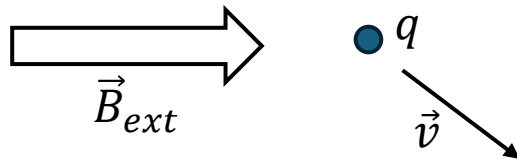


Magnetostática

La magnetostática estudia los campos magnéticos que NO dependen del tiempo.

Desde la antigüedad se conocen los imanes permanentes naturales, como fuentes de campos magnéticos, y se sabe que estos campos interactúan con cargas *en movimiento*.

Si suponemos que existe un campo magnético externo \vec{B}_{ext} , éste interactuará con cargas q que se mueven con una velocidad \vec{v} . El resultado de esa interacción se pone de manifiesto como una fuerza, a la que llamaremos fuerza magnética \vec{F}_{mag} .



Experimentalmente se observa que:

- $|\vec{F}_{mag}| \propto |q|, |\vec{v}|, |\vec{B}_{ext}|$
- $|\vec{F}_{mag}| \perp \vec{v}, \vec{B}_{ext}$

El hecho que la fuerza magnética sea perpendicular a la velocidad, nos dice que la fuerza magnética NO realiza trabajo.

Por otro lado, también se observa que:

- si $\vec{v} \parallel \vec{B}_{ext}$ la fuerza magnética es nula, mientras que
- si $\vec{v} \perp \vec{B}_{ext}$ la fuerza magnética es máxima.

Con todas estas observaciones, podemos modelizar una expresión para la fuerza magnética:

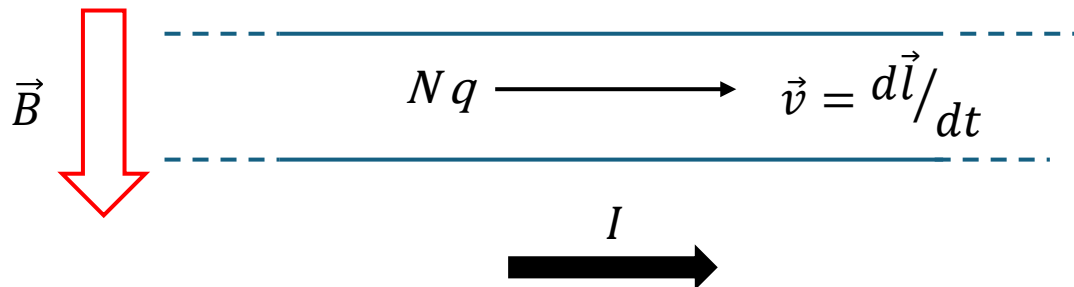
$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Esta será la fuerza que siente una carga q que se mueve con una velocidad \vec{v} en presencia de un campo magnético \vec{B} .

¿Qué unidades tiene el campo magnético? De la expresión de la fuerza magnética,

$$[\vec{B}] = \frac{[\vec{F}_m]}{[q] [\vec{v}]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \quad T: \text{Tesla}$$

¿Dónde encontramos cargas en movimiento? Lo más común es hallarlas en los conductores por los que circula corriente.

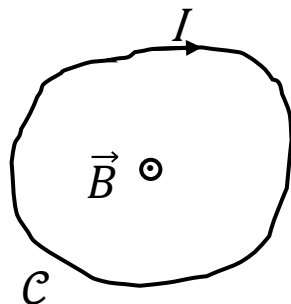


En un conductor hay N cargas q que se mueven a velocidad \vec{v}

Entonces
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

En un tramo de conductor $\rightarrow d\vec{F}_{mag} = dQ \vec{v} \times \vec{B} = dQ \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = \frac{dQ}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

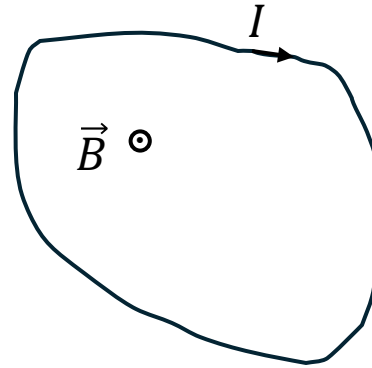
En un circuito conductor



$$\vec{F}_{mag} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Fuerza que siente un conductor en presencia de un campo magnético

Una **espira de corriente** es un circuito cerrado por donde sólo circula una corriente.



En presencia de un campo magnético externo

$$\vec{F}_{mag} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{espira}}}{=} I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } \vec{B} \text{ es uniforme}}}{=} I \left(\oint_C d\vec{l} \right) \times \vec{B}$$

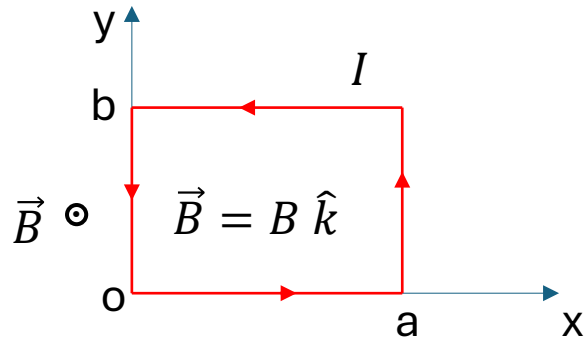
Pero $\oint_C d\vec{l} = 0$

porque es recorrer un circuito cerrado desde un punto al mismo punto.

$$\therefore \vec{F}_{mag} = 0$$

La \vec{F}_{mag} neta sobre una espira es nula si el campo magnético es uniforme, aunque cada tramo de la espira siente una fuerza local.

Calculemos como ejemplo la fuerza que siente una espira rectangular.



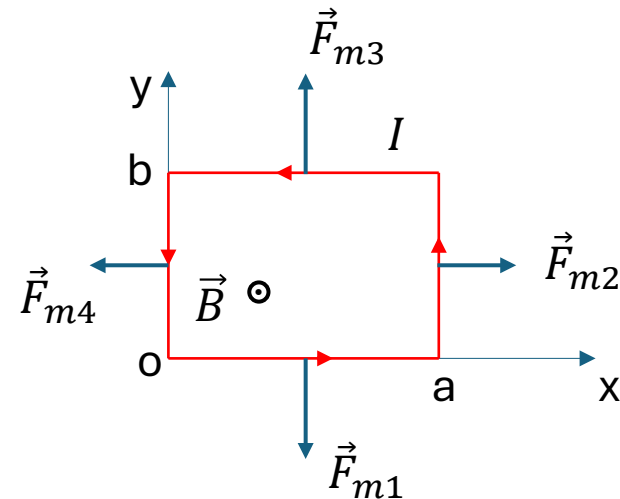
$$\vec{F}_{mag} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_{(0,0)}^{(a,0)} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{(a,0)}^{(a,b)} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{(a,b)}^{(0,b)} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{(0,b)}^{(0,0)} d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I \int_0^a dx \hat{i} \times B \hat{k} + I \int_0^b dy \hat{j} \times B \hat{k} + I \int_a^0 dx \hat{i} \times B \hat{k} + I \int_b^0 dy \hat{j} \times B \hat{k}$$

$$= -IBa \hat{j} + IBb \hat{i} + IBa \hat{j} - IBb \hat{i}$$

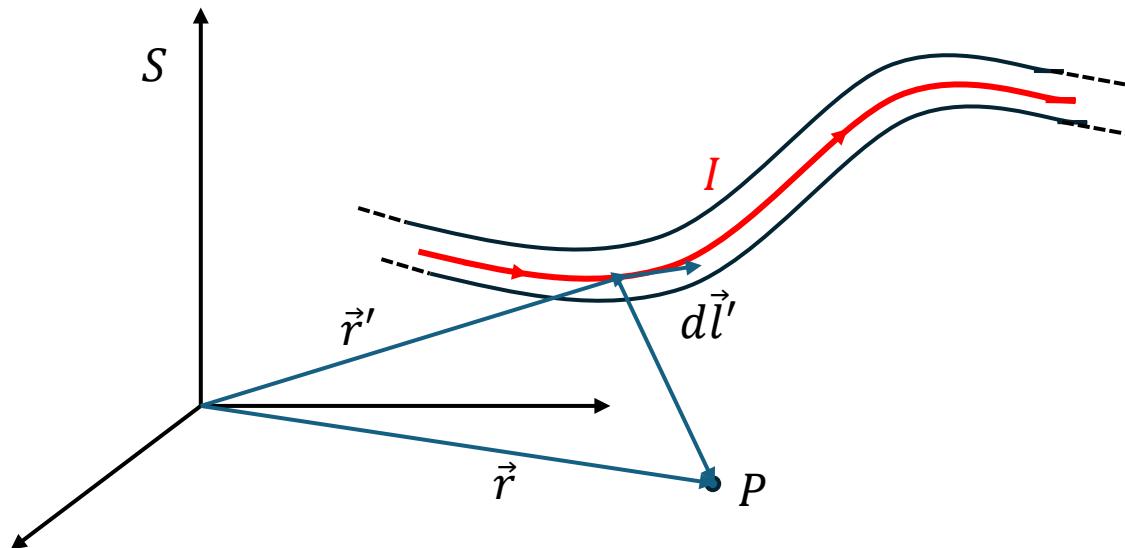
$$= 0$$

La fuerza neta es nula pero en cada tramo intenta abrir la espira.



Hasta ahora hemos visto como interactúan las cargas en movimiento con los campos magnéticos externos. Pero bien, ¿qué genera los campos magnéticos? ¿Cuál es la fuente de campo? La respuesta es simple: las corrientes –cargas en movimiento– son a su vez la fuente de campos magnéticos.

La experiencia indica que, si rodeamos un cable conductor con limaduras de hierro, éstas se alinean rodeando al cable cuando por él circula una corriente, y dejan de hacerlo al cortar la corriente circulante. Estas y otras experiencias dieron lugar a la expresión fenomenológica de campo magnético generado por corrientes, conocida como **Ley de Biot-Savart**.



Tenemos un conductor a través del cual circula una corriente I y queremos calcular el campo magnético en un punto P , en la posición \vec{r} de un sistema de referencia dado. La contribución al campo de un tramo de conductor ubicado en la posición \vec{r}' , donde la corriente circula siguiendo la dirección $d\vec{l}'$ será:

$$d\vec{B}(\vec{r}) \propto \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

contribución al campo
del tramo ubicado en \vec{r}'



$$\vec{B}(\vec{r}) = k \oint_C \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Ley de Biot-Savart

La integral corre por el circuito
donde circula la corriente.

La constante k es para dar las unidades al campo magnético y en el sistema internacional se fija en

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \text{donde} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad \text{es la llamada } \textbf{permeabilidad del vacío}.$$

Si en lugar de vacío estamos dentro de un material magnético, la permeabilidad cambia a:

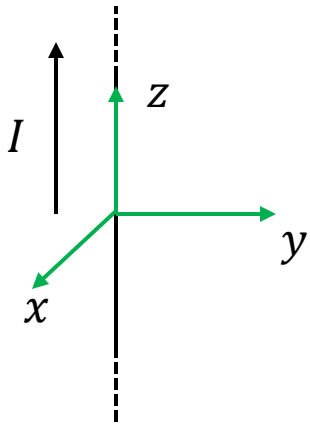
$$\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0 \quad \text{siendo } \mu \text{ la permeabilidad del material y } \mu_r \text{ la permeabilidad relativa.}$$

Una consecuencia muy importante de la ley de Biot-Savart es que un campo magnético que surge de esa forma funcional, siempre es un campo *rotacional*. En efecto, si tomamos divergencia a la expresión recuadrada, siempre obtendremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Esto significa que las líneas de campo magnético son siempre cerradas, a diferencia del campo eléctrico, cuyas líneas surgen y terminan en las fuentes de campo.

Como ejemplo, calculemos el campo magnético que genera un conductor muy largo, por el cual circula una corriente I .



El problema tiene claramente simetría cilíndrica. En consecuencia, el campo magnético no puede depender de la coordenada φ y z de cilíndricas. Entonces, vamos a calcular el campo en $\vec{r} = r \hat{j}$, y extenderemos el resultado a todos los puntos del espacio con la misma coordenada r radial.

Por lo tanto $\vec{r} = r \hat{j}$ $\vec{r}' = z' \hat{k}$ $d\vec{l}' = dz' \hat{k}$ $-\infty < z < \infty$

entonces $\vec{r} - \vec{r}' = r \hat{j} - z' \hat{k}$ $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (r^2 + z'^2)^{3/2}$ $d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = -r dz' \hat{i}$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-r)}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} dz' \right] \hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\left(1 + \left(\frac{z'}{r}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \hat{i} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} \right]}_{= 2} \hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{i} \end{aligned}$$

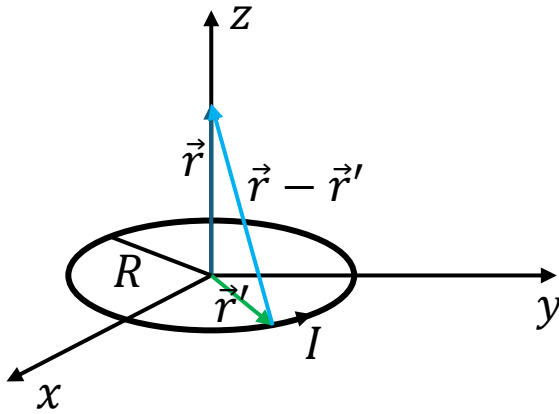
\uparrow
 $u = z'/r$
 $du = dz'/r$

Como resultado, tenemos que $\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$

\swarrow en coordenadas cilíndricas

Las líneas de campo son circunferencias alrededor del hilo conductor.

Calculemos el campo que genera una espira de corriente circular de radio R . Analíticamente, sólo lo podemos calcular en el eje de la espira.



$$\vec{r} = z \hat{k} \quad \vec{r}' = R \hat{r}' = R \cos \varphi' \hat{i} + R \sin \varphi' \hat{j}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \cos \varphi' \hat{i} - R \sin \varphi' \hat{j} + z \hat{k} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

$$d\vec{l}' = R d\varphi' \hat{\varphi}' = -R \sin \varphi' d\varphi' \hat{i} + R \cos \varphi' d\varphi' \hat{j}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = Rz \cos \varphi' d\varphi' \hat{i} + Rz \sin \varphi' d\varphi' \hat{j} + R^2 d\varphi' \hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{B}(z \hat{k}) = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{Rz \cos \varphi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi' \right] \hat{i} + \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{Rz \sin \varphi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi' \right] \hat{j} + \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi' \right] \hat{k}$$

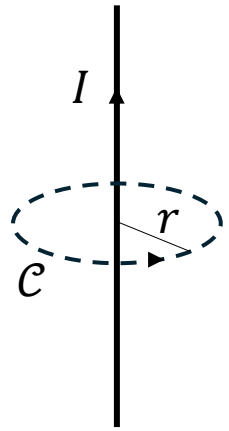
Las dos primeras integrales son nulas

$$\Rightarrow \vec{B}(z \hat{k}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \hat{k}$$

El campo tiene siempre el mismo signo, dependiendo del sentido de la corriente y es máximo en el centro de la espira.

Ley de Àmpere

Si calculamos la circulación del campo magnético generado por un hilo de corriente a lo largo de una circunferencia que lo rodea, tendremos:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot r d\phi \hat{\phi} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

Esto significa que la circulación del campo alrededor de un hilo de corriente es proporcional a la corriente que atraviesa la superficie de la curva.

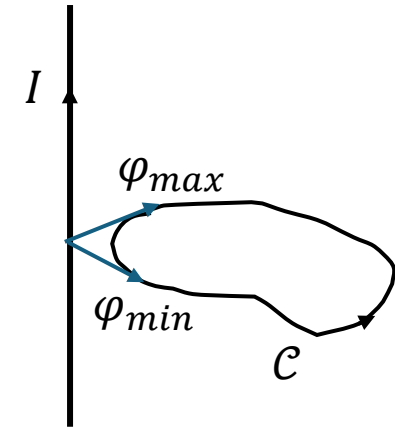
Si hacemos el mismo cálculo, pero con una curva que no envuelve al hilo,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot (dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi}) = \underbrace{\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi}_{\text{primer sector de la curva}} + \underbrace{\int_{\phi_{max}}^{\phi_{min}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi}_{\text{segundo sector de la curva}} = 0$$

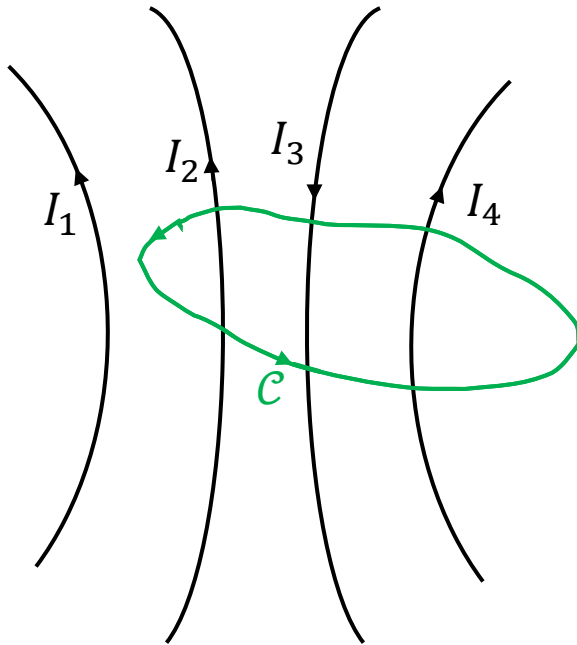
la circulación es nula.

primer sector
de la curva

segundo sector
de la curva



Esto significa que la circulación del campo alrededor de un hilo de corriente es proporcional a la corriente que atraviesa la superficie de la curva. A esta corriente se la llama **Corriente Concatenada** I_C .



En el ejemplo de la figura, la corriente concatenada por la curva C es

$$I_C = I_2 - I_3 + I_4$$

Las corrientes que atraviesan la superficie de la curva serán positivas o negativas, según la orientación de curva dada. En el ejemplo, I_3 es negativa porque entra a una superficie orientada en el sentido contrario.

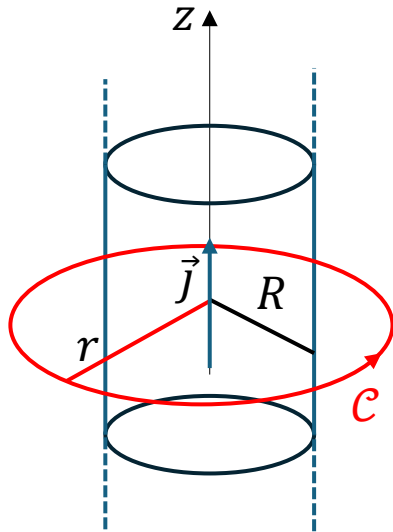
Entonces, se postula que, para toda curva cerrada:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

Ley de Àmpere

En situaciones de alta simetría, podemos usar la ley de Àmpere para calcular campos magnéticos.

Ejemplo, cilindro de corriente muy largo.



Por simetría, $\vec{B}(\vec{r}) = B(r) \hat{\phi}$ (el campo no puede depender de ϕ o de z , ni puede tener componentes en \hat{k} o en \hat{r} , porque las líneas de campo deben ser cerradas).

$$I = |\vec{J}| \pi R^2 \quad \vec{J} \text{ uniforme}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B(r) \hat{\phi} \cdot r d\phi \hat{\phi} = \int_0^{2\pi} B(r) r d\phi = 2\pi r B(r) \stackrel{\text{Ley de Àmpere}}{=} \mu_0 I_C$$

$$\therefore B(r) = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r} \quad I_C = \begin{cases} |\vec{J}| \pi r^2 (= I \left(\frac{r}{R}\right)^2) & r \leq R \\ I & r \geq R \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \hat{\phi} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} & r \geq R \end{cases}$$

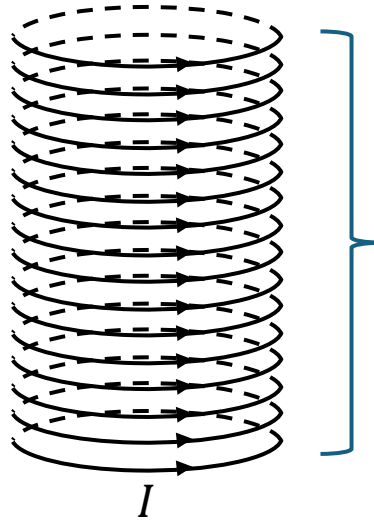
El campo magnético es igual al campo del hilo infinito de corriente para puntos fuera del cilindro, pero en el interior crece linealmente con el radio.

Solenoides infinito

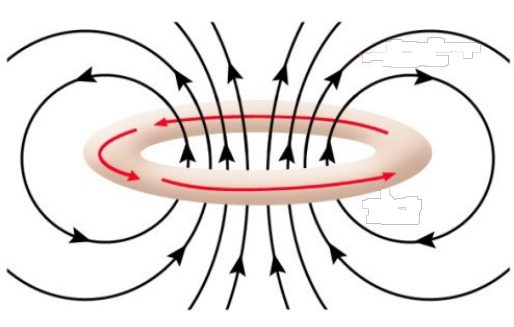
El solenoide es un arreglo helicoidal de un conductor por donde circula una corriente dada



Lo podemos pensar como un conjunto apilado de espiras

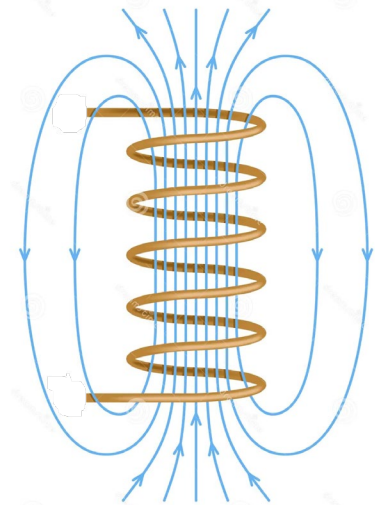


En una longitud l tenemos N espiras: la densidad de espiras será $n = \frac{N}{l}$ con $[n] = m^{-1}$

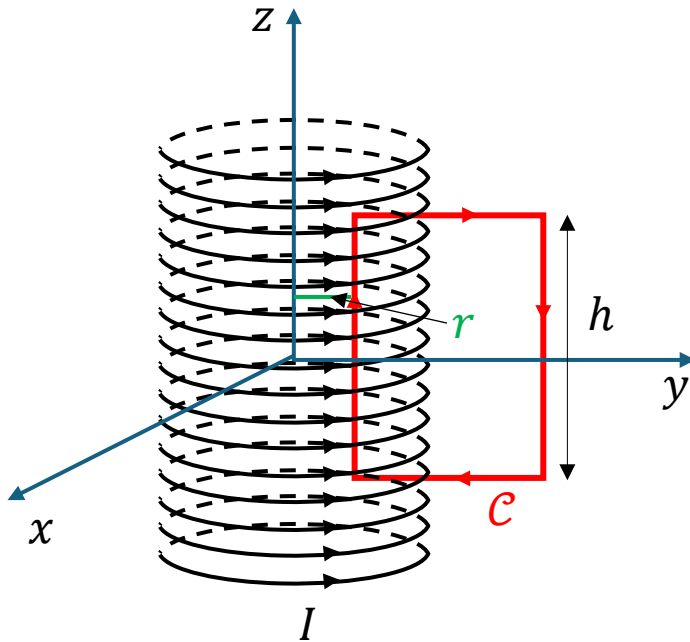


Líneas de campo de una sola espira

Líneas de campo de varias espiras. Vemos como se concentran en el interior y son más débiles afuera.



Si el solenoide es muy largo, podemos afirmar que el campo en el interior tendrá únicamente componente paralela al eje del solenoide.



Supondremos: $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B(r)\hat{k} & \text{interior} \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$

Usaremos como curva de Àmpere una curva rectangular con un lado en el interior del solenoide, a una distancia r , y el otro lado afuera.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{z_0}^{z_0+h} B(r)\hat{k} \cdot dz\hat{k} = B(r)h = \mu_0 I_C$$

Sólo es no nula en el lado interior

Àmpere

¿Cuánto vale I_C ? Es la corriente de cada espira por el número de espiras que atraviesan la curva.

$$I_C = \underbrace{n h I}$$

Densidad de espiras por la longitud del lado de la curva.

Juntando todo tenemos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = n \mu_0 I \hat{k}$$

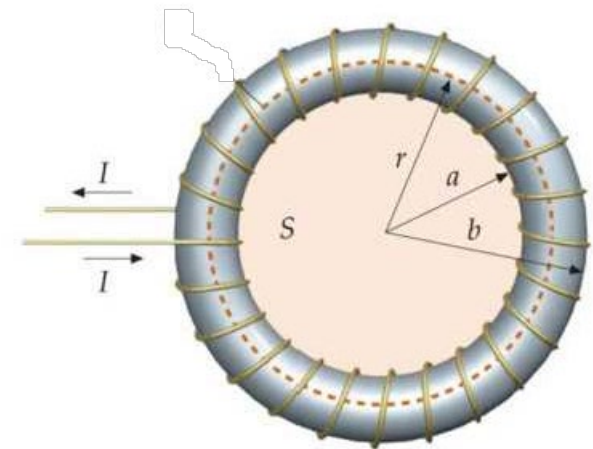
en el interior del solenoide.

Si el solenoide está relleno de un material magnético de permeabilidad $\mu = \mu_r \mu_0$, el campo magnético será el mismo, simplemente multiplicado por μ_r . Usualmente, los materiales magnéticos tienen muy alta permeabilidad ($\mu_r \approx 10000$), por lo que el campo aumentará varios órdenes de magnitud utilizando materiales de alto μ .

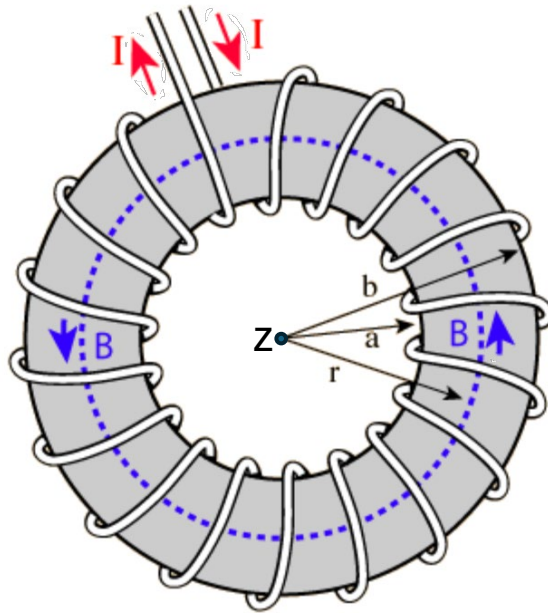
El valor antes calculado puede utilizarse para calcular, de un modo aproximado, el campo en un solenoide de longitud finita, sólo para la zona central, lejos de los bordes del mismo, donde la aproximación de solenoide infinito deja de valer.

Toroide

El toroide es un arrollamiento de espiras, que se cierra sobre sí mismo, usualmente alrededor de un material magnético de alta permeabilidad. Está caracterizado por sus radios interior y exterior, la sección transversal y el número de espiras que contiene el arrollamiento. La sección puede ser circular o rectangular, y también puede utilizarse el mismo concepto sobre un marco de material magnético rectangular.



Siguiendo el razonamiento del caso anterior, supondremos que el campo magnético estará confinado al interior del toroide. Y que las líneas de campo se extinguen muy rápidamente fuera del mismo. Esto será más correcto a medida que la permeabilidad sea más alta.



El problema así planteado tiene simetría cilíndrica. Colocamos el eje z en el centro, saliendo de la imagen. Entonces,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B(r)\hat{\phi} & \text{interior} \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$$

Para obtener $B(r)$, planteamos una curva de Ámpere como una circunferencia de radio r , centrada en el eje, totalmente contenida en el interior del toroide.

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\phi} \cdot r d\phi \hat{\phi} = 2\pi r B(r) = \mu I_C \quad \rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu I_C}{2\pi r}$$

¿Cuánto vale I_C ? La curva de Àmpere encierra todas las espiras que se hallan enrolladas en el toroide, por lo que $I_C = N I$.

$$\longrightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{N \mu I}{2\pi r} \hat{\phi} & \text{interior} \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$$

Si el toroide es un toroide delgado, es decir $b - a \ll a, b$, entonces un r interior se puede reemplazar por $r \approx \frac{a+b}{2}$. En ese caso se puede hablar de campo uniforme en el interior del toroide.