PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Si encontrás un error podes escribirme :)
candelariafya@gmail.com

Candelaria Fuentes

v.a.	siempre es variable aleatoria
cte	constante
$\mathbb{N}_0$	los naturales y el cero $(0, 1, 2, 3 \ldots \infty)$
sop(X)	soporte de la v.a. X
ECM	Error cuadrático medio
iid	independientes e identicamente distribuidas
i.d.	identicamente distribuidas
EMV	estimador de máxima verosimilitud
IC	intervalo de confianza
g.l.	grados de libertad
VC	valor crítico

NOTA: A este resumen le falta info sobre EMV

PROBABILIDAD Estudio del azar

✓ **Experimentos aleatorios:** conozco todos los resultados posibles, pero no sé cuál va a ocurrir.

✓ **Espacio muestral Ω:** conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio.

✓ **Eventos elementales ω:** elementos del conjunto Ω

EJEMPLO

- Ω de tirar una moneda: $\Omega_1 = \{\text{"cara"}; \text{"ceca"}\}$
- Ω de tirar una moneda dos veces: $\Omega_2 = \{(\text{cara}; \text{ceca}); (\text{cara}; \text{cara}); (\text{ceca}; \text{cara}); (\text{ceca}; \text{ceca})\}$
- Ω de la cantidad de personas que pasan por: una calle entre las 11 y las 12 hs $\Omega_3 = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0$ (naturales + cero: es ∞)

✓ **Evento o suceso:** subconjunto de Ω

EJEMPLO

experimento: tirar un dado $\rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\rightarrow$ Evento A: "es par" $\rightarrow$ $A = \{2, 4, 6\}$

✓ **Espacio equiprobable.** todos los elementos de Ω tienen la misma probabilidad

✓ **Frecuencia absoluta:** cantidad de veces que sucede el evento A (o #A), n_A

✓ **Frecuencia relativa.** relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos. $f_A = \frac{n_A}{n}$

✓ **Probabilidad de un evento A:** Es un número (entre 0 y 1) que se le asigna a cada evento del espacio muestral.

LAPLACE solo sirve para espacios equiprobables

$$\boxed{P(A) = \frac{\#\text{casos en los que sucede } A}{\#\text{casos posibles del experimento}} = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

GRAFICAR Ω

EJEMPLO

- Experimento: Tirar un dado dos veces

D_i: "valor observado en el tiro i", $i \in \{1, 2\}$

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$\Omega = \{(a, b) . \ a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ PAR ORDENADO

$\#\Omega = 36$ (Ω tiene 36 elementos)

- Evento A: "los dos resultados son iguales"

Como Ω es equiprobable uso Laplace

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36}$

✓ **complemento de un evento A:** todos los eventos de Ω donde no sucede A

↳ $\bar{A}$ o A^c

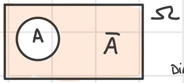


DIAGRAMA DE VENN

✓ **Álgebra de eventos:** sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω, diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de eventos si:

AXIOMA

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. si $B \in \mathcal{A}$, entonces $\bar{B} \in \mathcal{A}$
3. si $B, C \in \mathcal{A}$, entonces $B \overset{\text{unión}}{\cup} C \in \mathcal{A}$
4. (condición para que sea σ-Álgebra) Si A_n para $A_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ entonces la unión de todos esos eventos $A_i \in \mathcal{A}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Propiedades

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
3. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ entonces $\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n}}_{\text{intersección}} A_i \in \mathcal{A}$

EJEMPLO Sea $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Hallar la menor álgebra de subconjuntos de Ω tal que el subconjunto $\{2,4,6\}$ pertenezca a ella.

$$\mathcal{A} = \Big\{ \underbrace{\{2,4,6\}}_{\text{Pertenece por enunciado}} ; \underbrace{\{1,3,5\}}_{\text{AXIOMA 2}} ; \underbrace{\{1,2,3,4,5,6\}}_{\text{AXIOMA 3}} ; \underbrace{\emptyset}_{\text{PROPIEDAD 1; AXIOMA 2 complemento del conjunto anterior}} \Big\}$$

✓ **Eventos mutuamente excluyentes o disjuntos** No pueden suceder ambos: $A \cap B = \emptyset$

✓ **una probabilidad (o medida de probabilidad):** función $P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ que a cada evento A le hace corresponder un número real $P(A)$ con las siguientes propiedades:

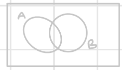
1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. (AXIOMA DE CONTINUIDAD) Para cada sucesión decreciente de eventos $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots$ (A₁ contiene a A₂) tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ vale que $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$

Propiedades

Demostración: $\Omega = A \cup \bar{A}$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = 1$; $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración:



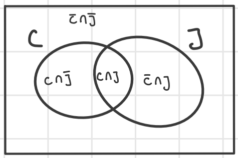
$P(A) + P(B) \rightarrow$ estamos sumando la intersección dos veces

3. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ es una sucesión de elementos de A, mutuamente excluyentes 2 a 2 (cada par que tomo es mutuamente excluyente)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

EJEMPLO En Argentina el 80% de los programadores usa Java, C o ambos. El 50% usa Java y el 40% usa C. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un programador al azar use Java y C, solo Java, solo C, ninguno?

- Experimento: elegir uno al azar y ver qué usa
- Eventos → J: 'el programador usa Java' ; C: 'el programador usa C'



$\bar{C} \cap \bar{J}$, $C \cap \bar{J}$, $C \cap J$, $\bar{C} \cap J$ son mutuamente excluyentes

DATOS

$P(J \cup C) = 0{,}8$

$P(J) = 0{,}5$

$P(C) = 0{,}4$

$\rightarrow P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(C \cap J)$

$0{,}8 = 0{,}5 + 0{,}4 - P(C \cap J)$

$P(C \cap J) = 0{,}1$

$(\bar{C} \cap \bar{J}) \cup (C \cup J) = \Omega$

$P((\bar{C} \cap \bar{J}) \cup (C \cup J)) = P(\Omega) = P(\bar{C} \cap \bar{J}) + P(C \cup J) = 1$

$P(\bar{C} \cap \bar{J}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ (no usa ninguno)

$P(C \cap \bar{J}) + P(C \cap J) = P(C)$

$P(C \cap \bar{J}) = 0{,}4 - 0{,}1$ (solo usa C)

$P(\bar{C} \cap J) + P(C \cap J) = P(J)$

✓ Espacio de probabilidad: una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donde $\Omega \neq \emptyset$

TÉCNICAS DE CONTEO

#CP: cantidad de casos posibles de mi experimento

✓ **Regla del producto**: Dados dos conjuntos A y B con n_A y n_B elementos cada uno respectivamente, la cantidad de todos los pares ordenados que pueden formarse con un elemento de A y uno de B se calcula como $n_A \times n_B$.

EJEMPLO ¿Cuántas patentes de 3 letras y 3 números puedo formar?

$\underset{L}{26}\ \underset{L}{26}\ \underset{L}{26}$ $\quad \underset{N}{10}\ \underset{N}{10}\ \underset{N}{10} \longrightarrow$ #CP: $26^3 \cdot 10^3$

ABECEDARIO: 26 letras

NÚMEROS: 10 dígitos $[0;9] \in \mathbb{N}_0$

✓ **Permutaciones**: La cantidad de formas distintas en que se pueden ordenar n elementos es $n!$

✓ **Variaciones:** es la cantidad de subconjuntos <u>ordenados</u> de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos.

$$\boxed{V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Calculadora: nPr

EJEMPLO En un cine con 70 butacas, ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 45 personas?

$\frac{70!}{(70-45)!}$ o calculadora $70P45 \longrightarrow 7{,}72 \times 10^{74}$

✓ **Combinaciones:** Es la cantidad de subconjuntos <u>NO</u> ordenados de r elementos que pueden formarse a partir de un conjunto de n elementos.

$$C_{n,r} \cdot r! = V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

DATO: $\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$

$$\boxed{C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}}$$

Calculadora: nCr

EJEMPLO ¿De cuantas formas diferentes puedo elegir 11 personas de un grupo de 30 para formar un equipo de fútbol? RTA: $\binom{30}{11}$ CALCU: $30C11$

EJEMPLO Tengo un mazo de cartas españolas para jugar al truco. ¿Cuantas manos distintas puedo tener donde todas son de oro? mano: 3 cartas (no importa el orden).

RTA: $\binom{10}{3}$ casos posibles donde todas son de oro

¿Cuantas manos puedo recibir donde todas las cartas son del mismo palo?

RTA: $\binom{10}{3} \times 4$ Porque todos los palos tienen la misma cantidad de cartas. $\binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3}$ uno por cada palo

✓ **Permutaciones con elementos repetidos:** Tenemos n elementos en los cuales hay n_1 en la clase 1, n_2 en la clase 2, ..., n_k en la k-ésima. El número de permutaciones de $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ objetos está dado por:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}}$$

EJEMPLO

¿De cuántas maneras puedo reordenar las letras de la palabra ANANA?

A tener en cuenta: si intercambio la primer A con la segunda A, sigo teniendo ANANA, no cuenta como otro elemento. ¿De cuantas formas puedo acomodar la letra A? $\binom{5}{3}$ (de 5 lugares elijo 3)

COMO LOS ESPACIOS VACÍOS ES N NO HACE FALTA NADA MÁS.

OTRA FORMA

$$\frac{5!}{3!\,2!}$$

$5!$ → permutaciones de todas las letras (como si todas fuesen diferentes)

$2!$ → permutaciones de la letra N

$3!$ → permutaciones de la letra A que se repitieron. (al dividir las saco)

DIVIDO POR

$\prod_i (\text{cantidad de veces que se repite } i)!$

con $i \in$ letras

→ con la palabra MANZANA _ _ _ _ _ _ _

$\#CP = \binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$ (multiplico por la regla del producto) o $\#CP = \dfrac{7!}{3!\,2!}$

7 → CANTIDAD DE LETRAS

✓ Método de bolas y urnas — Método bose-einstein

- solo para bolas <u>indistinguibles</u>
- ordeno r elementos indistinguibles en k urnas

$$\boxed{\#CP = \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}}$$

EJEMPLO

1 bolita, 3 urnas, tiro 3 veces y marco los resultados

U1	U2	U3
xxx		
	xxx	
		xxx
x	x	x
xx	x	
xx		x
	xx	x
x	xx	
	x	xx
x		xx

→ modelo

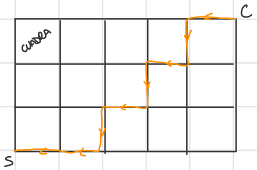
xxx||
|xxx|
||xxx
x|x|x
xx|x|
xx||x
|xx|x
x|xx|
|x|xx
x||xx

→ son siempre 3 cruces y 2 palitos → $\dfrac{5!}{3!\,2!}$

→ si tiro 8 veces en 5 urnas → 8 cruces, 4 palitos → $\dfrac{12!}{8!\,4!} = \binom{12}{8} = \binom{12}{4}$

EJEMPLO

Quiero ir de C a S, solo moviéndome hacia la izquierda o hacia abajo. ¿Cuántas rutas distintas puedo tomar?

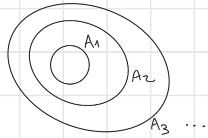


caso dibujado: iaiaiaii

$\#CP: \dfrac{8!}{3!\,5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

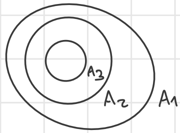
✓ **Teorema**: sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de eventos tales que $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n$ y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (unión), luego:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$



✓ **Teorema**: Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de eventos tales que $A_{n+1} \subset A_n \quad \forall n$ y $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ (intersección), luego:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$



✓ **Teorema** (σ-aditividad): Sea $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ con los eventos A_i mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

✓ **Probabilidad condicional**: sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., A y $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido está definida por:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Propiedades

La $P(A|B)$ para un B fijo satisface todos los axiomas de probabilidad

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Si $A \cap C = \emptyset \rightarrow P(A\cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$

Más propiedades

1. $P(A\cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$
2. $P(A\cap B\cap C) = P(A|B\cap C) \cdot \underbrace{P(B|C) \cdot P(C)}_{P(B\cap C)}$

EJEMPLO

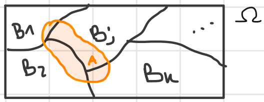
Si un programador no usa Java ¿Cuál es la probabilidad de que use C?

$$P(C|\bar{J}) = \frac{P(C\cap \bar{J})}{P(\bar{J})}$$

$P(\bar{J}) > 0$

✓ **Partición de Ω:** decimos que los eventos $B_1, B_2, \dots, B_k$ forman una partición de Ω si:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$



$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$$

$$P(A) = P\left[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)\right]$$

✓ **Fórmula de probabilidad total:** $\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{K} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$

EJEMPLO

- Probabilidad de que una pieza hecha con la máquina M1 sea defectuoso es 0,1, si es hecho con la máquina M2 es de 0,05 y con la M3, 0,01.

La M1 produce el 20% de las piezas, M2 el 30% y M3 el 50%.

Si elijo una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Experimento aleatorio: Agarro una pieza al azar y observo si es defectuosa

M_i = "La pieza elegida al azar proviene de la máquina i" con $i \in \{1, 2, 3\}$

D = "La pieza elegida es defectuosa"

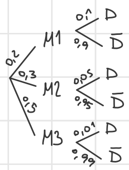


Diagrama de árbol

$P(M1) = 0,2$ $\qquad P(D \mid M1) = 0,1$

$P(M2) = 0,3$ $\qquad P(D \mid M2) = 0,05$

$P(M3) = 0,5$ $\qquad P(D \mid M3) = 0,01$

$$D = (D \cap M1) \cup (D \cap M2) \cup (D \cap M3)$$

mutuamente excluyentes (una pieza no puede venir de M1 y M2 a la vez)

$$P(D) = P((D \cap M1) \cup (D \cap M2) \cup (D \cap M3)) = P(D \cap M1) + P(D \cap M2) + P(D \cap M3)$$

$$P(D) = P(M1) \cdot P(D \mid M1) + P(M2) \cdot P(D \mid M2) + P(M3) \cdot P(D \mid M3)$$

$$P(D) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,01 = 0,04$$

- Si agarro un dado y es defectuoso, calcular la probabilidad de que venga de M1.

Buscamos $P(M1 \mid D) \longrightarrow P(M1 \mid D) = \dfrac{P(D \cap M1)}{P(D)} = \dfrac{P(D \mid M1) \cdot P(M1)}{P(D)} = \dfrac{0,1 \cdot 0,2}{0,04} = 0,5$

$P(D) > 0$

ya la calculé

✓ **Teorema de Bayes**: Sean $B_1, \dots, B_n$ una partición de Ω, A un evento de probabilidad positiva, entonces:

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}}$$

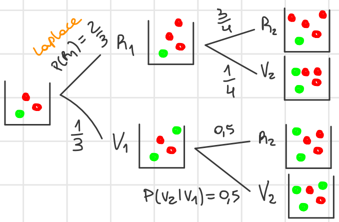
EJEMPLO En una urna hay una bola verde y dos bolas rojas. En cada paso se extrae una bola al azar y se la repone junto con otra del mismo color.

ⓐ calcular la probabilidad de que al finalizar el segundo paso la urna contenga 2 bolas verdes y 3 rojas.

EVENTOS: R_i: "la extracción i es roja" con $i \in \{1, 2\}$ (pasos)

V_i: "la extracción i es verde"

S: "al finalizar el segundo paso la urna contiene 2 bolas verdes y 3 rojas."



$S = (R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)$

$P(S) = P((R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2))$ Aplico probabilidad total

$P(S) = P(R_1) \cdot P(V_2|R_1) + P(V_1) \cdot P(R_2|V_1)$

$P(S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

ⓑ Si al finalizar el segundo paso la urna contiene 2 bolas verdes y 3 rojas, ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer paso se haya extraído una bola roja?

Me pide $P(R_1|S) \overset{P(S)>0}{=} \frac{P(R_1 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(R_1 \cap V_2)}{P(S)}$

$S = (R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)$

$\hookrightarrow S \cap R_1 = R_1 \cap V_2$

$P(R_1|S) = \frac{P(V_2|R_1) \cdot P(R_1)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

✓ **Eventos independientes**: sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., A y $B \in \mathcal{A}$, A y B serán dos eventos independientes si y solo si $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Propiedades

1. si A y B son independientes, también lo son A y $\bar{B}$, $\bar{A}$ y B, $\bar{A}$ y $\bar{B}$
2. $A_1, \dots, A_n$ son independientes sii para cada sucesión de k conjuntos $2 \leq k \leq n$, la probabilidad de la intersección de los k sucesos coincide con el producto de las probabilidades.

observación: si $P(B) > 0$, cuando A y B son independientes ocurre que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

EJEMPLO

Se elige al azar una permutación de las letras A, T, C, G. Mostrar que los eventos "A precede a T" y "C precede a G" son independientes.

Exp. Aleatorio: Elijo una permutación de las letras A, T, C, G

$\#CP = 4! = 24$

EVENTOS: AT: "A precede a T" ¿AT y CG son indep? solo si $P(AT \cap CG) = P(AT) \cdot P(CG)$

CG: "C precede a G"

Elijo al azar de un espacio equiprobable → Laplace

CASOS AT:

A T _ _
A _ T _
A _ _ T
_ A T _
_ A _ T
_ _ A T

→ CASOS $(AT \cap CG)$:

A T C G
A C T G
A C G T
C A T G
C A G T
C G A T

$\# AT \cap CG$: 6 casos
$\# AT \cap GC$: 6 casos
$\# TA \cap CG$: 6
$\# TA \cap GC$: 6
24

$\# AT$: 12
$\# CG$: 12

$$P(AT \cap CG) = P(AT) \cdot P(CG)$$

$$\frac{6}{24} = \frac{12}{24} \cdot \frac{12}{24}$$ ✓ ⟹ son indep.

✓ Probabilidad en modelos continuos

$$P(x \in [a, b)) = b - a$$

EJEMPLO

Experimento: Elegir un número en el intervalo [0, 1]

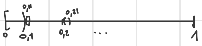
ⓐ Hallar la probabilidad de que los primeros 3 dígitos sean 3,1,4 (es decir 0,314...)

$$P(x \in [0{,}314 ; 0{,}315)) = 0{,}315 - 0{,}314 = 0{,}001$$

ⓑ Hallar la probabilidad de que no aparezca el 0 en los primeros 4 dígitos.

$$P(0) = 1 - P(x \in [0; 0{,}1)) - P(x \in [0{,}1; 0{,}11)) \times 9 - P(x \in [0{,}11; 0{,}111)) \times 9^2 - P(x \in [0{,}111; 0{,}1111)) \times 9^3$$

Para
0,1 ; 0,11
0,2 , 0,21
0,3 ; 0,31 .. etc



$$P(0) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^i$$

✓ **Variables aleatorias:** Dado un e.a. (experimento aleatorio) y Ω el espacio muestral asociado a él, una función X que asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega)$ se llama variable aleatoria

→ Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p. y $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una función, diremos que X es una variable aleatoria si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

proposición: sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p. y X una VA. entonces $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Luego, se puede calcular la probabilidad, es decir $P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$

observación: $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$

✓ **Función de distribución:** sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p. y X una VA., definimos su función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

X v.a.
x: Todos los valores que puede tomar X

Propiedades.

1. $F_X(x) \in [0,1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (porque es una probabilidad)
2. $F_X(x)$ es monótona no decreciente
3. $F_X(x)$ es continua a derecha
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

✓ **Variables aleatorias discretas:** cuando existe un conjunto $A \in \mathbb{R}$ finito o infinito numerable tal que $P_X(A) = 1$. Donde $\boxed{P_X(A) = P(X \in A)}$

→ una v.a. discreta es aquella cuyos valores posibles costituyen un conjunto finito o infinito numerable.

✓ **Rango de una v.a.d:** $\boxed{R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}}$ conjunto de todos los x posibles

✓ **función de probabilidad de X:** función $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $p_X(x) = P(X = x)$
Con cada resultado posible x_i asociamos un número $p_X(x_i) = P(X = x_i)$ que debe cumplir

1. $p_X(x_i) \geq 0 \quad \forall i$
2. $\sum_{x \in R_X} p_X(x) = 1$

$$\boxed{p_X(x_j) = P(X = x_j) = F_X(x_j) - F(x_{j-1})}$$

EJEMPLO E.A: tiro una moneda 2 veces y observo el resultado.
C: observo cara

$$\Omega = \{(C,C), (C,\bar{C}), (\bar{C},C), (\bar{C},\bar{C})\}$$

X = "cantidad de caras observadas al tirar una moneda 2 veces"

$$R_X = \{\overset{x_1}{0}, \overset{x_2}{1}, \overset{x_3}{2}\}$$

Busquemos $p_X(x) = P(X = x)$ para cada $x \in R_X$:

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= P(X=0) = P((\bar{C},\bar{C})) = \tfrac{1}{4} \\ p_X(1) &= P(X=1) = P((C,\bar{C}) \cup (\bar{C},C)) = \tfrac{1}{2} \\ p_X(2) &= P(X=2) = P((C,C)) = \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\} \text{Son positivas y suma } 1$$

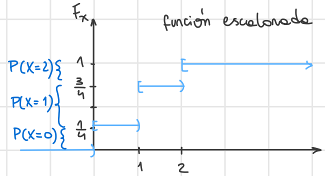
✓ **Teorema:** Sea X una v.a.d, entonces: $\boxed{P_X(B) = \sum_{x_i \in B} P_X(x_i)}$

EJEMPLO E.A: Tiro una moneda 2 veces y observo el resultado
¿Cuál es la probabilidad de que salga alguna cara?

$P(\text{"alguna cara"}) = P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$

Función de distribución: $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

función escalonada



EJEMPLO De un conjunto de 7 ingenieras y 4 matemáticas se eligen al azar 5 personas, sea X el número de ingenieras elegidas.

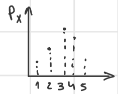
NO IMPORTA EL ORDEN!

1. Hallar la función de probabilidad de X y graficarla.
2. Hallar la función de distribución de X y graficarla.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo elegido esté formado por al menos 3 ingenieras?

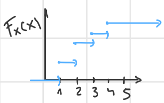
X: "cantidad de ingenieras en el grupo de 5 personas" ; $R_X = \{1,2,3,4,5\}$ (0 no porque hay solo 4 de mat)

$P_X(x) = P(X=x), \ \forall x \in R_X$ puedo usar Laplace (espacio equiprobable) $\#CP = \binom{11}{5}$

$P_X(1) = P(X=1) = \dfrac{\binom{7}{1}\binom{4}{4}}{\binom{11}{5}}$; $P_X(2) = \dfrac{\binom{7}{2}\binom{4}{3}}{\binom{11}{5}}$; $P_X(3) = \dfrac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}}{\binom{11}{5}}$ $\rightarrow$ $P_X(x) = \dfrac{\binom{7}{x}\binom{4}{5-x}}{\binom{11}{5}}$



$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 7/462 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} + \frac{210}{462} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} + \frac{210}{462} + \frac{140}{462} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$



$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{91}{462}$

✓ **Distribución de Bernoulli.** una v.a. tiene esta distribución si sus valores posibles son 0 y 1. Le asigna $P(X=1) = p$; es decir $R_X = \{0,1\}$; $P_X(0) = 1-p$; $P_X(1) = p$

NOTACIÓN $X \sim Ber(p)$ parámetro

CASO PARTICULAR: FUNCIÓN INDICADORA $\mathbb{1}\{X \in A\}$ $\longrightarrow$ significa $\begin{cases} 0 & \text{si } X \notin A \\ 1 & \text{si } X \in A \end{cases}$

Tabla de distribuciones utilizadas en el curso

Septiembre de 2021

1. Distribuciones discretas univariadas

Distribución	Notación	$p_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Bernoulli	$\mathrm{Ber}(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0,\, 1\}$	$p \in (0,1)$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$[\![0,n]\!]$	$p \in (0,1),\, n \in \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Geométrica	$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\mathbb{N}$	$p \in (0,1)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Pascal	$\mathrm{Pas}(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$\mathbb{Z}_k$	$p \in (0,1),\, k \in \mathbb{N}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson	$\mathrm{Poi}(\mu)$	$(\mu^x e^{-\mu})/x!$	$\mathbb{Z}_0$	$\mu > 0$	μ	μ
Hipergeométrica	$\mathcal{H}(N,d,n)$	$\frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$[\![m,M]\!]^\dagger$	$d \le N,\, n \le N \in \mathbb{N}$	$\frac{nd}{N}$	$\frac{nd(N-d)(N-n)}{N^2(N-1)}$

$^\dagger m = \max\{0, d+n-N\}, M = \min\{n,d\}$

Notación:

$[\![a,b]\!] := \{x \in \mathbb{Z} : a \le x \le b\}$

$\mathbb{Z}_k := \{x \in \mathbb{Z} : x \ge k\}$

1.1. Notas

- La función de probabilidad $p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$ en la tabla vale para x en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- El número combinatorio (*binomial coefficient*) se define como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r = 0,\ 1 \dots n$$

y el combinatorio generalizado (*multinomial coefficient*):

$$\binom{n}{r_1\, r_2 \dots r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r_i = 0, 1 \dots n,\ \sum_{i=1}^{k} r_i = n.$$

- Algunos autores llaman “binomial negativa” a la distribución Pascal.

EJEMPLO

Ejercicio: Una fábrica textil produce rollos de tela. En cada rollo, la cantidad de fallas de tejido tiene distribución Poisson de parámetro 2.
Hallar la probabilidad de que un rollo de tela tenga una cantidad par de fallas de tejido.

V.a: N: "cantidad de fallas de tejido" y nos piden $P(N \text{ sea par})$

$N \sim poi(2)$

$$P(N=n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \quad ; \quad R_N = \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}_0$$

son eventos disjuntos (o tiene 2 ó tiene 4)

$A_i \cap A_j = \emptyset$ σ-aditividad

$$P(N \text{ sea par}) = P((N \overset{?}{=} 0) \cup (N=2) \cup (N=4) \cup \dots) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (N=2k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} e^{-2}}{(2k)!} =$$

$$\overset{*}{=} e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} e^{-2}}{(2k)!} = e^{-2} \cosh(2) = e^{-2} \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \cong 0{,}5092$$

*Repaso de series de potencias

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad ; \text{ por la identidad } e^x = \cosh x + \sinh x \rightarrow \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

1.2. Algunos modelos

Una variable aleatoria con distribución:

- Bernoulli modela un experimento con dos resultados posibles, asignando el valor 1 a la ocurrencia del evento estudiado (que en general se lo llama *éxito* y tiene probabilidad p) y 0 a la no ocurrencia del mismo (con probabilidad $1 - p$).
- Binomial modela la cantidad de *éxitos* obtenidos al repetir n veces de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Geométrica modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener el primer *éxito* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*. $R_x = \mathbb{N}$
- Pascal modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener k *éxitos* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Hipergeométrica modela la cantidad de *éxitos* en n extracciones sin reposición de una población de tamaño total N, de los cuales d individuos son *éxito* y $N - d$ individuos no lo son.

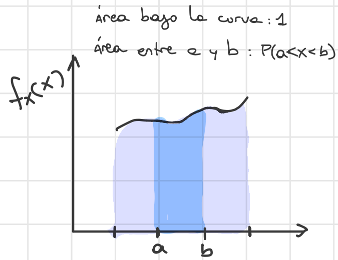
✓ **Variables aleatorias continuas**: se dice que X es una v.a. continua si existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cumplen las siguientes condiciones:

1. su conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo, o en una unión excluyente de intervalos.
2. Ningún valor posible de la v.a. tiene probabilidad positiva, es decir $P(X=c) = 0 \quad \forall \ c \in \mathbb{R}$

→ Si X es una v.a.c., $F_X(x)$ es una función continua $\forall x \in \mathbb{R}$

✓ **Función de densidad de probabilidad**: $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

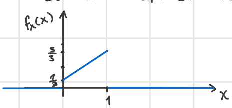
$$\boxed{f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}}$$



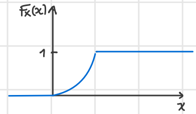
1. $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall \ x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$
3. Para cualquier a y b tales que $-\infty < a < b < +\infty$ tenemos $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx \longrightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$

EJEMPLO La demanda de aceite pesado en cientos de litros durante una temporada tiene la siguiente función de densidad $f_X(x) = \frac{4x+1}{3} \mathbb{1}\{0 < x < 1\}$ (vale 0 si x no está entre 0 y 1)

X: "demanda de aceite en cientos de litros"



$$F_X(x) \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0 & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_0^x \frac{4t+1}{3}\, dt = \frac{2x^2+x}{3} & 0 \leq x < 1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_0^1 \frac{4t+1}{3}\, dt + \int_1^{\infty} 0\, dt = 1 & 1 \leq x \end{cases}$$



✓ **Soporte de una v.a.**: $S_X = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, F_X(x) - F_X(x^-) \neq 0 \ \text{ó} \ \frac{d F_X(x)}{dx} \neq 0 \right\}$

Todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que la función distribución pega saltos o crece (derivada $\neq 0$ → pendiente +)

✓ **Hallar la probabilidad de que $X \in (a;b]$** $\quad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

2. Distribuciones continuas univariadas

Distribución	Notación	$f_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}[a,b]$	$1/(b-a)$	$[a,b]$	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponencial	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\lambda>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma	$\Gamma(\nu,\lambda)$	$\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\nu>0,\lambda>0$	ν/λ	ν/λ^2
Normal	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0$	μ	σ^2
Chi cuadrado	χ^2_k	$\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$	$[0,+\infty)$	$k\in\mathbb{N}$	k	$2k$
t-Student	t_ν	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$\mathbb{R}$	$\nu>0$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}$*
Weibull	$\mathrm{Wei}(c,\alpha)$	$\frac{c}{\alpha}(\frac{x}{\alpha})^{c-1}e^{-(\frac{x}{\alpha})^c}$	$[0,+\infty)$	$c>0,\alpha>0$	$\alpha\Gamma(1+\frac{1}{c})$	$\alpha^2\left[\Gamma(1+\frac{2}{c})-\Gamma^2(1+\frac{1}{c})\right]$
Rayleigh	$\mathrm{Ray}(\sigma)$	$\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$	$[0,+\infty)$	$\sigma>0$	$\sigma\sqrt{\pi/2}$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$
Pareto	$\mathrm{Par}(m,\alpha)$	$\frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$[m,+\infty)$	$m>0,\alpha>0$	$\frac{\alpha m}{\alpha-1}$ †	$\frac{m^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ ‡
Beta	$\beta(a,b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$(0,1)$	$a>0,b>0$	$a/(a+b)$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Cauchy	$\mathrm{Cau}(x_0,\gamma)$	$\frac{1}{\pi\gamma}\left[\frac{\gamma^2}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right]$	$\mathbb{R}$	$x_0\in\mathbb{R},\gamma>0$	no existe	no existe

† Válida si $\alpha>1$. ‡ Válida si $\alpha>2$. * Válida si $\nu>2$.

2.1. Notas

- La función de densidad $f_X(x)$ en la tabla vale para todo x real en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- La función Gamma se define $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$. Crece muy rápidamente, y para evitar problemas numéricos en algunos algoritmos conviene adaptar las fórmulas para que aparezca el logaritmo de la función $\log|\Gamma(t)|$ (las barras de módulo no molestan pues usaremos habitualmente valores positivos). Algunas propiedades:

$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad \text{para } n\in\mathbb{N}$$

$$\Gamma(t+1)=t\Gamma(t) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

2.2. Algunas funciones de supervivencia

Sea T una variable aleatoria continua, $S(t)=\mathbf{P}(T>t)$ (función de supervivencia o *survival function*), vale que:

✓ Distribución exponencial

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1-e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x>0$: $P(X>x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}$

Propiedades

1. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$

$$\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

2. Si X es una v.a.c y $P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$ $\forall\, t,s \in \mathbb{R}^+$ entonces existe $\lambda>0$ tal que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Si una variable es continua y tiene pérdida de memoria, entonces es exponencial

✓ falta de memoria: si se cumple, para $r>0$, $P(X>x+r \mid X>r) = P(X>r)$

✓ Función de Riesgo (para una v.a.c) o función de intensidad de falla

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbb{1}\{t>0\}$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$$

para la distribución exponencial $\lambda(t) = cte$

EJEMPLO Dado que un componente duró un cierto tiempo t, ¿Cuál es la probabilidad de que se rompa un instante después?

v.a: T: "Tiempo hasta que el componente falle"

$P(T<t+\Delta t \mid T>t)$ ¿Qué pasa cuando $\Delta t \to 0$?

función intensidad de fallas

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P(T<t+\Delta t \mid T>t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P(t<T<t+\Delta t)}{\Delta t \cdot P(T>t)}$$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{F_T(t+\Delta t) - F_T(t)}{\Delta t\,(1-F_T(t))} = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$$

$f_T(t)$

$$-\lambda(t) = \frac{d}{dt}\ln(1-F_T(t))$$

$$-\int_0^t \lambda(s)ds = \ln(1-F_T(t)) \qquad t>0$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \qquad \text{si } t>0$$

EJEMPLO Sea T la duración en horas del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema con función intensidad de fallas $\lambda(t)$. Calcular $P(T>4)$ y $P(T>12 \mid T>8)$, cuando $\lambda(t)$ está descrita por:

ⓐ $\lambda(t) = \frac{1}{8} \mathbb{1}\{t>0\}$

ⓑ $\lambda(t) = \frac{t}{8} \mathbb{1}\{t>0\}$

En cada caso, determinar si hay pérdida de memoria.

ⓐ Definimos T_a: "tiempo de trabajo sin fallas del sistema"

$$F_{T_a}(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{8}}\right] \mathbb{1}\{t>0\}$$

Por lo tanto $P(T_a > 4) = e^{-\frac{4}{8}} = 0,60653$

$$P(T_a > 12 \mid T_a > 8) = \frac{P(T_a>12, T_a>8)}{P(T_a>8)} = \frac{P(T_a>12)}{P(T_a>8)} = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{2}} = 0,60653$$

ⓑ T_b: "tiempo de trabajo sin fallas del sistema"

$$F_{T_b}(t) = \left[1 - e^{-\frac{t^2}{16}}\right] \mathbb{1}\{t>0\}$$

$$P(T_b>4) = 1 - F_{T_b}(4) = e^{-\frac{16}{16}} = e^{-1} = 0,36788$$

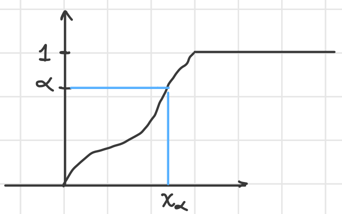
$$P(T_b > 12 \mid T_b > 8) = \frac{P(T_b>12, T_b>8)}{P(T_b>8)} = \frac{P(T_b>12)}{P(T_b>8)} = \frac{e^{-\frac{12^2}{16}}}{e^{-\frac{8^2}{16}}} = 6,7378 \times 10^{-3}$$

→ Solo ⓐ tiene falta de memoria. T_a es una v.a. exponencial, T_b no.

✓ **cuantil de una v.a.**

Busco $x_\alpha \,/\, P(X \leq x_\alpha) = \alpha$; $x_\alpha = \min\{x \in \mathbb{R} \,/\, F_X(x) \geq \alpha\}$

El cuantil α es el mínimo valor x



- si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $S(t) = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$. $P(T>t) = e^{-\lambda t}$
- si $T \sim \Gamma(k, \lambda)$ con $k \in \mathbb{N}$ entonces $S(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$ para $t > 0$. $P(T>t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$
- si $T \sim \text{Wei}(c, \alpha)$ entonces $S(t) = e^{-(t/\alpha)^c}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Ray}(\sigma)$ entonces $S(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Par}(m, \alpha)$ entonces $S(t) = (m/t)^\alpha$ para $t \geq m$.

3. Distribuciones multivariadas

3.1. Variable Multinomial

La variable aleatoria Multinomial $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, \ldots p_k)$ modela la cantidad de observaciones de cada resultado posible al repetir n veces de forma independiente un experimento que toma valores en $\{1 \ldots k\}$ (variable categórica o Bernoulli generalizada) con probabilidades p_i para cada resultado $i \in \{1 \ldots k\}$.

Su función de probabilidad es

$$p_{\mathbf{X}}(n, x_1, x_2 \ldots x_k) = \binom{n}{x_1\, x_2 \ldots x_k} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

con soporte $\{\mathbf{x} \in \{0 \ldots n\}^k, \sum_{i=1}^k x_i = n\}$ y parámetros:

$$0 < p_i < 1, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que para cada una de las variables aleatorias que componen al vector, sus distribuciones marginales estan dadas por

$$X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$$

.

El vector aleatorio condicionado por $X_1 = x_1$ tiene distribución

$$(X_2, X_3 \ldots, X_k)|X_1 = x_1 \sim \text{Mul}\left(n - x_1, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}, \ldots, \frac{p_k}{1-p_1}\right)$$

Además, se tiene que

$$\mathbf{E}(X_i) = np_i, \qquad \mathbf{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} np_i(1-p_i) & i = j \\ -np_ip_j & i \neq j \end{cases}.$$

3.2. Variable Normal bivariada

Se dice que el vector aleatorio (X_1, X_2) tiene distribución normal bivariada $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ si su función de densidad es de la forma

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right)$$

con soporte $\mathbb{R}^2$ y parámetros:

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2 > 0, \quad \sigma_2^2 > 0, \quad -1 \leq \rho \leq 1.$$

Los parámetros se pueden presentar en forma matricial como el vector μ y la matriz de covarianzas Σ definida positiva, dados por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Algunas propiedades:

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X_1|X_2 = x_2 &\sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\sigma_1\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right), (1-\rho^2)\sigma_1^2\right) \\ X_2|X_1 = x_1 &\sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\sigma_2\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right), (1-\rho^2)\sigma_2^2\right) \end{aligned}$$

Si el vector aleatorio es de dimensión n, entonces se tendrá la distribución Normal multivariada.

4. Equivalencias

Se usa como notación el signo equivalente $\equiv$ para indicar que dos distribuciones coinciden para determinados parámetros. Se indican sólo algunas equivalencias que se dan en el curso.

4.1. Discretas

- $\text{Ber}(p) \equiv \mathcal{B}(1, p)$
- $\mathcal{G}(p) \equiv \text{Pas}(1, p)$

4.2. Continuas

- $\mathcal{U}(0, 1) \equiv \beta(1, 1)$
- $\mathcal{E}(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda) \equiv \text{Wei}(1, \frac{1}{\lambda})$
- $\chi_k^2 \equiv \Gamma(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$ con $k \in \mathbb{N}$

Referencias

[1] Grynberg, S. *Variables Aleatorias: momentos (Borradores, Curso 23).* Buenos Aires: [digital], 27 de marzo de 2013

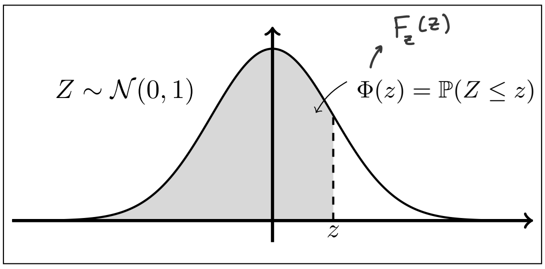
[2] Maronna, R. *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencia.* 1ra ed. La Plata: [digital], 1995

[3] Varios artículos ['· distribution', 'Gamma function']. En *Wikipedia, The Free Encyclopedia.* Consultados en Julio 2016.

[4] DeGroot, M. H. *Probability and Statistics.* 2nd. ed. EE.UU.: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[5] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I.* 2da ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.

Tabla de distribución normal



Recuerda:
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Segundo decimal →

Primer decimal ↓

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983

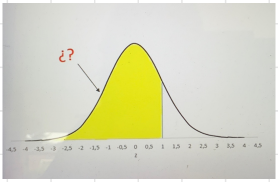
Algunos cuantiles habituales

$\Phi(z)$	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
z	0.84162	1.03643	1.28155	1.64485	1.95996	2.32635	2.57583

EJEMPLO Sea Z una variable aleatoria con distribución Normal estándar, hallar:

ⓐ i) $P(Z<1)$

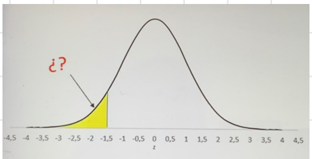
La tabla nos da $P(Z\le 1) = P(Z<1) + \underbrace{P(Z=1)}_{\text{0 porque } Z \text{ es una v.a.c}} \longrightarrow P(Z<1) = \Phi(1)$



La tabla nos da las probabilidades acumuladas a izquierda para valores de Z de hasta 2 decimales.

Entramos en la tabla con el valor $1{,}00 \longrightarrow \boxed{0{,}84134}$

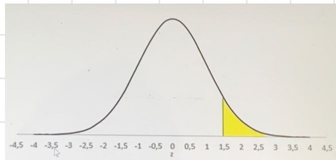
ii) $P(Z<-1{,}5)$



Propiedad de simetría

$\uparrow$

$=$

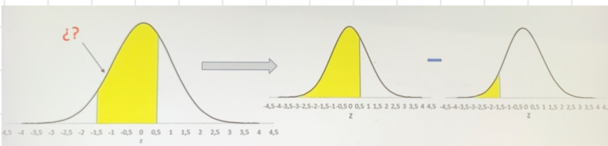


$1-\Phi(1{,}5) = 0{,}06681$

$\downarrow$

entro en la tabla con $1{,}50 \longrightarrow 0{,}93319$

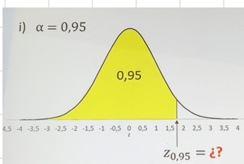
iii) $P(-1{,}5 < Z < 0{,}5)$



$\Phi(0{,}5) - \overbrace{\left(1-\Phi(1{,}5)\right)}^{\Phi(-1{,}5)} = 0{,}62465$

ⓑ Para cada α en $\{0{,}95\,;\,0{,}975\,;\,0{,}999\}$ hallar los valores de z_α tal que la $P(Z<z_\alpha)=\alpha$

i)



uso la tabla de manera inversa, busco 0,95 entre los valores y me fijo en que fila y columna está.

Como $P(Z<1{,}64)\cong 0{,}95$, decimos que el $\underbrace{\text{cuantil } 0{,}95}_{z_{0,95}}$ de la variable Z es $1{,}64$. (aprox)

i) $P(Z<1{,}96) = 0{,}975 \longrightarrow z_{0,975} = 1{,}96$

✓ **Función de variable aleatoria** sea $Y=g(X)$ si 'X' es una v.a.d, 'Y' será discreta, con $p_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x\in B} p_X(x)$; $B=\{x\in\mathbb{R} / g(x)=y\}$

- Si $Y=g(x)$: $F_Y(y) = P(Y\le y) = P(g(X)\le y)$

EJEMPLO Tiro un dado equilibrado. Si sale 1 gano \$10, sino pierdo \$1. Hallar la función de probabilidad de la ganancia. X: "valor observado al arrojar un dado" y otra v.a.d: G: "Ganancia"

$R_G = \{-1, 10\}$, $P(G=10) = P(X=1) = \frac{1}{6}$

$P(G=-1) = \sum_{x=2}^{6} p_X(x) = \frac{5}{6}$

EJEMPLO Sea $X \sim \mathcal{E}(1)$. Probar que $Y = \frac{X}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

Desarrollamos $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X}{\lambda} \leq y\right) \underset{\lambda>0}{\overset{\uparrow}{=}} P(X \leq \lambda y) = F_X(\lambda y)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F_X(\lambda y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ya sabemos que $\lambda > 0$ (enunciado)

distribución exponencial !! probamos lo pedido.

$Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

EJEMPLO Sea Z una v.a. con distribución normal estándar, sea $X = Z^2$. Encontrar la distribución de X. (Me pide el nombre, NO la F_X)

- Busco $F_X(x) = P(X \leq x) = P(Z^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(|Z| \leq \sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ (Z^2 siempre es positivo)

Z dist. normal estándar

$$P(|Z| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$$

- Observamos que $F_X(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} \to$ es una v.a.c. $\longrightarrow$ podemos buscar $f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$
- Derivo usando regla de la cadena $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(\sqrt{x}) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{derivada de } \sqrt{x}} + \varphi(-\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

φ: derivada de Φ, f_X de la normal estándar

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x}{2}} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$$ $\longrightarrow$ comparando con la tabla lo identifico como $X \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

✓ **Simulación** ¿Qué ocurre si dada una función $F(x)$ quiero encontrar una v.a. cuya función de distribución coincide con F?

Diremos que 2 eventos los consideramos equivalentes cuando acumulan la misma probabilidad. (ejemplos en la siguiente pag)

✓ **Inversa generalizada**: $F_X^{-1}(u) = \min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}$, $u \in (0,1)$

observación: sea $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de distribución, existe una v.a X tal que $F_X(x) = P(X \leq x)$

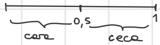
✓ **Teorema**. Si F es una función que cumple : ① ser no decreciente ② $\lim_{x \to \infty} F = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F = 0$ ③ Es continua a derecha

Entonces si defino $X = F^{-1}(U)$ con $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ se tiene que X es una v.a. cuya función de distribución es la función F dada

Calculadora

La calculadora nos da un número aleatorio entre 0 y 1 con la tecla Ran#.

- simulo moneda



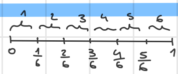
X: "cantidad de caras al tirar una moneda"

U: "número entre 0 y 1" $\rightarrow$ $U \sim (0,1)$

$$\begin{cases} 0 \leq u < 0{,}5 \longrightarrow x = 1 \\ 0{,}5 \leq u < 1 \longrightarrow x = 0 \end{cases}$$

$P(0 \leq U < 0{,}5) = P(X=1) = 0{,}5$

- simulo dado



si $0 \leq u < \frac{1}{6}$: $x = 1$

$\frac{1}{6} \leq u < \frac{2}{6}$: $x = 2$

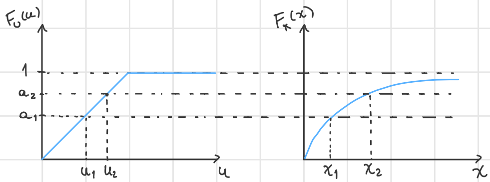
...

X: "valor observado al arrojar un dado" ; $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

- simulo 3 valores de una v.a. con distribución exponencial a partir de 3 valores seleccionados al azar en el intervalo $[0,1]$.

$X \sim \mathcal{E}(1)$, $U \sim (0,1)$.

Dados u_1, u_2, u_3 necesito una "fórmula" para transformarlos a x_1, x_2, x_3



Busco el valor de x que acumula la misma probabilidad

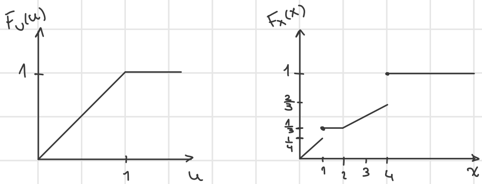
Si $0 \leq u_i \leq 1$; $F_U(u_i) = u_i = F_X(x_i) = 1 - e^{-x_i}$, $x_i > 0$

$x_i = -\ln(1 - u_i)$

$F_U(u_1) = a$ $=$ $F_X(x_1) = a_1$

$F_U(u_2) = a_2$ $=$ $F_X(x_2) = a_2$

- Simular valores de la v.a. mixta usando valores entre 0 y 1.



Busco $x_i = h(u_i)$, $0 < u_i < 1$

pero $F_X(x_i)$ es una función partida. Para cada intervalo, buscamos que $F_X(x_i) = F_U(u_i)$

inversa generalizada

$u_i = F_X(x_i) \longrightarrow x_i = F_X^{-1}(u_i)$

si $0 \leq u < \frac{1}{4} \longrightarrow u = \frac{x}{4} \longrightarrow x = 4u$

si $\frac{1}{4} \leq u < \frac{1}{3} \longrightarrow x = 1$

si $\frac{1}{3} < u < \frac{2}{3} \longrightarrow u = \frac{x}{6} \longrightarrow x = 6u$

si $\frac{2}{3} \leq u < 1 \longrightarrow x = 4$

$$x = h(u) = \begin{cases} 4u & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{3} \\ 6u & \text{si } \frac{1}{3} < u < \frac{2}{3} \\ 4 & \text{si } \frac{2}{3} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Sea T el tiempo hasta que ocurre la primera falla de los televisores de marca Veep, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma:

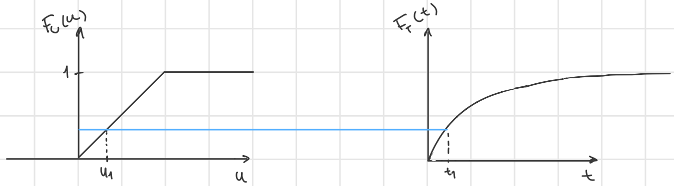
$$\lambda(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} \mathbb{1}\{t > 0\}$$

Simular una muestra de 2 valores del tiempo hasta la primera falla de un televisor Veep, usando los números aleatorios 0,385 y 0,711.

$$F_T(t) = \left(1 - e^{-\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{s}} ds}\right) \mathbb{1}\{t>0\} = \left(1 - e^{-\sqrt{t}}\right) \mathbb{1}\{t>0\}$$

T: "Tiempo (en años) hasta que ocurre la primer falla"

Los valores $u_1 = 0{,}385$ y $u_2 = 0{,}711$ son realizaciones son realizaciones independientes de una $U \sim \mathcal{U}(0,1)$



$F_U(u_1) = F_T(t_1)$

$u_1 = F_T(t_1)$

$F_T^{-1}(u_1) = t_1$

$u_1 = 1 - e^{-\sqrt{t_1}}$

$t_1 = \ln^2(1-u_1)$

adimensional

$t_1 = \ln^2(1-u_1) = 0{,}236 \longrightarrow 0{,}236 \times 12$ meses $= 2{,}84$ meses

$t_2 = \ln^2(1-u_2) = 1{,}541 \longrightarrow 1{,}541$ años

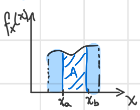
✓ **Truncamiento:** Sea X una v.a. con $F_X(x) = P(X \leq x)$:

$$\boxed{F_{X|X\in A}(x) = P(X \leq x \mid X \in A) = \frac{P(X \leq x,\ X \in A)}{P(X \in A)}}$$

observación: Si X es una V.A.C con función de densidad $f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$, la función de densidad de X condicionada a $X \in A$ se calcula

$$\boxed{f_{X|X\in A}(x) = \frac{d F_{X|X\in A}(x)}{dx} = \frac{f_X(x)\, \mathbb{1}\{X \in A\}}{P(X \in A)}}$$

EJEMPLO caja de arandelas. v.a: X: "diámetro de las arandelas". Descartamos las muy grandes o muy chicas, es decir las menores a x_a y las mayores a x_b. ¿Cuál es la función de densidad de las arandelas que quedan luego de que saquemos las muy chicas o muy grandes? Busco $f_{X|X\in A}(x)$



intersección

$$F_{X|X\in A}(x) = P(X \leq x \mid X \in A) = \frac{P(X \leq x,\ X \in A)}{P(X \in A)}$$

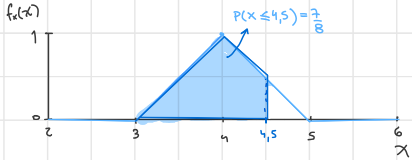
$P(X\in A) > 0$

El diámetro (en cm) de los huevos de una granja es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = (x-3)\mathbb{1}\{3 < x < 4\} + (5-x)\mathbb{1}\{4 < x < 5\}$$

Los huevos se clasifican en grandes si tienen un diámetro superior a 4.5 cm, y chicos en caso contrario. Hallar la función de densidad de los huevos clasificados como chicos.

$$f_X(x) = \begin{cases} x-3 & 3 < x < 4 \\ 5-x & 4 < x < 5 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$



¿ $f_{X|X \leq 4,5}(x)$? Como es una v.a. continua $f_{X|X\leq 4,5}(x) = \dfrac{dF_{X|X\leq 4,5}(x)}{dx}$

$$F_{X|X\leq 4,5}(x) = \frac{P(X \leq x, X \leq 4{,}5)}{\underbrace{P(X \leq 4{,}5)}_{\text{área sombreada}}}$$

$$F_{X|X\leq 4,5}(x) = \begin{cases} \dfrac{P(X<x)}{P(X<4{,}5)} = \dfrac{F_X(x)}{P(X\leq 4{,}5)} & x < 4{,}5 \\ \dfrac{P(X<4{,}5)}{P(X<4{,}5)} = 1 & x \geq 4{,}5 \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f_{X|X\leq 4,5}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{P(X\leq 4{,}5)} & 3 \leq x \leq 4{,}5 \\ 0 & x \geq 4{,}5 \end{cases}$$

No hacía falta hacer todo, solo $f_{X|X\in A}(x) = \dfrac{f_X(x)\mathbb{1}\{X \in A\}}{P(X\in A)}$

$$f_{X|X\leq 4,5}(x) = \frac{(x-3)}{7/8}\mathbb{1}\{3<x<4\} + \frac{(5-x)}{7/8}\mathbb{1}\{4<x\leq 4{,}5\}$$

✓ Vectores Aleatorios : sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., se dice que $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio de dimensión n, si para cada $j = 1, \dots, n$; $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$ es una v.a.

✓ Teorema : Para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tendrá que
$X^{-1}((-\infty, x_1) (-\infty, x_2) \dots (-\infty, x_n)) \in \mathcal{A}$

✓ Función de distribución de un vector aleatorio Sea $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio de dimensión n, definimos la función de distribución como

$$\boxed{F_{\mathbb{X}}(\mathbb{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)}$$

propiedades cuando $\mathbb{X} = (X, Y)$

1. $\lim_{x, y \to \infty} F_{\mathbb{X}}(\mathbb{x}) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} F_{\mathbb{X}}(\mathbb{x}) = 0$; $\lim_{y \to -\infty} F_{\mathbb{X}}(\mathbb{x}) = 0$

2. $F_{\mathbb{X}}(\mathbb{x})$ es monótona no decreciente en cada variable
3. $F_{\mathbb{X}}(\mathbb{x})$ es continua a derecha en cada variable
4. $P((X,Y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = F_{\mathbb{X}}(b_1, b_2) - F_{\mathbb{X}}(b_1, a_2) - F_{\mathbb{X}}(a_1, b_2) + F_{\mathbb{X}}(a_1, a_2)$

Función de probabilidad de un vector aleatorio discreto

Sean X e Y dos v.a.d. definidas en el espacio muestral Ω de un experimento. La función de probabilidad conjunta se define para cada par de números (x, y) como $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

Debe cumplirse que:

1. $P_{X,Y}(x,y) \geq 0$
2. $\sum_x \sum_y P_{X,Y}(x,y) = 1$

Sea A cualquier conjunto compuesto de pares de valores (x, y) entonces

$$\boxed{P((X,Y) \in A) = \sum\sum_{(x,y)\in A} P_{X,Y}(x,y)}$$

EJEMPLO Urna contiene 3 bolillas numeradas (1, 2, 3), se extraen sin reposición y sucesivamente 2 bolillas

Sea X: "número de la primer bolilla", Y: "número de la segunda bolilla". Hallar la función de prob. conjunta de X e Y

$Y \backslash X$	1	2	3	$P_Y(y)$
1	0	1/6	1/6	2/6
2	1/6	0	1/6	2/6
3	1/6	1/6	0	2/6
$P_X(x)$	2/6	2/6	2/6	1

$P_{X,Y}(1,1) = P(X=1, Y=1) = 0$ (porque es sin reposición)

$P_{X,Y}(2,1) = P(X=2, Y=1) = \frac{1}{6} = \frac{\#CF}{\#CP}$ $\#CP = 3 \cdot 2$ $\#CF = 1 \cdot 1$

$P(X<Y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ $\left(\sum\sum_{(x,y)\in A} P_{X,Y}(x,y)\right)$ $A = \{(x,y) / x<y\}$

Funciones de probabilidad marginal de X e Y están dadas por

$$\boxed{P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)} \quad y \quad \boxed{P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y)}$$

Función de densidad de un vector aleatorio continuo

Sean X e Y v.a.c, una función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ de estas dos variables satisface:

1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

(volumen debajo de una superficie)

Entonces, para cualquier conjunto A

$$\boxed{P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}$$

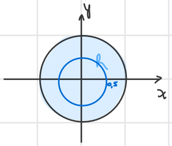
Funciones de densidad marginales de X e Y:

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy} \qquad \boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}$$

EJEMPLO Se elige al azar un punto (x,y) en el círculo de centro $(0,0)$ y radio 1. ⓐ Hallar $f_{x,y}(x,y)$

ⓑ Hallar la probabilidad de que la distancia del punto al centro del círculo sea menor a 0,5.

ⓒ Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y.



$(X,Y) \sim \mathcal{U}(R)$ la distribución es uniforme sobre la región R

$f_{x,y}(x,y)$ debe ser constante si $(x,y) \in R$ y cero sino.

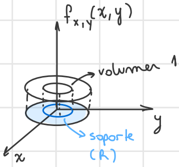
$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} k & (x,y) \in R \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

1. $k \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\iint_R k\,dx\,dy = 1 = k \iint_R dx\,dy = k\pi 1^2$$

$\underbrace{\iint_R dx\,dy}_{\text{Área del círculo}}$

$k = \frac{1}{\pi}$



$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x,y) \in R \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$\pi \cdot r^2 \cdot h = 1$

$\pi \cdot 1 \cdot h = 1$

$h = \frac{1}{\pi}$

ⓑ $P(X^2+Y^2 \leq 0{,}5) = \frac{1}{\pi}\pi \cdot 0{,}5^2 = \frac{1}{4}$

como la distribución es uniforme, puedo usar geometría y verlo como el cilindro de radio 0,5 y altura $\frac{1}{\pi}$

ⓒ $$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \text{ ó } x>1 \\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = 1 \longrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

$$f_x(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\mathbb{1}\{-1 \leq x \leq 1\} \qquad f_y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,\mathbb{1}\{-1 \leq y \leq 1\}$$

✓ **Independencia:** sea (X,Y) un vector aleatorio, las variables aleatorias X e Y son indep. si y solo si

$$\boxed{P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \forall A \text{ y } B}$$

propiedades

1. Se dice que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son v.a. independientes sii
$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$
2. Se dice que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son v.a.d independientes sii
$$p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n)$$
3. Se dice que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son v.a.c independientes sii
$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$
vale para casi todo $x_1,\dots,x_n$

funciones densidad marginales

multiplico las marginales → obtengo la conjunta

EJEMPLO Para ir todos los años al trabajo, Dana se dirige en auto hasta la estación de tren y luego sigue su camino en tren. Dana sale de su casa en un intervalo distribuido uniformemente entre las 7:30 y las 7:50. El tiempo de viaje hasta la estación es también uniforme entre 20 y 40 minutos e independientemente de la hora de salida. Hay un tren que sale 8:12 y otro 8:26.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que Dana pierda ambos trenes?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 8 minutos en la estación hasta que salga el tren?

- hora cero $\longrightarrow$ 7:30

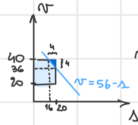
v.a: S: "Minutos después de las 7:30 hasta que Dana sale de la casa" $S \sim \mathcal{U}(0,20)$

V: "Tiempo de viaje hasta la estación (en minutos)" $V \sim \mathcal{U}(20,40)$

- S y V son independientes (enunciado)

$\left.\begin{array}{l} T_1 = 42 \\ T_2 = 56 \end{array}\right\}$ minutos desde la hora cero hasta el tren i, $i \in \{1,2\}$ CONSTANTES

- $f_{S,V}(s,v) \overset{\text{son indep.}}{=} f_S(s) \cdot f(v) = \frac{1}{20} \mathbb{1}\{0 < s < 20\} \, \frac{1}{20} \mathbb{1}\{20 < v < 40\}$
- grafico el soporte

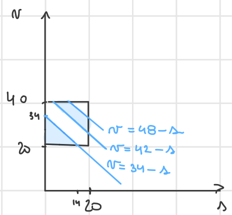


me imagino un techito ($f_{S,V}(s,v)$) a una altura de $\frac{1}{20^2}$ sobre el cuadrado

(a) $P(\text{"pierde ambos trenes"}) = P(S+V > 56) = P(V > \overset{\text{Recta}}{\widetilde{56-S}}) = \iint f_{S,V}(s,v)\, ds\, dv \overset{\text{por geometría}}{=} \frac{4^2}{2} \cdot \frac{1}{20^2} = \frac{1}{50}$

(b) $P((S+V<34) \cup (42 < S+V < 48)) = \frac{14^2}{2} \cdot \frac{1}{20^2} + \left(\frac{18^2}{2} - \frac{12^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{20^2} = \frac{1}{400}$

$20 = 34 - S$
14

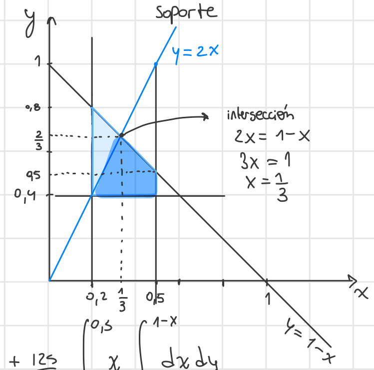


puedo calcular volumen solo porque es uniforme $f_{V,S}$

En una reunión con amigos, Fabián prepara Fernet en una jarra de 1 litro. La cantidad (en litros) de Fernet y Coca que coloca en la jarra son variables aleatorias X e Y respectivamente, con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \overbrace{\frac{125}{3}}^{\text{constante = altura de mi volumen}} x\mathbf{1}\{0.2 < x < 0.5,\ 0.4 < y < 1-x\}$$

Calcular $\underbrace{\mathbf{P}(X > \frac{1}{2}Y)}_{\text{evento}}$. $= P(2x > y)$



$$P(X > \tfrac{1}{2}Y) = \iint_{\triangle} \frac{125}{3} x \, dx\, dy = \frac{125}{3}\int_{0,2}^{\frac{1}{3}} x \int_{0,4}^{2x} dx\, dy + \frac{125}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{0,5} x \int_{0,4}^{1-x} dx\, dy$$

$$\frac{125}{3}\int_{0,2}^{\frac{1}{3}} x\,(2x - 0,4)\, dy + \frac{125}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{0,5} x\,(1 - x - 0,4)\, dy$$

(calculadora)

$$P(X > \tfrac{1}{2}Y) \cong 0,7284$$

✓ Esperanza de una variable aleatoria es el promedio ponderado de los valores que puede tomar una V.A.

- Sea X una V.A.D. con función de probabilidad p_X, el valor esperado o media de X es $\boxed{E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x) = \mu_X}$ (notación)

EJEMPLO Hallar la esperanza de la cantidad de tiros necesarios de un dado equilibrado hasta observar el primer 6. X: "tiros hasta observar el primer 6" $X \sim g(\frac{1}{6}) \rightarrow R_X = \mathbb{N}$ (geométrica)

$p_X(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$, $x \in \mathbb{N}$; $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} x$ → difícil

$p = \frac{1}{6}$; $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} p\,(1-p)^{x-1}\, x$

derivada con respecto a p

$$E(X) = \frac{1}{1/6} = 6 \qquad p\sum x(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^{x}(-1) = -p\,\frac{d}{dp}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x} = -p\,\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right) = -p\,\frac{(-1)}{p^2} = \frac{1}{p}$$

ESTÁ EN LA TABLA

se parece a la serie geométrica

propiedad: El valor de la esperanza de cualquier función $h(X)$ se calcula como: $\boxed{E(h(X)) = \sum_{x \in R_X} h(x) \cdot p_X(x)}$ ($h(X)$ es una V.A.)

- $E(cte) = cte$

- Sea X una V.A.C con función de densidad $f_X(x)$, el valor esperado de X es $\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx}$

propiedad: El valor de la esperanza de cualquier función $h(x)$ se calcula como

$$\boxed{E(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_X(x)\, dx}$$

propiedad: Sea X una v.a. con $E(X) = \mu$. si $h(X) = aX + b$, $E(h(X)) = a\mu + b$

- Demostración: $E(h(X)) = E(aX+b) = \sum_{x \in R_X} (ax+b)\, p_X(x)$

$$= \sum_{x \in R_X} (ax\, p_X(x) + b\, p_X(x)) = a \underbrace{\sum_{x \in R_X} x\, p_X(x)}_{\mu} + b \underbrace{\sum_{x \in R_X} p_X(x)}_{1}$$

La esperanza es lineal

✓ Sea X una v.a. con función de distribución $F_X(x) = P(X \leq x)$ si $h(X)$ es una función cualquiera de X, si definimos A como el conjunto de átomos (valores de X que concentran masa positiva), entonces

$$E[h(X)] = \sum_{x \in A} h(x)\, P(X=x) + \int_{\mathbb{R} \setminus A} h(x)\, F_X'(x)\, dx$$

$\mathbb{R} \setminus A$ → conjunto de todos los reales menos los reales que estaban en el conjunto A

- Si X es una V.A.D el segundo término desaparece
- Si X es una V.A.C, $A = \emptyset$, el primer término desaparece, la integral es $\int_{-\infty}^{\infty}$ y $F_X'(x) = f_X(x)$

✓ Esperanza condicional

$$\boxed{E[X \mid X \in A] = \frac{E[X\, \mathbb{1}\{X \in A\}]}{P(X \in A)}}$$

$$\boxed{E(X) = E[X \mid X \in A]\, P(X \in A) + E[X \mid X \in \bar{A}]\, P(X \in \bar{A})}$$

EJEMPLO Hallar $E[T \mid T<1]$ cuando $T \sim \mathcal{E}(1)$.

$$E[T \mid T<1] = \frac{E[T\, \mathbb{1}\{T<1\}]}{P(T<1)} = \frac{\int_0^1 t\, e^{-t}\, dt}{1 - e^{-t}}$$

NO USAR

exponencial → $\mu = \frac{1}{\lambda}$ → $\mu = 1 = E(T)$

↳ No tiene memoria: $T \mid T>1 = 1 + T'$ entonces $T' \sim \mathcal{E}(1)$ (T' se distribuye igual porque no tiene memoria)

$E[T \mid T>1] = 1 + E(T) = 2$

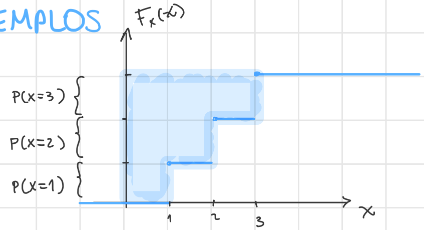
$$\underbrace{E[T]}_{1} = E[T \mid T<1]\, \underbrace{P(T<1)}_{1-e^{-1}} + \underbrace{E[T \mid T \geq 1]}_{2}\, \underbrace{P(T \geq 1)}_{e^{-1}}$$

despejo y $E[T \mid T<1] = 0{,}418$

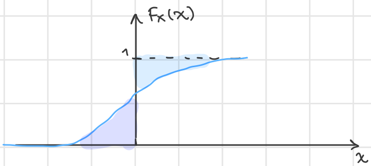
Propiedad:

$$\boxed{E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\, dx}$$

EJEMPLOS



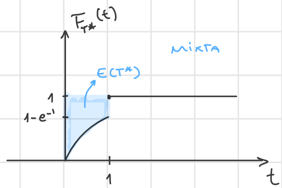
$E(X) = 1\,P(X=1) + 2\,P(X=2) + 3\,P(X=3)$



$- \quad = E(X)$

- Hallar la esperanza de $T^* = \min(T, 1)$ con $T \sim E(1)$

$$\underset{\text{positiva}}{T^*} = \begin{cases} T & \text{si } T < 1 \\ 1 & \text{si } T \geq 1 \end{cases}$$



T^* entre 0 y 1 tiene la distribución de T

$$E(T^*) = \int_0^1 1 - (1 - e^{-t})\, dt$$

$$E(T^*) = 1 - e^{-1}$$

Si usamos $E(h(X))$ como T es continua

$$E(h(T)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(t)}_{T^*} f_T(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot e^{-t}\, dt + \int_1^{\infty} 1 \cdot e^{-t}\, dt$$

✓ **varianza de una v.a.**

$$\boxed{Var(X) = E[(X - E(X))^2]}$$ siempre positiva

Propiedad

$var(X) = E[X^2 - 2X\,E(X) + E(X)^2]$ si $E(X) = \mu$

$var(X) = E(X^2) - 2\mu\, E(X) + \mu^2$

$var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$

✓ **Desvío estándar**

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{var(X)}}$$

✓ **Mediana** es el valor de X que acumula una probabilidad de 0,5 (es el cuantil 0,5): $\boxed{x \,/\, F_X(x) = 0{,}5}$

✓ **Modo** es el valor de X con mayor probabilidad

Esperanza de un vector aleatorio (X, Y)

Propiedad: El valor esperado de una función $h(X,Y)$ está dado por

$$\boxed{E(h(X,Y)) = \sum_x \sum_y h(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}$$ si (X,Y) es un vector aleatorio discreto

$$\boxed{E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy}$$ si (X,Y) es un vector aleatorio continuo

$h(X,Y)$ puede ser por ejemplo $X+Y$; $\frac{X}{Y}$; $\frac{\cos(X)}{\log(Y)}$; etc

propiedades de orden

→ Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio, $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una función, tenemos que:

1. Si $X > 0$ entonces $E(X) > 0$
2. Si $g(X) > 0$ entonces $E(g(X)) > 0$
3. sea $h(X) > g(X)$ entonces $E(h(X)) > E(g(X))$
4. $E(|X|) \geq E(X)$
5. $E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

otras

1. $$\boxed{E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E(X_i)}$$ la esperanza de la combinación lineal de v.a. es igual a la combinación lineal de las esperanzas.

2. Si $X_1, \dots, X_n$ son independientes entonces $\boxed{E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)}$

Demostración para (X,Y) continuo:

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \overset{\text{si son indep}}{=} \iint xy\, f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy$$

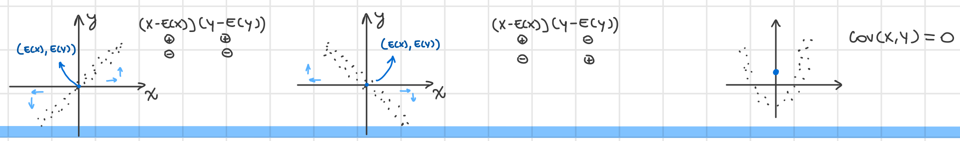
✓ covarianza

sean X e Y dos v.a. $\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}$

- si hay una dependencia lineal creciente entre X e Y, $\operatorname{cov}(X,Y) > 0$
- si hay una dependencia lineal decreciente entre X e Y, $\operatorname{cov}(X,Y) < 0$

Nos da una idea del grado de relación lineal entre dos v.a.

EJEMPLO



propiedades

1. $\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y)}$
2. Si X e Y son indep. entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$ y $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$

   (pueden NO ser indep y que $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$)

Propiedad de colinealidad

3. $\boxed{\operatorname{cov}(a + bX,\ c + dY) = b.d\ \operatorname{cov}(X,Y)}$
4. $\boxed{\operatorname{cov}(X+Y,\ Z) = \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z)}$
5. $\boxed{\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)}$

✓ Coeficiente de correlación entre las v.a. X e Y está dado por $\boxed{\rho_{X,Y} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}}$

$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

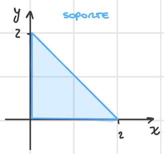
propiedad: $|\rho_{X,Y}| = 1$ sii $P(aX+b=Y) = 1$ (es una función lineal)

EJEMPLO sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en el triángulo de vértices $(0,0)$; $(0,2)$; $(2,0)$

ⓐ calcular $\operatorname{var}(X+Y)$

ⓑ calcular $\operatorname{cov}(3X+2, 4Y)$

ⓒ calcular $E[W]$, donde $W = X\,\mathbb{1}\{X\leq 1\} + (X+Y)\,\mathbb{1}\{X>1\}$



Como es uniforme puedo decir.

$f_{XY}(x,y) = K\,\mathbb{1}\{0\leq x\leq 2\,;\ 0\leq y\leq 2-x\}$

$\frac{2^2}{2}K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

ⓐ $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$

$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$

$\operatorname{Var}(X+Y) = \frac{2}{9}$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{2-x} \frac{1}{2}\,dy = (1-\frac{x}{2})\,\mathbb{1}\{0\leq x\leq 2\}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^2 (x - \frac{x^2}{2})\,dx = \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{6} = \frac{2}{3}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{2-y} \frac{1}{2}\,dx = (1-\frac{y}{2})\,\mathbb{1}\{0\leq y\leq 2\}$

$E(Y) = \frac{2}{3}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$

$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \int_0^{2-x} \frac{1}{2}\,dy\,dx = \frac{2}{3}$, $E(Y^2) = \frac{2}{3}$

$E(XY) = \int_0^2 x \int_0^{2-x} \frac{y}{2}\,dy\,dx = \frac{1}{3}$

ⓑ $\operatorname{cov}(3X+2, 4Y) = 3.4.\operatorname{cov}(X,Y) = 3.4.\left(-\frac{1}{9}\right)$

ⓒ $E[W]$

$W = \begin{cases} X & \text{si } X\leq 1 \\ X+Y & \text{si } X>1 \end{cases}$

$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}\{0\leq x\leq 2\,;\ 0\leq y\leq 2-x\}$

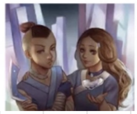
$E(W) = \int_0^1\int_0^{2-x} x\,\frac{1}{2}\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} (x+y)\frac{1}{2}\,dy\,dx$

EJEMPLO

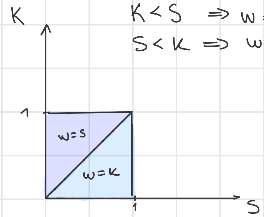
Sokka y Katara hacen una prueba para comparar sus reflejos. Cada uno tiene un pulsador y, cuando una luz se enciende, el que presiona primero gana el duelo.
Los tiempos de reacción de Sokka y Katara (en segundos) son variables aleatorias i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) $\mathcal{U}(0,1)$.

Sean las variables:

W: "tiempo de reacción del ganador"
L: "tiempo de reacción del perdedor"



$K<S \Rightarrow W=K$
$S<K \Rightarrow W=S$



$$W = \begin{cases} S & \text{si } S<K \\ K & \text{si } S>K \end{cases} = \min(K,S) \quad ; \quad L = \max(K,S) = \begin{cases} K & \text{si } S<K \\ S & \text{si } S<K \end{cases}$$

ⓐ Hallar la esperanza y la varianza de W

Sea $W = h(S,K)$; $E(W) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s,k)\, f_{SK}(s,k)\, ds\, dk$

$$f_{SK}(s,k) \overset{\text{s y k son indep.}}{=} f_S(s)\, f_K(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (s,k) \in \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{\text{el cuadrado que dibujé}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- $E(W) = \int_0^1\int_0^k s\, ds\, dk + \int_0^1\int_0^s k\, dk\, ds = \int_0^1 \frac{k^2}{2}\, dk + \int_0^1 \frac{s^2}{2}\, ds = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

- $\text{var}(W) = E(W^2) - E(W)^2$

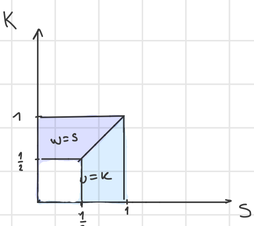
$E(W^2) = E(g(S,K)) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(s,k)\, f_{SK}(s,k)\, ds\, dk$ con $g(s,k) = \begin{cases} s^2 & \text{si } s<k \\ k^2 & \text{si } s>k \end{cases}$

$E(W^2) = \int_0^1\int_0^k s^2\, ds\, dk + \int_0^1\int_0^s k^2\, dk\, ds = \frac{1}{6}$

$\text{var}(W) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

ⓑ Hallar el tiempo de reacción del ganador si se sabe que el perdedor reaccionó en más de medio segundo.

Nos pide $E(W \mid L > \frac{1}{2})$



Nos conviene ver $L \le \frac{1}{2}$, cuando $S \le \frac{1}{2}$ y $K \le \frac{1}{2}$ (cuadrado blanco) — $\frac{1}{4}$ del cuadrado original

$$f_{SK|L<\frac{1}{2}}(s,k) = \frac{1}{P(L<\frac{1}{2})} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} \mathbb{1}\{[0;0{,}5] \times [0;0{,}5]\}$$

$$E(W \mid L<\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^s 4k\, dk\, ds + \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^k 4s\, ds\, dk = \frac{1}{6}$$

$E(X) = E[X \mid X\in A]\, P(X\in A) + E[X \mid X \in \bar{A}]\, P(X\in\bar{A}) \longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + E[W \mid L>\frac{1}{2}]\,\frac{3}{4} \longrightarrow E[W \mid L>\frac{1}{2}] = \frac{7}{18}$

ⓒ Hallar $\text{cov}(W,L) = E(WL) - E(W)E(L)$

$E(WL) \overset{*}{=} E(SK) \overset{\text{iid}}{=} E(S)E(K) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ ($E(S) = \frac{1}{2}$ porque $S \sim \mathcal{U}(0,1)$)

$E(L) = \int_0^1\int_0^k k\, ds\, dk + \int_0^1\int_0^s s\, dk\, ds = \frac{2}{3}$

$\text{cov}(W,L) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{36}$

$* \; WL = SK\, \mathbb{1}\{S<K\} + KS\, \mathbb{1}\{K<S\} = SK$

✓ **Predicción**: sea Y una v.a. ; $\mathbb{X} = (X_1, .., X_n)$ un vector aleatorio, existirá alguna función $g(\mathbb{X})$ que nos sirva para predecir Y. Para encontrar dicha función se calcula el error cuadrático medio $\boxed{ECM = E[(Y - g(\mathbb{X})^2)]}$

- $\boxed{Si\ g(\mathbb{X}) = C}$, siendo c una cte, busco c tal que $ECM = E[(Y-c)^2]$ sea mínimo. $E[(Y-c)^2] = E[Y^2 - 2cY + c^2] = E(Y^2) - 2c\,E(Y) + c^2$

Mínimo $\rightarrow \dfrac{\partial (ECM)}{\partial c} = 0$

Derivo con respecto a c e igualo a cero: $-2E(Y) + 2C = 0$

$$\boxed{C = E[Y]}$$

$$ECM = E((Y - E[Y])^2) = var(Y)$$

- $\boxed{Si\ g(\mathbb{X}) = a + b\mathbb{X}}$ busco a, b tal que $ECM = E[(Y - a - b\mathbb{X})^2]$ sea mínima

$$E[(Y-a-b\mathbb{X})^2 = E[Y^2 - aY - bXY - aY + a^2 + abX - bXY + abX + b^2X^2]$$
$$= E[Y^2] - 2a\,E[Y] - 2b\,E[XY] + a^2 + 2ab\,E(X) + b^2\,E(X^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(ECM)}{\partial a} = 0 = -2E(Y) + 2a + 2bE(X) \\ \\ \dfrac{\partial(ECM)}{\partial b} = 0 = -2E(XY) + 2a\,E(X) + 2bE(X^2) \end{cases}$$

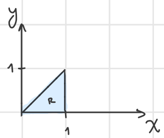
ESTE TEMA SIGUE EN EL CAP. VERDE

$$a = E(Y) + b\,E(X), \qquad b = \frac{cov(X,Y)}{var(X)}$$

Reemplazo en $g(X) = \boxed{\hat{Y} = \dfrac{cov(X,Y)}{var(X)}(X - E(X)) + E(Y)}$ **Predictor**

EJEMPLO Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = 2\,\mathbb{1}\{0 < y \leq x < 1\}$

Hallar el mejor predictor lineal de Y basado en X (Hallar la recta de regresión de Y dado X).



$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \rightarrow f_X(x) = \int_0^x 2\,dy = 2x\,\mathbb{1}\{0<x<1\}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\,dx \rightarrow E(X) = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$

$f_Y(y) = \int_y^1 2\,dx \rightarrow f_Y(y) = 2 - 2y\,\mathbb{1}\{0<y<1\} \rightarrow E(Y) = \int_0^1 (2y - 2y^2)\,dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \rightarrow E(X^2) = \int_0^1 x^2\,2x\,dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x xy\,2\,dy\,dx = \frac{1}{4} \rightarrow cov(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{36}$

$$\hat{Y} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}}\left(X - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}X$$

✓ Desigualdad de Markov

Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que h es par, y restringida a $\mathbb{R}^+$ es creciente, y sea X una v.a. tal que $E(h(X))$ existe, entonces $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(|X| \geq t) \leq \frac{E[h(X)]}{h(t)}}$$

Si además X es no negativa, $\forall a > 0$: $\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$

✓ Desigualdad de Tchevychev

Sea X una v.a. con varianza finita, $\forall k > 0$ $\boxed{P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{var(X)}{k^2}}$

(Desigualdad de Markov si $Y = X - E(X)$ y $h(t) = t^2$)

EJEMPLO Una máquina produce rieles cuya longitud (en metros) es una v.a. con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,8 ; 1,2]$. Se eligen al azar n rieles en forma independiente. Si $\bar{X}$ es el promedio de sus longitudes hallar el mínimo valor de n tal que $P(0,99 < \bar{X} < 1,01) > 0,9$

$X_i =$ "longitud del riel i (en m)" $X_i \sim \mathcal{U}(0,8 ; 1,2)$ con $i = 1, \dots, n$ independientes [otra forma: $(X_1, \dots, X_n) \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,8;1,2)$]

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\longrightarrow$ no conozco la distribución de $\bar{X}$, pero $\bar{X}$ es función lineal de las variable X_i, así que puedo calcular

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{la esperanza es lineal}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} . E(X_1) = E(X_1) \overset{☆}{=} 1$$

$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n)$ porque son idénticamente distribuidas. Entonces $\sum_1^n E(X_i) = n . E(X_1)$

$$☆ \ E(X_1) = \int_{0,8}^{1,2} x \frac{1}{(1,2-0,8)} dx = \left.\frac{x^2}{2 . 0,4}\right|_{0,8}^{1,2} = 1$$

$$var(\bar{X}) = var\left(\frac{1}{n}\sum_{i} X_i\right) = \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{indep.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{1}^{n} var(X_i) \overset{\text{i.d.}}{=} \frac{1}{n^{\cancel{2}}} . \cancel{n} . var(X_1) = \frac{1}{n} \underbrace{\frac{(1,2-0,8)^2}{12}}_{\text{Tabla} \to \text{uniforme}} = \frac{1}{75n}$$

→ $P(0,99 < \bar{X} < 1,01) = P(-0,01 < \bar{X} - \underset{E(\bar{X})}{1} < 0,01) = P(|\bar{X} - 1| < 0,01) = 1 - P(|\bar{X} - 1| \geq 0,01)$

Por Tchevychev $P(|\bar{X} - 1| \geq 0,01) \leq \frac{var(\bar{X})}{0,01^2}$

$$P(|\bar{X} - 1| \geq 0,01) \leq \frac{1}{0,01^2 . 75n} < 0,1$$

lo que pide el enunciado

$$\frac{1}{0,1 . 0,01^2 . 75} < n$$

ojo! No redondear para abajo. Si $n = 1333$ no es mayor a $1333,3$. El enunciado pide el n mínimo.

$1333,33 \approx \frac{40000}{3} < n$ $\longrightarrow$ como n es entero $\therefore n \geq 1334$

Función de variable aleatoria (cambio de variable)

Sea X una v.a, sea $Y = g(X)$ una función de la variable X, buscamos encontrar la distribución de la variable Y.

- **Método de eventos equivalentes** $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$

EJEMPLO En un concurso de pesca, cada pescador paga \$100 por participar. La cantidad de peces que cada pescador puede obtener durante el desarrollo del concurso es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro 4,5. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de \$50 por cada pieza. Calcular la función de probabilidad de la ganancia del pescador.

X: "cantidad de peces que el pescador puede obtener durante el concurso", $X \sim Poi(4,5)$

$p_X(x) = \dfrac{4{,}5^x}{x!} e^{-4,5}$, con $x \in \mathbb{N}_0$

G: "ganancia del pescador (\$)"

→ si X es discreta, $G = h(X)$ también es discreta. $G = 50X - 100\, \mathbb{1}\{0 \leq X < 8\} + 300\, \mathbb{1}\{X \geq 8\}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
g	-100	-50	0	50	100	150	200	250	300	300	300	300

→ $R_G = \{-100, -50, 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300\}$

EVENTOS EQUIVALENTES: $X = 0$ y $G = -100$

$$P(G=-100) = P(X=0) = e^{-4,5}$$
$$P(G=-50) = P(X=1) = 4{,}5\, e^{-4,5}$$
$$P(G=0) = P(X=2) = \frac{4{,}5^2}{2!} e^{-4,5}$$
$$\dots$$
$$P(G=250) = P(X=7) = \frac{4{,}5^7}{7!} e^{-4,5}$$

calculadora

$$P(G=300) = P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \sum_{i=0}^{7} \frac{4{,}5^i}{i!} e^{-4,5} = 0{,}866$$

La función de probabilidad pedida es una tabla. Lo que hicimos para buscar eventos equivalentes fue:

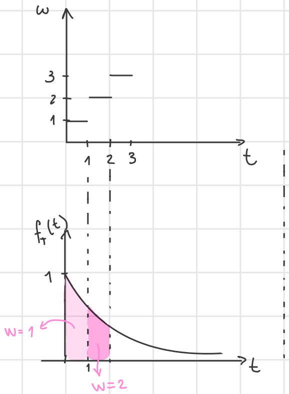
$$p_G(g) = P(G=g) = P(h(X)=g)$$
$$P(G=-100) = P(-100+50X = -100) = P(X=0)$$

$$p_G(g) = \begin{cases} \dfrac{4{,}5^{\left(\frac{g+100}{50}\right)}}{\left(\frac{g+100}{50}\right)!} e^{-4,5}, & \text{si } g \in [R_G - \{300\}] \\ 0{,}0866, & \text{si } g = 300 \end{cases}$$

EJEMPLO La duración (en minutos) de una llamada telefónica es una v.a. con distribución exponencial de parámetro 1. El costo de la llamada es \$1 por minuto o fracción. Hallar la distribución del costo de la llamada.

T: "Duración de la llamada (minutos)" $\quad T \sim \mathcal{E}(1)$

W: "costo de la llamada (\$)"



Siempre graficar

$$W = \begin{cases} 1 & \text{si } \; 0 \leq T < 1 \\ 2 & \text{si } \; 1 \leq T < 2 \\ 3 & \text{si } \; 2 \leq T < 3 \\ \vdots & \\ w & \text{si } \; (w-1) \leq T < w \end{cases}$$

$w \in \mathbb{N} \rightarrow W$ es una v.a.d.

$R_W = \mathbb{N}$

$$P_W(1) = P(W=1) = P(0 < T < 1) = \int_0^1 f_T(t)\,dt = 1 - e^{-1}$$

$$P_W(2) = P(W=2) = P(1 \leq T < 2) = F_T(2) - F_T(1) = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P_W(w) = P(W=w) = P((w-1) \leq T < w) = F_T(w) - F_T(w-1)$$

$$P_W(w) = e^{-(w-1)} - e^{-w} \quad , \; w \in \mathbb{N}$$

Ya saqué la función de probabilidad pero me piden la distribución. Desarrollo y comparo con tabla.

$$P(W=w) = e^{-(w-1)} - e^{-w} = e^{-(w-1)}\left(1 - e^{-1}\right) = (e^{-1})^{w-1} \underbrace{(1-e^{-1})}_{p} = (1-p)^{w-1} p \; , \; w \in \mathbb{N}$$

$$W \sim \mathcal{G}(1-e^{-1})$$

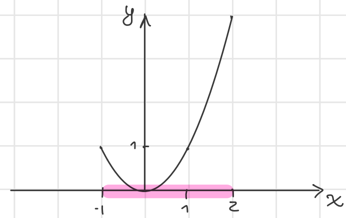
EJEMPLO Sea X una v.a. con función de densidad $f_X(x) = \frac{2(x+1)}{9} \mathbb{1}\{-1 \le x \le 2\}$

Hallar la función de densidad de $Y = X^2$

Grafico la relación entre X e Y

solo para los $x \in sop(X)$

$sop(Y) = (0,4)$



Busco $F_Y(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ P(X^2 \le y) & \text{si } 0 \le y < 4 \\ 1 & \text{si } y \ge 4 \end{cases}$

si $0 \le y < 1$, X puede tomar valores negativos (ver gráfico)

$$P(X^2 \le y) = P(|X| \le \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$

si $1 \le y < 4$, X solo toma valores positivos

$$P(X^2 \le y) = P(X \le \sqrt{y})$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{si } 0 \le y < 1 \\ F_X(y) & \text{si } 1 \le y < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \le y \end{cases}$$

Y es v.a.c.

$$f_Y(y) = \frac{d F_Y(y)}{dy}$$

Derivo con regla de la cadena

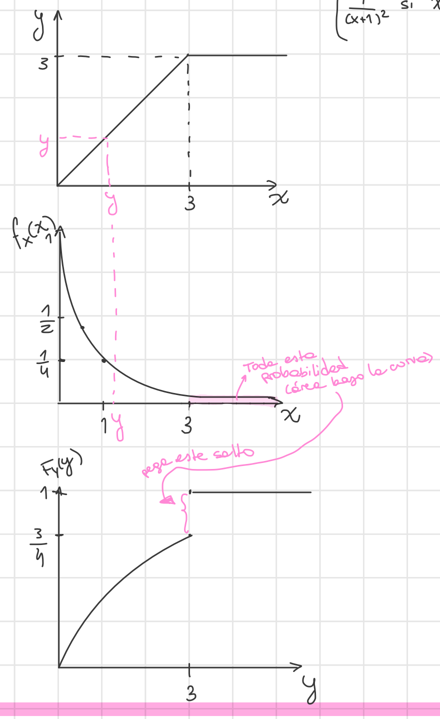
$$f_Y(y) = \left[\frac{2}{9}(\sqrt{y}+1) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{9}(-\sqrt{y}+1) \frac{1}{2\sqrt{y}} \right] \mathbb{1}\{0 \le y < 1\} + \frac{2}{9}(\sqrt{y}+1) \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}\{1 \le y < 4\}$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{9\sqrt{y}} \mathbb{1}\{0 \le y < 1\} + \frac{(\sqrt{y}+1)}{9\sqrt{y}} \mathbb{1}\{1 \le y < 4\}$$

EJEMPLO El voltaje de cierto componente es una v.a. con función de distribución $F_X(x) = \frac{x}{x+1} \mathbb{1}\{x>0\}$

La medición del voltaje se comporta como $Y = X \, \mathbb{1}\{x<3\} + 3 \, \mathbb{1}\{x \geq 3\}$. Hallar la función de distribución de Y. Como $F_X(x)$ es continua, X es continua, $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

grafico relación entre variables



si $x > 0$, $y \in (0,3]$

Busco $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ P(X \leq y) = F_X(y) & \text{si } 0 \leq y < 3 \\ 1 & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \frac{y}{y+1} \mathbb{1}\{0 \leq y < 3\} + \mathbb{1}\{y \geq 3\}$$

✓ **Variables que dependen de más de una variable**

BINOMIO DE NEWTON $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$; con $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Propiedad: si $X \sim Poi(\lambda)$, $Y \sim Poi(\mu)$, X e Y son independientes entonces $W = X + Y \sim Poi(\lambda + \mu)$

DEMOSTRACIÓN Sean X e Y v.a. independientes, con $X \sim POI(\lambda)$ e $Y \sim Poi(\mu)$. Hallar la distribución de $W = X + Y$.

X e Y son v.a.d, $W = h(X,Y)$ una función de X e Y $\rightarrow$ W será una v.a.d.

y \ x	0	1	2	3	4	...
0	0	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	5	
2	2	3	4	5	6	...
3	3	4	5	6	7	
4	4	5	6	7	8	→ valores de W
⋮			...			...

$R_W = \mathbb{N} \cup \{0\}$ como es discreta, busco $p_W(w) = P(W=w)$

$$p_W(0) = P(W=0) = P(X+Y=0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) = e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)}$$

$$p_W(1) = P(X+Y=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=0, Y=1) \underset{X \text{ e } Y \text{ indep}}{=} e^{-\lambda}\mu e^{-\mu} + \lambda e^{-\lambda} e^{-\mu} = (\lambda+\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)}$$

$$p_W(w) = P(X+Y=w) = P(X=0, Y=w) + P(X=1, Y=w-1) + \dots + P(X=w, Y=0)$$

$$= \sum_{i=0}^{w} P(X=i, Y=w-i)$$

$$\underset{\text{son indep}}{=} \sum_{i=0}^{w} P(X=i) \cdot P(Y=w-i)$$

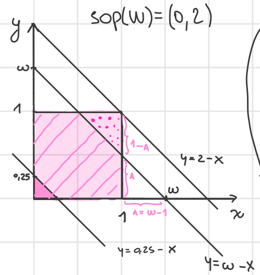
$$= \sum_{i=0}^{w} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{w-i}}{(w-i)!} e^{-\mu}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{w!} \underbrace{\sum_{i=0}^{w} \frac{w!}{i!\,(w-i)!} \lambda^i \mu^{w-i}}_{\text{BINOMIO DE NEWTON} \rightarrow (\lambda+\mu)^w}$$

$$p_W(w) = \frac{(\lambda+\mu)^w}{w!} e^{-(\lambda+\mu)}, \quad w \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad W \sim Poi(\lambda+\mu)$$

EJEMPLO Sean X e Y dos v.a. independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Hallar la distribución de $W = X + Y$. $\qquad X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$

Puedo obtener la densidad conjunta $\quad f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = 1 \; \mathbb{1}\{0<x<1,\ 0<y<1\}$



pruebo con un ejemplo

$$P(X+Y \le 0{,}25) = P(Y \le 0{,}25 - X) = \iint f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{16}$$

como $f_{XY}(x,y)$ es cte, puedo hacer área x altura (1) $\rightarrow \frac{0{,}25^2}{2} \cdot 1 = \frac{1}{16}$

generalizando

para $0 \le w < 1$: $P(W \le w) = P(X+Y \le w) = P(Y \le w - X) = \frac{w^2}{2}$

para $1 \le w < 2$: $P(W \le w) = \iint f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1 - P(W > w)$

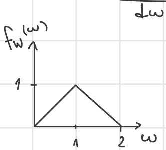
$$F_W(w) = 1 - \iint f_{XY}(x,y) \quad \text{gráfico}$$

$$= 1 - \left(\frac{(1-(w-1))^2}{2} \cdot 1 \right)$$

$$= 1 - \frac{(2-w)^2}{2}$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ \frac{w^2}{2} & \text{si } 0 \le w < 1 \\ 1 - \frac{(2-w)^2}{2} & \text{si } 1 \le w < 2 \\ 1 & \text{si } w \ge 2 \end{cases}$$

W es una v.a.c $\rightarrow \frac{dF_W(w)}{dw} = f_W(w) = w \, \mathbb{1}\{0 < w < 1\} + (2-w)\, \mathbb{1}\{1 \le w \le 2\}$



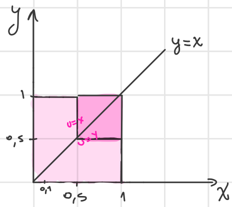
Función triangular

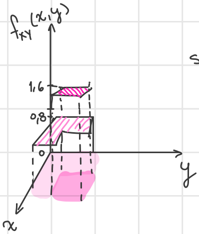
EJEMPLO

Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0{,}8 & \text{si } \{0<y<1;\ 0<x<0{,}5\} \cup \{0<y<0{,}5;\ 0{,}5<x<1\} \\ 1{,}6 & \text{si } \{0{,}5<y<1;\ 0{,}5<x<1\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de $U = \min(X,Y)$

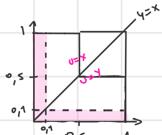




$sop(U) = (0,1)$

$$U = \begin{cases} X & \text{si } X<Y \\ Y & \text{si } Y<X \end{cases}$$

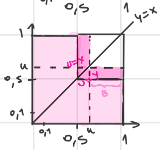
$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(U\leq u,\ X<Y) + P(U \leq u,\ X>Y)$$
$$= P(X\leq u,\ X<Y) + P(Y \leq u,\ X>Y)$$



EJEMPLO $u=0{,}1 \rightarrow F_U(0{,}1) = P(U\leq 0{,}1) = (\underbrace{0{,}1 \cdot 1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1}_{\text{área de la } ⅃})\cdot 0{,}8$

$0 \leq u \leq 0{,}5 \rightarrow F_U(u) = P(U \leq u) = (u + (1-u)u)\cdot 0{,}8 = 0{,}8\cdot(2u-u^2)$

$0{,}5<u<1 \rightarrow F_U(u) = 1 - P(U>u) = 1 - B^2 \cdot 1{,}6 = 1-(1-u)^2\cdot 1{,}6$



$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u<0 \\ 0{,}8\cdot(2u-u^2) & \text{si } 0\leq u \leq 0{,}5 \\ 1-(1-u)^2\cdot 1{,}6 & \text{si } 0{,}5<u<1 \\ 1 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

ES CONTINUA

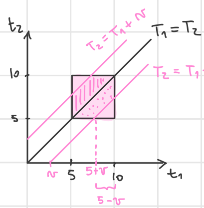
$\dfrac{dF_U(u)}{du} = f_U(u)$

EJEMPLO

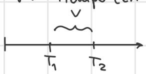
Un avión tiene 2 motores, c/u funciona durante un tiempo uniforme entre 5 y 10 horas independientem. Los motores arrancan al mismo tiempo. El avión vuela si funciona al menos 1 motor. Hallar la función de distribución del tiempo que se mantendrá volando el avión después de que haya dejado de funcionar alguno de sus motores.

T_i: "Tiempo (en horas) que funciona el motor i" ; $T_1, T_2 \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(5,10)$

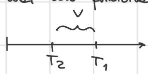
$f_{T_1T_2}(t_1,t_2) \overset{\text{indep}}{=} f_{T_1}(t_1)\, f_{T_2}(t_2) = \frac{1}{25}\, \mathbb{1}\{5<t_1<10;\ 5<t_2<10\}$



V: "Tiempo (en horas) en el cual solo funciona 1 motor"



o



$$V = \begin{cases} T_2 - T_1 & \text{si } T_2 > T_1 \\ T_1 - T_2 & \text{si } T_1 > T_2 \end{cases}$$

$F_V(v) = P(V\leq v) = P(V\leq v,\ T_1<T_2) + P(V\leq v,\ T_2<T_1)$

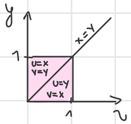
$P(T_2 - T_1 \leq v,\ T_1<T_2) + P(V\leq v,\ T_2<T_1)$

$sop(V) = (0,5)$

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v<0 \\ 1 - \overset{\text{estoy restando los dos triangulitos}}{2}\, \dfrac{(5-v)^2}{2}\, \dfrac{1}{25} & \text{si } 0 \leq v < 5 \\ 1 & \text{si } v \geq 5 \end{cases}$$

Transformación de un vector en $\mathbb{R}^n$ a otro vector en $\mathbb{R}^n$

EJEMPLO Sean X e Y v.a. independientes con distribución uniforme sobre $(0,1)$. Hallar la función de densidad del vector (U,V) con $U = \min(X,Y)$, $V = \max(X,Y)$

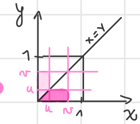


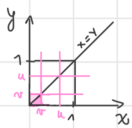
$$f_{XY}(x,y) = \mathbb{1}\{0<y<1,\ 0<x<1\}$$

$$U = \begin{cases} X & \text{si } X<Y \\ Y & \text{si } X>Y \end{cases} \quad , \quad V = \begin{cases} Y & \text{si } X<Y \\ X & \text{si } X>Y \end{cases}$$

$$F_{U,V}(u,v) = P(U\leq u,\ V\leq v) = P(U\leq u,\ V\leq v,\ X<Y) + P(U\leq u,\ V\leq v,\ X>Y)$$

$$P(X\leq u,\ Y\leq v,\ X<Y) + P(Y\leq u,\ X\leq v,\ X>Y)$$





$$P(X\leq u,\ Y\leq v,\ X<Y) + P(Y\leq u,\ X\leq v,\ X>Y)$$

$$F_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u<0,\ v<0 \\ u.v + (v-u)u & \text{si } 0\leq u\leq v<1 \\ v^2 & \text{si } 0<v<u<1 \\ 1 & \text{si } u\geq 1,\ v\geq 1 \end{cases} \quad ; \quad f_{UV}(u,v) = \frac{\partial^2 F_{U,V}(u,v)}{\partial u\, \partial v}$$

$$f_{UV}(u,v) = 2\,\mathbb{1}\{0\leq u\leq v<1\}$$

$\downarrow$

U y V no son independientes

Método del Jacobiano (método de transformaciones bivariadas)

Suponga que Y_1 e Y_2 son v.a. continuas con función de densidad conjunta $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ y que para todo (y_1,y_2) tal que $f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)>0$, $u_1 = h_1(y_1,y_2)$, $u_2 = h_2(y_1,y_2)$ es una transformación 1 a 1 de (y_1,y_2) y (u_1,u_2) con inversa $y_1 = h_1^{-1}(u_1,u_2)$, $y_2 = h_2^{-1}(u_1,u_2)$. Si las inversas tienen derivadas parciales continuas respecto a u_1 y u_2 con Jacobiano J, entonces

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = \left.\frac{f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)}{|J|}\right|_{\substack{h_1^{-1}\\ h_2^{-1}}}$$

Cuidado:

1. sirve para transformar vectores de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$
2. sirve solo para v.a. continuas
3. Sirve solo cuando las transformaciones son biyectivas

EJEMPLO Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = 8\,xy\,\mathbb{1}\{0 \le x \le y < 1\}$

Hallar la densidad conjunta de $(U,V) = (X-2Y\,,\,Y)$.

$$\begin{cases} X = U + 2V \\ Y = V \end{cases}$$

sabemos que $0 \le X \le y \le 1$

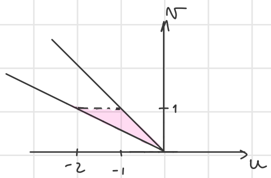
$0 < y < 1 \quad \longrightarrow \quad 0 < v < 1$ (v siempre positivo)

$0 < x < y \quad \longrightarrow \quad 0 < u + 2v < v \quad \longrightarrow \quad -2v < u < -v$ (u siempre negativo)

- Buscamos el Jacobiano: si $U = h_1(X,Y) = X - 2Y$, $V = h_2(X,Y) = Y$

$$\longrightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{U,V}(u,v) = \left. \frac{8\,xy\,\mathbb{1}\{0 \le x \le y < 1\}}{|1|} \right|_{\substack{x = u+2v \\ y = v}} = 8\,(u+2v)\,v\,\mathbb{1}\{0 < v < 1\,;\, -2v < u < -v\}$$



Soporte

✓ Método del jacobiano generalizado Si $\underline{X}$ es un vector aleatorio, $\underline{Y} = g(\underline{X})$ con g tal que $g|A_i = g_i$ es biyectiva, continua, con derivada continua donde $A_1, \dots, A_k$ es una partición del $sop(X)$ entonces

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{k} \left. \frac{f_{\underline{X}}(\underline{x})\,\mathbb{1}\{\underline{x} \in A_i\}}{|J_{g_i}(\underline{x})|} \right|_{\underline{x} = g_i^{-1}(\underline{y})}$$

Buscamos alguna partición para la cual las transformaciones sean biyectivas y aplicamos el método a cada "pedacito".

Variables aleatorias condicionadas discretas

Sean X e Y v.a.d con $p_X(x) > 0$, la función de probabilidad de Y dado que $X = x$ es

$$p_{Y|_{X=x}}(y) = P(Y=y \mid X=x) \overset{\overset{P(X=x)>0}{\uparrow}}{=} \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$$

$$\boxed{p_{Y|_{X=x}}(y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}}$$

Se define como $p_{Y|_{X=x}}(y) = 0$ cuando $p_X(x) = 0$

Propiedad Sean X e Y v.a. discretas tales que $p_{Y|_{X=x}}(y) = p_Y(y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ X e Y son independientes

EJEMPLO Un almacen tiene 35 productos, 15 vienen del proveedor 1, 7 del proveedor 2 y 13 del proveedor 3. Se seleccionarán 2 productos al azar.

X: "cantidad de productos seleccionados que vienen del prov. 1"

Y: "cantidad de productos seleccionados que vienen del prov. 2"

ⓐ ¿son X e Y independientes?

ⓑ Hallar $p_{Y|_{X=1}}(y)$

ⓒ Calcular $P(Y>0 \mid X=1)$

$y \backslash x$	0	1	2	$p_Y(y)$
0	$\frac{78}{595}$	$\frac{195}{595}$	$\frac{105}{595}$	$\frac{378}{595}$
1	$\frac{91}{595}$	$\frac{105}{595}$	0	$\frac{196}{595}$
2	$\frac{21}{595}$	0	0	$\frac{21}{595}$
$p_X(x)$	$\frac{190}{595}$	$\frac{300}{595}$	$\frac{105}{595}$	1

15 P1
7 P2
13 P3
$\rightarrow 2$

ⓐ

$X + Y \leq 2 \rightarrow X$ e Y no son indep.

$p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$p_{X,Y}(0,0) = P(X=0, Y=0) \overset{\text{Laplace}}{=} \frac{\binom{13}{2}}{\binom{35}{2}}$; $p_{X,Y}(0,1) = P(X=0, Y=1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{13}{1}}{\binom{35}{2}}$

ⓑ $p_{Y|_{X=1}}(y) = P(Y=y \mid X=1)$

$$\underset{P(X=1)>0}{=} \frac{P(Y=y, X=1)}{P(X=1)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{195}{595}}{\frac{300}{595}} = \dfrac{195}{300} & \text{si } y=0 \\[2ex] \dfrac{\frac{105}{595}}{\frac{300}{595}} = \dfrac{105}{300} & \text{si } y=1 \\[2ex] 0 & \text{si } y=2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $y=2$ no va en el soporte

Una v.a. condicionada a distintas condiciones puede tener distintas distribuciones

$Sop(Y|_{X=1}) = \{0, 1\}$

$\downarrow$

$Y|_{X=1} \sim Ber(p)$

$Y|_{X=1} \sim Ber\left(\frac{105}{300}\right)$

ⓒ $P(Y>0 \mid X=1) = \dfrac{P(Y>0, X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{P(Y=1, X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{\frac{105}{595}}{\frac{300}{595}}$

$= p_{Y|_{X=1}}(1) = \frac{105}{300}$

✓ **Variables aleatorias condicionadas continuas** sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ y densidad marginal $f_X(x)$, entonces para cualquier valor de x con el cual $f_X(x) > 0$, la función de densidad de la variable condicionada Y dado $X = x$ es

$$\boxed{f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}}$$

Si $f_X(x) = 0$ entonces se define como $f_{Y|X=x}(y) = 0$

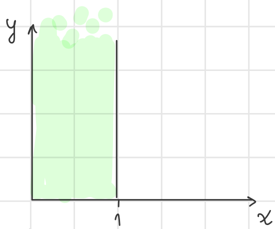
Propiedad $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)$

EJEMPLO Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad $f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-y/x} \mathbb{1}\{y>0, 0<x<1\}$

ⓐ son X e Y independientes?

ⓑ Hallar $f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y)$

ⓒ calcular $P(Y < \frac{1}{5} \mid X = \frac{1}{3})$



ⓐ $f_{X,Y}(x,y)$ no puede factorizarse como una función de x por una función sólo de y $\longrightarrow$ X e Y no son indep.

ⓑ Primero encuentro $f_{Y|X=x}$ y luego evalúo en $x = \frac{1}{3}$

$$f_{Y|X=x} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad ; \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{\infty} 2e^{-y/x}\,dy, & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-y/x}\,dy = 2x \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-y/x}\,dy$$

función exponencial integrada en todo su soporte da 1.
(x es cte porque integro con respecto a y)

$$f_X(x) = 2x \,\mathbb{1}\{0<x<1\}$$

Si $0<x<1$:

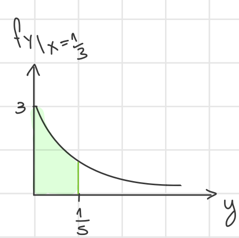
$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{\cancel{2}e^{-y/x}}{\cancel{2}x} \mathbb{1}\{y>0\}$$

$$Y|_{X=x} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y) = 3e^{-3y}\,\mathbb{1}\{y>0\} \longrightarrow Y|_{X=\frac{1}{3}} \sim \mathcal{E}(3)$$

es $P(X=\frac{1}{3}) > 0$? <u>No</u> porque X es continua

ⓒ $$P(Y < \tfrac{1}{5} \mid X = \tfrac{1}{3}) = \int_0^{\frac{1}{5}} f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y)\,dy = 1 - e^{-3/5} = 0{,}4512$$



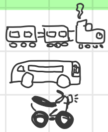
Lo veo como la probabilidad de una variable condicionada

✓ Mezcla de variables aleatorias

Si $A_1, \ldots, A_n$ es una partición de Ω y X una v.a. de manera que conozco las distribuciones de $X|A_i$, $i = 1, \ldots, n$, aplicando probabilidad total

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{n} F_{X|A_i}(x) \cdot P(A_i)}$$

EJEMPLO Juan puede ir al centro en tren, colectivo o moto.



20% veces va en tren
10%
70%

X_1: "Tiempo de viaje en tren"

X_2: "Tiempo de viaje en colectivo"

X_3: "Tiempo de viaje en moto"

X: "Tiempo (en hs) que Juan tarda en ir al centro"

$$P(X>1) = P(\overbrace{X>1|T}^{X_1>1})\, P(T) + P(\overbrace{X>1|C}^{X_2>1})\, P(C) + P(\overbrace{X>1|M}^{X_3>1}) + P(M)$$

los eventos T, C y M son excluyentes y además $P(T)+P(C)+P(M)=1$ $\rightarrow$ son una partición de Ω

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{si } T \\ X_2 & \text{si } C \\ X_3 & \text{si } M \end{cases}$$

X es una variable "mezcla"

Podemos definir una v.a.d $M = \begin{cases} 1 & \text{si } T \\ 2 & \text{si } C \\ 3 & \text{si } M \end{cases}$ $\quad R_M = \{1, 2, 3\}$

M indica el medio de transporte, que también lo llamaremos "mezcladora"

Conocemos las dist. de $X|_{M=m}$

$$F_X(x) = \sum_{m \in R_M} F_{X|_{M=m}}(x) \cdot P(M=m)$$

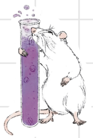
Si X es discreta, entonces la función de probabilidad de X será $p_X(x) = \sum_{m \in R_M} p_{X|_{M=m}}(x) \cdot P(M=m)$

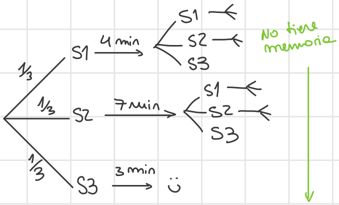
es continua, $f_X(x) = \sum_{m \in R_M} f_{X|_{M=m}}(x)\; P(M=m)$ (se deduce a partir de $F_X(x)$)

EJEMPLO Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente puede elegir una de 3 sendas. Si elige la primera, se perderá en el laberinto y luego de 4 min volverá a su posición original. Si elige la 2da volverá a su posición original luego de 7 min. Si elige la 3era, saldrá del laberinto luego de 3 min. En cada intento la rata elige 1, 2 o 3 con igual probabilidad. Calcular la esperanza del tiempo que demora en salir del laberinto.

T: "tiempo que demora en salir del laberinto."

¿ $E(T)$?





Pensemos en T condicionada

$T|S1 = 4 + T'$

$T|S2 = 7 + T''$

$T|S3 = 3$

$$E[T] = E[T'] = E[T'']$$

T es una mezcla ...

si S: "sendero elegido"

$$T = \begin{cases} 4+T' & \text{si } S=1 \\ 7+T'' & \text{si } S=2 \\ 3 & \text{si } S=3 \end{cases}$$

$E[T] = E[T|S=1]P(S=1) + E[T|S=2]\,P(S=2) + E[T|S=3]\,P(S=3)$ esperanza de la mezcla

$$E[T] = E[4+T']\,\tfrac{1}{3} + E[7+T'']\,\tfrac{1}{3} + E(3)\,\tfrac{1}{3}$$

$$3E[T] = 4 + \underbrace{E[T']}_{E[T]} + 7 + \underbrace{E[T'']}_{E[T]} + 3$$

✓ **Bayes para mezclas** Sea M una v.a.d. con soporte finito y X una v.a.c., de manera que conozco la función de probabilidad de M y la función de densidad de las variables aleatorias $X|M=m$, $\forall\, m \in R_M$

La función de probabilidad de M dado que $X=x$ será

$$\boxed{P_{M|X=x}(m) = \frac{f_{X|M=m}(x)\quad P(M=m)}{\sum_{i\in R_M} f_{X|M=i}(x)\,.\,P(M=i)}}$$

EJEMPLO Se tienen 2 máquinas para producir varillas. La longitud (en metros) de las varillas producidas es una v.a. con dist $\mathcal{N}(11, 1)$ para la máquina 1 y $\mathcal{N}(10, 2)$ para la maq. 2

La maq 1 produce el 70% de las varillas y la maq 2 el resto.

Se extrae una varilla al azar del galpón y resulta que mide 11 metros. Calcular la probabilidad de que haya sido producido por la máquina 2.

M: "Número de la máquina que produce la varilla" ¿$P(M=2 \mid X=11)$?

X: "La longitud (en metros) de la varilla"

$X|_{M=1} \sim \mathcal{N}(11,1)$

$X|_{M=2} \sim \mathcal{N}(10,2)$

X es una v.a.c., no puedo usar la definición de probabilidad condicional

M es discreta

$$P(M=2 \mid X=11) \overset{\text{Bayes para mezcla}}{=} \frac{f_{X|_{M=2}}(11)\, P(M=2)}{f_{X|_{M=1}}(11)\, P(M=1) + f_{X|_{M=2}}(11)\, P(M=2)}$$

Tabla ($\mathcal{N}$) $\rightarrow$ $f_{X|_{M=1}}(11) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1} e^{-\frac{1}{2}(11-11)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $P(M=1) = 0{,}7$

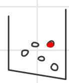
$$f_{X|_{M=2}}(11) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2 \cdot 2}(11-10)^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4}}, \quad P(M=2) = 0{,}3$$

Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a + 1$ bolitas de una urna que contiene 4 bolitas blancas y 1 roja. Sea Y el número de bolitas rojas extraídas.

a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$

b) Hallar $\boldsymbol{E}[Y|X = a]$

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad R_Y = \{0, 1\}$



$\downarrow$ solo dos posibles resultados

$Y \sim Ber(p)$

X = "cantidad de caras en 3 tiros de moneda"

Y = "cantidad de bolas rojas observadas"

$Y|_{X=a}$ = "cantidad de bolas rojas observadas en $(1+a)$ extracciones"

$R_{Y|_{X=a}} = \{0, 1\} \implies Y|_{X=a} \sim Ber(p_a)$

$p_a = P(Y=1 \mid X=a) = 1 - P(Y=0 \mid X=a)$

$$p_a = 1 - \frac{\binom{4}{1+a}}{\binom{5}{1+a}}$$

Todas las formas de sacar $(1+a)$ de las 4 bolitas blancas sobre todas las formas de sacar $(1+a)$ bolitas de la bolsa.

$$p_a = \frac{a+1}{5}$$

ⓐ $Y|_{X=a} \sim Ber\left(\frac{a+1}{5}\right)$

ⓑ $E[Y|_{X=a}] = \frac{a+1}{5}$ por tabla

Esperanza condicional

- si $Y|_{X=x}$ es una v.a.d. , $\boxed{E[Y|X=x] = \sum_{y \in R_{Y|_{X=x}}} y\, p_{Y|_{X=x}}(y)}$

- si $Y|_{X=x}$ es una v.a.c $\boxed{E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|_{X=x}}(y)\, dy}$

ambas son funciones de x — Función de regresión $\varphi(x)$ (minúscula)

Si llamamos $\varphi(x) = E[Y|X=x]$ a la esperanza de la variable condicionada Y dado que $X=x$, luego $\varphi : \text{sop}(X) \to \mathbb{R}$

- Vamos a definir una variable aleatoria llamada esperanza condicional de Y dado X, denotada $E[Y|X]$ como $\underset{\text{mayúscula}}{\varphi(X)} = \underbrace{E[Y|X]}_{\text{es una v.a.}}$ (CUIDADO CON LA NOTACIÓN)

Propiedad $\boxed{E[E[Y|X]] = E[Y]}$

DEMOSTRACIÓN $E[E[Y|X]] = E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x)\, dx$

$\varphi(x) = E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|_{X=x}}(y)\, dy \to \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, \underbrace{f_{Y|_{X=x}}(y)\, f_X(x)}_{f_{XY}(x,y)}\, dy\, dx = E[Y]$

EJEMPLO $Y|_{X=x} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ por tabla $E[Y|X=x] = x$

entonces $\varphi(x) = x\, \mathbb{1}\{0 < x < 1\}$ sale del segundo ejemplo de los de este capítulo (verde)

$\underbrace{E[Y|X]}_{\text{v.a.c con la misma distribución que } X} = \varphi(X) = X$

Propiedades

1. Sean X e Y variables aleatorias, s y r funciones medibles tales que las v.a. $r(X)\, s(Y)$, $r(X)$ y $s(Y)$ tienen esperanza finita. Entonces $\boxed{E[r(X).s(Y)|X] = r(X)\, E[s(Y)|X]}$

2. Sean Y_1 e Y_2 v.a. con esperanza finita
$\boxed{E[aY_1 + bY_2 |X] = a\, E[Y_1|X] + b\, E[Y_2|X]}$

3. $E[Y|X] = E[Y]$ si X e Y son independientes

4. $\boxed{E[r(X)|X] = r(X)}$

LIBRO WACKERLY

- La v.a. esperanza condicional de Y dada X se define como $\varphi(X) = E[Y|X]$, con φ una función medible tal que $E[(Y-\varphi(X)).t(X)] = 0$ para toda función t medible $t: sop(X) \to \mathbb{R}$ tal que $Y.t(X)$ tiene esperanza finita. Definiremos $\varphi(x) = E[Y|X=x]$

observación: la esperanza condicional siempre existe y además es única con probabilidad 1.

- Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de predictores de la v.a. Y. Cada elemento de $\mathcal{S}$ es una v.a. observable. Supongamos que quiero predecir a Y por $\hat{Y} \in \mathcal{S}$. Si usamos como criterio de bondad de un predictor el ECM, diremos que $\hat{Y}_0 \in \mathcal{S}$ es un predictor óptimo de Y, si dado otro $\hat{Y} \in \mathcal{S}$

$$ECM(\hat{Y}_0, Y) \leq ECM(\hat{Y}, Y)$$ (minimizo el ECM)

→ Una condición suficiente para que $\hat{Y}_0 \in \mathcal{S}$ sea un predictor óptimo usando el criterio del ECM es que $E[(Y-\hat{Y}_0).\hat{Y}] = 0 \quad \forall\ \hat{Y} \in \mathcal{S}$. Además $\hat{Y}_0$ será el único predictor óptimo.

$$E[(Y-g(X))^2] \geq E[(Y-E[Y|X])^2]$$ para cualquier función $g(X) \in \mathcal{S}$

- La esperanza condicional de Y dada X es la función de la v.a. X que mejor predice a X.

 Si resulta ser una recta, va a coincidir con la recta de regresión

$$\hat{Y} = \frac{cov(X,Y)}{var(X)}(X - E(X)) + E(Y)$$

✓ Varianza condicional: Sean X e Y variables aleatorias con $var(Y)$ finita, la varianza de $Y|X=x$ será $\boxed{var(Y|X=x) = E[(Y-E(Y|X=x))^2|X=x]}$

Llamemos $\sigma(x) = var(Y|X=x)$, $\sigma: sop(X) \to \mathbb{R}$

llamaremos varianza condicional de Y dada X a la v.a. $\sigma(X)$

$$\underbrace{\sigma(X)}_{\text{v.a.}} = var(Y|X) = E[(Y-E(Y|X))^2|X]$$

Desarrollando $\boxed{var(Y|X) = E[Y^2|X] - E[Y|X]^2}$

Propiedad (Pitágoras) $\boxed{var(Y) = E[var(Y|X)] + var(E[Y|X])}$

EJEMPLO

$Y|X=x \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow E[Y|X=x] = x$ Por tabla → exponencial

$var(Y|X=x) = x^2$

$E[Y|X] = X$ y $var(Y|X) = X^2$

$var(Y) = E(var(Y|X)) + var(E[Y|X])$

$var(Y) = E(X^2) + var(X)$

EJEMPLO

La longitud de los rollos de tela producidos por cierta máquina sigue una distribución uniforme entre 20 y 30 (en metros). Un buen día, un cliente requiere un rollo de por lo menos 28 metros, de los que no hay ninguno en stock. Calcular la longitud media total de tela producida para satisfacer la demanda.

L: "longitud total de tela producida para satisfacer la demanda (en m)" ¿$E(L)$?

$\overbrace{\underbrace{\quad}_{\text{Rollo 1}}\underbrace{\quad}_{\text{rollo 2}}\underbrace{\quad}_{\text{rollo 3}}\cdots\underbrace{\quad}_{\text{rollo n}}}^{L}$

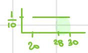
No conozco la distribución de L.

T_i: "longitud del rollo i (en m)", $T_i \sim \mathcal{U}(20,30)$

$L = \sum_{i=1}^{N} T_i$ suma aleatoria de variables aleatorias

N: "cantidad de rollos a producir hasta el primero con $T \geq 28$"

$N \sim \mathcal{G}(p)$, $p = P(T \geq 28) = \frac{1}{5} = 0{,}2$



$\frac{1}{10}.(30-28)$

TABLA

$E(\text{geométrica}) = \frac{1}{p}$

$E(N) = 5$

Busco $E[L|N=n] = \varphi(n)$

$E[L|N] = \varphi(N)$

$E[L] = E[E[L|N]]$

$\overbrace{\underbrace{\quad}_{\text{Rollo 1}}\underbrace{\quad}_{\text{rollo 2}}\underbrace{\quad}_{\text{rollo 3}}\cdots\underbrace{\quad}_{\text{rollo n}}}^{L|N=n}$

$T_1<28 \quad T_2<28 \quad \cdots \quad T_n \geq 28$

$L_{|N=n} = \left[\sum_{i=1}^{n-1} T_i \mid T_i < 28\right] + T_n \mid T_n \geq 28$

TABLA

$E(\text{variable uniforme}) = \frac{a+b}{2}$

$E[L|N=n] = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{E[T_i|T_i<28]}_{24} + \underbrace{E[T_n|T_n \geq 28]}_{29}$, $T \sim \mathcal{U}(20,30) \Rightarrow \begin{cases} T|T<28 & \sim \mathcal{U}(20,28) \\ T|T \geq 28 & \sim \mathcal{U}(28,30) \end{cases}$

$E[L|N=n] = (n-1).24 + 29 = \varphi(n)$

$E[L|N] = (N-1).24 + 29 = \varphi(N)$

$E[L] = E[(N-1).24 + 29] = 24\,\underbrace{E(N)}_{5} - 24 + 29 = 125$

Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a+1$ bolitas de una urna que contiene 4 bolitas blancas y 1 roja. Sea Y el número de bolitas rojas extraídas.

a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$
b) Hallar $\boldsymbol{E}[Y|X=a]$
c) Hallar la esperanza condicional de Y dado X
d) Hallar la esperanza de Y

(c) Encuentro la función de regresión $\varphi(a) = E[Y|X=a]$

Aplico $\varphi(x)$ en X. $E[Y|X] = \varphi(X)$

Ya teníamos de antes $\varphi(a) = \frac{a+1}{5} = E[Y|X=a]$

- $E[Y|X] = \frac{X+1}{5}$

(d) $E[Y] = E[E[Y|X]]$

$E[Y] = E\left[\frac{X+1}{5}\right] = \frac{E[X]+1}{5}$

$E[Y] = \frac{1}{2}$

Nos falta encontrar la distribución de X

Recordemos que X = "cantidad de caras observadas en 3 tiros de la moneda"

$X \sim B(3, \frac{1}{2})$ (Binomial modela cantidad de éxitos obtenidos al repetir n veces de forma indep un experimento de Bernoulli con probabilidad p de éxito)

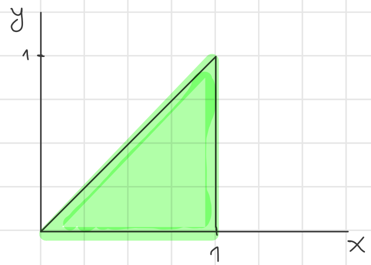
$E[X] = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5$ (TABLA)

La cantidad de querosene, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una variable aleatoria X, de la cual una cantidad aleatoria Y se vende durante el día. Suponga que el tanque no se rellena durante el día, de tal forma que $Y < X$, y que la función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x,y) = 2 * 1\{0 < y < x < 1\}$$

a) Hallar la distribución de las variables aleatorias $Y \mid X = x$ y $X \mid Y = y$
b) ¿Qué puede decirse respecto a la independencia de X e Y ?
c) Calcular $P(\frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2} \mid X = 0.4)$
d) Hallar y graficar la función de regresión $var(x) = E[Y \mid X = x]$ y la función $\tau(x) = var[Y \mid X = x]$

Soporte de (X, Y)



$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$ con $f_X(x) > 0$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \int_0^x 2\, dy = 2x$ para $0 < x < 1$

$f_{Y|X=x}(y) = \frac{2\, \mathbb{1}\{0<y<x<1\}}{2x} = \frac{1}{x}\{0<y<x\}$ con $0<x<1$

densidad cte con respecto a esa variable

Distribución que NO depende de y → uniforme

(a) $Y|X=x \sim \mathcal{U}(0, x)$

si $0<y<1$, $f_{X|Y=y}(x) = \frac{2}{f_Y(y)} \mathbb{1}\{y<x<1\}$

→ No depende de X → cte con respecto a X
→ me lo da la indicadora

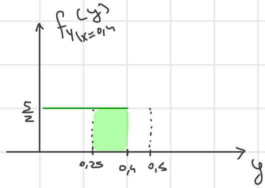
(a) $X|Y=y \sim \mathcal{U}(y, 1)$

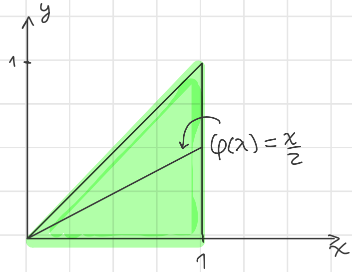
(b) En el punto $f_{XY}(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = 0$; sin embargo $f_X(\frac{1}{2}) \neq 0$ y $f_Y(\frac{3}{4}) \neq 0$

No son independientes.

ⓒ $P\left(\frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2} \mid X = 0{,}4\right) = P\left(\frac{1}{4} < [Y \mid X = 0{,}4] < \frac{1}{2}\right)$

$Y|_{X=0{,}4} \sim \mathcal{U}(0, 0{,}4)$





$P\left(\frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2} \mid X = 0{,}4\right) = (0{,}4 - 0{,}25)\frac{5}{2} = \frac{3}{8} = \int_{\frac{1}{4}}^{0{,}4} f_{Y|_{X=0{,}4}}(y)\, dy$

ⓓ $\varphi(x) = E[Y \mid X = x] = \frac{x}{2}$ función de regresión

$Y|X=x \sim \mathcal{U}(0, x)$

por tabla

$\tau(x) = \operatorname{var}[Y \mid X = x] = \frac{x^2}{12}$

Sean X e Y dos v.a. con $f_{XY}(x,y) = \dfrac{e^{-2x}}{x} \mathbb{1}\{0 < y < 2x\}$

calcular $\operatorname{cov}(X, Y)$.

- Factorizamos la conjunta $f_{XY}(x,y) = f_{Y|_{X=x}}(y)\, f_X(x) = f_{X|_{Y=y}}\, f_Y(y)$

Método 1 $\quad f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2x} \mathbb{1}\{0 < y < 2x\}\; 2e^{-2x} \mathbb{1}\{x > 0\}$

$\operatorname{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$E[XY] = E[X\, E[Y|X]] = E[X^2] = \operatorname{var}(X) + E^2[X] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$E[X] = \frac{1}{2}$

$E[Y] = E[E[Y|X]] = E[X] = \frac{1}{2}$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Método 2 $\quad E[\overbrace{Y|X}^{\mathcal{U}(0,2x)}] = X$ es una recta de pendiente 1 $\quad E[Y|X] = \frac{2x}{2}$

$\hat{Y}(x) = X = \underbrace{\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)}}_{1 \text{ porque es la pendiente}} (X - E[X]) + \underbrace{E[Y]}_{0}$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{var}(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (-1,1) y sea Y una variable aleatoria tal que $E[Y|X] = X^3 - 1$ y $Var(Y|X) = X^5$. Hallar $Cov(X, Y)$ y $Var(Y)$.

Si $E[Y|X]$ es lineal, podemos despejar $cov(X,Y)$ de la pendiente de la recta, pero no es el caso.

$$cov(X,Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$

$$E[X] = \frac{-1+1}{2} = 0$$

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = E[X^3-1] = E[X^3]-1 = \int_{-1}^{1} x^3 \tfrac{1}{2}\,dx - 1 = 0-1$$

$\rightarrow E[W] = E[E[W|X]]$, con $W = XY$, $E[XY] = E[E[XY|X]] = E[X\,E[Y|X]] = E[X(X^3-1)] =$

$E[r(X).s(Y)|X] = r(X).E[s(Y)|X]$

$$E[X^4-X] = E[X^4] - E[X] = \int_{-1}^{1} x^4 \tfrac{1}{2}\,dx - 0 = \frac{1}{5}$$

$$cov(X,Y) = \frac{1}{5} - 0.(-1) = \frac{1}{5}$$

Por pitágoras $var(Y) = var(E[Y|X]) + E[Var(Y|X)] = var(X^3-1) + E[X^5] = var(X^3) + E[X^5]$

$$= E[X^6] - E[X^3]^2 + E[X^5] = \int_{-1}^{1} x^6 \tfrac{1}{2}\,dx - 0 + 0 = \left[\frac{x^7}{14}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{7}$$

Proceso Bernoulli

condiciones
1. Dicotomía: éxito o NO éxito
2. Éxito tiene probabilidad p (constante)
3. Cada ensayo del experimento es independiente

→ $X \sim Ber(p)$

X_i: "éxito (1) o no (0) en el experimento i"

si repetimos varias veces el experimento, tenemos $X_1, X_2 \ldots$ una sucesión de v.a. tales que $X_1, X_2, \ldots \overset{iid}{\sim} X$

Y: "cantidad de 'éxitos' en n ensayos de Bernoulli"

$Y \sim B(n, p)$

W: "cantidad de ensayos de Bernoulli hasta lograr k éxitos"

$W \sim Pas(k, p)$

N: "cantidad de ensayos hasta el 1° éxito"

$N \sim \mathcal{G}(p)$

$$\underbrace{\_\ \_E}_{N_1}\ \underbrace{\_E}_{N_2}\ \cdots\ \_E\ \underbrace{\_\ \_\ \_E}_{N_k}$$

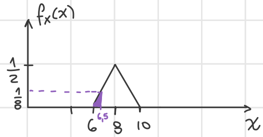
$$W = \sum_{i=1}^{k} N_i \quad , \text{ con } \quad N_1, \ldots, N_k \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(p)$$

EJEMPLO

El diámetro de las arandelas (en mm) producidos por una máquina es una v.a. X cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x-6}{4} & \text{si } 6 < x < 8 \\ \dfrac{10-x}{4} & \text{si } 8 < x < 10 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Si se revisan 100 arandelas ¿Cuál es la probabilidad de que más de una tenga diámetro inferior a 6,5 mm?



X_i: "Diámetro de la arandela i" , $i = 1, \ldots, 100$

A: "cantidad de arandelas con diam. inferior a 6,5 mm de 100"

Proceso de Bernoulli
- → Dicotomía (mide menos de 6,5 o NO)
- → como todas las X_i, $i = 1, \ldots, 100$ tienen la misma distribución $P(\text{"éxito"}) = P(X < 6{,}5)$ es cte
- → Podemos suponer independencia entre los eventos $X_i < 6{,}5$ $\forall i$

A es binomial!

$$P(X_1 < 6{,}5) \underset{def}{=} \int_6^{6{,}5} f(x)\,dx \underset{gráfico}{=} \frac{\frac{1}{8} \cdot 0{,}5}{2} = \frac{1}{32} = P(\text{éxito}) = p$$

Binomial: $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$A \sim B(100, \frac{1}{32})$

El ejercicio pide $P(A > 1) = 1 - P(A = 0) - P(A = 1) = 1 - \left(\frac{31}{32}\right)^{100} - 100 \left(\frac{31}{32}\right)^{99} \cdot \frac{1}{32} = 0{,}8234$

EJEMPLO

Colección de juguetitos: Panda, Tigre, Mono, Grulla y Mantis. Cada vez que Lucas compra un chocolatín, viene uno de los juguetes al azar. (Todos tienen la misma probabilidad)

Sea N la cantidad de chocolates que Lucas debe comprar hasta obtener toda la colección, hallar $E[N]$

$N = 1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$

$N_2 =$ "cantidad de chocolatines que compra Lucas hasta el 1er juguete distinto al que ya tiene"

① Dicotomía: Lo tengo o no lo tengo ② $p = \frac{4}{5}$ (cte) ③ es indep. $N_2 \sim \mathcal{G}(\frac{4}{5})$

$N_3 =$ "cantidad de chocolatines que compra Lucas hasta el 1er juguete distinto a los dos que ya tiene"

① Dicotomía: Lo tengo o no lo tengo ② $p = \frac{3}{5}$ (cte) ③ es indep. $N_2 \sim \mathcal{G}(\frac{3}{5})$

$N_i =$ "cantidad de chocolatines que compra Lucas hasta el 1er juguete distinto a los $i-1$ que ya tiene" con $i = 2,3,4,5$

① Dicotomía: Lo tengo o no lo tengo ② $p = \frac{6-i}{5}$ (cte) ③ es indep. $N_2 \sim \mathcal{G}(\frac{6-i}{5})$

$E[N_i] = \frac{5}{6-i}$ (Tabla)

$E[N] \underset{\uparrow \text{lineal}}{=} E[1] + \sum_{i=2}^{5} E[N_i] = 1 + \sum_{i=2}^{5} \frac{5}{6-i} = \frac{137}{12} \approx 11{,}42$

EJEMPLO

Se tiene una caja con 3 tipos de cartuchos: 4 de tipo A, 6 de tipo T y 5 de tipo N. Se extraen con reposición 3 cartuchos. Sean X_1: "cantidad de cartuchos de tipo A", X_2: "cantidad de tipo T", X_3: "cant. tipo N" (en la muestra que extraímos). Hallar la distribución del vector aleatorio (X_1, X_2, X_3).

Vemos que $X_1, X_2, X_3 \in \{0,1,2,3\}$ con $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$$P_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{3!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\left(\frac{4}{15}\right)^{x_1}\left(\frac{6}{15}\right)^{x_2}\left(\frac{5}{15}\right)^{x_3}$$

$(x_1, x_2, x_3) \sim \mathcal{M}(3, \underbrace{\tfrac{4}{15}, \tfrac{6}{15}, \tfrac{5}{15}}_{\text{suman } 1})$ Multinomial

- Si las extracciones son sin reposición:

$X_1 =$ "cantidad de cartuchos de tipo A en 3 extracciones sin reposición"

X_1 no es binomial, no hay p cte ni independencia.

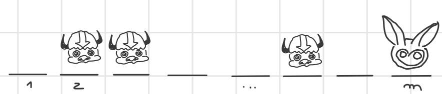
X_1 tiene distribución hipergeométrica

EJEMPLO

Chocolatines Jack lanza otra colección de muñequitos: Aang, Katara, Sokka, Momo y Appa. Cada vez que Facu compra un chocolatín, es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Una vez que Facu logre conseguir a Momo, le regalará a su hermana todos los Appa que haya juntado. Calcular la esperanza de la cantidad de muñequitos que Facu le regalará.

M: "cantidad de choco que compra Facu hasta conseguir el 1er Momo"

A: "Cant. de Appas que consigue la hermana".



Me piden $E[A]$. $M \sim \mathcal{G}(\frac{1}{5})$ $E[A] = E[E[A|M]] = E\left[\frac{M-1}{4}\right] = 1$

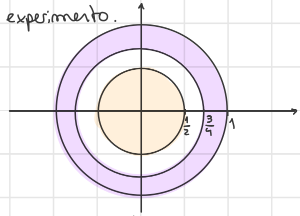
Proceso Bernoulli (No distrib) — Dicotomía: Appa o No Appa; La prob de que salga Appa es cte; Hay indep.

$A|_{M=m}$: "cantidad de Appas en m compras hasta el 1er Momo"

$A|_{M=m} \sim B(m-1, \frac{1}{4})$ $p = P(\text{Appa} \mid \text{No es momo}) = \frac{1}{4}$ (porque sabemos que en $m-1$ compras NO salió momo → Probabilidad condicionada)

EJEMPLO

El experimento consiste en efectuar disparos a un blanco circular de radio 1 hasta obtener al menos un impacto a distancia menor que $1/2$ de su centro y otro a distancia mayor que $\frac{3}{4}$ de su centro. Los impactos que recibe el blanco son independientes y se distribuyen uniformemente sobre el mismo. Calcular la esperanza de la cantidad de disparos necesarios para finalizar el experimento.



N: "el impacto ocurre en la región naranja"
V: "el impacto ocurre en la región violeta"
} eventos

D: "cantidad de disparos necesarios hasta finalizar el experimento"

$E(D)$?

$D = D_1 + D_2$ donde D_1: "cant. de tiros hasta conseguir el primer color, naranja o violeta"

D_2: "cant. de tiros hasta conseguir el color que me falta"

$D_1 \sim G(p)$, con $p = P(N \cup V) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{mutuamente} \\ \text{excluyentes}}}{=} P(N) + P(V)$, $P(N) = \frac{\text{área naranja}}{\text{área total}} = \frac{1}{4}$, $P(V) = \frac{\pi - \pi\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\pi} = \frac{7}{16}$, $p = \frac{11}{16}$

$D_1 \sim G\left(\frac{11}{16}\right)$

X_V: "cantidad de tiros hasta el 1° violeta"

X_N: "cantidad de tiros hasta el 1° Naranja"

$$D_2 = \begin{cases} X_V & \text{si } 1° \text{ naranja} \\ X_N & \text{si } 1° \text{ violeta} \end{cases}$$

$P(1° \text{ sale naranja}) = \frac{P(N)}{P(N)+P(V)}$ $\qquad$ $P(1° \text{ sale violeta}) = \frac{P(V)}{P(N)+P(V)}$

$P(1° \text{ sale naranja}) + P(1° \text{ sale violeta}) = 1$ (me encuentro frente a una partición)

D_2 es una mezcla.

Si 1° Naranja: $\underbrace{\underline{B}\ \underline{B}\ \underline{B}\ \underline{N}}_{D_1}\ \underbrace{\underline{B}\ \underline{N}\ \underline{B}\ \underline{B}\ \underline{V}}_{D_2 = X_V}$

① V o $\bar{V}$
② $P(V) = cte$
③ Indep
} $X_V \sim G(7/16)$

Si 1° violeta: $\underbrace{\underline{B}\ \underline{V}}_{D_1}\ \underbrace{\underline{B}\ \underline{V}\ \underline{V}\ \underline{B}\ \underline{B}\ \underline{V}\ \underline{N}}_{D_2 = X_N}$

$X_n \sim G\left(\frac{1}{4}\right)$

$$E(D) = E(D_1) + E(D_2) = E(D_1) + E(X_V)\,P(1° \text{ sale Naranja}) + E(X_n) \cdot P(1° \text{ sale violeta})$$

$$= \frac{16}{11} + \frac{16}{7} \cdot \frac{1/4}{1/4 + 7/16} + 4\, \frac{7/16}{1/4 + 7/16} = 4{,}83$$

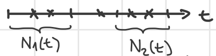
Proceso de poisson (Proceso puntual de Poisson)

Un proceso puntual aleatorio es un conjunto enumerable de puntos aleatorios ubicado sobre la recta real. En la mayoría de las aplicaciones un punto de un proceso puntual es el instante en que ocurre algún evento, motivo por el cual los puntos también se llaman eventos o arribos.

- Llamemos $N(t)$ al número de eventos durante un intervalo específico $[0,t]$

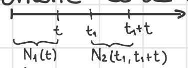
Propiedades

1. El número de eventos durante intervalos de tiempo no superpuestos son variables aleatorias independientes.



N_1 y N_2 son independientes

2. La probabilidad de cada evento en particular es la misma para todos los intervalos de longitud t, independientemente de la ubicación del intervalo y de la historia pasada del sistema.



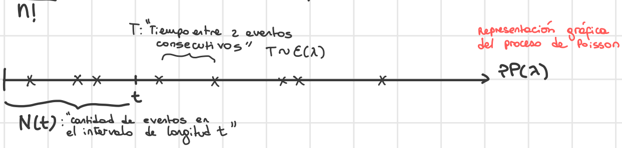
N_1 y N_2 tienen la misma distribución de probabilidades.

3. La probabilidad de obtener 2 o más eventos en un intervalo lo suficientemente pequeño es despreciable.

La variable $N(t)$ toma los valores posibles $\{0,1,2\ldots\} = \mathbb{N}_0$ y su función de probabilidad está dada por $p_N(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$.

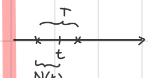
$N(t) \sim Poi(\lambda t)$

λ: intensidad o tasa de ocurrencia



Propiedad: la v.a. $N(t)$ tiene distribución de poisson si y solo si la variable T: "tiempo entre 2 eventos consecutivos" tiene distribución exponencial.

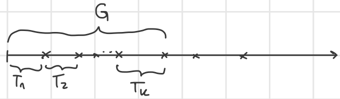
DEMOSTRACIÓN



$$P(T>t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t<0 \\ P(N(t)=0) = e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$F_T(t) = 1 - P(T>t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \qquad T \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

G: "Tiempo hasta el k-ésimo evento de Poisson"



$G = \sum_{i=1}^{k} T_i$ donde $T_1, \ldots, T_k \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$

$G \sim \Gamma(k, \lambda)$ G tiene distribución Gamma

Recordar: proceso de poisson $\neq$ v.a. con distribución de poisson

Serie: $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n)^s}{s!} = e^n$

EJEMPLO

Los tiempos (en minutos) entre la llegada de personas a la cola de un cajero automático son independientes y con distribución exponencial de parámetro $1/2$.

Ⓐ Hallar la probabilidad de que en 5 minutos llegue al menos una persona. — Unidad de tiempo definida!!

Ⓑ Hallar la probabilidad de que pasen más de 2 minutos hasta que llegue la primer persona.

Ⓒ Hallar la probabilidad de que pasen más de 10 min. entre la 8^{va} y la 10^{ma} persona.

$T_1 \quad T_2 \quad T_3$ — $PP(1/2)$ $\qquad T_i \sim \mathcal{E}(1/2)$

Ⓐ X: cantidad de personas que llegan en 5 min. $\qquad X \sim poi\left(5 \cdot \frac{1}{2}\right)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-\frac{5}{2}}$$

Ⓑ $$P(T_1 > 2) = 1 - P(T_1 \leq 2) = 1 - \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\, dx = 1 + e^{-\frac{1}{2}x}\Big|_0^2 = 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1}$$

Ⓒ Y: "Tiempo entre la 8va y 10ma persona".

$Y = T_9 + T_{10}$; $Y \sim \Gamma(2, \frac{1}{2})$

$P(Y > 10) = P(N(10) < 2)$, con $N(10)$ = "cantidad de arribos/personas en 10 minutos", $N(10) \sim Poi(\underset{\lambda t}{5})$

$P(Y>10) = P(N(10)=0) + P(N(10)=1)$ → Poisson

$P(Y>10) = e^{-5} + 5e^{-5} = 6e^{-5}$

EJEMPLO

La cantidad de insectos que arriban a la mesa de un asado responde a una distribución de Poisson de media 60. Cada insecto puede ser mosca con probabilidad $\frac{2}{3}$. La cantidad de insectos y el tipo de insecto de c/u son independientes.

Ⓐ Dado que arribaron 60 insectos ¿Cuál es la distribución de la cantidad de moscas en la mesa?

Ⓑ Hallar la probabilidad de que arriben 50 insectos y 35 sean moscas.

Ⓒ ¿Cuál es la distribución de la cantidad de moscas en la mesa?

I: "cantidad de insectos que arriban a la mesa de un asado." $\qquad I \sim Poi(60)$

$P(\text{"mosca"}) = \frac{2}{3}$

M: "cantidad de moscas en la mesa".

Proceso Bernoulli $\begin{cases} \text{es mosca o No} \\ P(\text{mosca}) = \text{cte} \\ \text{cant. y Tipo es indep} \end{cases}$

Ⓐ $M|I=60$: "cantidad de moscas de 60 insectos que arribaron"

$M_{|I=60} \sim B(60, \frac{2}{3})$; $M|I=i \sim B(i, \frac{2}{3})$, $i \in \mathbb{N}$

Ⓑ $P(I=50, M=35)$ No tengo la función de probabilidad conjunta pero puedo usar propiedades

$P(I=50, M=35) = P(I=50).P(M=35 | I=50)$, sabemos que $M|I=50 \sim B(50, \frac{2}{3})$ e $I \sim Poi(60)$

$$= \frac{60^{50}}{50!} e^{-60} \binom{50}{35} \left(\frac{2}{3}\right)^{35} \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$$

$P(I=50, M=35) = 0{,}0025$

Ⓒ $$P_M(m) = \sum_i \underbrace{P_I(i) \cdot P_{M|I=i}(m)}_{P_{I,M}(i,m)} \; ; \; m \in \mathbb{N}_0$$ → Busco la marginal de M ya que conseguimos la conjunta

$$= \sum_{i=m}^{\infty}{}^{*} \frac{60^i}{i!} e^{-60} \binom{i}{m} \left(\frac{2}{3}\right)^m \left(\frac{1}{3}\right)^{i-m}$$

* como mínimo, van a ser m insectos (no puede haber más moscas que insectos)

$$= \frac{e^{-60}}{m!} \left(\frac{2}{3}.60\right)^m \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{(i-m)!} \left(\frac{1}{3}.60\right)^{i-m}$$

$\binom{i}{m} = \frac{i!}{m!(i-m)!}$

$$= \frac{e^{-60}}{m!} 40^m \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} 20^s}_{e^{20}} = \frac{e^{-40}}{m!} 40^m$$ ⟶ $M \sim Poi(40)$ $\quad \frac{2}{3}.60$

Propiedades interesantes del proceso de poisson

- **Adelgazamiento o coloreo**: sea $\{N(t), t>0\}$ un proceso de Poisson de tasa λ. Cada vez que ocurre un evento se lo clasifica como tipo I con probabilidad p o como tipo II con probabilidad (1-p), independientemente de todos los demás arribos. Sean $N_I(t)$ y $N_{II}(t)$ la cantidad de arribos de tipo I y II que ocurren en $[0,t]$.

Es claro que $N(t) = N_I(t) + N_{II}(t)$

Teorema: $\{N_1(t), t\geq 0\}$ y $\{N_2(t), t\geq 0\}$ son procesos de Poisson independientes de tasas λp y $\lambda(1-p)$ respectivamente.

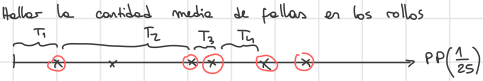
observación: $p\leq 1$ entonces las tasas de cada nuevo proceso son más pequeñas o "flaquitos"

EJEMPLO

Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 25m. La máquina detecta cada falla con probabilidad 0,9 y corta el alambre en la primera falla detectada antes de los 25 metros o a los 25 metros si no se detectan antes.

ⓐ Hallar la media de la longitud de los rollos de alambre.

ⓑ Hallar la cantidad media de fallas en los rollos



cruz: falla en el alambre

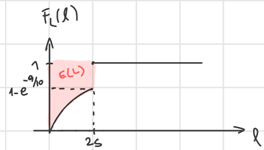
P(detecta falla) = 0,9 (cruz circuleada)

L: "longitud de los rollos de alambre"

ⓒ E(L)? No sé la distribución de L

T: "metros hasta la primer falla detectada"

$$L = \begin{cases} T & T<25 \\ 25 & T\geq 25 \end{cases}$$



Teorema del adelgazamiento $\rightarrow$ $T\sim \mathcal{E}(9/250)$ ← $0{,}9\times\frac{1}{25}$

$$E(L) = \int_0^{25} 1-(1-e^{-\frac{9}{250}t})\,dt = \frac{250}{9}(1-e^{9/10}) = 16{,}48$$

N: "cantidad de fallas en los rollos"

ⓒ E(N)? Teorema del adelgazamiento

$N|_{L=\ell}$: "cantidad de fallas no detectadas en ℓ metros" $\quad N|L=\ell \sim Poi\left(\frac{\ell}{250}\right)$

$$E[N|L=\ell] = \frac{\ell}{250} = \varphi(\ell) \longrightarrow E[N|L] = \frac{L}{250} \longrightarrow E[N] = E[E[N|L]] = \frac{16{,}48}{250}$$

- **Superposición de procesos de Poisson**. Sean $\{N_1(t), t\geq 0\}$ y $\{N_2(t), t\geq 0\}$ procesos de poisson independientes de tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces $N(t) = N_1(t)+N_2(t)$ define un proceso de poisson de tasa $\lambda = \lambda_1+\lambda_2$

EJEMPLO

A un banco llegan clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora. Suponiendo que dos clientes llegaron durante la primer hora ¿Cuál es la probabilidad de que:

ⓐ Ambos lleguen durante los primeros 20 min

ⓑ Al menos uno llegue en los primeros 20 min

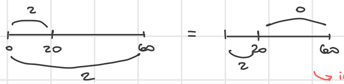
$\longrightarrow PP(\frac{1}{6})$ $\frac{10}{60 \text{ min}}$

Arribo de clientes a un banco (en min)

$N(a,b)$: " cantidad de clientes que llegan en el intervalo (a,b) en minutos "

$N(a,b) \sim Poi\left(\frac{1}{6}(b-a)\right)$

ⓐ $P(N(0,20)=2 \mid N(0,60)=2) = \dfrac{P(N(0,20)=2\ ,\ N(0,60)=2)}{P(N(0,60)=2)}$



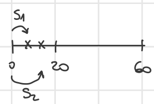
$= \dfrac{P(N(0,20)=2\ ,\ N(20,60)=0)}{P(N(0,60)=2)}$

$\begin{cases} N(0,20) \sim Poi\left(\frac{20}{6}\right) \\ N(20,40) \sim Poi\left(\frac{40}{6}\right) \\ N(0,60) \sim Poi\left(\frac{60}{6}\right) \end{cases}$ > indep

↳ intervalos NO superpuestos para que sea indep

$\overset{\text{indep}}{=} \dfrac{P(N(0,20)=2)\cdot P(N(20,60)=0)}{P(N(0,60)=2)}$

$= \dfrac{\frac{(20/6)^2}{\cancel{2!}}\ \cancel{e^{-\frac{20}{6}}}\ \cancel{e^{-\frac{40}{6}}}}{\frac{\left(\frac{60}{6}\right)^2}{\cancel{2!}}\ \cancel{e^{-\frac{60}{6}}}} = \left(\frac{20}{60}\right)^2$



$Y = (N(0,20) \mid N(0,60)=2)$: " cantidad de arribos en $(0,20)$ de 2 arribos en $(0,60)$ "

$S_1, S_2 \mid N(0,60)=2$ son independientes y $\mathcal{U}(0,60)$

ⓐ $Y \sim B\left(2, \frac{20}{60}\right)$ y busco $P(Y=2)$

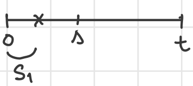
ⓑ $P(N(0,20) \geq 1 \mid N(0,60)=2) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{5}{9}$

- **Distribución condicional en los tiempos de llegada**

Como el proceso de poisson es temporalmente homogéneo y tiene incrementos independientes, es razonable pensar que los intervalos de igual longitud contenidos en el intervalo $[0,t]$ deben tener la misma probabilidad de contener el arribo.

Si ocurre un arribo, el tiempo en que ocurrió el arribo debe estar distribuido uniformemente sobre $[0,t]$

Teorema: Bajo la condición de que ocurrieran exactamente n arribos en el intervalo $[0,t]$ los tiempos de los n arribos $S_1, S_2, \dots S_n$, considerados como variables aleatorias desordenadas, son independientes y están distribuidos uniformemente sobre $[0,t]$



$\boxed{\text{Para } s<t \ :\ P(S_1 < s \mid N(t)=1) = \frac{s}{t}}$

Si defino S_i : " momento en el que ocurre el i-ésimo arribo "

$(S_1, S_2, \dots, S_n) \mid N(t) = n$ son v.a. iid "desordenadas" y cada uno $\sim \mathcal{U}(0,t)$

$Y = (N(a,b) \mid N(t)=n)$: "Cantidad de arribos en (a,b) de n arribos en $(0,t)$ ", $0<a<b<t$

$Y \sim B\left(n, \frac{b-a}{t}\right)$

con $0 < a < b < c < t$

$$(N(0,a)\,;\,N(a,b)\,;\,N(b,c)\,;\,N(c,t) \mid N(t)=n) \sim \mathcal{M}\left(n, \frac{a}{t}, \frac{b-a}{t}, \frac{c-b}{t}, \frac{t-c}{t}\right)$$

EJEMPLO

Cierto alambre tiene fallas distribuidas según un proceso de poisson de intensidad 2 por m. Las fallas pueden ser del tipo I o II con probabilidad $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Si en los primeros 10 metros de alambre se encontraron exactamente 16 fallas de tipo I, calcular la probabilidad de que halle a lo sumo 1 falla (de cualquier tipo) en el primero de los 10 m.

fallas en el alambre (en metros)

$P(I) = \frac{2}{3}$ $\quad P(II) = \frac{1}{3}$

$N(a,b)$: "cant. fallas en (a,b)" $\sim Poi(2(b-a))$

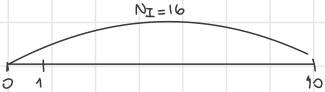
$N_I(a,b)$: "cant. fallas tipo I en (a,b)"

$N_{II}(a,b)$: "cant. fallas tipo II en (a,b)"

Por teorema de adelgazamiento

$N_I(a,b) \sim Poi(\frac{4}{3}(b-a))$; $N_{II}(a,b) \sim Poi(\frac{2}{3}(b-a))$ son independientes

$$P(N(0,1) \leq 1 \mid N_I(0,10)=16) = \frac{P(N(0,1)\leq 1\,,\ N_I(0,10)=16)}{P(N_I(0,10)=16)}$$



$N=0 \rightarrow N_I=0$ y $N_{II}=0$

$N=1 \rightarrow N_I=0$ y $N_{II}=1$ ó $N_I=1$ y $N_{II}=0$

Tres casos mutuamente excluyentes:

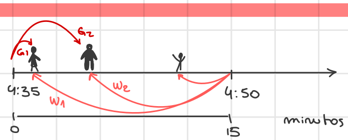
$N_I(0,1)=0$; $N_{II}(0,1)=0$; $N_I(1,10)=16$

$N_I(0,1)=0$; $N_{II}(0,1)=1$; $N_I(1,10)=16$

$N_I(0,1)=1$; $N_{II}(0,1)=0$; $N_I(1,10)=15$

→ los eventos son independientes

A partir de las 4:35 pasajeros abordan un tren en la terminal de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 30 por minuto. El tren parte de la terminal a las 4:50. Calcular la esperanza de la suma de los tiempos perdidos por cada pasajero hasta que parte el tren.



W = "Suma de los tiempos perdidos por cada pasajero hasta que parte el tren"

N = "cantidad de pasajeros que llegan en el intervalo $[0,15)$" $\quad N \sim Poi(30 \cdot 15)$

$W = \sum_{i=0}^{N} W_i$, con W_i = "Tiempo de espera del i-ésimo pasajero"

$W_i = 15 - G_i$

$W = \sum_{i=1}^{N} (15 - G_i)$

Distribución condicional de los tiempos de llegada

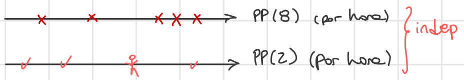
$W \mid N=n = \sum_{i=1}^{n} (15-G_i) = \sum_{k=1}^{n} (15-U_k)$, $U_k \sim \mathcal{U}(0,15)$ (iid)

$E[U_k] = \frac{15}{2}$

- $\varphi(n) = E[W \mid N=n] = E\left[\sum_{k=1}^{n}(15-U_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} E[15-U_k] = n\,(15-7{,}5) = 7{,}5\,n$
- $E[W \mid N] = \varphi(N) = 7{,}5\,N$
- $E[W] = E[E[W \mid N]] = E[7{,}5N] = 7{,}5\,E[N] = 7{,}5 \times 450 = 3375$ min ó 56,25 horas

Los mensajes que son spam arriban según un proceso de Poisson de tasa 8 mensajes por hora, mientras que los que no son spam (regulares) lo hacen con una tasa de 2 mensajes por hora, e independientemente de los spam. De los mensajes regulares, con probabilidad p=0.05 y de manera independiente son invitaciones para reunirse con amigos.

M → spam
M → Regular → Reunión con amigos
Regular → otros



X spam
✓ mensaje normal (no reunión con amigos ni spam)
mensaje reunión con amigos

(a) Se tardan 2 segs. en reconocer y borrar un mensaje spam. El tiempo para leer y contestar un mensaje regular es uniforme entre 60 y 120 segs.. Encontrar la media y la varianza del tiempo necesario para procesar todos los mensajes recibidos entre las 12 y las 22 horas.

T: "Tiempo total para procesar todos los mensajes recibidos entre las 12 y 22 hs"

T_S: "Tiempo que se invierte en reconocer y borrar un mensaje spam" $\quad T_S = 2$ (seg)

T_R: "Tiempo que se invierte en leer y responder un mensaje regular" $\quad T_r \sim \mathcal{U}(60, 120)$

N_S: "cantidad de mensajes spam entre las 12 y las 22 hs" $\quad N_S \sim Poi(8 \ (22-12))$

N_R: "cantidad de mensajes regulares entre las 12 y las 22 hs" $\quad N_R \sim Poi(2 \cdot 10)$

$$T = \sum_{1}^{N_S} 2 + \sum_{j=1}^{N_R} T_{R_j}$$

Si condicionamos: $(T \mid N_R = n) = 2 \cdot N_S + \sum_{j=1}^{n} T_{R_j}$

$$E(T \mid N_R = n) = 2 \cdot E(N_S) + n \, E(T_R)$$

$$E(T \mid N_R) = 2 \cdot (8 \cdot 10) + N_R \, \frac{60+120}{2} \longrightarrow E(T) = E(E(T \mid N_R)) = 160 + E(N_R) \cdot 90 = 1960$$

$$var(T) = E(var(T \mid N_R)) + var(E(T \mid N_R)) = 320 + E(N_R) \cdot 300 + var(160 + 30 N_R) = (320 + 20 \cdot 300) + (20 \cdot 30^2)$$

$$var(T \mid N_R) = var(2 N_S) + var\left(\sum_{j=1}^{n} T_{R_j}\right) \overset{iid}{=} 4 \cdot 80 + n\left(\frac{(120-60)^2}{12}\right) = 320 + N_R \cdot 300$$

$E(T) = 1960$ y $var(T) = 24320$

(b) Si acaba de recibirse un mensaje nuevo, hallar la probabilidad de que sea una invitación para reunirse con amigos.

A: "el mensaje recibido es una invitación para reunirse con amigos"

$P(A) = P(A \mid R)\, P(R)$, siendo R: "el mensaje recibido es regular", $P(A \mid R) = 0{,}05$

X_R: "Tiempo hasta el primer regular" $\quad X_R \sim \mathcal{E}(2)$

X_S: "Tiempo hasta el primer spam" $\quad X_S \sim \mathcal{E}(8)$

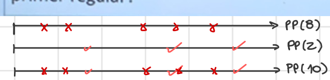
$$P(R) = P(X_R < X_S) = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = 0{,}05 \times \frac{1}{5}$$

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen dos mensajes spam antes del primer regular?

S_2: "tiempo hasta el segundo spam"

T_1: "Tiempo hasta el primer regular"



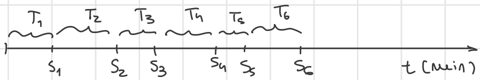
Por superposición

$$P(S_2 < T_1) = \left(\frac{\lambda_S}{\lambda_S + \lambda_R}\right)\left(\frac{\lambda_S}{\lambda_S + \lambda_R}\right) = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

Se realizará un experimento con un radioisótopo que emite partículas alpha de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 3 por hora. Para evitar intoxicaciones radiactivas se instala una alarma que suena cuando el tiempo entre dos emisiones consecutivas no supera los 20 minutos. Calcular la esperanza del tiempo que transcurre desde que se inicia el experimento hasta que suena la alarma.

$\lambda = \frac{3}{\text{hora}} = \frac{1}{20\,\text{min}}$

L: "Tiempo que transcurre desde que inicia el experimento hasta que suena la alarma"



S_i : "Tiempo que transcurre desde que se inicia el experimento hasta la emisión de la i-ésima partícula"

$S_i \sim \Gamma(i, \frac{1}{20})$

T_i : "Tiempo que transcurre desde la emisión de la (i-1)ésima partícula hasta la i-ésima"

$T_i \sim \mathcal{E}(\frac{1}{20})$

N: "cantidad de intervalos entre partículas hasta el primero que sea menor o igual que 20 min"

$N \sim \mathcal{G}(P(\underbrace{T_1 \leq 20}_{\text{éxito}}))$; $N \sim \mathcal{G}(1-e^{-1})$

$$L = S_N = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

$$E[L] = E[E[L|N]] = E(\varphi(N))$$

Falta calcular $\varphi(n)$, pero cuidado $T_1, T_2, \dots$ no son independientes de N

- La única indep. que puedo asegurar es entre $T_1, T_2, \dots$
- El evento $N=n$ me asegura que $\{T_i > 20\}$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y además que $\{T_n \leq 20\}$

$$(L|N=n) \sim \left[\sum_{i=1}^{n-1} T_i | T_i > 20\right] + T_n | T_n \leq 20$$

$$\varphi(n) = E[L|N=n] = \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i | T_i > 20] + E[T_n | T_n \leq 20]$$

$$\overset{iid}{=} (n-1)\, E[T_i | T_i > 20] + E[T_n | T_n \leq 20]$$

- Propiedad de la exponencial: $T_1 | T_1 > 20 \sim 20 + T_1$

$$E[T_1 | T_1 > 20] = 20 + E[T_1] = 40$$

$$E[T_1] = E[T_1 | T_1 > 20]\, P(T_1 > 20) + E[T_1 | T_1 \leq 20]\, P(T_1 \leq 20)$$

$$20 = 40\, e^{-1} + E[T_1 | T_1 \leq 20](1 - e^{-1})$$

$$E[T_1 | T_1 \leq 20] \approx 8{,}36$$

$$\varphi(n) = 40\, n - \frac{20}{1-e^{-1}}$$

$\mathcal{G}$ (Tabla)

$$E[L] = E\left[40N - \frac{20}{1-e^{-1}}\right] = 40\, E[N] - \frac{20}{1-e^{-1}} = \frac{20}{1-e^{-1}}$$

Teorema central del límite (TCL)

Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de v.a. i.i.d. con media μ y varianza σ^2. entonces la v.a. $\boxed{Z_n = \dfrac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}$ converge en distribución

a la v.a. normal estándar cuando $n \to \infty$. $P(Z_n \le x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Para usar la tabla de distribución normal estándar $\boxed{z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}}$

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, con n grande, X_i v.a.i.i.d., $Y \sim \mathcal{N}(n.\mu_i, n.\sigma_i^2)$

$\mu_i = E(X_i)$, $\sigma_i^2 = var(X_i)$ $\quad Y \sim \mathcal{N}(n\,\mu_i, \sqrt{n}\,\sigma_i)$ } depende qué parámetro uses

14. En un casino hay una ruleta de sólo tres números: 3, 6 y 9 (todos con la misma probabilidad de salir). Luego de apostar 10 \$, los jugadores tiran 3 veces la ruleta, y el casino paga tantos pesos como el máximo número salido en las tres tiradas. Sea P el dinero perdido por un jugador al jugar ($P < 0$ significa que el jugador ganó).

1. Hallar el valor esperado y la varianza de P.
2. Calcular la probabilidad de perder más de 500 \$ en 300 jugadas.

Hay $3^3 = 27$ ternas distintas con los resultados de los tres tiros y todos ocurren con igual probabilidad. Los valores posibles correspondientes al máximo de cada terna son 3, 6 ó 9.

Los valores posibles de pérdida son 7, 4, ó 1. No ocurre c/u con igual probabilidad.

X: "resultado máximo de cada terna"

P: $10 - X$

① $P(X=3) = \frac{1}{27}$ (la terna (3,3,3) únicamente) $= P(P=7)$

$P(X=9) = \frac{1}{27}\left(1 + \binom{3}{2}2 + \binom{3}{1}4\right) = 19/27 \quad = P(P=1)$

1 terna (9,9,9)

de 3 lugares, elijo 2 para que haya nueves y multiplico por dos (el otro lugar con un 3 o un 6)

de 3 lugares elijo 1 y el resto es 33, 66, 36, ó 63 así que multiplico por 4.

$P(X=6) = 7/27 = P(P=4)$

$E(P) = 7 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{19}{27} + 4 \cdot \frac{7}{27} = 2$

$Var(P) = E(P^2) - E(P)^2$

$Var(P) = 7^2 \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{19}{27} + 4^2 \frac{7}{27} - 2^2 = \frac{8}{3}$

② Se realizan n jugadas. S_n es la pérdida en las n jugadas y P_k la pérdida en la jugada k con k entre 1 y n. Las v.a. P_k son iid. $S_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$

Nos pide $P(S_{300} > 500)$, uso TCL, necesito $\mu = E(S_{300}) = n.E(P) = 300 \cdot 2 = 600$

$\sigma^2 = var(S_{300}) = n.var(P) = 300 \cdot \frac{8}{3} = 800$

$\sigma = \sqrt{800}$

$P(S_{300} > 500) = 1 - P(S_{300} \le 500) = 1 - \Phi\left(\frac{500-600}{\sqrt{800}}\right)$

$P(S_{300} > 500) = 0{,}9998$

En un establecimiento agropecuario, el 10% de los novillos que salen a venta pesan más de 500 kg y el 7% pesa menos de 410 kg. Suponga que la distribución del peso (en kg) de un novillo es normal.

ⓐ Calcular el peso superado solo por el 15% de los novillos

ⓑ Obtenga un intervalo de pesos, con centro en el peso medio, que comprenda el 95% de los novillos

ⓒ Calcule la probabilidad de que en una jaula de 25 novillos haya alguno que pese menos de 400 kg

X: "peso de los novillos"

$P(X>500)=0{,}1$

$P(X<410)=0{,}07$

Si usamos la tabla de la $\mathcal{N}(0,1)$ para probabilidades acumuladas a izquierda. $P(X>500)=1-P(X\leq 500)$

$P(X\leq 500)=0{,}9$

Si $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, entonces $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ es $\mathcal{N}(0,1)$ $\rightarrow$ $P\left(Z\leq \frac{500-\mu}{\sigma}\right)=0{,}9$

Usando el percentil $P(Z\leq z_0)=0{,}9$ tenemos $z_0=1{,}2816$ $\rightarrow$ $1{,}2816=\frac{500-\mu}{\sigma}$

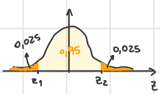
$P\left(Z\leq \underbrace{\frac{410-\mu}{\sigma}}_{z_0}\right)=0{,}07$; $z_0=-1{,}4758$; $\rightarrow$ $-1{,}478=\frac{410-\mu}{\sigma}$

$\left.\right\}$ $\mu=458{,}17$; $\sigma=32{,}64$

ⓐ $P(X\leq x_0)=0{,}85$ $\rightarrow$ $P(Z\leq z_0)=0{,}85$; TABLA $z_0=1{,}0364$ $\rightarrow$ $\frac{x_0-458{,}17}{32{,}64}=1{,}0364$ $\rightarrow$ $x_0=491{,}998$ kg

Solo el 15% de los novillos supera 491,998 kg

ⓑ Busco $P(X_1<X<X_2)=0{,}95$ $\rightarrow$ $P\left(\frac{x_1-458{,}17}{32{,}64}<Z<\frac{x_2-458{,}17}{32{,}64}\right)=0{,}95$ $\rightarrow$ $P(z_1<Z<z_2)=0{,}95$



Estoy buscando un intervalo simétrico, con ese 5% que no está en el intervalo dividido en los dos costados siendo cada costado el 2,5%

$P(Z<z_1)=0{,}025$ entonces $z_1=-1{,}95996$ y como es simétrico $z_1=-z_2$; $\frac{x_1-458{,}17}{32{,}64}=-1{,}96$; $\frac{x_2-458{,}17}{32{,}64}=1{,}96$

$x_1=394{,}16$ kg ; $x_2=522{,}144$ kg

Intervalo pedido $(394{,}16\,;\,522{,}144)$

ⓒ La probabilidad de que un novillo pese menos de 400 kg es $P(X<400)=P\left(Z<\frac{400-458{,}17}{32{,}64}\right)=0{,}037$

cada novillo tiene la misma probabilidad, independientemente del peso de los demás.

R: "cantidad de novillos que pesan menos de 400 kg en un grupo de 25"

$R\sim B(25\,;\,0{,}037)$

$P(R\geq 1)=1-P(R<1)=1-P(R=0)=1-0{,}963^{25}=0{,}61$

Por TCL, la binomial para n suficientemente grande puede aproximarse a una $\mathcal{N}$

5.4 En una fábrica de cerveza se utiliza una máquina llenadora que recibe envases de vidrio vacíos y los llena con un volumen teórico de cerveza que será elegido e ingresado como parámetro en el equipo de control de la máquina. Una vez elegido tal volumen teórico (indicado con V), el volumen real de las distintas botellas será una variable aleatoria normal de media *V* y desvío estándar 10 ml.

1. Si se elige *V* = 1 litro, ¿qué valor debería indicarse en el envase si se pretende que sólo el 3 % de las botellas tengan menos cantidad que lo indicado?

X= "Volumen real de las botellas" ; $X \sim \mathcal{N}(1; 0{,}01)$

$P(X < x_0) = 0{,}03$ $\qquad \Phi\left(\frac{x_0 - 1}{0{,}01}\right) = 0{,}03$

TABLA $\begin{cases} \Phi(1{,}87) = 0{,}97 \\ \Phi(-1{,}87) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03 \end{cases}$

$\frac{x_0 - 1}{0{,}01} = -1{,}87$

$x_0 = 0{,}9813$

2. Si se desea que solo el 1,5% de los envases supere 1L ¿Cómo debe elegirse V?

Queremos que $P(X>1) = 0{,}015$, siendo $X \sim \mathcal{N}(V; 0{,}01)$

$P(X>1) = 0{,}015 = 1 - P(X<1) = 1 - \Phi\left(\frac{1-V}{0{,}01}\right)$

$\Phi\left(\frac{1-V}{0{,}01}\right) = 0{,}985 \xrightarrow{\text{TABLA}} \frac{1-V}{0{,}01} = 2{,}17 \longrightarrow V = 0{,}9783\ \ell$

3. Suponga que las botellas con menos de 970 ml son consideradas no conformes y que la empresa puede recibir una multa si las vende. ¿Cómo debe elegirse V, si se desea que solo el 0,5% de los envases sean no conformes?

$P(X < 0{,}97) = 0{,}005 \longrightarrow \Phi\left(\frac{0{,}97 - V}{0{,}01}\right) = 0{,}005 \longrightarrow \frac{0{,}97 - V}{0{,}01} = -2{,}58 \longrightarrow V = 0{,}9958\ \ell$

✓ Estadística inferencial

- **clásica** (frecuentista): se basa solo en datos observados. Parámetros a estimar se consideran ctes desconocidas.
- **bayesiana** Los parámetros a estimar se consideran v.a., con distribuciones asignadas a priori. (no estudiamos en la materia)

✓ **Población** universo, conjunto total de elementos sobre el que se desea extraer conclusiones
✓ **Muestra** Subconjunto de la población que es efectivamente medido u observado
✓ **Muestra representativa** Muestra con características similares a la población, en cuanto a la distribución de probabilidad de las variables de interés (inferencia confiable)
✓ **Inferir**: sacar una conclusión sobre la población a partir de los datos de la muestra.
✓ **Estimación puntual**: En Inferencia estadística clásica, un parámetro es una cte desconocida, de la cual depende la distribución de probabilidad de una serie de datos.
✓ **Estimador**: función que se obtiene a partir de esos datos, intentando responder cuál es el valor (en forma aprox) de un parámetro.

- de probabilidad $\hat{p} = f_r$
- Media estimada $\hat{\mu}$, promedio de la muestra $\bar{X}$, aproximado al real
- Desviación de la muestra $\hat{\sigma} = s$ con estimador $S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$; $s \approx \sigma$

EJEMPLO En un curso de $n=60$ alumnos, $X=34$ viven en CABA. ¿Cuál es el valor de p?
Tengo que estimar el valor del parámetro p. La proporción de estudiantes de la FIUBA que viven en CABA es $\hat{p}(60,34) = 0{,}54$. ESTIMADOR: $\hat{p}(n,X) = \frac{X}{n}$ con $X \sim Bi(n, \underset{\text{valor desconocido}}{p})$
puedo inferir que p tiene un valor cercano a $\hat{p}$

→ Un estimador es una v.a. calculada a partir de datos observados, cuya distribución depende del parámetro a estimar y que genera un valor aproximado al valor desconocido de ese parámetro.

EJEMPLO En un proceso de torneado de discos de acero, el diámetro medio μ y la dispersión σ de los discos son desconocidos.
Para estimarlos se extrae una muestra de n discos y se miden sus diámetros, obteniendo las observaciones $X_1, \dots, X_n$
Se supone que estas observaciones son v.a. con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (los parámetros de distribución son los mismos a estimar)
Estimadores: $\hat{\mu} = \bar{X}$; $\hat{\sigma} = S$ → son v.a. (se obtienen a partir de las observaciones)

✓ **sesgo**: si un estimador es una v.a., podemos calcular su esperanza (que es una cte)
Diremos que un estimador $\hat{\theta}$ es **insesgado** cuando su esperanza coincide con el valor del parámetro a estimar $E(\hat{\theta}) = \theta$
Llamaremos **sesgo** de un estimador a $\boxed{b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta}$ puede ser ⊕ o ⊖

Diremos que un estimador $\hat{\theta}$ es asintóticamente insesgado cuando su sesgo tiende a 0

$$b(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- $\hat{p} = \frac{X}{n}$ como estimador de p es insesgado porque $E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{E(X)}{n} = \frac{n.p}{n} = p$
  $X \sim B(n, p)$, $E(X) = np$
- Dadas n v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ todas ellas con la misma μ desconocida,
  $\hat{\mu} = \bar{X}$ es un estimador insesgado de μ porque $E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{\sum E(X_i)}{n} = \frac{n.\mu}{n} = \mu$
- Para buscar un estimador de la varianza, sean $X_1, \dots X_n$ v.a.i. con la misma media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas.
  Si hago $\hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ no es insesgado (es asintóticamente insesgado)
  en cambio $\hat{\sigma}^2 = S_{n-1}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ sí es insesgado

✓ **varianza de un estimador** cuanto menor sea, mas precisa será la estimación

- si: $\hat{p} = \frac{X}{n}$, $V(\hat{p}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{V(X)}{n^2} = \frac{n.p(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$; $X \sim B(n,p)$
  ↪ pequeña cuanto mayor n
- Dadas n v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ todas ellas con las mismas μ y σ desconocidas
  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{\sum V(X_i)}{n^2} = \frac{\sum \sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

✓ **Error cuadrático medio** $\boxed{ECM(\hat{\theta}) = b(\hat{\theta})^2 + V(\hat{\theta})}$

cuando el ECM tiende a cero, un estimador es consistente

$$ECM(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to 0]{} 0 \iff \begin{cases} b(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ V(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

EJEMPLO Sean X, Y v.a. independientes, ambas con media μ desconocida y dispersión $\sigma = 1$. Proponemos el siguiente estimador (lineal) : $\hat{\mu} = \frac{3X+Y}{4}$ y lo caracterizamos.

Sesgo: $b(\hat{\mu}) = E\left(\frac{3X+Y}{4}\right) - \mu = \frac{3E(X) + E(Y)}{4} - \mu = \frac{3\mu + \mu}{4} - \mu = 0$

Varianza: $V(\hat{\mu}) = V\left(\frac{3X+Y}{4}\right) = \frac{9V(X) + V(Y)}{16} = \frac{10\sigma^2}{16} = \frac{10}{16} = 0{,}625 \rightarrow ECM = 0{,}625$

Pero si comparamos con $\hat{\mu} = \frac{X+Y}{2}$ (sesgo también cero)

$V(\hat{\mu}) = V\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{V(X) + V(Y)}{4} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \rightarrow ECM = 0{,}5$

El estimador propuesto es un 25% peor al promedio (0,25 x 0,5 = 0,125)

centro → valor verdadero del parámetro.

✓ Robustez de un estimador

Propiedad de un estimador de no dejarse influenciar por una pequeña fracción de valores anómalos (outliers)

A veces el promedio no es el mejor estimador de μ, porque el promedio no es robusto.

La mediana $\tilde{X}$ si es un estimador robusto

$$\tilde{X} = \begin{cases} x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} & \text{si } n \text{ impar} \\ \dfrac{x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

donde x_i representa la muestra de datos ordenada de menor a mayor

El promedio lo usamos cuando sabemos que no habrá valores anómalos

EJEMPLO En la segunda lista se cometió un error al ingresar el último valor

29,3		29,3	
29,8	Promedio	29,8	Promedio
28,9	29,32	28,9	82,42
29,1	Mediana	29,1	Mediana
29,5	29,3	295	29,3

✓ Estimación por máxima verosimilitud

La función de verosimilitud se define como $L(p) = P_{X|p}(X=x) = P(X=x \mid p)$ — conozco o puedo medir; no lo sé

Es decir, la probabilidad de que ocurre lo que efectivamente ocurre, condicionado al parámetro desconocido p. L es función de p, no del valor de X. $p \in (0,1)$

El valor estimado de p es aquel que maximiza la función de verosimilitud.

- Si $X \sim B(n,p)$: $L(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

Busco p / $\max\limits_p L(p)$ ¿Cómo encuentro el máximo? La función $\ln(x)$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, el valor de p que maximice $L(p)$ es el mismo valor que maximiza $\ln(L(p))$.

$$\ln(L(p)) = \ln\binom{n}{x} + x\ln(p) + (n-x)\ln(1-p)$$

$$\frac{d\ln(L(p))}{dp} = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = 0$$ derivo e igualo a cero para encontrar el max

$$p = \frac{x}{n} \longrightarrow \hat{p} = \frac{X}{n} \quad \text{EMV}$$

Este método es para cuando $L(p)$ es continua y derivable

EJEMPLO Un producto químico se vende en barriles. El fabricante asegura que el peso medio de los barriles (media poblacional) es $\mu = 7{,}5$ kg (podemos suponer distrib. $\mathcal{N}$)

Un cliente compra 3 barriles y los pesa: 7,12 kg ; 7,06 kg ; 6,98 kg

¿Es creíble/verosímil la afirmación del fabricante? No mucho, porque no es consistente con los datos medidos, pero podría ser verdad. ¿Qué valor de μ resultaría más verosímil? el promedio de las mediciones.

Ejemplo 2 $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu,\sigma)$ (v.a.i.)

$$L(\mu) = f_{X_1,\ldots,X_n/\mu}(x_1, \ldots, x_n)$$

Hay dos diferencias con respecto al ejemplo anterior:
- La distribución es continua (usamos f en lugar de p)
- Son muchas v.a.: usamos función de densidad conjunta

Por independencia
$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n f_{X_i/\mu}(x_i) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}\right] =$$
$$=(2\pi)^{-n/2} \cdot \sigma^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\ln L(\mu) = cte - n\ln(\sigma) - \frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Derivando
$$\frac{d\ \ln L(\mu,\sigma)}{d\,\mu} = 0 + 0 - -\frac{2}{2}\frac{\sum(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0 \quad \rightarrow$$
$$\sum(x_i-\mu) = 0 \quad \rightarrow$$
$$\sum x_i = \sum \mu = n\mu \rightarrow \ \hat{\mu} = \bar{x} \quad \textbf{EMV}$$

Ejemplo 3 $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu,\sigma)$ (v.a.i.) y queremos estimar μ y σ al mismo tiempo

$$L(\mu,\sigma) = f_{X_1,\ldots,X_n/\mu,\sigma}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^n f_{X_i/\mu,\sigma}(x_i) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}\right] =$$
$$=(2\pi)^{-n/2} \cdot \sigma^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Derivando
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\ \ln L(\mu,\sigma)}{\partial\,\mu} = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \bar{x} \\ \dfrac{\partial\ \ln L(\mu,\sigma)}{\partial\,\sigma} = 0 \rightarrow \end{cases}$$

El valor que obtengo en la primera ecuación lo reemplazo en la segunda

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\,\sigma}\left[-n\ln(\sigma) - \frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = -\frac{n}{\sigma} - -\frac{2}{2}\frac{\sum(x_i-\cancel{\mu}^{\bar{x}})^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^3} = \frac{n}{\sigma} \quad \Rightarrow \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sigma^3}{\sigma} \quad \Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}} \quad \textbf{EMV}$$

Nota sobre estimadores de la varianza:

$\sigma^2 = E(X - E(X))^2$

$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ maximiza la función de verosimilitud pero no es insesgado

$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ es insesgado, pero no maximiza la función de verosimilitud ✓

✓ Estimar por intervalos (intervalos de confianza)

Un intervalo de confianza es un intervalo que contiene al valor verdadero de un parámetro con un alto nivel de probabilidad.

✓ Nivel de confianza: Probabilidad de que el intervalo contenga al valor del parámetro (típicamente: 0,90 ; 0,95 o 0,99) genericamente, $1-\alpha$.

Generalmente, el intervalo está centrado en el estimador del parámetro.

EJEMPLO En un proceso de torneado de discos de acero, queremos conocer el diámetro μ.
Se miden $n = 15$ discos y se obtienen observaciones (a las que consideramos v.a.) $X_1, \dots, X_{15}$. Luego se calcula $\bar{x} = 26{,}84$ mm, ¿Es correcto decir $\mu = 26{,}84$ mm? NO, $\hat{\mu} = 26{,}84$ mm que es un valor aprox de μ.
¿Qué tan aproximado? Podemos dar un intervalo que contenga al valor del parámetro con alto nivel de probabilidad, por ejemplo $P(26{,}79 \le \mu \le 26{,}89) = 0{,}99$ ese sería un intervalo de confianza con nivel de confianza 0,99

CASO 1

IC para μ, $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ independientes; μ desconocida ; σ conocida

histórico

Digamos que queremos un IC para μ de nivel $1-\alpha = 0{,}95$

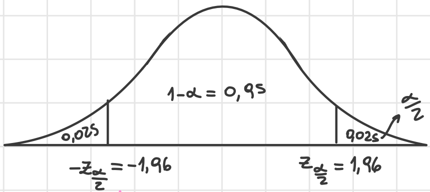


TABLA para que las colitas sean 2,5 %

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

das vuelta al multiplicar por -1

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Nivel $(1-\alpha)$	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
90%	0,05	1,65
95%	0,025	1,96
99%	0,005	2,58

$$\boxed{IC(\mu) = \left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

↳ porque es simétrico con $\bar{X}$ en el centro

Si quiero reducir el IC manteniendo el nivel de confianza, debo aumentar n

CASO 2 IC para μ, $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ independientes; μ desconocida ; σ desconocida

el enunciado podría dar s, no σ, s es extraído de la muestra

Digamos que queremos un IC para μ de nivel $1-\alpha$

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \sim t_{n-1} \longrightarrow P(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

Mirar próximas hojas

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

TABLA t

$$\boxed{IC(\mu) = \bar{X} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

CASO 3 Intervalos asintóticos. En este caso no puedo asegurar $\sim \mathcal{N}$

Aplicamos TCL, si n es grande, el intervalo $\boxed{IC(\mu) = \bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}}$

seguirá siendo válido, de nivel asintótico (aproximado) igual a $1-\alpha$.

CASO 4 IC asintótico para p, $X \sim B(n, p)$

Aproximamos distrib. B por distrib. $\mathcal{N}$. Recordamos que el EMV de p es $\hat{p} = \frac{X}{n}$ y que $E(\hat{p}) = p$, $V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow{TCL} Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (aproximado)

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cong 1-\alpha$$

aproximo un poco más $p \approx \hat{p}$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cong 1-\alpha$$

$$\boxed{IC(p) = \hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

EJEMPLO

Previo a una elección a gobernador se realiza una encuesta a 400 ciudadanos, de los cuales 184 afirman que van a votar al candidato A, 152 al candidato B y el resto está indeciso. ¿Podemos afirmar que hay una tendencia ganadora para A ó existe empate técnico? $(1-\alpha = 0{,}95)$

$\hat{p}_A = \frac{184}{400} = 0{,}46$ $\quad IC(p_A) = 0{,}46 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}46 \times 0{,}54}{400}}$

$46\% \pm 4{,}9\% \longrightarrow (41{,}1\% ; 50{,}9\%)$

$\hat{p}_B = \frac{152}{400} = 0{,}38$ $\quad IC(p_B) = 0{,}38 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}38 \times 0{,}62}{400}}$

$38\% \pm 4{,}8\% \longrightarrow (33{,}2\% ; 42{,}8\%)$

como los intervalos se solapan, hay empate técnico.

(b) ¿A cuántos ciudadanos habría que encuestar para que el error máximo de estimación (el semi-ancho del intervalo) de A sea menor o igual a 2%?

$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \longrightarrow 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}46 \times 0{,}54}{n}} = 0{,}02 \longrightarrow n = 2386$

CASO 5

IC para la varianza (o desviación estándar) de una distrib. normal. $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$ independientes; μ desconocida ; σ desconocida

$$P\left(\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \leq C \leq \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1-\alpha \quad ; \quad C = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\boxed{IC(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} \; ; \; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right)}$$

No es simétrico

EJEMPLO Se desea estimar por un intervalo de confianza del 90% ($\to \alpha = 0,1$; $\frac{\alpha}{2} = 0,05$) la precisión (desviación estándar) de un instrumento de medición de pH. Se realizaron 25 ($\to 25-1 = 24$ g.l.) mediciones sobre una misma muestra líquida homogénea, obteniendo $s = 0,067$.

$\chi^2_{24, 0,05} = 13,85$

$\chi^2_{24, 0,95} = 36,42$

$$IC(\sigma) = \left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}} \; ; \; \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}} \right) \qquad IC(\sigma) = (0,055 \; ; \; 0,088)$$

✓ ¿Qué son los g.l. en estadística? n observaciones $\to$ (n-1) g.l

EJEMPLO Se desea conocer la resistencia a la flexión de un lote de varillas metálicas para usar en construcción. En otras palabras, se quiere estimar los parámetros μ (resistencia media) y σ (desviación estándar de las resistencias)

Se ensaya una única varilla representativa del lote y se obtiene un valor de resistencia. $X_1 = 48,3N$

Podemos tener una estimación básica de la media $\hat{\mu} = X_1$, pero es imposible estimar σ. (0 grados de libertad)

Si ensayo una 2da, $X_2 = 48,7N$, podemos estimar $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\sigma} = s$. La diferencia entre X_1 y X_2 nos da una 1era idea sobre la magnitud de la dispersión (1 info = 1 g.l.)

Si $X_3 = 49,4N$; $\bar{X} = 48,8N$ $\longrightarrow$ $X_1 - \bar{X} = -0,5$; $X_2 - \bar{X} = -0,1$; $X_3 - \bar{X} = +0,6$ $\to$ estos 3 datos no son independientes entre sí porque $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) = 0$. n=3 observaciones $\to$ g.l: 2

✓ Distribución t : Dadas dos v.a. independientes entre sí: $Z \sim N(0,1)$; $C \sim \chi^2_g$

si definimos una nueva v.a T como: $T = \dfrac{Z}{\sqrt{C/g}}$ diremos que

T tiene distribución t con g grados de libertad: $T \sim t_g$

Si: $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$ independientes, vale que:

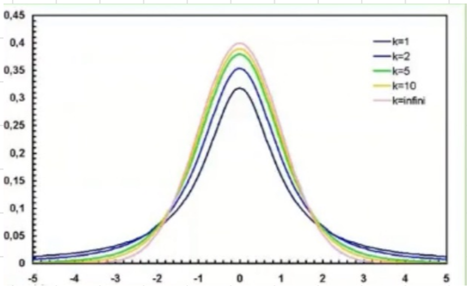
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \sim N(0,1) \quad \text{y} \quad C = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{y por lo tanto:}$$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{C}{(n-1)}}} = \frac{\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}\right)}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2 (n-1)}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \sim t_{n-1}$$

la función de densidad es $f_T(t) = cte \left(1 + \frac{t^2}{g}\right)^{-\frac{g+1}{2}} \xrightarrow[g \to \infty]{} \underbrace{cte\, e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\text{normal}}$

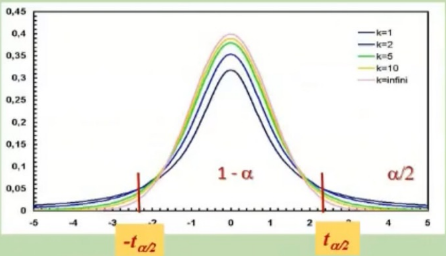
$E(T) = 0$

$V(T) = \dfrac{g}{g-2} \quad (g > 2)$



t es simétrica

Coeficientes de la distribución **t**:



En Excel:

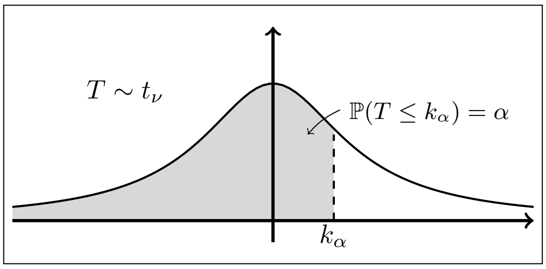
distr.t.inv (α; gl)

Ojo: entrar con α, no con $\alpha/2$

		α=10%	α=5%	α=1%
n	g.l.	$t_{0,05}$	$t_{0,025}$	$t_{0,005}$
2	1	6,31	12,71	63,66
3	2	2,92	4,30	9,92
4	3	2,35	3,18	5,84
5	4	2,13	2,78	4,60
6	5	2,02	2,57	4,03
7	6	1,94	2,45	3,71
8	7	1,89	2,36	3,50
9	8	1,86	2,31	3,36
10	9	1,83	2,26	3,25
12	11	1,80	2,20	3,11
14	13	1,77	2,16	3,01
16	15	1,75	2,13	2,95
18	17	1,74	2,11	2,90
20	19	1,73	2,09	2,86
25	24	1,71	2,06	2,80
30	29	1,70	2,05	2,76
35	34	1,69	2,03	2,73
40	39	1,68	2,02	2,71
∞	∞	1,65	1,96	2,58

Intervalos de Confianza - Autor: F. Kornblit

Cuantiles de la distribución t de Student



ν \ k_α	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	1.00000	1.37638	1.96261	3.07768	6.31375	12.70620	31.82052	63.65674
2	0.81650	1.06066	1.38621	1.88562	2.91999	4.30265	6.96456	9.92484
3	0.76489	0.97847	1.24978	1.63774	2.35336	3.18245	4.54070	5.84091
4	0.74070	0.94096	1.18957	1.53321	2.13185	2.77645	3.74695	4.60409
5	0.72669	0.91954	1.15577	1.47588	2.01505	2.57058	3.36493	4.03214
6	0.71756	0.90570	1.13416	1.43976	1.94318	2.44691	3.14267	3.70743
7	0.71114	0.89603	1.11916	1.41492	1.89458	2.36462	2.99795	3.49948
8	0.70639	0.88889	1.10815	1.39682	1.85955	2.30600	2.89646	3.35539
9	0.70272	0.88340	1.09972	1.38303	1.83311	2.26216	2.82144	3.24984
10	0.69981	0.87906	1.09306	1.37218	1.81246	2.22814	2.76377	3.16927
11	0.69745	0.87553	1.08767	1.36343	1.79588	2.20099	2.71808	3.10581
12	0.69548	0.87261	1.08321	1.35622	1.78229	2.17881	2.68100	3.05454
13	0.69383	0.87015	1.07947	1.35017	1.77093	2.16037	2.65031	3.01228
14	0.69242	0.86805	1.07628	1.34503	1.76131	2.14479	2.62449	2.97684
15	0.69120	0.86624	1.07353	1.34061	1.75305	2.13145	2.60248	2.94671
16	0.69013	0.86467	1.07114	1.33676	1.74588	2.11991	2.58349	2.92078
17	0.68920	0.86328	1.06903	1.33338	1.73961	2.10982	2.56693	2.89823
18	0.68836	0.86205	1.06717	1.33039	1.73406	2.10092	2.55238	2.87844
19	0.68762	0.86095	1.06551	1.32773	1.72913	2.09302	2.53948	2.86093
20	0.68695	0.85996	1.06402	1.32534	1.72472	2.08596	2.52798	2.84534
21	0.68635	0.85907	1.06267	1.32319	1.72074	2.07961	2.51765	2.83136
22	0.68581	0.85827	1.06145	1.32124	1.71714	2.07387	2.50832	2.81876
23	0.68531	0.85753	1.06034	1.31946	1.71387	2.06866	2.49987	2.80734
24	0.68485	0.85686	1.05932	1.31784	1.71088	2.06390	2.49216	2.79694
25	0.68443	0.85624	1.05838	1.31635	1.70814	2.05954	2.48511	2.78744
26	0.68404	0.85567	1.05752	1.31497	1.70562	2.05553	2.47863	2.77871
27	0.68368	0.85514	1.05673	1.31370	1.70329	2.05183	2.47266	2.77068
28	0.68335	0.85465	1.05599	1.31253	1.70113	2.04841	2.46714	2.76326
29	0.68304	0.85419	1.05530	1.31143	1.69913	2.04523	2.46202	2.75639
30	0.68276	0.85377	1.05466	1.31042	1.69726	2.04227	2.45726	2.75000
31	0.68249	0.85337	1.05406	1.30946	1.69552	2.03951	2.45282	2.74404
32	0.68223	0.85300	1.05350	1.30857	1.69389	2.03693	2.44868	2.73848
33	0.68200	0.85265	1.05298	1.30774	1.69236	2.03452	2.44479	2.73328
34	0.68177	0.85232	1.05248	1.30695	1.69092	2.03224	2.44115	2.72839
35	0.68156	0.85201	1.05202	1.30621	1.68957	2.03011	2.43772	2.72381
36	0.68137	0.85172	1.05158	1.30551	1.68830	2.02809	2.43449	2.71948
37	0.68118	0.85144	1.05117	1.30485	1.68709	2.02619	2.43145	2.71541
38	0.68100	0.85118	1.05077	1.30423	1.68595	2.02439	2.42857	2.71156
39	0.68083	0.85094	1.05040	1.30364	1.68488	2.02269	2.42584	2.70791
40	0.68067	0.85070	1.05005	1.30308	1.68385	2.02108	2.42326	2.70446
50	0.67943	0.84887	1.04729	1.29871	1.67591	2.00856	2.40327	2.67779
60	0.67860	0.84765	1.04547	1.29582	1.67065	2.00030	2.39012	2.66028
70	0.67801	0.84679	1.04417	1.29376	1.66691	1.99444	2.38081	2.64790
80	0.67757	0.84614	1.04320	1.29222	1.66412	1.99006	2.37387	2.63869
90	0.67723	0.84563	1.04244	1.29103	1.66196	1.98667	2.36850	2.63157

✓ Distribución χ^2

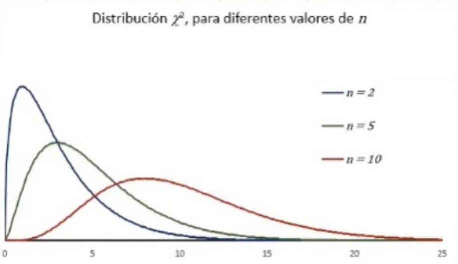
Diremos que la v.a. C tiene distribución $\chi^2(n)$ (con n grados de libertad) si su función densidad es

$$f(c) = \frac{c^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \ (c>0), \quad \begin{cases} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)! & \text{si } n \text{ es par} \\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{\infty} c^{\frac{n}{2}-1} e^{-c} \, dc & \text{en grel} \end{cases}$$

La distribución $\chi^2(n)$ es un caso particular de $\gamma(m,\lambda)$ para $m=\frac{n}{2}$, $\lambda=\frac{1}{2}$

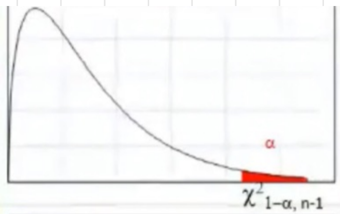
$E(C) = n$

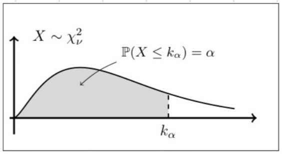
$V(C) = 2n$



Siempre toma valores positivos

Cuando n es grande se aproxima a la normal, pero para valores chicos es muy asimétrica





ν \ k_α	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.000	0.000	0.001	$\boxed{0.004}$	0.016	2.706	$\boxed{3.841}$	5.024	6.635	7.879

para 1 g.l., este es el valor que deja 0,05 a la izquierda

Para 1 g.l. este es el valor que deja 0,05 a la derecha

No es simétrica

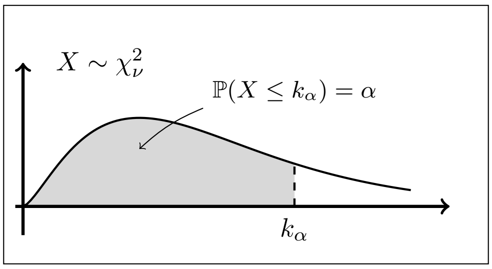
Propiedades

1. Dados v.a.i.i.d $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, vale que $C = \sum X_i^2 \sim \chi_n^2$
2. Dados v.a.i.i.d $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, vale que $C = \sum \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$
3. Dados v.a.i.i.d $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, vale que $C = \sum \left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$

Los g.l. miden la información disponible para la estimación de la varianza.

4. Dados v.a.i.i.d $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, vale que $C = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

Cuantiles de la distribución χ^2



ν \ k_α	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299

Test de hipótesis: Herramienta estadística que permite verificar si se cumple o no una condición (hipótesis) sobre un parámetro desconocido.

No queremos estimar el valor del parámetro, sólo saber si cumple una hipótesis.

El test se plantea de forma tal que P(error I) sea razonablemente baja.

α: nivel del test, dato del problema

$P(\text{error de tipo II}) = \beta$ (menos importante)

Hipótesis nula (H_0): la hipótesis que busco rechazar (el igual va en H_0 por convención)

Hipótesis alternativa (H_1): la hipótesis que busco confirmar

Error tipo I: Rechazar H_0 cuando es cierta. $P(\text{error I}) \leq \alpha$

$P(\text{error I}) = \alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0)$

ETAPAS

1. Plantear la hipótesis
2. Establecer un criterio de rechazo (de H_0)
3. calcular, ver si se cumple el criterio y concluir

EJEMPLO

Legislación, la concentración media de residuos tóxicos que una fábrica puede desechar debe ser $\mu < 3$ mg/L. Se toman 10 muestras de residuos obteniendo $\bar{X} = 2{,}87 \frac{mg}{L}$ ¿Estamos seguros de cumplir?

		Realidad	
		$\mu \geq 3$	$\mu < 3$
Conclusión del test	concluir $\mu \geq 3$	conclusión correcta	ERROR II
	Concluir $\mu < 3$	ERROR I	conclusión Correcta

ERROR I es peor que ERROR II

el igual va en H_0 por convención

H_0: No se cumple el requerimiento, $H_0: \mu \geq 3$

H_1: Se cumple, $H_1: \mu < 3$

2. Establezco el criterio de rechazo. Rechazo H_0 si $\bar{X}$ es pequeño o si $\bar{X} < vc$ (valor crítico a determinar)

$\alpha = P(\text{error I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0) = P(\bar{X} < vc \mid \mu \geq 3) = P(\bar{X} < vc \mid \mu = 3)$

caso de más difícil decisión, caso límite

EJEMPLO

La resistencia media a la tracción de varillas debe ser superior a 26 N. Se supone que un lote de varillas posee distribución normal con $\sigma = 2{,}8$ N.

a) Se ensayaron 12 varillas del lote, $\bar{X} = 27{,}1$ N ¿Es posible asegurar, al nivel $\alpha = 5\%$, que el lote cumple?

Quiero confirmar $\mu > 26$N, rechazar $\mu \leq 26$N. $H_0: \mu \leq 26$

CRITERIO: Rechazo H_0 si $\bar{X} > vc$. $\alpha = P(\text{error I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0) = P(\bar{X} > vc \mid \mu \leq 26) = P(\bar{X} > vc \mid \mu \leq 26)$

caso + difícil decisión

$0{,}05 = P(\bar{X} > vc \mid \mu = 26)$

CASO 1 IC para μ, $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ independientes; μ desconocida; σ conocida

$$0{,}05 = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{vc-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \,\middle|\, \mu = 26\right) = P\left(Z > \frac{vc-26}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \rightsquigarrow 1{,}65 = \frac{vc-26}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow vc = 26 + 1{,}65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 27{,}3$$

No se cumple el criterio de rechazo. No es posible asegurar (a nivel α) que el lote es apto. (No tenemos suficiente evidencia)

ⓑ ¿Cuál es la probabilidad de descartar un lote cuya verdadera media es $\mu = 26,7\,N$?

ERROR DE TIPO II : $P(ET II) = \beta$

$$\beta(\mu = 26,7) = P(\text{concluir no aptas} \mid \mu = 26,7) = P\left(\bar{X} \leq 26 + 1,65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = 26,7\right) = P\left(\frac{\bar{X} - 26,7}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{26 + 1,65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - 26,7}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \middle| \mu = 26,7\right)$$

$$P\left(Z \leq \frac{-0,7}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + 1,65 \mid \mu = 26,7\right) = \Phi\left(\frac{-0,7}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + 1,65\right) = \Phi(-0,87) = 0,19$$

La probabilidad de descartar estas varillas buenas es del 19 %

ⓒ Hallar n y el criterio de decisión para que simultáneamente $\alpha(\mu = 26) = 0,05$ y $\beta(\mu = 26,7) = 0,1$

Rechazo Ho si $\bar{X} > 26 + 1,65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\beta = P\left(\bar{X} \leq 26 + 1,65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \middle| \mu = 26,7\right) = \Phi\left(\frac{-0,7}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + 1,65\right) = 0,1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-0,7}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + 1,65 = -1,28 \longrightarrow \sqrt{n} = (1,28 + 1,65)\frac{\sigma}{0,7} \rightarrow n = 137$$

Criterio de decisión Rechazo Ho si $\bar{X} > 26 + 1,65\frac{\sigma}{\sqrt{137}} = 26,39$

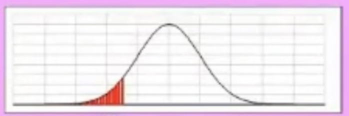
$\bar{X} > 26,39 \rightarrow$ Rechazo Ho $\rightarrow$ concluyo que las varillas son aptas (error posible 0,05 si el verdadero μ es 26)

$\bar{X} \leq 26,39 \rightarrow$ Acepto Ho $\rightarrow$ concluyo que no son aptas (error posible 0,1 si el verdadero μ es 26,7)

Caso 1. Tests para μ . Distribución normal, σ conocido

Estadístico:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

	Rechazo H_0 si:	**Región crítica:**
A: Ho: $\mu \leq \mu_0$ Ha: $\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$	 z_α
B: Ho: $\mu \geq \mu_0$ Ha: $\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$	 $-z_\alpha$
C: Ho: $\mu = \mu_0$ Ha: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}$	 $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ $z_{\frac{\alpha}{2}}$

Caso 2. Tests para μ . Distribución normal, σ desconocido

Estadístico: $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

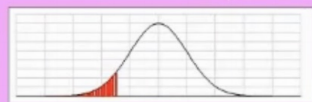
Rechazo H_0 si: **Región crítica:**

A: Ho: $\mu \leq \mu_0$
Ha: $\mu > \mu_0$

$T > t_{\alpha,n-1}$

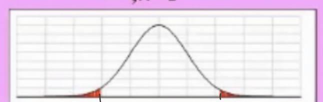
B: Ho: $\mu \geq \mu_0$
Ha: $\mu < \mu_0$

$T < -t_{\alpha,n-1}$



C: Ho: $\mu = \mu_0$
Ha: $\mu \neq \mu_0$

$|T| > t_{\alpha/2,n-1}$



Caso 3. Test asintótico para μ. Cualquier distribución, *n* grande

Estadístico: $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Rechazo H_0 si: **Región crítica:**

A: Ho: $\mu \leq \mu_0$
Ha: $\mu > \mu_0$

$T > z_\alpha$

B: Ho: $\mu \geq \mu_0$
Ha: $\mu < \mu_0$

$T < -z_\alpha$

C: Ho: $\mu = \mu_0$
Ha: $\mu \neq \mu_0$

$|T| > z_{\alpha/2}$

Caso 4 Test asintótico para *p*, distribución binomial

Estadístico

$$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}; \qquad \hat{p} = \frac{x}{n}$$

Rechazo Ho si: **Región crítica:**

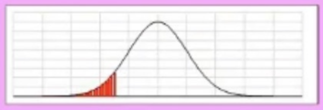
A: Ho: $p \leq p_0$
Ha: $p > p_0$

$Z > z_a$

z_α

B: Ho: $p \geq p_0$
Ha: $p < p_0$

$Z < -z_a$



$-z_\alpha$

Caso 5 Test para varianza, distribución normal

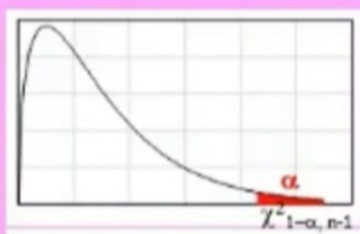
Estadístico

$$C = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

Rechazo H_0 si: **Región crítica:**

A: Ho: $\sigma \leq \sigma_0$
Ha: $\sigma > \sigma_0$

$C > \chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$



B: Ho: $\sigma \geq \sigma_0$
Ha: $\sigma < \sigma_0$

$C < \chi^2_{\alpha,\, n-1}$