Flujo de campo eléctrico

Vimos que el campo electrostático tiene como característica que su rotor es nulo. Esto no será así cuando haya cargas en movimiento. Pero, mientras todo esté en equilibirio, entonces $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

¿Cuánto vale la divergencia del campo? Para responder esta pregunta, apliquemos el teorema de Gauss al campo eléctrico:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dr^3$$

Si calculamos la divergencia a partir de la expresión del campo electrostático:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}. \left[K \sum_{i=1}^{N} q'_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} \right] = K \sum_{i=1}^{N} q'_i \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} \right]$$

porque la divergencia se aplica en las coordenadas fuente.

Pero $\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} \right] = 0 \text{ si } \vec{r} \neq \vec{r}'_i$

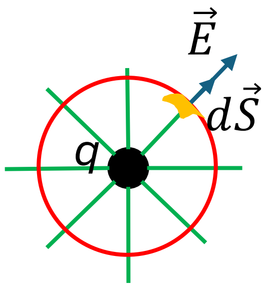
Entonces, la divergencia del campo es nula en todo punto donde no hay carga. Por lo tanto, el teorema de Gauss nos dice que el flujo del campo Φ será:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

si no hay carga dentro del volumen de la superficie cerrada S, es decir, si la *carga encerrada* es nula.

Flujo del campo electrostático

¿Qué sucede entonces cuando la superficie cerrada encierra una (o más) cargas? Supongamos que la superficie es eférica y encierra una carga puntual q. Si la superficie está lo suficientemente cerca de la carga como para que otras cargas vecinas no afecten el campo, las líneas de campo sobre la superficie será radiales, paralelas al diferencial de superficie orientado.



Si tomamos como origen del sistema de referencia la carga q, el campo en la superficie de la esfera se escribirá (en coordenadas eféricas):

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\, q\, \frac{\hat{r}}{r^2}$$ y el diferencial de superficie $$d\vec{S} = dS\, \hat{r}$$

Entonces el flujo es: $$\Phi = \oiint_S K\, q\, \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot dS\, \hat{r} = Kq \oiint_S \frac{dS}{r^2} = 4\pi K\, q$$

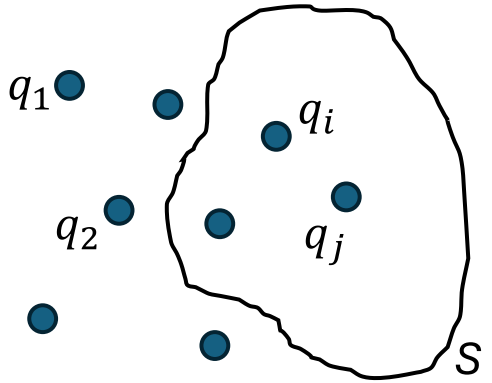
Si llamamos $K \equiv \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ donde $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\ m}^2}$ y se la llama ***permitividad del vacío.***

Entonces,

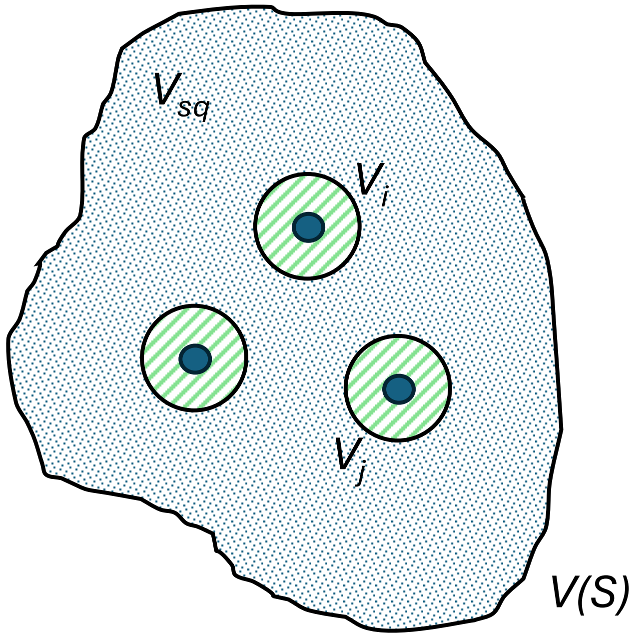
$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

donde *q* es las carga encerrada por la superficie.

¿Qué sucede si la superficie encierra más de una carga? Vale el principio de superposición.



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dr^3 = \sum_k \int_{V_k} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dr^3 + \int_{V_{sq}} \overbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}^{=0}\, dr^3 = \sum_k \oint\!\!\!\oint_{S_k} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_k \frac{q_k}{\varepsilon_0}$$



V_{sq}: volumen sin carga encerrada

El volumen que encierra S se divide en el volumen que encierra cada carga y el resto, donde la divergencia es nula. Entonces el flujo total es la suma de los flujos individuales, cada uno de ellos igual a la carga encerrada sobre la permitividad del vacío.

Por lo tanto, podemos escribir que:

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

donde Q_{enc} es la carga total encerrada por la superficie.

Teorema de Gauss para el campo eléctrico

Volviendo al teorema de la divergencia:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dr^3 = \oiint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r})\, dr^3 \qquad \forall\, V \text{ compacto}$$

Entonces, como la igualdad anterior es válida para todo volumen V, los integrandos deben ser iguales.

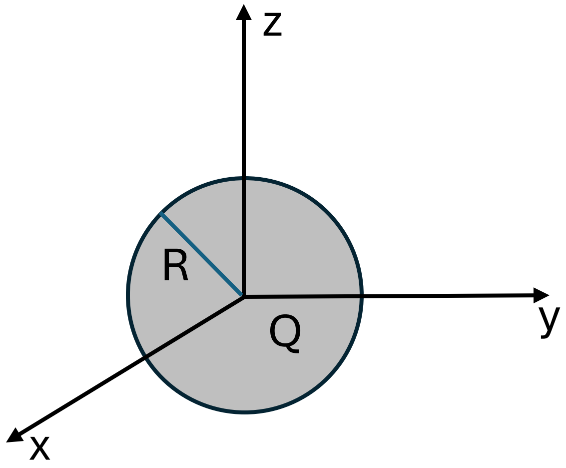
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Forma diferencial del teorema de Gauss y la primera de las cuatro ecuaciones de Maxwell que rigen el electromagnetismo.

El teorema de Gauss es válido a nivel teórico, pero también nos permite calcular campos eléctricos en situaciones de alta simetría.
En efecto, si la distribución de cargas es tal que, sólo por razones de simetría, podemos saber la dirección del campo eléctrico y las dependencias del mismo con las coordenadas. Y si lo único que falta es el valor del campo en función de esa coordenada, habrá que elegir una superficie, la superficie de Gauss, para la cual sea possible calcular el flujo de campo y, de allí, calcular el campo.

Veamos algunos ejemplos:

- <u>Esfera cargada uniformemente en volumen</u>

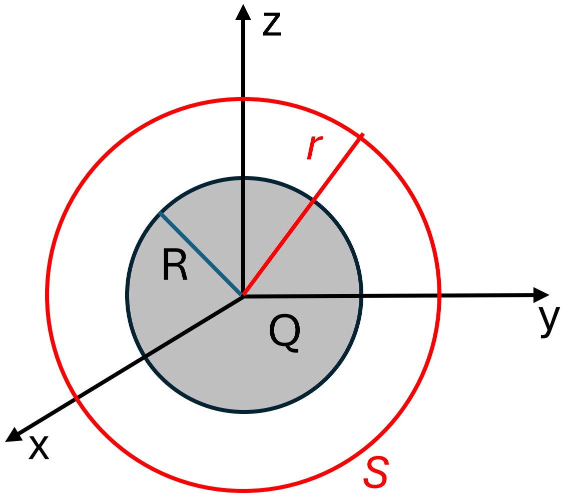


Este problema tiene claramente simetría esférica total. Si usamos coordenadas esféricas, sólo por razones de simetría, el campo eléctrico no puede depender de ninguna coordenada angular y su dirección debe ser únicamente radial.

$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$ donde *r* es la coordenada radial de eféricas y $\hat{r}$ la dirección radial saliente.

La densidad de carga, al ser uniforme su distribución, será: $$\rho = \frac{Q}{Vol} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Entonces una superficie de Gauss en este caso será una esfera concéntrica con la esfera cargada, de radio *r*.



Sobre la esfera de Gauss, el campo eléctrico tendrá modulo constante y paralelo a la dirección del diferencial de superficie.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r} \quad \text{y} \quad d\vec{S} = dS\,\hat{r}$$

de modo que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)\hat{r}.\,dS\hat{r} = \oiint_S E(r)dS \underset{\uparrow}{=} E(r) \oiint_S dS = E(r)\,4\pi r^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$E(r)$ es constante sobre la superficie de Gauss

Teorema de Gauss

Entonces, $$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{enc}}{r^2}$$

En consecuencia, habrá que calcular la carga encerrada en la superficie para cada caso.

Si $r > R$, la carga encerrada es toda la carga de la esfera: $Q_{enc} = Q$

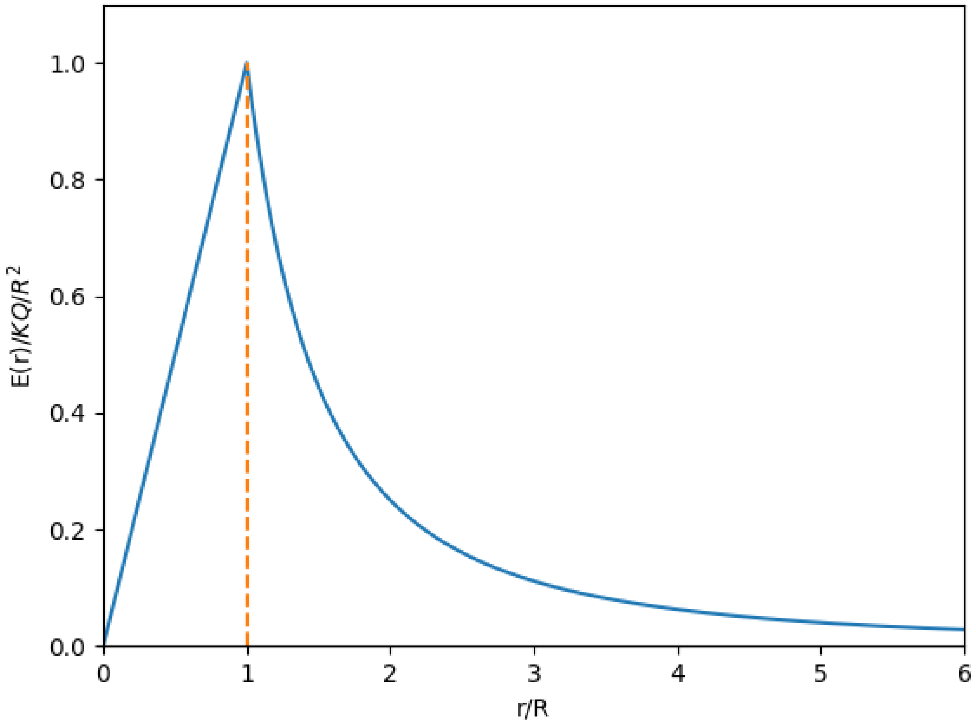
Si $r < R$, la carga encerrada será menor y debemos calcularla.

$$Q_{enc}(r < R) = \int_{V(r)} \rho \, dr^3 \underset{\rho \text{ cte}}{=} \rho \int_{V(r)} dr^3 = \rho \, \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Entonces, juntando todo lo que vimos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{r}{R^3} \hat{r} & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \hat{r} & r \geq R \end{cases}$$

Como la función $E(r)$ resultó continua en R, podemos poner el signo $\leq, \geq$ en la expresión anterior.

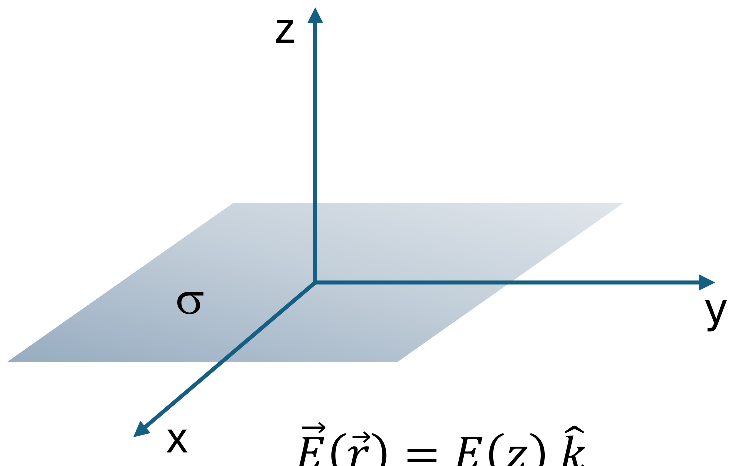


¿Qué sucede si la carga está distribuída uniformemente sobre la superficie de la esfera?
La carga encerrada para valores de la coordenada radial mayores al radio de la esfera sigue siendo la misma, pero para radios menores a *R* la carga encerrada sera nula. Entonces,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$$

Acá el campo es discontinuo en *R* y entonces la desigualdad es estricta.

- Plano infinito cargado uniformemente en superficie

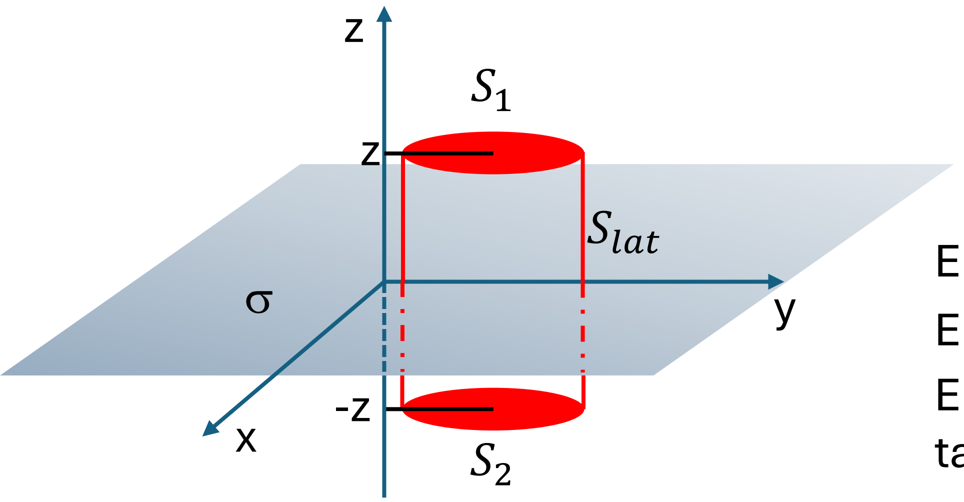


$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\,\hat{k}$$

Por simetría, en un dado punto del espacio, E_x y E_y deben ser nulas, porque que no hay razón para que el campo vaya hacia *x* o *y* positivas o negativas, ya que es arbitrario el sentido. Por la misma razón, el campo no puede depender de las coordenadas *x* ó *y*, porque hay simetría de traslación a lo largo del plano. Entonces,

Más aún, un punto de coordenada *z* es físicamente indistinguible del punto simétrico de coordenadas –*z*. Esto se traduce en que la función $E(z)$ debe ser antisimétrica: $E(-z) = -E(z)$

Entonces, tomamos como superficie de Gauss un paralelepípedo de sección arbitraria, simétrico a ambos lados del plano y de altura $2z$.



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En la superficie lateral, $d\vec{S} \in \Pi_{x,y}$, por lo tanto, $\vec{E} \perp d\vec{S}$ y el flujo es nulo.
En S_1, $d\vec{S} = dS\,\hat{k}$ y $\vec{E} = E(z)\,\hat{k}$. Entonces, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z)\,dS$.
En S_2, $d\vec{S} = -dS\,\hat{k}$ y $\vec{E} = E(-z)\,\hat{k} = -E(z)\,\hat{k}$. Entonces, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z)\,dS$ también.

Por lo tanto, como $S_1 = S_2 = S_{tapa}$ $\quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \iint E(z)\,dS = 2\,E(z) \iint dS = 2\,E(z)\,S_{tapa}$

Y la carga encerrada es la carga que ocupa la proyección de las tapas en el plano: $Q_{enc} = \sigma\,S_{tapa}$

Entonces, por el teorema de Gauss, $2\,E(z)\;S_{tapa} = \frac{\sigma\,S_{tapa}}{\varepsilon_0}$. Como consecuencia, encontramos el campo generado Por el plano infinito:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > 0 \end{cases}$$

Campo generado por un plano infinito

Si el plano tuviera espesor h, y por ende una densidad volumétrica $\rho = \sigma/h$, el campo sería igual fuera del plano, pero se volvería continuo en el interior del mismo. En efecto, supongamos que el plano va desde $z = h/2$ hasta $z = -h/2$. Usando la misma superficie de Gauss, la carga encerrada cuando $z > h/2$ (y, por consiguiente, $-z < -h/2$) será $Q_{enc} = \rho\, Vol_{enc} = \rho\, h\, S_{tapa} = \sigma\, S_{tapa}$, el mismo resultado que en el caso anterior.
En cambio, cuando $-h/2 < z < h/2$, todo el volumen contendrá carga; entonces, $Q_{enc} = \rho\, Vol = \rho\, 2z\, S_{tapa} = 2\sigma z/h\, S_{tapa}$. Juntando todo, tendremos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < -h/2 \\ \dfrac{\sigma z}{h\varepsilon_0}\hat{k} & -h/2 < z < h/2 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > h/2 \end{cases}$$

siendo $\sigma = \rho\, h$