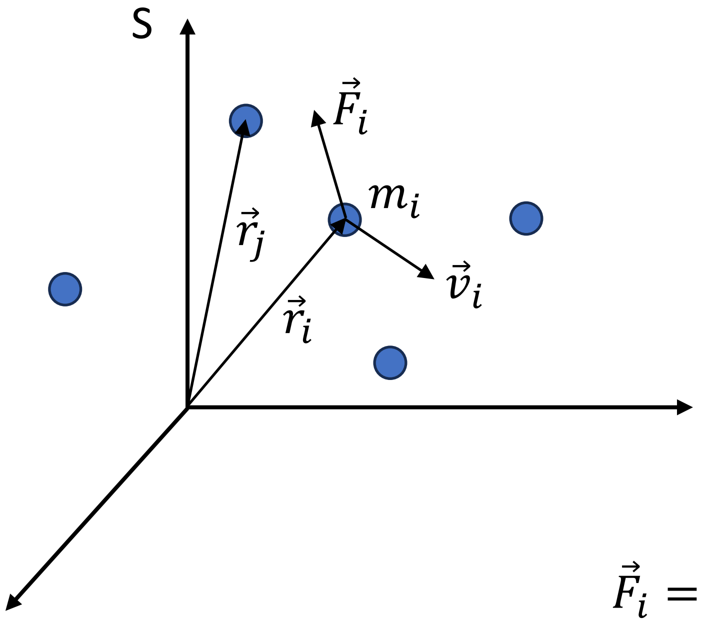
Sistema de Partículas

Tenemos N partículas puntuales



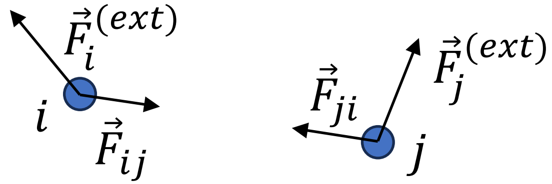
Cada partícula está sometida a interacciones con las otras partículas del sistema y con el exterior.

La Fuerza neta sobre cada partícula genera la aceleración que ésta siente.

$$\vec{F}_i = m_i \, \vec{a}_i$$

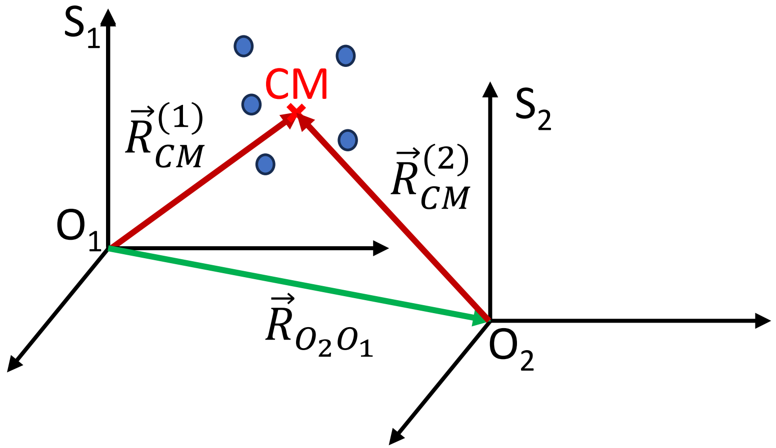
Esta fuerza neta la descomponemos en fuerzas externas e internas.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \qquad (1)$$



Donde $\vec{F}_i^{(ext)}$ es la resultante de las interacciones con el exterior y $\vec{F}_{ij}$ es la fuerza que siente la partícula *i* debido a su interacción con la partícula *j*.

Sistema de Partículas: Centro de masa



Definimos el Centro de Masa (CM) como un punto que representa el promedio de las posiciones de los elementos, pesados por su masa.

$$\vec{R}_{CM} \equiv \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i \qquad \text{donde} \qquad M_T = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

El CM es un punto singular, ya que visto de otro sistema de referencia, el vector $\vec{R}_{CM}$ apunta al mismo lugar.

Como $\vec{r}_i^{(1)} = \vec{R}_{O_2O_1} + \vec{r}_i^{(2)}$, resulta entonces que

$$\vec{R}_{CM}^{(1)} = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i^{(1)} = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{R}_{O_2O_1} + \vec{r}_i^{(2)}\right) = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{R}_{O_2O_1} + \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i^{(2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM}^{(1)} = \vec{R}_{O_2O_1} + \vec{R}_{CM}^{(2)}}$$

Como los dos vectores $\vec{R}_{CM}$ se relacionan entre sí como cualquier par de vectores Vistos desde cada SR, entonces apuntan al mismo lugar.

Sistema de Partículas: momento lineal

Definimos, para cada partícula del sistema, un vector llamado momento o impulso lineal o cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_i \equiv m_i \, \vec{v}_i \quad 1 \le i \le N$$

Su derivada temporal es igual a la fuerza neta aplicada para cada partícula.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

Para un sistema de partículas, la definición se extiende de un modo natural: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{v}_i$

Si definimos velocidad del Centro de Masa como:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

nos queda que $\Longrightarrow$ $\vec{P} = M_T \, \vec{V}_{CM}$

Sistema de Partículas: momento lineal

Por lo tanto, la derivada temporal del momento lineal podemos calcularla por dos caminos:

Por un lado, $\frac{d\vec{P}}{dt} = M_T \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = M_T \vec{A}_{CM}$ donde $\vec{A}_{CM}$ es la aceleración del Centro de Masa

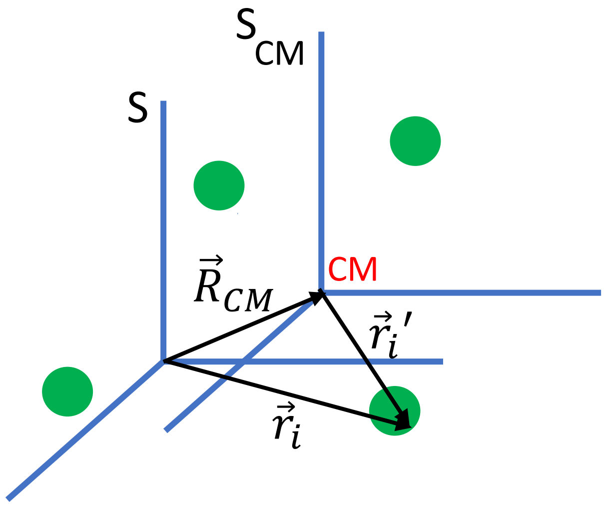
Y también, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

Usando la ec. (1) tenemos $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ext)}}_{\vec{F}^{(ext)}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \vec{F}^{(ext)} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i<j}}^{N} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right)}_{= 0,\text{ por la 3ra ley}} = \vec{F}^{(ext)}$

Por lo tanto, $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} = M_T \vec{A}_{CM}}$

El momento lineal de un sistema solo es afectado por las fuerzas exteriores.

Sistema de Partículas: momento lineal



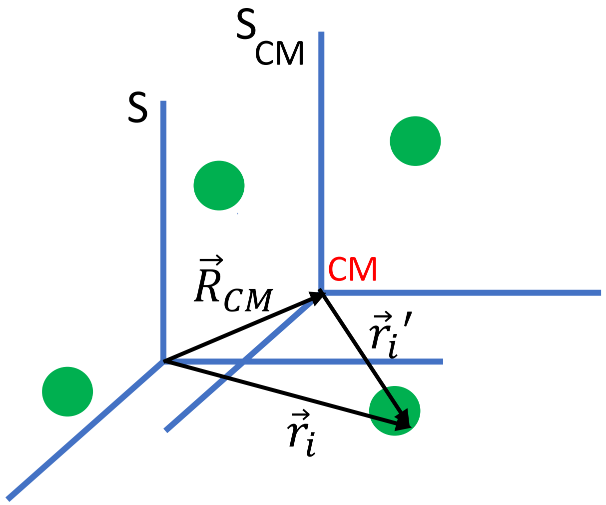
$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i'$$

El sistema de referencia con origen en el Centro de Masa (S_{CM}) es un sistema de referencia singular.
En el S_{CM} el CM, por definición, está siempre en el origen, y esa posición es constante en el tiempo.

$$\vec{R}'_{CM} = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i' = 0 \qquad \forall\, t$$

$$\therefore\ \vec{V}'_{CM} = 0, \qquad \vec{A}'_{CM} = 0 \quad \forall\, t$$

Sistema de Partículas: energía cinética



La energía cinética de un sistema de partículas es la extension natural de su definición para muchos cuerpos.

$$E_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^2 \qquad (2)$$

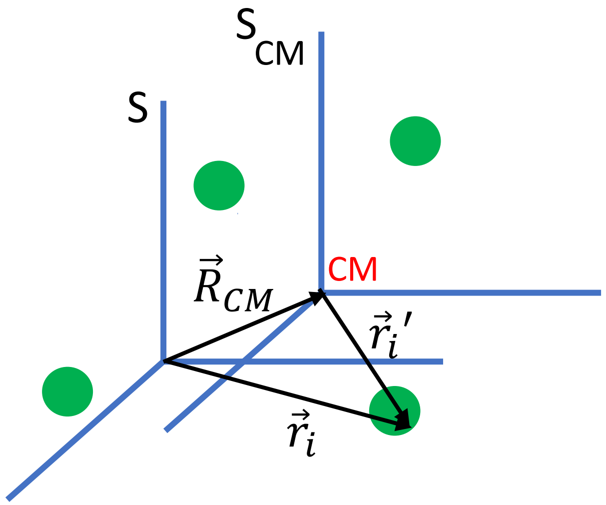
En el sistema S_{CM}, esta expresión será

$$E'_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i\, {v'_i}^2 \qquad \text{donde} \qquad \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}'_i$$

Si queremos relacionar las dos expresiones de la energía cinética, veamos que

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}'_i\right) \cdot \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}'_i\right) = V_{CM}^2 + 2\vec{V}_{CM} \cdot \vec{v}'_i + {v'_i}^2$$

Sistema de Partículas: energía cinética



Por lo tanto, la ec. (2) puede escribirse como

$$E_C = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i V_{CM}^2}_{= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) V_{CM}^2 \,=\, M_T V_{CM}^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_{CM}\cdot\vec{v}_i'}_{= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'\right)\cdot\vec{V}_{CM} \,=\, M_T\,\vec{V}_{CM}'\cdot\vec{V}_{CM} \,=\, 0} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} m_i\, {v_i'}^2}_{= E_C'}$$

$$\therefore \boxed{E_C = \frac{1}{2} M_T V_{CM}^2 + E_C'}$$

La energía de un sistema de partículas tiene dos contribuciones: una es la energía que tendría una partícula puntual ubicada en el CM, con la velocidad del CM, y otra es la energía cinética vista desde el CM.