# guia 1

**1.4** Un dado equilibrado se arroja dos veces. Hallar la probabilidad de que

(**a**) la suma de los resultados sea 7.

(**b**) el primer resultado sea mayor que el segundo.

(**c**) los dos resultados sean distintos y su suma no supere 7.

(**d**) el módulo de la diferencia de los resultados sea mayor que 1.

equilibrado $\rightarrow$ laplace

A = "la suma es 7"

B = "los resultados son distintos y la suma no supera 7"

C = "el modulo de la diferencia sea mayor a 1"

la prob de que salga c/conjunto de vector $(d_1, d_2)$ es la misma

$\downarrow$

estoy en un espacio equisprob

$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36}$

suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

A = ■

C = ■

$\downarrow$ cuento casilleros

$\mathbb{P}(A) = \frac{fav}{tot} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{}$

resta

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |
| 6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |

= ■

$\mathbb{P}(D) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

las letras son subconjuntos de

$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\{2,1\}, \{3,1\}, \{4,1\}, \ldots)$

**1.5** Se tienen dos urnas $a$ y $b$. En $a$ hay 5 bolas rojas y 3 blancas, y en $b$ hay 2 rojas y 3 blancas. Si se extraen al azar una bola de cada urna, hallar la probabilidad de que

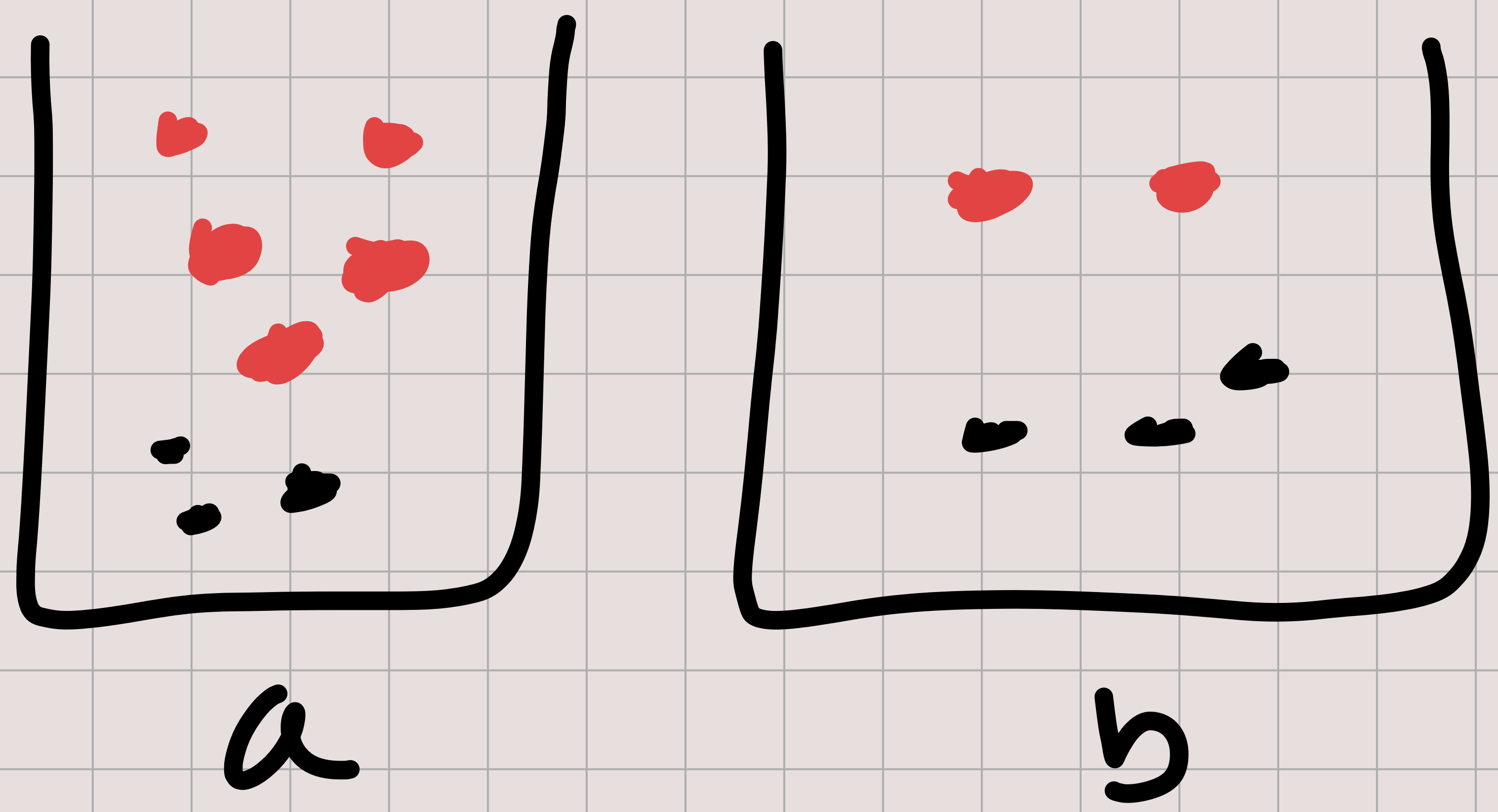
(**a**) ambas sean rojas.

(**b**) ambas sean del mismo color.

(**c**) sean de distinto color.

(**d**) la bola extraída de la urna $b$ sea blanca.

Se extraen al azar 1 bola de c/u



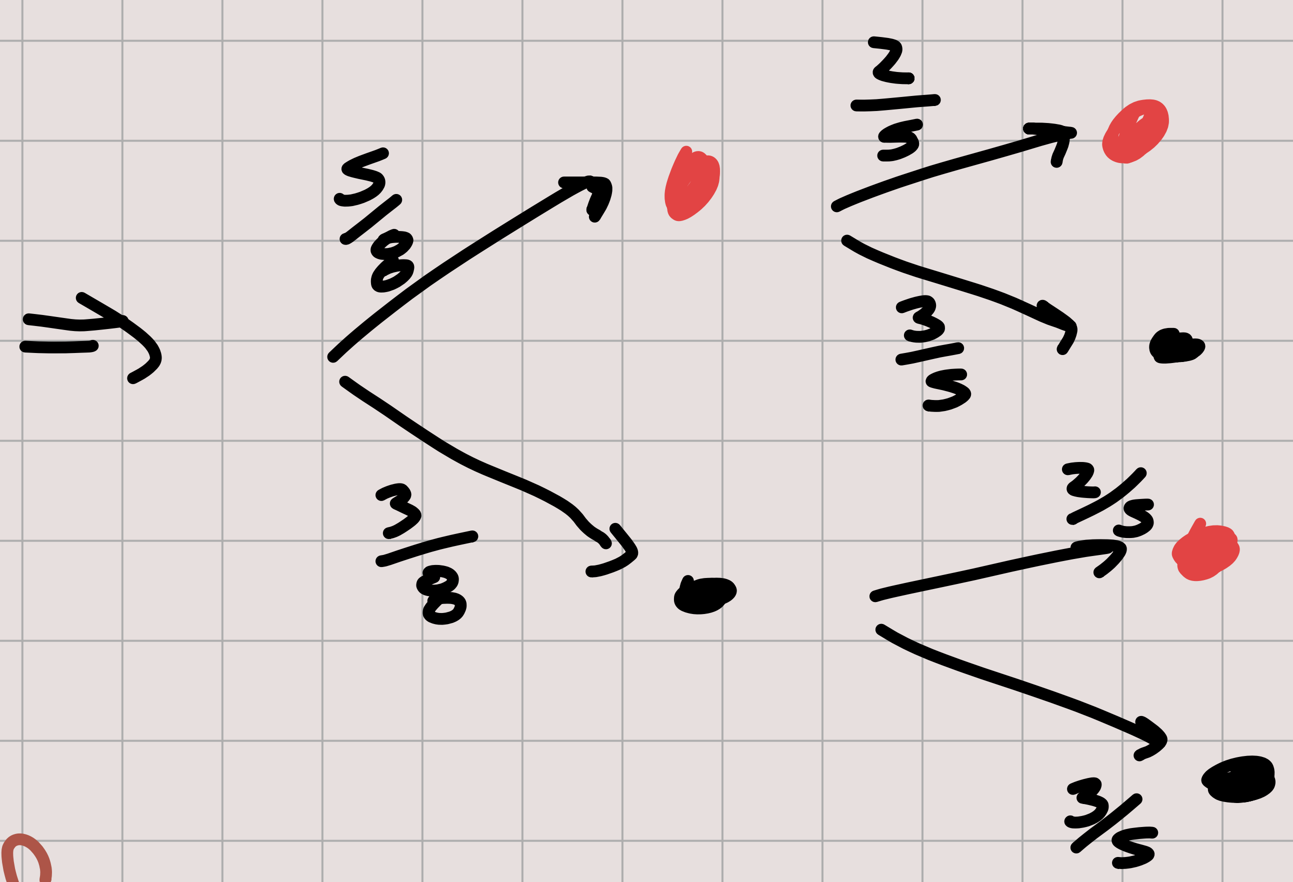

A = "ambas sean rojas"

B = "ambas sean del mismo color"

C = "ambas sean de distinto color"

D = "la bola de b sea blanca"


$\Rightarrow$




Son experimentos independientes

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{8}\,\frac{2}{5} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{8}\,\frac{2}{5} + \frac{3}{8}\,\frac{3}{5} = \frac{1}{4} + \frac{9}{40} = \boxed{\frac{19}{40}}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{5}{8}\,\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\,\frac{2}{5} = \frac{3}{8} + \frac{3}{20} = \boxed{\frac{21}{40}}$$

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}((\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)) = \frac{3\ 3}{40} + \frac{5\ 3}{40} = \boxed{\frac{24}{40}}$$

**1.6** Cada noche, después de cenar, el matrimonio Galíndez tira 4 dados. Si no sale ningún 1, le toca al Sr. Galíndez lavar los platos. En caso contrario, a su esposa. En promedio, ¿quién lava los platos más seguido?

$Sr =$ "no sale ningun 1"
$Sra =$ "sale al menos un 1"  $\longrightarrow$  $\mathbb{P}(Sr) = 1 - \mathbb{P}(Sra)$

son experimentos independientes

$$\mathbb{P}(Sr) = \frac{5}{6}\,\frac{5}{6}\,\frac{5}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} \simeq \boxed{0{,}48}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Sra) = 1 - \mathbb{P}(Sr) \simeq \boxed{0{,}52}$$

teoricamente lavar mas los platos la Sra Galindez

**1.10** Se sortea un número al azar dentro del intervalo $[0, 1]$.

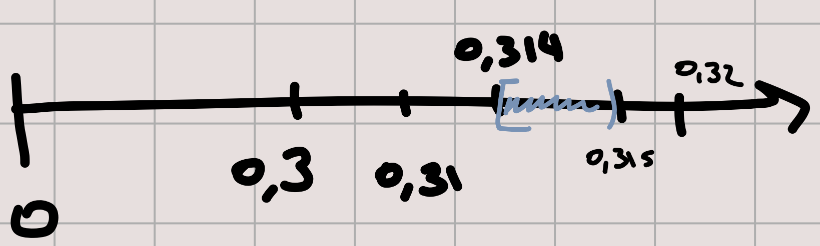
(**a**) Hallar la probabilidad de que los primeros tres dígitos sean 3, 1, 4 (es decir, 0.314 . . .).

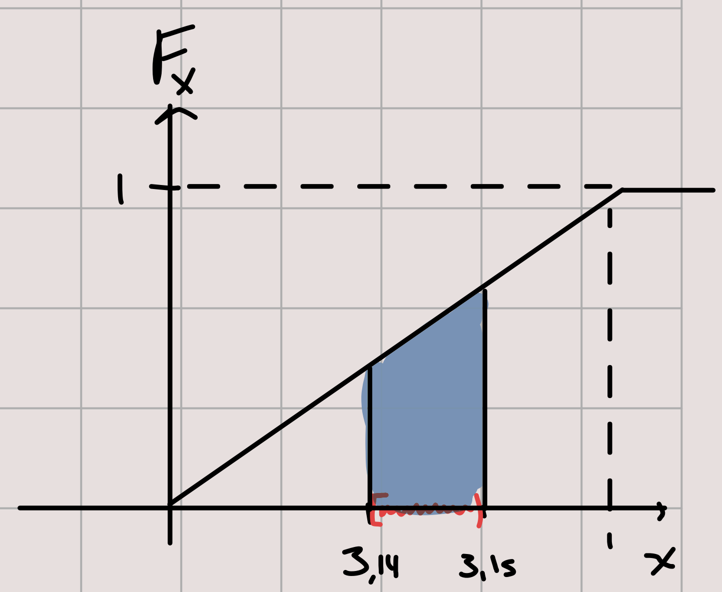
(**b**) Hallar la probabilidad de que el 0 no esté entre los primeros 4 dígitos.

(**c**) Hallar la probabilidad de que el 0 no sea uno de sus dígitos.

tengo un intervalo $[\ \ ]_1$

(a) hallar la $\mathbb{P}(\text{"}0{,}314\text{"})$




tengo un intervalo equiprobable  $f_X(x) = 1 \quad \mathbb{1}\{0 \leq x < 1\}$

$$\mathbb{P}(3{,}14 \leq x < 3{,}15) = F(3{,}15) - F(3{,}14)$$

como es un intervalo continuo no importa ser extricto con los signos

111

(**b**) Mediante diez mil simulaciones estimar la probabilidad de que al arrojar 2 dados equilibrados la suma de los resultados sea menor que 11. Comparar la estimación obtenida con el valor verdadero de la probabilidad.

suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

a

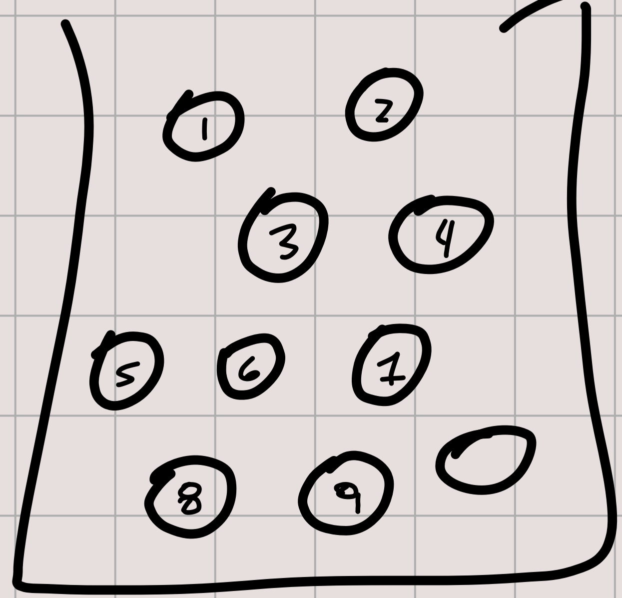
= A = "suma menor a 11"

$$\mathbb{P}(A) = \frac{33}{36} \boxed{\simeq 0{,}9166}$$

**1.13** Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9.

**(a)** Se extraen al azar *con reposición* cinco bolas. Calcular la probabilidad de que

1. las cinco sean iguales.
2. según el orden de extracción se observen los números 1,3,5,7,9.
3. se observen los cinco números impares.
4. las cinco sean distintas.




5 bolas
Al azar
con reposición

a) A: "las 5 sean iguales"

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{0,0,0,0,0\}, \{1,1,1,1,1\}, \{2,2,2,2,2\}, \quad \{9,9,9,9,9\})$

cant de bolas diferentes

$$\mathbb{P}(A) = 10 \underbrace{\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}}_{\text{experimentos independientes}} = \frac{10}{10^5} = \boxed{\frac{1}{10^4}}$$

b) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{1,3,5,7,9\}) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{10^5}}$

c) $\mathbb{P}(\text{"todos impares"}) = \frac{5}{10}\,\frac{5}{10}\,\frac{5}{10}\,\frac{5}{10}\,\frac{5}{10} = \boxed{\frac{5^5}{10^5}}$

d) $\mathbb{P}(\text{"5 distintas"}) = \frac{10}{10}\,\frac{9}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{7}{10}\,\frac{6}{10} = \boxed{\frac{189}{625}}$

**(b)** Calcular las probabilidades del inciso anterior, suponiendo que las extracciones se hacen *sin reposición*.

a) $\mathbb{P}(\text{"todas iguales"}) = \boxed{0}$ → no vuelven a la urna

b) $\mathbb{P}(\{1,3,5,7,9\}) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{30240}}$

$\frac{1}{10}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{6} = \frac{5!}{10!}$

c) $\mathbb{P}(\text{"todos impares"}) = \frac{5}{10}\,\frac{4}{9}\,\frac{3}{8}\,\frac{2}{7}\,\frac{1}{6} = 5!\,\frac{5!}{10!} = \boxed{\frac{1}{252}}$

d) $\mathbb{P}(\text{"todos distintos"}) = \frac{10}{10}\,\frac{9}{9}\,\frac{8}{8}\,\frac{7}{7}\,\frac{6}{6} = \boxed{1}$ en este cas siempre pasa esto

**1.15** Una fragata parte de Jamaica con 13 piratas para atacar 3 puertos. Cada pirata elige al azar el puerto en que desembarcará.

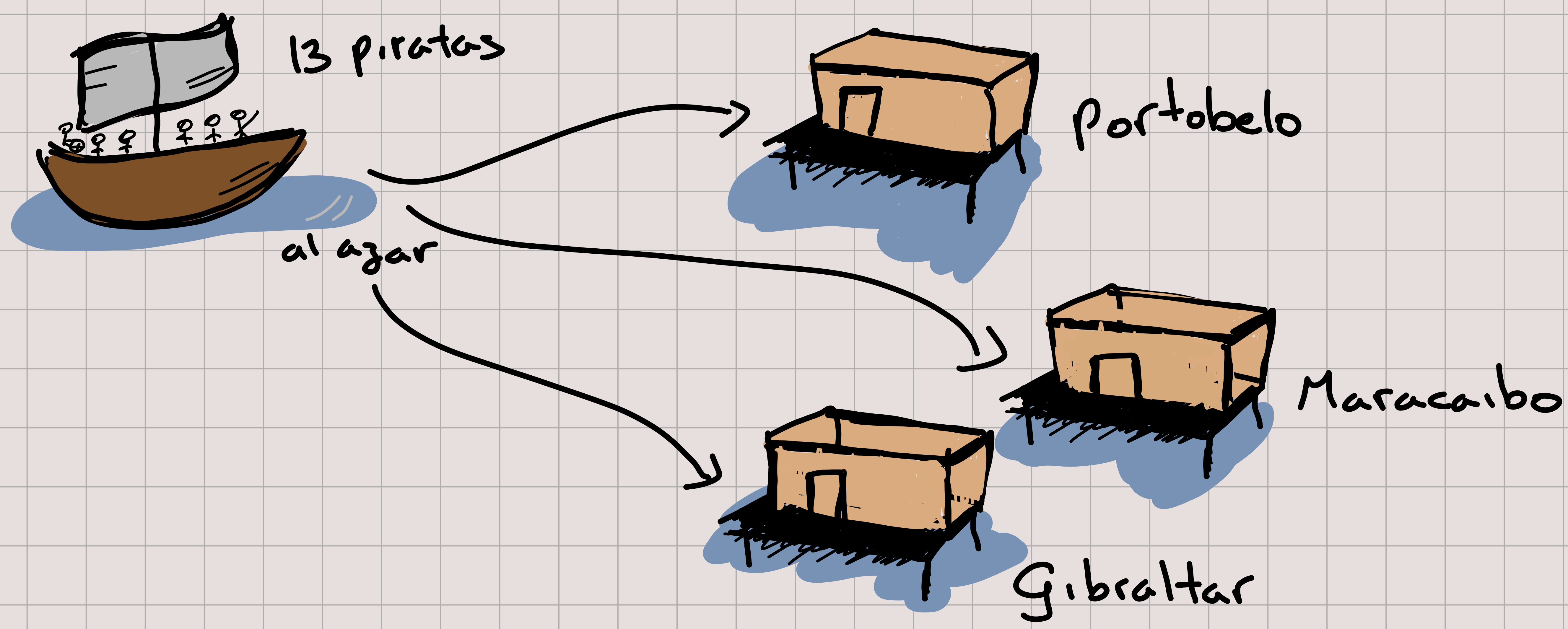
(**a**) Calcular la probabilidad de que cuatro piratas desembarquen en Portobelo, cuatro en Maracaibo y cinco en Gibraltar.

(**b**) Calcular la probabilidad de que exactamente 6 piratas desembarquen en Portobelo y seis o más desembarquen en Maracaibo.

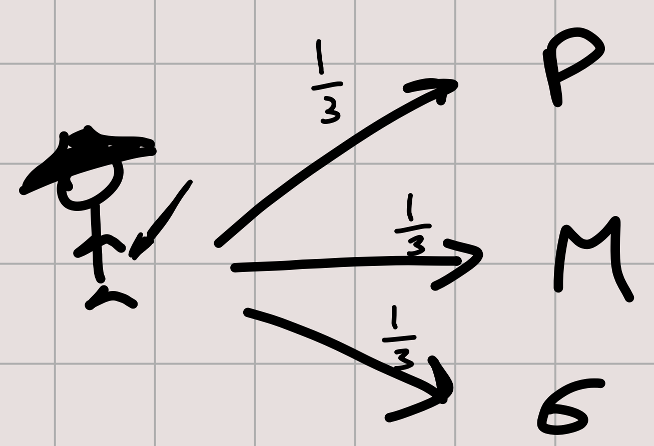
(**c**) Calcular la probabilidad de que en algún puerto desembarquen exactamente cinco piratas y en algún otro exactamente cuatro.

(**d**) Calcular la probabilidad de que Morgan se encuentre entre los 13 piratas.

$\#\Omega = 3^{13}$




(a) $\mathbb{P}(P=4, M=4, G=5) \longrightarrow$ lo pienso como extracción de una urna




no importa el orden

$$\frac{\overset{P}{\binom{13}{4}}\overset{M}{\binom{9}{4}}\overset{G}{\binom{5}{5}}}{3^{13}} = \boxed{\frac{90090}{3^{13}}}$$

(b)

(**b**) Calcular la probabilidad de que exactamente 6 piratas desembarquen en Portobelo y seis o más desembarquen en Maracaibo.

$$\mathbb{P}(P=6 \cap M \geq 6) \longrightarrow \binom{13}{6}\binom{7}{-} \xrightarrow{\text{quedan } 7} M=6 \text{ ó } M=7$$

$$= \mathbb{P}(P=6 \cap (M=6 \cup M=7)) = \mathbb{P}(P=6 \cap M=6) + \mathbb{P}(P=6 \cap M=7)$$

$$= \frac{\binom{13}{6}\binom{7}{6}\binom{1}{1}}{3^{13}} + \frac{\binom{13}{6}\binom{7}{7}}{3^{13}} = \frac{\binom{13}{6}\left(\binom{7}{6}\binom{1}{1}+\binom{7}{7}\right)}{3^{13}}$$

$$= \frac{1716(7+1)}{1594323} \cong 0{,}00861$$

(c) Calcular la probabilidad de que en algún puerto desembarquen exactamente cinco piratas y en algún otro exactamente cuatro.

c

$$\mathbb{P}(P=5 \cap M=4) + \mathbb{P}(P=4 \cap M=5) + \mathbb{P}(M=5 \cap G=4) + \mathbb{P}(M=4 \cap G=5)$$

Casos favorables $= \binom{13}{5}\binom{8}{4}\binom{4}{4}\ 3!$

Porque es alguno puerto no se especifica

Cuando no especifico el contenedor, tengo que multiplicarlo por el factorial

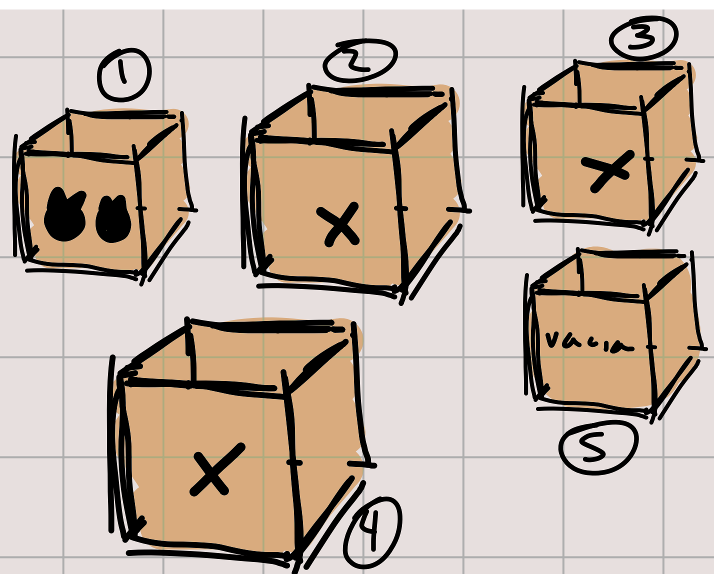
3 2 1 → combinaciones de los caso

**1.16** Se colocarán 7 gatos en 5 cajas. Suponiendo que los gatos son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables.

(**a**) Calcular la probabilidad de que la primera caja contenga exactamente dos gatos y la última caja quede vacía.

(**b**) Calcular la probabilidad de que la cuarta caja contenga más de 3 gatos.

a




$\mathbb{P}(C1=2 \cap C5=0)$

c1 c2 c3 c4 c5

$\underbrace{\bullet\bullet \mid \times \mid \times \mid \times \mid}_{\text{5 gatos en 3 cajas}}\ \circ$

Anagramas

$\underbrace{||||0000000}_{11 \text{ elementos}}$

5 cajas = 4 palitos

7 gatos

$|| \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \rightarrow$ 7 elementos

**5.2.3. Estadística de Bose-Einstein**

Se distribuyen $r$ bolas (partículas) en $n$ urnas (celdas) numeradas. Se impone la hipótesis: *las bolas son indistinguibles y todas las configuraciones distintas son equiprobables.* La forma más sencilla de modelar cada posible evento elemental es escribiendo una cadena binaria donde el asterisco $*$ representa una bola y la barra $|$ representa un cambio de urna, por ejemplo si tiramos 3 bolas en 5 urnas, y las tres bolas caen en la primera urna, escribimos $\omega_i = *** ||||$, pero si caen 1 bola en la segunda y 2 en la cuarta escribiremos $\omega_j = |*||**|$. La cadena quedará formada por $r$ asteriscos $*$ y $n-1$ barras $|$. Las configuraciones posibles son todas las cadenas que podemos formar, $|\Omega| = \binom{r+n-1}{r}$. La probabilidad de cada evento elemental será $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 1/\binom{r+n-1}{r}$.

Comb totales

$$|\Omega| = \binom{r+n-1}{r} = \binom{7+5-1}{7} = \binom{11}{5} = 462$$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{11}{7}} = \frac{\frac{7!}{2!\,5!}}{\frac{11!}{7!\,4!}} = \boxed{0{,}063}$$

6

(**b**) Calcular la probabilidad de que la cuarta caja contenga más de 3 gatos.

$$\mathbb{P}\left(c4=4\right)+\mathbb{P}(c4=5)+\mathbb{P}(c4=6)+\mathbb{P}(c4=7)$$

tengo que ver la combinación del resto

quedan 3 gatos y 4-1 cajas → 6 elementos

a) _ | _ | _ | • • • • | _

b) _ | _ | _ | • • • • • | _

c) _ | _ | _ | • • • • • • | _

d) _ | _ | _ | • • • • • • • | _

casos favorables

a) $\#A = \binom{6}{3} = 20$

b) $\#B = \binom{5}{2} = 10$

c) $\#C = \binom{4}{1} = 4$

d) $\#D = \binom{3}{0} = 1$

$$\longrightarrow \quad = \frac{\binom{6}{3}+\binom{5}{2}+\binom{4}{1}+\binom{3}{0}}{\binom{11}{7}}$$

$$= \frac{20+10+4+1}{330} = \frac{35}{330} \boxed{\simeq 0{,}106}$$

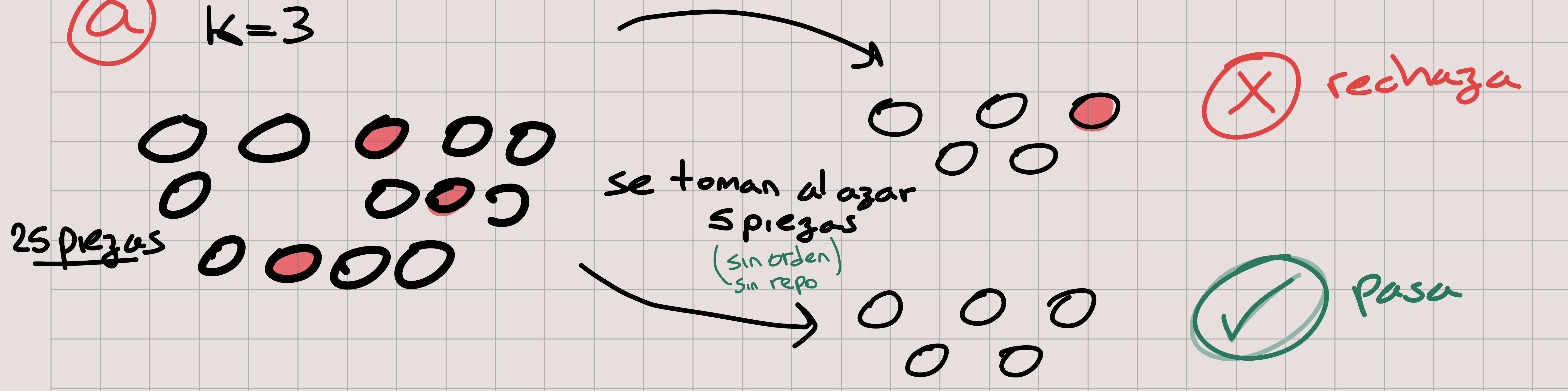
**1.17** Una planta de ensamblaje recibe una partida de 25 piezas de precisión que incluye exactamente $k$ defectuosas. La división de control de calidad elige 5 piezas al azar para controlarlas y rechaza la partida si encuentra al menos 1 defectuosa.

(**a**) Si $k = 3$, ¿cuál es la probabilidad de que la partida pase la inspección?

(**b**) ¿Cómo se comporta la probabilidad $p(k)$ de que la partida pase la inspección?

(**c**) ¿Cuál es la máxima probabilidad de aceptar una partida que contenga más de 5 piezas defectuosas?

(a) defectuosas $K=3$




$$\mathbb{P}\left(\begin{smallmatrix} \circ\circ \\ \circ \\ \circ\circ \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{P}\left(\text{"no haya defectuosas" en las 5}\right) = \frac{\cancel{22}\ \cancel{21}\ 20\ 19\ 18}{25\ 24\ 23\ \cancel{22}\ \cancel{21}} = \frac{6840}{13800} \cong \boxed{0{,}495}$$

25 piezas $\nearrow$ 22 sin fallas, $\searrow$ 3 con fallas

en otras palabras $= \dfrac{\binom{22}{5}}{\binom{25}{5}}$

(b)

**(b)** ¿Cómo se comporta la probabilidad $p(k)$ de que la partida pase la inspección?

con $K \in \{0,1, \ldots ,25\}$

25 piezas $\nearrow$ $25-k$ sanas, $\searrow$ $k$ defectuosa

$$\mathbb{P}(\text{"pase el control"}) = \frac{\binom{25-k}{5}}{\binom{25}{5}}$$

(c)

**(c)** ¿Cuál es la máxima probabilidad de aceptar una partida que contenga más de 5 piezas defectuosas?

D = "cant de piezas defectuosas con las que puede pasar prueba" $\longrightarrow$

$$\mathbb{P}(D=6) = \frac{\binom{25-6}{5}}{\binom{25}{5}} \cong 0{,}218$$

MAXIMA PROBABILIDAD

$$\mathbb{P}(D=7) = \frac{\binom{25-7}{5}}{\binom{25}{5}} \cong 0{,}161$$

$$\mathbb{P}(D=20) = \frac{\binom{25-20}{5}}{\binom{25}{5}} = 0{,}0000182$$

$$\mathbb{P}(D=21) = 0$$ $\longrightarrow$ hay mas defectuosas que sanas, NUNCA PASA

**1.18** Se elige al azar una permutación de las letras $A, T, C, G$. Mostrar que

(**a**) Los eventos "$A$ precede a $T$" y "$C$ precede a $G$" son independientes.

(**b**) Los eventos "$A$ precede *inmediatamente* a $T$" y "$C$ precede *inmediatamente* a $G$" *no* son independientes.

(a)

Permutacion → intercambio ordenado → con repetición $\frac{n!}{n_1! \, n_k!}$ ; → sin repetición $n!$

S = "A precede T"

H = "C precede G"

busco

$$\boxed{P(S \cap H) = \mathbb{P}(S)\,\mathbb{P}(H)}$$

si pasa est son ind

$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}($"A precede H"$)$ →

A T _ _
_ A T _
_ _ A T
A _ T _
A _ _ T
_ A _ T

6 casos

$|\Omega| = 4! = 24$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S) = \frac{6}{24} = \boxed{0{,}25}$$

$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}($"C precede G"$)$ ⇒ 6 casos

$$\mathbb{P}(H) = \frac{6}{24} = \boxed{0{,}25}$$

(*)[1] $\mathbb{P}(H)\,\mathbb{P}(S) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = \boxed{0{,}0625}$

Ahora busco $\mathbb{P}(S \cap H) = \mathbb{P}(S)\,\mathbb{P}(H|S) \longrightarrow \mathbb{P}(H|S) = \frac{\mathbb{P}(S \cap H)}{\mathbb{P}(S)}$

↓ intersección

A T C G
C A T G
C G A T
A C T G
A C G T
C A G T

6 casos

(*)[2] $\mathbb{P}(H|S) = 0{,}25$

$$\mathbb{P}(H|S) = 0{,}25 \implies \mathbb{P}(S\cap H) = \mathbb{P}(S)\,\mathbb{P}(H|S) = 0{,}25 \; 0{,}25 = \boxed{0{,}0625}$$

$$\implies \boxed{\mathbb{P}(S\cap H) = \mathbb{P}(S)\,\mathbb{P}(H) = 0{,}0625}$$ son ind

b

(**b**) Los eventos "$A$ precede *inmediatamente* a $T$" y "$C$ precede *inmediatamente* a $G$" *no* son independientes.

M="A precede inmediatamete a T"
N="C precede inmediatamente a G"

$$|\Omega| = 4! = 24$$

$$M \Rightarrow \left.\begin{matrix} \underline{A}\;\underline{T}\;\_\;\_ \\ \_\;\underline{A}\;\underline{T}\;\_ \\ \_\;\_\;\underline{A}\;\underline{T} \end{matrix}\right\} 3 \text{ casos}$$

$$N \Rightarrow \left.\begin{matrix} \underline{C}\;\underline{G}\;\_\;\_ \\ \_\;\underline{C}\;\underline{G}\;\_ \\ \_\;\_\;\underline{C}\;\underline{G} \end{matrix}\right\} 3 \text{ casos}$$

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(N) = \frac{3}{24} = \boxed{0{,}125}$$

$$\implies \mathbb{P}(M\cap N) = \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(N|M)$$

$$\mathbb{P}(N|M) \longrightarrow \underbrace{\begin{matrix} \underline{A}\;\underline{T}\;\underline{C}\;\underline{G} \\ \cancel{\underline{C}\;\underline{A}\;\underline{T}\;\underline{G}} \\ \underline{C}\;\underline{G}\;\underline{A}\;\underline{T} \end{matrix}}_{2 \text{ casos}}$$

$$\mathbb{P}(N|M) = \frac{2}{24} = \boxed{0{,}083}$$

$$\implies \mathbb{P}(M\cap N) = 0{,}125 \; 0{,}083 = \boxed{0{,}0104}$$

$$\mathbb{P}(M)\;\mathbb{P}(N) = 0{,}125 \; 0{,}125 = \boxed{0{,}015} \implies \mathbb{P}(M\cap N) \neq \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(N)$$

no son ind

laplace

**1.20** Un dado equilibrado se arroja dos veces.

**(a)** Sea $A$ el evento "el primer resultado es par", $B$ el evento "el segundo resultado es par" y $C$ el evento "la suma de los resultados es par". Mostrar que los eventos $A, B, C$ son dos a dos independientes, pero los eventos $A, B, C$ no son independientes.

$\mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}((2,x) \cup (4,x) \cup (6,x))$

$\underline{2} \ \underline{x}$
$\underline{4} \ \underline{x}$
$\underline{6} \ \underline{x}$

$x \in \{1, 2, \ , 6\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{36}{6^2} = \dfrac{18}{36} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{"la suma es par"}) = \mathbb{P}(C)$

$\boxed{\mathbb{P}(C) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}} \longrightarrow$

Suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

① $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \ \mathbb{P}(B|A)$

$\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{9}{18} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

Suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$\mathbb{P}(B|A)$

⊕ $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$

$\dfrac{1}{2} \ \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \ \dfrac{1}{2} \longrightarrow$ SON IND

② $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C)$

$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C|A)$

$\mathbb{P}(C|A) = \dfrac{9}{18} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

Suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$\mathbb{P}(C|A)$

⊕ $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C|A)$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \longrightarrow$ SON IND

③ $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(B\cap C)$

$\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C|B)$

$\mathbb{P}(C|B)=\frac{9}{18}=\boxed{\frac{1}{2}}$

Suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$\mathbb{P}(C|B)$

⊕ $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C|\ \ )$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \longrightarrow$ SON IND

④ $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(C|B\cap A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(C|B\cap A)=\frac{9}{9}=1$

$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\boxed{0{,}125}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\neq \mathbb{P}(A\cap B\cap C) \longrightarrow$ NO SON IND

$\boxed{0{,}125 \neq 0{,}25}$

$\mathbb{P}(C|B\cap A)$

Suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

(**b**) Sea $A$ el evento "el primer resultado es 1,2 o 3", $B$ el evento "el primer resultado es 3,4 o 5" y $C$ el evento "la suma de los resultados es 9". Mostrar que aunque $\mathbf{P}(A\cap B\cap C)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, los eventos $A, B, C$ no son independientes.

$\mathbb{P}(A)=\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}$

$\mathbb{P}(B)=\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}$

$\mathbb{P}(C)=\frac{4}{36}=\boxed{\frac{1}{9}}$

Suma

| $D_2 \backslash D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

① $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(C|B\cap A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(C|B\cap A)=\frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(B|A)=\frac{6}{18}=\frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{24}=\boxed{0{,}0416}$

② $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \neq \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \longrightarrow \text{A y B no son IND}$$

③ $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C)$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{18} \longrightarrow \text{A y C son IND}$$

④ $\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B \cap C)$

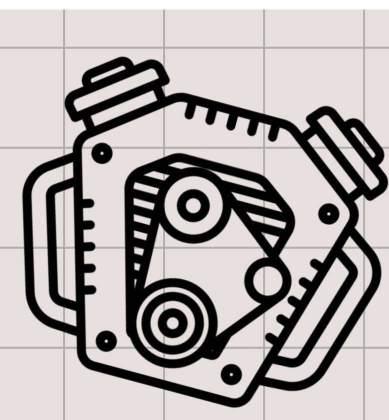
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} \neq \frac{3}{18} \longrightarrow \text{B y C no son IN}$$

**1.21** El motor de un automóvil consta de 300 componentes individuales. Cada uno de estos es entregado independientemente por un proveedor diferente. Los 300 proveedores garantizan que la probabilidad de entregar un componente defectuoso es 0.01 o menor. Se considera aceptable el motor sólo cuando ninguno de sus componentes es defectuoso.

**(a)** Calcular la probabilidad de que el motor sea aceptable.

**(b)** ¿Qué nivel de calidad debe exigirse a cada proveedor (es decir, qué probabilidad de componente defectuoso) si se desea que al menos el 98 % de los motores armados sea aceptable?

ⓐ $\mathbb{P}(\text{"pieza defectuosa"}) \leq 0{,}01$



→ 300 piezas

A = "cant piezas defectuosas"

si A=0 → B = "auto es aceptable"

C = "es una pieza defectuosa"

$$\mathbb{P}(A=0) = \mathbb{P}(\text{"motor aceptable"})$$

$$\mathbb{P}(\text{"300 piezas sanas"}) = 1 - 0{,}01^{300} \boxed{\cong 1} \longrightarrow \mathbb{P}(A=0) \simeq 1$$

↑ son independiente

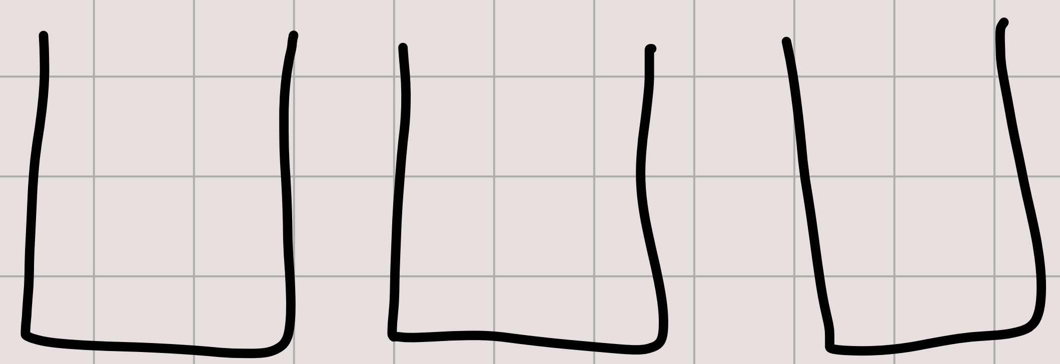
ⓑ $$\mathbb{P}(\text{"motor sano"}) = \overbrace{0{,}98}^{\text{aceptable}} = 1 - \mathbb{P}(\text{"pieza defectuosa"})^{300}$$

$$\mathbb{P}(\text{"pieza defectuosa"}) = \sqrt[300]{1 - 0{,}98}$$

$$\lambda \boxed{\cong 0{,}987}$$

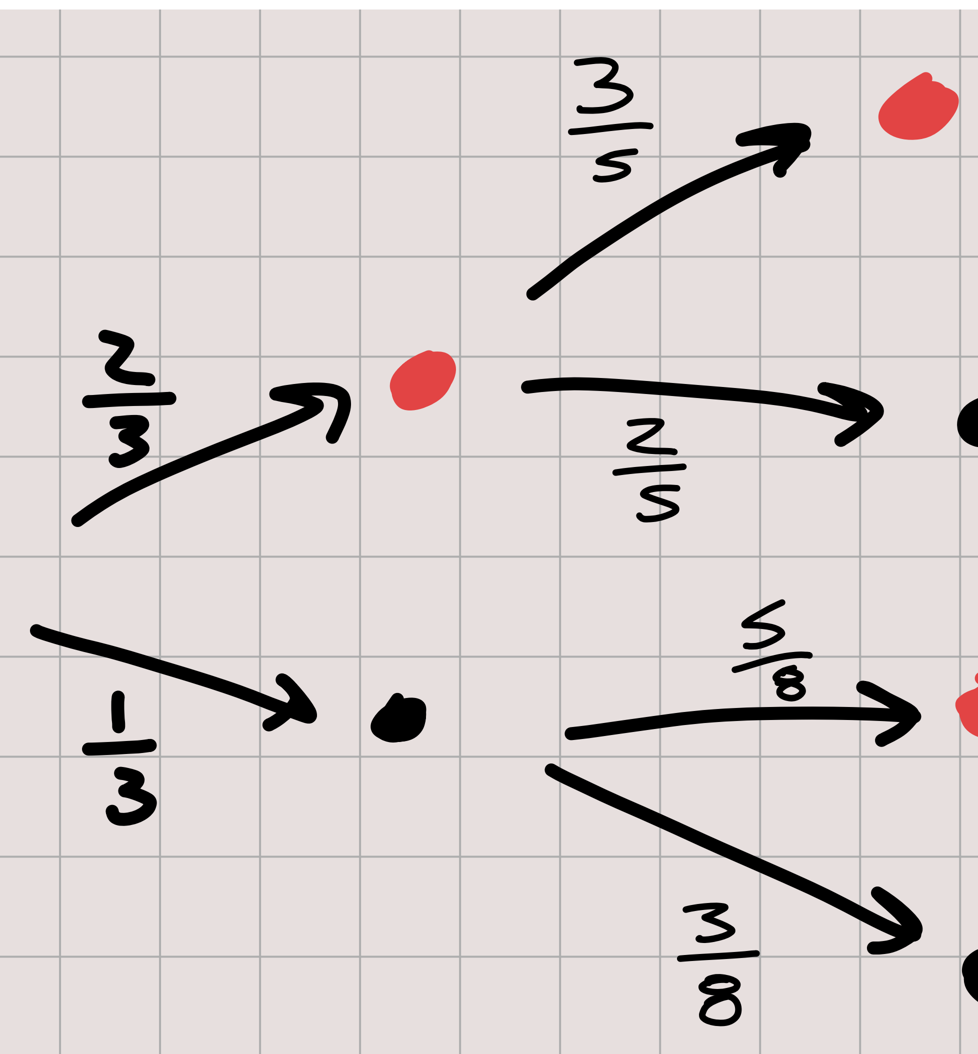
**1.22** Se tienen 3 urnas $a, b, c$. En $a$ hay dos bolas rojas y una blanca, en $b$ tres rojas y dos blancas, en $c$ cinco rojas y tres blancas. Se extrae una bola de $a$: si es roja, se extrae una bola de $b$, en caso contrario se extrae una bola de $c$. Indiquemos $R_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción $i$ fue roja, y $B_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción $i$ fue blanca.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(B_1)$.



extraigo a → roja → b

blanca $\xrightarrow{\text{extraigo de}}$ c

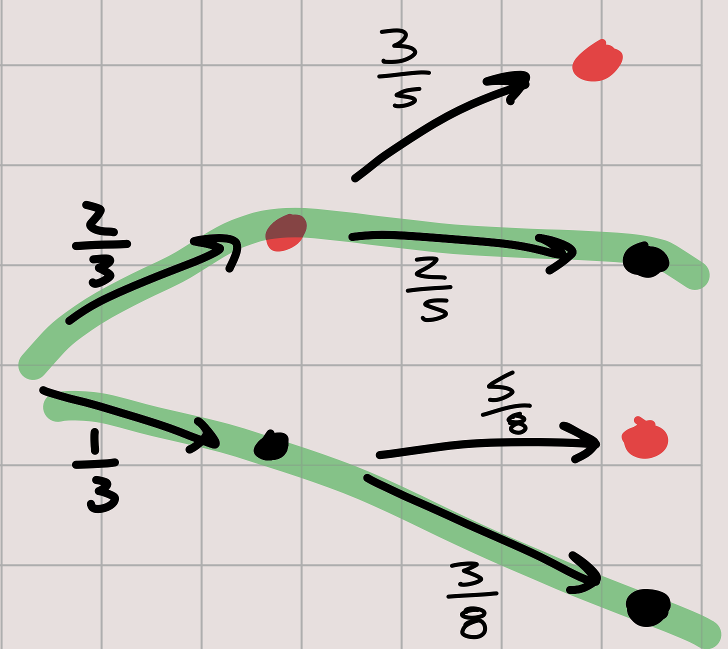



a) $\mathbb{P}(B_1) = \boxed{\frac{1}{3}}$

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(B_2)$.

b) $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(B_2|R_1) + \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2|B_1)$

$= \frac{1}{3}\,\frac{3}{8} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} \boxed{\cong 0{,}391}$




(**c**) Describir mediante la notación detallada antes y calcular la probabilidad de que la primer bola extraída haya sido blanca sabiendo que la segunda fue roja.

c) $\mathbb{P}(B_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2 \cap B_1)}{\mathbb{P}(R_2)}$

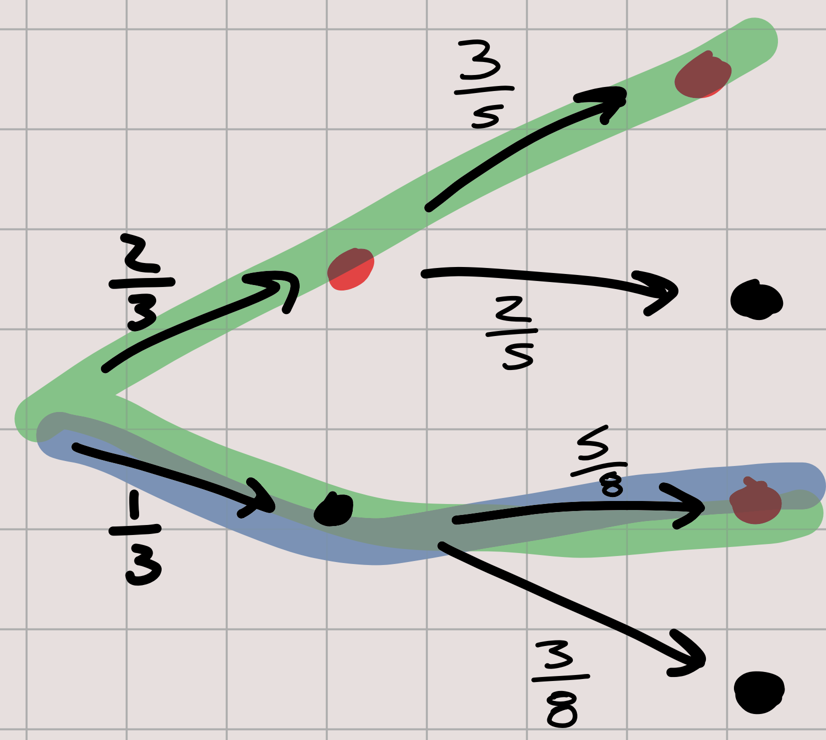
$= \frac{\mathbb{P}(\{B_1R_2\})}{\mathbb{P}(\{B_1R_2\} \cup \{R_1R_2\})} = \frac{\mathbb{P}(\{B_1R_2\})}{\mathbb{P}(\{B_1R_2\}) + \mathbb{P}(\{R_1R_2\})}$

conj disjuntos

Regla del producto

$= \frac{\mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(R_2|B_1)}{\mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(R_2|B_1) + \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2|R_1)}$

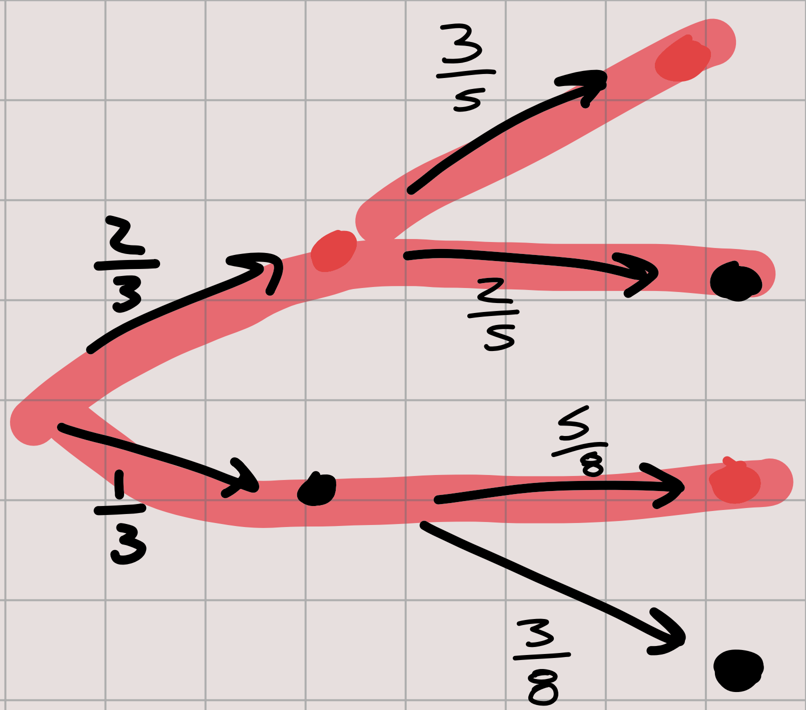
$= \frac{\frac{1}{3}\,\frac{5}{8}}{\frac{1}{3}\,\frac{5}{8} + \frac{2}{3}\,\frac{3}{5}} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{5}{24} + \frac{2}{5}} \boxed{\cong 0{,}342}$



(**d**) Calcular la probabilidad de que alguna de las bolas extraídas sea roja.

| | |
|---|---|
| $R_1R_2$ | $B_1R_2$ |
| $R_1B_2$ | $B_1B$ |

(d) $\mathbb{P}(\text{"alguna bola sea roja"}) = \mathbb{P}(\underbrace{\{B_1R_2\} \cup \{R_1B_2\} \cup \{R_1R_2\}}_{\text{eventos disjuntos}})$




$= \mathbb{P}(\{B_1 \hat{} R_2\}) + \mathbb{P}(\{R_1 \hat{} B_2\} \cup \{R_1 \hat{} R_2\})$ (son disjuntos)

(prob total)

$= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(B_2|R_1) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1)$

$= \frac{1}{3}\,\frac{5}{8} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{8}}$

* otra Forma $\mathbb{P}(\text{"haya alguna roja"}) = 1 - \mathbb{P}(\text{"no hay rojas"})$

$= 1 - \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)$

$= 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$

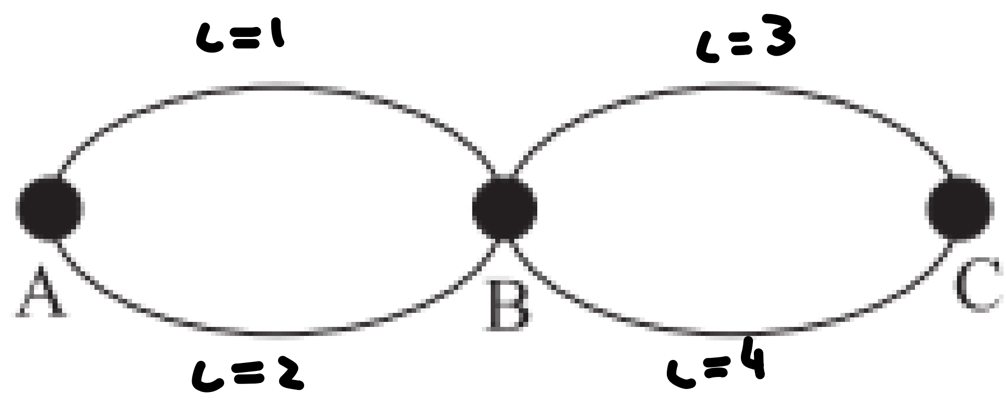
(**e**) Suponiendo ahora que en $a$ hay 200 bolas rojas y 100 blancas, en $b$ 150 rojas y 100 blancas, y en $c$ 125 rojas y 75 blancas, resolver en estas nuevas condiciones los incisos anteriores. Si se obtienen los mismos resultados, explicar por qué.

(e)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 200 | 150 | 125 |
| | 100 | 100 | 75 |
| totales | (300) | (250) | (200) |

$\longrightarrow$ se mantienen los mismos resultados $\longrightarrow$ se mantienen las proporciones de bolas en c/urna

**1.23** Existen dos caminos de $A$ hasta $B$ y dos caminos de $B$ hasta $C$.




Cada uno de estos caminos está bloqueado con probabilidad 0.25 independientemente de los demás. Hallar la probabilidad de que exista un camino abierto desde $B$ hasta $C$ sabiendo que no hay ninguna trayectoria abierta desde $A$ hasta $C$.

$K_i$ = "el camino $i$ esta bloqueado" $\longrightarrow \mathbb{P}(K_i) = \frac{1}{4}$

con $i \in \{1,2,3,4\}$

$S$ = "hay un camino abierto de B a C"

$T$ = "no hay trayectoria abierta de A a C"

caminos abiertos

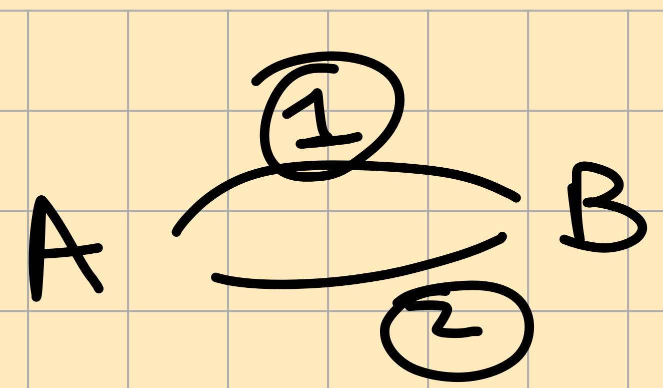
| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | |
| | 1 | 4 | |
| A | 2 | 3 | C |
| | 2 | 4 | |

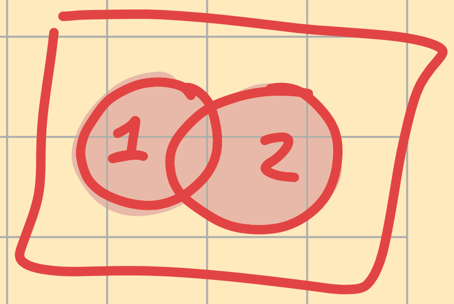
$\mathbb{P}(S|T) = \frac{\mathbb{P}(T \cap S)}{\mathbb{P}(T)} =$


$\mathbb{P}(\text{" de que este abierto"}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

borrador

es otro el tipo de evento



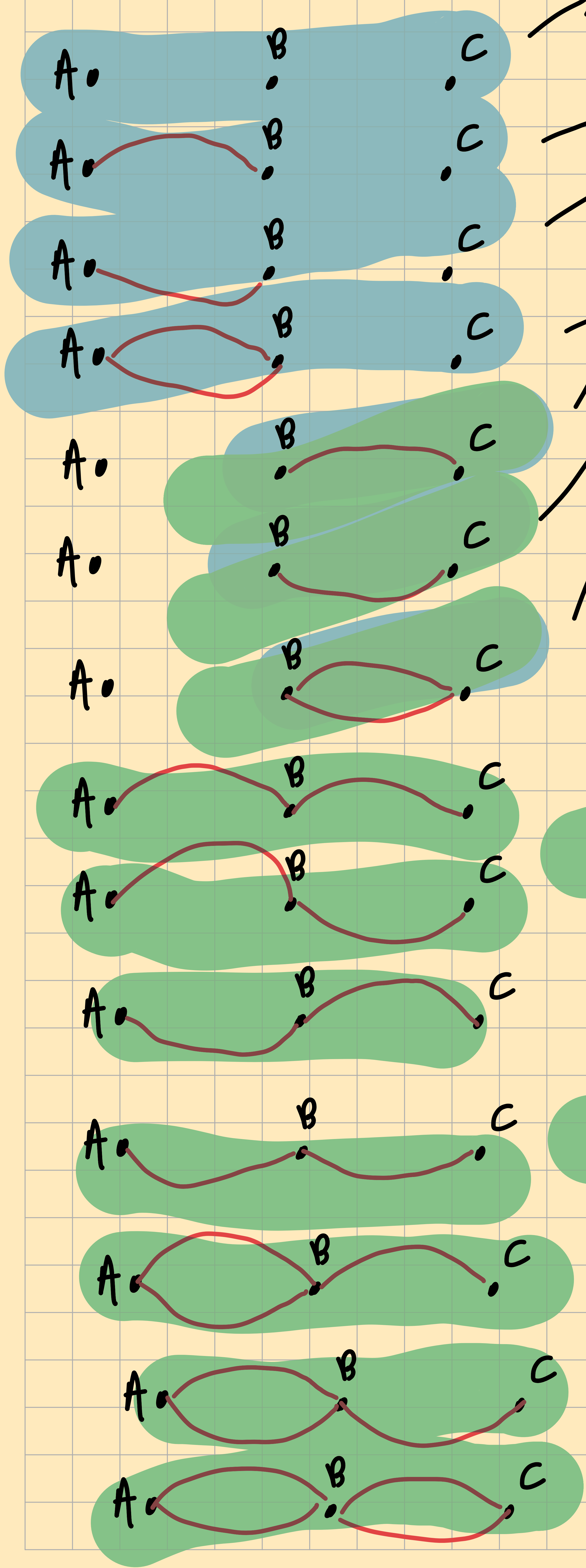

$\mathbb{P}$("de que 1 ó 2 este abierto") $= \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(2) - \mathbb{P}(1 \cap 2)$

$0{,}75 + 0{,}75 - 0{,}75^2$

$\mathbb{P}(1 \text{ ó } 2) = \mathbb{P}(3 \text{ ó } 4) = \boxed{0{,}937}$

$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}$("no hay camino AC")

$= \mathbb{P}(\overline{AC})$




$\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{4}$

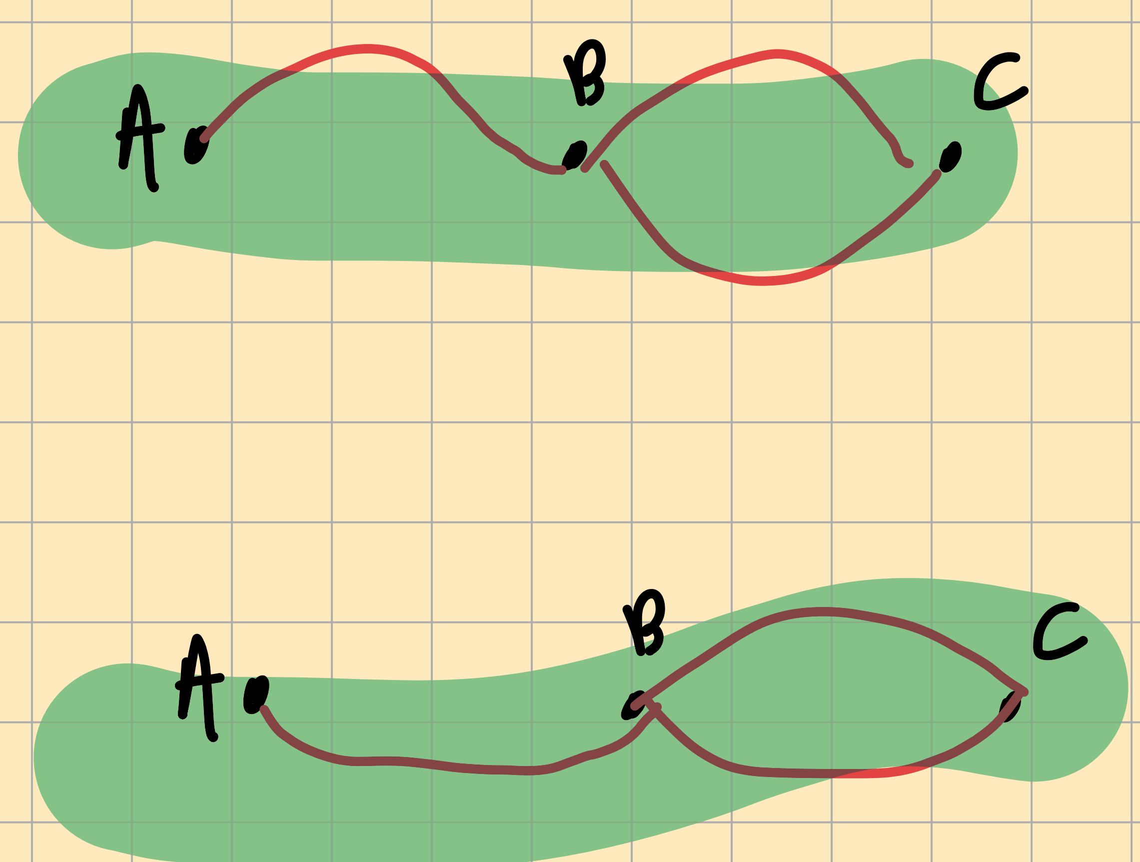
$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2$

sumo $4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4$

caminos

$2^4 = 16$ casos

2 estados



(123) $\mathbb{P}(Bc \mid \bar{A}c) = \dfrac{\mathbb{P}(\bar{A}c \cap Bc)}{\mathbb{P}(\bar{A}c)}$

$$\bar{A}c \longrightarrow \begin{array}{l} (A_1\bar{A}_2\bar{B}_1\bar{B}_2) \times 4 \\ (\bar{A}_1\bar{A}_2 B_1 B_2) \times 2 \\ (\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{B}_1\bar{B}_2) \times 1 \end{array}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}c) = 4\left(\tfrac{1}{4}\right)^3\left(\tfrac{3}{4}\right) + 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} + \frac{9}{128} + \frac{3}{64} = \boxed{\frac{31}{256}}$$

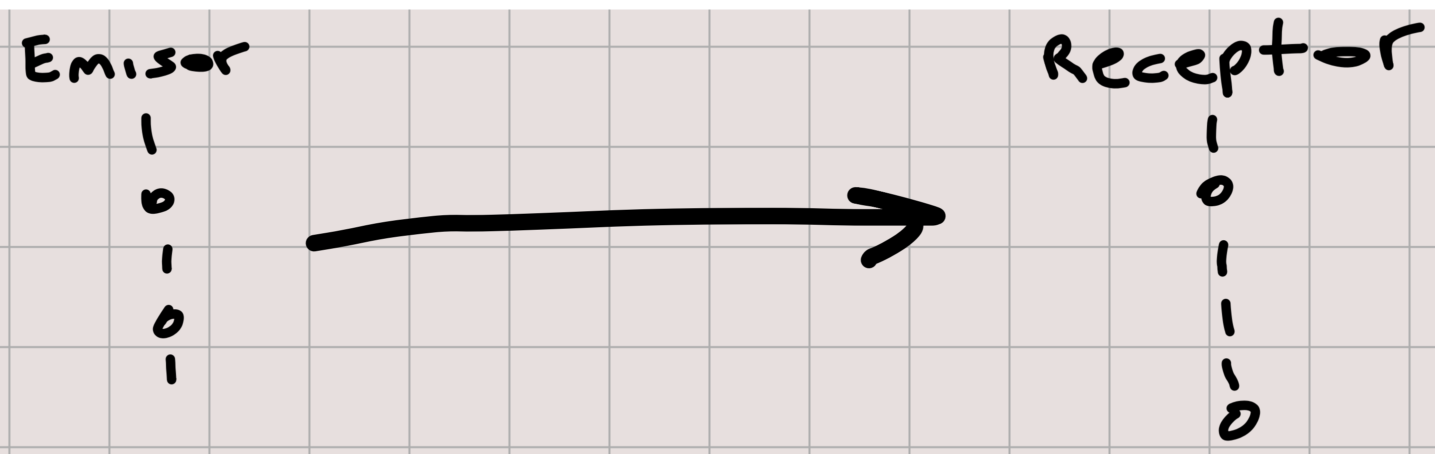
eventos indep

$$Bc \longrightarrow \begin{array}{l} (\bar{A}_1\bar{A}_2 B_1\bar{B}_2) \times 2 \\ (\bar{A}_1\bar{A}_2 B_1 B_2) \times 5 \\ (\bar{A}_1 A_2 B_1 B_2) \times 4 \\ (A_1 A_2 B_1 B_2) \times 1 \end{array}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}c \cap Bc) = \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup B_1B_2) = \mathbb{P}((\bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2)) + 2\,\mathbb{P}((\bar{A}_1\bar{A}_2B_1\bar{B}_2))$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^3\left(\tfrac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{9}{256} + \frac{3}{128} = \boxed{\frac{15}{256}}$$

$$\mathbb{P}(Bc \mid \bar{A}c) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A}c \cap Bc)}{\mathbb{P}(\bar{A}c)} = \frac{\frac{15}{256}}{\frac{31}{256}} = \boxed{\frac{15}{31}}$$

**1.25** El 5 % de los bits transmitidos por un canal de comunicación binario es 0. El programa receptor indica que hay un 0 en el mensaje cuando efectivamente el 0 ha sido emitido, con probabilidad 0.9. ¿Cuál debe ser la probabilidad de que el receptor indique que hay un 1 cuando efectivamente el 1 ha sido emitido, para que la probabilidad de que haya sido emitido un 0 cuando el receptor indica que hay un 0 sea 0.99?




⊕ El 5% bits del emisor son 0

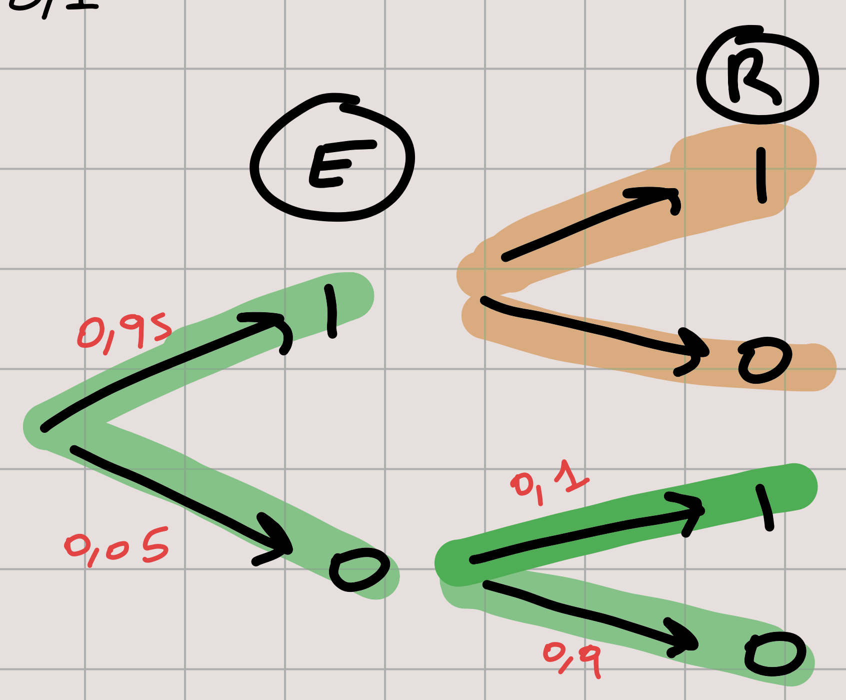
$\mathbb{P}(E_0) = 0,05$

$\mathbb{P}(E_1) = 0,95$

$\mathbb{P}(R_0|E_0) = 0,9 \Rightarrow \mathbb{P}(R_1|E_0) = \mathbb{P}(R_0|E_0) = 0,1$

$\mathbb{P}(R_1|E_1) = ? \Rightarrow 1 - \mathbb{P}(R_0|E_1)$

$\mathbb{P}(E_0|R_0) = 0,99 \Rightarrow \mathbb{P}(E_1|R_0) = 0,01$




$\left.\begin{matrix}\mathbb{P}(R_1|E_0) \\ \mathbb{P}(R_0|E_0)\end{matrix}\right\} 1 - \mathbb{P}$

datos que tengo

$$\mathbb{P}(E_0|R_0) = \frac{\mathbb{P}(R_0 \cap E_0)}{\mathbb{P}(R_0)} = \frac{\mathbb{P}(E_0)\,\mathbb{P}(R_0|E_0)}{\mathbb{P}(R_0)}$$

$$\mathbb{P}(R_0) = \frac{0,9 \cdot 0,05}{0,99} \simeq \boxed{1/22}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_0) = \mathbb{P}(R_0|E_0)\,\mathbb{P}(E_0) + \mathbb{P}(R_0|E_1)\,\mathbb{P}(E_1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_0|E_1) = \frac{\frac{1}{22} - 0,045}{0,95} \cong \boxed{0,00047} \longrightarrow \mathbb{P}(R_1|E_1) = 1 - 4,78 \cdot 10^{-4} \simeq \boxed{0,99}$$

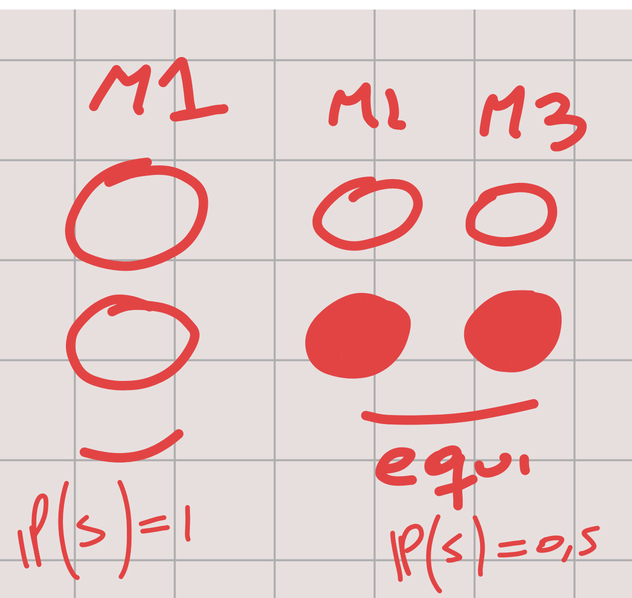
**1.26** Harvey "*dos caras*" tiene una moneda de dos caras y dos monedas con cara y ceca equilibradas.

**(a)** Elige una moneda al azar y la arroja al aire dos veces consecutivas. Si el primer resultado fue cara, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también sea cara?

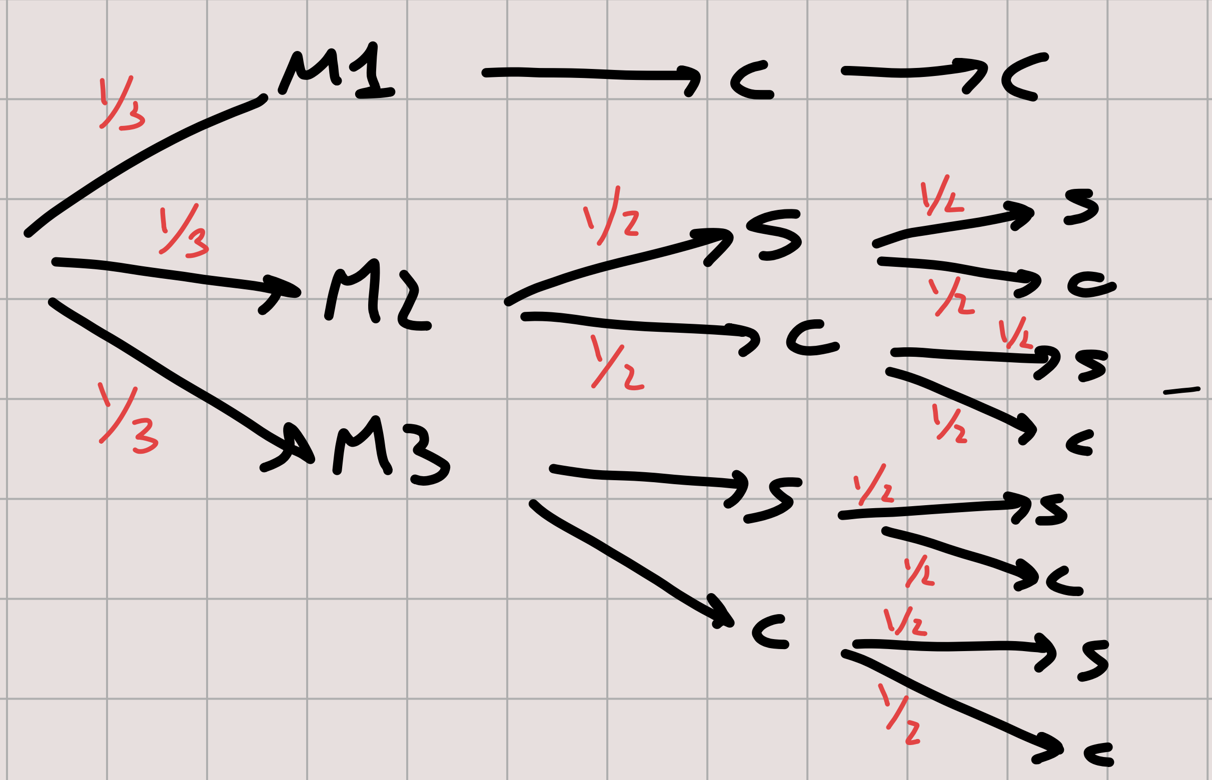
**(b)** Elige una moneda al azar, la arroja al aire y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

**(c)** Harvey arroja la misma moneda por segunda vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

**(d)** Harvey arroja la misma moneda por tercera vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?




a

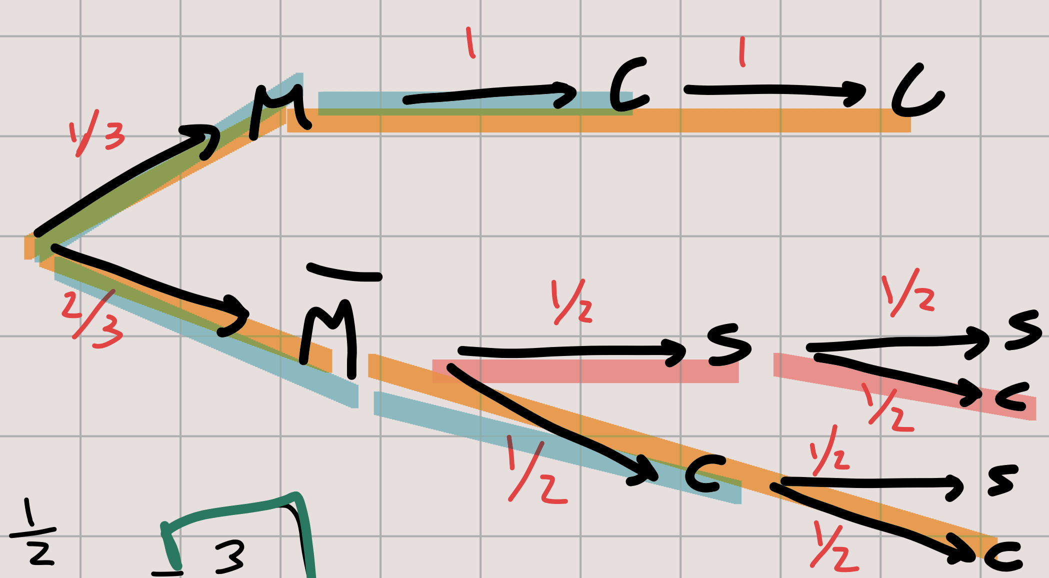



$$\mathbb{P}(C_2|C_1)=\frac{\mathbb{P}(C_1\cap C_2)}{\mathbb{P}(C_1)}=\circledast$$

$$\mathbb{P}(C_1\cap C_2)=\mathbb{P}(C_2|C_1\cap M)\,\mathbb{P}(C_1|M)\,\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(C_2|C_1\cap\bar M)\,\mathbb{P}(C_1|\bar M)\,\mathbb{P}(\bar M)$$

$$= 1 \quad 1 \quad \frac13 + \frac12 \quad \cancel{\frac12} \quad \frac{\cancel{2}}{3} =$$

$$\frac13+\frac16=\boxed{\frac12}$$




$$\mathbb{P}(C_1)=\mathbb{P}(C_1|M)\,\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(C_1|\bar M)\,\mathbb{P}(\bar M)$$

$$1 \quad \frac13 + \frac{1}{\cancel{2}} \quad \frac{\cancel{2}}{3} = \boxed{\frac23}$$

$$\circledast \quad \frac{\frac12}{\frac23}=\boxed{\frac34}$$

b

**(b)** Elige una moneda al azar, la arroja al aire y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

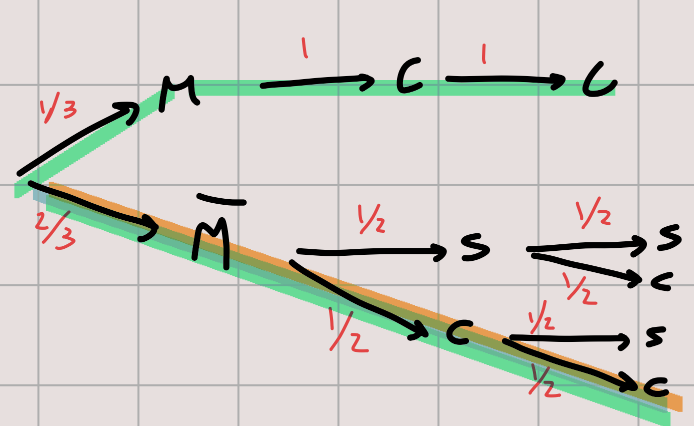
$$\mathbb{P}(\bar M|C_1)=\frac{\mathbb{P}(C_1\cap\bar M)}{\mathbb{P}(C_1)}=\frac{\mathbb{P}(C_1|\bar M)\,\mathbb{P}(\bar M)}{\mathbb{P}(C_1)}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}}=\boxed{\frac12}$$

c

**(c)** Harvey arroja la misma moneda por segunda vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

Prob condicion

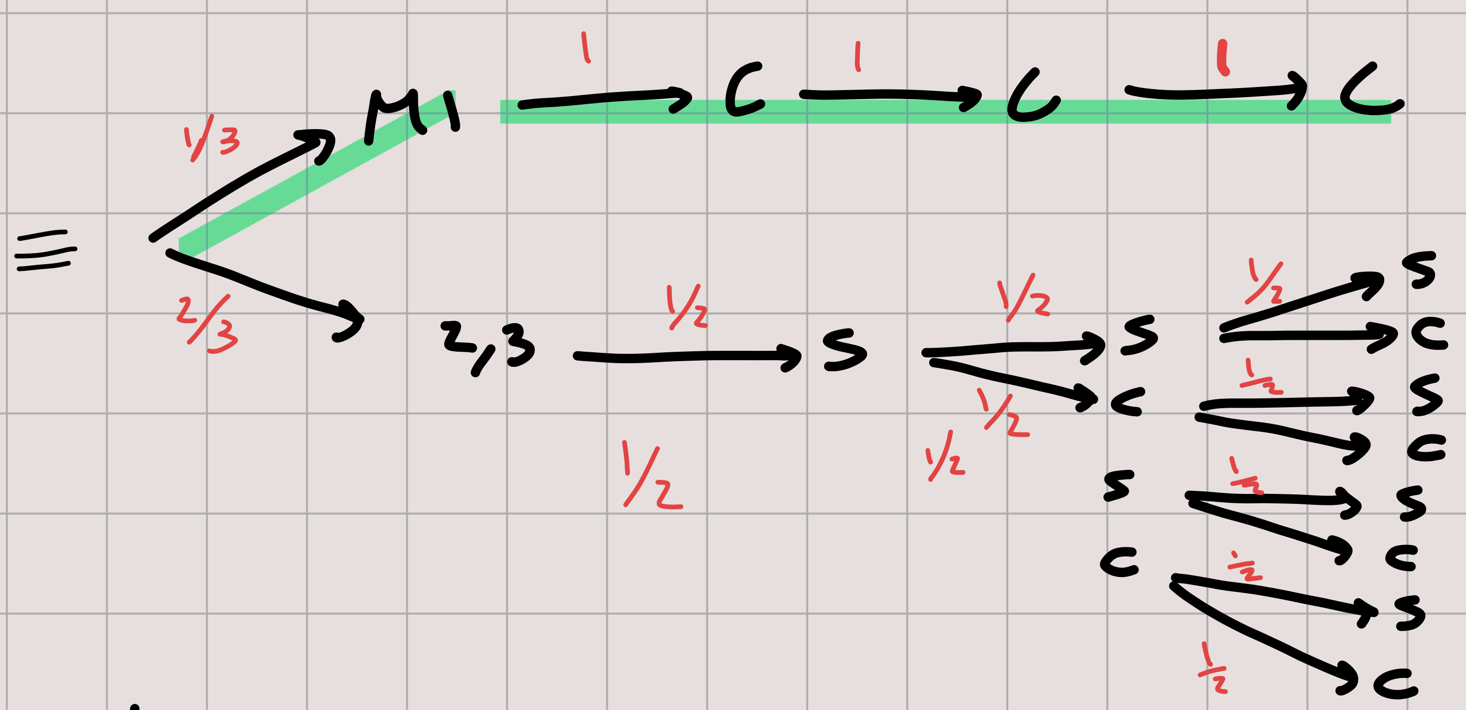
$$\mathbb{P}(\bar M|C_1\cap C_2)=\frac{\mathbb{P}(\bar M\cap C_1\cap C_2)}{\mathbb{P}(C_1\cap C_2)}=\frac{\mathbb{P}(C_2|C_1\cap\bar M)\,\mathbb{P}(C_1|\bar M)\,\mathbb{P}(\bar M)}{\mathbb{P}(C_2|C_1)\,\mathbb{P}(C_1)}$$

$=$ 


$$\frac{\frac12\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}}{\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}}=\frac{\frac16}{\frac13}=\boxed{\frac12}$$

(d) Harvey arroja la misma moneda por tercera vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

$$\mathbb{P}(\bar{M} \mid C_1 \cap C_2 \cap C_3)$$



$$\mathbb{P}(\bar{M} \mid C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \frac{\mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \bar{M})}{\mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3)} = \frac{\mathbb{P}(C_3 \mid C_1 \cap C_2 \cap \bar{M})\,\mathbb{P}(C_2 \mid C_1 \cap \bar{M})\,\mathbb{P}(C_1 \mid \bar{M})\,\mathbb{P}(\bar{M})}{\mathbb{P}(C_3 \mid C_1 \cap C_2)} = (*)$$

$$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbb{P}\big((C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap M) \cup (C_3 \cap C_2 \cap C_1 \cap \bar{M})\big)$$

mutuamente excluyentes $= \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap M) + \mathbb{P}(C_3 \cap C_2 \cap C_1 \cap \bar{M})$

$$= \mathbb{P}(C_3 \mid C_2 \cap C_1 \cap M)\,\mathbb{P}(C_2 \mid C_1 \cap M)\,\mathbb{P}(C_1 \mid M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(C_3 \mid C_2 \cap C_1 \cap \bar{M})\,\mathbb{P}(C_2 \mid C_1 \cap \bar{M})\,\mathbb{P}(C_1 \mid \bar{M})\,\mathbb{P}(\bar{M})$$

$$= 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\cancel{2}} \quad \frac{\cancel{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$(*) = \frac{\frac{1}{\cancel{12}}}{\frac{5}{\cancel{12}}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

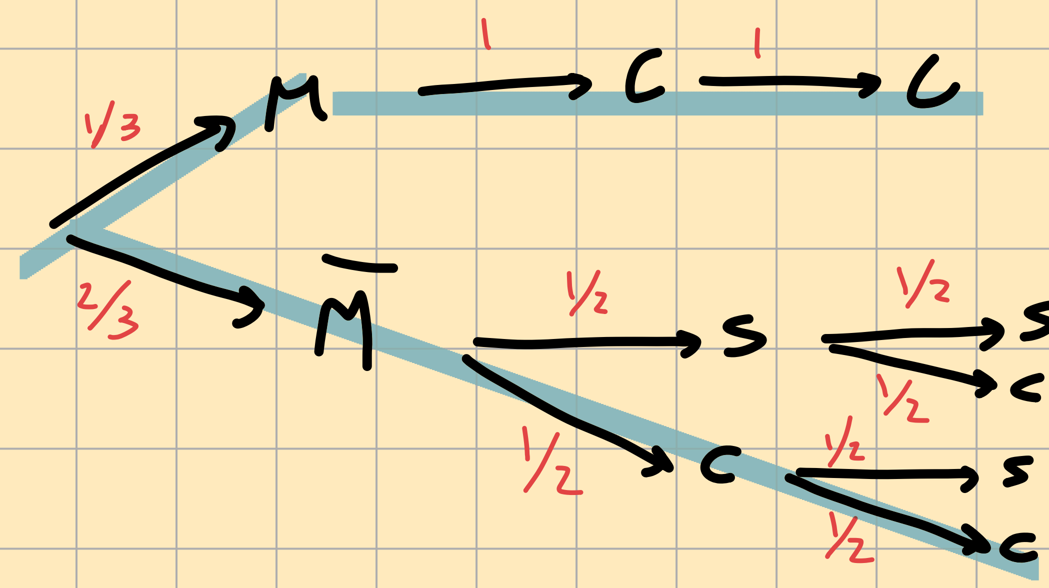
(a) $\mathbb{P}(C_2|C_1) = \dfrac{\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)}{\mathbb{P}(C_1)} = \dfrac{\mathbb{P}(C_1|C_2)\,\mathbb{P}(C_2)}{\mathbb{P}(C_1)}$

$$\mathbb{P}(C_2|C_1) = \underset{1}{\mathbb{P}(C_2|C_1 \cap M)}\,\underset{1}{\mathbb{P}(C_1|M)}\,\underset{\frac{1}{3}}{\mathbb{P}(M)} + \underset{\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(C_2|C_1 \cap \bar{M})}\,\underset{\frac{1}{\cancel{2}}}{\mathbb{P}(C_1|\bar{M})}\,\underset{\frac{\cancel{2}}{3}}{\mathbb{P}(\bar{M})}$$

$\mathbb{P}\big((C_1 \cap C_2 \cap M) \cup (C_1 \cap C_2 \cap \bar{M})\big)$

me $= \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap M) + \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap \bar{M})$

$= \mathbb{P}(C_2|C_1 \cap M)\,\mathbb{P}(C_1|M)\,\mathbb{P}(M) +$




son eventos mutuamente excluyents

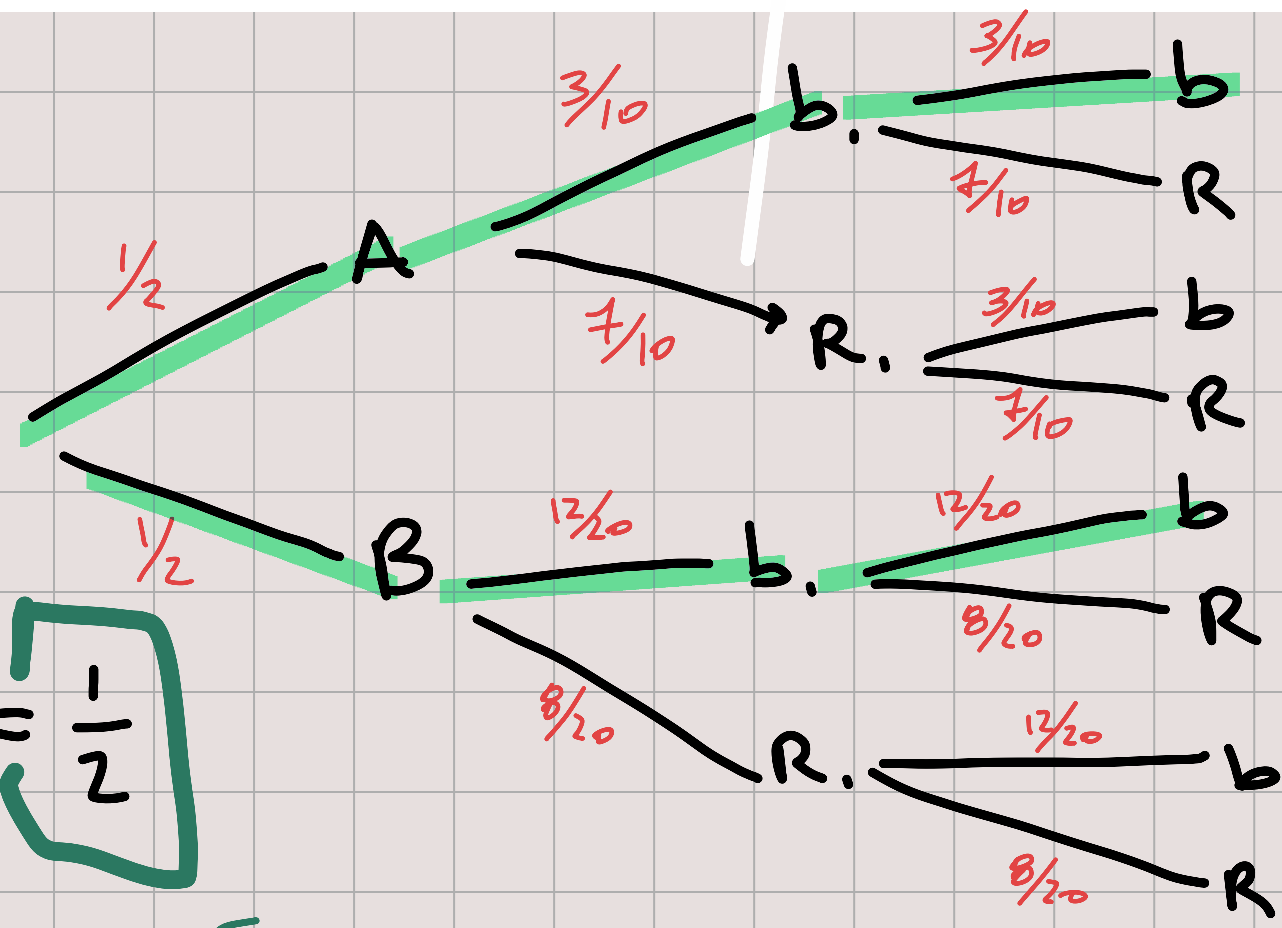
**1.27** La urna $a$ contiene 3 bolas blancas y 7 rojas. La urna $b$ contiene 12 blancas y 8 rojas. Se elige una urna al azar y se extrae una bola; esta bola se reintegra a la misma urna y se vuelve a extraer una bola de ella.

**(a)** Si la primer bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo sea?

**(b)** ¿Son independientes los sucesos "primera bola es blanca" y "segunda bola es blanca"?

3b 7R — A

12b 8R — B




(a)

$$\mathbb{P}(b_2 | b_1) = \frac{\mathbb{P}(b_1 \cap b_2)}{\mathbb{P}(b_1)} = \frac{9/40}{9/20} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{P}(b_1) = \mathbb{P}(b_1|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(b_1|B)\,\mathbb{P}(B) = \frac{9}{20}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(b_1 \cap b_2) = \mathbb{P}\big((b_2 \cap b_1 \cap A) \cup (b_2 \cap b_1 \cap B)\big)$$

$$\overset{\text{me}}{=} \mathbb{P}(b_2 \cap b_1 \cap A) + \mathbb{P}(b_2 \cap b_1 \cap B)$$

$$= \mathbb{P}(b_2|b_1 \cap A)\,\mathbb{P}(b|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(b_2|b_1 \cap B)\,\mathbb{P}(b_1|B)\,\mathbb{P}(B)$$

$$= \frac{3}{10}\,\frac{3}{10}\,\frac{1}{2} + \frac{12}{20}\,\frac{12}{20}\,\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{100} + \frac{12^2}{20^2}\right) = \frac{9}{40}$$

(b) **(b)** ¿Son independientes los sucesos "primera bola es blanca" y "segunda bola es blanca"?

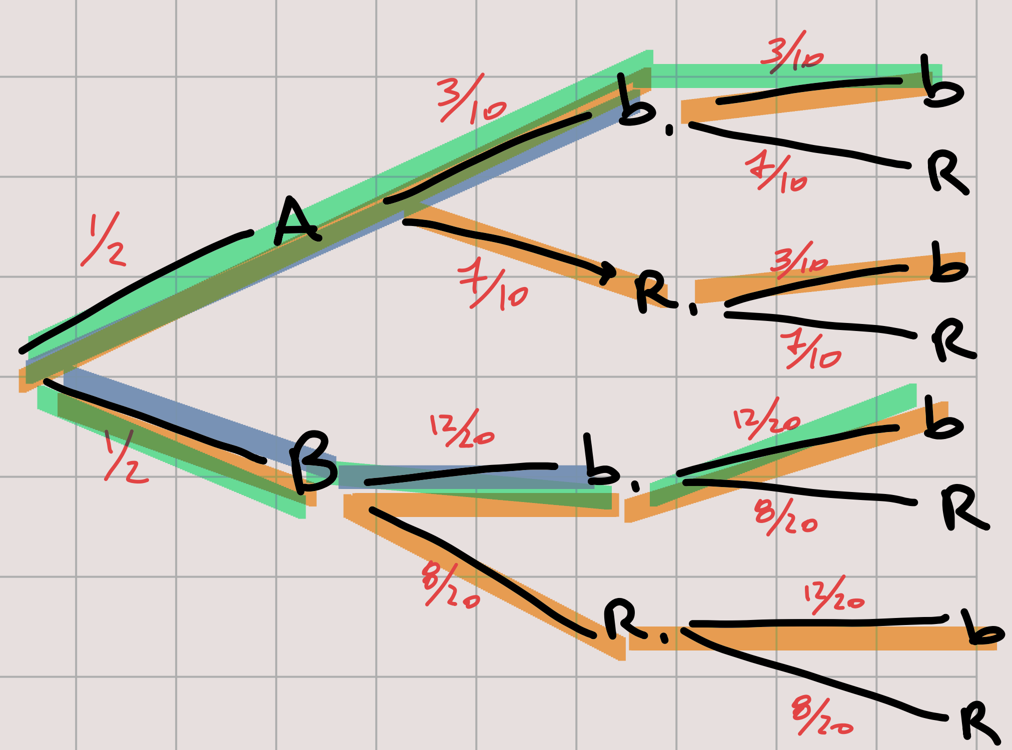
$$\mathbb{P}(b_1)\,\mathbb{P}(b_2) = \mathbb{P}(b_1 \cap b_2)$$

$$\mathbb{P}(b_1) = \mathbb{P}(b_1|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(b_1|B)\,\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}\,\frac{1}{2} + \frac{12}{20}\,\frac{1}{2} = \frac{9}{20}$$

$$\mathbb{P}(b_2) = \mathbb{P}(b_2|b_1 \cap A)\,\mathbb{P}(b_1|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(b_2|R_1 \cap A)\,\mathbb{P}(R_1|A)\,\mathbb{P}(A) + \text{etc} \quad \frac{9}{20}$$

$$\mathbb{P}(b_1 \cap b_2) = \mathbb{P}\big((b_2 \cap b_1 \cap A) \cup (b_2 \cap b_1 \cap B)\big)$$

$$= \mathbb{P}(b_2|b_1 \cap A)\,\mathbb{P}(b_1|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(b_2|b_1 \cap B)\,\mathbb{P}(b_1|B)\,\mathbb{P}(B) = \frac{9}{40}$$




$$\frac{9}{20}\,\frac{9}{20} \neq \frac{9}{40}$$

$b_1$ y $b_2$ no son ind

**1.28**

**(a)** Se tienen dos monedas, $a$ y $b$, de probabilidades 1/2 y 1/3 de cara, respectivamente. Se elige una moneda al azar y se la tira dos veces. Considere los eventos $A_i$ ="salió cara en el $i$-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B$ = "se eligió la moneda $a$". ¿Dado $B$, $A_1$ y $A_2$ son independientes? ¿$A_1$ y $A_2$ son independientes?

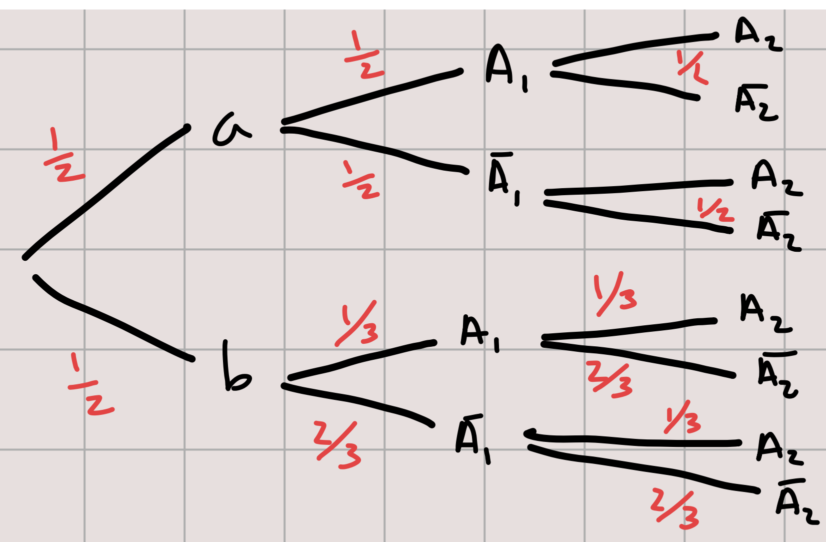
**(b)** Se tira una moneda equilibrada dos veces. Considere los eventos $A_i$ = "salió cara en el $i$-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B$ = "salió al menos una ceca". ¿$A_1$ y $A_2$ son independientes? ¿Dado $B$, $A_1$ y $A_2$ son independientes?

moneda a b

CARA $\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(C)=\frac{1}{3}$

$A_i$= "Salio cara en el i-esimo tiro"

B=" se eligio la moneda $M_1$"



dado B

(a) $\mathbb{P}(A_1|B)\,\mathbb{P}(A_2|B) = \mathbb{P}(A_1\cap A_2|B)$ (*)

(*) $\mathbb{P}(A_1|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_1|B)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(*) $\mathbb{P}(A_2|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_2\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_2|A_1\cap B)\mathbb{P}(A_1|B)\cancel{\mathbb{P}(B)} + \mathbb{P}(A_2|\bar{A}_1\cap B)\mathbb{P}(\bar{A}_1|B)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(*) $\mathbb{P}(A_2\cap A_1|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

(*) $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \longrightarrow$ dado B, $A_1$ y $A_2$ son ind

¿$A_1$ y $A_2$ son ind? $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1\cap A_2)$ (*)

$\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \mathbb{P}((A_1\cap A_2\cap B)\cup(A_1\cap A_2\cap \bar{B}))$

m.e. $= \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap B) + \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap \bar{B})$

$= \mathbb{P}(A_2|A_1\cap B)\mathbb{P}(A_1|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_2|A_1\cap\bar{B})\mathbb{P}(A_1|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})$

$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{18} = \boxed{\frac{13}{72}}$

(*) $\frac{13}{56}\,\frac{5}{12} \neq \frac{13}{72} \longrightarrow$ $A_1$ y $A_2$ no son ind