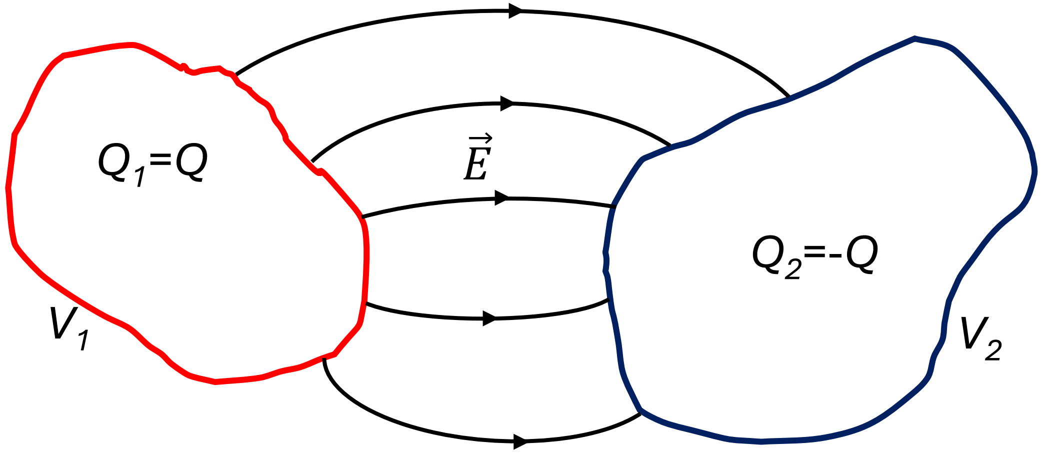
Capacitores

Si tenemos dos conductores cargados con cargas iguales y opuestas, aparecerá campo eléctrico entre ellos.



Supongamos $Q > 0$. Entonces, cada conductor adquirirá un dado valor de potencial, respecto de alguna referencia asignada, siendo $V_1 > V_2$.

Por la definición del potencial, resultará:

$$V_1 \propto Q_1 = Q$$
$$V_2 \propto Q_2 = -Q$$

Entonces, $\Delta V = V_1 - V_2 \propto Q$

De este modo, definimos la ***capacidad*** de un par de conductores como:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$ O, equivalentemente $$Q = C\,\Delta V$$

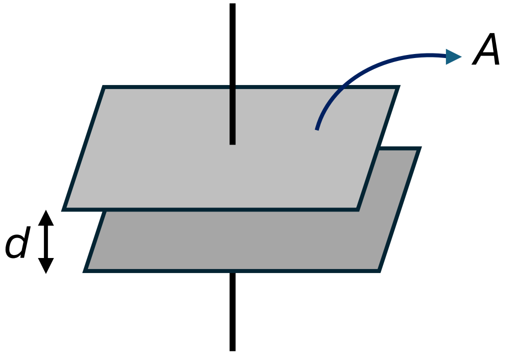
La capacidad nos habla de la cantidad de carga que puede almacenar un dispositivo de dos conductores cuando entre ellos aparece una diferencia de potencial dada.

La capacidad se mide en Faradios (en inglés Farad, por Michael Faraday, científico inglés 1791-1867)

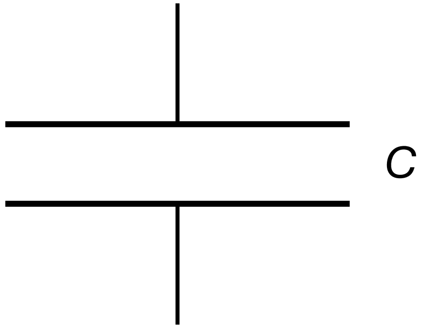
$$[C] = F = \frac{[Q]}{[\Delta V]} = \frac{C}{V} = \frac{C}{\frac{C}{[\varepsilon_0]\, m}} = [\varepsilon_0]\, m \quad \Rightarrow \quad [\varepsilon_0] = \frac{F}{m}$$

Por esta razón, en las tablas, la permitividad aparece en *F/m*

El capacitor por excelencia es el llamado plano-paralelo. Son dos conductores planos de área *A* cada uno, separados entre sí por una distancia *d*.

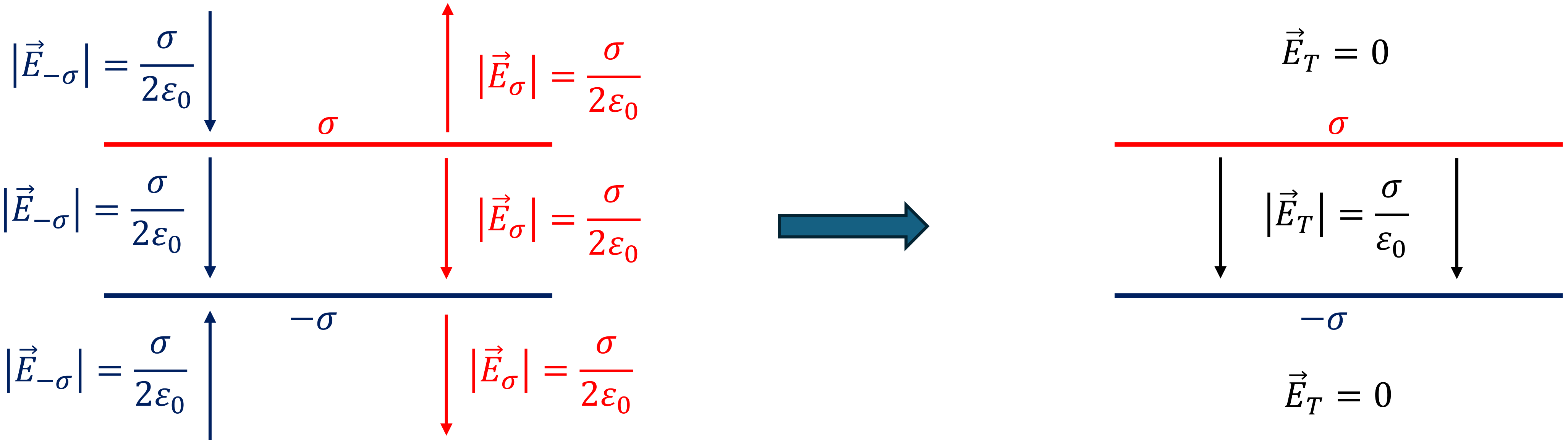


De hecho, el símbolo de un capacitor es el esquema de esta geometría.

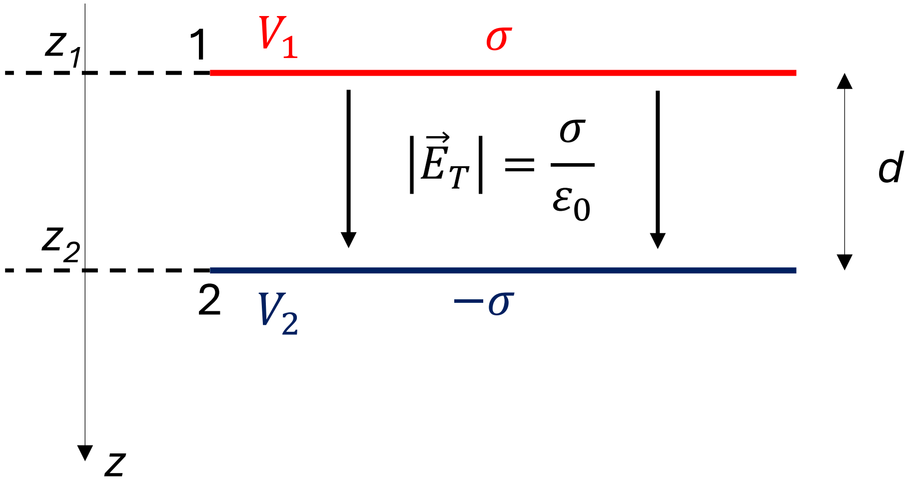


Calculemos la capacidad de esta configuración: supongamos dos planos conductores, paralelos entre sí, separados una distancia $d \ll \sqrt{A}$. Esto garantiza que, en su mayor parte, el campo eléctrico podrá aproximarse al campo generado por un plano infinito, salvo efectos de borde.

Entonces, si cargamos cada conductor plano con una carga Q y – Q, respectivamente, éstas se distribuirán, salvo efectos de borde, con una densidad superficial homogénea $\sigma \cong Q/A$.



El campo de un plano cargado uniformemente con densidad de carga σ es $\left|\vec{E}_{\sigma\ \text{ó}\ -\sigma}\right| = {}^{\sigma}/_{2\,\varepsilon_0}$, saliente o entrante al plano, según el signo de σ. Por ende, en el capacitor, la suma vectorial da como resultado un campo no nulo únicamente en el interior, de valor $\left|\vec{E}_T\right| = {}^{\sigma}/_{\varepsilon_0}$.



Para calcular la diferencia de potencial, recordamos la definición:

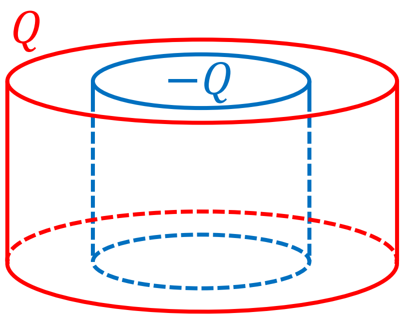
Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, entonces

$$V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{z_2}^{z_1} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{k} \cdot dz\, \hat{k} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_{z_2}^{z_1} dz = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon_0}$$

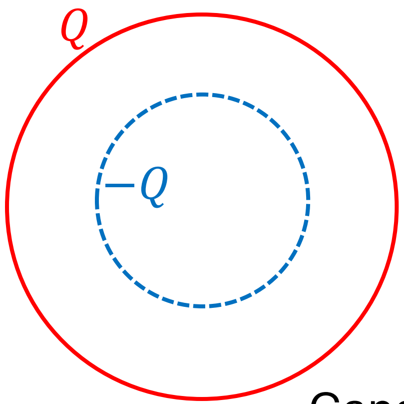
(el signo – invierte los límites de integración)

Juntando todo, $\Delta V = \dfrac{Q\, d}{A\, \varepsilon_0}$. Entonces, $C = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$

Otras geometrías usuales para los capacitores son conductores cilíndricos o esféricos, uno dentro de otro.



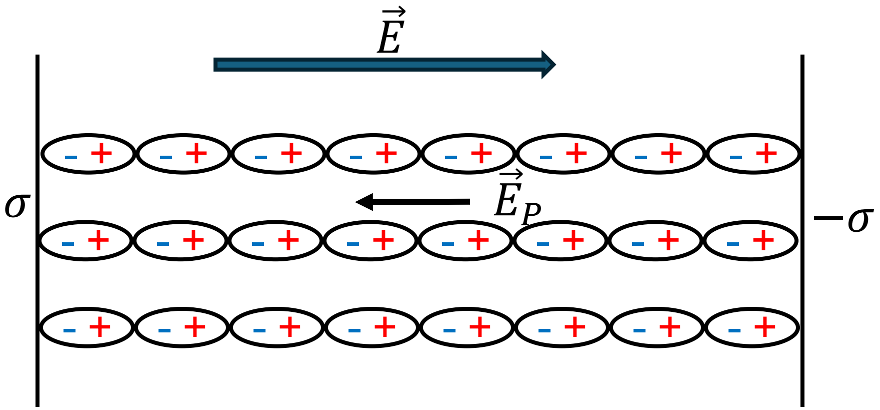
Capacitor cilíndrico



Capacitor esférico

Dieléctricos

Los dieléctricos son materiales no conductores, esencialmente neutros, y en presencia de un campo eléctrico, los átomos se deforman formando dipolos: en efecto, el centro de carga positiva tiende a moverse en la dirección del campo, mientras que el centro de carga negative lo hace en sentido contrario. Como las fuerzas que ejerce el campo externo no alcanza para romper la ligadura atómica, estos se deforman pero no se alejan.



Los dipolos inducidos por la presencia del campo externo generan un campo en el sentido opuesto al campo que los generó. A este efecto se lo llama *Polarización*, y al campo generado, $\vec{E}_P$. Como concecuencia, el campo neto en el material dieléctrico es menor que el campo externo.

$$\left|\vec{E}_{total}\right| = \left|\vec{E} + \vec{E}_P\right| < \left|\vec{E}\right|$$

El efecto macroscópico de la presencia de un material diléctrico en el espacio es modificar la permitividad del mismo. Entonces, la permitividad del vacío ε_0 pasa a ser otro valor, la permitividad del material ε.

Dieléctricos: $\varepsilon_0 \;\Rightarrow\; \varepsilon = \varepsilon_r\ \varepsilon_0$, donde ε_r es el cociente entre ε y ε_0, y se la denomina *permitividad relativa*.
ε_r es adimensional, es siempre mayor a uno, $\varepsilon_r > 1$, y lógicamente vale 1 para el vacío.
Como consecuencia, en nuestro curso, cuando estemos en presencia de un material dieléctrico, simplemente cambiaremos ε_0 por $\varepsilon = \varepsilon_r\ \varepsilon_0$.

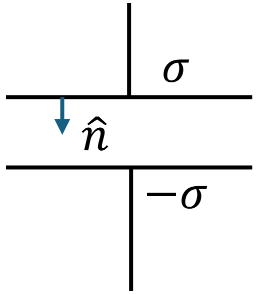
Por ejemplo, si el capacitor plano-paralelo que calculamos antes, tiene un material dieléctrico en su interior, de permitividad ε, el campo en el interior del capacitor será: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$, mientras que la capacidad calculada se actualiza como:

$$C_{pp} = \varepsilon_r\ \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

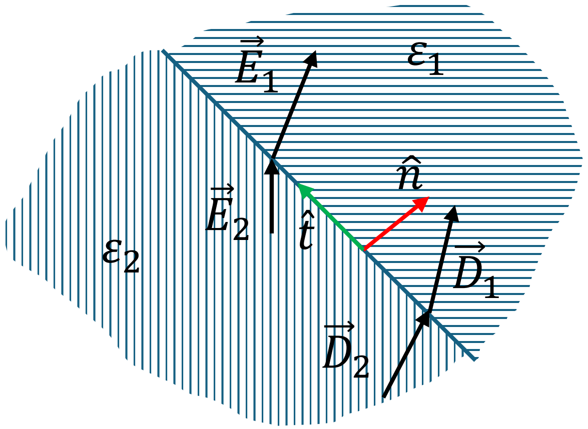
Campo de desplazamiento

La presencia de materiales dieléctricos genera la llamada carga de polarizacion, la cual es una función de las cargas libres que son, en definitiva, quienes generan el campo y también inducen las cargas en el material, que a su vez lo modifican. Para evitar esta situación se define un nuevo vector campo, el vector *desplazamiento eléctrico* $\vec{D}$, el cual es independiente de las cargas de polarización y sólo es función de las cargas libres, las que se manejan por operación externa.

Para materiales lineales, isótropos y homogéneos, se define el campo de desplazamiento como: $\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon\, \vec{E}}$



Por ejemplo, en el interior de un capacitor plano-paralelo $\vec{D} = \sigma\, \hat{n}$, para cualquier material dieléctrico interior, vacío incluido.



Al atravesar una interface donde cambia la permitividad, las componentes de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{D}$ deben cumplir con las llamadas condiciones de contorno, las cuales enunciaremos sin demostración aquí:

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot \hat{t} = 0$$

La componente tangencial del campo eléctrico se conserva.

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \cdot \hat{n} = \sigma_L$$

La componente normal del vector desplazamiento se conserva, a menos que haya una densidad superficial de carga en la interface.

Energía de un capacitor

Como ya habíamos visto, una distribución de cargas adquiere una energía de configuración de la forma:

$$U = \frac{1}{2}\int_{Vol} \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dr^3$$

En un capacitor, las cargas están en los conductores, de modo que la ecuación anterior queda:

$$U = \frac{1}{2}\int_{Cond_1} \rho\, V\, dr^3 + \frac{1}{2}\int_{Cond_2} \rho\, V\, dr^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\int_{Cond_1} \rho\, dr^3\right) V_1 + \left(\int_{Cond_2} \rho\, dr^3\right) V_2\right] = \frac{1}{2}\,(Q\, V_1 - Q\, V_2) = \frac{1}{2} Q\, \Delta V$$

V cte. en cada conductor

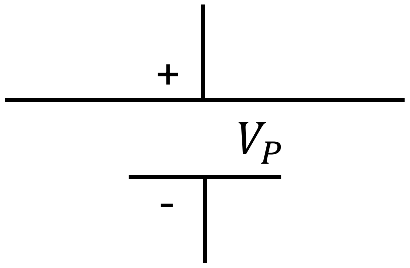
La expresión anterior tiene formas equivalentes , a saber: $U = \frac{1}{2} Q\, \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

y se utiliza la fórmula que más convenga según los datos del problema

Pilas o baterías

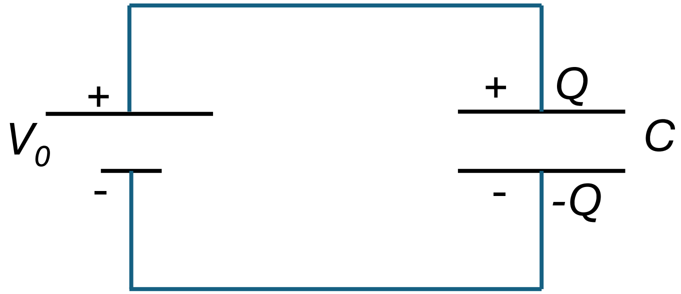
Las pilas o baterías son dispositivos electroquímicos que tienen como próposito ***mover cargas entre sus terminales para mantener constante la diferencia de potencial entre los mismos***. El trabajo que hace la pila para remontar el potencial y llevar, por ejemplo, cargas positivas desde el borne de menor potencial al de mayor potencial, es un trabajo NO electrostático. Por lo tanto, el campo eléctrico que genera la pila en su interior no cumple con la condición de irrotacionalidad que sí tiene el campo electrostático.

El símbolo de la pila es:



donde V_P es la diferencia de potencial entre los bornes.

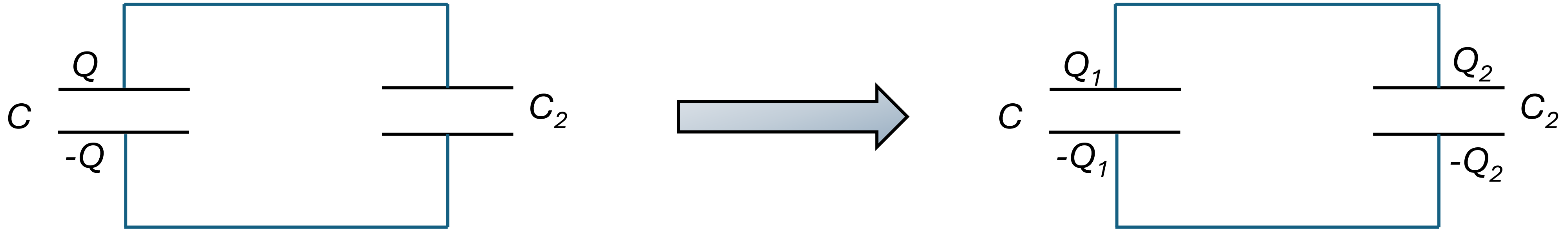
Si conectamos una pila a un capacitor, la pila se encargará de llevar carga positive al conductor del borne positive y viceversa, de modo que la diferencia de potencial entre los bornes del capacitor se igualen a los de la pila.



De este modo, el capacitor adquiere una carga

$$Q = C\ V_0$$

Así cargamos un capacitor. Si, una vez cargado, lo desconectamos de la pila y lo contectamos a otro capacitor, inicialmente descargado, la carga adquirida se repartirá entre ambos capacitores para igualar la diferencia de potencial entre los conductores.



donde $Q = Q_1 + Q_2$ y $\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C} = \Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$

dando como resultado

$$Q_1 = \frac{C}{C + C_2} Q$$

$$Q_2 = \frac{C_2}{C + C_2} Q$$

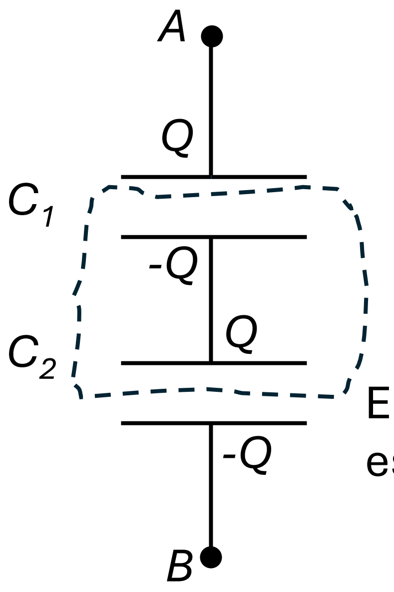
mientras que

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \frac{Q}{C + C_2} = \frac{C}{C + C_2} V_0$$

La diferencia de potencial de ambos capacitores es una fracción del voltaje inicial.

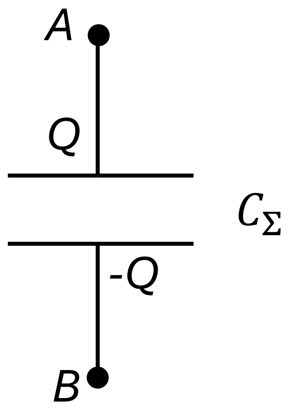
- Equivalente serie

Supongamos que tenemos dos capacitores, conectados uno a continuación de otro. A esto se lo llama configuración *serie*. Nos preguntamos si existe un capacitor equivalente que cumpla con las mismas condiciones. Las características de esta configuración son igual carga para todos los capacitores, mientras que la diferencia de potencial será la suma de las diferencias individuales.



El conductor central está aislado.

$\overset{?}{\equiv}$



Entonces, las cargas inducidas son iguales y contrarias a las del conductor que enfrenta.

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

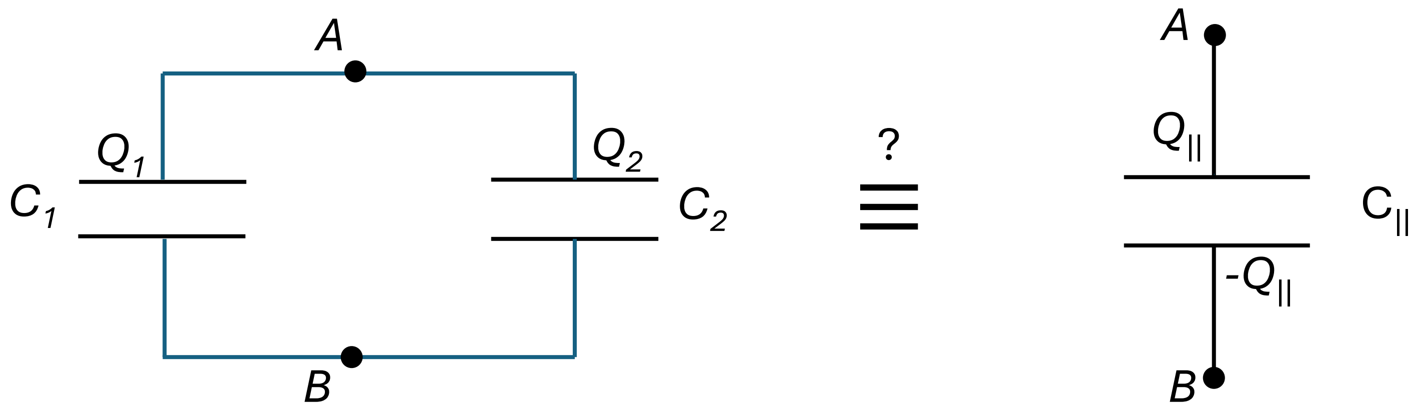
$$\therefore \Delta V_{AB} = \frac{Q}{C_\Sigma} \quad \text{con} \quad \frac{1}{C_\Sigma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\text{ó} \quad C_\Sigma = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

En general, para N capacitores en serie, $$\frac{1}{C_\Sigma} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

- Equivalente paralelo

Análogamente, buscamos el equivalente de dos capacitores conectados en paralelo. En esta configuración, la diferencia de potencial es la misma para todos los capacitores, mientras que la carga total es la suma de las cargas individuales.



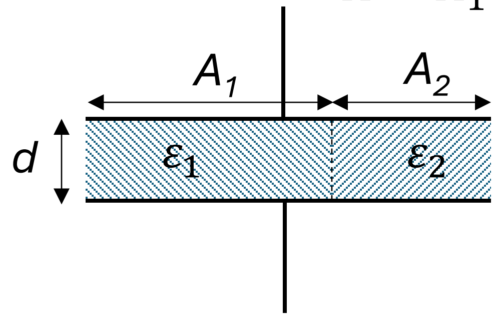
$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad \rightarrow \quad Q_{||} = Q_1 + Q_2 = C_1\,\Delta V_{AB} + C_2\,\Delta V_{AB} = (C_1 + C_2)\,\Delta V_{AB}$$

De modo que $C_{||} = C_1 + C_2$

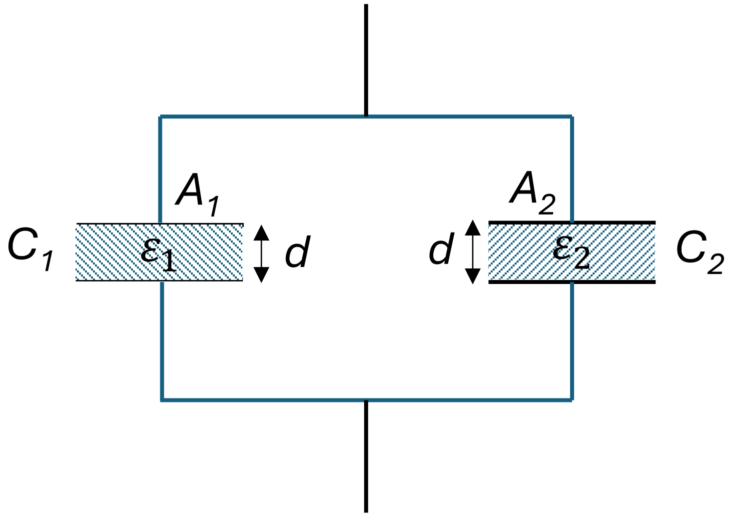
En general, para N capacitores en paralelo, $C_{||} = \sum_{i=1}^{N} C_i$

Si temenos un capacitor relleno con un más de un material dieléctrico, será una combinación serie o paralelo, según sea la ubicación de estos materiales. Por ejemplo,

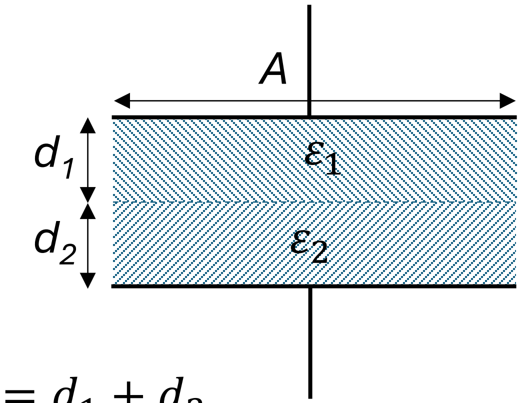
$$A = A_1 + A_2$$



$\equiv$

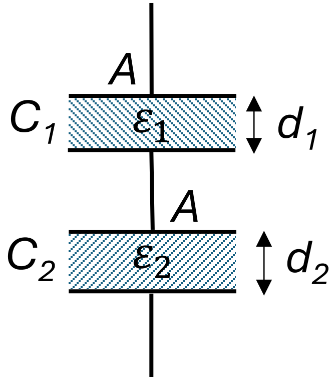


$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 A_2}{d}$$
$$= \left(\varepsilon_1 \frac{A_1}{A} + \varepsilon_1 \frac{A_1}{A}\right)\frac{A}{d}$$



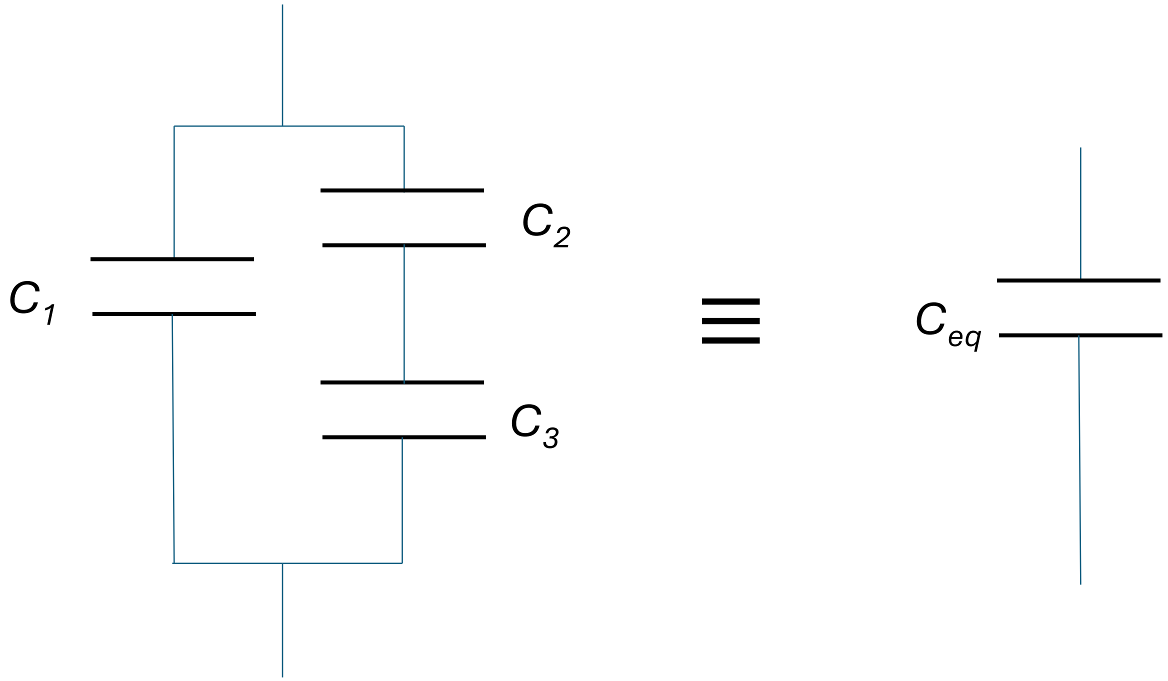
$$d = d_1 + d_2$$

$\equiv$



$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{A\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$
$$= \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \frac{d_2}{d} + \varepsilon_2 \frac{d_1}{d}}\right)\frac{A}{d}$$

Las configuraciones serie y paralelo, pueden combinarse. Por ejemplo,



$$C_{eq} = C_1 || (C_2 \,\Sigma\, C_3) = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$