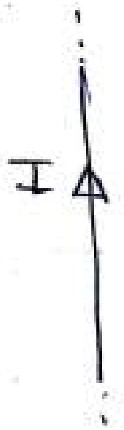
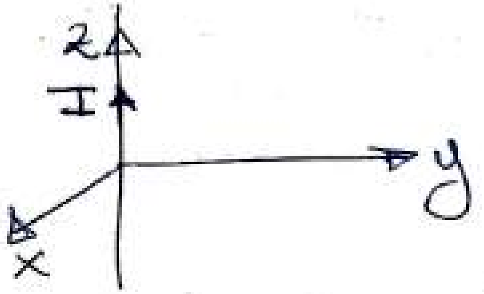
Problema 1

ⓐ



El problema tiene simetría cilíndrica. Si colocamos un SR con el eje z coincidente con la dirección del hilo tenemos



$\bar{B}(\bar{r}) = \bar{B}(r)$

No puede dep de φ y/o de z, ya que son indistinguibles cualquier ángulo o punto del eje.

Como $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0$, las líneas de campo deben cerrarse sobre sí mismo. $\Rightarrow$ deben ser circulares alrededor de hilo

$\therefore\ \bar{B}(\bar{r}) = B(r)\hat{\varphi}$ en coordenadas cilíndricas

- Utilizamos la ley de Ampere para calcular el campo. Elijo una curva de Ampere circular

$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \bar{B}\cdot d\bar{l} \underset{\uparrow}{=} \oint_{\mathcal{C}} B(r)\hat{\varphi}\cdot r\,d\varphi\,\hat{\varphi} =$

$d\bar{l} = r\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

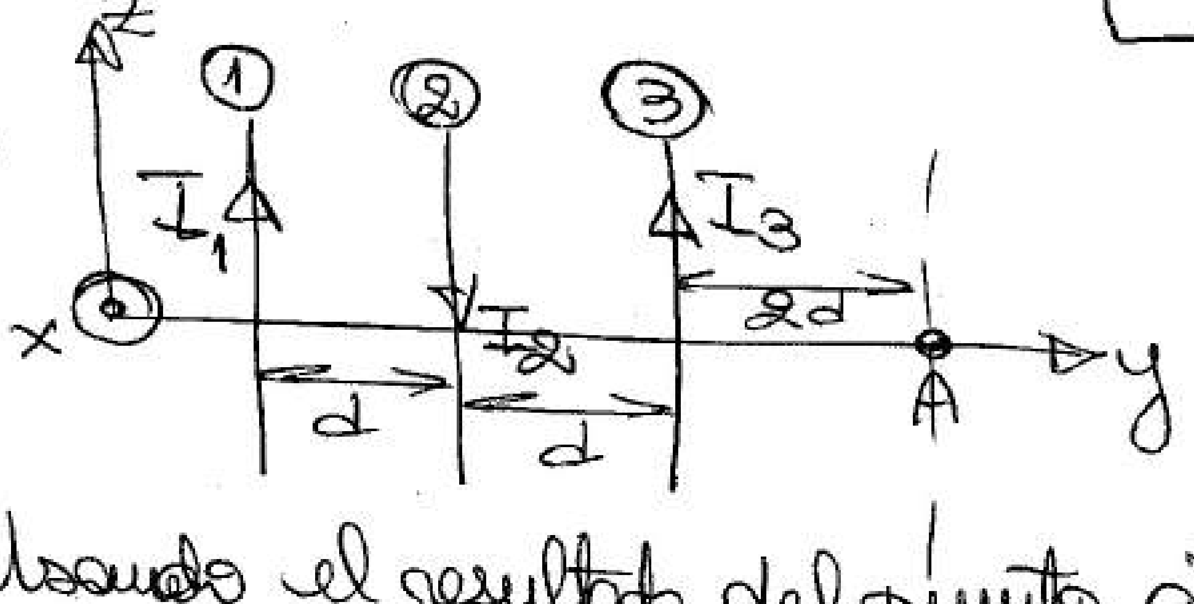
$$= \int_0^{2\pi} B(r)\, r\, d\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ B(r),\, r \\ \text{ctes}}}{=} B(r)\, 2\pi r$$

Pero la ley de Ampere dice $\oint \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu_0 I_c$ donde I_c es la corriente concatenada por la curva; en este caso, $I_c = I$

$$\Rightarrow 2\pi r B(r) = \oint_C \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu_0 I_c = \mu_0 I$$

$$\therefore B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \; ; \Rightarrow \boxed{\overline{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\varphi}}$$

b)



Usando el resultado del punto a)

$$\overline{B}_1(A) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{1}{4d} \hat{\imath} \quad \left(\hat{\varphi}_1 = -\hat{\imath} \text{ en } A\right)$$

$$\overline{B}_2(A) = +\frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{1}{3d} \hat{\imath} \quad \left(\hat{\varphi}_2 = \hat{\imath} \text{ en } A\right)$$

$$\overline{B}_3(A) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{1}{2d} \hat{\imath} \quad \left(\hat{\varphi}_3 = -\hat{\imath} \text{ en } A\right)$$

$$\overline{B}_A = \overline{B}_1(A) + \overline{B}_2(A) + \overline{B}_3(A) = \frac{\mu_0}{2\pi d}\left[-\frac{I_1}{4} + \frac{I_2}{3} - \frac{I_1}{2}\right] \hat{\imath}$$

$$\therefore \bar{B}_A = \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{I_2}{3} - \frac{3}{4} I_1\right)\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{9}{4} I_1 \quad \text{para que } \bar{B}_A = 0$$

ⓒ El campo magnético que generan los dos primeros hilos en el tercer hilo es

$$\bar{B}_{1-2} = \bar{B}_1(3) + \bar{B}_2(3) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\frac{1}{2d}\hat{\imath} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\frac{1}{d}\hat{\imath}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(I_2 - \frac{I_1}{2}\right)\hat{\imath} \qquad I_2 = \frac{9}{4} I_1$$

$$\bar{B}_{12} = \frac{7\mu_0}{8\pi}\frac{I_1}{d}\hat{\imath}$$

La fuerza que siente el hilo 3 será

$$d\bar{F}_3 = I_3\, d\bar{l}_3 \times \bar{B}_{12} = I_1\, dz\, \hat{k} \times \frac{7}{8}\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I_1}{d}\hat{\imath}$$

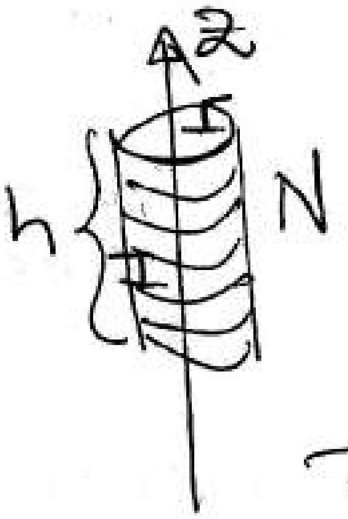
$$= \underbrace{\frac{7}{8}\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I_1^2}{d}}_{\text{cte en todo el hilo 3}}\, dz\, \hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{F_3}{l}\right|_{\text{long } l} = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{7}{8}\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I_1^2}{d}\, dz\, \hat{\jmath} = \frac{7}{8}\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I_1^2}{d}\hat{\jmath}$$

la fuerza apunta el y^+

Problema 2

a)



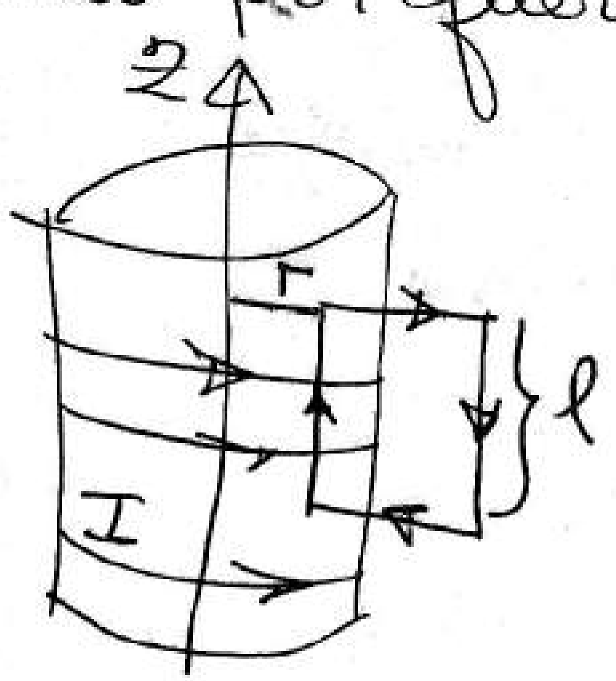
Por simetría y por analogía al solenoide infinito $(r \ll h)$

~~Podemos~~ decir que las líneas de campo serán la superposición de las líneas de muchas espiras circulares, cuyo campo magnético en el eje central es en la dirección z

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B(r)\,\hat{k} & \text{en el interior del solenoide} \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$$

(aproximación de solenoide infinito)

Aplico una curva de Ampère que se cierra por fuera del solenoide



$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^l B(r)\,\hat{k} \cdot dz\,\hat{k} =$$

en el lado interior

$d\vec{l} = dz\,\hat{k}$

$\vec{B} = B(r)\,\hat{k}$

$$= \int_0^l B(r)\,dz \underset{\uparrow}{=} B(r)\, l$$

B(r) cte
en ese lado

los otros 3 lados circulan 0, pues en los lados radiales $\overline{B} \perp \overline{dl}$ y en el lado externo, $\overline{B} = 0$

$$\therefore \oint \overline{B} \cdot \overline{dl} = B(r)\, l = \mu_0 I_c$$

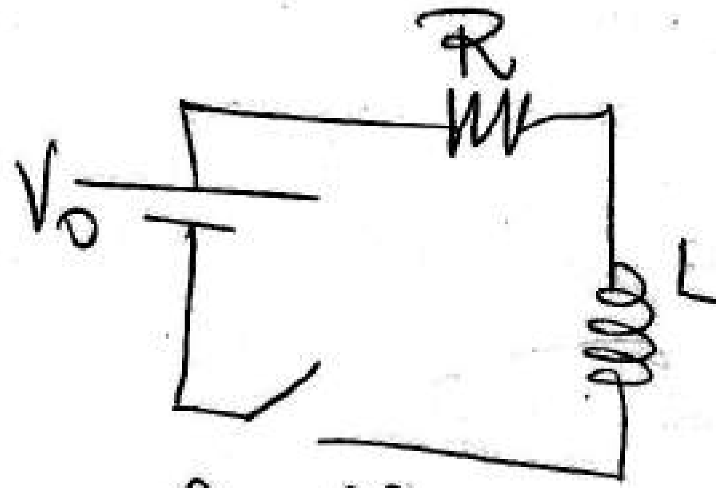
en este caso $I_c = \underbrace{n\, l}\, I$; $n = \frac{N}{h}$

número de espiras que atraviesan la superficie concatenada por curva

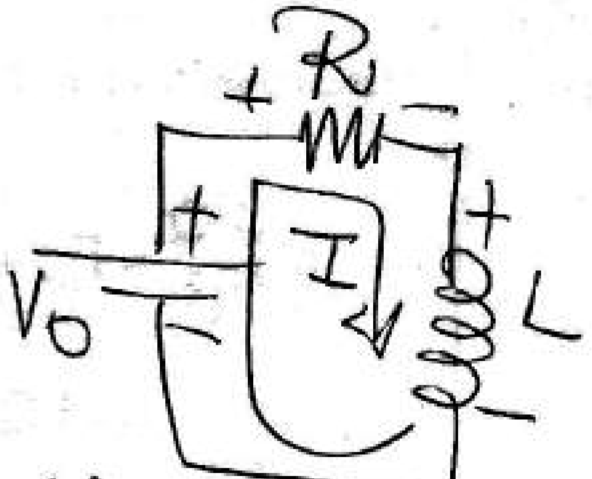
$$\therefore B(r) = n I \mu_0$$

$$\Rightarrow \underline{\overline{B}(r) = n \mu_0 I \hat{k}}$$ en el interior del solenoide

b) Tenemos un circuito



al cerrar la llave



la ecuación de mallas resulta

$$V_0 = RI + L\frac{dI}{dt}$$

con la condición $I(0)=0$ (I debe ser una función continua)

la solución de esa ecuación diferencial es

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \quad , \quad \tau_L = \frac{L}{R}$$

i)

$$\boxed{I_\infty = I(t \to \infty) = \frac{V_0}{R} \underset{\substack{\uparrow \\ V_0 = 10V \\ R = 10\Omega}}{=} 1A}$$

ii)

Para $t_1 = 2{,}28\ 10^{-3}$ seg $\quad I(t_1) = \frac{I_\infty}{2} \Rightarrow$

$$\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-t_1/\tau_L}\right) = \frac{V_0}{2R}$$

$$1-e^{-t_1/\tau_L} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-t_1/\tau_L} = 1/2$$

$$-\frac{t_1}{\tau_L} = \ln(1/2) = -\ln 2$$

$$\therefore \tau_L = \frac{t_1}{\ln 2} = \frac{2{,}28\ 10^{-3}\ seg}{0{,}693147}$$

$$\frac{L}{R} = \tau_L = 0{,}003289\ seg$$

$$\therefore \boxed{L = \tau_L R \underset{\underset{R=10\Omega}{\uparrow}}{=} 0{,}03289\ Hy = 32{,}89\ mHy}$$

iii) $L = \frac{d\phi}{dI}$ $\quad \phi = N\iint_S \overline{B}\cdot d\overline{S}$

Si hay un material de permeabilidad relativa $\mu_r \Rightarrow \overline{B}(\bar{r}) = \mu_r \mu_0 n I \hat{k}$

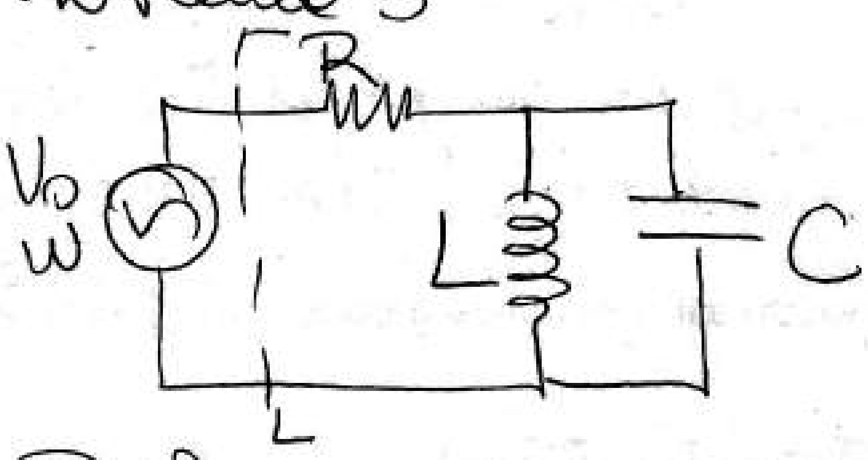
$$= \mu_r \mu_0 \frac{N}{h} I \hat{k}$$

$d\overline{S} = dS\hat{k} \Rightarrow \phi = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{h} \pi r^2 I$

$$\therefore L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{h} \pi r^2 \longrightarrow \boxed{\mu_r = \frac{L\,h}{\mu_0 N^2 \pi r^2}}$$

$$= \frac{32.89\ 10^{-3} Hy\ 0{,}12\,m}{4\pi 10^{-7}\ Hy/m\ (100)^2\ \pi (0{,}01 m)^2} = 999{,}74 \simeq \boxed{1000}$$

Problema 3



ⓐ La impedancia equivalente que ve la fuente es

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L \| Z_C = R + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} =$$

$$\boxed{Z_{eq} = R + \frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC} = R + i\underbrace{\left[\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right]}_{X}}$$

ⓑ $\omega = 2\pi 50\,\text{Hz} = 314{,}159\,\text{seg}^{-1}$

$L = 10^{-3}\,\text{Hy} \quad C = 10^{-6}\,\text{F}$

Calculamos $L \| C = i\,\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} = iX$

$$X = \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} = 0.314\,\Omega > 0$$

$\Rightarrow$ la Z_{eq}^{L-C} <u>es inductiva</u>

ⓒ Si $\varphi_I = -\pi/4 \rightarrow \varphi_{Z_{eq}} = \pi/4$

$$\operatorname{tg}\varphi_{Z_{eq}} = \operatorname{Tg}(\pi/4) = 1 = \frac{X}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = X} = \boxed{0.314\,\Omega}$$