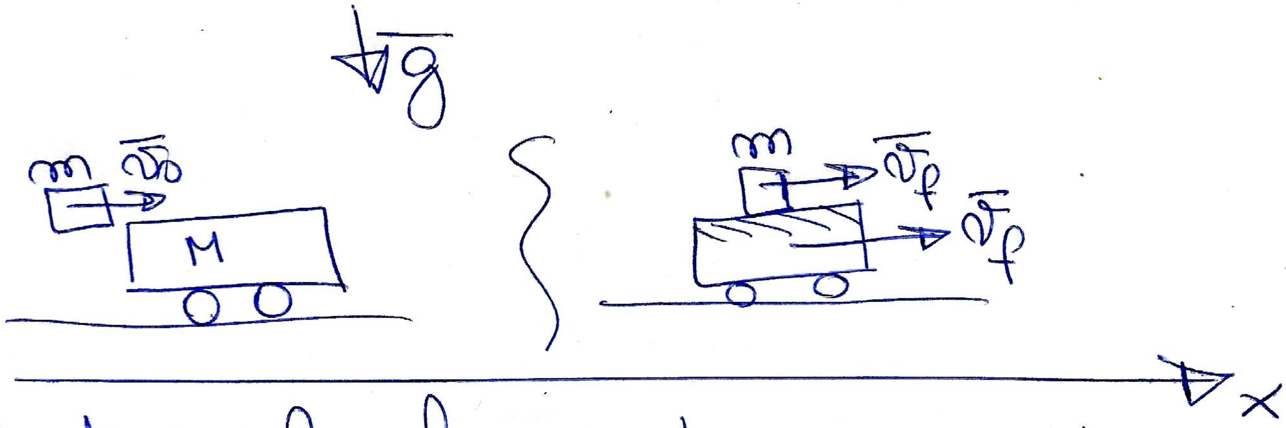
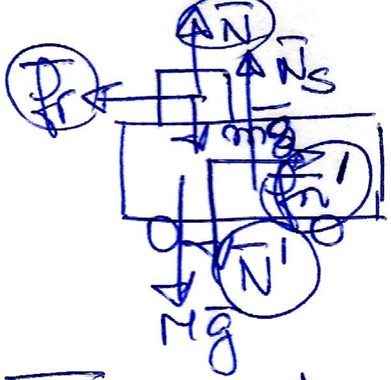
Problema 1



a) Dado que la fuerza de rozamiento es una fuerza externa, junto con las reacciones normales internas, las únicas fuerzas externas son los pesos y la normal del suelo. Éstas se compensan entre sí, dado que el CM no se desplaza verticalmente.



○ : fuerza interna

$\Rightarrow \vec{P}$ es cte ya que $F^{ext}=0$

Por otro lado la E_{mec} no se conserva ya que hay trabajo de las fuerzas de rozamiento.

Como $\overline{P} = cte \Rightarrow \overline{P}_{inicial} = \overline{P}_{final}$

$$m\,\overline{v}_0 = (m+M)\,\overline{v}_f \Rightarrow \boxed{\overline{v}_f = \frac{m}{M+m}\,\overline{v}_0}$$

b) $E^{(i)}_{mec} = \frac{1}{2} m v_0^2$

$$E^{(f)}_{mec} = \frac{1}{2}(m+M)\,v_f^2 = \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\,\frac{v_0^2\, m^2}{(m+M)^{\cancel{2}}}$$

$$= \left[\frac{1}{2} m v_0^2\right]\left(\frac{m}{m+M}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_{mec} = \frac{m}{m+M}\,E^{(i)}_{mec} - E^{(i)}_{mec} = -\left(\frac{M}{m+M}\right) E^{(i)}_{mec}}$$

c) $\Delta E^{(m)}_{mec} = E^{(m)}_{f} - E^{(m)}_{i} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\frac{m^2}{(m+M)^2} - 1\right]$$

$$\Delta E^{(m)}_{mec} = -\frac{(2mM + M^2)}{(m+M)^2}\,E^{(i)}_{mec} < 0$$ pierde energía

$$\Delta E^{(M)}_{mec} = E^{(M)}_{f} - E^{(M)}_{i} = \frac{1}{2} M v_f^2 - 0$$

$$\Delta E^{(M)}_{mec} = \frac{1}{2}\,\frac{M m^2 v_0^2}{(m+M)^2} = \frac{mM}{(m+M)^2}\,E^{(i)}_{mec} > 0$$ gana energía

Sobre la masa m

d) $W_{\vec{f}_r} \overset{(4)}{=} \Delta E_{mec}^{(m)} = -\frac{(2m+M)M}{(m+M)^2} E_{mec}^{(i)}$

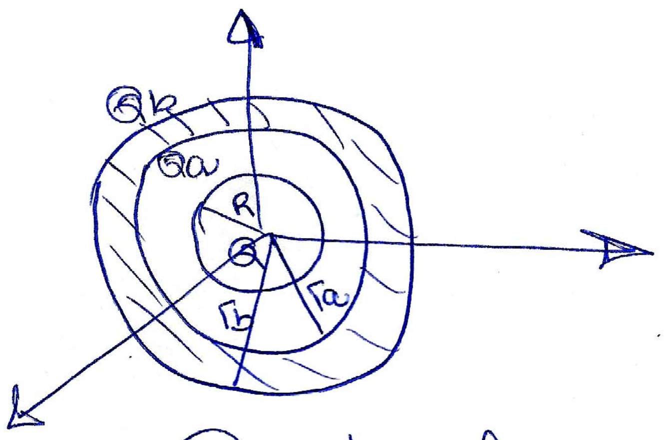
$\vec{f}_r, \vec{f}_r'$ es la única fuerza NO conservativa que realiza trabajo sobre cada masa, respectivamente.

Sobre la masa M

$W_{\vec{f}_r'} \overset{(4)}{=} \Delta E_{mec}^{(M)} = \frac{mM}{(m+M)^2} E_{mec}^{(i)}$

Los trabajos NO son iguales (porque hay una pérdida neta de energía) y son de signos opuestos. El trabajo de la fuerza de rozamiento sobre el carro es el que le permite ganar energía.

Problema 2)



El problema tiene simetría esférica $\Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = E(r)\hat{r}$

$V(\bar{r}) = V(r)$

Si Q' es la carga del conductor,

$$Q' = Q_a + Q_b$$

En la esfera aislante Q está distribuida uniformemente en volumen $\Rightarrow \rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

a) Aplico la ley de Gauss para encontrar las cargas en cada superficie del conductor

Si S es una superficie esférica de radio r, $r_a \leq r \leq r_b$

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{E}=0 \\ \text{en el interior} \\ \text{del conductor}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}{=} \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q + Q_a}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow \boxed{Q_a = -Q}$ y por ende $Q_b = Q' - Q_a$

$$\boxed{Q_b = Q' + Q}$$

b) Para encontrar el campo eléctrico aplico Gauss

$$\oiint_{S(r)} \bar{E} \cdot d\bar{S} = \oiint_{S(r)} E(r)\hat{r} \cdot dS\,\hat{r} = E(r)\, S(r)$$

$$= E(r)\, 4\pi r^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}{=} \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q_{enc}}{4\pi \varepsilon_0\, r^2}$$

Calculamos Q_{enc}

i) $r < R$ $\quad Q_{enc} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q\, r}{4\pi \varepsilon_0 R^3}$$

ii) $R < r < r_a$ $\quad Q_{enc} = Q$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

iii) $r_a < r < r_b$ $\quad E(r) = 0$

iv) $r_b < r$ $\quad Q_{enc} = Q + Q'$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q + Q'}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q\, r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\hat{r} & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\,\hat{r} & R \leq r < r_a \\ 0 & r_a < r < r_b \\ \dfrac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\,\hat{r} & r > r_b \end{cases}$$

Ahora calculamos el potencial, empezando desde la referencia en infinito

i) $r \geq r_b$ $\quad V(r) - \underbrace{V(\infty)}_{=0} = -\int_{\infty}^{r} \bar{E}\cdot d\bar{r} = \dfrac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

$E(r) = \dfrac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad r \geq r_b$$

ii) $r_a \leq r \leq r_b$ $\quad V(r) - V(r_b) = -\int_{r_b}^{r} \bar{E}\cdot d\bar{r} = 0$

$E(r) = 0$

$$V(r) = V(r_b) = \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b} \qquad r_a \leq r \leq r_b$$

sale del punto i)

iii) $R \leq r \leq r_a$ $\quad V(r) - V(r_a) = -\int_{r_a}^{r} \bar{E}\cdot d\bar{r} =$

$E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_a}$$

$$\Rightarrow V(r) = \underbrace{V(r_a)}_{\text{sale del ii)}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_a}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \underbrace{\frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b}}_{V(r_a)} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_a}$$

$R \leq r \leq r_a$

iv)

$r \leq R$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \bar{E}\cdot d\bar{r} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$V(r) = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \underbrace{V(R)}_{\text{sale de iii)}}$$

$$= -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_a}$$

$r \leq R$

Los últimos términos son todas constante que pueden agruparse en una sola.

También el potencial puede calcularse planteando $-\frac{\partial V}{\partial r} = E(r) \Rightarrow$ se integra cada etapa del campo y se ajustan las constante de integración para que la función sea continua

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3} + C_1 & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2 & R \leq r \leq r_a \\ C_3 & r_a \leq r \leq r_b \\ \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_4 & r \geq r_b \end{cases}$$

$$V(\infty) = C_4 = 0 \Rightarrow \boxed{C_4 = 0}$$

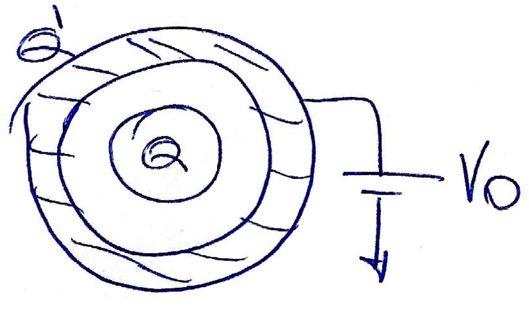
$$V(r_b^-) = V(r_b^+) \rightarrow C_3 = \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b}$$

$$V(r_a^-) = V(r_a^+) \longrightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_a} + C_2 = C_3$$

$$V(R^-) = V(R^+) \longrightarrow -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + C_2$$

Así se obtienen C_1, C_2, C_3 y C_4, dando el mismo resultado que de la forma integral anterior.

Si el conductor está conectado a una pila.



$$\Rightarrow V_{cond} = V_0$$

$$\frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b} = V_0$$

∴ la carga Q' del conductor se adaptará para ajustar el valor del potencial

$$\underline{Q' = 4\pi\varepsilon_0 r_b V_0 - Q}$$

(c) En un conductor, que tiene potencial constante, la energía almacenada es

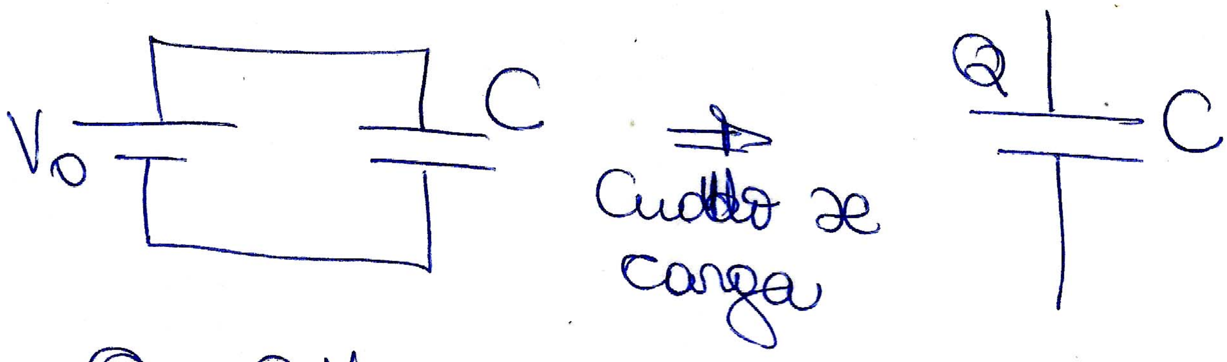
$$E_{alm} = \frac{1}{2} Q_{cond} V_{cond}$$

$$= \frac{1}{2} Q' \frac{(Q+Q')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b} \quad \text{a carga cte}$$

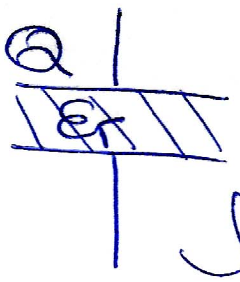
$$= \frac{1}{2}\left(4\pi\varepsilon_0 r_b V_0 - Q\right) V_0 \quad \text{conectado a la pila}$$

Problema 3

a)



$Q = C V_0$



Al introducir el material dieléctrico $C' = \varepsilon_r C = 1{,}5C$

la carga queda igual, porque el capacitor está aislado

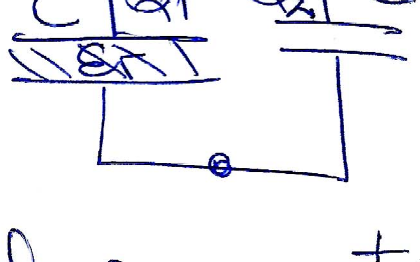
$Q = C V_0$

y la diferencia de potencial

$$\Delta V = \frac{Q}{C'} = \frac{C V_0}{1{,}5 C} = \frac{2V_0}{3}$$

$$E_{alm} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C V_0 \frac{2}{3} V_0 = \frac{1}{3} C V_0^2$$

b)



Dos capacitores en paralelo: igual diferencia de potencial y la carga total se mantiene

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V'$$

$$\frac{Q_1}{C'} = \frac{Q_2}{C}$$

$$Q = (C + C')\Delta V'$$

$$C V_0 = \left(C + \frac{3}{2}C\right)\Delta V' = \frac{5}{2} C \Delta V'$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta V' = \frac{2}{5} V_0}$$

$$\boxed{Q_1 = C'\Delta V' = \frac{3}{2} C \frac{2}{5} V_0 = \frac{3}{5} C V_0}$$

$$\boxed{Q_2 = C \Delta V' = C \frac{2}{5} V_0 = \frac{2}{5} C V_0}$$

c) $E_{C'} = \frac{1}{2} Q_1 \Delta V' = \frac{1}{2} \frac{3}{5} C V_0 \frac{2}{5} V_0$

$$= \frac{3}{25} C V_0^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} Q_2 \Delta V' = \frac{1}{2} \frac{2}{5} C V_0 \frac{2}{5} V_0$$

$$= \frac{2}{25} C V_0^2$$

$$E_{Total} = \frac{3}{25} C V_0^2 + \frac{2}{25} C V_0^2 = \frac{1}{5} C V_0^2 < \underbrace{\frac{1}{3} C V_0^2}_{E_{alum}}$$

∴ La energía es menor porque parte de ella se gastó en la reconfiguración de las cargas.