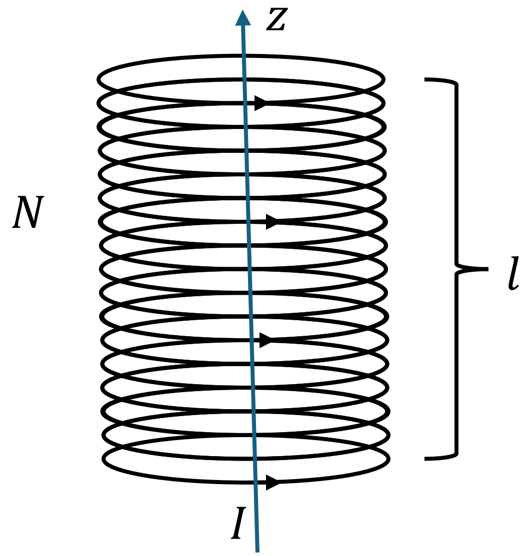
Autoinductancias e Inductancias mutuas

Un dispositivo que genera campo magnético (por ejemplo, una bobina con corriente) puede a su vez concatenar flujo y si éste varia, generará una diferencia de potencial inducida en el mismo dispositivo.

Supongamos que temenos un solenoide, por el cual circula una corriente. Tiene N vueltas, longitud l, sección S y la corriente que circula es I. Por razones de simplicidad, vamos a aproximar el campo en el interior por el campo de un solenoide infinito.



$$\vec{B} = n\mu_0 I\hat{k} = \frac{N}{l}\mu_0 I\hat{k}$$

$$\rightarrow \Phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} = N\iint_S \frac{N}{l}\mu_0 I\hat{k}\,.\,dS\hat{k} = \frac{N^2\mu_0 S}{l}I$$

Este resultado es un caso particular de una ley más general, que dice que el f**lujo** concatenado por cualquier dispositivo que genere campo magnético **sobre sí mismo** es proporcional a la **corriente** que circula por dicho dispositivo.

Entonces, si la geometría del dispositivo no se modifica en el tiempo, podemos afirmar que hay una relación lineal en el flujo concatenado y la corriente que genera el campo y, por ende, el flujo.

$$\boxed{\Phi = L\, I}$$

La constante de proporcionalidad se llama ***autoinductancia*** o muchas veces, simplemente inductancia.

Las unidades son $$[L] = \frac{T\, m^2}{A} \equiv Hy$$ *Hy:* Henrios o henry, en honor a Joseph Henry (EEUU, 1797-1878)

Para el caso del solenoide anterior tenemos que $$L = \frac{N^2 \mu_0 S}{l}$$

Si el bobinado tiene un material magnético en su interior de permeabilidad μ, simplemente reemplazaremos μ_0 por μ.

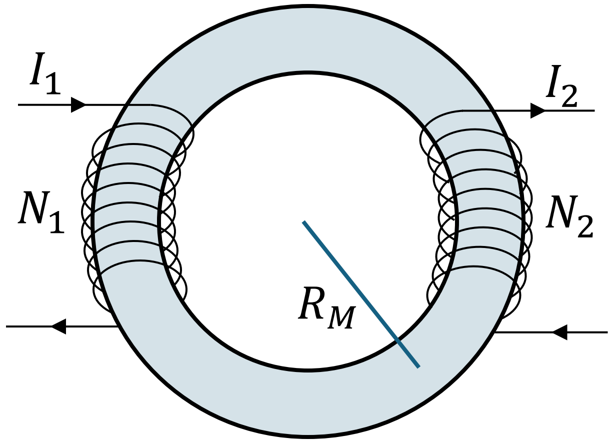
Por lo tanto, la diferencia de potencial inducida será:

$$fem = -L\, \frac{dI}{dt}$$

donde esta dif. de potencial actuará como una fuente equivalente de tensión, o bien diremos que si lo consideramos como un elemento circuital *pasivo*, sobre él aparecerá una **caída de potencial**: $+L\,\dfrac{dI}{dt}$

En otras ocaciones, un dispositivo puede concatenar el flujo propio y también el flujo generado por un campo exterior.

Veamos, por ejemplo, el caso de un toroide con dos bobinados.



Supongamos que el toroide es delgado, de permeabilidad μ, radio medio R_M y sección S. Y cada bobinado está alimentado con sendas corrientes I_1 e I_2. Si observamos el segundo bobinado, éste concatenerá flujo debido a la bobina 1 y a la 2 simultáneamente.

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \quad \text{donde} \quad \Phi_{21} = N_2 \iint_S \vec{B}_1 . d\vec{S} \quad \text{y} \quad \Phi_{22} = N_2 \iint_S \vec{B}_2 . d\vec{S}$$

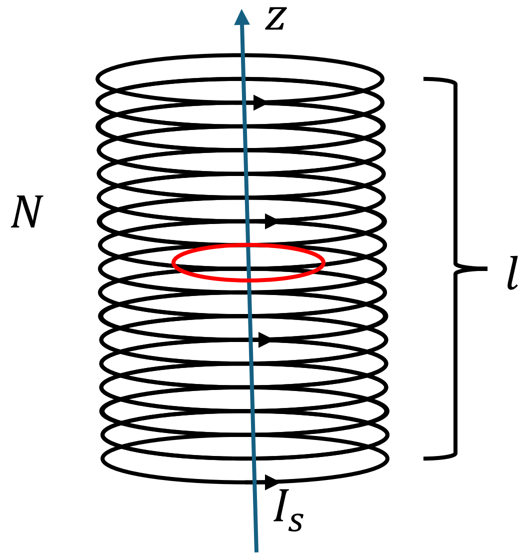
Los campos magnéticos generados por cada bobinado serán $\vec{B}_1 \cong \dfrac{N_1 \mu}{2\pi R_M} I_1 \hat{\varphi}$ y $\vec{B}_2 \cong \dfrac{N_2 \mu}{2\pi R_M} I_2 \hat{\varphi}$

$\Rightarrow$ $\Phi_2 = \dfrac{N_1 N_2 \mu S}{2\pi R_M} I_1 + \dfrac{{N_2}^2 \mu S}{2\pi R_M} I_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2$ siendo $L_2 = \dfrac{\Phi_{22}}{I_2}$ la autoinductancia del segundo bobinado

y $M_{21} = \dfrac{\Phi_{21}}{I_1}$ la **inductancia mutua** entre el bobinado 2 y el bobinado 1.

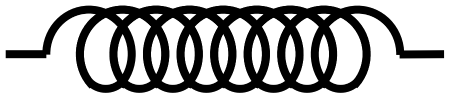
Lógicamente, también se pueden definir, de modo análogo $M_{12} = \dfrac{\Phi_{12}}{I_2}$ y $L_1 = \dfrac{\Phi_{11}}{I_{21}}$

Se puede demostrar rigurosamente que $M_{12} = M_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}$, donde k es un factor de acoplamiento. En el caso del ejemplo anterior todo el campo generado por una bobina es concatenado por la otra sin pérdidas, por ende $k = 1$. Si hay pérdidas en el acoplamiento, entonces $k < 1$. De modo que, al ser la inductancia mutua un parámetro simétrico se la llama M, sin subíndices, y se puede calcular usando cualquiera de las dos versiones; elegimos la que sea más fácil de aplicar.

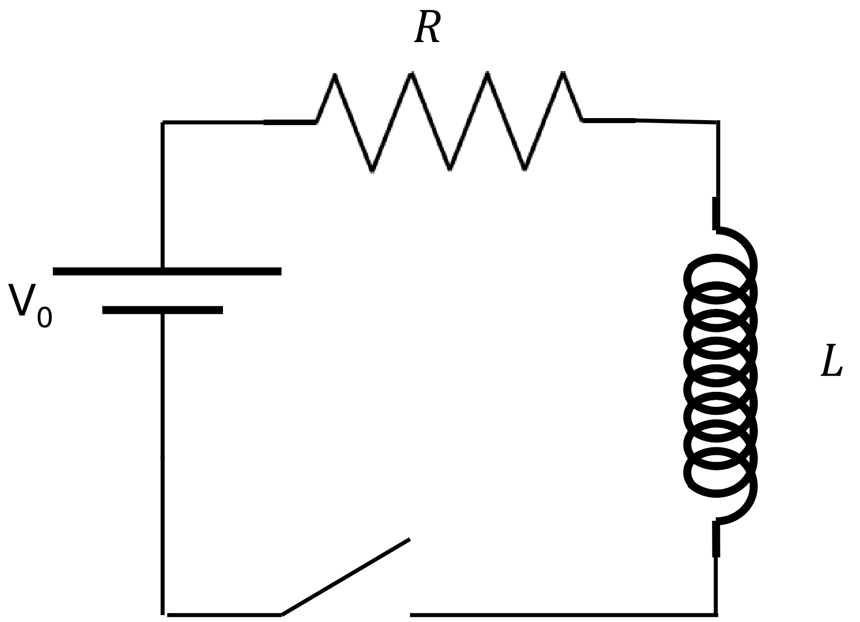


Por ejemplo, si tenemos dos bobinados como se muestra en la figura: un solenoide de N vueltas, longitud l y radio R, y por otro lado, una sola espira en su interior de radio r, es más simple para calcular la inductancia mutua alimentar el solenoide con una corriente I_s y ver el flujo que concatena espira -utilizando la aproximación de solenoide infinito para el campo del solenoide a través de la superficie de la espira- que a la inversa.

$$\rightarrow M = M_{es} = \frac{\Phi_{es}}{I_s} = \frac{n\mu I_s \pi r^2}{I_s} = \frac{N\pi\mu r^2}{l}$$

Esquemáticamente, los inductors se representan con un dibujo de bobina: 

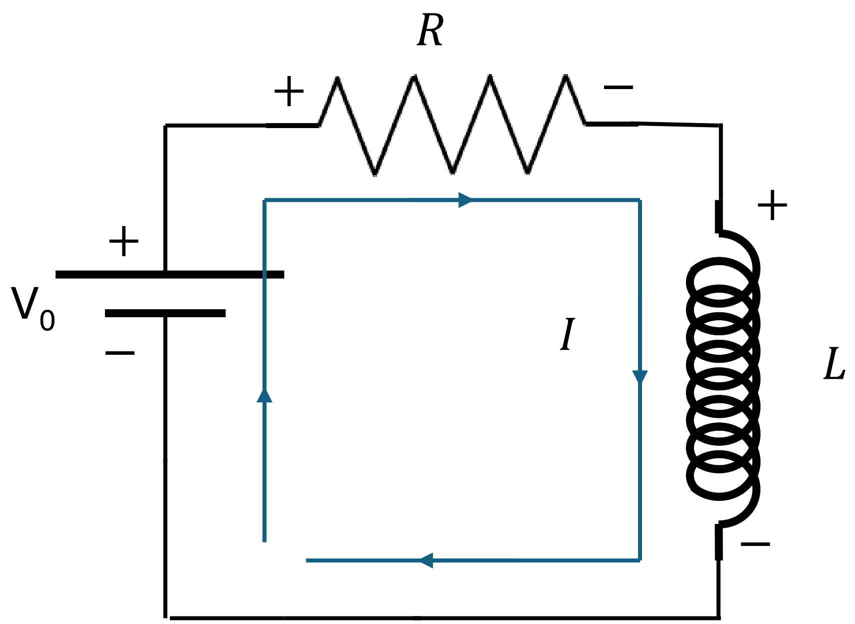
Estos elementos formarán parte de un circuito, junto con las fuentes, resistores y capacitores.



Veamos un circuito simple

Este circuito tiene una sola corriente que puede circular por él cuando se cierre la llave. Como hay un inductor en la rama, la corriente debe ser una función continua, es decir, no puede haber saltos de corriente. De este modo:

$I(0^+) = I(0^-) = 0$ porque con la llave abierta no circula corriente



Al cerrar la llave circulará una corriente I en el circuito. La pila tiene la polaridad definida, pero los elementos pasivos sufren una "caída de potencial" según el sentido (arbitrario) de la corriente propuesta.
Entonces, si recorremos la malla, empezando, por ejemplo, en borne negativo de la pila, en sentido horario, tendremos:

$$V_0 - R\,I - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Ecuación diferencial que rige la evolución temporal de la corriente.

La ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal en I, de primer orden (porque la mayor derivada que aparece es la primera). Si la reescribimos:

$$L\frac{dI}{dt} + R\,I = V_0$$

vemos que es una ecuación lineal no homogénea.

La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales no dice que la solución más general es de la forma

$$I(t) = I_P(t) + I_H(t)$$

Donde I_P es una solución particular de la ecuación (cualquier solución), mientras que I_H son todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea, esto es, la ecuación sin término independiente.

$$L\frac{dI_H}{dt} + R\,I_H = 0$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial forman un espacio vectorial de dimensión igual al orden de la ecuación. En este caso, como el orden es 1, la dimensión del espacio será 1, por ende, necesitaremos encontrar sólo una función que verifique la ecuación y esa función será el generador del espacio vectorial de soluciones.

La búsqueda de estas funciones (I_P, I_H) es una tarea de prueba y error: se propone una forma funcional, y si verifica la ecuación se la mantiene y si no verifica, simplemente se prueba otra función. No obstante, las ecuaciones diferenciales lineales son un tema muy estudiado y propondremos funciones que verificarán las ecuaciones.

Para la solución particular, como el término inhomogéneo es una constante, propondremos una función constante.

Proponemos $I_P(t) = K$. Como K no depende del tiempo, $\frac{dI_P}{dt} = 0$. Reemplazando en la ecuación original,

$L\,0 + R\,K = V_0$ entonces $K = \frac{V_0}{R}$ y $\boxed{I_P(t) = \frac{V_0}{R}}$

Para la solución de la ecuación homogénea proponemos: $I_H(t) = e^{\lambda t}$ $\rightarrow \frac{dI_H}{dt} = \lambda\, e^{\lambda t}$

donde λ es un parámetro a determinar.

Reemplazamos en la ecuación homogénea: $L\,\lambda e^{\lambda t} + Re^{\lambda t} = 0$

$$e^{\lambda t}(L\lambda + R) = 0$$

Como la exponencial es siempre positiva, debe ocurrir que

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

Definimos $\tau_L = \frac{L}{R}$ el tiempo característico de la ecuación $[\tau_L] = seg$ (verificarlo!)

Entonces, todas las soluciones de la ecuación homogénea serán de la forma $I_H(t) = A\, e^{-t/\tau_L}$

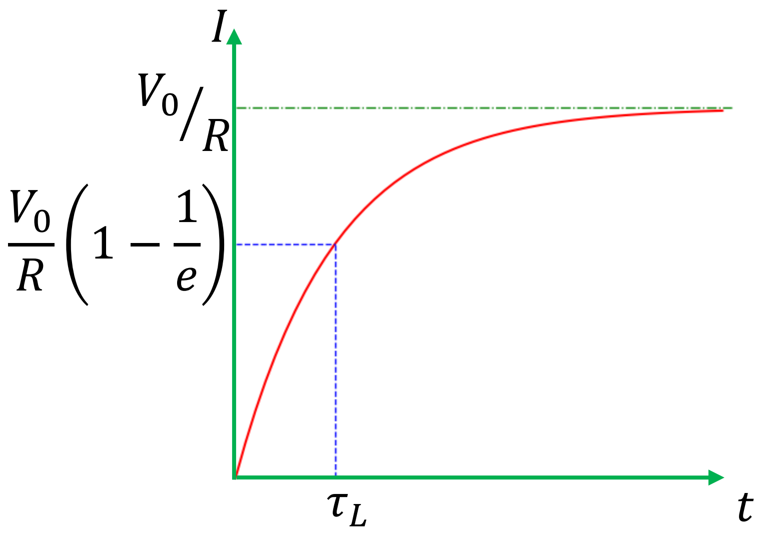
con $A \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación original son de la forma

$$I(t) = \frac{V_0}{R} + A\, e^{-t/\tau_L} \qquad \text{con } A \in \mathbb{R}$$

¿Cómo se determina el valor de A? Aplicando las condiciones iniciales. En este caso, $I(0) = 0$.

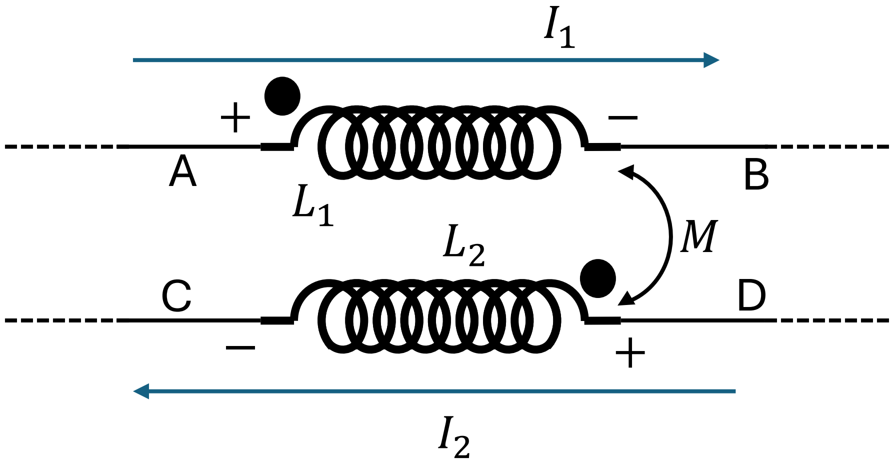
$$I(0) = \frac{V_0}{R} + A = 0 \qquad \rightarrow A = -\frac{V_0}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)}$$



La corriente tiene como valor asintótico V_0/R, que es el valor estacionario de la corriente, cuando ya su derivada tiende a cero y desaparece la caída de potencial en el inductor.

τ_L es el tiempo característico del circuito y es común afirmar que pasados 5 τ_L, el sistema ya llegó al estado estacionario. Cuanto más baja es la inductancia, más rápido se alcanza el equilibrio.

Cuando un circuito contiene más de un inductor, debe especificarse si hay acoplamiento entre ellos o si el campo que concatena uno debido al otro es despreciable.
Para el caso que haya acoplamiento, deberá especificarse también la orientación de un inductor respecto del otro. Por ejemplo,



La diferencia de potencial entre los puntos A y B será

$$V_A - V_B = L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}$$

mientras que, entre los puntos D y C será

$$V_D - V_C = L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}$$

(si los dos inductores están en la misma rama, la corriente será la misma en cada caso.)

¿Cuándo será positivo o negativo el acoplamiento? Seguiremos la regla de los bordes homólogos (puntos marcados en los inductores): si las corrientes tienen el mismo signo en los bordes homólogos, es decir ambas entran (o salen) por ese lugar –como en el dibujo–, el acoplamiento será positivo. La contribución de la inducción mutua acompañará a la autoinducción. Si, por el contrario, una corriente entra por un borde y la otra sale por el otro borde marcado, el acoplamiento será negativo, restando flujo magnético a cada una de las bobinas.