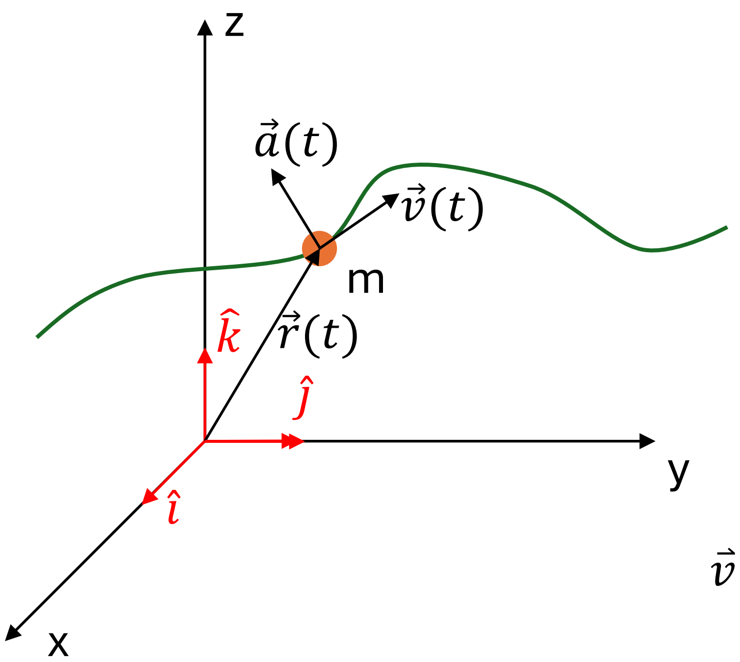
Repaso de Física de partículas



Coordenadas cartesianas

Posición: $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$

donde $x(t) = \vec{r}(t)\cdot\hat{\imath}$ $\quad y(t) = \vec{r}(t)\cdot\hat{\jmath}$ $\quad z(t) = \vec{r}(t)\cdot\hat{k}$

Velocidad: derivada de la posición

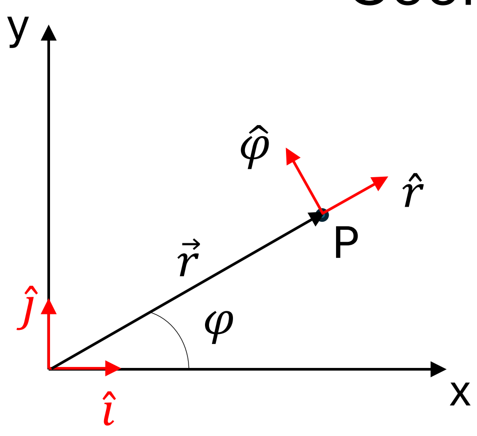
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} + v_z(t)\,\hat{k}$$ siendo $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ etc.

El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria

Aceleración: derivada de la velocidad $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = a_x(t)\,\hat{\imath} + a_y(t)\,\hat{\jmath} + a_z(t)\,\hat{k}$

siendo $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ etc.

Coordenadas polares en el plano



Punto P del plano: $\vec{r} = r\,\hat{r}$ donde $r = |\vec{r}|$

de polares a cartesianas:
$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{aligned}$$

de cartesianas a polares:
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Los versores polares $\hat{r}$ y $\hat{\varphi}$, a diferencia de los cartesianos, siguen al punto y, por ende, sus derivadas temporales no son nulas.

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\hat{\varphi} \qquad\qquad \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\,\hat{r}$$

Coordenadas polares en el plano

En consecuencia, los vectores velocidad y aceleración son los siguentes:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} \qquad \vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\hat{\varphi}$$

Si el movimiento es circular y el origen del sistema de referencia es el centro de la circunferencia de radio R, estos vectores se simplifican del siguiente modo:

Si $r = R\ (\text{cte.}) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$ $\quad\therefore\quad$ $\vec{v} = R\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi}$ y $\vec{a} = -R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\hat{r} + R\frac{d^2\varphi}{dt^2}\hat{\varphi}$

siendo $a_r = R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ la aceleración centrípeta, y $a_\varphi = R\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ la aceleración azimuthal o tangencial

Velocidad angular

La velocidad angular es un vector que indica el ángulo desplazado de una partícula respecto de un origen, por unidad de tiempo. Cuando el punto origen y el vector desplazamiento $d\vec{r}$ forman un plano, el vector velocidad angular está contenido en la dirección perpendicular a dicho plano y su sentido indica el sentido de rotación de la partícula respecto del origen de coordenadas.

En coordenadas polares el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ se expresa como:

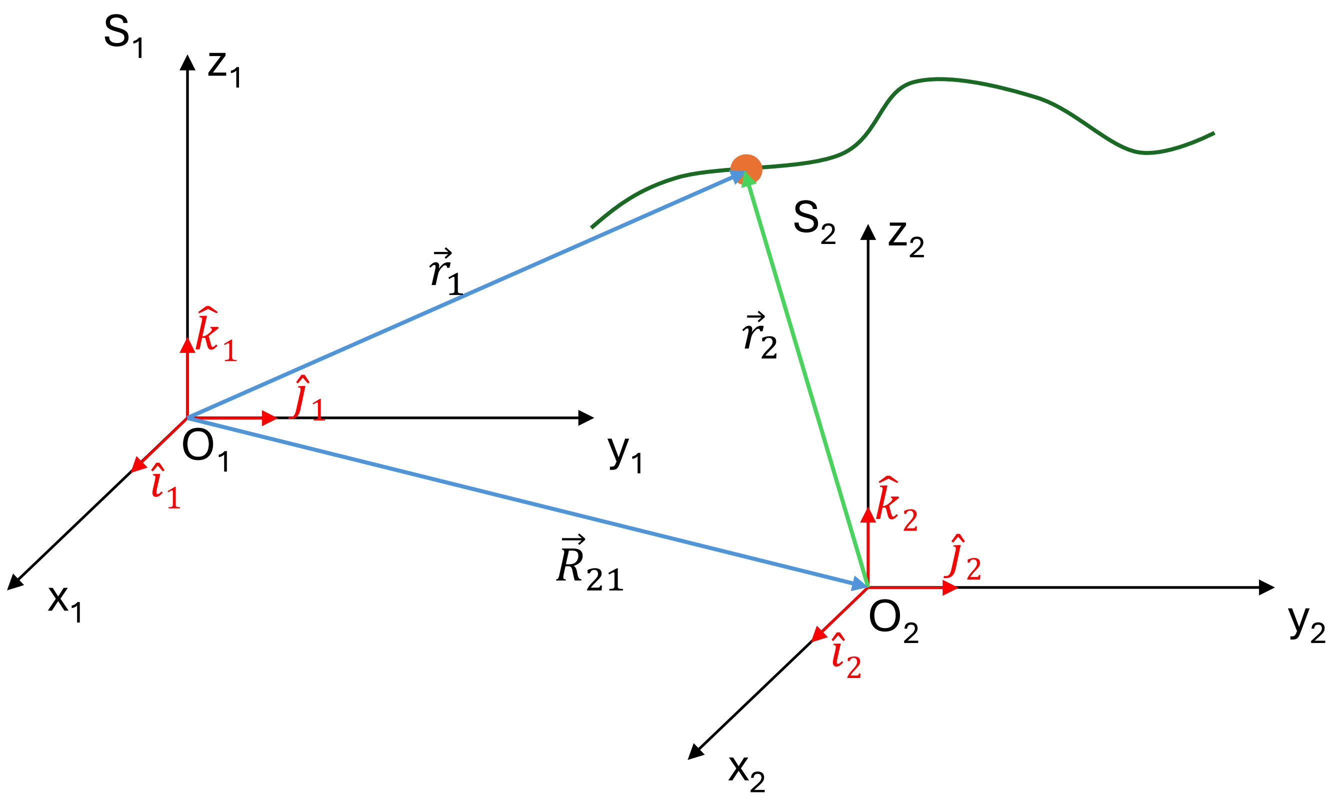
$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\,\hat{k}$$

Para movimientos planos, podemos expresar la velocidad angular en términos de los vectores posición y velocidad, según

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$

Esta última expresión muestra que la velocidad angular es siempre perpendicular al plano formado por los vectores posición y velocidad. Este plano es el plano de rotación de la partícula.

Relación entre dos sistemas de referencia en traslación: movimientos relativos



Cuando el movimiento de una partícula es descripto por dos Sistemas de Referencia diferentes, es importante poder relacionar los resultados de un Sistema en el otro.

Tenemos dos SR, S_1 y S_2, con orígenes en los puntos O_1 y O_2, respectivamente.
Los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ describen la posición de la partícula según S_1 y S_2, mientras que el vector $\vec{R}_{21}$ describe la posición del origen O_2 respecto del sistema S_1.

Es fácil ver que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{R}_{21}$.
Si el origen O_2 se mueve respecto de S_1, este movimiento también afecta la relación entre las velocidades y las aceleraciones, vistas desde ambos sistemas. Entonces,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{V}_{21} \qquad \text{y} \qquad \vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{A}_{21}$$

Siendo $\vec{V}_{21}$ y $\vec{A}_{21}$ la velocidad y la aceleración del punto O_2 respecto del Sistema S_1.

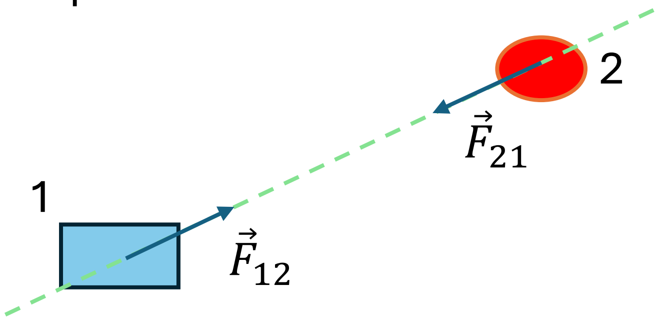
Dinámica de la partícula: leyes de Newton

Las leyes de Newton vinculan las interacciones externas con la respuesta cinemática

1era ley: *"Una partícula libre de fuerzas se mueve con velocidad constante"*

2da ley: $\vec{F}_N = m\,\vec{a}$ donde $\vec{F}_N$ es la fuerza neta, la resultante de todas las fuerzas presentes y m es la masa de la partícula

3ra ley: Las fuerzas aparecen en la naturaleza de a pares, cada una de ellas aplicada sobre cada cuerpo interactuante.



$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

Distintos tipos de Fuerzas

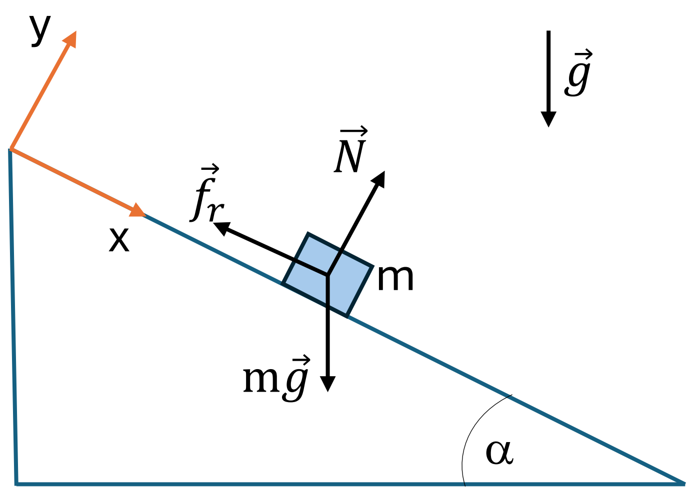
Las fuerzas pueden dividirse en dos grandes grupos: fuerzas a distancia o de campo y fuerzas de contacto.

Las fuerzas de campo son generalmente función de la posición: fuerza gravitatoria, eléctrica, etc.

Las fuerzas de contacto son usualmente fuerzas de vínculo, desconocidas a priori y tienen por objeto garantizar el cumplimiento cinemático de los contornos existentes. Ejemplo, la normal de una superficie o la tensión de una cuerda. También hay fuerzas de contacto que no son de vínculo, como por ejemplo, la fuerza de rozamiento.

Ejemplo, un plano inclinado con rozamiento:

Las fuerzas presentes son la interacción de la partícula con la Tierra (fuerza peso: $m\vec{g}$), y con la superficie de contacto, la normal $\vec{N}$ y la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$.



Caso 1: la partícula está en reposo respecto del plano.

En este caso la fuerza de rozamiento es desconocida a priori y es la necesaria para que la partícula no se desplace longitudinalmente. Asimismo, la normal es la fuerza necesaria para que la masa no penetre la superficie.

$$\boxed{\vec{N} + \vec{f}_r + m\vec{g} = m\vec{a}} \quad \text{(Ec.1)}$$

$\vec{a} = a_x\hat{\imath} = a\,\hat{\imath}$ ya que la partícula sólo puede moverse a lo largo del plano.

$\vec{g} = g\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\imath} - g\cos\alpha\,\hat{\jmath}$ donde g es el valor absoluto de la aceleración de la gravedad: 9.8 m/s^2

$\vec{N} = N\hat{\jmath}$ La fuerza normal es siempre perpendicular a la superficie que la genera y de sentido saliente.

$\vec{f}_r = f_r\,\hat{\imath}$ Como la fuerza de rozamiento es desconocida, la escribimos del modo más general posible, aunque sepamos que la componente f_r será negativa.

Con todo esto, la ec. 1 se escribe, para cada componente:

$\hat{\imath}$: $\quad f_r + mg \,\text{sen}\, \alpha = ma$
$\hat{\jmath}$: $\quad N - mg \cos \alpha = 0$

Si la partícula está en reposo respecto de la superficie, *a* = 0

$\rightarrow f_r = -mg \,\text{sen}\, \alpha$ y $N = mg \cos \alpha$ esto es,

$$\begin{aligned} \vec{f}_r &= -mg \,\text{sen}\, \alpha \,\hat{\imath} \\ \vec{N} &= mg \cos \alpha \,\hat{\jmath} \end{aligned} \quad \text{(ec. 2)}$$

El valor del modulo de la fuerza de rozamiento estática está acotado: $|\vec{f}_r| \leq \mu_e |\vec{N}|$, donde μ_e es el coeficiente de rozamiento estático. Mientras se cumpla esta desigualdad, el valor de la fuerza de rozamiento será el indicado en la ec. 2.

<u>Caso 2</u>: la partícula tiene una velocidad inicial v_0 hacia arriba.

Como empieza con movimiento relative a la superficie, la acelaración no será nula y el rozamiento será dinámico. En este caso, $|\vec{f}_r| = \mu_d \,|\vec{N}|$, donde μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico, en el sentido contrario a la velocidad de la partícula.

Entonces, en este caso, $\vec{v}(t=0) = -v_0\hat{\imath}$ y $\vec{f}_r = +\mu_d|\vec{N}|\hat{\imath} = \mu_d mg\cos\alpha\,\hat{\imath}$ ya que la fuerza de rozamiento se opone a la velocidad en el tramo inicial. Por lo tanto,

$$\hat{\imath}: \quad \mu_d mg\cos\alpha + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = ma$$
$$\hat{\jmath}: \quad N - mg\cos\alpha = 0$$

$\Longrightarrow$ La normal es igual que en el caso anterior y

$\vec{a} = mg\,(\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_d\cos\alpha)\hat{\imath}$ *mayor que en el caso 1*

Integrando $\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t')dt' = [-v_o + mg\,(\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_d\cos\alpha)\,t]\,\hat{\imath}$

$\vec{r}(t) = \vec{r}\,(0) + \int_0^t \vec{v}(t')dt' = \left[x_0 - v_0 t + \frac{1}{2}mg\,(\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_d\cos\alpha)t^2\right]\hat{\imath}$ donde x_0 es la posición inicial

Estas últimas expresiones son válidas mientras la velocidad sea hacia arriba. Si en algún momento,
La partícula baja, la velocidad invierte su sentido y por ende también lo hace la fuerza de rozamiento.

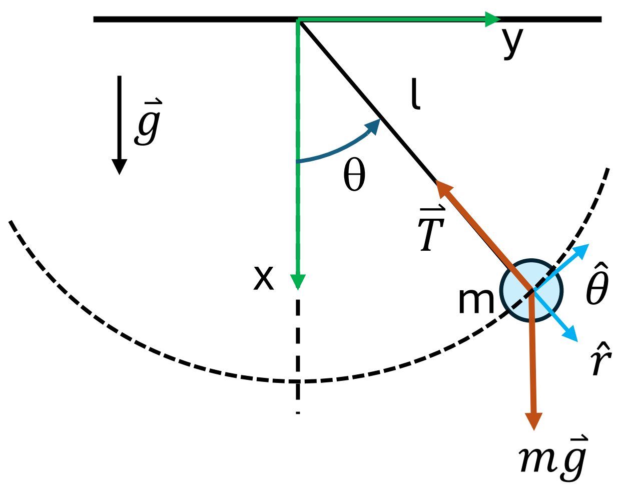
Mientras $v_x > 0, \vec{f}_r = -\mu_d mg\cos\alpha\,\hat{\imath}$ Por lo tanto, $\vec{a} = mg\,(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_d\cos\alpha)\hat{\imath}$ *menor que en el caso 1*

y
$$\vec{v}(t) = mg\,(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_d\cos\alpha)\,(t - t_1)\,\hat{\imath}$$
$$\vec{r}(t) = \left[x_1 + \frac{1}{2}mg\,(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_d\cos\alpha)(t - t_1)^2\right]\hat{\imath}$$

donde t_1 es el tiempo en donde alcanza la altura máxima y x_1 es la coordenada de esa posición.

Péndulo simple

El péndulo simple consiste en una partícula puntual de masa **m** sujeta de un hilo ideal de longitud **l**, hilo de masa despreciable e inextensible, cuyo otro extremo se encuentra fijo a un punto.



La trayectoria del péndulo es circular, por eso usamos coordenadas polares para su descripción.

$$|r| = l \quad \forall\, t$$

$$\vec{r} = l\,\hat{r}$$

$$\vec{v} = l\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta} \qquad\qquad \vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = -l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r} + l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\theta}$$

Péndulo simple

Las fuerzas presentes las escribimos en el sistema de referencia elegido.

$\vec{T} = -T\,\hat{r}$ La tension de la cuerda es siempre hacia el extremo fijo.

$m\vec{g} = mg\cos(\theta)\,\hat{r} \; - mg\ \mathrm{sen}(\theta)\ \hat{\theta}$

Escribimos la segunda ley de Newton para este caso: $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$

Escribimos la ecuación anterior en cada componente:

$\hat{r}$: $$-T + mg\cos(\theta) = -ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad (1)$$

$\hat{\theta}$: $$mg\ sen(\theta) = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2)$$

Péndulo simple

La ecuación (1) permite hallar la tension una vez conocida la función $\theta(t)$.

La ecuación (2) es la ecuación que permite encontrar la posición angular en función del tiempo.

$$\cancel{m}g\ sen(\theta) = \cancel{m}l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\ \mathrm{sen}(\theta) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal, que no tiene solución analítica, excepto para pequeñas oscilaciones.

Pequeñas oscilaciones: $\theta \ll 1 \ \rightarrow \ \mathrm{sen}(\theta) \approx \theta$

La ecuación diferencial se vuelve armónica: $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\ \theta \approx 0$$