte del curso estudiaremos los conductores en **equilibrio estático**, es decir, donde las cargas presentes están en equilibrio. Esta no es la situación más general, de hecho en la mayoría de los materiales conductores de la vida cotidiana tenemos dentro de ellos cargas en movimiento; por ejemplo, los cables de alimentación de la red eléctrica de nuestras casas.

¿Qué caracteriza a los conductores en equilibrio? Que toda carga interior está quieta en su posición de equilibrio. Pero como las cargas no tienen limitación de movimiento dentro del conductor, necesariamente para que exista equilibrio electrostático en un conductor, el campo eléctrico en su interior debe ser nulo. En efecto, como las cargas son libres de moverse, si hubiese algún campo eléctrico no nulo en el interior del material, éste ejercería fuerza sobre las cargas y las impulsaría a moverse, rompiendo así la situación de equilibrio. Por lo tanto,

$$\boxed{\vec{E}_{int} = 0}$$ Característica de los conductores en equilibrio $\Longrightarrow$ $$\boxed{V_{cond} = \text{cte.}}$$ Todo material conductor es un volumen equipotencial



¿Dónde se ubican las cargas en un conductor en equilibrio electrostático?

Si aplicamos el teorema de Gauss a una superficie cerrada totalmente dentro del material conductor, tendremos

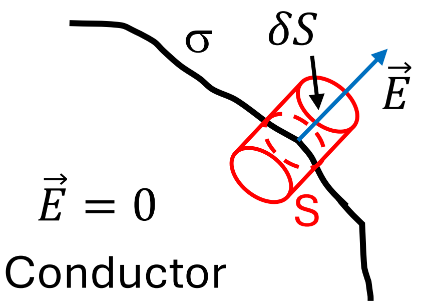
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0$$ porque el campo es nulo $\Longrightarrow$ $Q_{enc} = 0$

Pero esto vale para toda superficie cerrada interior, entonces la carga en el interior es nula:

$\boxed{Q_{int} = 0}$ En un conductor en equilibrio, la carga interior es nula. $\Longrightarrow$ La carga neta del conductor se ubicará en la superficie del mismo.

En consecuencia, la carga del conductor se distribuirá como densidad superficial de carga σ a lo largo de la superficie del conductor. Esta distribución será la necesaria para mantener nulo el campo en el interior.

¿Cuánto vale el campo justo sobre la superficie del conductor? El campo en la superficie del conductor debe ser perpendicular a la superficie en cada punto, ya que si tuviese una componente paralela a la superficie, ésta movería las cargas que allí se ubican.



Si aplicamos el teorema de Gauss en un pequeño cilindro –lo suficientemente pequeño como para considerar que el campo es homogéneo en la superficie- que contiene una parte de la superficie en su interior, el flujo de campo sólo será no nulo a través de la tapa externa, ya que en la superficie que queda del lado del conductor el campo es nulo, y en la superficie lateral externa el campo es perpendicular a ésta. Y si el cilindro es pequeño, el campo en la superficie de la tapa será igual al de la superficie del conductor y paralelo a la normal de la tapa.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{tapa sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \cong |\vec{E}|\delta S = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, \delta S}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} = |\vec{E}|\hat{n}$

$d\vec{S} = \delta S\, \hat{n}$

Teorema de Gauss

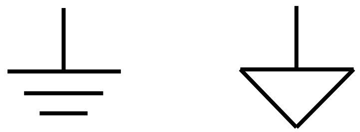
ya que la carga encerrada es la ocupada en la proyección de las tapas en la superficie

Entonces: $\boxed{\vec{E}_{\text{sup}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\, \hat{n}}$

El valor del campo en la superficie del conductor queda determinado por la densidad de carga.

Como hemos dicho antes, un conductor tiene un único valor de potencial en todo el material y un valor de carga total que se distribuye a lo largo de la superficie del conductor de modo de mantener el campo nulo en su interior. Esto significa que un conductor ***aislado*** mantiene constante su carga.
¿Cómo llega la carga a un conductor? Entrando en contacto con otro conductor cargado. En efecto, si dos conductores se ponen en contacto, el conjunto se Vuelve un único conductor y la carga de ambos se redistribuirá para mantener constante el potencial y nulo el campo interior.

El conductor <u>**Tierra**</u> es un conductor muy grande y con mucha carga, de modo que se lo puede considerer una fuente infinita de cargas. Y como tiene tantas, que le lleguen unas pocas de otro conductor no lo afecta y no cambia entonces su valor de potencial. Como este valor permanece inalterado, se lo toma como referencia y por eso, la tierra es de potencial nulo.

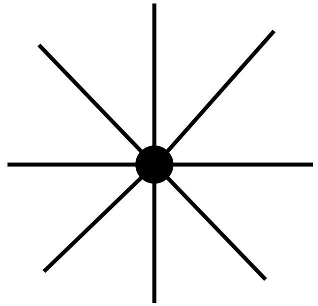


Dibujos esquemáticos de la tierra eléctrica

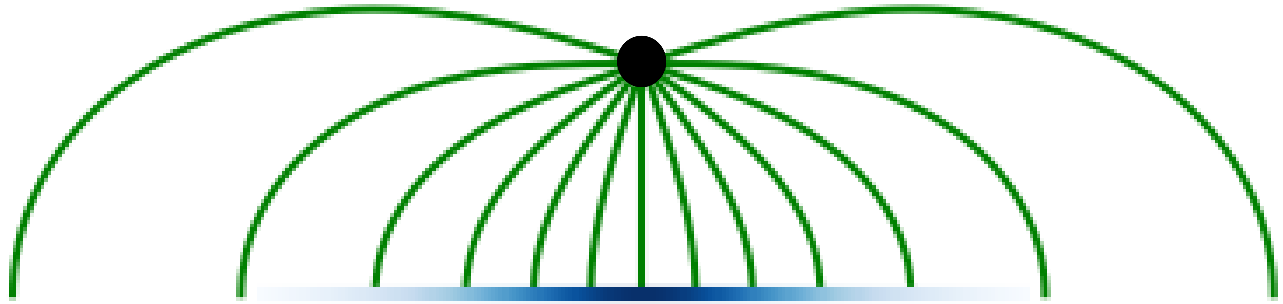
$$V_{tierra} = 0$$

Cualquier conductor conectado a tierra tendrá potencial nulo y carga desconocida a priori.

¿Qué sucede si se acerca una carga puntual a un plano muy grande, conectado a tierra?



Lejos del plano, las líneas de campo de la carga son rectas salientes.

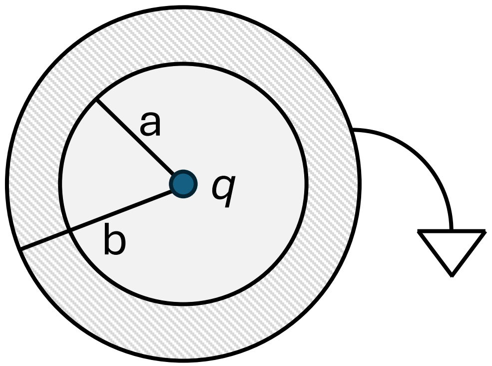


Se induce carga en el plano y las líneas de campo se curvan para que el campo en la superficie del plano sea perpendicular a dicha superficie. La densidad es más intensa cerca de la carga y la integral de esta densidad sobre toda la superficie será igual a la carga puntual , pero de signo opuesto.

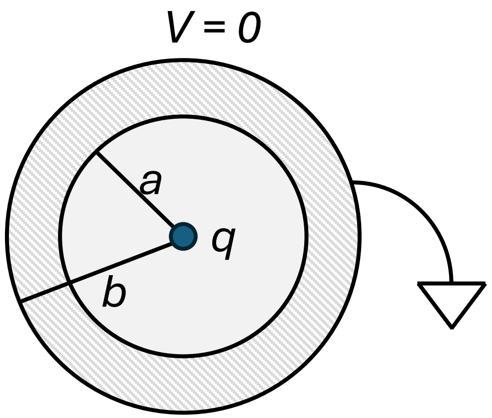
¿Cuánto vale el campo en el hemisferio donde no hay carga? Es decir, del lado del plano en el que no está la carga puntual.

Para responder esta pregunta enunciaremos un teorema muy importante, que nos dice que *el potencial queda* ***unívocamente*** *determinado en una region del espacio conociendo las densidades de carga en dicha region y el valor del potencial en todos los bordes de la misma*. Esta última condición –conocer el potencial en los bordes- es crucial, pues define la unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales que rigen el potencial.

Entonces, en el hemisferio definido por el plano, donde no está la carga, las densidades de carga son nulas, porque justamente no hay carga. El borde de esta region es el plano y el infinito. En todos estos lugares el potencial es nulo, porque definimos que el plano está a tierra y el infinito es la referencia del potencial. Entonces la solución $V = 0$ es un solución al problema, pues cumple con las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde. ¡Pero la solución es única! Entonces $V = 0$ debe ser **la solución** al problema. Por lo tanto, el campo eléctrico es nulo en todo este semiespacio.



Como ejemplo, vamos a analizar el caso de un casquete esférico conductor, conectado a tierra, con una carga punctual en el centro del casquete.



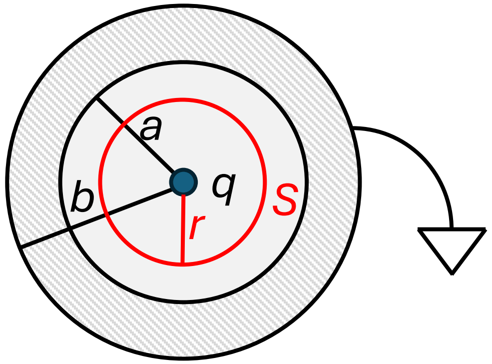
El problema tiene claramente simetría esférica, por lo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r} \quad \text{y} \quad V(\vec{r}) = V(r)$$

donde r es la coordenada radial de esféricas, mientras que $\hat{r}$ es el versor radial

Como el conductor está a tierra, no conocemos su carga, la obtendremos al final cuando impongamos el valor de *V* en el conductor. Por ahora, decimos que vale Q_C, y que se distribuirá en el conductor en las superficies de radios *a* y *b* como densidades superficiales σ_a y σ_b, respectivamente.

Calculamos el campo aplicando el teorema de Gauss a superficies esféricas de radio *r*, concéntricas con el casquete.



$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)dS = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}(r)}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto, $$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{enc}}{r^2}$$

Caso 1: $r < a$ $\Longrightarrow$ $Q_{enc} = q$ $\quad \therefore E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$

Caso 2: a $< r < b$ $\Longrightarrow$ $E(r) = 0$ porque es el interior del conductor $\therefore \quad Q_{enc} = 0$

pero $$Q_{enc} = q + Q_a = q + 4\pi a^2\sigma_a = 0 \Longrightarrow Q_a = -q \quad \text{y} \quad \sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Caso 1: $r > b$ $\Longrightarrow$ $Q_{enc} = q + Q_a + Q_b \underset{q + Q_a = 0}{=} Q_b$ $\quad \therefore E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_b}{r^2}$

Juntando todo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} & r < a \\ 0 & a < r < b \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_b}{r^2}\hat{r} & r > b \end{cases}$$

Recordemos que Q_b es desconocida aún, saldrá cuando encontremos el potencial.

Para calcular el potencial, podemos usar dos métodos:

<u>Método 1</u>: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$

en este caso $V(\vec{r}) = V(r)$

Entonces, debemos encontrar una primitiva del campo en cada zona y "pegarlas" por continuidad.

<u>Método 2</u>: como el campo es un gradiente, la integral de camino del campo solo depende de los puntos iniciales y finales, por lo que resulta

$$V_B = V_A - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donde *A* y *B* son dos puntos del espacio, en los cuales conocemos el potencial en uno de ellos y lo calculamos en el otro.

Para este ejemplo, usaremos el primer método. Entonces,

$r > b$: $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_b}{r^2} \quad \rightarrow \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_b}{r} + C_1$ donde C_1 es una constante a determinar.

$$a < r < b: \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad V(r) = C_2$$

$$r < a: \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \rightarrow \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C_3$$

Por lo tanto, $$V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C_3 & r \leq a \\ C_2 & a \leq r \leq b \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_b}{r} + C_1 & r \geq b \end{cases}$$

Empezamos por la referencia, que es el infinito: $V(r \rightarrow \infty) = 0$. Esto se ve en la región $r \geq b$, por lo que

$$V(r \rightarrow \infty) = C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$$

Por otro lado, como el conductor está conectado a tierra, $V(a \leq r \leq b) = C_2 = 0$, entonces $C_2 = 0$. Y además,

$V(r = b^-) = V(r = b^+)$ (condición de continuidad en el borde) $\Longrightarrow 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_b}{b} \quad \therefore \quad \boxed{Q_b = 0}$

<u>La carga en la superficie exterior del conductor es nula.</u>

Vemos que se cumple el teorema de la unicidad de la solución, porque otra vez temenos una region del espacio en donde no hay carga –el exterior del casquete conductor– y con condición de borde para el potencial nulo: conductor + infinito. Entonces, $V = 0$ satisface las ecuaciones y las condiciones de borde, y al ser única la solución, esa debe ser la solución.

Por último, para encontrar la constante C_3, planteamos la continuidad de la función en $r = a$:

$$V(r = a^-) = V(r = a^+)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + C_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}$$

Juntando todo

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{a}\right) & r \leq a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

¿Qué sucede si la carga puntual q se mueve dentro de la zona $r < a$? Claramente, la simetría esférica en esa zona se rompe. Ya no podremos decir que el campo y el potencial dependen únicamente de la coordenada radial. La densidad de carga σ_a ya no será uniforme, tendrá una distribución angular, parecido a lo que pasaba con la carga que se acerca al plano. Para calcular el campo habrá que resolver las ecuaciones diferenciales correspondientes.

Sin embargo, en la zona exterior al casquete conductor, las condiciones de borde y la carga presente no cambió. Y si no cambió, la unicidad de la solución garantiza que:

$$V(r) = 0 \quad r > a \quad ; \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad r > a$$

Y esto es independiente de la distribución de carga que haya en la zona $r < a$, puntual o volumétrica. El conductor a tierra tomará tanta carga como necesite y la distribuirá sobre la superficie interior de modo de garantizar el campo nulo, tanto en el interior del conductor como en la zona exterior a él.