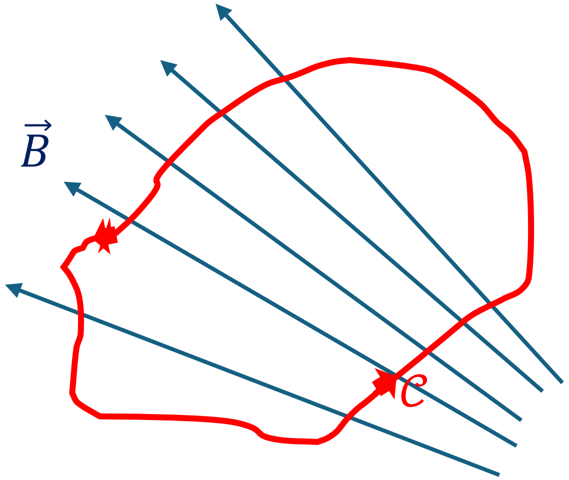
Corrientes dependientes del tiempo

Desde hace mucho tiempo se sabe que cuando aparecen corrientes que dependen del tiempo, como cuando se cierra o abre una llave, aparecen también fuerzas o diferencias de potencial sobre otras partes del circuito, sin explicación aparente.
Michael Faraday (inglés, 1791-1867) fue un notable científico que analizó estas situaciones –entre muchas otras– y demostró experimentalmente que cuando el *flujo de campo magnético* a través de alguna parte del circuito varía en el tiempo, se produce una *diferencia de potencial inducida* **(f.e.m.)** en la curva cerrada que define el área a través de la cual se calcula el flujo.



Definimos flujo de campo: $\Phi \equiv \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{B}.d\vec{S}$

Entonces Faraday nos dice que $fem \propto \frac{d\Phi}{dt}$

"La diferencia de potencial inducida es proporcional a la derivada temporal del flujo magnético"

Las unidades del flujo magnético son $[\Phi] = T\ m^2 = Wb$ (Weber) y su derivada tiene unidades de Volt. Entonces, la proporcionalidad entre la fem y la derivada de Φ será un número; llamémoslo α. ¿Qué signo tendrá?

Pensemos en el flujo generado por una espira por la cual circula una corriente dada. La corriente genera un campo que atraviesa la espira y, por ende, concatena flujo. Si esta corriente aumenta, aunque sea un aumento porcentualmente pequeño, la derivada del flujo será positiva. Entonces si una derivada positiva generase una *fem* positiva ($\alpha > 0$), la corriente que circula por la espira aumentará debido a esta diferencia de potencial inducida. Si aumenta la corriente, lo hará el campo, entonces aumentará el flujo y en consecuencia su derivada. Esta generará a su vez un aumento en la *fem* y, en consecuencia, esta situación rápidamente será divergente.
Por esta razón Heinrich Lenz (Estonia, 1804-1865) estableció que la *fem* inducida debe oponerse a la fuente que la genera, en este caso la variación del flujo magnético. Por lo tanto, podemos enunciar que, en el sistema internacional:

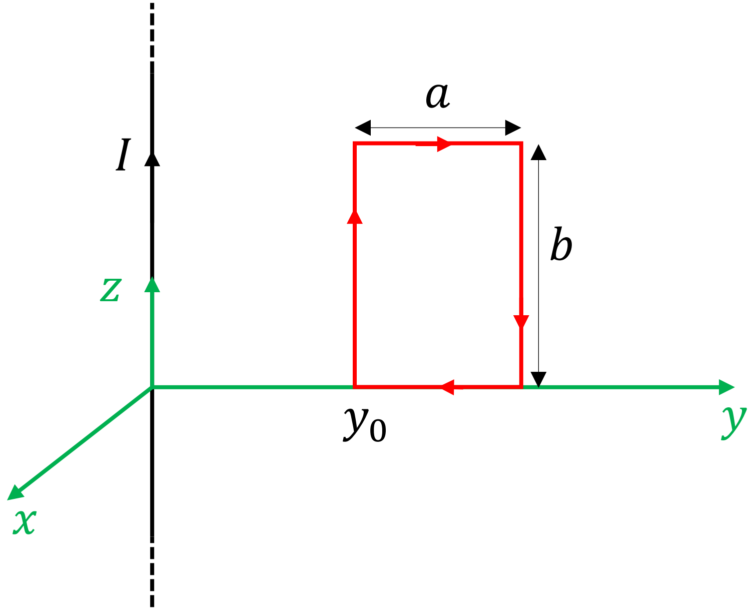
$$\boxed{fem = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_{S(\mathcal{C})} \vec{B}.d\vec{S}}$$

Ley de Faraday-Lenz

¿Por qué razón puede variar el flujo magnético? Podemos enunciar 3 causas:

- Porque el campo $\vec{B}$ depende del tiempo.
- Porque la geometría de la espira depende del tiempo.
- Porque la orientación relativa entre el campo y la espira dependen del tiempo.

Hagamos un ejemplo: supongamos que tenemos un hilo infinito por el circula una corriente I. Cerca del hilo hay una espira rectangular de lados a y b.



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\hat{\varphi} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}\hat{\imath} \qquad d\vec{S} = -dy\,dz\,\hat{\imath}$$

En cilíndricas

En cartesianas sobre el plano $(y > 0, z)$

Por la orientación de la curva

Calculamos el flujo $$\Phi = \iint \vec{B}.d\vec{S} = \iint \left(-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}\right)\hat{\imath}\,.(-dy\,dz)\hat{\imath} = \int_0^b dz \int_{y_0}^{y_0+a} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}dy$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln\left(\frac{y_0 + a}{y_0}\right)$$

- Supongamos que la corriente I varía en el tiempo. Entonces:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(\frac{y_0 + a}{y_0}\right)\frac{dI}{dt}$$

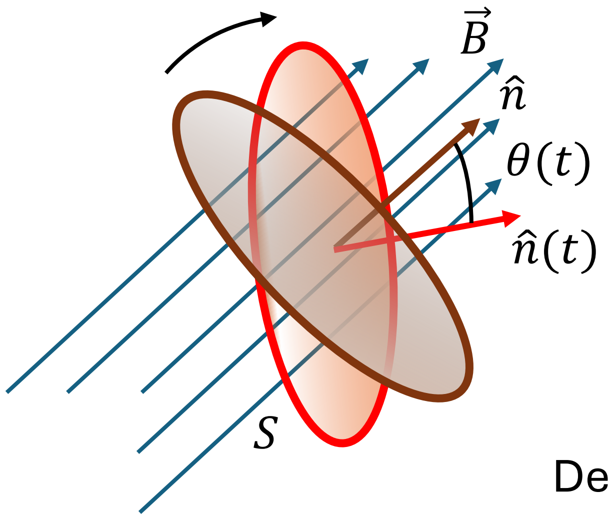
Si $\frac{dI}{dt} > 0 \rightarrow fem < 0$, porque si aumenta la corriente, aumentará el flujo y la fem inducida –para el caso que genere corriente sobre la espira– generará una corriente que a su vez generará un campo que tenderá a disminuir el flujo.

- Supongamos que la corriente I es constante, pero la espira se mueve a lo largo del eje y con velocidad $\vec{v}$. Por lo tanto, $y_0(t) = y_{00} + vt$, donde y_{00} es la posición inicial de la espira. Entonces:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{ab\,v}{y_0(y_0 + a)}$$

En este caso la *fem* será positiva pues, al moverse la espira alejándose del hilo, cada vez concatena menos campo, entonces el fluyo disminuye y la *fem* inducida tiene a aumentarlo.

- Supongamos que tenemos una espira rígida que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ en una zona de campo magnético uniforme.



$$\theta(t) = \omega t$$

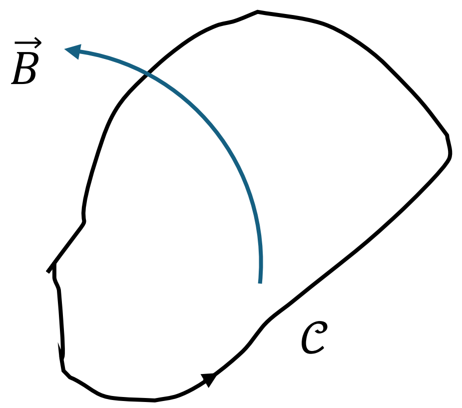
$$\vec{B}.d\vec{S} = B\hat{n}.dS\hat{n}(t) = B\ dS\ \cos\theta(t) = B\ dS\ \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \Phi(t) = \iint \vec{B}.d\vec{S} = B\ S\cos(\omega t)$$

De modo que $$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ S\ \omega\ \mathrm{sen}(\omega t)$$

Este dispositivo es nuestro primer generado de tensión alterna: en efecto, haciendo rotar una espira en un campo magnético uniforme, tendremos entre sus bornes una diferencia de potencial de forma sinusoidal. Esto es, un generado de tensión periódico en el tiempo de período $\tau = {}^{2\pi}/_{\omega}$.

La ley de Faraday-Lenz es una ley del tipo integral. Pero para muchos conceptos teóricos, necesitamos transformarla en una expresión diferencial. Históricamente, la curva a través de la cual se calculó el flujo del campo fue una curva material, una curva donde físicamente existía, por ejemplo, un conductor. Pero esta restricción no es necesaria, podemos tomar una curva abstracta cerrada y calcular allí el flujo del campo magnético.



$$fem = -\frac{d}{dt}\iint_{S(\mathcal{C})} \vec{B}.d\vec{S} = -\iint_{S(\mathcal{C})} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$$

Como $\mathcal{C}$ es una curva fija en el espacio, la derivada temporal entra en la integral como derivada parcial, ya que sólo $\vec{B}$ puede depender del tiempo explícitamente.

Nosotros sabemos que hay campos eléctricos electrostáticos (generados por cargas quietas) y no electrostáticos (por ejemplo, las pilas). Los campos electrostáticos son irrotacionales, pero lo no electrostáticos no tienen por qué serlo. De hecho, en una malla de un circuito que contiene una pila y un capacitor, tenemos ambos tipos de campos: en los conductores los campos serán irrotacionales, mientras que en la pila no lo serán.

Entonces, si calculamos la circulación del campo eléctrico –que exista– en la curva anterior tendremos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{E}_{elect} + \vec{E}_{Nelect}).d\vec{l} = \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_{elect}.d\vec{l}}_{=\,0 \text{ ya que es un campo irrotacional}} + \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_{Nelect}.d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_{Nelect}.d\vec{l} = fem$$

En consecuencia, por un lado, $fem = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.d\vec{l} = \iint_{S(\mathcal{C})} (\vec{\nabla} \times \vec{E}).d\vec{S}$

Teorema de Stokes

Válido para toda curva cerrada $\mathcal{C}$

Por otra parte, $fem = \iint_{S(\mathcal{C})} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).d\vec{S}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Esto significa que si existe un campo magnético variable en tiempo, esta variación es la fuente de un campo eléctrico rotacional. Esta es la primera ecuación que vincula los campos eléctricos y magnéticos entre sí.