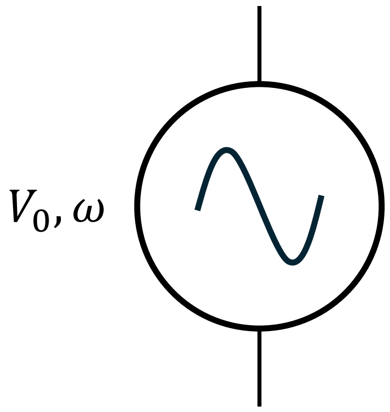
Corriente alterna

Analicemos qué sucede cuando los circuitos que armamos y estudiamos son alimentados por una fuente de tensión sinusoidal.

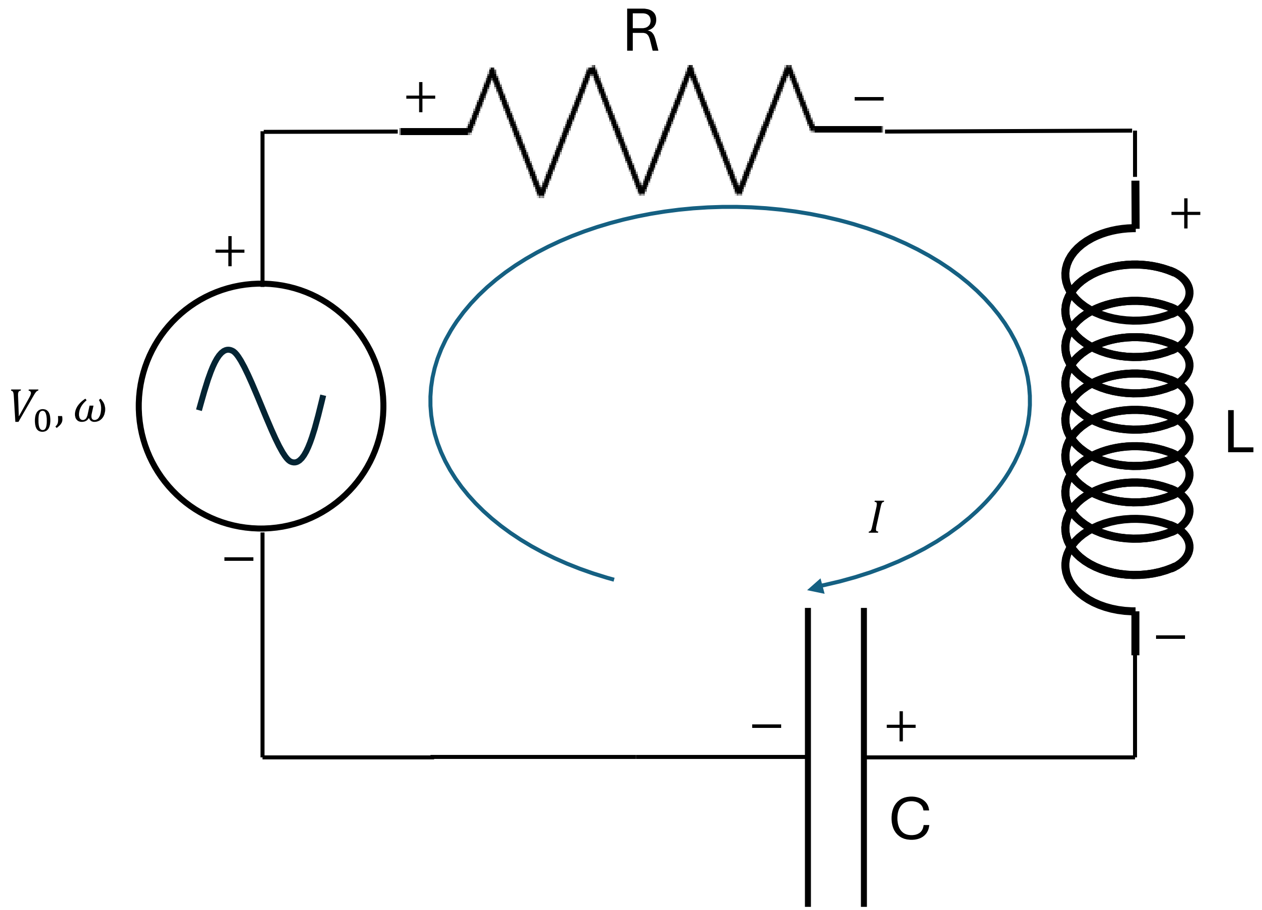
Esquemáticamente, representamos una fuente de tensión sinusoidal o una *fuente de alterna* como



La diferencia de potencial entre sus bornes será: $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t)$

donde V_0 es la tensión de pico y ω la frecuencia angular de la fuente. Muchas veces se da como dato la frecuencia lineal o simplemente frecuencia f, donde $\omega = 2\pi f$. Las unidades son $[\omega] = s^{-1}$ y $[f] = Hz$.

Entonces, si alimentamos con esta fuente un circuito $R - L - C$ serie, tendremos:



Para resolver este circuito, colocamos una corriente por cada rama (en este ejemplo sólo hay una rama, por ende, una sola corriente) y escribimos la polaridad de los elementos siguiendo la convención que usábamos en CC: si la corriente atraviesa un elemento en algún sentido, entonces el potencial caerá en el mismo sentido. Esto ahora es simbólico, porque al ser oscilante la tensión, también lo será la carga y la corriente, pero en un dado instante, ésa será la configuración usada.

La ecuación de la malla será:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Como vemos, la ecuación diferencial es lineal, de segundo orden, no homogénea como la que vimos en el tema anterior. La única diferencia es la fuente de alimentación. Entonces la solución será de la forma:

$$Q(t) = Q_P(t) + Q_H(t) \qquad\qquad I(t) = I_P(t) + I_H(t)$$

donde la parte homogénea es idéntica a la del circuito anterior, porque la ecuación homogénea es la misma. Solo cambia la solución particular. Además, salvo el caso (poco común) de resistencia nula, sabemos que la solución homogénea tiene a 0 después de suficiente tiempo. Así que, en estos casos, la única solución que prevalecerá será la solución particular. Por eso, salvo que sea muy importante conocer la evolución del transitorio, nos quedaremos con la solución particular *alterna*, que será la solución estacionaria.

¿Cómo hallar la solución particular cuando la fuente es oscilante? La experiencia indica que, si el término inhomogéneo es sinusoidal, la solución particular tendrá la misma forma funcional. Para estos casos se propone una función de la forma:

$$Q_P(t) = A\ \sin(\omega t + \varphi)$$

donde A y φ son constantes a determinar para que cumpla con la ecuación diferencial.

Este método lleva al resultado correcto, pero es largo y tedioso. Para un circuito un poco más complicado que un $R-L-C$ la complicación puede ser realmente importante. Entonces, en esos casos se usa lo que llamamos el ***formalismo complejo***, que pasamos a explicar.

Tomemos la ecuación original, llamando Q_p a la solución buscada:

$$L\frac{d^2Q_P}{dt^2}+R\frac{dQ_P}{dt}+\frac{1}{C}Q_P=V_0\,\mathrm{sen}(\omega t) \qquad (1)$$

Armemos una nueva ecuación, cambiando el término no homogéneo por la función trigonométrica complementaria. Llamemos Q_S a la solución de esta nueva ecuación (que claramente será diferente de la anterior).

$$L\frac{d^2Q_S}{dt^2}+R\frac{dQ_S}{dt}+\frac{1}{C}Q_S=V_0\cos(\omega t) \qquad (2)$$

Ahora hagamos $(2)+i\ (1)$, donde i es la unidad imaginaria.

$$L\left(\frac{d^2Q_S}{dt^2}+i\frac{d^2Q_P}{dt^2}\right)+R\left(\frac{dQ_S}{dt}+i\frac{dQ_P}{dt}\right)+\frac{1}{C}(Q_P+iQ_S)=V_0\cos(\omega t)+i\,V_0\,\mathrm{sen}(\omega t)=V_0e^{i\omega t}$$

Llamo $Q^* \equiv Q_S + i\ Q_P$. Como la operación de derivar es conmutativa con la suma, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$L\frac{d^2Q^*}{dt^2} + R\frac{dQ^*}{dt} + \frac{1}{C}Q^* = V_0 e^{i\omega t}$$

Si podemos resolver la ecuación anterior, entonces la parte imaginaria de la función Q^* será la solución buscada.

Proponemos entonces $\quad Q^* = Q_0^* e^{i\omega t} \quad , \quad \frac{dQ^*}{dt} = i\omega Q_0^* e^{i\omega t} \quad , \quad \frac{d^2Q^*}{dt^2} = (i\omega)^2 Q_0^* e^{i\omega t} = -\omega^2 Q_0^* e^{i\omega t}$

Reemplazamos en la ecuación: $\quad -L\omega^2 Q_0^* e^{i\omega t} + i\omega R Q_0^* e^{i\omega t} + \frac{Q_0^* e^{i\omega t}}{C} = V_0 e^{i\omega t}$

La exponencial se cancela y nos queda: $\quad Q_0^* = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) + i\omega R} = |Q_0^*| e^{i\varphi_Q}$

donde $\quad |Q_0^*| = Q_0 = \frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + \omega^2 R^2}} \quad$ y $\quad \varphi_Q = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega R}{\frac{1}{C} - \omega^2 L}\right)$ ya que la fase de V_0 es cero

Entonces $\quad Q^*(t) == Q_0 e^{i(\omega t+\varphi_Q)}$

Al tomar parte imaginaria para obt$Q_0^* e^{i\omega t}$ener la solución buscada, tenemos que

$$Q_P(t) = \mathbb{Im}(Q^*(t)) = Q_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_Q)$$

que es la función que buscábamos.

Pero ahora, podemos ir más allá y seguir aplicando el formalismo complejo. Mientras la operación matemática que se realice sea conmutativa con tomar parte real o imaginaria, no estamos obligados a pasar a números reales y podemos seguir trabajando con los números complejos.

Calculemos la corriente compleja $\quad I^*(t) = \dfrac{dQ^*}{dt} = i\omega Q_0^* e^{i\omega t} = I_0^* e^{i\omega t}$

donde $\quad I_0^* = i\omega Q_0^* \quad$ ó $\quad Q_0^* = \dfrac{I_0^*}{i\omega}$

Ahora, reemplazamos esta última expresión en la ecuación diferencial para Q^*

$$-L\omega^2 \frac{I_0^*}{i\omega} + i\omega R \frac{I_0^*}{i\omega} + \frac{1}{C}\frac{I_0^*}{i\omega} = V_0$$

donde ya hemos simplificado la exponencial temporal

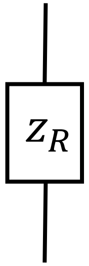
es decir $\quad I_0^*\left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right) = V_0 \quad$ o $\quad I_0^* = \frac{V_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$

donde

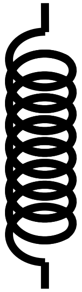
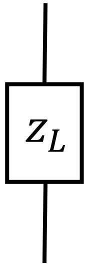
$$|I_0^*| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \varphi_I = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Esta última expresión nos permite pensar a cada elemento pasivo de los circuitos (resistores, capacitores e inductores) como impedancias, las cuales se comportan como resistencias en las leyes de Kirchoff al pasar al plano complejo.

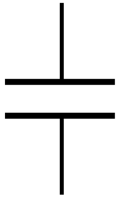
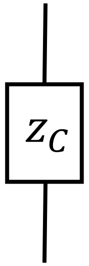
Esto es, cada vez que tengamos un elemento pasivo en un circuito de alterna haremos la siguiente sustitución:

- un resistor  R lo reemplazamos por una impedancia 

donde $z_R = R$

- un inductor  L lo reemplazamos por una impedancia 

donde $z_L = i\omega L$

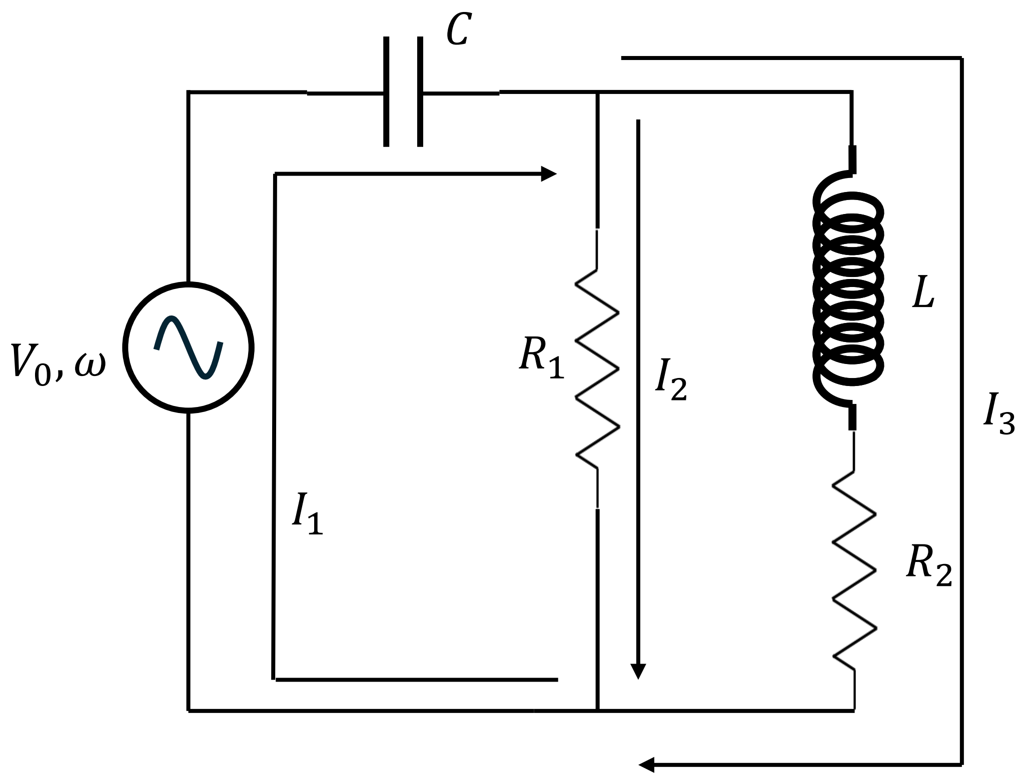
- un capacitor  C lo reemplazamos por una impedancia 

donde $z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$

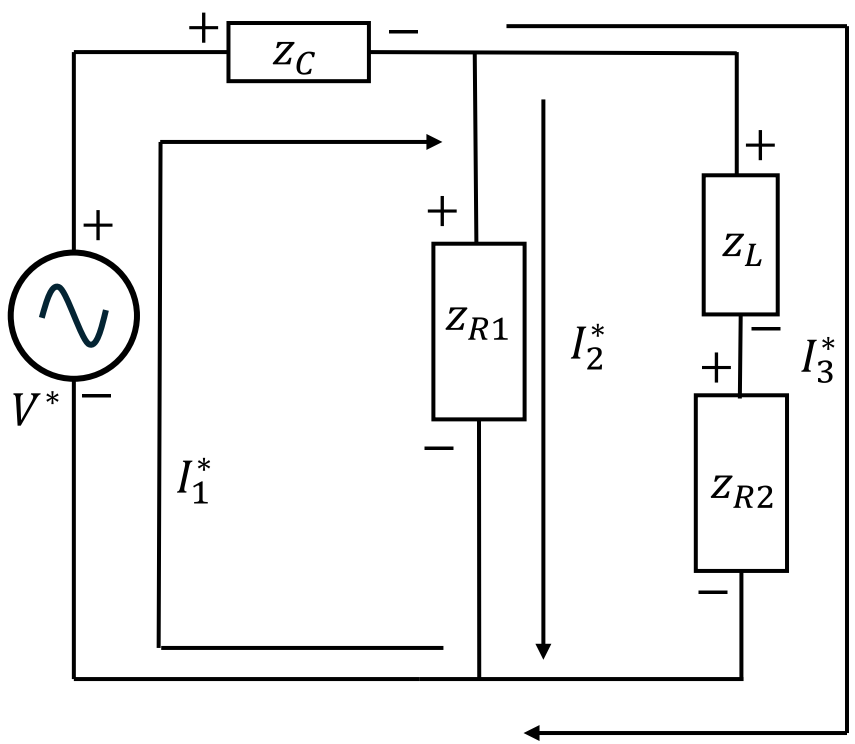
Y la corriente que circula por cada rama, se reemplaza por una corriente compleja de amplitud I_0^* y se resuelve como si fuera un circuito de CC, en el plano complejo. Para llegar a la corriente real, habrá que tomar parte imaginaria (o real, depende de la fase de la fuente) y así obtendremos la solución verdadera a nuestro problema.

Veamos un ejemplo:

Sea el siguiente circuito



Se transforma en



donde $V^* = V_0 e^{i\omega t}$ $\quad z_C = \dfrac{1}{i\omega C} = -\dfrac{i}{\omega C}$

con $\quad I_1^* = I_{10}^* e^{i\omega t} \quad I_2^* = I_{20}^* e^{i\omega t} \quad I_3^* = I_{30}^* e^{i\omega t} \quad z_{R1} = R_1 \quad z_{R2} = R_2 \quad z_L = i\omega L$

Las incógnitas son los números complejos I_{10}^*, I_{20}^* e I_{30}^*. Una vez hallados, las corrientes verdaderas serán $I_1(t) = |I_{10}^*| \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_{I1})$, $I_2(t) = |I_{20}^*| \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_{I2})$ e $I_3(t) = |I_{30}^*| \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_{I3})$, respectivamente.

¿Cómo podemos hallar I_{10}^*, I_{20}^* e I_{30}^*? Aplicando las leyes de Kirchoff.

Ley de nodos: $I_{10}^* = I_{20}^* + I_{30}^*$

Leyes de mallas:

$$V_0 - z_C I_{10}^* - z_{R1} I_{20}^* = 0$$

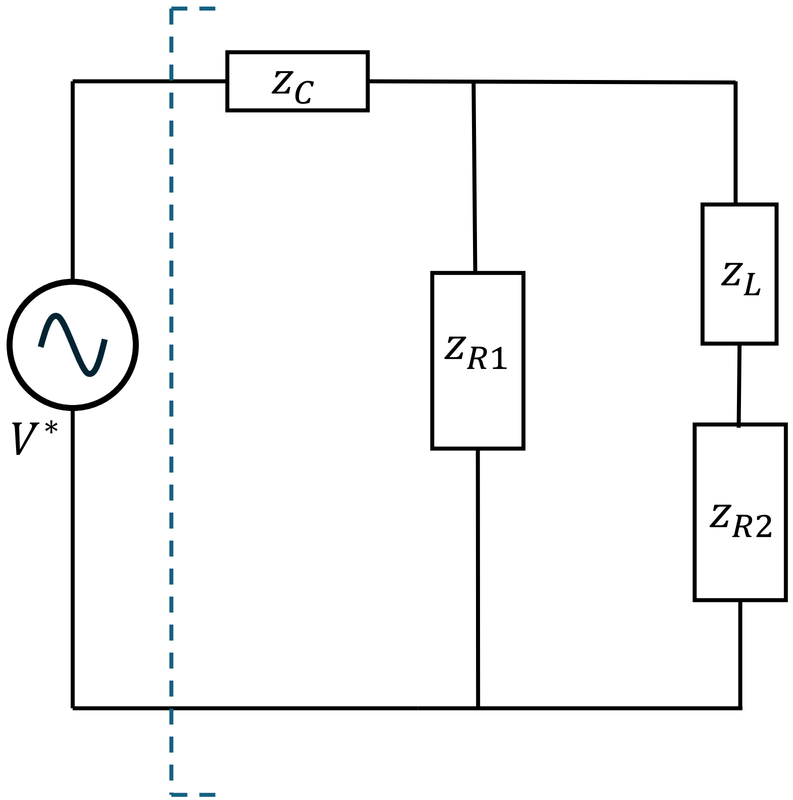
$$z_{R1} I_{20}^* - z_L I_{30}^* - z_{R2} I_{30}^* = 0$$

3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, donde ya hemos simplificado las exponenciales temporales. De modo que hemos pasado de ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas.

La solución para este sistema es:

$$\begin{aligned} I_{10}^* &= \frac{z_{R1} + z_{R2} + z_L}{(z_{R1} + z_C)(z_{R2} + z_L) + z_{R1} z_C} V_0 \\ I_{20}^* &= \frac{z_{R2} + z_L}{(z_{R1} + z_C)(z_{R2} + z_L) + z_{R1} z_C} V_0 \\ I_{30}^* &= \frac{z_{R1}}{(z_{R1} + z_C)(z_{R2} + z_L) + z_{R1} z_C} V_0 \end{aligned}$$

Si nos interesa encontrar la impedancia total que ve la fuente, este es, la impedancia equivalente del circuito, de todos los elementos pasivos, tendremos que hacer las combinaciones serie y paralelo entre las impedancias presentes, como si fueran resistencias.



En este caso, z_{eq} será la serie z_L, z_{R2} en paralelo con z_{R1} y este resultado en serie con z_C.

$$z_{eq} = \frac{z_{R1}(z_{R2} + z_L)}{z_{R1} + z_{R2} + z_L} + z_C$$

$$z_{eq} = \frac{(z_{R1} + z_C)(z_{R2} + z_L) + z_{R1} z_C}{z_{R1} + z_{R2} + z_L}$$

Entonces, la corriente que circula por la fuente será: $I_{10}^* = \dfrac{V_0}{z_{eq}}$, resultado que coincide con lo calculado anteriormente.

Si queremos escribir la impedancia equivalente de un modo explícito, entonces

$$z_{eq} = \frac{\left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right) + i\left[\omega R_1 L - \frac{(R_1 + R_2)}{\omega C}\right]}{(R_1 + R_2) + i\omega L} = \left|z_{eq}\right| e^{i\varphi_z}$$

donde $\quad \left|z_{eq}\right| = \sqrt{\dfrac{\left(R_1R_2 + \dfrac{L}{C}\right)^2 + \left[\omega R_1 L - \dfrac{(R_1+R_2)}{\omega C}\right]^2}{(R_1+R_2)^2 + (\omega L)^2}}$

y $\quad \varphi_z = \tan^{-1}\left\{\dfrac{\left[\omega R_1 L - \dfrac{(R_1+R_2)}{\omega C}\right]}{\left(R_1R_2 + \dfrac{L}{C}\right)}\right\} - \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega L}{R_1+R_2}\right)$

Por ejemplo, la corriente que pasa por la fuente será $\quad I_{10}^{*} = \dfrac{V_0}{\left|z_{eq}\right|} e^{-i\varphi_z} = I_{10} e^{i\varphi_{I1}}$ $\quad$ donde $\quad I_{10} = \dfrac{V_0}{\left|z_{eq}\right|}$

y $\quad \varphi_{I1} = -\varphi_z$. Entonces, $I_1(t) = I_{10}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_{I1})$.

Energía y Potencia

Si queremos conocer la potencia entregada por la fuente y la disipada por los resistores, o bien la energía almacenada en inductores y capacitores, deberemos primero encontrar las corrientes y diferencias de potencial reales y luego hacer los cálculos correspondientes, ya que estas operaciones son no lineales y, por ende, no se pueden hacer primero en complejos, ya que las operaciones no conmutan.

- *Potencia entregada por la fuente*

Si la tensión que entrega la fuente es $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ y la corriente que pasa por ella es $I(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ entonces la potencia instantánea que entrega la fuente será:

$$P_f(t) = V(t) * I(t) = V_0 I_0 \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Reescribamos esto último

$$P_f(t) = V_0 I_0 \operatorname{sen}(\omega t) \left[\operatorname{sen}(\omega t) \cos\varphi + \cos(\omega t) \operatorname{sen}\varphi\right] = V_0 I_0 \cos\varphi \operatorname{sen}^2(\omega t) + V_0 I_0 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t)$$

Pero $\operatorname{sen}^2(\omega t) = \dfrac{1-\cos(2\omega t)}{2}$ y $\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) = \dfrac{\sin(2\omega t)}{2}$, entonces

$$P_f(t) = \frac{V_0 I_0}{2}\cos\varphi - \frac{V_0 I_0}{2}\cos\varphi\cos(2\omega t) + \frac{V_0 I_0}{2}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(2\omega t) = \frac{V_0 I_0}{2}\cos\varphi - \frac{V_0 I_0}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$$

Esto significa que la potencia es una función sinusoidal que oscila alrededor de un valor constante no negativo:

Definamos el ***valor medio*** de una función periódica de frecuencia ν (período $\tau = 2\pi/\nu$) como:

$$\text{Si } f(t) = f(t+\tau)\ \forall t \ \rightarrow \ \langle f \rangle \equiv \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} f(t')\,dt'$$

(si la función es periódica, la expresión anterior no depende del t_0 elegido.)

El valor medio de cualquier función sinusoidal será nulo, pero si aplicamos esta definición a la potencia de la fuente, tendremos:

$$\langle P_f \rangle = \frac{V_0 I_0}{2}\cos\varphi$$

Definimos ***valor eficaz*** de una función sinusoidal como:

$$Si\ f(t) = f_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad f_{ef} \equiv \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

En efecto, $$\langle f^2 \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f^2(t')dt' = \frac{\omega}{2\pi} f_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t' + \varphi)\ dt' = \frac{f_0^2}{2}$$

entonces $$f_{ef} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

Usando esta definición tendremos que $$\boxed{\langle P_f \rangle = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi}$$

Entonces la potencia entregada por la fuente, también llamada ***potencia activa***, es el producto de los valores eficaces de la diferencia de potencial que entrega y la corriente que circula por ella, multiplicada por el coseno del ángulo de desfasaje entre ambas señales. Al término $\cos \varphi$ se lo llama **factor de potencia**.

Definimos: - <u>Potencia aparente</u> $S \equiv V_{ef} I_{ef}$

- <u>Potencia reactiva</u> $Q \equiv V_{ef} I_{ef}\ \text{sen}\, \varphi$

- *Potencia disipada por un resistor*

Si calculamos la potencia disipada en un resistor por la circula una corriente $I_R(t) = I_{R0}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_R)$ tendremos que:

$$P_R(t) = RI_R^2(t) = R\,I_{R0}^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_R)$$

Entonces, al calcular el valor medio

$$\langle P_R \rangle = \frac{R\,I_{R0}^2}{2} = R\,I_{ef}^2$$

Si la corriente que circula por el resistor es igual a la que atraviesa la fuente, entonces el valor medio de la potencia entregada por la fuente y el de la potencia disipada por el resistor coinciden.

- *Energía almacenada en un inductor*

Si la corriente que circula a través de un inductor de inductancia L es $I_L(t) = I_{L0}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_L)$

entonces la energía almacenada en el elemento será

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L\, I_L^2(t) = \frac{1}{2} L\, I_{L0}^2\, \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_L)$$

- *Energía almacenada en un capacitor*

Si la corriente que circula a través de un capacitor de capacidad C es $I_C(t) = I_{C0}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_C)$, para calcular la energía almacenada necesitamos conocer la evolución temporal de la carga. Para ello, volvemos al formalismo complejo.

Si la corriente compleja que circula por el capacitor es $I_C^* = I_{C0}^* e^{i\omega t} = |I_{C0}^*| e^{i\varphi_C} e^{i\omega t}$, entonces

$$Q_C^* = \frac{I_C^*}{i\omega}$$

(en el formalismo complejo derivar es multiplicar por $i\omega$, mientras que integrar es dividir por $i\omega$.)

$$\rightarrow \quad Q_{C0}^* = \frac{|I_{C0}^*|}{\omega} e^{i(\varphi_C - {\pi}/{2})}$$

$$\therefore \quad Q_C(t) = \frac{I_{C0}}{\omega}\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi_C - {\pi}/{2}\right) = -\frac{I_{C0}}{\omega}\cos(\omega t + \varphi_C)$$

Por lo tanto, la energía almacenada será $E_C(t) = \frac{1}{2C} Q_C^2(t) = \frac{1}{2} \frac{I_{C0}^2}{\omega^2 C} \cos^2(\omega t + \varphi_C)$

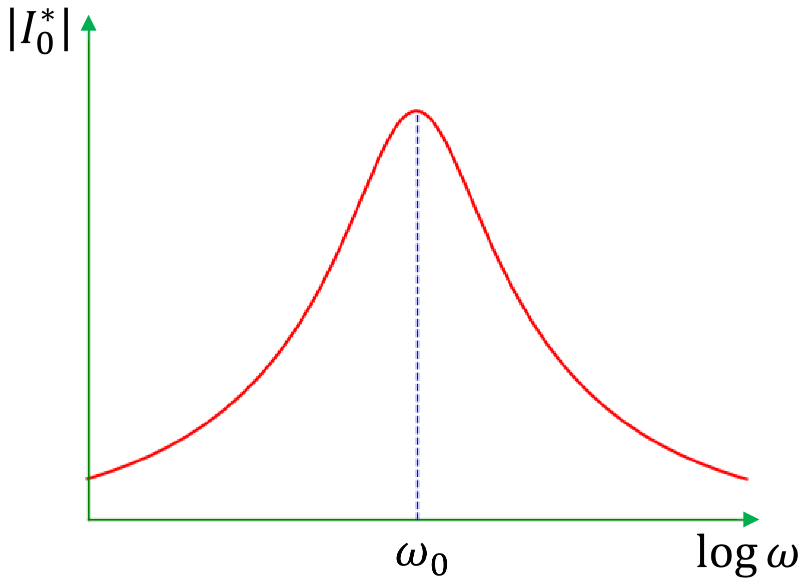
Si el inductor y el capacitor están en la misma rama, y por ende circula la misma corriente por ambos elementos, entonces la energía almacenada de un elemento será máxima cuando la del otro sea nula. En estos casos, los elementos alternan el almacenamiento de energía, pasando energía de uno a otro.

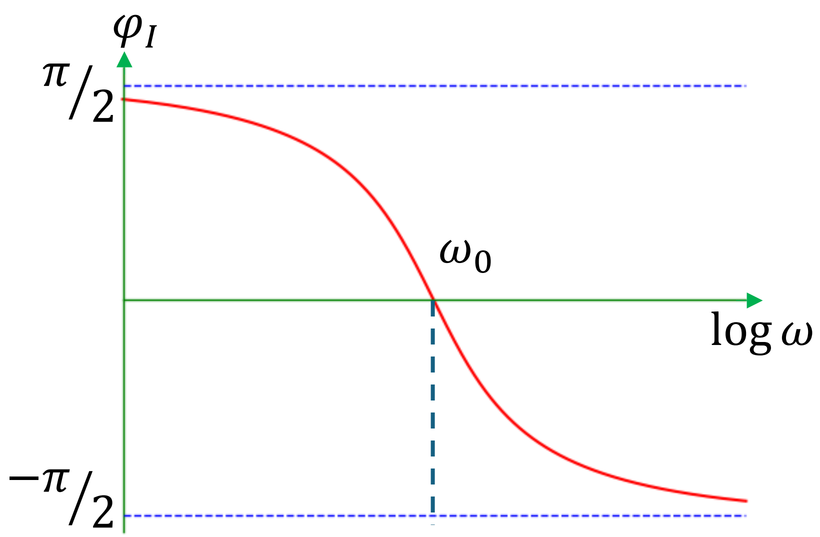
Volvamos al $R - L - C$ serie. Vimos que la corriente que circula tiene una amplitud y fase del tipo

$$|I_0^*| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \varphi_I = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right)$$

La impedancia equivalente es $z_{eq} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

Vemos que tanto la amplitud de corriente como el desfasaje respecto de la tensión son función de la frecuencia de excitación





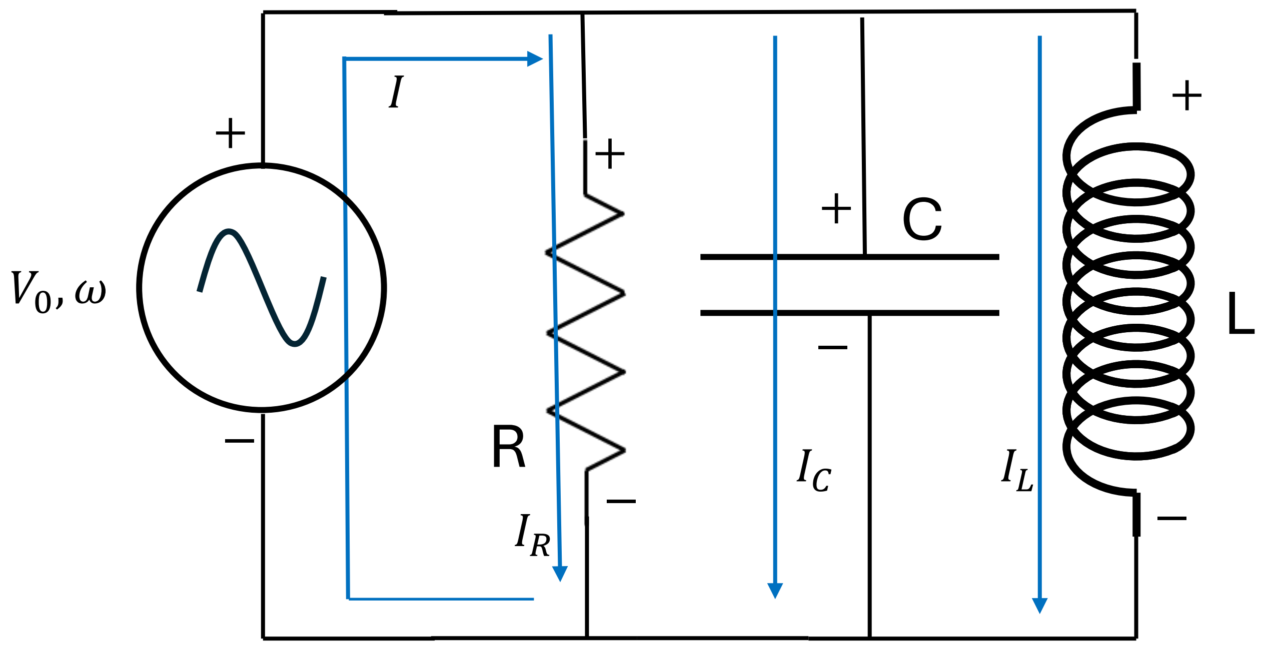
La amplitud toma un máximo cuando $\omega = \omega_0$. A esa frecuencia el desfasaje es nulo.

$z_{eq}(\omega = \omega_0) = R$ $\quad |I_0^*| = \dfrac{V_0}{R}$ $\quad \varphi_I = 0$ $\quad$ A este fenómeno se lo llama ***resonancia***.

En resonancia, la impedancia es la mínima posible, y el circuito se asemeja a una resistencia pura: no hay desfasaje entre la tensión y la corriente. El capacitor y el inductor almacenan energía en un parte del ciclo y la devuelven a la fuente en otra parte del mismo ciclo, repitiendo esto ciclo a ciclo.

Podemos ver otro ejemplo de circuito resonante, el circuito $R - L - C$ paralelo.

Para frecuencias muy inferiores a ω_0, la amplitud decae y el desfasaje de la corriente tiende a $\pi/2$. En estas condiciones, decimos que estamos en "comportamiento capacitivo", porque el circuito se comporta como si estuviese alimentando un resistor y un capacitor.
Para frecuencias muy superiores a ω_0, la amplitud decae y el desfasaje de la corriente tiende a $-\pi/2$. En estas condiciones, decimos que estamos en "comportamiento inductivo", porque el circuito se comporta como si estuviese alimentando un resistor y un inductor.



Para encontrar la corriente que pasa por la fuente, debemos ver la impedancia equivalente total.

$$\frac{1}{z_{eq}} = \frac{1}{z_R} + \frac{1}{z_C} + \frac{1}{z_L} = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$$

$$\rightarrow z_{eq} = \frac{R}{1 + iR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

Entonces, $|I_0^*|$

$$|z_{eq}| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \qquad \varphi_z = -\tan^{-1}\left[R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]$$

En este caso, la impedancia equivalente será máxima para $\omega = \omega_0$, y tenderá a 0 para las frecuencias extremas.

$$z_{eq}(\omega_0) = R$$

como en el caso anterior

$$z_{eq}(\omega \ll \omega_0) \approx i\omega L \underset{\omega \to 0}{\to} 0$$

$$z_{eq}(\omega \gg \omega_0) \approx 1/i\omega C \underset{\omega \to \infty}{\to} 0$$

Es el caso inverso que el del circuito $R - L - C$ serie.

Para la corriente, tendremos

$$|I_0^*| = \frac{V_0}{|z_{eq}|}$$

$$\varphi_I = -\varphi_z$$