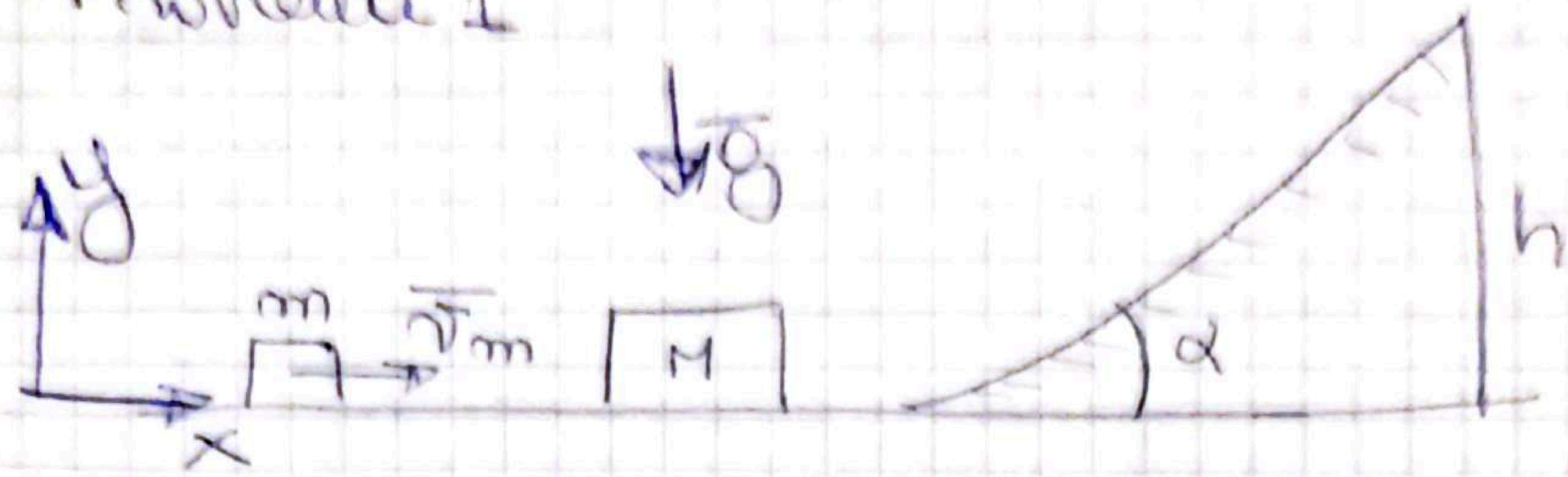
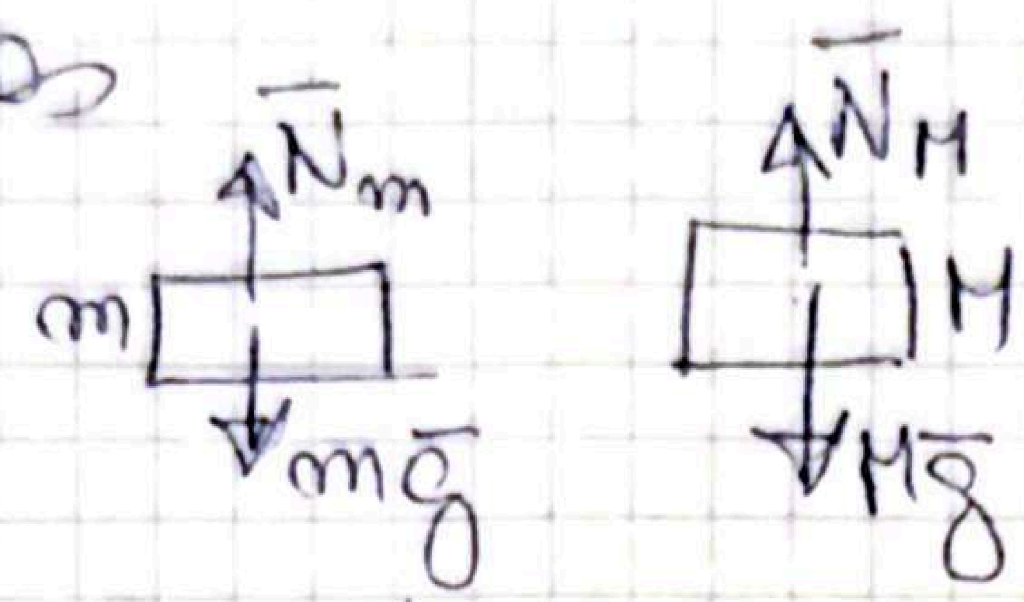
Problema 1



a) - Durante el impacto se conserva el impulso lineal, debido a la ausencia de fuerzas externas



$\bar{N}_m + m\bar{g} = 0$

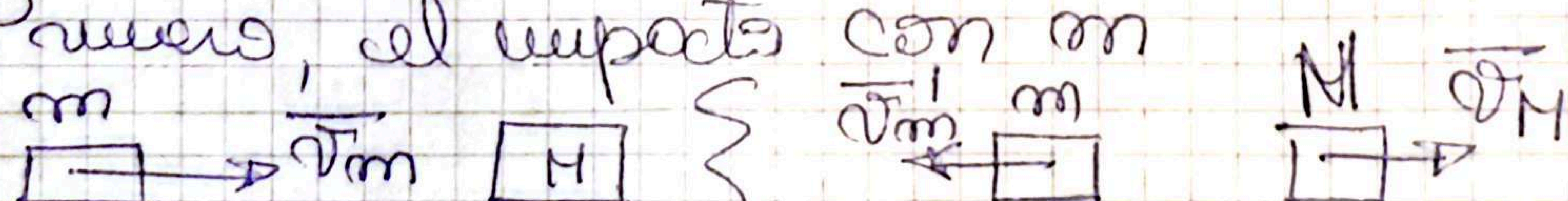
$\bar{N}_M + M\bar{g} = 0$

De la energía mecánica, no podemos decir nada a priori

- Después del impacto, cuando la masa M sube por la rampa, hay trabajo de fuerzas no conservativas, el rozamiento. De modo que la Emec NO se conserva. Y también hay fuerzas externas netas, la componente del peso en la dirección del plano y la fuerza de rozamiento, que hacen que M se frene. Entonces $\bar{P}$ NO se conserva.

b) Vamos a calcular la altura máxima a la que llega la masa M.

Primero, el impacto con m



Nos dicen que m pierde 3/4 de su energía cinética en el impacto ⇒

$$\cancel{\frac{1}{2}}m(v_m')^2 = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{2}}m v_m^2\right)$$

$$|v_m'| = \frac{|v_m|}{2}$$

$$\therefore \overline{v_m} = 6\frac{m}{seg}\hat{\imath} \; ; \; \overline{v_m'} = -3\frac{m}{seg}\hat{\imath}$$

$$\overline{P_{antes}} = m\overline{v_m}$$

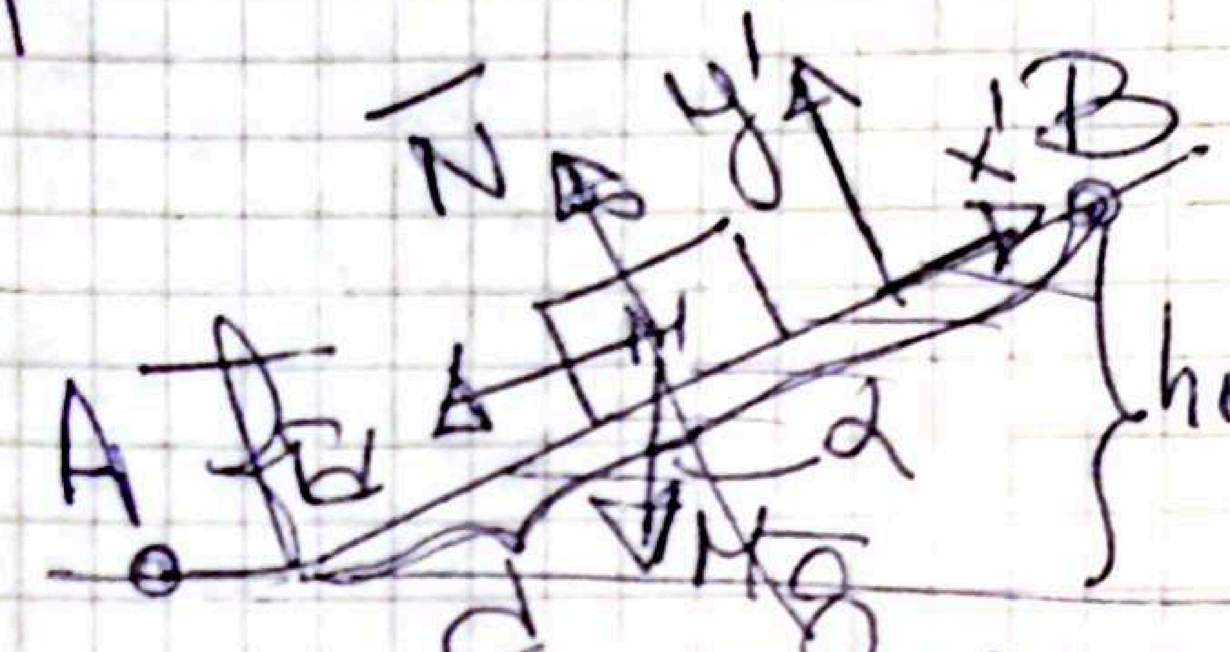
$$\overline{P_{después}} = m\overline{v_m'} + M\overline{v_M}$$

$$\Rightarrow \overline{P_{antes}} = \overline{P_{desp}} \Rightarrow m\overline{v_m} = m\overline{v_m'} + M\overline{v_M}$$

$$\therefore \overline{v_M} = \frac{m}{M}\left(\overline{v_m} - \overline{v_m'}\right) = \frac{1}{3}\left[6\frac{m}{seg}\hat{\imath} - \left(-3\frac{m}{seg}\right)\hat{\imath}\right]$$

$$\underline{\overline{v_M} = 3\frac{m}{seg}\hat{\imath}}$$

Luego, sube por el plano y la variación de E_{mec} es igual al trabajo de la fuerza de rozamiento, que es dinámico porque la partícula se mueve



$$d = h_{máx}/\operatorname{sen}\alpha$$

$$|\overline{N}| = Mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow |f_{rd}| = \mu_d Mg\cos\alpha$$

Comparamos la E_{mec} entre los puntos A y B

$$E_{mec}^{(B)} - E_{mec}^{(A)} = W_{f_{rd}}^{A\to B} = \int_A^B f_{rd}\cdot dr$$

En (B) $E_{cin}^{(B)} = 0$ (se frena)

En (A) $E_{pot}^{(A)} = 0$ (referencia en el piso)

$$\Rightarrow Mg\,h_{máx} - \frac{1}{2}M v_M^2 = \int_0^d \left(-\mu_d Mg\cos\alpha\right)\hat{\imath}'\cdot dx'\,\hat{\imath}'$$

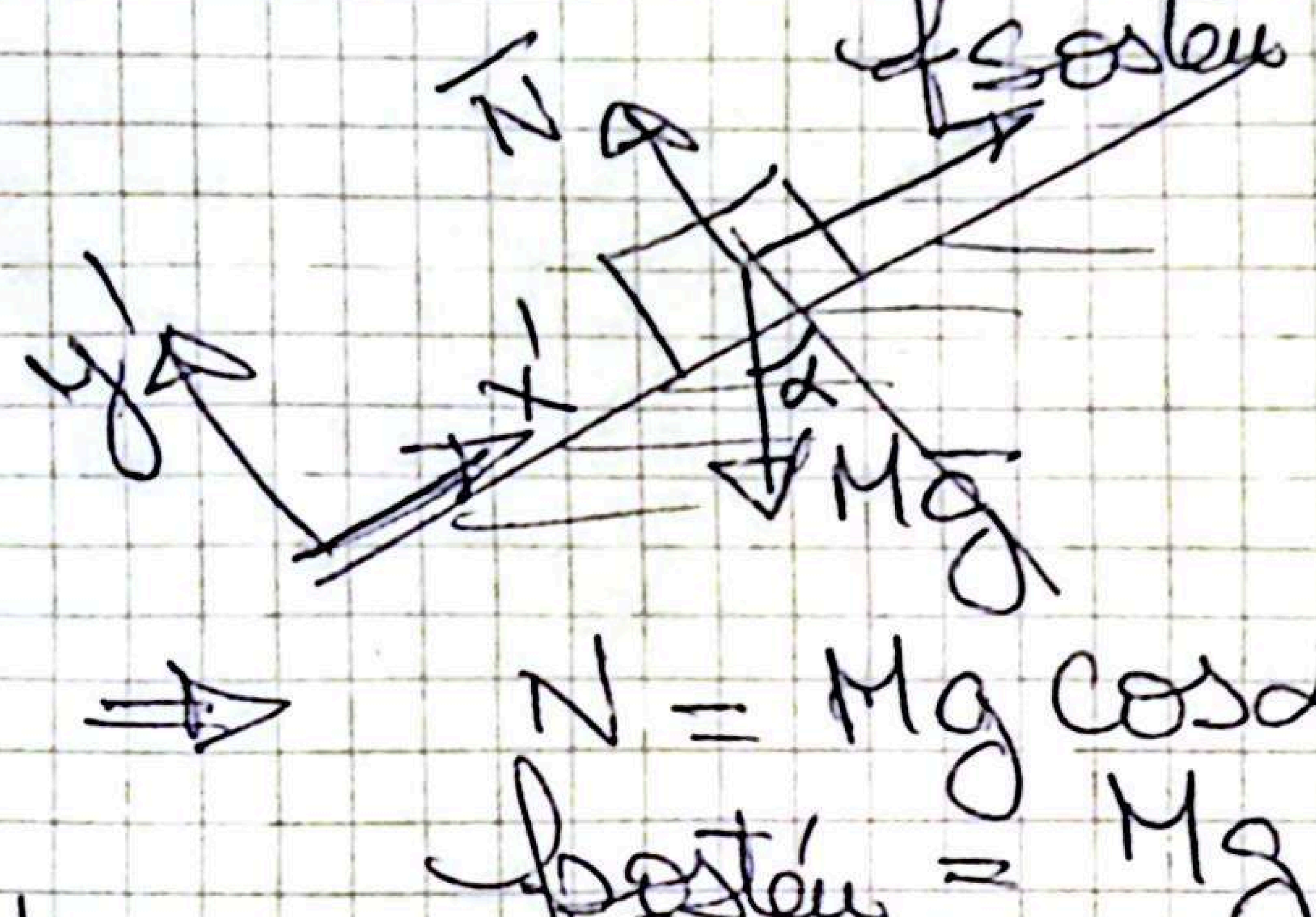
$$Mgh_{max} - \frac{M}{2}v_M^2 = -\mu_d Mg\cos\alpha\, d = -\mu_d Mg\cos\alpha \frac{h_{max}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\cancel{M}gh_{max}\left(1+\mu_d\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = \frac{\cancel{M}}{2}v_M^2$$

$$\therefore h_{max} = \frac{v_M^2}{2g\left(1+\mu_d\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)} = \frac{9\,m^2/seg^2}{20\frac{m}{seg^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right)}$$

$$h_{max} = \frac{9}{40}m = 0{,}225m < h = 0.5m$$

c) Una vez que se frena en la altura máxima, hay que ver si la fuerza de rozamiento estática alcanza para mantener a la partícula en esa posición



Si está quieta

i': $f_{sost}\,\hat{i}' - Mg\operatorname{sen}\alpha\,\hat{i}' = 0$

j': $N - Mg\cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow \quad N = Mg\cos\alpha$$

$$f_{sostén} = Mg\operatorname{sen}\alpha$$

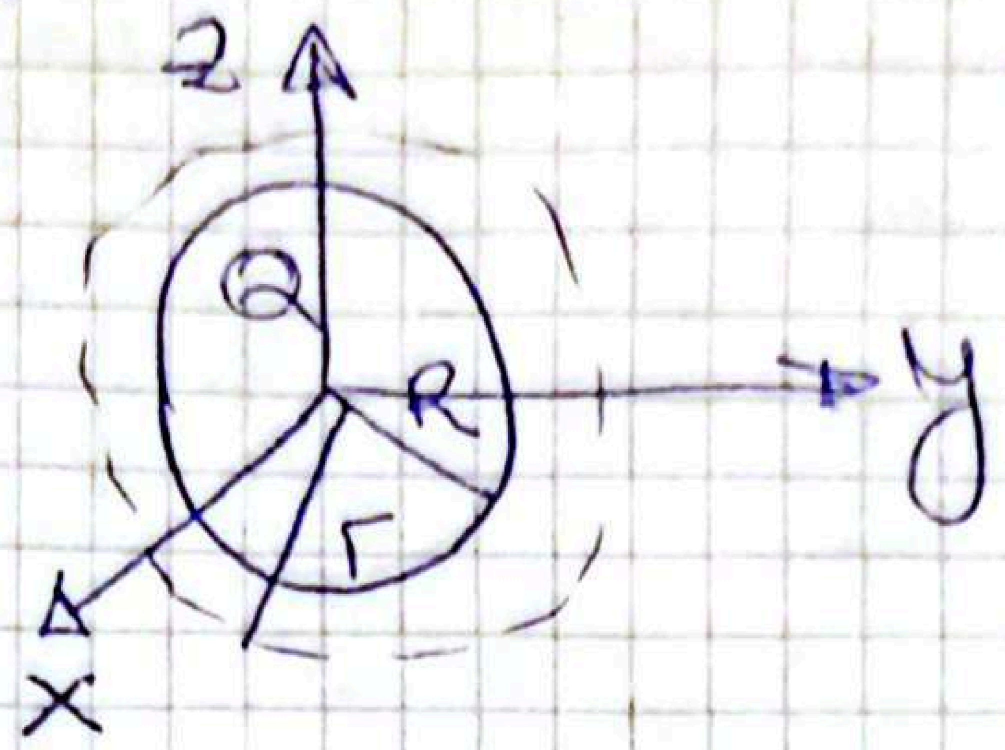
$$|f_{sostén}| \overset{?}{\leq} f_{re\,max} = \mu_e|\bar{N}|$$

$$Mg\operatorname{sen}\alpha \overset{?}{\leq} \mu_e Mg\cos\alpha$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \mu_e \overset{?}{\geq} tg\alpha = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Se cumple la desigualdad $\Rightarrow$ la partícula se queda quieta al detenerse.

Problema 2



Para calcular el potencial primero calculamos el campo eléctrico por Gauss

Por simetría $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ Coord esféricas

Elijo $S(r)$ una esfera concéntrica de radio r

$$\oint\!\!\oint_{S(r)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint\!\!\oint_{S(r)} E(r)\, dS \underset{\substack{\uparrow \\ E(r)\ \text{cte}}}{=} E(r)\, 4\pi r^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}{=} \frac{Q_{enc}^{(r)}}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{enc}^{(r)}}{r^2}$$

¿Cuánto vale $Q_{enc}^{(r)}$?

- Si $r<R$ $Q_{enc}^{(r)} = 0$ porque en un conductor <u>en equilibrio electrostático</u> la carga se aloja en la superficie
- Si $r>R \Rightarrow Q_{enc}^{(r)} = Q$ toda la carga

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & r>R \end{cases}$$

Ahora calculamos el potencial, tomando como referencia $V(\infty) = 0$

$$\Rightarrow V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\rightarrow r>R \quad V(r) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot dr\,\hat{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{r} = -\frac{1}{r}$$

$$\therefore\ V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad r > R$$

$-\quad r < R$

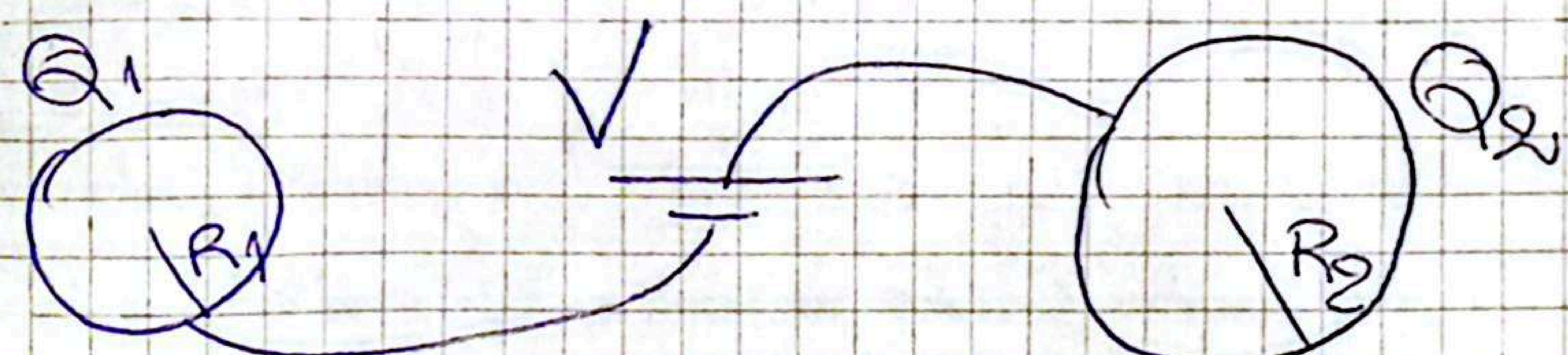
$$V(r) = -\int_{-\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{r} - \cancel{\int_{R}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r}} \qquad \vec{E}=0$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r \geq R \end{cases}}$$

$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$ es el potencial del conductor

(b)



Las esferas están lo suficientemente alejadas entre sí como para suponer que la distribución de cargas de una no afecta a la otra y, por ende, el campo que genera ~~la~~ una esfera en la zona cercana a la otra es despreciable. Por lo tanto, se mantienen las condiciones de simetría para cada esfera y el campo eléctrico y el potencial son directamente la suma de los mismos, respectivamente. Si la carga de la esfera 1 es Q_1 y de la esfera 2 es Q_2 $\Rightarrow$

$Q_1 + Q_2 = 0$ porque ambas esferas empezaron descargadas

Potencial de la esfera 1

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} + \cancel{V_2(r=|\overline{R_1}-\overline{R_2}|)}$$

despreciable

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + \cancel{V_1(r=|\overline{R_2}-\overline{R_1}|)}$$

Como están unidas por la pila

$$V_2 - V_1 = V \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_1}{R_1}\right)$$

$$Q_1 = -Q_2 \Rightarrow V = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$V = \frac{3Q_2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}$$

$$\therefore Q_2 = \frac{8}{3}\pi\varepsilon_0 R_1 V$$

$$Q_1 = -\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0 R_1 V$$

Las densidades superficiales serán

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0 R_1 V}{4\pi R_1^2} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 V}{R_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = -\frac{\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0 R_1 V}{4\pi(4R_1^2)} = -\frac{1}{6}\frac{\varepsilon_0 V}{R_1}$$

c) El punto medio entre los dos ~~radios~~ centros es una distancia igual para ambas esferas $d = 10R_2$

Como las cargas son iguales y contrarias:

$$-\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d} = 0 \Rightarrow \boxed{V(d)=0}$$

Escaneado con CamScanner

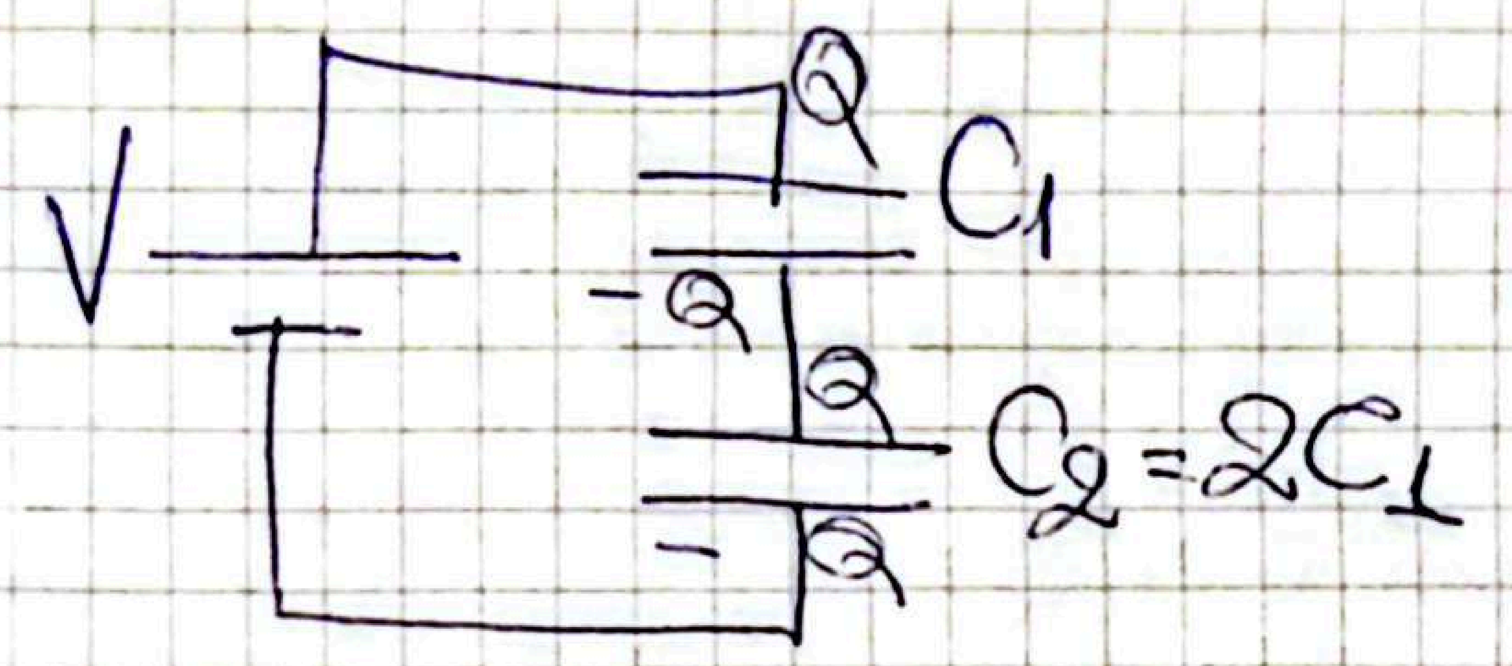
d) Para medir capacidad, justamente imponemos una diferencia de potencial entre los conductores y así calculamos la carga que se induce en cada uno de ellos. Usando los resultados del punto b)

$$Q = Q_2 = \frac{8}{3}\pi \varepsilon_0 R_1 V$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{8}{3}\pi \varepsilon_0 R_1}$$

Problema 3

a)



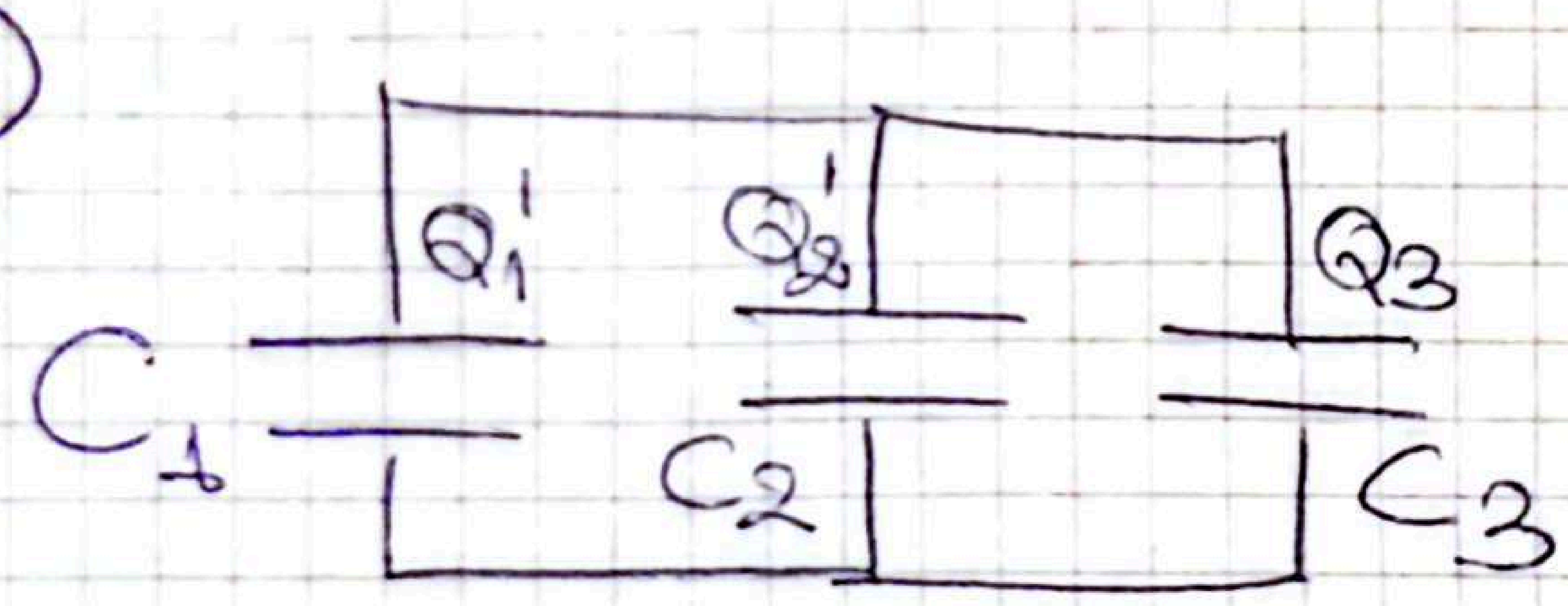
$$V=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}=Q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{2C_1}\right)=\frac{3}{2}\frac{Q}{C_1}$$

$$\Rightarrow Q_1=Q_2=\frac{2}{3}C_1V$$

$$V_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{2}{3}V$$

$$V_2=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_2}{2C_1}=\frac{V}{3}$$

b)



$$Q_1'+Q_2'+Q_3=$$
$$=Q_1+Q_2 \text{ (aislado)}$$

La carga total se conserva

$$Q_1'+Q_2'+Q_3=\frac{4}{3}C_1V$$

$$\frac{Q_1'}{C_1}=\frac{Q_2'}{C_2}=\frac{Q_2'}{2C_1}\longrightarrow Q_2'=2Q_1'$$

$$\frac{Q_1'}{C_1}=\frac{Q_3}{C_3}=\frac{Q_3}{3C_1}\longrightarrow Q_3=3Q_1'$$

$$\therefore Q_1'+2Q_1'+3Q_1'=6Q_1'=\frac{4}{3}C_1V$$

$$\Rightarrow \underbrace{Q_1'=\frac{2}{9}C_1V}\,;\quad \underbrace{Q_2'=\frac{4}{9}C_1V}\,;\quad \underbrace{Q_3=\frac{2}{3}C_1V}$$

de los 3 capacitores $\boxed{\Delta V=\frac{Q_1'}{C_1}=\frac{2}{9}V}$

c) La energía inicial es

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} = \frac{1}{2}Q^2\underbrace{\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}_{1/C_{eq}}$$

$$C_{eq} = \frac{2}{3}C_1$$

$$U_i = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{9}_{3}}\,\frac{C_1^{\cancel{2}}V^2}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cancel{C_1}} = \frac{1}{3}C_1V^2$$

$$U_f = \frac{1}{2}C_1(\Delta V)^2 + \frac{1}{2}C_2(\Delta V)^2 + \frac{1}{2}C_3(\Delta V)^2$$

$$= \frac{1}{2}(C_1+C_2+C_3)\,\frac{4}{81}V^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\,\cancel{6}^{2}C_1\,\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{81}_{27}}V^2 = \frac{4}{27}C_1V^2$$

$$U_i = \frac{1}{3}C_1V^2 \; ; \; U_f = \frac{4}{27}C_1V^2$$

Como $\frac{1}{3} > \frac{4}{27}$, entonces se perdió energía en la redistribución de cargas.

Escaneado con CamScanner