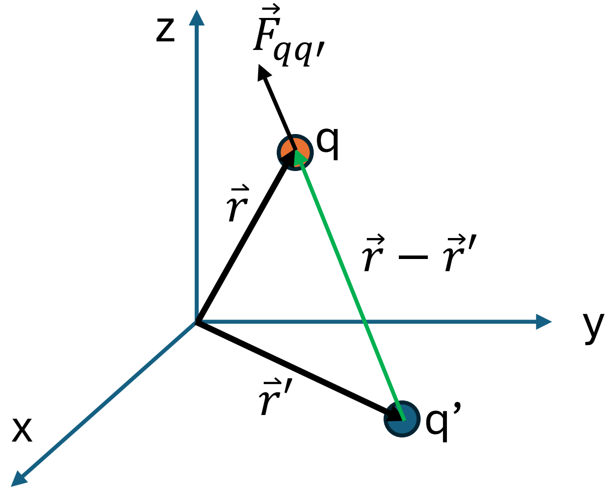
Electrostática

Una de las características de la materia, además de su masa es el valor de su carga. La carga neta de una partícula es el resultado del balance de cargas (protones y electrones) dentro de la misma.

La fuerza electrostática que siente una partícula cargada de carga **q**, ubicada en la posición $\vec{r}$ respecto a un sistema de referencia dado, en presencia de otra partícula cargada **q'**, ubicada en la posición $\vec{r}'$, será:



$$\vec{F}_{qq'}(\vec{r}) = K\frac{q\,q'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad \left|\vec{F}_{qq'}\right| = K\frac{q\,q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

La fuerza electrostática es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.
La constante ***K*** provee las unidades correspondientes, siendo en el sistema internacional $K = 8.99\ 10^9$ N m^2/C^2, donde C (Coulomb) es la unidad de la carga eléctrica.

La carga puede tener signo positivo o negativo. Dos cargas de igual signo se repelen entre sí, mientras que dos cargas de signos opuestos se atraen.
Para la fuerza electrostática vale el principio de superposición: si hay 3 cargas, la fuerza que siente una de ellas es la suma de las fuerzas que ejercen cada una de las otras dos cargas por separado.

Si tenemos una distribución de cargas, a las que llamaremos *cargas fuente*, la fuerza electrostática que siente una carga q ubicada en la posición $\vec{r}$, a la que llamaremos *carga campo*, será:

Distribución $\{q'_1, q'_2, \ldots, q'_N\}$ ubicada en $\{\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \ldots, \vec{r}'_N\}$ genera sobre q una fuerza

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = K\, q \sum_{i=1}^{N} \frac{q'_i(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3}$$

Si la distribución es continua, es decir, $dq' = \rho(\vec{r}')\, dr'^3$, donde dq' es la carga fuente en un elemento de volumen dr'^3 y $\rho(\vec{r}')$ es la densidad de carga en la posición $\vec{r}'$ ($[\rho]$ = C/m^3), entonces la sumatoria pasa a ser una integral:

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = K\, q \iiint_{Vol} \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dr'^3$$

La integral corre sobre todo el volume de la distribución de cargas fuentes.

Si la distribución de cargas está contenida en una superficie, entonces $dq' = \sigma(\vec{r}\,')\, dS'$, donde σ es una distribución superficial de cargas, siendo $[\sigma]$ = C/m^2, y la integral se transforma en una integral de superficie.

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = K\, q \iint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dS'$$

Análogmente, si la distribución de cargas está contenida en una curva, entonces $dq' = \lambda(\vec{r}\,')\, dl'$, donde λ es una distribución lineal de cargas, siendo $[\lambda]$ = C/m, y la integral se transforma en una integral de línea.

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = K\, q \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dl'$$

Campo electrostático

La presencia de una distribución de cargas genera lo que llamaremos el campo eléctrico $\vec{E}$, en este caso, campo electrostático. El campo eléctrico es la fuerza eléctrica por unidad de carga que siente una carga de prueba frente a una distribución de cargas.

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$$

De este modo, si conocemos el campo eléctrico que genera una distribución dada, la fuerza que sertirá una carga de prueba será: $\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$.

(Estrictamente hablando, el campo se define como $\vec{E}(\vec{r}) \equiv \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$ porque hay que garantizar que la presencia de la carga sensora no afecte la distribución de cargas fuentes. Esto no sucede en el caso Electrostático, pero podría pasar si las cargas tienen movilidad.)

De este modo, el campo electrostático de una distribución de cargas será:

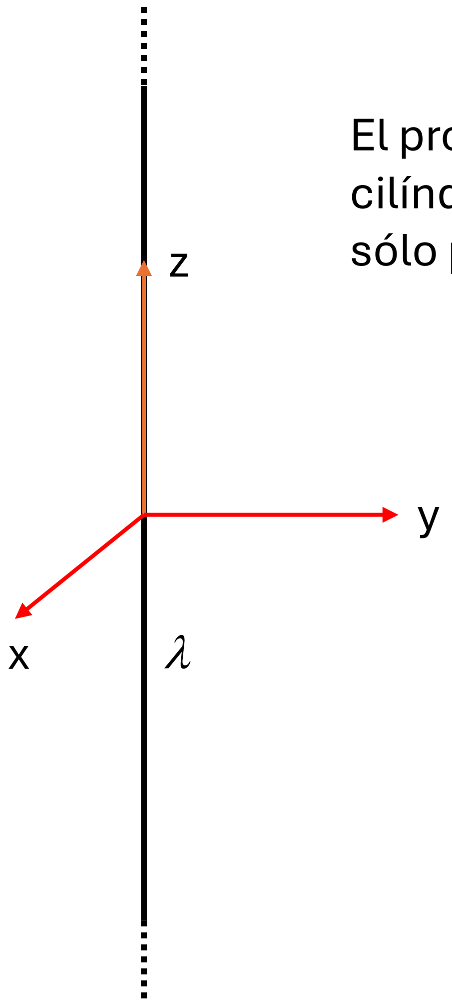
$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q'_i(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3}$$

Si la distribución es discreta

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \iiint_{Vol} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dr'^3$$

Si la distribución es continua, o sus formas equivalentes con las distintas densidades de carga.

Calculemos, como ejemplo el campo eléctrico de un hilo recto infinito cargado uniformemente con una densidad lineal de carga uniforme λ.



El problema tiene claramente simetría cilíndrica. Si usamos coordenadas cilíndricas (r, φ, z) para expresar el campo, hay muchas consideraciones que surgen sólo por razones de simetría, a saber:

- No puede haber dependencias en las coordenadas φ y z, ya que no hay razones físicas para que esto suceda. Entonces, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$.
- Las componentes φ y z del campo necesariamente deben ser nulas, porque no hay razones físicas para distinguir los diferentes sentidos del eje z o de rotación en φ. Entonces, $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\hat{r}$.
- Por lo tanto, si calculamos el campo para un punto, por ejemplo, $(0, y, 0)$, este campo deberá estar únicamente en componente $\hat{j}$ y el valor que calculemos será válido para todo punto con coordenada radial $r = y$.

Entonces, $\vec{r} = y\,\hat{\jmath}$ $\quad \vec{r}\,' = z'\hat{k}$ $\quad -\infty < z' < \infty$ $\quad dl' = dz'$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = y\hat{\jmath} - z'\hat{k} \qquad |\vec{r} - \vec{r}\,'| = (y^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$\therefore \quad \vec{E}(y) = K\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{y\hat{\jmath} - z'\hat{k}}{(y^2 + z'^2)^{3/2}}\,dz' = K\,\lambda\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(y^2 + z'^2)^{3/2}}\,dz'\right]\hat{\jmath} - K\,\lambda\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z'}{(y^2 + z'^2)^{3/2}}\,dz'\right]\hat{k}$$

La segunda integral, como era de esperar, es nula porque el integrando es una función impar y el recinto de integración es simétrico.
La primera integral es no nula y da como resultado:

$\vec{E}(y) = 2\,K\,\lambda\dfrac{1}{y}\,\hat{\jmath}$ $\qquad$ Por lo tanto, $\quad \vec{E}(\vec{r}) = 2K\lambda\dfrac{1}{r}\hat{r}$ $\qquad$ donde r es la coordenada radial de cilíndricas.

Cabe destacar que la dependencia del campo como $1/r$ es debido a la presencia de carga en el infinito, debido a que el hilo es infinito, lo mismo que su carga total.

Potencial electrostático

El campo electrostático tiene propiedades matemáticas muy interesantes: por ejemplo, si calculamos el rotor del campo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left[K \sum_{i=1}^{N} \frac{q'_i(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} \right] = 0$$

Como consecuencia, todo campo de rotor nulo tiene la propiedad que puede derivarse a partir del gradiente de un campo escalar.

$$\therefore \ \exists \ V(\vec{r}) \ / \ \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$ (el signo (–) es arbitrario y su razón se verá más adelante)

La forma funcional del potencial electrostático se deriva por construcción, resultando:

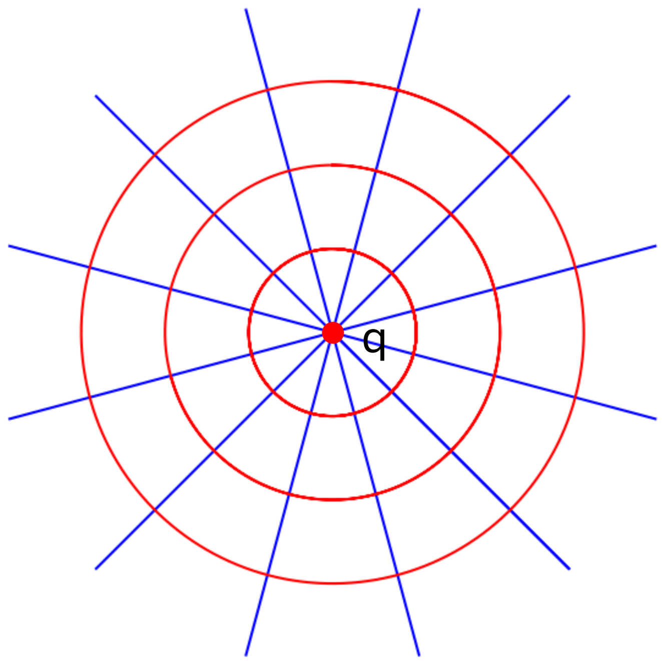
$$V(\vec{r}) = K\sum_{i=1}^{N}\frac{q'_i}{|\vec{r}-\vec{r}'_i|}$$

Se ve que si tomamos gradiente a esta expresión y le cambiamos el signo, obtenemos la expresión para el campo electrostrático.

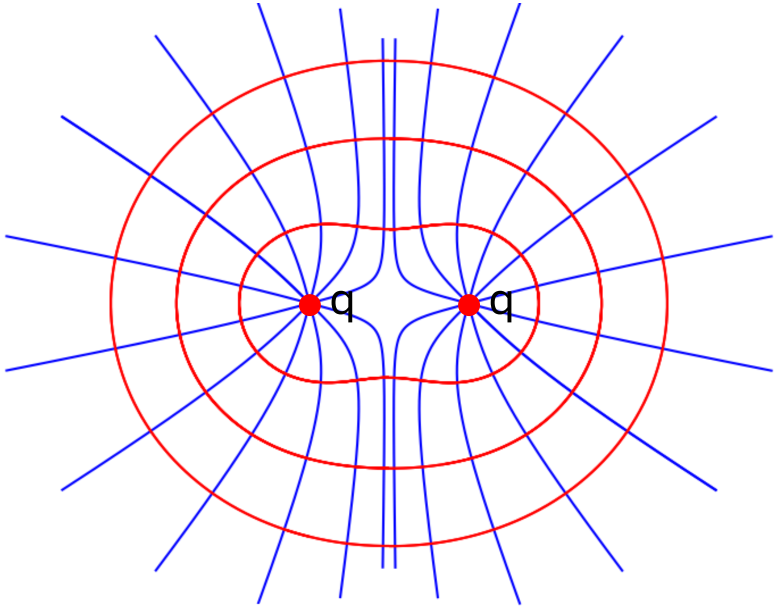
El potencial, al ser escalar, es más simple para calcular que el campo. Por otra parte, para visualizar La forma del campo electrostático, se utilizan líneas de campo y superficies equipotenciales.

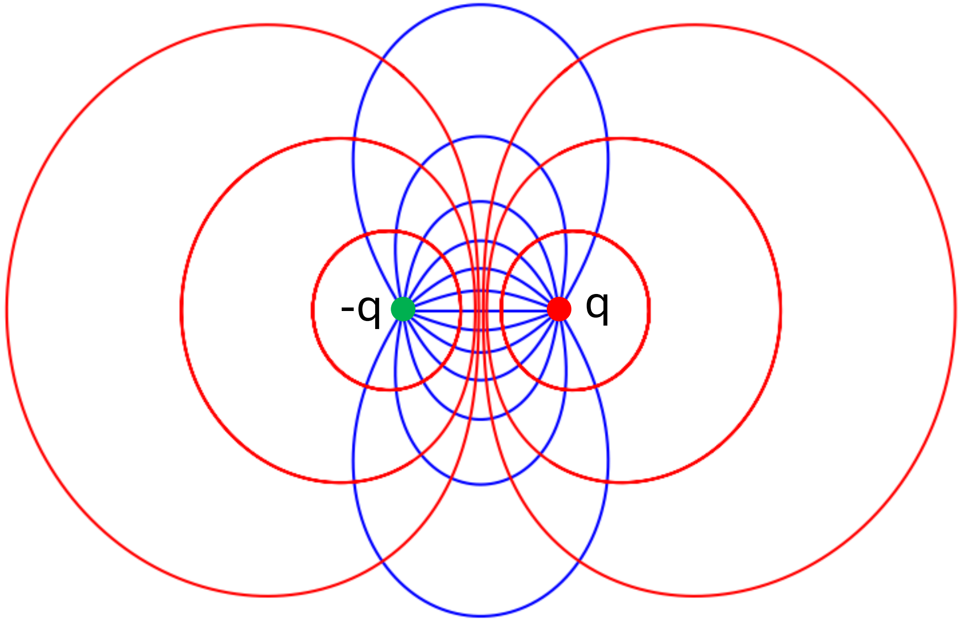
Las líneas de campo son curvas donde el campo es tangente a ellas en cada punto de las mismas. Las superficies equipotenciales son superficies donde el potencial es constante. De ese modo, el campo eléctrico siempre será perpendicular a las superficies.

Por ejemplo, para una carga puntual, las líneas de campo son rectas que surgen de la carga, mientras que las superficies equipotenciales son esferas concéntricas alrededor de la carga puntual. En cada punto de las esferas, el campo es perpendicular a ellas y siempre apunta hacia la zona de menor potencial; esto es debido al signo menos en la definición de *V*.



Si tenemos dos cargas puntuales del mismo signo, éstas se repelen y entonces las líneas se curvan para alejarse una de la otra. Las superficies equipotenciales encierran a las cargas, se deforman suavemente cerca de ellas, pero van asemejando a las esferas concéntricas del ejemplo anterior a medida que se alejan de las mismas.





En cambio, si tenemos dos cargas de signo opuesto, las líneas de campo van de una carga a la otra, porque estas cargas se atrane entre sí, mientras que las superficies equipotenciales rodean las cargas y la recta perpendicular al segmento que une las cargas es una equipotencial que se Cierra en el infinito.

Como vemos las líneas de campo nunca se cierran entre sí, y esto es una consecuencia de la irrotacionalidad del campo electrostático. Cuando veamos cargas en movimiento, esta característica dejará de ser cierta.

Energía de configuración

Queremos calcular la energía necesaria para armar una distribución de cargas dada. Esta energía se traducirá en energía potencial electrostática. Entonces, supongamos que tenenos N cargas $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ en el infinito y debemos llevarlas hasta las posiciones $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N\}$.

Para traer la primera carga a su posición establecida no hay que realizar ningún trabajo porque no hay nada. Pero una vez que q_1 está ubicada en $\vec{r}_1$, ésta genera campo y entonces habrá que hacer un trabajo contra este campo para traer a q_2. La fuerza que siente q_2 en presencia de q_1 es:

$$\vec{F}_2(\vec{r}) = \vec{F}_{21}(\vec{r}) = q_2 \vec{E}_1(\vec{r})$$

Por lo tanto, el trabajo que tendremos que hacer <u>*contra el campo*</u> para traer a q_2 será:

$$W_2^{oper} = \int_\infty^{\vec{r}_2} -\vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_\infty^{\vec{r}_2} q_2 \left[-\vec{E}_1(\vec{r})\right] \cdot d\vec{r} = q_2 \int_\infty^{\vec{r}_2} \vec{\nabla} V_1 \cdot d\vec{r} = q_2 \int_\infty^{\vec{r}_2} dV_1 = q_2\, V_1(\vec{r}_2)$$

El trabajo para armar la configuración la realiza la fuerza igual y contraria a la del campo y, asumiendo $V(\infty) = 0$, la integral da como resultado el potencial en la posición final ya que, por definición, $dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}$

Para la carga 3, $\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = q_3(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$. Siguiendo el mismo razonamiento, como la integral se distribuye, tenemos:

$$W_3^{oper} = \int_{\infty}^{\vec{r}_2} -\vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = q_3[V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3)]$$

En consecuencia, el trabajo total será la suma de todos los trabajos para llevar a cada una de las cargas:

$$W^{oper} = \sum_{i=2}^{N} q_i \sum_{j=1}^{i-1} V_j(\vec{r}_i) = \sum_{i,j\ i>j} q_i V_j(\vec{r}_i)$$

Esta sumatoria es sobre todos los pares cuya primer componente es mayor que la segunda.

No obstante, $$q_i V_j(\vec{r}_i) = K\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = q_j V_i(\vec{r}_j)$$

entonces, la doble sumatoria anterior se puede escribir como una sumatoria sobre todos los pares y dividir por 2.

$$W^{oper} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i V_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j\neq i} V_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

porque la segunda sumatoria es el potencial generado por la distribución en $\vec{r}_i$.

Entonces, este trabajo se transforma en la energía de configuración o **Energía Potencial Electrostática**

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

Esta sumatoria pasará a ser una integral, para el caso de distribuciones continuas

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{Vol} \rho(\vec{r}\,') \, V(\vec{r}\,') \, dr'^3$$

o las diferentes formas de densidad de carga.