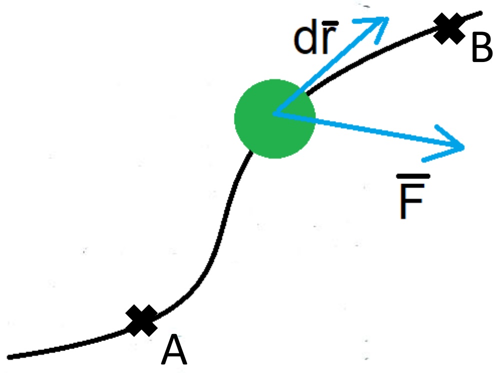
Trabajo y Energía



Trabajo de una fuerza: W

Definimos el trabajo de una fuerza como $dW_{\vec{F}} \equiv \vec{F}\cdot d\vec{r}$

mientras que el trabajo entre dos puntos de la trayectoria será la integral de la expresión anterior $W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B dW_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$

El trabajo de la fuerza neta que siente una partícula será

$$dW_{\vec{F}_N} = \vec{F}_N\cdot d\vec{r} = m\vec{a}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\,d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}\cdot d\vec{v}.$$

Ahora, es fácil ver que

$$d(v^2) = d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d(\vec{v})\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d(\vec{v}) = 2\vec{v}\cdot d(\vec{v}_i).$$

Entonces, $\vec{F}_N\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\,d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right)$

Por lo tanto, $W_{\vec{F}_N}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_N\cdot d\vec{r} = \int_{A_i}^{B_i} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2(B_i) - \frac{1}{2}mv^2(A)$

Trabajo y Energía

Definimos entonces la energía cinética de una partícula

$$E_C \equiv \frac{1}{2} m\, v^2$$

Por lo tanto, definimos variación (o diferencia) de energía cinética como

$$\Delta E_C^{A\to B} \equiv E_C(B) - E_C(A)$$

donde $E_C(P)$ (*P* = *A*, *B*, …) representa la energía cinética de una partícula en el punto *P* con una velocidad $\vec{v}(P)$.

En consecuencia, la variación de la energía cinética de una partícula es el trabajo de la fuerza neta sobre la misma.

$$\boxed{\Delta E_C^{A\to B} = W_{\vec{F}_N}^{A\to B}}$$

Y como el trabajo es una función aditiva, si $\vec{F}_N = \sum_j \vec{F}_j$, entonces $W_{\vec{F}_N}^{A\to B} = \sum_j W_{\vec{F}_j}^{A\to B}$ lo que permite calcular trabajos parciales para obtener el trabajo total.

Fuerzas conservativas

La fuerza neta es la resultante de las interacciones presentes. Algunas de ellas tienen la propiedad que el trabajo que ejercen no depende del camino de integración, sino únicamente de los puntos iniciales y finales. Matemáticamente, Esta clase de campos vectoriales pueden escribirse como gradientes de un campo escalar. A este tipo de fuerzas se las llama ***fuerzas conservativas***.

$$\vec{F}_N = \vec{F}^{(NC)} + \sum_k \vec{F}_k^{(C)}$$

Las fuerzas $\vec{F}_k^{(C)}$ serán las fuerzas conservativas presentes, mientras que $\vec{F}^{(NC)}$ es la resultante de todas las demás fuerzas, llamadas por comparación *no conservativas*.
El trabajo de las fuerzas conservativas no depende del camino elegido para llegar desde el punto inicial al final. En efecto, si hay dos caminos para ir desde A hasta B, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, será que:

$$\underset{\mathcal{C}_1}{\int_A^B} \vec{F}_k^{(C)} \cdot d\vec{r} = \underset{\mathcal{C}_2}{\int_A^B} \vec{F}_k^{(C)} \cdot d\vec{r}$$

Otro modo de decir esto es que la circulación a lo largo de un camino cerrado $\mathcal{C}$ es nula:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}_k^{(C)} \cdot d\vec{r} = 0$$

Para cada $\vec{F}_k^{(C)}$ existirá una función $V_k(\vec{r})$, llamada *potencial asociado a la fuerza* $\vec{F}_k^{(C)}$, de modo que $\vec{F}_k^{(C)} = -\vec{\nabla} V_k(\vec{r})$ (el signo negativo es por tradición y su justificación se verá más adelante).

Fuerzas conservativas: Energía Mecánica

De la expresión anterior: $dV_k = \vec{\nabla} V_k \cdot d\vec{r}$, por lo tanto, el trabajo de la fuerza neta será

$$\int_A^B \vec{F}_N \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}^{(NC)} \cdot d\vec{r} + \sum_k \int_A^B \vec{F}_k^{(C)} \cdot d\vec{r} = W_{\vec{F}(NC)}^{A\to B} + \sum_k \int_A^B \left(-\vec{\nabla} V_k(\vec{r})\right) \cdot d\vec{r} = W_{\vec{F}(NC)}^{A\to B} - \sum_k \underbrace{\int_A^B dV_k}_{V_k(B) - V_k(A)}$$

Como consecuencia, tenemos que, por un lado $\quad W_{\vec{F}_N}^{A\to B} = \Delta E_C^{A\to B} = E_C(B) - E_C(A)$

y por el otro, $\quad W_{\vec{F}_N}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_N \cdot d\vec{r} = W_{\vec{F}(NC)}^{A\to B} - \sum_k V_k(B) - V_k(A)$

Entonces,

$$E_C(B) - E_C(A) + \sum_k V_k(B) - V_k(A) = \left[E_C(B) + \sum_k V_k(B)\right] - \left[E_C(A) + \sum_k V_k(A)\right] = W_{\vec{F}(NC)}^{A\to B}$$

Definimos la energía mecánica E_{Mec} como: $\quad E_{Mec}(\vec{r}, \vec{v}) \equiv E_C(\vec{r}, \vec{v}) + \sum_k V_k\,(\vec{r})$

$$\therefore \boxed{\Delta E_{Mec}^{A\to B} = E_{Mec}(B) - E_{Mec}(A) = W_{\vec{F}(NC)}^{A\to B}}$$

La variación de la energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas.

Ejemplo de fuerza conservativa: fuerza gravitatoria

Por lo anterior, el potencial de la fuerza conservativa, también nos facilita el cálculo del trabajo de dicha fuerza.
En efecto, $W_{\vec{F}(C)}^{A\rightarrow B} = -\left[V_{\vec{F}(C)}(B) - V_{\vec{F}(C)}(A)\right]$. Por otra parte, si conocemos el trabajo de la fuerza, el cual sólo depende de los límites de la integral y si asignamos un valor arbitrario a un punto, al que llamaremos referencia, podremos calcular el potencial: $V_{\vec{F}(C)}(\vec{r}) = V_{\vec{F}(C)}\left(\vec{r}_{ref}\right) - W_{\vec{F}(C)}^{\vec{r}_{ref}\rightarrow\vec{r}} = -W_{\vec{F}(C)}^{\vec{r}_{ref}\rightarrow\vec{r}}$, ya que usualmente se asigna como nulo el valor del potencial en la referencia.

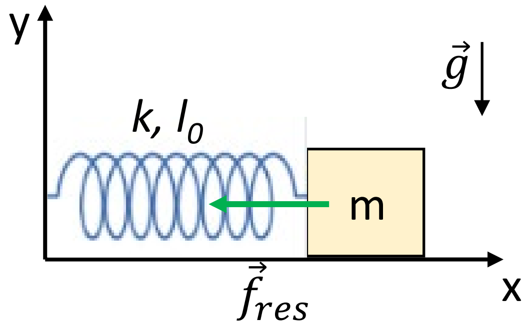
Si, por ejemplo, $\vec{F} = m\vec{g}$, entonces $W_{\vec{F}}^{A\rightarrow B} = \int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{r} = m\vec{g}\cdot\int_A^B d\vec{r} = m\vec{g}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$

La fuerza es conservativa porque el resultado de la integral de camino solo depende de los puntos iniciales y finales.

Si elegimos al punto *A* como un punto de referencia y le asignamos arbitrariamente el valor nulo al potencial en ese lugar, tendremos que

$$V_g(\vec{r}) = E_{Pg}(\vec{r}) = -m\vec{g}\cdot\left(\vec{r} - \vec{r}_{ref}\right)$$

Ejemplo: una masa puntual unida a un resorte ideal con el otro extremo fijo



$$\vec{f}_{res} = -k(x - l_0)\hat{\imath}$$

Entonces, $$W_{\vec{f}_{res}} = \int_A^B \vec{f}_{res} \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} -k(x - l_0)dx = -\frac{1}{2}k(x_B - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(x_A - l_0)^2$$

Si tomamos como referencia la posición en la cual el resorte está en su longitud natural, esto es, $x_A = l_0$, el potencial de la fuerza elástica será:

$$V_{res}(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

En este problema, la variable x representa la longitud actual del resorte. Por lo tanto, podemos generalizar a un resorte en cualquier posición especial, y escribir:

$$V_{res}(x) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

siendo l la longitud del resorte al momento del cálculo, escrito en las variables que describan el problema.