10 diez

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación INTEGRADORA, duración: 4 horas. 8-08-2024

Apellido y Nombres: Padrón:

Correo: Curso:

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

1. Se sabe que una persona identifica correctamente un texto escrito por humanos con probabilidad 0.7 mientras que un agente IA lo reconoce con probabilidad 0.8. Se elige al azar un intérprete entre una persona y un agente IA, y se le pide que identifique de modo independiente dos textos, a los que el intérprete identifica correctamente. Calcular la probabilidad de que el intérprete elegido sea la persona.

2. Pablo y Ana corren una carrera de 100mts. El tiempo en segundos que demora Pablo en correr 100mts es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[10, 13]$. Independientemente, el tiempo en segundos que demora Ana en correr la misma distancia es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $[11, 15]$. Sabiendo que entre las llegadas de ambos pasó más de un segundo, calcular la probabilidad de que haya ganado Pablo.

3. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = (1 - 2x^{-1})1\{x > 2\}$. Hallar y graficar la función de distribución de $Y = \log(X)$. (log es el logaritmo natural)

4. La vida útil (en horas de trabajo) de un lavarropas es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{\theta x}} e^{-\sqrt{\frac{x}{\theta}}} 1\{x > 0\}$$

Se ensayan 3 obteniéndose resultados 100.0, 123.5, 210.0. Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que otro lavarropas dure más de 150 horas de trabajo.

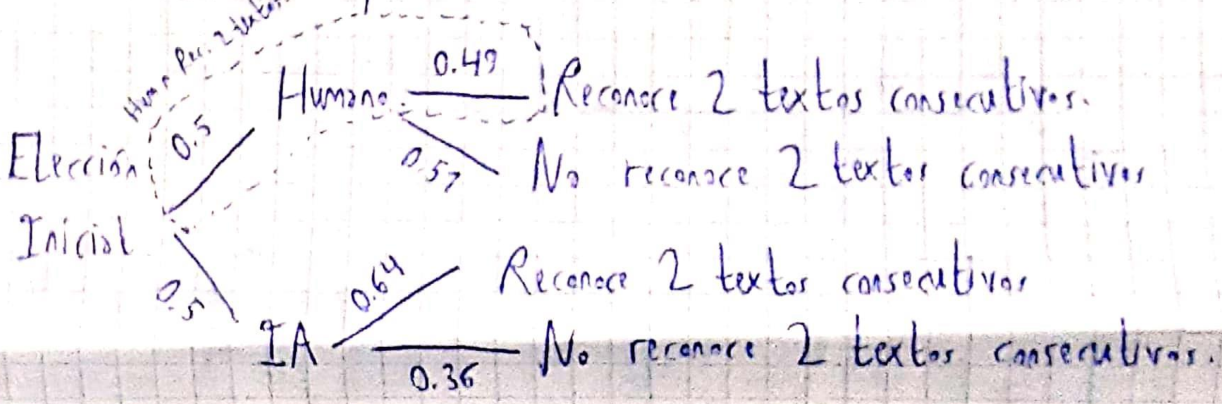
5. Se toman 6 muestras de una sustancia contaminante y se les mide el pH, obteniéndose una media muestral $\bar{x} = 6.85$ y un desvío muestral $s = 0.15$. Suponiendo que la muestra fue tomada de una población normal, ¿se puede concluir que la media del pH es distinta que 7.0 a nivel de significación 0.05?

· Probabilidad y Estadística B – Integrador 08/03/24

1] Para resolver este ejercicio podemos utilizar el concepto de probabilidad condicional y plantear un diagrama de árbol.

· Si una persona reconoce un texto escrito por humanos con probabilidad 0.7, la probabilidad de que reconozca dos textos (consecutivos) es $0.7^2 = 0.49$; análogamente, la IA reconoce dos textos con probabilidad $0.8^2 = 0.64$.

· El diagrama de árbol a plantear es:



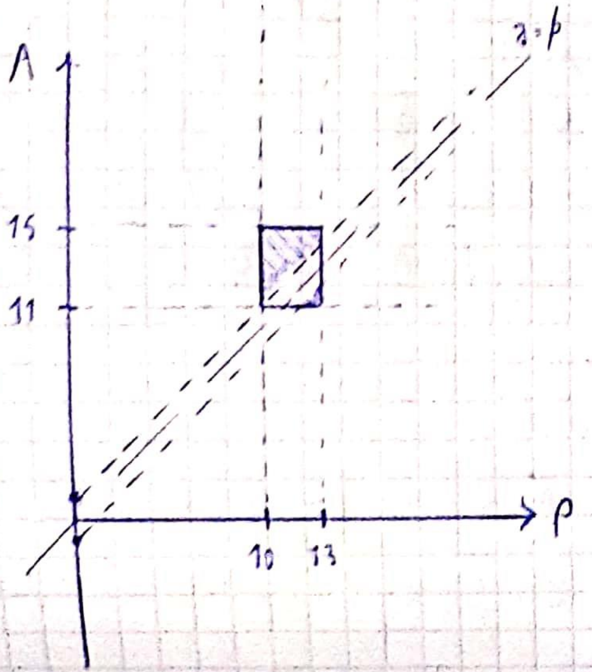
· Así, P("Humano" | "Reconoció 2 textos consecutivos") = ...

$$\dots = \frac{P(\text{"Humano"} \cap \text{"Reconoció 2 textos consecutivos"})}{P(\text{"Reconoció 2 textos consecutivos"})} = \dots$$

$$\cdot = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}49}{0{,}5 \cdot 0{,}49 + 0{,}5 \cdot 0{,}64} = \frac{49}{113} \approx 0{,}4336$$

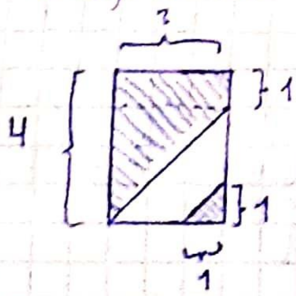
· La probabilidad pedida es $\underline{\underline{0{,}4336}}$

2] • Sean $P \sim \mathcal{U}(10,13)$ y $A \sim (11,15)$ las variables aleatorias que representan los tiempos de ambos. Grafiquemos los dominios de las funciones de densidad de P y A en un plano:



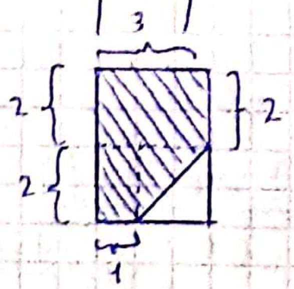
• Si sabemos que entre las llegadas de ambos pasó más de un segundo, o bien $a - p > 1 \iff a > 1 + p$, o bien $p - a > 1 \iff a < p - 1$. Estas son las dos regiones que sombreé en el rectángulo.

• Este es el área donde pasa más de un segundo entre ambos tiempos.

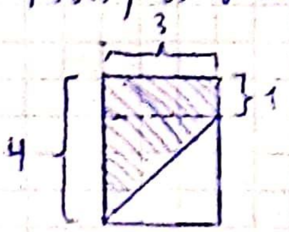


$\cdot A = 3 \cdot 1 + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = 8$

• La región donde gana Pablo está dada por $p < a \iff a > p$



• La intersección de ambas áreas (región donde pasa más de un segundo entre ambos y gana Pablo) es a su vez la siguiente.



$\cdot A = 1 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$

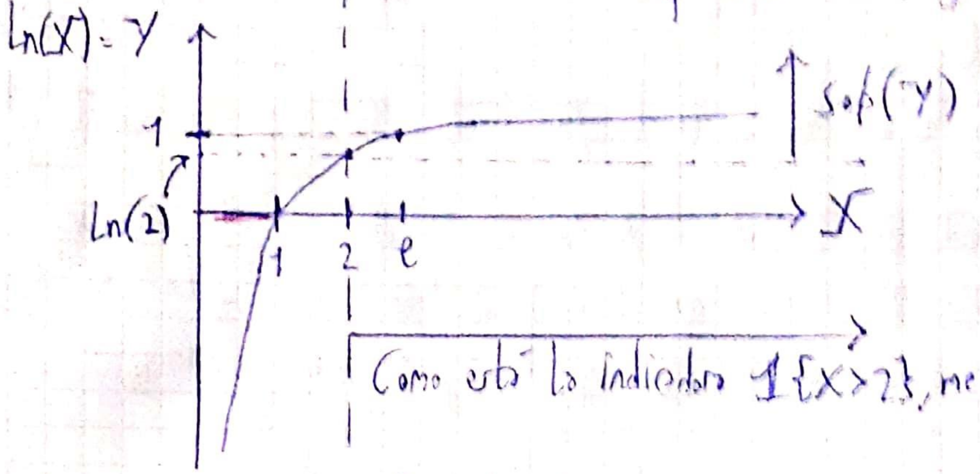
• Como las distribuciones son uniformes, no hace falta integrar para hallar las probabilidades que representan las regiones, sino que alcanza con dividir las áreas:

• P("Gana Pablo" | "Más de 1s entre ambos") = $\dfrac{\text{P("Gana Pablo" } \cap \text{ "Más de 1s entre ambos")}}{\text{P("Más de 1s entre ambos")}}$ = ...

(continúa)

$\ldots = \frac{\cancel{k}\cdot 15/2}{\cancel{k}\cdot 8} = \frac{15}{16} = \underline{\underline{0{,}9375}}$ (rta. al 2])

3] • De acuerdo al método de eventos equivalentes voy a graficar la transformación $Y(X)$



• Vemos entonces que el soporte de Y es el intervalo $(\ln(2); +\infty)$

• Planteemos la expresión de $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \ln(2) \\ P(Y \leq y) & \text{si } y > \ln(2). \end{cases}$

• Como $Y = \ln(X)$, $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \ln(2) \\ P(\ln(X) \leq y) & \text{si } y > \ln(2). \end{cases}$

• "Pasando" el logaritmo natural como exponencial:

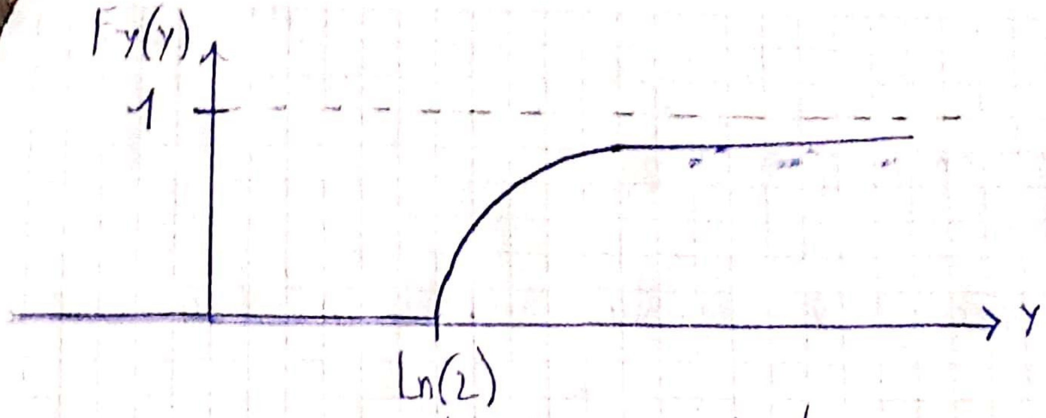
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \ln(2) \\ P(X \leq e^y) & \text{si } y > \ln(2) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \ln(2) \\ F_X(e^y) & \text{si } y > \ln(2), \end{cases}$$

con $F_X(e^y)$ siendo $1 - 2(e^y)^{-1} = 1 - 2e^{-y}$ (ya sabemos que $X > 2$).

• Entonces, la función de distribución de $Y = \ln(X)$ es:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \ln(2) \\ 1 - 2e^{-y} & \text{si } y > \ln(2) \end{cases}$$

• Grafiquémosla (pág siguiente).



· Vemos que es una func. de distribución correcta, pues tiende a 0 a izquierda $(-\infty)$ y a 1 a derecha $(+\infty)$.

4] · Comencemos hallando el estimador de máxima verosimilitud de θ para una muestra de tamaño n. Tenemos que $f_\theta(x) = 2^{-1}\theta^{-1/2}x^{-1/2}e^{-x^{1/2}\theta^{-1/2}}\,1\{x>0\}$, y la func. de verosimilitud es $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2^{-1}\theta^{-1/2}x_i^{-1/2}e^{-x_i^{1/2}\theta^{-1/2}} = \dots$

$\dots = 2^{-n}\theta^{-n/2}(X_1\cdot\ldots\cdot X_n)^{-1/2}e^{-\theta^{-1/2}(X_1^{1/2}+\dots+X_n^{1/2})}$. La idea es calcular el valor de θ que maximiza $L(\theta)$, pero resulta más sencillo aplicar logaritmo natural (pues es una función monótona creciente) y hallar el máximo de $\ln[L(\theta)]$ en su lugar. $\ln[L(\theta)] = -n\ln(2) - \frac{n}{2}\ln(\theta) - \frac{1}{2}\ln(X_1\cdot\ldots\cdot X_n) - \theta^{-1/2}(X_1^{1/2}+\dots+X_n^{1/2})$

· Luego, para hallar el máximo, derivamos respecto de θ e igualamos a 0:

$$\frac{d}{d\theta}\ln[L(\theta)] = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2}\theta^{-3/2}(X_1^{1/2}+\dots+X_n^{1/2}) = 0 \Leftarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \theta\cdot\theta^{-3/2}(X_1^{1/2}+\dots+X_n^{1/2}) = n \Leftrightarrow \theta^{-1/2}(X_1^{1/2}+\dots+X_n^{1/2}) = n \Leftarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\theta}}(X_1^{1/2}+\dots+X_n^{1/2}) = n \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{1/2}\right)^2$$

· Entonces, el EMV para θ es $\hat{\theta} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{1/2}\right)^2$

· Evaluemos $\hat{\theta}$ en la muestra de tamaño 3 dada por el ejercicio para obtener una estimación puntual de θ: $\hat{\theta} = \frac{1}{3^2}\left(\sqrt{100} + \sqrt{123.5} + \sqrt{210}\right)^2 \approx 140,85$

(continúa)

· Si T es la variable vida útil del lavarropas, valiéndome del principio de invarianza, una estimación de $P(T>150)$ es

$$P_{\theta=\hat{\theta}=140,85}(T>150)=\int_{150}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{140,85}}x^{-1/2}e^{-x^{1/2}\frac{1}{\sqrt{140,85}}}dx=\cdots$$

$$\cdots=\int_{150}^{\infty}0,04213\,x^{-1/2}e^{-x^{1/2}\cdot 0,08426}dx$$

· Si evaluamos esta integral en WolframAlpha obtenemos que una estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad pedida, dada nuestra muestra aleatoria de tamaño 3, es aproximadamente $e^{-\frac{4213}{10000}\sqrt{6}}\approx \underline{\underline{0,3563}}$

5] · Nos hallamos ante un pH aleatorio del cual desconocemos su media μ y varianza σ^2, pero sabemos que sigue una distribución $N(\mu,\sigma^2)$. Dada una muestra de tamaño 6 se obtiene una media muestral $\bar{X}=6,85$ y un desvío muestral $s=0,15$. El test de hipótesis a plantear en este caso (para determinar si se puede concluir con el nivel de significación dado que la media del pH, es decir μ, es distinta de 7) es uno bilateral, siendo:

· $H_0:\mu=7$ vs. $H_1:\mu\neq 7$

· Al tener una variable aleatoria normal, de la cual desconocemos ambos parámetros y queremos testear μ, podemos realizar la transformación (o estandarización)

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}=\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{s}\sim t_{n-1},$$ que sabemos que sigue una distribución t-Student de $n-1$ (en este caso 5) grados de libertad. La regla de decisión que propongo entonces es:

$$\delta(\underline{X})=\begin{cases}1 & \text{si } T<K_\alpha^- \text{ o } T>K_\alpha^+\\ 0 & \text{e.o.c.}\end{cases}$$ con $\delta(\underline{X})=1$ siendo "rechazo H_0".

Escaneado con CamScanner

- El estadístico T es el propuesto, con $\mu = 7$, es decir

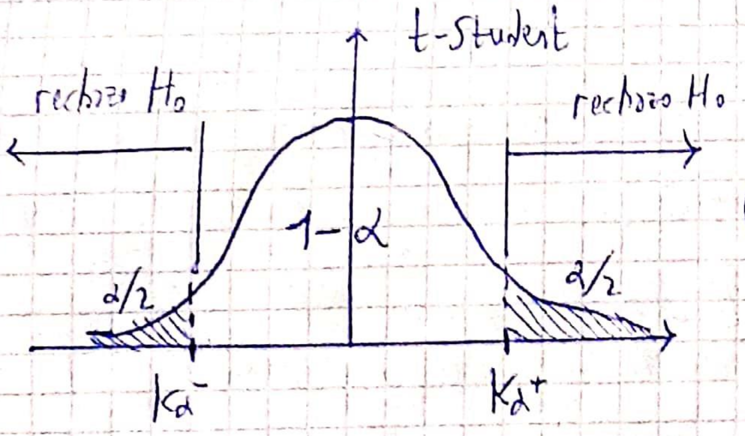
$$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{s} = \sqrt{6}\cdot\frac{6{,}85 - 7}{0.15} = -\sqrt{6} \approx -2{,}4495.$$

- A su vez, dadas las características del test de hipótesis, la zona de rechazo debe acumular un área (probabilidad) de $\alpha = 0{,}05$. Al ser la distribución t-Student simétrica respecto del 0, diremos que $K_\alpha^- = t_{5,\alpha/2} = t_{5,0{,}025}$ y $K_\alpha^+ = t_{5,1-\alpha/2} = t_{5,0{,}975}$ (es decir los cuantiles 0,025 y 0,975 de la t_5).
Estos son: $K_\alpha^- = -2{,}5706$ y $K_\alpha^+ = 2{,}5706$. (obtenidos con app Probability Distributions).
- Finalmente, la regla me queda

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-7}{s} < -2{,}5706 \text{ o } \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-7}{s} > 2{,}5706 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- Vemos que, evaluada en la muestra, la regla de decisión me devuelve 0, pues $-2{,}4495 > -2{,}5706$, por lo que no caigo en la zona de rechazo, y **no** se puede concluir que la media del pH es distinta de 7 con el nivel de significación utilizado.

(test bilateral)



(sombreadas la zona de rechazo)

1

8(OCHO)

PROBABILIDAD (industriales) - 81.16 CB004

Evaluación INTEGRADORA.
Duración: 4 horas. 1/7/2024

Curso: 12 Corrector/a:

Apel.

Padrón:

Correo.

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados.

M

1. A una clase de consultas asisten 3 estudiantes, cada uno con probabilidad 0.80 de ser de informática y 0.20 de ser de electrónica (independientes entre sí). Sabiendo que al menos uno es de electrónica, calcular la probabilidad de que al menos uno sea de informática.

B

2. Sea el vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{3}{28}(x^2y + x)\mathbf{1}\{0 < x < 2, 0 < y < 2\}$$

calcular $\text{var}(X - Y)$.

B

3. En una competencia, el tiempo en segundos de llegada a la meta de dos nadadores corresponde a variables X e Y, respectivamente, cuya distribución conjunta es uniforme sobre el rectángulo $(13, 17) \times (13, 18)$. Exactamente a los 20 segundos de iniciada la competencia se anuncia el resultado en pantalla. Sea W el tiempo que espera el ganador entre que llega a la meta y observa el resultado. Hallar y graficar la función de distribución de W.

B

4. Sean X, Y, Z variables aleatorias normales estándar independientes. Calcular $\mathbf{P}(3X + 2Y < 6Z - 7)$.

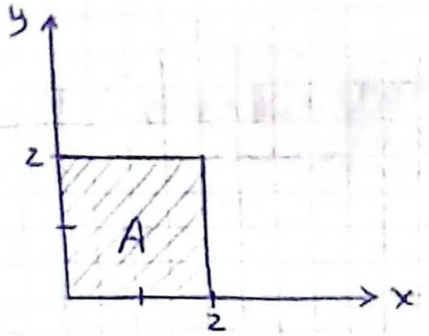
B

5. Se tiene una urna con 4 bolas rojas, 5 blancas, 10 azules y 8 verdes. Se extraen 4 bolas al azar con reposición. Sean V y R la cantidad de bolas verdes y rojas observadas, respectivamente. Escribir una función `estimar_P(Nrep)` que, en base a `Nrep` simulaciones, estime la probabilidad de que V sea menor o igual que R.

Ejercicio 2 Sea el vector aleatorio (X,Y) con función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{3}{28}(x^2y+x)\,\mathbb{1}\{\underbrace{0<x<2,\ 0<y<2}_{A}\}$$

Calcular $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,cov(X,Y)$



Sé que

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2$$

$$cov(X,Y) = E[XY] - E[X].E[Y]$$

Para calcular las esperanzas, primero calculo la d marginal de X e Y

$$\boxed{f_X(x)} = \int_0^2 \frac{3}{28}(x^2y+x)\,dy = \frac{3}{28}\int_0^2 (x^2y+x)\,dy = \frac{3}{28}\left(\frac{x^2y^2}{2}+xy\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{28}(2x^2+2x) = \frac{3}{14}(x^2+x)\,\mathbb{1}\{0<x<2\}$$

$$\boxed{f_Y(y)} = \int_0^2 \frac{3}{28}(x^2y+x)\,dx = \frac{3}{28}\int_0^2 (x^2y+x)\,dx = \frac{3}{28}\left(\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{28}\left(\frac{8}{3}y+2\right) = \frac{2}{7}y + \frac{3}{14}\,\mathbb{1}\{0<y<2\}$$

Ya estoy en condiciones de calcular $E[X]$, $E[X^2]$, $E[Y]$ y $E[Y^2]$

Sé que: $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x).\,f_X(x)\,dx$

$$E[X] = \int_0^2 x\,f_X(x)\,dx = \int_0^2 x.\frac{3}{14}(x^2+x)\,dx = \frac{3}{14}\int_0^2 x^3+x^2\,dx = 10/7$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^2 x^2.\frac{3}{14}(x^2+x)\,dx = \frac{3}{14}\int_0^2 x^4+x^3\,dx = 78/35$$

$$E[Y] = \int_0^2 y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^2 y \cdot \left(\frac{2}{7}y + \frac{3}{14}\right) dy = \int_0^2 \frac{2}{7}y^2 + \frac{3}{14}y \, dy = 25/21$$

$$E[Y^2] = \int_0^2 y^2 \cdot f_Y(y)\, dy = \int_0^2 y^2\left(\frac{2}{7}y + \frac{3}{14}\right) dy = \int_0^2 \frac{2}{7}y^3 + \frac{3}{14}y^2 = 12/7$$

$$E[XY] = \int_0^2\int_0^2 \cdot \frac{3}{28}(x^2y + x)\, dx\, dy = \frac{3}{28}\int_0^2\int_0^2 xy\,(x^2y+x)\, dx\, dy = 12/7$$

$V[X] = \frac{46}{245}$ $\quad V[Y] = \frac{131}{441}$ $\quad cov(X,Y) = 2/147$

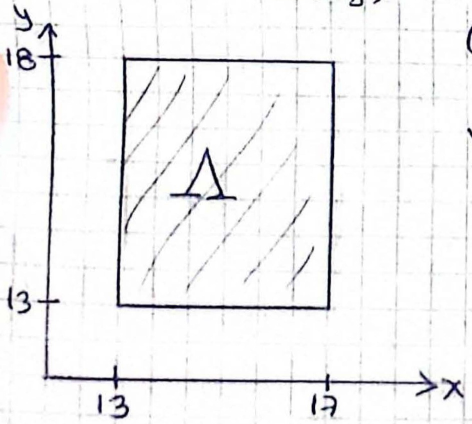
Finalmente: $Var[X-Y] = V[X] + V[Y] - 2\,cov(X,Y) = 0{,}458$

RTA

Ejercicio 3

X: "Tiempo (en seg.) de llegada del nadador 1" $\sim U(13,17)$

Y: "Tiempo de (en seg.) llegada del nadador 2" $\sim U(13,18)$



$(X,Y) \sim U(\Delta)$

W: "Tiempo (en seg) entre que el ganador llega a la meta y observa el resultado"

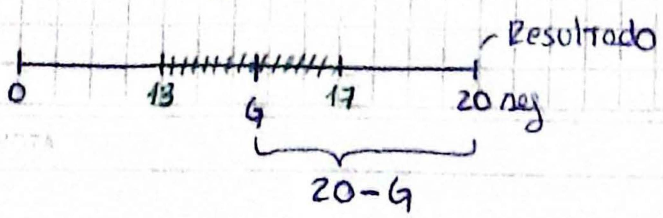
* Para definir el ganador, me interesa saber entre el jugador 1 y jugador 2 quién llega primero:

$\begin{cases} \text{El jugador 1 si } X<Y \\ \text{El jugador 2 si } Y<X \end{cases}$

Entonces para calcular el tiempo de quien llega primero, debo calcular el mínimo entre X e Y:

G: "Ganador" $\quad G = \min(X,Y) = \begin{cases} X & \text{si } X<Y \\ Y & \text{si } Y<X \end{cases}$

- El ganador como máximo, puede llegar hasta el seg. 17 $\quad G \in (13,17)$
- A los 20 seg. de iniciada la carrera, se anuncian los resultados



W sería el tiempo que espera el jugador desde que llegó a la meta y le dan el resultado, entonces:

$W = 20 - G$ con $G = \min(X, Y)$ $G \in (13, 17)$

$W \in (3, 7)$

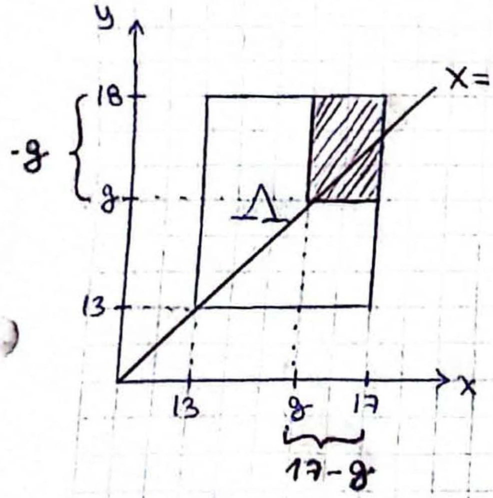
Calculo su función de distribución:

$$F_W(\omega) = P(W \leq \omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < 3 \\ (*) & \text{si } 3 \leq \omega < 7 \\ 1 & \text{si } \omega \geq 7 \end{cases}$$

(*) Si $3 \leq \omega < 7$: $P(W \leq \omega) = P(20 - G \leq \omega) = P(G \geq 20 - \omega)$

¿Cuál es la función de distribución de G?

$$F_G(g) = P(G \leq g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g < 13 \\ (**) & \text{si } 13 \leq g < 17 \\ 1 & \text{si } g \geq 17 \end{cases}$$



(**) si $13 \leq g < 17$:

$P(G \leq g) = 1 - P(G > g) =$

$= 1 - P(X > g, Y > g) =$

Por propiedad de mínimos $\rightarrow$ $= 1 - P(X > g) \cdot P(Y > g) =$

$X \sim U(13, 17)$

$P(X > g) = \dfrac{17 - g}{17 - 13} = \dfrac{17 - g}{4}$

$Y \sim U(13, 18)$

$P(Y > g) = \dfrac{18 - g}{18 - 13} = \dfrac{18 - g}{5}$

Entonces, reemplazando: $P(G \leq g) = 1 - \left(\dfrac{17 - g}{4}\right)\left(\dfrac{18 - g}{5}\right)$

$$\rightarrow F_G(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g < 13 \\ 1 - \left(\dfrac{17-g}{4}\right)\left(\dfrac{18-g}{5}\right) & \text{si } 13 \leq g < 17 \\ 1 & \text{si } g \geq 17 \end{cases}$$

Ahora sí, volviendo al cálculo ⊛

Si $\underline{3 \leq \omega < 7}$:

$$P(W \leq \omega) = P(20 - G \leq \omega) = P(G \geq 20 - \omega) =$$

$$= 1 - P(G < 20 - \omega) = 1 - F_G(20 - \omega) =$$

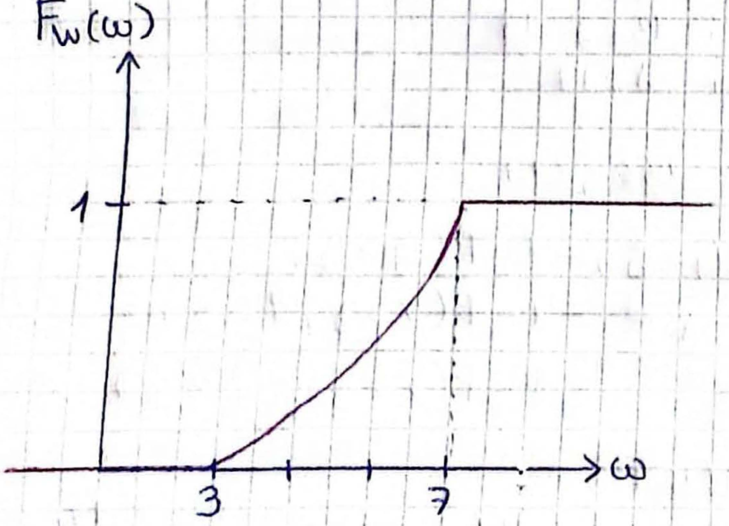
$$= 1 - \left[1 - \left(\frac{17 - (20 - \omega)}{4}\right)\left(\frac{18 - (20 - \omega)}{5}\right)\right] =$$

$$= \cancel{1} - \left[\cancel{1} - \left(\frac{-3 + \omega}{4}\right)\left(\frac{-2 + \omega}{5}\right)\right] = \boxed{\left(\frac{-3 + \omega}{4}\right)\left(\frac{-2 + \omega}{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{20}(\omega^2 - 5\omega + 6)$$

$$F_W(\omega) = P(W \leq \omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < 3 \\ \left(\frac{-3 + \omega}{4}\right)\left(\frac{-2 + \omega}{5}\right) & \text{si } 3 \leq \omega < 7 \\ 1 & \text{si } \omega \geq 7 \end{cases}$$

RTA



- $F_\omega \in [0, 1]$ ✓
- F_ω es monótona no decreciente ✓
- F_ω es continua a derecha ✓
- $\lim_{\omega \to -\infty} F_W(\omega) = 0$ y $\lim_{\omega \to +\infty} F_W(\omega) = 1$ ✓

...cicio 4

Sean $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, $Z \sim N(0,1)$ } independientes

Calcular $P(3X+2Y<6Z-7)=?$

Al ser V.A independientes e idénticamente distribuidos, se que se cumple que:

$$aX+bY+c \sim N(a\mu_x+b\mu_y+c,\ a^2\sigma_x+b^2\sigma_y^2)$$

Si aplico esta propiedad al caso:

$$\underbrace{3X+2Y-6Z+7}_{W \sim N(7,49)} \sim N(3.0+2.0-6.0+7,\ 3^2.1+2^2.1+(-6)^2.1)$$

$$\rightarrow P(3X+2Y<6Z-7) = P(3X+2Y-6Z+7<0)$$

$$= P(W<0) =$$

Estandarizo

$$= P\left(\frac{W-E[W]}{\sqrt{V[W]}} < \frac{0-7}{\sqrt{49}}\right) =$$

T converge a una dist. Normal estandar $T \sim N(0,1)$

$$= P(T<-1) = 0,15866 \quad \underline{\text{RTA}}$$

Verifico con la aplicación:

$P(W<0) = 0,15866$ ✓

$W \sim N(7,49)$

Ejercicio 5

4 R
5 B
10 A
8 V

TOT = 27

Se extraen 4 bolas al azar con reposición.

V: "Cant. de bolas verdes en las 4 extracciones" R_V:

R: "Cant. de bolas rojas en las 4 extracciones" $R_R = \{0,$

$P(V \leq R) = ?$

```
estimar_P <— Function (Nrep) {
    urna <— c(rep("R",4), rep("B",5), rep("A",10), rep("V",8))
    F <— 0    #Contador que cuenta las veces que se cumple la condición
    For (i in 1:Nrep) {
        extraccion <— Sample (urna, 4, replace = True)  #se extraen 4 de la urna con repo.
        Total_Verdes <— Sum (extraccion == "V")   #Total verdes extraidas
        Total_rojas <— Sum (extraccion == "R")  #Total rojas extraidas
        iF (Total_Verdes <= Total_rojas) {
            F <— F + 1    #Si se cumple la condición, se suma 1 al contador.
        }
    }
    Fr <— F/Nrep     #Frecuencia relativa del evento {V≤R}
                      en Nrep repeticiones.
    return (Fr)
}
```

Ejercicio 1

A clase de consulta asisten 3 estudiantes $\begin{cases} 0.80 & \text{de informática} \\ 0.20 & \text{de electrónica.} \end{cases}$ } indep

P(menos uno es de informática" | "Al menos uno es de electrónica") = ?
↳ 1 o más ↳ 1 o más

X_I: "Cant. de informáticos de los 3" $\sim Bin(3, 0.8)$

X_E: "Cant. de electrónicos de los 3" $\sim Bin(3, 0.2)$

$$P(X_I \geq 1 \mid X_E \geq 1) = \frac{P(X_I \geq 1 \cap X_E \geq 1)}{P(X_E \geq 1)} =$$

• Si son 3 estudiantes, ¿cuántas posibilidades hay?

$X_I = 1$ y $X_E = 2$: $P(X_I = 1 \cap X_E = 2) \overset{\text{indep}}{=} P(X_I = 1) \cdot P(X_E = 2) = 0{,}096 \cdot 0{,}096 = 9{,}216 \times 10^{-3}$

$X_I = 2$ y $X_E = 1$: $P(X_I = 2 \cap X_E = 1) \overset{\text{indep}}{=} P(X_I = 2) \cdot P(X_E = 1) = 0{,}384 \cdot 0{,}384 = 0{,}147456$

Hay 2 casos posibles:

$$P(X_I \geq 1 \mid X_E \geq 1) = \frac{P(X_I = 1 \cap X_E = 2) + P(X_I = 2 \cap X_E = 1)}{1 - P(X_E < 1)}$$

$$= \frac{9{,}216 \times 10^{-3} + 0{,}147456}{1 - 0{,}512} = 0{,}321$$ **RTA**

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación INTEGRADORA, duración: 4 horas. 1-08-2024

Apellido y Nombres: Padrón:

Correo: Curso:

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

---

1. Se colocan en una bolsa 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se eligen al azar tres bolas sin reposición. Sabiendo que la suma de los números observados en las tres bolas elegidas resultó par, ¿cuál es la probabilidad de que los tres números observados sean pares?

---

2. Pablo y Ana corren una carrera de 100mts. El tiempo en segundos que demora Pablo en correr 100mts es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[10, 13]$. Independientemente, el tiempo en segundos que demora Ana en correr la misma distancia es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $[11, 15]$. Sabiendo que entre las llegadas de ambos pasó menos de un segundo, calcular la probabilidad de que haya ganado Ana.

---

3. Lucas y Monk pescan demorando en obtener una presa, de modo independiente, tiempos aleatorios de distribución exponencial de medias 15 y 8 minutos, respectivamente. Ambos continúan sin interrupciones la pesca luego de obtener cada presa. Hallar la probabilidad de que Lucas obtenga su primera presa antes que Monk logre pescar la segunda.

---

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\theta^3 x^2 e^{-\theta x}\mathbf{1}\{x > 0\} \qquad \theta > 0.$$

Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ para una muestra de tamaño n y calcular su sesgo.

---

5. Se toman 6 muestras de una sustancia contaminante y se les mide el pH, obteniéndose una media muestral $\overline{x}$ de 6.7 y un desvío muestral s de 0.1. Suponiendo que la muestra fue tomada de una población normal, ¿se puede concluir que la media del pH es menor que 7.0 a nivel de significación 0.05?

7

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación INTEGRADORA, duración: 4 horas. 1-08-2024

Apellido y Nombres: [redacted] Padrón: [redacted]

Correo: [redacted] Curso: 27

El exa[redacted]n se aprueba con [redacted] ejercicios correctamente resueltos y justificados, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

B 1. Se colocan en una bolsa 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se eligen al azar tres bolas sin reposición. Sabiendo que la suma de los números observados en las tres bolas elegidas resultó par, ¿cuál es la probabilidad de que los tres números observados sean pares?

2. Pablo y Ana corren una carrera de 100mts. El tiempo en segundos que demora Pablo en correr 100mts es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[10, 13]$. Independientemente, el tiempo en segundos que demora Ana en correr la misma distancia es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $[11, 15]$. Sabiendo que entre las llegadas de ambos pasó menos de un segundo, calcular la probabilidad de que haya ganado Ana.

B 3. Lucas y Monk pescan demorando en obtener una presa, de modo independiente, tiempos aleatorios de distribución exponencial de medias 15 y 8 minutos, respectivamente. Ambos continúan sin interrupciones la pesca luego de obtener cada presa. Hallar la probabilidad de que Lucas obtenga su primera presa antes que Monk logre pescar la segunda.

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

R

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\theta^3 x^2 e^{-\theta x} \mathbf{1}\{x > 0\} \qquad \theta > 0.$$

Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ para una muestra de tamaño n y calcular su sesgo.

5. Se toman 6 muestras de una sustancia contaminante y se les mide el pH, obteniéndose una media muestral $\bar{x}$ de 6.7 y un desvío muestral s de 0.1. Suponiendo que la muestra fue tomada de una población normal, ¿se puede concluir que la media del pH es menor que 7.0 a nivel de significación 0.05?

4) $f_\theta(x) = \frac{1}{2}\theta^3 x^2 e^{-\theta x}\{x>0\}, \theta>0$

Busco el EMV ($\hat{\theta}$):

$L(\theta) = \prod_1^n \frac{1}{2}\theta^3 x_i^2 e^{-\theta x_i} \mathbb{1}\{x_i>0\}$

$= \theta^{3n} . e^{-\theta\sum_1^n x_i} \prod_1^n \frac{x_i^2}{2} \mathbb{1}\{x_i>0\}$ ← cte respecto de θ!

Como mi fun: - Sop no dep de θ
- cjto abierto
- f deriv respec de θ

$\Rightarrow$ Busco el max por deriv:

$\log(L(\theta)) = \log(\theta).3n + \log(e).-\theta\sum_1^n x_i$

$\frac{d}{d\theta}(L(\theta)) = \frac{3n}{\theta} + (-\sum_1^n x_i) \to \theta = \frac{3n}{\sum_1^n x_i}$

me fijo si es max:

$\frac{d}{d\lambda^2}(L(\theta)) = -\frac{3n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow$ ES max!

$$\boxed{\hat{\theta}_{mv} = \frac{3n}{\sum_1^n X_i}}$$

$\frac{d}{d\lambda^2}(L(\theta)) = -\frac{3n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow$

$\boxed{\hat{\theta}_{mv} = \frac{3n}{\sum_1^n X_i}}$

②

[redacted]

5) Datos

$n=6 \qquad \alpha = 0.05$

$\bar{x} = 6.7$

$S = 0.1$

Como me dice que la muestra fue tomada de una población normal: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

→ ambas desconocidas

me piden: $\mu < 7$!

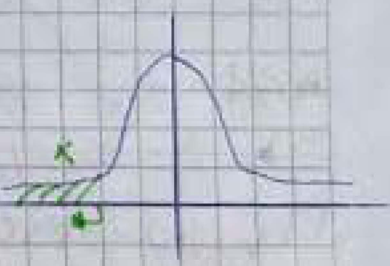
→ $H_0: \mu \geq 7$ vs $H_1: \mu < 7$ (quiero rechazar H_0)

Propongo: $T = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$

Planteo entonces: $\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < k_\alpha \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{T < k_\alpha\}$

$= \mathbb{1}\left\{\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{S} < t_{n-1,\alpha}\right\}$



Remplazando en mis datos:

$t_{5,0.05} \overset{\text{APP}}{=} -2.01505, \quad \bar{x} = 6.7, \quad S = 0.1$

$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{\frac{\sqrt{6}\,(6.7-7)}{0.1} < -2.01505\right\}$

$= \mathbb{1}\{-7.3484 < -2.01505\}$

$\delta(\underline{x}) = 1 \Rightarrow$ Hay evidencia suf para rechazar

H_0!, por lo que hay evidencia suf para decir

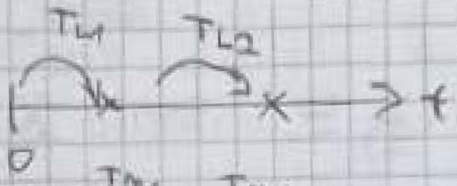
que el pH es menor que 7.

③ L: tiempo de demora de Lucas en obtener impresas

$E(X) = 1/\lambda \rightarrow 15 = 1/\lambda \rightarrow \lambda = 1/15$

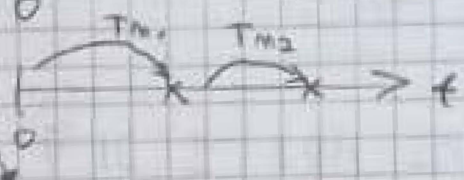
3

$M_L : PP(\lambda_L = 1/15)$



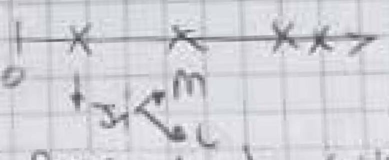
→ tiempo en mins

$M_M : PP(\lambda_M = 1/8)$



Pongo un 0 arbitrario para indicar cuando empiezan a pescar.

$M_{L+M} = M_L + M_M : PP(\lambda = 23/120)$



T_{Li}: tiempo en mins hasta la pesca i de Lucas. $\overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(1/15)$

T_{Mi}: " " " " " " " " Mone, $\overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(1/8)$

$J_i = M$: la pesca i es de Mone

$J_i = L$: " " i " " Lucas

A: La 1º pesca de ~~Mone~~ Lucas ocurre antes que la 2º de ~~Lucas~~ Mone

$P(A) = P(\{J_1 = L\} \cup \{J_1 = M, J_2 = L\})$

$\overset{\text{disjuntos}}{=} P(\{J_1 = L\}) + P(\{J_1 = M, J_2 = L\})$

$\overset{\text{indep}}{=} P(\{J_1 = L\}) + P(\{J_1 = M\}) \cdot P(\{J_2 = L\})$

Por 4.14: $P(J_i = M) = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_L} = \frac{1/8}{23/120} = \frac{15}{23}$

$P(J_i = L) = \frac{\lambda_L}{\lambda_m + \lambda_L} = \frac{1/15}{23/120} = 8/23$

$P(A) = \frac{8}{23} + \frac{15}{23} \cdot \frac{8}{23} \hat{=} 0{,}57466$

1) 9 Bolas nums del 1 al 9
E.A: Elijo al azar tres bolas sin repo
La suma de los 3 nums fue par, cual es la proba de que los 3 nums observados sean pares

$\#CP = \binom{9}{3} = 84$ → total de comb posible

Nums pares: 2, 4, 6, 8
Nums imp: 1, 3, 5, 7, 9

⇒ Quiero que mis 3 nums elegidos sean pares: $\binom{4}{3} = 4$ (4 pares, tomo 3)

Se que la suma es par, entonces 2 nums pueden ser impares y 1 par:

$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = 40$ → mi total de comb donde la suma es par es 44,

~~Defino A = "Los 3 numeros son pares"~~

4

Defino: $\begin{cases} A = \text{"Las 3 Bolas extraidas son pares"} \\ B = \text{"La suma de las 3 es Par"} \end{cases}$

$P(A/B) = ?$

$P(B) = \frac{44}{84} = 11/21$

$P(A \cap B) = \frac{4}{84} = 1/21$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/\cancel{21}}{11/\cancel{21}} = 1/11$

$\boxed{P(A/B) = 1/11}$

PROBABILIDAD, PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA

Evaluación parcial, primera fecha. -
Duración: 4 horas. 1/6/2024

Curso:	Corrector/a:
Apellido y Nombres:	
Padrón:	
Correo:	

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente desarrollados, justificados y resueltos.

1. Un juego consiste en extraer al azar 3 bolas de una caja que contiene 4 bolas rojas, 3 bolas blancas y 5 bolas negras. El juego se gana únicamente si las 3 bolas extraídas son del mismo color. Si las bolas extraídas resultan todas de distinto color, se reponen a la caja y se hace un único intento adicional extrayendo al azar 3 bolas de la caja nuevamente. Calcular la probabilidad de ganar el juego.

2. Sea el vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{3}{5}(x^2 y + x)\mathbf{1}\{0 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

calcular $\mathbf{cov}(2X, Y)$.

3. Sea el vector aleatorio (X, Y) con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{y}{3(x+1)^2} e^{-\frac{y}{x+1}} \mathbf{1}\{0 < x < 3, y > 0\}$$

1. Calcular $\mathbf{E}[Y|X = 1]$.

2. Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{E}[Y|X] < 6)$.

4. Los pasajeros de un vuelo en clase ejecutiva pueden optar por el menú de carne, por el de pasta, o por no comer. La probabilidad de que un pasajero opte por carne es 0.4 y de que elija pasta es 0.5. Si en un vuelo con 16 pasajeros de clase ejecutiva hubo exactamente 7 que eligieron el menú de carne, calcular la probabilidad de que 8 bandejas de pasta alcancen para los pedidos de los restantes pasajeros.

5. El tiempo, en minutos, para producir un artículo es una variable aleatoria normal. La probabilidad de que un artículo sea producido en menos de 900 minutos es 0.15866, y la de tardar mas de 1200 es 0.02275. Calcular, entre los artículos que se producen en más de 1000 minutos, qué proporción se produce en menos de 1150 minutos.

Parcial 10 1/6/24

5) T = "Tiempo para producir un artículo"

$T \sim N(\mu, \theta)$ ← distribución normal, por enunciado

$P(T < 900) = 0{,}15866$
$P(T > 1200) = 0{,}02275$ } datos

$Z = -1$
$Z = 2$ } tabla de distribución normal

$\dfrac{900-\mu}{\theta} = -1$

$\dfrac{1200-\mu}{\theta} = 2$

$\mu = 900 + \theta$
$\mu = 1200 - 2\theta$

$\boxed{\mu = 1000}$; $\boxed{\theta = 100}$

- $P(T < 1150 \mid T > 1000)$ → usamos $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$A = T < 1150$

$B = T > 1000$

- Entonces

$P(T < 1150 \mid T > 1000) = \dfrac{P(1000 < T < 1150)}{P(T > 1000)}$

$z_1 = \dfrac{1000 - 1000}{100} \boxed{= 0}$

$z_2 = \dfrac{1150 - 1000}{100} \boxed{= 1{,}5}$

$P(Z < 1{,}5) \boxed{= 0{,}9332}$
$P(Z < 0) \boxed{= 0{,}5}$

Tabla de distr. normal estándar

$P(1000 < T < 1150) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < 0) = 0{,}9332 - 0{,}5 \boxed{= 0{,}4332}$

$P(T > 1000) = 1 - P(T < 1000) = 1 - 0{,}5 \boxed{= 0{,}5}$

$P(T < 1150 \mid T > 1000) = \dfrac{P(1000 < T < 1150)}{P(T > 1000)} = \dfrac{0{,}4332}{0{,}5} \boxed{= 0{,}8664}$

Parcial 10 1/6/24

3) $$f_{X,Y}(x,y) = \underbrace{\frac{1}{3}\mathbb{1}\{0<x<3\}}_{=f_X(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 y\, e^{-\frac{y}{x+1}}\, \mathbb{1}\{y>0\}}_{f_{Y|X=x}(y)}$$

Por lo tanto:

$$X \sim \mathcal{U}(0,3) \ ; \ Y|X=x \sim \Gamma\left(2, \frac{1}{x+1}\right)$$

1) $Y|X=x$ es una variable gamma

$$E[Y|X=x] = \frac{2}{\frac{1}{x+1}} = 2(x+1) \quad \text{para } x\in(0,3)$$

resulta $\boxed{E[Y|X=1]=4}$

2) de $E[Y|X=x]=2(x+1)$ resulta la esperanza condicional $E[Y|X]=2(X+1)$

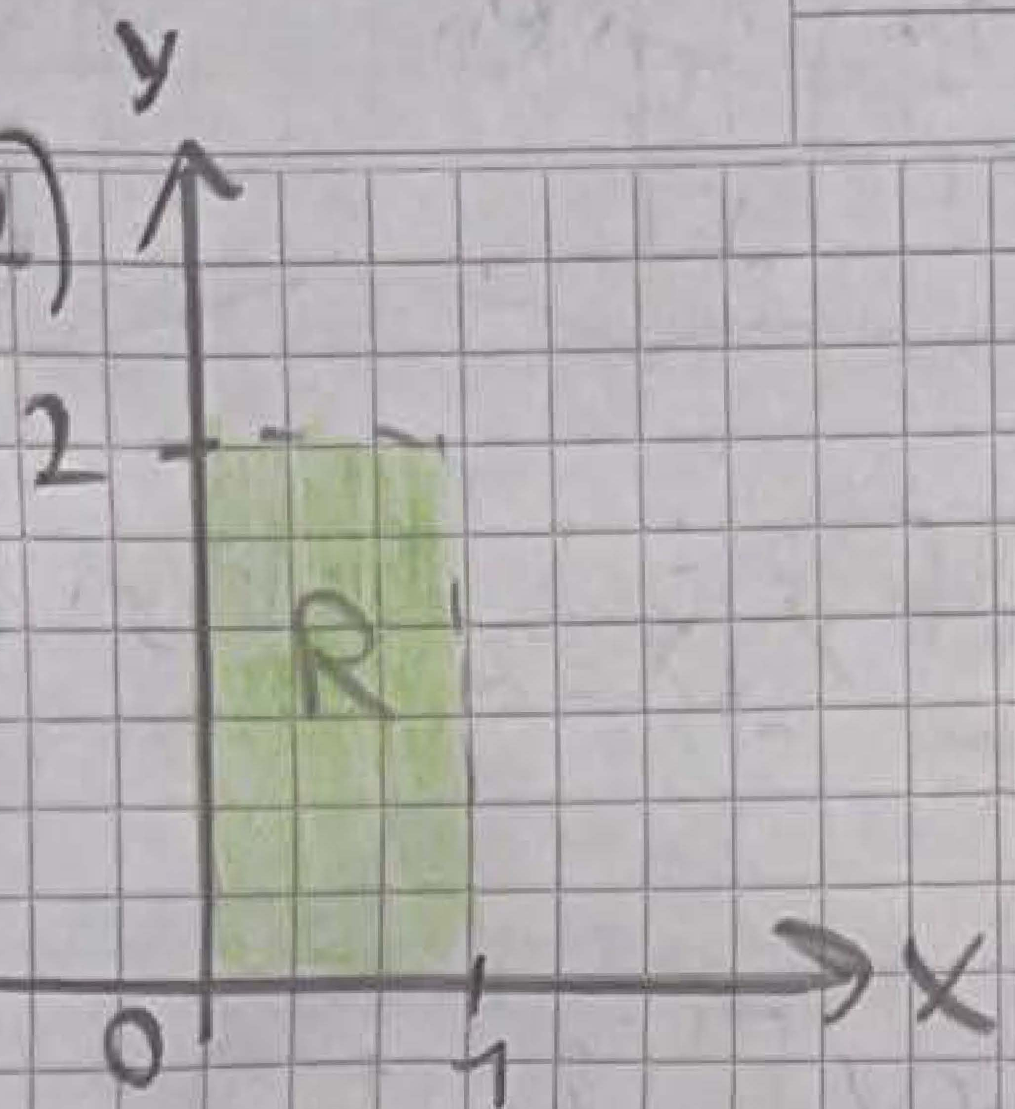
Entonces: $P(E[Y|X]<6) = P(2(X+1)<6)$ $\boxed{=P(X<2)}$

pero como $X\sim \mathcal{U}(0,3)$:

$$P(X<2)=\frac{2-0}{3-0} \boxed{=\frac{2}{3}}$$

Prad 10 / 1 / 6/24

2)



$$COV(2X,Y) = 2\,COV(X,Y)$$
$$= 2\left[E[XY] - E[X]E[Y]\right]$$

$$E[XY] = \iint_R xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1\int_0^2 \frac{3}{5}\left(x^3y^2 + x^2y\right)dy\,dx$$
$$\boxed{= 4/5}$$

$$E[X] = \iint_R x\, f_{XY}(x,y) = \int_0^1\int_0^2 \frac{3}{5}\left(x^3y + x^2\right)dy\,dx$$
$$\boxed{= 7/10}$$

$$E[Y] = \iint_R y\, f_{XY}(x,y) = \int_0^1\int_0^2 \frac{3}{5}\left(x^2y^2 + xy\right)dy\,dx$$
$$\boxed{= 17/15}$$

$$COV(2X,Y) = 2\left[\frac{4}{5} - \left(\frac{7}{10}\cdot\frac{17}{15}\right)\right]$$
$$\boxed{= 1/75}$$

Parcial 10 1/6/24

1) CAJA: 4R, 3B, 5N — 3 al azar

A: se obtienen 3 rojas → $A_1(3R)$
B: " " 3 blancas → $B_1(3B)$
C: " " 3 negras → $C_1(3N)$
D: " " 3 distinto color
E: " " otros casos

- como es al azar suponemos la misma

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \boxed{\dfrac{4}{220}}$ $\quad \mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \boxed{\dfrac{1}{220}}$

$\mathbb{P}(C) = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \boxed{\dfrac{10}{220}}$

$\mathbb{P}(E) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)) = \boxed{\dfrac{145}{220}}$

$\mathbb{P}(D) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \boxed{\dfrac{60}{220}}$

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C)$

- la probabilidad de ganar es:

$\mathbb{P}((A \cup B \cup C) \cup (D \cap (A_1 \cup B_1 \cup C_1)))$

$= \mathbb{P}(A \cup B \cup C) + \mathbb{P}(D \cap (A_1 \cup B_1 \cup C_1))$

disjuntos.

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D \cap A_1) + \mathbb{P}(D \cap B_1) + \mathbb{P}(D \cap C_1)$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A_1|D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(B_1|D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C_1|D) \cdot \mathbb{P}(D)$

$= \dfrac{4}{220} + \dfrac{1}{220} + \dfrac{10}{220} + \dfrac{4}{220} \cdot \dfrac{60}{220} + \dfrac{1}{220} \cdot \dfrac{60}{220} + \dfrac{10}{220} \cdot \dfrac{60}{220}$

$= 21/242 \quad \boxed{= 0{,}087}$

Prod 10 1/6/24

4) C = "el pasajero elige menú de carne"
F = " " de pasta"
N = " " no comer"

$P(C) = 0{,}4$ $\quad$ $P(F) = 0{,}5$ $\quad$ $P(N) = 1-(P(C)+P(F))$

$= 1-(0{,}4+0{,}5)$

$\boxed{= 0{,}1}$

16 ← pasajeros

7 ← ya eligieron carne

no pueden haber más con carne → por ende solo pueden elegir entre pasta y no comer

quedan 9

Binomial

$X_F \mid X_C = 7 \sim B(16-7, p_F^*)$

$$p_F^* = \mathbb{P}(F \mid \underbrace{C^c}_{F \cup N}) = \frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(N)} = \frac{0{,}5}{0{,}5+0{,}1} \boxed{= \frac{5}{6}}$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_F \leq 8 \mid X_C = 7}_{Y}) = \mathbb{P}(Y \leq 8) = 1 - \mathbb{P}(Y = 9)$$

$$= 1 - \binom{9}{9}\left(\frac{5}{6}\right)^9\left(\frac{1}{6}\right)^0$$

$$\boxed{= 0{,}806}$$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA - 81.16 CB004 61.09 81.04 CB003 61.06 81.03

Evaluación PARCIAL. 11-07-2024

Duración: 4 horas.

Curso: Corrector/a:

Apellido y Nombres:

Padrón:

Correo:

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados.

1. Julieta lleva en su mochila un dado de cuatro caras y otro de seis caras. Cada día al salir de casa, elige un dado al azar y lo tira. Si resulta un número menor a 4 elige viajar en subte, si resulta mayor toma el colectivo, y si sale justo 4 viaja en el mismo medio que el día anterior. Sabiendo que viajó en subte los últimos tres días, calcular la probabilidad de que en los siguientes dos días le toque viajar en colectivo.

2. Una computadora ejecuta un programa en dos etapas consecutivas. La primera demora un tiempo aleatorio X y la segunda un tiempo aleatorio Y, tal que (X, Y) (en minutos) tiene distribución uniforme sobre la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 9, 0 < y < x\}$. Sabiendo que la primera etapa duró más de 3 minutos, calcular la probabilidad de que el programa completo demore entre 6 y 12 minutos.

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{y}{4(x+1)^2} e^{-\frac{y}{x+1}} \mathbf{1}\{1 < x < 5, y > 0\}$$

Calcular $\mathbf{E}[Y|X = 3]$.

4. La cantidad de colectivos que pasan en una hora por una parada del metrobus es una variable aleatoria con distribución Poisson de media 10. La probabilidad de que un colectivo sea de la línea 152 es de 0.4, independiente de la cantidad de colectivos que pasan. Calcular la varianza de la cantidad de colectivos de la línea 152 que pasan en una hora.

5. Un dado equilibrado tiene en sus caras los números 1, 2, 3, 3, 4, 4. Se lo arroja 50 veces, calcular aproximadamente la probabilidad de que la suma de todos los resultados observados supere 144.

8 ocho

PROBABILIDAD - 81.16 CB004

Evaluación INTEGRADORA.
Duración: 4 horas.

11-07-2024

Curso: [redacted] Corrector/a:

Apellido y Nombres: [redacted]

Padrón: [redacted]

Correo: [redacted]

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados.

1. Julieta lleva en su mochila un dado de cuatro caras y otro de seis caras. Cada día al salir de casa, elige un dado al azar y lo tira. Si resulta un número menor a 4 elige viajar en subte, si resulta mayor toma el colectivo, y si sale justo 4 viaja en el mismo medio que el día anterior. Sabiendo que viajó en subte los últimos tres días, calcular la probabilidad de que en los siguientes dos días le toque viajar en colectivo.

2. Una computadora ejecuta un programa en dos etapas consecutivas. La primera demora un tiempo aleatorio X y la segunda un tiempo aleatorio Y, tal que (X,Y) (en minutos) tiene distribución uniforme sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 9, 0 < y < x\}$. Sabiendo que la primera etapa duró más de 3 minutos, calcular la probabilidad de que el programa completo demore entre 6 y 12 minutos.

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

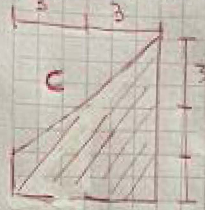
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{y}{4(x+1)^2} e^{-\frac{y}{x+1}} \mathbf{1}\{1 < x < 5, y > 0\}$$

Calcular $\mathbf{E}[Y]$.

4. Un dado equilibrado tiene en sus caras los números 1, 2, 3, 3, 4, 4. Se lo arroja 50 veces, calcular aproximadamente la probabilidad de que la suma de todos los resultados observados supere 144.

5. Se tiene una urna con 4 bolas rojas, 5 blancas, 10 azules y 8 verdes. Se extraen 4 bolas al azar sin reposición. Sean V y R la cantidad de bolas verdes y rojas observadas, respectivamente. Escribir una función `estimar_P(Nrep)` que, en base a `Nrep` simulaciones, estime la probabilidad de que V sea igual que R.

$$P(X>3) = \iint_C \underbrace{f_{XY}(x,y)}_{\frac{2}{81} = \frac{1}{\text{area}(D)}}\,dx\,dy = \frac{2}{81}\underbrace{\iint_C dx\,dy}_{\text{area}(C)} = \frac{2}{81}\cdot 36 = \frac{8}{9}$$

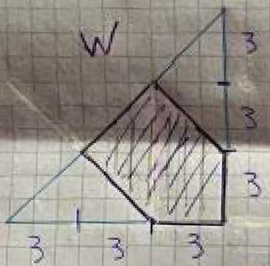


$$P(X>6) = \frac{8}{9}$$

$$\text{Area}(C) = 3\cdot 6 + \frac{6\cdot 6}{2} = 18 + \frac{36}{2} = 36$$

$$P(6 \leq X+Y \leq 12,\ X>3) = \frac{\text{area}(W)}{\text{area}(D)} = \frac{45/2}{81/2} = 5/9$$

$$P(6 \leq X+Y \leq 12, X>3) = \frac{5}{9}$$



$$\text{Area}(W) = \frac{9^2}{2} - \overbrace{2\cdot\frac{6\cdot 3}{2}}^{\Delta+\Delta} = \frac{81}{2} - 18 = \frac{45}{2}$$

luego $P(6 \leq X+Y \leq 12 \mid X>3) = \dfrac{5/9}{8/9} = \dfrac{5}{8}$

$$\boxed{P(6 \leq X+Y \leq 12 \mid X>3) = \frac{5}{8} = 0{,}625}$$

[redacted] 2

3) (X,Y) vec. aleatorio con:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{y}{4(x+1)^2} e^{-y/x+1} \; \mathbb{1}\{1<x<5,\ y>0\}$$

Calcular $E[Y]$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy$$

Se que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx =$$

$$= \int_{1}^{5} \frac{y}{4(x+1)^2} \cdot e^{-y/x+1}\, dx \overset{\overset{\text{WOLFRAM}}{?}}{=} \frac{1}{4}\left(e^{-y/6} - e^{-y/2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}\left(e^{-y/6} - e^{-y/2}\right)$$

luego

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} y \left(e^{-y/6} - e^{-y/2}\right) dy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4} y \left(e^{-y/6} - e^{-y/2}\right) dy \overset{\overset{\text{WOLFRAM}}{?}}{=} 8$$

$$\boxed{E[Y] = 8}$$

Uso TCL:

Sea $X_T = \sum_{i=1} X_i$ ↝ variables indep. e idénticamente distribuidas

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

tiende en distribución

cuando $n \to \infty$

siendo $\mu = E[X_i]$
$\sigma^2 = Var[X_i]$

entonces:

$X_T = \sum_{i=1}^{50} X_i$ $\quad P(X_T > 144) = 1 - P(X_T \leq 144)$

↳ suma de los valores obtenidos en c/tiro

$$P(X_T \leq 144) = P\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\cdot 17/6}{\sqrt{50\cdot 41/36}}}_{Z} \leq \underbrace{\frac{144 - 50\cdot\frac{17}{6}}{\sqrt{50\cdot 41/36}}}_{\approx 0{,}3092}\right) \approx$$

$E[X_i] = 17/6$
$Var[X_i] = 41/36$

$$P(X_T \leq 144) = (Z \leq 0{,}3092) \overset{\text{TCL}}{\approx} \Phi(0{,}3092)$$

$$P(X_T > 144) \approx 1 - \underbrace{\Phi(0{,}3092)}_{\substack{\text{usando } 0{,}31 \text{ en tabla} \\ = 0{,}6217}}$$

$$\boxed{P(X_T > 144) \approx 0{,}3783}$$

[redacted]

5)

4R 5B
10A 8V

4 extracciones al azar sin reposición

```
estimar_P<-function(Nrep){
    urna<-c(rep(4,"R"), rep(5,"B"), rep(10,"A"), rep(8,"V"))
    exitos<-0
    for(i in 1:Nrep){
        muestra<-sample(urna, 4, replace=FALSE)
        CANT_ROJAS<-sum(muestra=="R")
        CANT_VERDES<-sum(muestra=="V")
        if(CANT_ROJAS==CANT_VERDES){
            exitos<-exitos+1
        }
    }
    PROB_VIGUALR<-exitos/Nrep #frecuencia relativa
    return(PROB_VIGUALR)
}
```

Cuento cantidad de rojas y verdes en la extracción hecha.

Por ley de los grandes números puedo aprox. la misma prob. usando frec. rel.

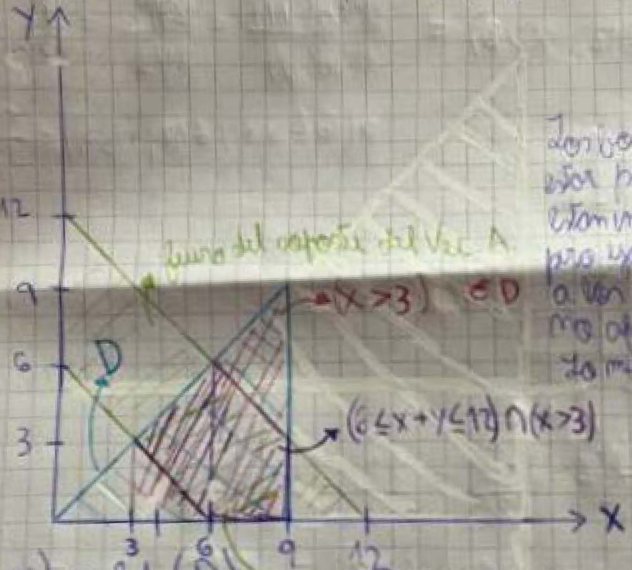
[redacted] 1

2) X: "Tiempo que dura la 1era etapa"

Y: " " " " " 2da "

(X,Y) tiene distribución uniforme sobre:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 9,\ 0 < y < x\}$



Los bordes de D deberían estar punteados ya que no están incluidos en el soporte pero ya que (X,Y) es continua a los efectos de calcular prob. no afecta en el resultado. Lo mismo en x=3

$\text{Área}(D) = \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{81}{2}$

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(D)$

Luego se que como el vec. aleatorio (X,Y) es uniforme, este tiene $f_{X,Y}(x,y) = k = \frac{1}{\text{área}(D)} = \frac{1}{40,5}$

Ej. pide: lo que dura programa completo

$$P(6 \leq \underbrace{X+Y}_{} \leq 12 \mid X > 3) = \frac{P(6 \leq X+Y \leq 12,\ X > 3)}{P(X > 3)}$$

↓

PROB. CONDICIONAL

4) Dado equilibrado se lo arrojo 50 veces.

Caras: 1, 2, 3, 3, 4, 4

X: "Numero que sale en c/tiro"

$x \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$P(X=1) = 1/6 \qquad P(X=3) = 2/6$$
$$P(X=2) = 1/6 \qquad P(X=4) = 2/6$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } x = 1 \\ 1/6 & \text{si } x = 2 \\ 2/6 & \text{si } x = 3 \\ 2/6 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i)$$

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6}$$

$$E[X] = \frac{17}{6} \approx 2{,}83$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 \cdot p_X(x)$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{2}{6} + 4^2 \frac{2}{6}$$

$$E[X^2] = 55/6 \approx 9{,}167$$

$$Var[X] = \frac{55}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{41}{36} \approx 1{,}139$$

6 (SEIS)

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación INTEGRADORA.
Duración: 4 horas.

1/7/2024

Curso: 25 - COSATTO - SOSA Corrector/a:

Apellido y Nombres: JUAN CARDOSO LANDABURU

Padrón: 110845

Correo: JCARDOSO@FI.UBA.AR

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

B

1. Julieta lleva en su mochila un dado de cuatro caras y otro de seis caras. Cada día al salir de casa, elige un dado al azar y lo tira. Si resulta un número menor a 4 elige viajar en subte, si resulta mayor toma el colectivo, y si sale justo 4 viaja en el mismo medio que el día anterior. Sabiendo que viajó en subte los últimos tres días, calcular la probabilidad de que en los siguientes dos días le toque viajar en colectivo.

Ø

2. Una computadora ejecuta un programa en dos etapas consecutivas. La primera demora un tiempo aleatorio X y la segunda un tiempo aleatorio Y, tal que (X, Y) (en minutos) tiene distribución uniforme sobre la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 9, 0 < y < x\}$. Sabiendo que la primera etapa duró más de 3 minutos, c[illegible] la probabilidad de que el programa completo demore entre 6 y 12 minutos.

B

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{y}{4(x+1)^2} e^{-\frac{y}{x+1}} \mathbb{1}\{1 < x < 5, y > 0\}$$

Calcular $\mathbf{E}[Y]$.

B

4. La duración de un componente electrónico, en años, es una variable aleatoria con función de densi[illegible]

$$f(x) = 3\theta x^{3\theta-1} \mathbb{1}\{0 < x < 1\} \qquad \theta > 0$$

Se tomaron, de forma independiente, los siguientes valores muestrales:

$$0.7795, 0.7135, 0.9939, 0.8571, 0.9822, 0.9492$$

Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que un nuevo componente dure más de 0.8 años.

M

5. La cantidad de agua que cae en cada lluvia (en mm) en determinada localidad sigue una distribución exponencial de parámetro λ. El municipio considera que debe ampliar el sistema pluvial solo si se comprueba que $\lambda < 1/50$. En las últimas 10 lluvias se registró un promedio muestral de $53mm$. Al 0.05 de significación, ¿qué decisión debe tomar?.

JUAN CARDOSO CURSO: SOSA-COSATTO

EJ 7: Tengo dos dados de 4 y seis caras

Defino esp. muestral. Planteo cálculo de Probabilidades (Bayes)

- $\frac{1}{2}$ Dado 4
  - repite $\frac{1}{4}$
  - subte $\frac{3}{4}$
- $\frac{1}{2}$ Dado 6
  - repite $\frac{1}{6}$
  - subte $\frac{1}{2}$
  - colectivo $\frac{1}{3}$

$$P(\text{repite}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{24}$$

$$P(\text{colectivo}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{subte}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

A = viaja 2 días seguidos en colectivo

B = viajó 3 días seguidos en ~~colectivo~~ subte

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) = P(\text{SUBTE}) \cdot \left[P(\text{SUBTE}) + P(\text{REPITE})\right]^2$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\left[\frac{5}{6}\right]^2 = \frac{125}{288}$$

$P(A\cap B) = P($viaja 3 días seguidos en subte, luego le toca colectivo y el último día le toca colectivo o repite$)$

$$= P(B)\cdot P(\text{colectivo})\cdot\left[P(\text{colectivo}) + P(\text{repite})\right]$$

$$= \frac{125}{288}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{3}{8}\right] = \frac{125}{4608}$$

Por regla Laplace.

$$P(A\backslash B) = \frac{\frac{125}{4608}}{\frac{125}{288}} = \frac{1}{16}$$

JUAN CARDOSO

Ej 3

$$f_{XY}(x,y) = \frac{y}{4\cdot(x+1)^2} \cdot e^{-\frac{y}{x+1}} \quad \mathbb{1}\{1<x<5 \,, y>0\}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy$$ - Busco f_Y, $f_Y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$

$$f_Y(y) = \int_1^5 \frac{y}{4(x+1)^2} \cdot e^{-\frac{y}{x+1}}\, dx \quad \mathbb{1}\{\} = \int_1^5 f_{XY}(x,y)\, dx$$

$$f_Y(y) = \frac{e^{-y/6} - e^{-y/2}}{4} \quad \mathbb{1}\{y>0\}$$

- CUENTAS REALIZADAS CON APP

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y \cdot \frac{e^{-y/6} - e^{-y/2}}{4}\, dy = 8$$

JUAN CARDOSO

EJ 4 X = duración comp. electrónico (años)

$f_\theta(x) = 3\theta \cdot x^{3\theta-1} \mathbb{1}\{0<x<1\}, \theta>0$

n = muestras = 6

- Debo buscar $\hat{\theta}_{MV}$, para lo planteo la logarítmica de la func. verosimilitud derivo e igualo a cero.

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 3\theta \cdot x_i^{3\theta-1} \underbrace{\mathbb{1}\{0<x_i<1\}}$ → lo obvio

$= (3\theta)^n \cdot \prod x_i^{3\theta-1}$

$T(\theta) = \ln(L(\theta)) = n \cdot \ln(3\theta) + (3\theta-1) \cdot \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i)$

$l(\theta) = T'(\theta) = \frac{n}{\theta} + 3 \cdot \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i)$,

$\prod_{i=1}^{6} x_i = 0,441715$

$\frac{6}{\theta} = 2,451272623$

$\hat{\theta}_{MV} = 2,44$ (aprox.)

- Ahora busco por MV, la Prob de $X>0,8$

$P_{MV}(X>0,8) = \int_{0,8}^{1} f_{\theta_{MV}}(x) \cdot dx = 0,80473$ (estimado)

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación INTEGRADORA, duración: 4 horas. 13-02-2025

Apellido y Nombres: Padrón:

Correo: Curso:

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

1. En la final del torneo de *Age of Empires* se enfrentan *Hera* contra *Viper*. Juegan al mejor de cinco partidas (gana la final el primero en ganar 3 partidas, como máximo juegan 5, no hay empates). En cada partida, y de forma independiente, *Hera* gana con probabilidad 0.60.

Sabiendo que la final duró exactamente 4 partidas, calcular la probabilidad de que *Viper* haya ganado la primera.

2. Los artículos periodísticos de una revista que recibía fondos de USAID tenían un promedio de 1000 palabras, con desvío estándar 200 palabras. Hallar una cota inferior (positiva) para la probabilidad de que un artículo elegido al azar de esa revista tenga entre 600 y 1400 palabras.

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 2, 1 - x < y < 3 - x\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = 2(X + Y - 1)$.

4. La cantidad de llamadas que realiza un encuestador, hasta la primera en que logra respuesta afirmativa para completar la encuesta, es una variable aleatoria de distribución geométrica. Para llenar las últimas 5 encuestas debió realizar un total de 37 llamadas. Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que necesite realizar exactamente 20 llamadas para completar 3 encuestas más.

5. Una máquina llena botellas con una cantidad de aceite de oliva que corresponde a una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desvío 10 ml. La máquina se regula habitualmente para garantizar con nivel 0.95 de confianza que la media tenga un error de carga menor a 0.5 ml respecto a 1000 ml. Determine el número mínimo de botellas que debe controlarse para lograr este objetivo.

7 (siete)

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

13-02-2025

Evaluación INTEGRADORA, duración: 4 horas. 5 HOJAS

Apellido y Nombres: FRANCISCO CAMPOS Padrón: 110388

Correo: FTCAMPOS @ FIUBA MANDAR NOTA AL MAIL Curso: KRONBLIT

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

B 1. En la final del torneo de *Age of Empires* se enfrentan *Hera* contra *Viper*. Juegan al mejor de cinco partidas (gana la final el primero en ganar 3 partidas, como máximo juegan 5, no hay empates). En cada partida, y de forma independiente, *Hera* gana con probabilidad 0.60.

Sabiendo que la final duró exactamente 4 partidas, calcular la probabilidad de que *Viper* haya ganado la primera.

B 2. Los artículos periodísticos de una revista que recibía fondos de USAID tenían un promedio de 1000 palabras, con desvío estándar 200 palabras. Hallar una cota inferior (positiva) para la probabilidad de que un artículo elegido al azar de esa revista tenga entre 600 y 1400 palabras.

R 3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 2, 1 - x < y < 3 - x\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = 2(X + Y - 1)$.

M 4. La cantidad de llamadas que realiza un encuestador, hasta la primera en que logra respuesta afirmativa para completar la encuesta, es una variable aleatoria de distribución geométrica. Para llenar las últimas 5 encuestas debió realizar un total de 37 llamadas. Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que necesite realizar exactamente 20 llamadas para completar 3 encuestas más.

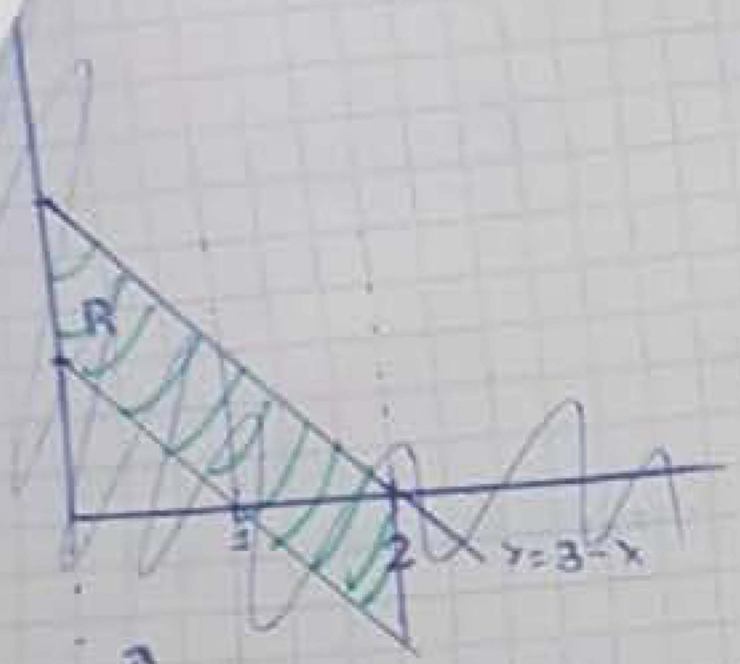
B 5. Una máquina llena botellas con una cantidad de aceite de oliva que corresponde a una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desvío 10 ml. La máquina se regula habitualmente para garantizar con nivel 0.95 de confianza que la media tenga un error de carga menor a 0.5 ml respecto a 1000 ml. Determine el número mínimo de botellas que debe controlarse para lograr este objetivo.

CAMPOS 110388

$f_{XY} = \text{área } R^{-1} \Rightarrow$

$\int_0^2\int_{1-x}^{3-x} dy\, dx = \int_0^2 3-x-1+x = \int_0^2 2 = 4 \Rightarrow$

$f_{XY} = \frac{1}{4}$



HICE mal el gráfico 3 VECES

$\mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(2(x+y-1) \leq w)$

$\mathbb{P}(y \leq \frac{w}{2} - x + 1) \Rightarrow$

$F_W(w) = \iint_w f_{XY}$

$\frac{1}{4}\iint_{1-x}^{w/2-x+1} dy\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 w/2 - x + 1 - 1 + x$

$\frac{1}{4} w = F_W \Rightarrow$

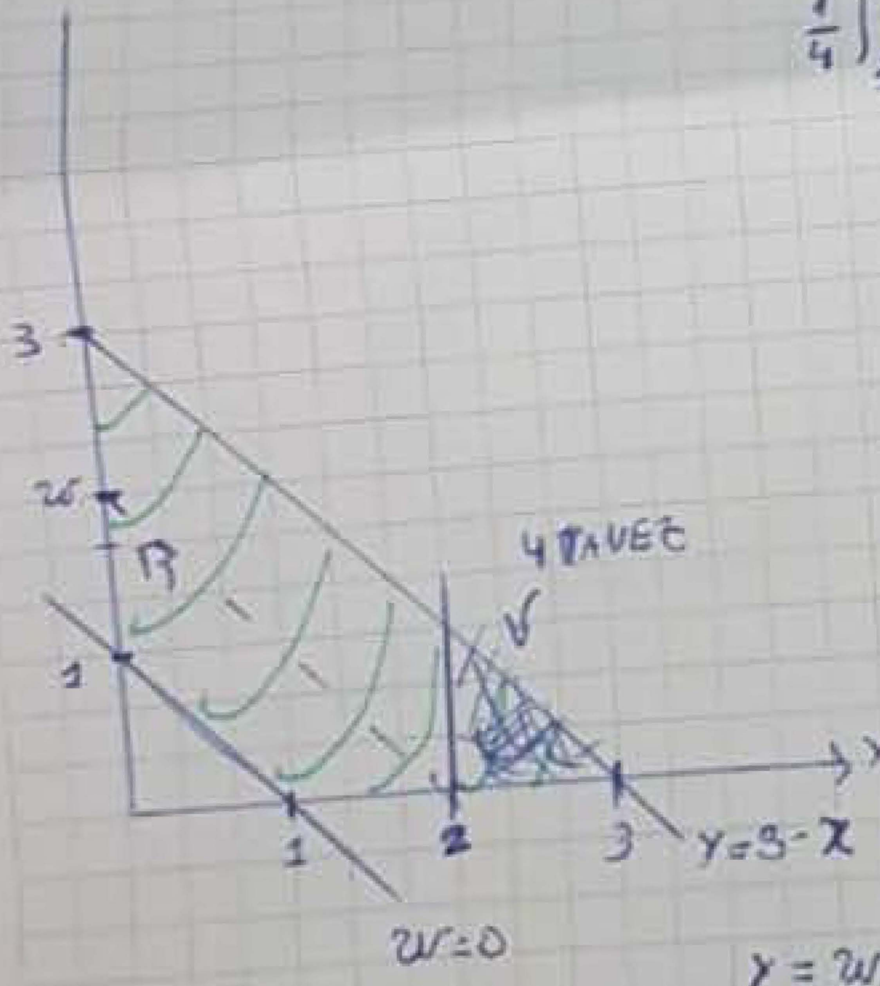
Los límites son $0 \leq w \leq 4 \Rightarrow$

$\boxed{F_W \ \frac{1}{4} w \ \mathbb{1}\{0 \leq w \leq 4\}}$ + ?

falta una parte!

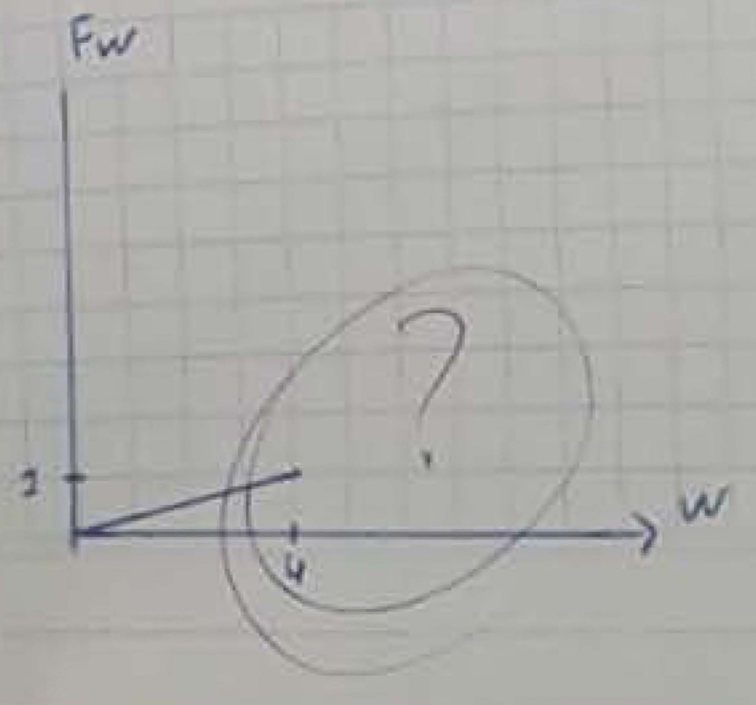
FINALMENTE, FUERA DE BROMA

NO SÉ PORQUÉ me confundí tanto



$\rightarrow w = -$

$y = w/2 - x + 1$



...ncisco CAMPOS 110388

$\sim N(\mu, \cancel{10}\, \sigma)$

$s = 10\ ML$

$\alpha = 0{,}06$

PROP

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{100}{n}\right)$ $\bar{X} = \frac{\sum^{n} x_i}{n}$

$\mathbb{P}(|T| > t_{\alpha}) = 0{,}95$
$0{,}05$

$\mathbb{P}(T > |z|) = 0{,}05 \;=\; \mathbb{P}(Z > 1{,}9599) = 0{,}95$

$\Rightarrow$

$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0{,}5 \geq z_{0{,}025} \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ despejando n

$> 0 \leq ?$

$\boxed{n \approx 1537}$

NCISCO CAMPOS 110388

X: cantidad de llamadas hasta un acierto $\sim Geo(p)$

como la distribucion geometrica es conocida se sabe que $P = \frac{5}{37}$ $\frac{\text{actos}}{\text{cantidad de intentos}}$

no es el valor verdadero

se sabe que la Geometrica tiene perdida de memoria =>

no importa lo anterior a la hora de calcular alcemos

Pascal $(1, p)$ = Geometrica (p) =>

exactamente 20

$$\boxed{\text{Pascal}\left(3, \tfrac{5}{37}\right)(X = 20) \Rightarrow \mathbb{P} \quad 0{,}03576}$$

mal justif

CAMPOS 110388

AOE , [illegible]

$P(H) = 0,6$

$P(V) = 0,4$

X: cantidad de partidos

$$P(V \text{ gana la primera} / X=4) = \frac{P(V \text{ gana la primera} \cap X=4)}{P(X=4)}$$

$P(X=4)$

$$\left.\begin{matrix} VVHV \\ VHVV \\ HVVV \end{matrix}\right\} (0,4)^3 \cdot 0,6 \cdot 3 = 0,1152$$

$$\left.\begin{matrix} HHVH \\ HVHH \\ VHHH \end{matrix}\right\} (0,6)^3 \cdot 0,4 \cdot 3 = 0,2592$$

Sumados $= 0,3744$

$$P(\underbrace{\cancel{X=3}}_{\text{V en la primera}} \cap X=4) = \left.\begin{matrix} VVHV = (0,4)^3 \cdot 0,6 \\ VHVV = (0,4)^3 \cdot 0,6 \\ VHHH = (0,6)^3 \cdot 0,4 \end{matrix}\right\} \text{Sumados dan} = 0,1632$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad P = (V \text{ gana la primera} / X=4) = \frac{0,1632}{0,3744} = 0,43589}$$

CAMPOS 110388

~~$\frac{\sum x_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$~~

~~T = PALABRAS~~

~~$\bar{x} = 1000$~~ ~~$\Rightarrow$~~ ~~$\mathbb{P}(600 < T < 1400)$~~

~~$\sigma = 200$~~ ~~$\mathbb{P}(\underline{600 - \bar{X}}$~~

2) Desigualdad de Chevil $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$

~~$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 400)$~~ $\mathbb{P}(|X - \mu| < k.\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ ✓

$\mu = 1000 \rightarrow$ que en realidad como dice promedio debería ser $\bar{X}$

$\sigma = 200$

$\mathbb{P}(|X - 1000| < \overbrace{k.200}^{400}) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 3/4$ ✓ esta cota del 75% es la cuota mínima que garantiza lo pedido

$k = 2$

~~mínima que garantiza~~

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación INTEGRADORA, duración: 4 horas. 12-12-2024

Apellido y Nombres: Padrón:

Correo: Curso:

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

1. Se tienen tres cajas C_1, C_2 y C_3. En C_1 hay 4 bolas blancas y 4 rojas, en C_2 7 blancas y 3 rojas, y en C_3 3 blancas y 6 rojas. Se extraen, sin reposición, dos bolas al azar de C_1. Si ambas bolas extraídas son del mismo color, se extrae una bola de C_2, en caso contrario se extrae una bola de C_3. Si la última bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas de C_1 hayan sido rojas?

2. Sea (X, Y) vector aleatorio cuya densidad conjunta es

$$f_{(X,Y)}(x, y) = 4e^{-2y}\mathbf{1}\left\{0 < x < y^2, y > 0\right\}$$

Materia PyE A (61.06 81.03): Hallar la función de regresión $\mathbf{E}[X|Y = y]$

Materia PyE B, PyE (61.09 81.04 CB003): Hallar el valor esperado de X.

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 4, x - 1 < y < x + 1\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = X - Y + 1$.

4. Sea X una variable aleatoria geométrica de parámetro p, $0 < p < 1$. Hallar el error cuadrático medio del estimador máximo verosímil de la media de X (para una muestra de volumen n).

5. Un proveedor de tirantes de madera pino Paraná afirma que la densidad media de los mismos es de 500 kg/m^3 para un contenido de humedad específico. Se someten a un ensayo normalizado 30 tirantes y se obtiene una media muestral de $\overline{x} = 497.735$ kg/m^3 y una desvío muestral de $s = 6.680$ kg/m^3. Suponiendo que la densidad de los tirantes sigue una distribución normal, ¿es posible, al 5 % de significación, refutar la afirmación del proveedor?

1. Se tienen tres cajas C_1, C_2 y C_3. En C_1 hay 4 bolas blancas y 4 rojas, en C_2 7 blancas y 3 rojas, y en C_3 3 blancas y 6 rojas. Se extraen, sin reposición, dos bolas al azar de C_1. Si ambas bolas extraídas son del mismo color, se extrae una bola de C_2, en caso contrario se extrae una bola de C_3. Si la última bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas de C_1 hayan sido rojas?

C_1	C_2	C_3
4B	7B	3B
4R	3R	6R

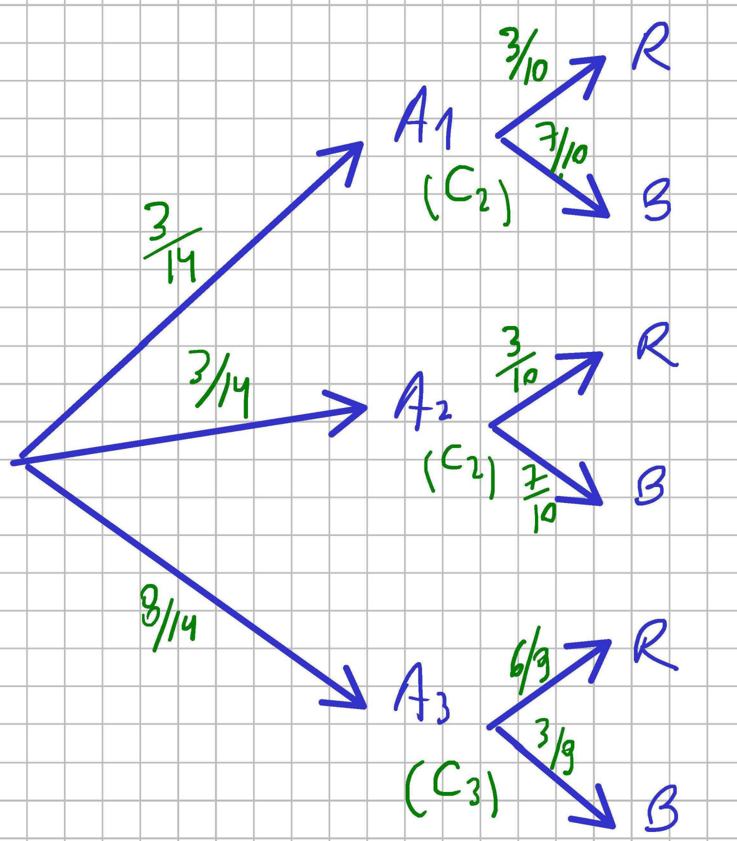
SE EXTRAEN 2 AL AZAR DE C_1.

SEAN A_1: LAS 2 SON ROJAS

A_2: " " " BLANCAS

A_3: " " " DE DISTINTO COLOR

$$P(A_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14} = P(A_2) \; ; \; P(A_3) = \frac{8}{14}$$



R: LA ÚLTIMA BOLA ELEGIDA ES ROJA

B: " " " " BLANCA

HAY QUE CALCULAR:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{3}{14}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{14} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{14} + \frac{3}{9} \times \frac{8}{14}}$$

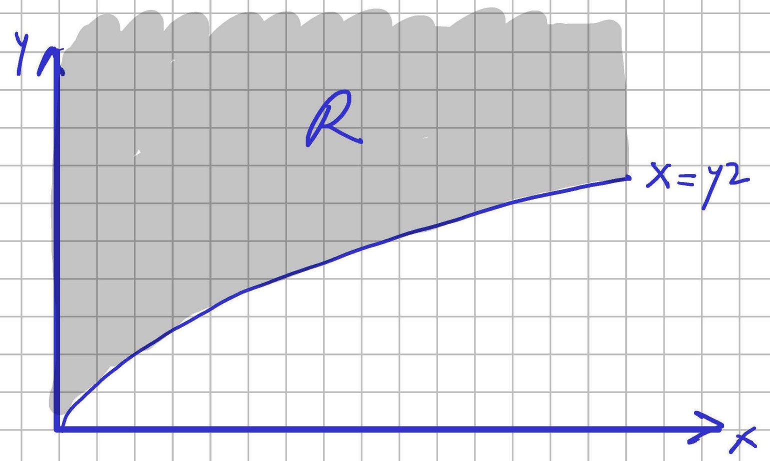
$$= 63/206 \simeq \boxed{0.3058}$$

2. Sea (X,Y) vector aleatorio cuya densidad conjunta es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 4e^{-2y}\mathbf{1}\left\{0 < x < y^2 \cancel{\}}, y>0\right\}$$

Materia PyE A (61.06 81.03): Hallar la función de regresión $\mathbf{E}[X|Y=y]$

Materia PyE B, PyE (61.09 81.04 CB003): Hallar el valor esperado de X.



PODEMOS CALCULAR DIRECTAMENTE:

$$E[X] = \iint_R x\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{y^2} x\, 4e^{-2y}\, dx\, dy = \int_0^\infty y^4\, 2e^{-2y}\, dy = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\int_0^\infty 2y^4 e^{-2y}\, dy = \frac{2\times 4!}{2^5} \underbrace{\int_0^\infty \frac{2^5 y^4 e^{-2y}}{4!}\, dy}_{1} = \frac{2\times 24}{32} = \frac{3}{2} \right)$$

(DENSIDAD GAMMA $(5,2)$)

O TAMBIEN:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = \int_0^{y^2} 4e^{-2y}\, dx = 4y^2 e^{-2y} \rightarrow Y \sim \Gamma[3,2]$$

$$E[Y] = \frac{3}{2} \qquad V[Y] = \frac{3}{4}$$

$$f_{XY}(x,y) = \underbrace{4y^2 e^{-2y}\,\mathbb{1}\{y>0\}}_{f_Y(y)} \times \underbrace{\frac{1}{y^2}\,\mathbb{1}\{0<x<y^2\}}_{f_{X|Y=y}(x)}$$

$$\downarrow$$

$$X|Y=y \sim \mathcal{U}(0,y^2)$$

$$\rightarrow E[X|Y=y] = \frac{1}{2}y^2 \longrightarrow E[X|Y] = \frac{1}{2}Y^2$$

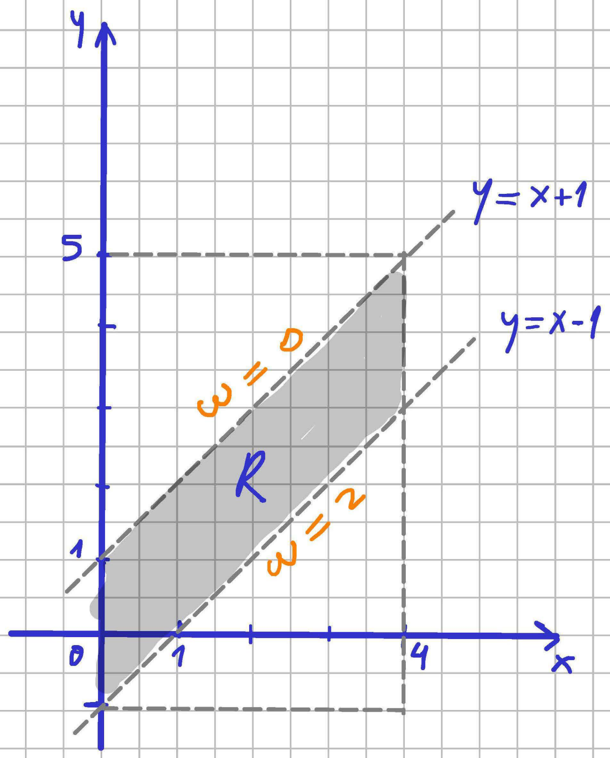
$$\rightarrow E[X] = \frac{1}{2}E[Y^2] = \frac{1}{2}\left[V[Y] + E^2[Y]\right]$$

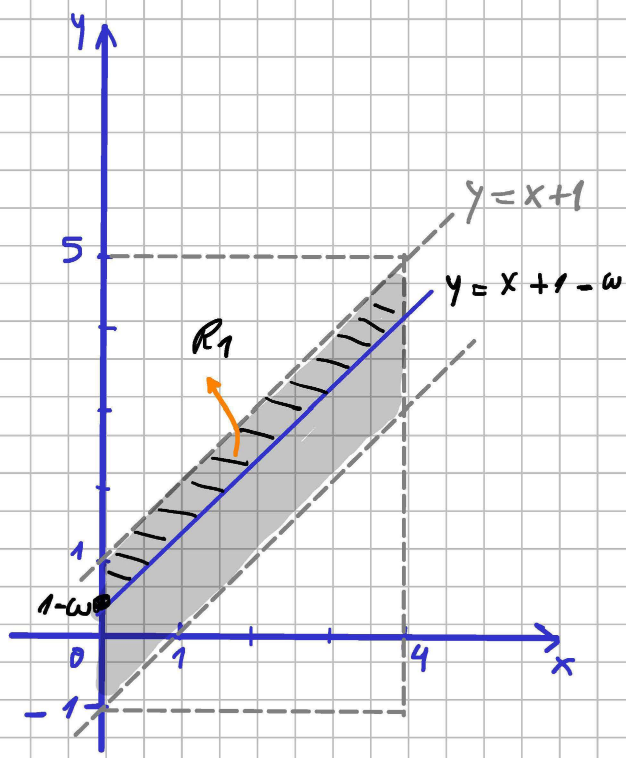
$$= \frac{1}{2}\left[3/4 + 9/4\right] = \boxed{\frac{3}{2}}$$

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 4, x - 1 < y < x + 1\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = X - Y + 1$.





$$W = X - Y + 1 \longrightarrow W \in (0, 2)$$

$$P(W \leq w) = \begin{cases} 0 & , w < 0 \\ 1 & , w \geq 2 \end{cases}$$

$$0 \leq w < 2 \longrightarrow P(W \leq w) = P(X - Y + 1 \leq w)$$

$$= P(Y \geq X + 1 - w) = \frac{\text{ÁREA DE } R_1}{\text{ÁREA DE } R}$$

POR SER (X, Y) UNIFORME EN R

TAMBIEN PODEMOS HACER :

$$P(Y \geq X + 1 - w) = \iint_{R_1} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

DONDE $f_{XY}(x,y) = \dfrac{1}{\text{área de } R} \mathbb{1}\{(x,y) \in R\} = \dfrac{1}{8} \mathbb{1}\{(x,y) \in R\}$

$$\rightarrow \iint_{R_1} \frac{1}{8}\,dx\,dy = \frac{1}{8} \int_0^4 \int_{x+1-w}^{x+1} dy\,dx = \frac{1}{2} w$$

$$\rightarrow \boxed{F_W(w) = \frac{1}{2} w \,\mathbb{1}\{0 \leq w < 2\} + \mathbb{1}\{w \geq 2\}}$$

4. Alva, Bauti y Charly comienzan sus turnos trabajando de lavacopas en el *Bar Gibraltar* a las 20:00. Alva rompe copas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 1 por hora, Mati lo hace según un proceso de Poisson de intensidad 5/4 por hora, y Charly (el más cuidadoso) de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad 1/2 por hora; independientes entre sí. Si el sábado entre las 20:00 y las 22:00 rompieron exactamente 5 copas en total, calcular la probabilidad de que Charly no haya roto ninguna en ese intervalo de tiempo.

TENEMOS 3 PROCESOS DE POISSON INDEPENDIENTES :

COPAS ROTAS POR ALVA ; $\lambda_A = 1/\text{HORA}$

" " " BAUTI ; $\lambda_B = 5/4$ HORA

" " " CHARLY ; $\lambda_C = 1/2$ HORA

LA SUPERPOSICIÓN DE LOS 3 ES OTRO PROCESO POISSON DE INTENSIDAD $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 11/4$ HORA

PARA EL INTERVALO $(20 : 22]$ DEFINIMOS :

N_A : CANTIDAD DE COPAS ROTAS POR ALVA ; $N_A \sim \text{POISSON}(1 \times 2)$

N_B : " " " " " BAUTI ; $N_B \sim \text{POISSON}(\frac{5}{4} \times 2)$

N_C : " " " " " CHARLY ; $N_C \sim \text{POISSON}(\frac{1}{2} \times 2)$

N : " " " " ; $N = N_A + N_B + N_C$

$N_A \sim Po(2)$; $N_B \sim Po(2.5)$; $N_C \sim Po(1)$

$N \sim Po(2 + 2.5 + 1)$ YA QUE ES SUMA DE VARIABLES POISSON INDEPENDIENTES

HAY QUE CALCULAR $P(N_C = 0 \mid N = 5)$

PODEMOS RESOLVERLO COMO UNA PROBABILIDAD CONDICIONAL:

$$P(N_C=0 \mid N=5) = \frac{P(N_C=0,\ N=5)}{P(N=5)}$$

$$= \frac{P(N_C=0,\ N_A+N_B+N_C=5)}{P(N=5)} = \frac{P(N_C=0,\ \overbrace{N_A+N_B}^{X\sim Po(2+2.5)}=5)}{P(N=5)}$$

$$= \frac{P(N_C=0)\,P(X=5)}{P(N=5)}$$ POR SER X y N_C INDEPENDIENTES

TAMBIEN PODEMOS HACER, POR PROPIEDAD DE VARIABLES POISSON:

$$\underbrace{N_C \mid N_A+N_B+N_C=5}_{} \sim \text{BINOMIAL}\left(5,\ \frac{1}{2+25+1}\right)$$

$$Y \sim BIN(5,\ 2/11)$$

Y CALCULAMOS:

$$P(Y=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{11}\right)^0\left(\frac{9}{11}\right)^5 \cong \boxed{0.3666}$$

4. El número de cerezas en una tarta es una variable aleatoria que puede valer 4, 5, 6 o 7; con probabilidades 0.2, 0.4, 0.3, 0.1 respectivamente. Calcular aproximadamente la probabilidad de que el número promedio de cerezas en 36 tartas sea menor que 5.5.

X: #(CEREZAS) EN UNA TARTA CUALQUIERA

$P(X=4)=0.2$; $P(X=5)=0.4$; $P(X=6)=0.3$; $P(X=7)=0.1$

$$E[X] = 4\times 0.2 + 5\times 0.4 + 6\times 0.3 + 7\times 0.1 = 5.3$$

$$E[X^2] = 4^2\times 0.2 + 5^2\times 0.4 + 6^2\times 0.3 + 7^2\times 0.1 = 28.9$$

$$V[X] = 28.9 - 5.3^2 = 0.81$$

X_i : #(CEREZAS) EN LA i-ÉSIMA TARTA ; $i \in \{1, 2, \dots, 36\}$

$\underline{X_i \sim X}$, <u>INDEPENDIENTES</u>.

EL NÚMERO PROMEDIO DE CEREZAS EN 36 TARTAS ES

$\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i$ Y HAY QUE CALCULAR

$$P\left(\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i < 5.5\right) = P\left(\sum_{i=1}^{36} X_i < 198\right)$$

COMO $\sum_{i=1}^{36} X_i$ ES SUMA DE 36 VARIABLES I.I.D.

CON ESPERANZA Y VARIANZA FINITAS, PODEMOS APLICAR

EL <u>TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE</u>

$$P\left(\sum_{i=1}^{36} X_i < 198\right) \cong P\left(Z < \frac{198 - 36 \times 5.3}{\sqrt{36 \times 0.81}}\right) \cong P(Z < 1.333)$$

$$\cong \boxed{0.9088}$$

$\underline{\text{CON } Z \sim N(0,1)}$

TAMBIEN PODEMOS HACER:

$$\overline{X} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i \; ; \; E[\overline{X}] = E[X_i] = 5.3 \; ; \; V[\overline{X}] = \frac{V[X_i]}{36} = 0{,}0225$$

COMO CONSECUENCIA DEL T.C.L. SE TIENE LA SIGUIENTE PROPIEDAD, NO VISTA EN CLASE:

$$\overline{X} \sim N\left(E[X_i], \frac{V[X_i]}{36}\right)$$

$$\longrightarrow \overline{X} \sim N(5.3, 0.0225)$$

$$\longrightarrow P(\overline{X} < 5.5) \cong 0.90879$$

CALCULADA DIRECTAMENTE CON LA APP

CON $\mu = 5.5$ Y $\sigma = \sqrt{0.0225} = 0{,}15$

6 (Seis)

PROBABILIDAD - 81.16 CB004
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación PARCIAL, duración: 4 horas. 2-10-2024

Apellido y Nombres: Utrera Maximo Damian Padrón

Correo: mutrera@fi.uba.ar Curso:

B

1. Un coche de la línea D del subte parte desde la terminal Congreso de Tucumán con 9 pasajeros. Cada pasajero elige al azar la estación en que bajará, entre Palermo, Pueyrredón y Catedral. Calcular la probabilidad de que exactamente 4 pasajeros bajen en la estación Palermo, sabiendo que solo uno bajó en Pueyrredón.

M

2. Se tienen dos máquinas para producir varillas. La longitud (en metros) de las varillas producidas por la máquina 1 es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(9, 12)$, la de las varillas producidas por la máquina 2 también es uniforme pero sobre el intervalo $(8, 12)$. Se colocan en una caja cinco varillas producidas por la máquina 1 y cinco producidas por la máquina 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en la caja haya más de 1 varilla que mida más de 11 metros?

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función densidad de probabilidad:

Reg

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{y}{2x^4} e^{-\frac{y}{x^2}} \mathbf{1}\{1 < x < 3, y > 0\}$$

Cursos 4 y 8: Hallar $\operatorname{var}(Y|X = 2)$.

Otros cursos: Calcular $\mathbf{P}(\operatorname{var}(Y|X) < 6)$.

B-

4. El horario de las llamadas que son atendidas en el hospital de Zorg sigue un proceso de Poisson de tasa 2 por minuto. La probabilidad de que una llamada sea de urgencia es 0.2, y de que sea para solicitar turno es de 0.8. La duración (en minutos) de las llamadas de urgencia sigue una distribución $\mathcal{U}(0.25, 1)$, y la de una llamada para solicitar turno es $\mathcal{E}(0.25)$.

Cursos 4 y 8: En una hora determinada, ¿cuál es la probabilidad de que la primera llamada atendida dure menos de 0.5 minutos?

Otros cursos: En una hora determinada, ¿cuál es el tiempo medio total de duración de las llamadas?

B

5. El ingeniero Levitas se dedica a tiempo completo a la docencia en la UBA como ayudante, y cobra, con 10 años de antigüedad, \$703200 de bolsillo. Sus gastos fijos mensuales son \$400000, y sus gastos variables diarios son una variable aleatoria de media \$11000 y desvío \$2200, independientes un día del otro. En un mes de 30 días, ¿con qué probabilidad le alcanza su sueldo?.

Entrego 3 hojas.

1. Un coche de la línea D del subte parte desde la terminal Congreso de Tucumán con 9 pasajeros. Cada pasajero elige al azar la estación en que bajará, entre Palermo, Pueyrredón y Catedral. Calcular la probabilidad de que exactamente 4 pasajeros bajen en la estación Palermo, sabiendo que solo uno bajó en Pueyrredón.

SEGUN ENUNCIADO, CADA UNO DE LOS 9 PASAJEROS TIENE 3 ESTACIONES POSIBLES PARA BAJAR. ENTONCES HAY 3^9 FORMAS POSIBLES, EQUIPROBABLES, EN QUE PUEDEN HACERLO.

SEAN LOS EVENTOS:

A : EXACTAMENTE 4 BAJAN EN PALERMO

B : " 1 BAJA EN PUEYRREDÓN.

HAY QUE CALCULAR $P(A|B)$. ENTONCES:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{\#(A\cap B)}{\cancel{\#(\Omega)}}}{\dfrac{\#(B)}{\cancel{\#(\Omega)}}} = \frac{\#(A\cap B)}{\#(B)}$$

(APLICAMOS FLA. DE LAPLACE)

$\#(A\cap B)$: CANTIDAD DE FORMAS EN LAS QUE 4 BAJAN EN PALERMO Y 1 EN PUEYRREDÓN.

$\#(B)$: CANTIDAD DE FORMAS EN LAS QUE 1 BAJA EN PUEYRREDÓN

PALERMO PUEYRR. CATEDRAL

4 1 4

$$\#(A \cap B) = \binom{9}{4} \times \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{4}$$

DE 9 ELEGIMOS 4 PARA PALERMO

DE $9-4=5$ ELEGIMOS 1 PARA PUEYRREDÓN

EL RESTO BAJA EN CATEDRAL

$$\#(B) = \binom{9}{1} \times 2^8$$

DE 9 ELEGIMOS 1 PARA PUEYRREDON

LOS 8 QUE QUEDAN TIENEN 2^8 FORMAS DE REPARTIRSE EN LAS OTRAS 2 ESTACIONES

FINALMENTE: $$P(A|B) = \frac{\binom{9}{4}\binom{5}{1}\binom{4}{4}}{\binom{9}{1} \cdot 2^8} \cong \boxed{0.273}$$

2. Se tienen dos máquinas para producir varillas. La longitud (en metros) de las varillas producidas por la máquina 1 es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(9, 12)$, la de las varillas producidas por la máquina 2 también es uniforme pero sobre el intervalo $(8, 12)$. Se colocan en una caja cinco varillas producidas por la máquina 1 y cinco producidas por la máquina 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en la caja haya más de 1 varilla que mida más de 11 metros?

L_1 : LONGITUD DE UNA VARILLA CUALQUIERA DE MÁQUINA 1 (METROS)

L_2 : " " " " " " " 2 (")

$L_1 \sim \mathcal{U}(9, 12)$; $L_2 \sim \mathcal{U}(8, 12)$

SI SE TIENEN 5 VARILLAS PRODUCIDAS POR LA MÁQUINA 1, CADA UNA DE ESAS VARILLAS TIENE PROBABILIDAD DE MEDIR MÁS DE 11 METROS IGUAL A $(12-11)/(12-9) = 1/3$, POR SER L_1 UNIFORME. SUPONEMOS QUE ESTO OCURRE INDEPENDIENTEMENTE ENTRE LAS 5 VARILLAS.

SEA X_1 : CANTIDAD DE VARILLAS, ENTRE LAS 5, CON LARGO MAYOR A 11 m. ENTONCES

$$X_1 \sim \text{Binomial}(5, 1/3)$$

DE LA MISMA FORMA, EN 5 VARILLAS PRODUCIDAS POR LA MÁQUINA 2, CADA UNA DE ELLAS TIENE PROBABILIDAD DE MEDIR MÁS DE 11 METROS IGUAL A $(12-11)/(12-8) = 1/4$ POR SER L_2 UNIFORME, E INDEPENDIENTEMENTE ENTRE LAS 5 VARILLAS. SI X_2 ES LA CANTIDAD DE VARILLAS, ENTRE ESTAS 5, CON LARGO MAYOR A 11 m RESULTA

$$X_2 \sim \text{Binomial}(5, 1/4)$$

LA PROBABILIDAD DE QUE ENTRE LAS $5+5=10$ VARILLAS HAYA MÁS DE UNA CON LARGO MAYOR A 11 m ES $P(X_1+X_2>1)$. CADA UNA DE LAS VARIABLES TOMA VALORES EN $\{0,1,2,3,4,5\}$ Y HAY MUCHOS CASOS POSIBLES. POR ESO CONSIDERAMOS EL EVENTO CONTRARIO:

$$P(X_1+X_2>1) = 1 - P(X_1+X_2 \leq 1)$$
$$= 1 - \left[P(X_1=0, X_2=0) + P(X_1=0, X_2=1) + P(X_1=1, X_2=0)\right]$$
$$= 1 - P(X_1=0)P(X_2=0) - P(X_1=0)P(X_2=1) - P(X_1=1)P(X_2=0)$$

CONSIDERANDO X_1 Y X_2 INDEPENDIENTES. ENTONCES:

$$P(X_1+X_2>1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \binom{5}{1}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 - \binom{5}{1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$\cong \boxed{0.838}$$

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función densidad de probabilidad:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{y}{2x^4} e^{-\frac{y}{x^2}} \mathbf{1}\{1 < x < 3, y > 0\}$$

Cursos 4 y 8: Hallar $\mathbf{var}(Y|X=2)$.

Otros cursos: Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{var}(Y|X) < 6)$.

FACTORIZAMOS LA DENSIDAD CONJUNTA COMO:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}\{1<x<3\} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 y e^{-\frac{1}{x^2} y} \mathbb{1}\{y>0\}$$

$$= f_X(x) \times f_{Y|X=x}(y)$$

DE DONDE: $X \sim \mathcal{U}(1,3)$; $Y|X=x \sim \Gamma\left(2, \frac{1}{x^2}\right)$

ENTONCES:

$$\mathbb{V}[Y|X=x] = \frac{2}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = 2x^4 \quad \text{PARA } x \in (1,3)$$

LA VARIANZA CONDICIONAL RESULTA

$$\mathbb{V}[Y|X] = 2X^4 \quad \text{PARA } X \in (1,3)$$

$$\longrightarrow P(\mathbb{V}[Y|X] < 6) = P(2X^4 < 6) = P(X < \sqrt[4]{3})$$

YA QUE X TOMA VALORES EN $(1,3)$

POR SER X UNIFORME EN $(1,3)$ RESULTA:

$$P(X < \sqrt[4]{3}) = \frac{\sqrt[4]{3} - 1}{3 - 1} \simeq \boxed{0.158}$$

4. El horario de las llamadas que son atendidas en el hospital de Zorg sigue un proceso de Poisson de tasa 2 por minuto. La probabilidad de que una llamada sea de urgencia es 0.2, y de que sea para solicitar turno es de 0.8. La duración (en minutos) de las llamadas de urgencia sigue una distribución $\mathcal{U}(0.25, 1)$, y la de una llamada para solicitar turno es $\mathcal{E}(0.25)$.

Cursos 4 y 8: En una hora determinada, ¿cuál es la probabilidad de que la primera llamada atendida dure menos de 0.5 minutos?

Otros cursos: En una hora determinada, ¿cuál es el tiempo medio total de duración de las llamadas?

ARRIBO DE LLAMADAS : PROCESO POISSON DE INTENSIDAD $\lambda = 2/\text{MIN}$

(*) " " " DE URGENCIA : PROCESO POISSON DE INTENSIDAD $\lambda_U = 0.2 \times 2/\text{MIN}$

" " " DE TURNO : PROCESO POISSON DE INTENSIDAD $\lambda_T = 0.8 \times 2/\text{MIN}$

(*) POR PROPIEDAD DE ADELGAZAMIENTO

SEA T : TIEMPO TOTAL (MINUTOS) DE TODAS LAS LLAMADAS QUE ARRIBARON EN UN INTERVALO DE 1 HORA

ENTONCES : $T = T_U + T_T$

CON T_U : TIEMPO TOTAL DE LLAMADAS DE URGENCIA

T_T : " " " " " TURNO

SE QUIERE CALCULAR : $E[T] = E[T_U] + E[T_T]$

SEAN N_U : CANTIDAD DE LLAMADAS DE URGENCIA ARRIBADAS EN UN INTERVALO DE 1 HORA

N_T : CANTIDAD DE LLAMADAS DE TURNO ARRIBADAS EL EL MISMO INTERVALO DE 1 HORA

ENTONCES :
$$N_U \sim \text{POISSON}\left(0.2 \times \frac{2}{\cancel{\text{MIN}}} \times 60 \cancel{\text{MIN}}\right)$$
$$N_T \sim \text{POISSON}\left(0.8 \times \frac{2}{\cancel{\text{MIN}}} \times 60 \cancel{\text{MIN}}\right)$$

T_U ES LA SUMA ALEATORIA :
$$T_U = \sum_{i=1}^{N_U} U_i$$

DONDE U_i ES LO QUE DURA LA i-ÉSIMA LLAMADA DE URGENCIA, SIENDO LAS VARIABLES U_i UNIFORMES EN $(0.25, 1)$ (EN MINUTOS). PARA CALCULAR $E[T_U]$ CONDICIONAMOS PRIMERO A T_U :
$$T_U \mid N_U = m : \sum_{i=1}^{N_U} U_i \underbrace{\mid N_U = m}_{\text{SUPUESTAS INDEPENDIENTES}} = \sum_{i=1}^{m} U_i$$
$$\longrightarrow E[T_U \mid N_U = m] = E\left[\sum_{i=1}^{m} U_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[U_i] = 0{,}625\, m$$

YA QUE $U_i \sim \mathcal{U}(0.25, 1)$ IMPLICA $E[U_i] = \frac{1+0.25}{2} = 0.625$

ENTONCES

$$E[T_U \mid N_U = m] = 0.625m \longrightarrow E[T_U \mid N_U] = 0.625 N_U$$

$$\longrightarrow E[T_U] = E\big[E[T_U \mid N_U]\big] = 0.625\, E[N_U]$$

$$= 0.625 \times 0.2 \times 2 \times 60 = 15$$

ANÁLOGAMENTE, T_T ES LA SUMA ALEATORIA

$$T_T = \sum_{i=1}^{N_T} T_i$$

DONDE T_i ES LA DURACIÓN DE LA i-ÉSIMA LLAMADA DE TURNO SIENDO $T_i \sim Exp(0.25)$, ENTONCES

$$T_T \mid N_T = m \;:\; \sum_{i=1}^{N_T} T_i \mid N_T = m \;:\; \sum_{i=1}^{m} T_i$$

INDEPENDIENTES

$$\longrightarrow E[T_T \mid N_T = m] = E\left[\sum_{i=1}^{m} T_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[T_i] = 4m$$

YA QUE $E[T_i] = \frac{1}{0.25} = 4$ POR SER $T_i \sim Exp(0.25)$

$$\longrightarrow E[T_T|N_T] = 4N_T \longrightarrow E[T_T] = E[E[T_T|N_T]]$$

$$= 4E[N_T] = 4 \times 0.8 \times 2 \times 60$$

$$= 384$$

FINALMENTE:

$$E[T] = 15 + 384 = \boxed{399 \text{ MINUTOS}}$$

5. El ingeniero Levitas se dedica a tiempo completo a la docencia en la UBA como ayudante, y cobra, con 10 años de antigüedad, \$703200 de bolsillo. Sus gastos fijos mensuales son \$400000, y sus gastos variables diarios son una variable aleatoria de media \$11000 y desvío \$2200, independientes un día del otro. En un mes de 30 días, ¿con qué probabilidad le alcanza su sueldo?.

HECHO EN CLASE

Maximo Utrera

(5) Sueldo de 703200, gasta si o si 400000.
Cada dia gasta una media de 11000 y desvio 2200.
Cual es la $\mathbb{P}$ que en 30 dias gaste $\leq$ al total que tiene?

- sueldo − gastos fijos = 303200

• G_i: "Gastos del dia i", M: "Gastos del mes" $= \sum_{i=1}^{30} G_i$

- $E[G_i] = 11000$
- $\sigma = \sqrt{Var(G_i)} = 2200$
$\Rightarrow Var(G_i) = 4840000$

- $E[M] = 30[G_i] = 330000$
- $Var(M) = 30 \cdot Var(G_i) = V$
$\sigma_M = \sqrt{V} = 12049.89$

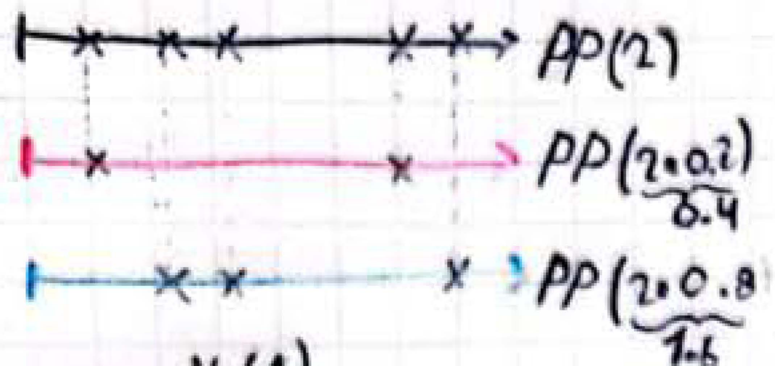
Aproximado

• $\mathbb{P}(M \leq 303200) \underset{TCL}{\approx} \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{303200 - E[M]}{\sigma_M}\right) = \mathbb{P}(Z \leq -2.224)$

con $Z \sim N(0,1)$

$= \Phi(-2.224) = 1 - \Phi(2.224) \underset{Tabla}{\simeq} 1 - 0.98679 = \boxed{0.0132}$

(4) Hay llamadas como un $PP(2/min)$. La P que sea urgente es 0.2 la de pedir turno 0.8. La Duración de las urgentes $\sim U(0.25, 1)$ y las otras $\sim E(0.25)$. En una hora cuál es el tiempo medio de las llamadas.



- $N_U(t)$: "cant de llamadas urgentes en intervalo t" $\sim Poi(0.4t)$
- $N_T(t)$: " " " turnos " " $\sim Poi(1.6t)$
- D_{U_i}: "duración urgente de llamada i" $\sim U(0.25, 1)$
- D_{T_i}: " " turno " " $\sim E(0.25)$

- $\underbrace{T_U}_{} = \sum_{i=1}^{N_U(1)} D_{U_i}$

total duración de todas las urgentes de 1 hora.

- $\underbrace{T_T}_{} = \sum_{i=1}^{N_T(1)} D_{T_i}$

mismo pero con turnos

confunde minutos y hora

- $E[T_U] = E[E[T_U \mid N_U(1)]] = E[5/8\, N_U(1)] = 5/8\, E[N_U(1)] \underset{\text{tabla}}{=} 5/8 \cdot 0.4 = 1/4$

 - $E[T_U \mid N_U(1) = n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} D_{U_i}\right] = n \cdot E[D_{U_i}] \underset{\text{tabla}}{=} n\, 5/8 \Rightarrow E[T_U \mid N_U(1)] = N_U(1) \cdot 5/8$

- $E[T_T] = E[E[T_T \mid N_T(1)]] = E[4 N_T(1)] = 4E[N_T(1)] \underset{\text{tabla}}{=} 4 \cdot 1.6 = \frac{32}{5}$

 - $E[T_T \mid N_T(1) = n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} D_{T_i}\right] = n\, E[D_{T_i}] \underset{\text{tabla}}{=} n \cdot 4 \Rightarrow E[T_T \mid N_T(1)] = 4 N_T(1)$

- $E[\underbrace{T_U + T_T}_{}] = E[T_U] + E[T_T] = \frac{133}{20} \simeq \boxed{6.65}$

Duración de todas las llamadas

NOTA

Maximo Utrera

(3) $(X,Y) \,/\, f_{XY}(x,y) = \dfrac{y}{2x^4} e^{-y/x^2} \, \mathbb{1}\{1<x<3,\ y>0\}$

Calcular $\mathbb{P}(\text{var}(Y|X) < 6)$.

• Reescribo $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{(1/x^2)^2}{2} \cdot y \cdot e^{-\frac{1}{x^2}\cdot y} \, \mathbb{1}\{y>0\} \cdot 1 \cdot \mathbb{1}\{1<x<3\}$

observo que es la densidad de una distribución Gamma.

$\Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X=x}(y) \Rightarrow \begin{cases} X \sim \mathcal{U}(1,3) \\ Y|X=x \sim \Gamma(2, 1/x^2) \end{cases}$

• $\text{Var}(Y|X=x) \underset{\text{Tabla}}{=} 2x^4$

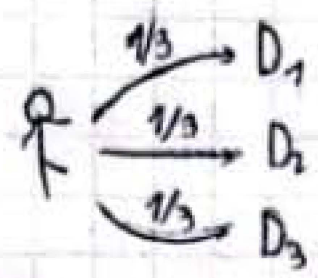
$\Rightarrow \text{var}(Y|X) = 2X^4$

• $\mathbb{P}(\text{var}(Y|X)<6) = \mathbb{P}(2X^4 < 6) = \mathbb{P}(|X| < \sqrt[4]{3}) = \mathbb{P}(-\sqrt[4]{3} < X < \sqrt[4]{3})$

$= \displaystyle\int_{-\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{3}} f_X(x)\,dx \underset{\text{SOP}\{1<x<3\}}{=} \int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{3-1}{2}\,dx = x\Big|_1^{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3} - 1 \simeq \boxed{0.316}$ NO

Maximo Utrera

(1) El subte sale con 9 pasajeros cada uno elige al azar bajar en $\underbrace{\text{Palermo}}_{D_1}$, $\underbrace{\text{Pueyrredon}}_{D_2}$, $\underbrace{\text{Catedral}}_{D_3}$. Calcular $\mathbb{P}$ de que 4 bajen en Palermo sabiendo que uno bajo en Pueyrredon.



- N_i: "cant de pasajeros que bajan en i", $i \in \{D_1, D_2, D_3\}$
- $\mathbb{P}(N_1 = 4 \mid N_2 = 1) \underset{\uparrow \text{ Por tabla}}{=} \binom{8}{4}(1/2)^4(1/2)^{8-4} = \frac{35}{128} \simeq \boxed{0.273}$

$- N_1 \mid N_2 = x \sim \mathcal{B}(9-x, \mathbb{P}(D_1 \mid \bar{D}_2))$

$\Rightarrow N_1 \mid N_2 = 1 \sim \mathcal{B}(8, \underbrace{\frac{1/3}{1/3+1/3}}_{1/2})$ ya que D_2 no puede pasar más.

NOTA

PROBABILIDAD - 81.16 CB004
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA A - 61.06 81.03
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA B - 61.09 81.04 CB003

Evaluación PARCIAL, duración: 4 horas. 23-11-2024

Apellido y Nombres: [redacted]

Correo: [redacted] Curso: [redacted] 12

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados.

1. Sara y Hebe tienen dos mazos de 5 cartas cada uno. El mazo *"común"* tiene las siguientes cartas $(1, 2, 3, 4, 5)$ y el mazo de la *"buena suerte"* tiene $(1, 4, 4, 5, 5)$. Sara elige un mazo al azar y Hebe juega con el restante. Luego cada una muestra una carta al azar de su mazo, la que muestre la carta más alta gana esa ronda (en caso de ser el mismo valor empatan la ronda) y ambas devuelven la carta a su mazo. Sara tuvo una mala racha y perdió las primeras tres rondas, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el mazo de la *"buena suerte"*?

2. Se tienen dos máquinas para producir varillas. La longitud (en metros) de las varillas producidas por la máquina 1 es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(9, 12)$, la de las varillas producidas por la máquina 2 también es uniforme pero sobre el intervalo $(10, 14)$. Se colocan en una caja cuatro varillas producidas por la máquina 1 y seis producidas por la máquina 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en la caja haya más de 1 varilla que mida más de 11 metros?

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 4, x - 1 < y < x + 1\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = |X - Y|$.

4. El tiempo (en minutos) entre llegadas de vehículos a un peaje de una autopista tiene distribución exponencial de media 2, independientes entre sí. La probabilidad de que cada uno de estos vehículos sea un camión es 0.25 (independientes unos de otros y de los tiempos de arribo). Si en una hora pasaron exactamente 10 camiones, ¿cuál es el número esperado de vehículos que han pasado en esa hora?

5. El tiempo que demora Ximena en resolver un ejercicio de la guía de Probabilidad es una variable aleatoria de media 40 minutos y desvío 10 minutos. Si la cantidad total de ejercicios es 184, calcular aproximadamente la cantidad de horas necesarias para resolver, con probabilidad de al menos 0.95, todos los ejercicios de la guía.

$P(\sum^{m} x$ $> 0{,}95$

1. Sara y Hebe tienen dos mazos de 5 cartas cada uno. El mazo *"común"* tiene las siguientes cartas $(1, 2, 3, 4, 5)$ y el mazo de la *"buena suerte"* tiene $(1, 4, 4, 5, 5)$. Sara elige un mazo al azar y Hebe juega con el restante. Luego cada una muestra una carta al azar de su mazo, la que muestre la carta más alta gana esa ronda (en caso de ser el mismo valor empatan la ronda) y ambas devuelven la carta a su mazo. Sara tuvo una mala racha y perdió las primeras tres rondas, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el mazo de la *"buena suerte"*?

C : SARA ELIGE MAZO COMUN ; $P(C) = \frac{1}{2}$

B : " " " "BUENA SUERTE" ; $P(B) = \frac{1}{2}$

S : " PERDIÓ TRES RONDAS

HAY QUE CALCULAR $P(B|S)$

i) SI OCURRIÓ C, SARA TIENE EL MAZO $\underbrace{\{1,2,3,4,5\}}_{I}$ Y HEBE $\underbrace{\{1,4,4,5,5\}}_{II}$

EN CADA RONDA SE FORMA UN PAR (X,Y) DE CARTAS CON $X \in I$ e $Y \in II$.

HAY 25 PARES POSIBLES EQUIPROBABLES. LOS CASOS CON LOS CUALES SARA PIERDE LA RONDA SON:

$(1,4)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,5)\ (2,4)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,5)\ (3,4)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,5)$
$(4,5)\ (4,5) \longrightarrow 14$ CASOS

LUEGO SARA TIENE PROBABILIDAD $14/25$ DE PERDER CADA RONDA.

LAS CARTAS SE REPONEN Y LOS MAZOS SON LOS MISMOS EN CADA RONDA POR LO QUE SUPONEMOS QUE LOS RESULTADOS DE LAS RONDAS SON INDEPENDIENTES. ENTONCES, SI OCURRIÓ C, LA PROBABILIDAD DE QUE SARA HAYA PERDIDO TRES RONDAS

ES:

$$P(S|C) = \frac{14}{25} \times \frac{14}{25} \times \frac{14}{25} = \left(\frac{14}{25}\right)^3$$

ii) SI OCURRIÓ B, SARA TIENE EL MAZO $\underbrace{\{1,4,4,5,5\}}_{II}$ Y HEBE EL MAZO $\underbrace{\{1,2,3,4,5\}}_{I}$

DE LA MISMA FORMA QUE EN EL CASO i) CONTAMOS LOS CASOS PARA LOS QUE SARA PIERDE UNA RONDA:

$(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (4,5)\ (4,5) \longrightarrow$ 6 CASOS

LUEGO: $P(S|B) = \left(\frac{6}{25}\right)^3$

ENTONCES:

$$P(B|S) = \frac{P(S|B)\,P(B)}{P(S)}$$

$$= \frac{P(S|B)\,P(B)}{P(S|B)\,P(B) + P(S|C)\,P(C)}$$

$$= \frac{\left(\frac{6}{25}\right)^3 \cdot 1/2}{\left(\frac{6}{25}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{14}{25}\right)^3 \times \frac{1}{2}} \simeq \boxed{0{,}07297}$$

2. Se tienen dos máquinas para producir varillas. La longitud (en metros) de las varillas producidas por la máquina 1 es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(9, 12)$, la de las varillas producidas por la máquina 2 también es uniforme pero sobre el intervalo $(10, 14)$. Se colocan en una caja cuatro varillas producidas por la máquina 1 y seis producidas por la máquina 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en la caja haya más de 1 varilla que mida más de 11 metros?

CON PEQUEÑAS VARIANTES, ES EL MISMO PROBLEMA 2) DEL PARCIAL DEL 2/11. YA LO HEMOS RESUELTO

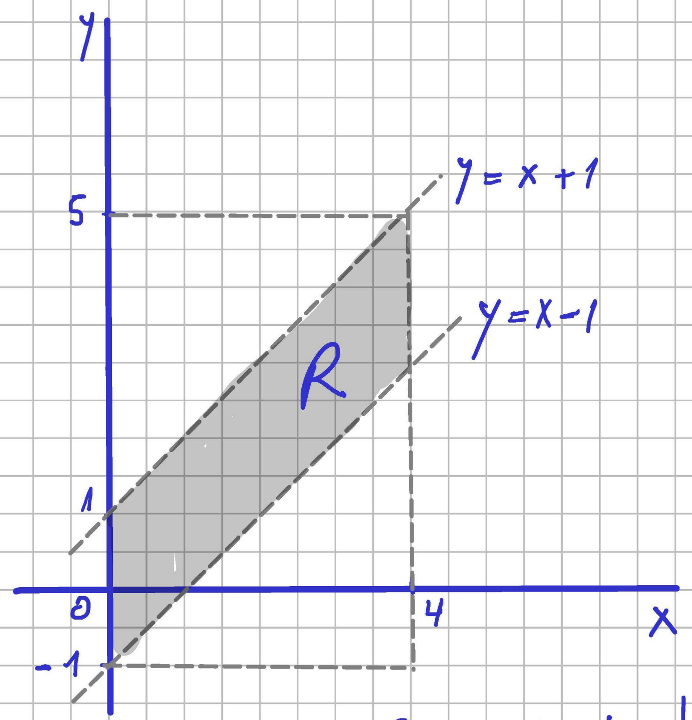
---

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 4, x - 1 < y < x + 1\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = |X - Y|$.

HACEMOS UN GRÁFICO DEL SOPORTE DE LA DENSIDAD CONJUNTA DE X e Y.



OBSERVAMOS QUE PARA $(X, Y) \in R$, $W = |X - Y| \in [0, 1)$

HAY QUE CALCULAR $F_W(w) = P(W \leq w)$ PARA $w \in \mathbb{R}$

COMO $W \in [0,1)$: $P(W \leq w) = 0$ PARA $w < 0$ Y

$P(W \leq w) = 1$ PARA $w \geq 1$

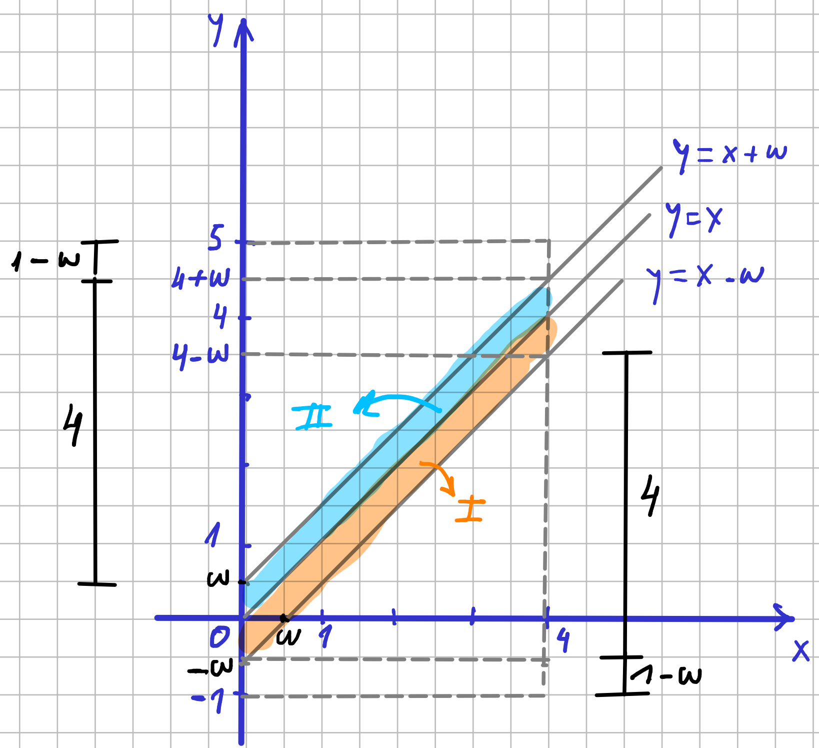
PARA $0 \leq w < 1$: $P(W \leq w) = P(|X-Y| \leq w)$

DONDE $|X-Y| = \begin{cases} X-Y & , X \geq Y \\ -X+Y & , X < Y \end{cases}$

ENTONCES:

$$P(|X-Y| \leq w) = P(\underbrace{X-Y \leq w, X \geq Y}_{I}) + P(\underbrace{-X+Y \leq w, X < Y}_{II})$$

HACEMOS UN GRÁFICO DE LOS PUNTOS DE $I \cup II$



COMO (X,Y) ES UNIFORME EN R PODEMOS CALCULAR LAS PROBABILIDADES COMO COCIENTES DE ÁREAS

ÁREA DE $R = 4 \times 6 - 2 \times \frac{1}{2} 4 \times 4 = 8$

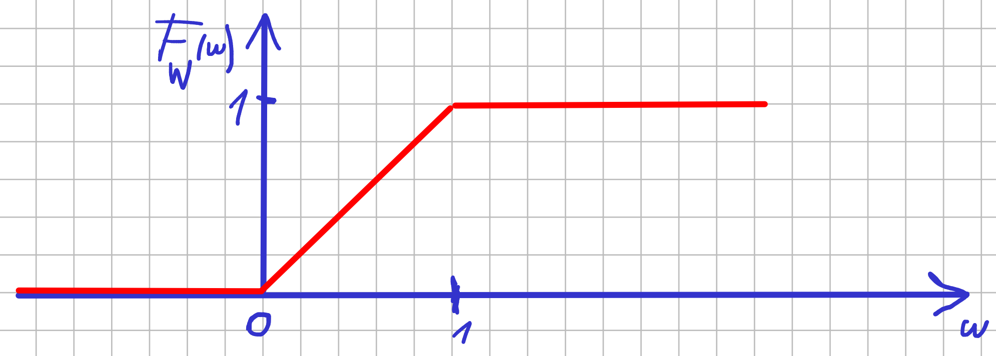
ÁREA DE $I \cup II = 4 \times 6 - 2 \times 4 \times (1-w) - 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8w$

ENTONCES :

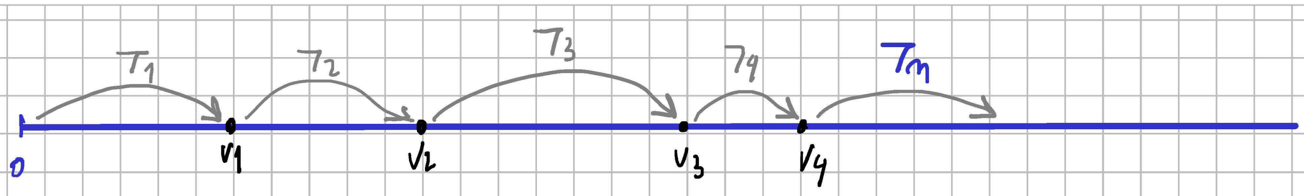
$$P(|X-Y| \leq w) = P((X,Y) \in (I \cup II)) = \frac{8w}{8} = w$$

$$F_W(w) = w \, \mathbb{1}\{0 \leq w < 1\} + \mathbb{1}\{w \geq 1\}$$

RESULTA $W \sim \mathcal{U}[0,1)$



4. El tiempo (en minutos) entre llegadas de vehículos a un peaje de una autopista tiene distribución exponencial de media 2, independientes entre sí. La probabilidad de que cada uno de estos vehículos sea un camión es 0.25 (independientes unos de otros y de los tiempos de arribo). Si en una hora pasaron exactamente 10 camiones, ¿cuál es el número esperado de vehículos que han pasado en esa hora?



$T_m \sim \text{EXP}(\lambda)$ INDEPENDIENTES $\longrightarrow$ ARRIBO VEHÍCULOS : PROCESO POISSON(λ)

$E[T_m] = 2\,\text{MIN} \longrightarrow \lambda = 1/2\,\text{MIN} = 30/\text{HORA}$

CADA VEHÍCULO $\xrightarrow{0.25}$ C (CAMIÓN) $\longrightarrow$ ARRIBO CAMIONES : PROCESO POISSON(0.25λ)

CADA VEHÍCULO $\xrightarrow{0.75}$ $\bar{C}$ (NO CAMIÓN) $\longrightarrow$ ARRIBO OTROS : PROCESO POISSON(0.75λ)

PARA UN INTERVALO DE LONGITUD $\Delta t = 1$ hora SE DEFINEN

N : CANTIDAD VEHÍCULOS ARRIBADOS $\qquad N \sim \text{POISSON}(\lambda \Delta t)$

N_C : " CAMIONES " $\qquad N_C \sim \text{POISSON}(0.25\lambda\Delta t)$

$N_{\bar{C}}$: " OTROS " $\qquad N_{\bar{C}} \sim \text{POISSON}(0.75\lambda\Delta t)$

SE PIDE $E[N \mid N_C = 10]$

ENTONCES:

$$E[N \mid N_C = 10] = E[N_C + N_{\bar{C}} \mid N_C = 10] = 10 + E[N_{\bar{C}} \mid N_C = 10]$$

$= 10 + E[N_{\bar{C}}]$ POR SER N_C y $N_{\bar{C}}$ INDEPENDIENTES

$$= 10 + 0.75 \times \frac{30}{\cancel{\text{HORA}}} \times 1\,\cancel{4}\,\text{PM} = \boxed{32.5}$$

5. El tiempo que demora Ximena en resolver un ejercicio de la guía de Probabilidad es una variable aleatoria de media 40 minutos y desvío 10 minutos. Si la cantidad total de ejercicios es 184, calcular aproximadamente la cantidad de horas necesarias para resolver, con probabilidad de al menos 0.95, todos los ejercicios de la guía.

T_i : TIEMPO, EN MINUTOS, PARA RESOLVER EL i-ÉSIMO EJERCICIO

$i \in \{1, 2, 3, \ldots, 184\}$; SUPONEMOS LAS T_i INDEPENDIENTES

$E[T_i] = 40$; $V[T_i] = 10^2$; $\sum_{i=1}^{184} T_i$: TIEMPO TOTAL PARA RESOLVER LOS 184 EJERCICIOS, EN MINUTOS.

SE QUIERE CALCULAR UNA CANTIDAD t DE MINUTOS TAL QUE

$$P\left(\sum_{i=1}^{184} T_i \leq t\right) \geq 0.95$$

COMO EL TIEMPO TOTAL ES UNA SUMA DE 184 VARIABLES IID CON ESPERANZAS Y VARIANZAS FINITAS, SE PUEDE APLICAR EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE PARA APROXIMAR LA PROBABILIDAD

$$P\left(\sum_{i=1}^{184} T_i \leq t\right) \simeq P\left(Z \leq \frac{t - 184 \times 40}{\sqrt{184 \times 10^2}}\right) \geq 0.95$$

CON $Z \sim N(0,1)$

ENTONCES:

$$\Phi\left(\frac{t - 184 \times 40}{10\sqrt{184}}\right) \geq 0.95$$

$$\frac{t - 7360}{10\sqrt{184}} \geq \Phi^{-1}(0.95) = 1.64485$$

$$\longrightarrow t \geq 7583,118 \text{ MIN}$$

$$\longrightarrow \boxed{t \geq 126,385 \text{ HORAS}}$$

20-2-2024
industriales
(1,2,3) compartidos

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente resueltos y justificados.

B

1. En la final del torneo de *Age of Empires* se enfrentan *Hera* contra *Viper*. Juegan al mejor de siete partidas (gana la final el primero en ganar 4 partidas, como máximo juegan 7, no hay empates). En cada partida, y de forma independiente, *Hera* gana con probabilidad 0.70.

Sabiendo que la primera partida la ganó *Viper*, calcular la probabilidad de que se hayan jugado exactamente cinco partidas hasta definir la final.

2. El diámetro de ciertas arandelas debe ser 5 mm por especificación. Se fabrican de manera tal que su diámetro es una variable normal con media 5 mm y desvío 0.1 mm.

En el taller se reciben arandelas. Por las tolerancias de instalación, aquellas cuyo diámetro difiere en valor absoluto menos de 0.05 mm del especificado son aptas y requieren un tratamiento sencillo de costo 1 peso, aquellas que difieren entre 0.05 y 0.08 requieren un tratamiento de adaptación con costo 5 pesos, y aquellas que difieren más de 0.08 otro tratamiento más complicado con costo 10.

Hallar, para una arandela tomada al azar, la esperanza del costo del tratamiento.

B

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 2, 1 - x < y < 3 - x\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = |X + Y - 2|$. — notar las barras de valor absoluto —

B

4. Nacho viaja en *Uber* a la facultad. Paga con tarjeta automáticamente, y deja de propina un billete de 500, de 1000 o de 2000, según tenga disponible, con probabilidades 0.3, 0.5 y 0.2 respectivamente.

Hallar, aproximadamente, la cantidad de viajes que debe hacer para que el total de propina que pagó supere los 22050 pesos con probabilidad 0.90 o mayor.

B

5. En el proceso de fabricación de una tela en rollos aparecen fallas. La longitud de tela hasta la primera falla y las longitudes entre dos fallas consecutivas son todas variables aleatorias exponenciales de parámetro λ independientes. Se fabrican n rollos de longitud L. Sea X_i: cantidad de fallas en el i-ésimo rollo, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Si las X_i son independientes, determinar a qué valor converge

$$G(n) = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n^2}$$

cuando $n \to \infty$.

1) X: Cant de partidas jugadas
V_{1ra}: Viper gana la 1^{ra}

$$P(X=5 \mid V_{1ra}) = \frac{P(X=5, V_{1ra})}{P(V_{1ra})}$$

Contamos casos para el numerador: (Se gana con 4)

VHHHH $\rightarrow 0,3 \cdot (0,7)^4$
VVVHV $\rightarrow (0.3)^4 \cdot 0.7$
VVHVV $\rightarrow (0.3)^4 \cdot 0.7$
VHVVV $\rightarrow (0.3)^4 \cdot 0.7$
~~VVVVH~~ $\rightarrow$ No cuenta porque se terminaría en la 4ta partida

$$P(X=5, V_{1ra}) = 3 \cdot (0.3)^4 \cdot 0.7 + 0,3 \cdot (0,7)^4$$
$$= 0,01701 + 0.07203$$
$$= 0.08904$$

$P(V_{1ra}) = 0.3 \rightarrow$ No importa cual sea, son independientes

$$P(X=5 \mid V_{1ra}) = \frac{0.08904}{0.3} = 0.2968$$

NOTA

5) $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda . L)$

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n^2} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}_{①} - \underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2}_{②}$$

Por ~~la~~ LDGN sabemos que $\overline{X_i} \longrightarrow E[X_i]$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X_i}\right)$$

Cuando $n \to \infty$, $G(n)$ converge a $E[X_i^2] - E[X_i]^2 \longrightarrow$

$\longrightarrow \text{Var}[X_i] = \lambda L$

$G(n)$ converge a λL cuando n tiende a infinito.

Papel de fibra de caña de azúcar.

4) ~~Buscamos~~ $\cancel{P\left(\sum_{i=1}^{n} X\right.}$

p: Propina dada $\quad$ $Soporte_p = \{500, 1000, 2000\}$

Buscamos $P\left(\sum_{i=1}^{n} p > 22050\right) \geq 0.9$

Hallamos $E[p]$ y $V[p]$:

$E[p] = 500 \cdot 0{,}3 + 1000 \cdot 0.5 + 2000 \cdot 0.2$

$E[p] = 1050$

$V[p] = E[p^2] - E[p]^2$

$E[p^2] = 500^2 \cdot 0{,}3 + 1000^2 \cdot 0{,}5 + 2000^2 \cdot 0{,}2$

$E[p^2] = 1375000$

$V[p] = 1375000 - 1050^2 = 1375000 - 1102500 = 272500$

Podemos aprox $\sum_{i=1}^{n} p \approx N(n \cdot E(x), n \cdot Var[x])$
(Por T.C.L)

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p - n \cdot E(x)}{\sqrt{n \cdot Var[x]}} > \frac{22030 - n \cdot E[x]}{\sqrt{n \cdot Var[x]}}\right)$$

$$P\left(Z > \frac{22.030 - n \cdot 1050}{\sqrt{n \cdot 272500}}\right) \geq 0.9$$

$$= P\left(Z < \frac{22.050 - n \cdot 1050}{\sqrt{n \cdot 272500}}\right) \leq 0.1 =$$

$$0.9 = \Phi(1.28)$$

$$P\left(Z > \frac{22050 - n\,1050}{\sqrt{n\,272500}}\right) \geq \Phi(1.28)$$

$$P\left(Z \leq \frac{22050 - n\,1050}{\sqrt{n\,272500}}\right) \leq 1 - \Phi(1.28$$

$$\leq \Phi(-1.28)$$

$$\frac{22050 - n\,1050}{\sqrt{n\,272500}} = -1.28$$

$\longrightarrow$ Resolviendo la ecuacion cuadratica tenemos que $n_1 \approx 24.125$

$n_2 = 18,27$

Utilizamos n_1 y redondeamos para arriba para garantizar la condición:

Rta $n = 25$ (cant de viajes.

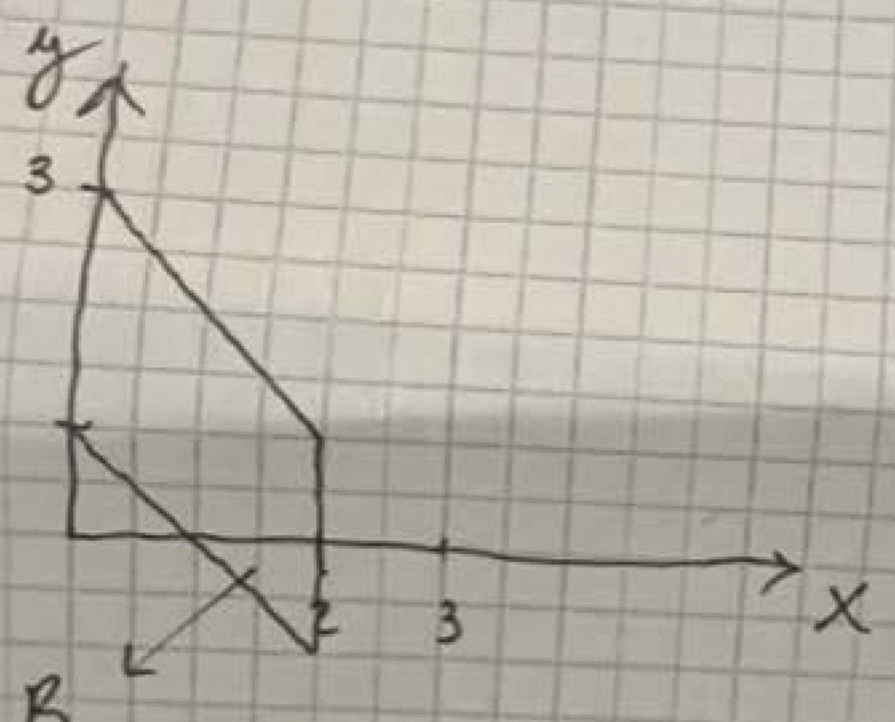
3) Primero hallamos $f_{XY}(x,y)$, al ser uniformes:

$$\int_0^2 \int_{1-x}^{3-x} K \, dy \, dx = 1$$

$$K \int_0^2 2 \, dx = 1 \rightarrow 4K = 1$$

$$K = 1/4$$

$$f_{XY}(x,y) = 1/4 \cdot \mathbb{1}\{0 < x < 2,\ 1-x < y < 3-x\}$$



$\cancel{P(W \leq w) = P(|X+Y| \geq 2)}$

$\cancel{= P(|X+Y-2| \leq w)}$

Si $W = |X+Y-2|$ y $0<x<2,\ 1-x<Y<3-X$

entonces $W \in (0,1)$

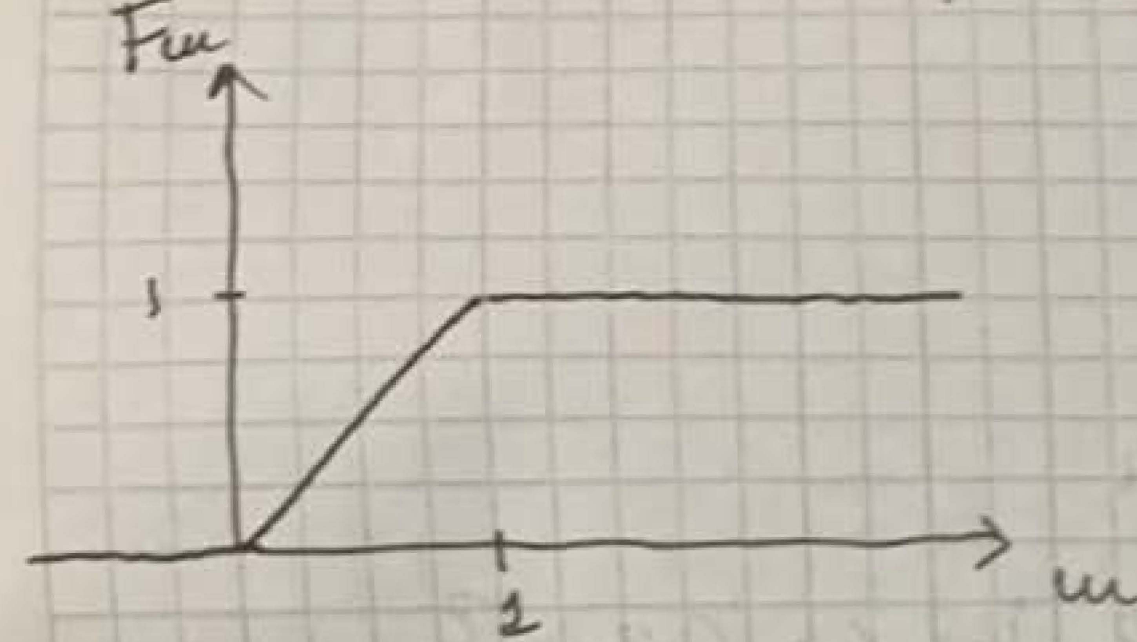
$$P(W \leq w) = P(|X+Y-2| \leq w) = P(-w \leq X+Y-2 \leq w)$$

$$= P(-X+2-w \leq Y \leq -X+2+w)$$

$$\underset{w \in (0,1)}{P(W \leq w)} = \int_0^2 \int_{-x+2-w}^{-x+2+w} f_{XY}(x,y) \, dy \, dx = \frac{1}{4} \int_0^2 2w \, dx$$

$$P(W \leq w) = w$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 1 & w \geq 1 \\ w & 0 < w < 1 \\ 0 & w \leq 0 \end{cases}$$



cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5

B

1. En la final del torneo de *Age of Empires* se enfrentan *Hera* contra *Viper*. Juegan al mejor de siete partidas (gana la final el primero en ganar 4 partidas, como máximo juegan 7, no hay empates). En cada partida, y de forma independiente, *Hera* gana con probabilidad 0.70.

Sabiendo que la primera partida la ganó *Viper*, calcular la probabilidad de que se hayan jugado exactamente cinco partidas hasta definir la final.

B

2. El diámetro de ciertas arandelas debe ser 5 mm por especificación. Se fabrican de manera tal que su diámetro es una variable normal con media 5 mm y desvío 0.1 mm.

En el taller se reciben arandelas. Por las tolerancias de instalación, aquellas cuyo diámetro difiere en valor absoluto menos de 0.05 mm del especificado son aptas y requieren un tratamiento sencillo de costo 1 peso, aquellas que difieren entre 0.05 y 0.08 requieren un tratamiento de adaptación con costo 5 pesos, y aquellas que difieren más de 0.08 otro tratamiento más complicado con costo 10.

Hallar, para una arandela tomada al azar, la esperanza del costo del tratamiento.

M

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 2, 1 - x < y < 3 - x\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = |X + Y - 2|$. — notar las barras de valor absoluto —

B

4. El vínculo entre el bit de entrada y el bit de salida de un cierto canal de comunicación está determinado por la función de probabilidad

$$p_\theta(x, y) = \frac{e^{\theta x y}}{3 + e^\theta} \cdot \mathbf{1}\left\{(x, y) \in \{0, 1\}^2\right\} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Se toman cinco muestras obteniendo,

$$(0, 1) \quad (0, 0) \quad (1, 1) \quad (1, 1) \quad (0, 0)$$

estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que en la siguiente prueba se observe el par $(1, 1)$.

M

5. Los siguientes datos son las duraciones (en minutos) del tiempo que tarda Tomás en ir al kiosco: $3, 5, 6, 2, 9$. Las muestras corresponden a una distribución exponencial de intensidad λ, independientes unas de otra. Tomás afirma que $\lambda > 0.125$. Diseñe un test de hipótesis para comprobar lo que dice Tomás, escribiendo claramente la regla de decisión. ¿Qué decisión toma en base a la muestra?. $\alpha = 0{,}05$

1)
si Hera tiene probabilidad de 0,70, X: numero de partidas
entonces viper tiene de 0,30

Me piden la probabilidad de que hallan jugado 5 partidas hasta el final, sabiendo que la primera partida ganó Viper

$$\frac{\mathbb{P}(X=5 \mid \text{Viper ganó la primera})}{}$$

$\mathbb{P}(X=5)$

VVVHV $= 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = \frac{567}{100000}$

VVHVV $= 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = \frac{567}{100000}$

VHVVV $= 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = \frac{567}{100000}$

HVVVV $= 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = \frac{567}{100000}$

HHHVH $= 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}07203$

HHVHH $= 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}07203$

HVHHH $= 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}07203$

VHHHH $= 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \; 0{,}07203$

$\mathbb{P}(X=5 \mid \text{Viper ganó la primera})$

VVVHV $= \frac{567}{100000}$

VVHVV $= \frac{567}{100000}$

VHVVV $= \frac{567}{100000}$

VHHHH $= 0{,}07203$

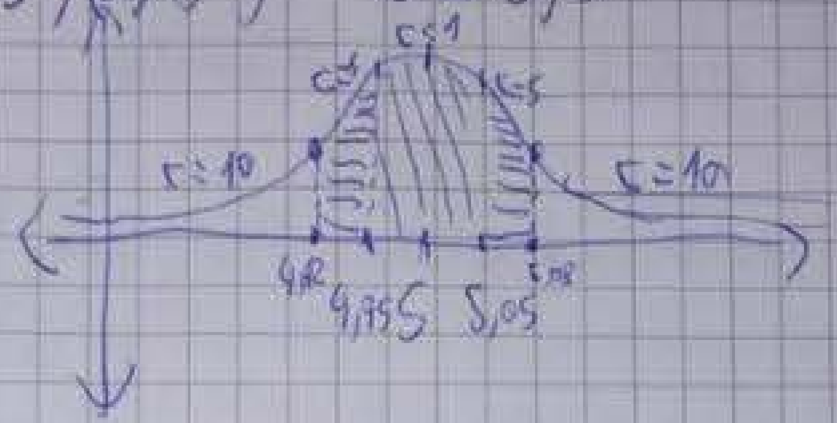
$$\frac{\mathbb{P}(X=5 \mid \text{V ganó la primera})}{\mathbb{P}(X=5)} = \frac{\frac{567}{100000} + \frac{567}{100000} + \frac{567}{100000} + 0{,}07203}{4\left(\frac{567}{100000}\right) + 4(0{,}07203)} = \frac{\frac{1113}{12500}}{\frac{777}{2500}} = 0{,}28$$

21:19

② D = "Diámetro en mm de arandela"

$D \sim \mathcal{N}(5, (0,1)^2)$ $\sigma = 0,1$

Se obtiene graficando D

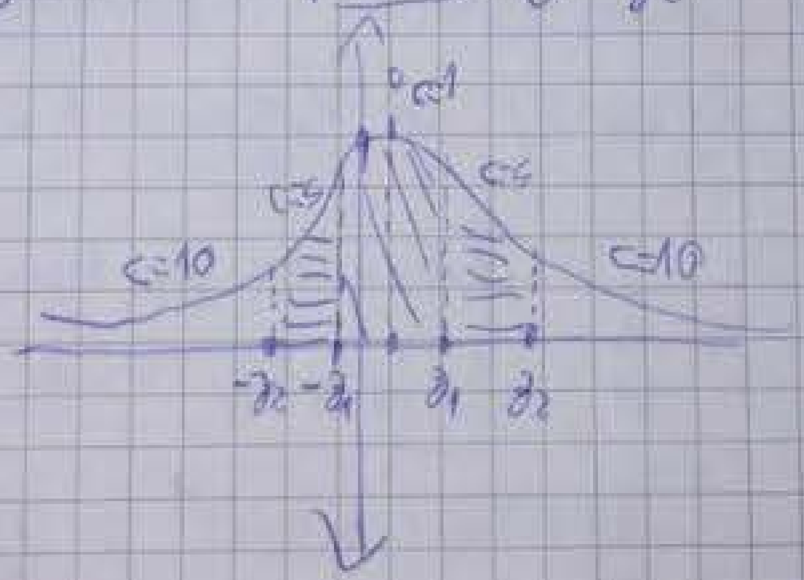


Estandarizando $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$Z = \frac{D-5}{0,1} \Rightarrow P(|D-5| \leq \alpha) = P\left(\overbrace{\left|\frac{D-5}{0,1}\right|}^{Z} \leq 10\alpha\right)$$

Sea así $z_1 = 10 \cdot 0,05 = \boxed{0,5 = z_1}$ y $z_2 = 10 \cdot 0,08 = \boxed{0,8 = z_2}$

se obtiene



(Mal dibujo)
No a escala tampoco

Para C_1 = "Costo de 1" $P(C_1) = \overbrace{P(Z \leq z_1) - P(Z \leq -z_1)}^{0,383}$

C_2 = "Costo es 5" $P(C_2) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq -z_2) - P(C_1) \Rightarrow$ el area del medio

C_3 = "Costo es 10" $P(C_3) = 1 - P(C_1) - P(C_2) = 1 + P(Z \leq -z_2) - P(Z \leq$

tablas

Con $P(Z \leq z_1) = 0,6915$ $P(Z \leq \overset{0,8}{z_2}) = 0,7881$

$P(Z \leq -z_1) = 0,3085$ $P(Z \leq -z_2) = 0,2119$

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si } C_1 \\ 5 & \text{si } C_2 \\ 10 & \text{si } C_3 \end{cases}$$

$P(C_3) = 0,4$

$P(C_2) = 0,1$

mblea

3) Sea (X,Y) un vector con distribución uniforme en R

siendo $R = \{(x,y) / 0 < x < 2,\ 1-x < y < 3-x\}$

Piden hallar y graficar $F_W(w)$, siendo $W = |X+Y-2|$

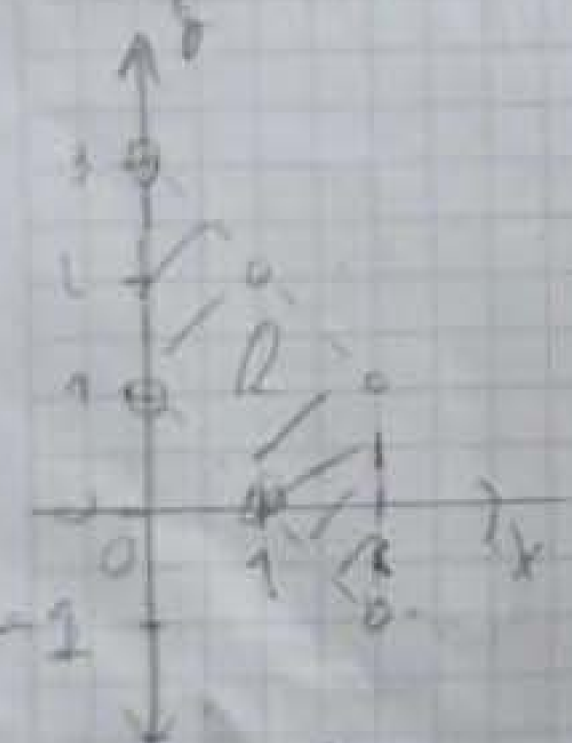
Como (X,Y) es uniforme en R calculo $f_{X,Y}(x,y)$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \iint k \, dx\, dy = 1$$

$$\int_0^2 \int_{1-x}^{3-x} k \, dy\, dx = 1$$

$$4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}$$

Ahora grafico X e Y



Por como me definen a W, esta siempre va a ser positiva, luego $w \geq 0$

$W = |X+Y-2|$

Piden: $F_W(w) = P(W \leq w) = P(|X+Y-2| \leq w) = (A)$

$(A) = P(-w \leq X+Y-2 \leq w) = P(-w+2-X \leq Y \leq w+2-X)$

Ahora busco valores de w para estar entre $y = 1-x$ e $y = 3-x$

sea $y = -w+2-x$, $y = w+2-x$, $w \geq 0$

si $w = 1 \Rightarrow y = 1-x$, $y = 3-x$, $w \geq 0$

[illegible]

por lo tanto $w \in (0,1) \Longrightarrow F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ P & \text{si } 0 \leq w < 1 \\ 1 & \text{si } w \geq 1 \end{cases}$

21:19

$$E[C] = 1 \cdot P(C_1) + 5 \cdot P(C_2) + 10 \, P(C_3)$$

$$E[C] = 0{,}383 + 5 \cdot 0{,}1932 + 10 \; 0{,}4238$$

$$\boxed{E[C] = 5{,}587}$$

2) $f(x,y)$ uniforme en $R = \{(x,y) : 0<x<2,\ 1-x<$

$P(-w+1-X \leq Y \leq w+1-X)$

[illegible]

$$P(-w+1-X \leq Y \leq w+1-X) = \iint f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

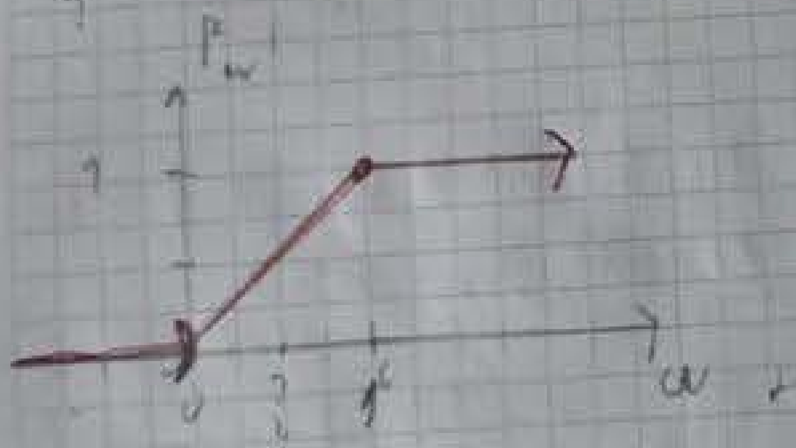
$$= \int_0^2 \int_{-w+1-x}^{w+1-x} \frac{1}{4}\, dy\, dx$$

$$P(-w+1-X \leq Y \leq w+1-X) = w$$

[illegible]

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ w & \text{si } 0 \leq w < 1 \\ 1 & \text{si } w \geq 1 \end{cases}$$

[illegible]



4) Tengo la función de probabilidad

$$P_\theta(x,y) = \frac{e^{\theta xy}}{3+e^\theta} \mathbb{1}\{(x,y) \in (0,1)^2\}$$

La función de verosimilitud es el producto de las probabilidades de los datos observados

$$P_\theta(0,1) = \frac{e^0}{3+e^\theta}, \quad \underbrace{P_\theta(0,0) = \frac{e^0}{3+e^\theta}}_{\times 2}, \quad \underbrace{P_\theta(1,1) = \frac{e^\theta}{3+e^\theta}}_{\times 2},$$

$$L(\theta) = P_\theta(0,1) \cdot P_\theta(0,0) \cdot P_\theta(1,1), P_\theta(1,1), P_\theta(0,0)$$

$$L(\theta) = \frac{e^0}{3+e^\theta} \cdot \frac{e^0}{3+e^\theta} \cdot \frac{e^\theta}{3+e^\theta} \cdot \frac{e^\theta}{3+e^\theta} \cdot \frac{e^0}{3+e^\theta} = \frac{e^{2\theta}}{(3+e^\theta)^5} \Rightarrow L(\theta) = \frac{e^{2\theta}}{(3+e^\theta)^5}$$

Sacamos log

$$\frac{d\log(\theta)}{d\theta} = 2\theta - 5\log(3+e^\theta) \quad \text{saco la deriva}$$

$$0 = 2 - 5\frac{e^\theta}{3+e^\theta} \Rightarrow \frac{5e^\theta}{\cancel{3+e^\theta}} = 2(3+e^\theta) \Rightarrow 5e^\theta = 6+2e^\theta$$

$$\cancel{3}e^\theta = \cancel{6}$$

$$e^\theta = 2$$

$$\theta = \log(2)$$

Entonces la probabilidad de observar (1,1)

$$\boxed{P_\theta(1,1) = \frac{e^{\theta \cdot 1 \cdot 1}}{3+e^\theta} = \frac{e^{\log(2)}}{3+e^{\log(2)}} = \frac{2}{5} = 0{,}4}$$

5) Los siguientes datos son las duraciones (en min) del tiempo que tarda Tomas en ir al kiosko: 3, 5, 6, 2, 9. Las muestras corresponden a una distrib. Exp. de intensidad λ indep. unas de otras. Tomas afirma que $\lambda > 0.125$. Diseñe un Test de hipótesis para comprobar lo que dice Tomas, escribiendo claramente la regla de decisión ¿De qué decisión toma en base a la muestra?

→ ~~Xnos~~ X_i: "i-ésimas duraciones (en min) del tiempo que tarda Tomas en ir al kiosko"
$i=1,\dots,5$

→ $X_1, \dots, X_5 \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$

→ $H_0: \lambda \leq 0.125$ vs $\lambda > 0.125$

al tener X una distribución perteneciente
~~→ at so de Flia Exponencial ya que~~ a la las Familias Exponenciales.

~~con~~ ya que $f_\lambda(x) = \underbrace{\lambda}_{A(\lambda)} e^{-\lambda x} \cdot \underbrace{\mathbb{1}\{x>0\}}_{h(x)}, \lambda > 0$

$C(\lambda) = -\lambda$ → con $C(\lambda)$ decreciente

$r(x) = x$

→ Entonces $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Es un Est. suficiente ~~para~~

→ $\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T > k_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ → $\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < k'_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

→ $\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} X_i < k'_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

→ uso mi 2da condición → α $0{,}05 = P_{\lambda=0.125}(\delta(\underline{X}) = 1) = P_{\lambda=0.125}(\sum_{i=1}^{n} X_i < k'_\alpha)$

→ $\sum_{i=1}^{5} X_i \sim \Gamma(5, 0.125)$ → bajo H_0

calculo → $P_{\lambda=0.125}(\sum_{i=1}^{n} X_i < \underbrace{k'_\alpha}_{\text{lo calculo con } \Gamma(5, 0.125)}) = 0{,}05$

→ $k'_\alpha = 15{,}761$

→ con lo cual $\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^{5} X_i < 15{,}761 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

→ evaluo en mi muestra

$\sum_{j=1}^{5} x_i = 25 \quad , n=5$

→ $\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\{1 \text{ si } 25 < 15{,}761\} = 0$

→ con lo cual, no rechazo H_0

→ Por lo tanto, No se puede comprobar lo que dice tomas.