GUÍA 7

cyw

7.1) $\{N(t): t \geq 0\}$ $N(a,b) \sim Po(2)$

a) $P(N(1)=0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2}$

b) $P(N(1,2)=1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 2e^{-2}$

c) $P(N(1)=0, N(1,2)=1, N(2,4)=2) = e^{-2} \cdot 2e^{-2} \cdot \frac{4^2}{2!}e^{-4} = 16e^{-8} \approx 5,$

d) $COV(N(1,3), N(2,4)) = E[N(1,3)N(2,4)] - E[N(1,3)]E[N(2,4)] = COV(N$ $+N(2,3), N(2,3)+N(3,4)) = COV(N(1,2)N(2,3)) + COV(N(1,2)N(3,4)) +$ $COV(N(2,3)N(2,3)) + COV(N(2,3)N(3,4)) = Var(\underbrace{N(2,3)}_{Po(2)}) = 2$

S_3 = "tiempo hasta el 3er evento" $S_3 \sim \gamma(3,2$

e) $P(S_3 > 1/2) = F_{Po(\mu = \frac{1}{2}\cdot 2)}(2) = P(Po \leq 2) = e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) =$

f) $P(N(1,4)=1 \mid S_3 = 1/2) = P(N(1,4) \mid N(0,1/2)=3) = \frac{P(N(1,4)=1)P(N(0,}{P(N(0,1/2)=3}$

$= \frac{3}{8}$

g) $P(S_3 > 1/2 \mid N(1,4)=1) = P(N(0,1/2) < 3 \mid N(1,4)=1) = 0,91$

7.2) $N(t)$ = "número de accidentes que ocurren en el int a,b"

$N(a,b) \sim Po(2(b-a))$

a) T = "tiempo hasta que ocurre el 3er acci

t 0:00 0:30

$T \sim \gamma(3,2)$ $P(T > 1/2) = P(\underbrace{N(0,1/2)}_{Po(1)} < 3) = \sum_{i=0}^{2} \frac{1^i}{i!}e^{-1} =$

$e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{-1}$

b) 0:00 1:00 2:00 $P(\underbrace{N(1,2)}_{Po(2)}=1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 2e^{-2}$

7.3) $N(a,b)$ = "cant de partículas emitidas en el intervalo (a,b)" $N(a,b) \sim Po(10(b-a))$

$\longrightarrow PP(10)$ x hora

T_i = "tiempo entre dos partículas seguidas emitidas"

$T_i \sim exp(10)$

$P(T_1 > 1/30, T_2 > 1/30, T_3 > 1/30, T_4 > 1/30) \overset{indep}{=} e^{-10/30} \cdot e^{-10/30} \cdot e^{-10/30} \cdot e^{-1}$

$= e^{-4/3} = 0,2636 \Rightarrow P$("los ceros se sean registrados") $= 0,2636$

7.4) $\longmapsto PP(2) \times seg$ $N(a,b)=$ "cantidad de señales en el intervalo (a,b)" $N(a,b) \sim P(2(b-a))$

$X=$ "tiempo hasta la 2^{da} señal" $\sim \Gamma(2, 2seg)$

$P(\text{Nb en el } 2^{do} \mid 1 \text{ en el } 1^{ero}) = \frac{P(\text{Nb en el } 2^{do}, 1 \text{ en el } 1^{ero})}{P(\ldots)}$ hecho en la última hoja

7.5) $\longmapsto PP(12) \times hora$ $N(a,b)=$ "cant de colectivos que arriban en el intervalo (a,b)" $\sim Po(12(b-a))$

a) $\underset{1/2 \quad 7/12}{\longmapsto}$ $T=$ "tiempo hasta que pase el colectivo"

$T \sim exp(12)$

$P(T > 5) = P(\underbrace{N(1/12)}_{Po(1)} = 0) = e^{-1}$

b) $P(N(31/60, 3/5) = 0) = e^{-1}$

c) $P($"Nahiara tenga que esperar más de 5 min"$) = e^{-1}$

d) $P($"$\oplus$ de 5'"$) = e^{-1}$

7.6) $X_i =$ "peso de la bolsa i de naranja" $X_i \sim exp(1/3)$ kilos

$T=$ "peso final de la balanza"

a) $P(T > 7 \mid T > 5) = P(T > 2) = 1 - P(T \leq 2) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 2})$

$= e^{-2/3} \approx 0{,}5134$

b) $E[X_i] = 3$

7.7) $\longmapsto PP(4) \times hora$ $N(a,b)=$ "cant de llamados que arriban a una central telefónica en el intervalo a-b" $\sim P_o(4(b-a))$

a) $P(N(0;1/4) \geq 1 \mid N(0;1) = 3) = ?$

$X = N(0,1/4) \mid N(0;1) = 3 \sim Bi(3, 1/4)$

$\Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$

$1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \approx 0{,}578$

b) $P(N(0;1/2) \geq 2 \mid N(0;1) = 3) = ?$

$Y = N(0;1/2) \mid N(0;1) = 3$, $Y \sim Bi(3; 1/2)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \binom{3}{1}$

$= \frac{1}{2}$

7.8) $\longmapsto PP(50) \times min$ $N(a,b)$ = "cantidad de personas que arriban a la estación en el intervalo (a,b)" $\sim Po(50(b-a))$

T = "cantidad total de tiempo que esperaron los pasajeros"

$E[T] = E[E[T|N]]$ T_i = "tiempo de arribo del pasajero i"

$T_i \overset{iid}{\sim} U(0,15)$

$T = \sum_{i=1}^{N} (15 - T_i)$

$E[T|N=n] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(15-T_i)\right] = n15 - nE[T_i] = n.15 - n.7,5$

$= n7,5$

$\Rightarrow E[T|N] = N7,5$

$\Rightarrow E[T] = E[N7,5] = 7,5 E[N] = 7,5 \times 750 = 5625$

$Var[T] = E[Var[T|N]] + Var[E[T|N]]$

$Var[T|N=n] = Var\left[\sum_{i=1}^{n}(15-T_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[15-T_i] = n Va$

$= n.\frac{(15)^2}{12} = n18,75 \Rightarrow Var[T|N] = N18,75$

$Var[T] = E[N18,75] + Var[N7,5] = 18,75 E[N] + (7,5$

$Var[N] = 18,75 . 750 + (7,5)^2 750 = 56250$

7.9) $\longmapsto PP(6) \times hora$ $N(a,b)$ = "cantidad de ... en el intervalo (a,b)" $N \sim Po(6(b-a))$

$P(N(0;1/6)=0 \cap N(0;2/3)=3 \mid N(0,1/2)=3) = \frac{P(N(0;1/6)=0, N(0;2/3)=3, N(0,1/2) ...)}{P(N(0;1/2)=3)}$

$= \frac{P(N(0;1/6)=0, N(1/6;2/3)=3)}{P(N(0;1/2)=3)} = \frac{P(N(0,1/6)=0) P(N(1/6,2/3)=3)}{P(N(0,1/2)=3)} =$

$\frac{\frac{(1/6)^0}{0!}e^{-1/6} \cdot \cancel{\frac{(1/2)^3}{3!}e^{-1/2}}}{\cancel{\frac{(1/2)^3}{3!}e^{-1/2}}} = e^{-1/6}$

$\longrightarrow$ 7.10) $\longmapsto$ $PP(1|20)$ $N(a,b)$ = "cantidad de fallos en el intervalo (a,b)" $\sim Po((b-a)/20)$

P("detectar la falla") $= 0{,}75$

L = "Longitud de los rollos" $\Rightarrow L = T$

T = "metros hasta la 1era falla"

$\longmapsto PP\left(0{,}75 \cdot \frac{1}{20}\right)$

Detectados

$T \sim exp\left(\frac{3}{80}\right)$

a) $E[T] = \frac{80}{3} \approx 26{,}\widehat{6}\ m \Rightarrow E[L] = \frac{80}{3}$

$Var[T] = \left(\frac{80}{3}\right)^2 = \frac{6400}{9} \approx 711{,}\widehat{11}\ m^2 \Rightarrow Var[L]$

b) F = "cantidad de fallos en los rollos no detectados"

$\xrightarrow[\text{NO DETECTADOS}]{} PP\left(\frac{0{,}25}{20}\right)$

$E[F] = E[E[F|L]]$ $\quad F|L=l \sim Po(l/80)$

$E[F|L=l] = \frac{l}{80} \Rightarrow E[F|L] = \frac{L}{80}$

$E[F] = E\left[E[F|L]\right] = E\left[\frac{L}{80}\right] = \frac{1}{80}E[L] = \frac{1}{80}\cdot\frac{80}{3} = \frac{1}{3}$

7.11) $\longmapsto PP(1|20)$ $N(a,b)$ = "cantidad de fallos en el intervalo (a,b)" $\sim Po((b-a)/20)$

P("Detectar la falla") $= 0{,}75$

L = "Longitud del alambre"

$$L = \begin{cases} T & \text{si } T < 20 \\ 20 & \text{si } T \geq 20 \end{cases}$$

T = "cantidad de metros hasta la 1era falla"

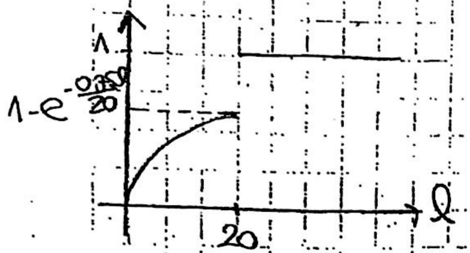
$T \sim exp(1|20)$

Scanned by CamScanner

a) $E[L] = \int_0^{20} (1 - F_L(l))\, dl = \int_0^{20} 1 - 1 + e^{-\frac{0,75\, l}{20}}\, dl = \int_0^{20} e^{-\frac{0,7}{2}}$

$\simeq 14,07$

$\Rightarrow E[L] = 14,07$



b) N = "cantidad de fallos no detectados"

$N | L = l \sim Po\left(\frac{0,25\, l}{20}\right)$

$E[N|L=l] = \frac{0,25}{20}\, l \Rightarrow E[N|L] = \frac{L}{80}$

$E[N] = E[E[N|L]] = E\left[\frac{L}{80}\right] = \frac{1}{80}E[L] = \frac{14,07}{80} \simeq 0,175$

7.12) $\longmapsto PP(3) \times min$ L(a,b) = "cantidad de señ
que emite Lucas en el intervalo (a,b)" $\sim Po(3(b-a))$

$\longmapsto PP(5) \times min$ M(a,b) = "cantidad de señales que em
Monik en el intervalo (a,b)" $\sim Po(5(b-a))$

L y M independientes $\longmapsto PP(8)$ min N(a,b) $\sim Po(8($

a) $P(T>10) = e^{-8\cdot 10} = e^{-80}$ T = "tiempo hasta la 1era señ
$T \sim exp(8)$

b) $P(T_L<T_M) = \frac{\lambda_L}{\lambda_L+\lambda_M} = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8} = 0,375$

c) $P(T>10 \cap T_L<T_M) = P(T>10)\,P(T_L<T_M) = \frac{3}{8}e^{-80}$

7.13) $\pi_1 \longmapsto PP(2)$

$\pi_2 \longmapsto PP(2)$

T_i = "tiempo consecutivo entre dos procesos" $T_i \overset{iid}{\sim} exp(2$

a) $P(T_{\pi_1} < T_{\pi_2}) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$

b) $P(T_1 < T_2+T_3) = ?$ $P(T_1 < T_2 + T_3)$

T_1, T_2 y $T_3 \overset{iid}{\sim} exp(1|2)$

7.14) $\longmapsto PP(60) \times$ hora $P(a,b) =$ " cantidad de Pas... que arriban en el intervalo (a,b) " $\sim Po(60(b-a))$

$\longmapsto PP(40) \times$ hora $C(a,b) =$ " cantidad de Chisperos que arriban en el intervalo (a,b) " $\sim Po(40(b-a))$

P y C independientes $\longmapsto PP(100) \times$ hora $N(a,b) \sim Po(100(b$...

$P(N(1/60, 1/30) \geq 2 \mid C(0, 1/20) = 2) = 1 - P(N(1/60, 1/30) < 2 \mid C(0, 1/20) = 2) = 1 - P(N(1/60, 1/30) = 0 \cup N(1/60, 1/30) = 1 \mid C(1/20) = 2)$

$= 1 - P(N(1/60, 1/30) = 0 \mid C(1/20) = 2) - P(N(1/60, 1/30) = 1 \mid C(1/20) = 2)$

$= 1 - P(C(1/60, 1/30) = 0 \cap P(1/60, 1/30) = 0 \mid C(1/20) = 2) - P((C(1/60, 1/30) = 1 \cap P(1/60, 1/30) = 0) \cup (C(1/60, 1/30) = 0 \cap P(1/60, 1/30) = 1) \mid C(1/20) = 2)$

$= 1 - P(C(1/60, 1/30) = 0 \mid C(1/20) = 2) P(P(1/60, 1/30) = 0 \mid C(1/20) = 2) - P(C(1/60, 1/30) = 1 \mid C(1/20) = 2) P(P(1/60, 1/30) = 0 \mid C(1/20) = 2) - P(C(1/60, 1/30) = 0 \mid C(1/20) = 2) \cdot P(P(1/60, 1/30) = 1 \mid C(1/20) = 2) = *'$

$X = C(1/60, 1/30) \mid C(1/20) = 2 \quad X \sim Bi(2, 1/3)$

$P(P(1/60, 1/30) = 0 \mid C(1/20) = 2) = \dfrac{P(P(1/60, 1/30) = 0) \cdot \cancel{P(C(1/20) = 2)}}{\cancel{P(C(1/20) = 2)}}$

$= \dfrac{1^0}{0!} e^{-1} = e^{-1}$

$P(P(1/60, 1/30) = 1 \mid C(1/20) = 2) = \dfrac{1^1}{1!} e^{-1} = e^{-1}$

$*' = 1 - \binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 e^{-1} - \binom{2}{1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) e^{-1} - \binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 e^{-1}$

$= 1 - \frac{4}{9}e^{-1} - \frac{4}{9}e^{-1} - \frac{4}{9}e^{-1} = 1 - \frac{4}{3}e^{-1} \approx 0.5095$ ✓

7.15) $\longmapsto PP(4) \times$ hora $N(a,b) =$ " cantidad de clientes que arriban en el intervalo (a,b) " $\sim Po(4(b-a))$

$T_i =$ " tiempo consumido en el servicio i " $\quad T_i \sim N(5, \sigma = 1/2)$

$T =$ " cantidad de tiempo consumido en una hora "

$E[T] = E[E[T \mid N]] \Rightarrow T = \sum_{i=1}^{N} T_i$

$E[T|N=n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] = nE[T_i] = n\,5$

$E[T|N] = 5N \Rightarrow E[T] = E[5N] = 5E[N] = 5\cdot 4$

$\Rightarrow E[T] = 20$

7.16) $\longmapsto$ p.p(3000) x semana $F(a,b)$ = "cantidad de familias que migran en el intervalo (a,b)" $\sim Po(3000(b-a))$

N = "cantidad de integrantes de cada familia"

$P(N=5)=0{,}1$; $P(N=4)=0{,}4$; $P(N=3)=0{,}5$

T = "cantidad de [illegible] que migran"

$T = \sum_{i=1}^{F} N_i \quad E[T] = E\left[E[T|F]\right]$

$E[T|F=f] = E\left[\sum_{i=1}^{f} N_i\right] = \sum_{i=1}^{f} E[N_i] = f\left[3\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}1\right] = f\,\frac{18}{5}$

$\Rightarrow E[T|F] = F\frac{18}{5} \Rightarrow E[T] = E\left[F\frac{18}{5}\right] = \frac{18}{5}E[F] = \frac{18}{5}\cdot 4\cdot 3000$

$E[T] = 43200$

$Var[T] = E\left[Var[T|F]\right] + Var\left[E[T|F]\right] = E\left[Var[T|F]\right] +$

$Var\left[\frac{18}{5}F\right] \Rightarrow Var[T|F] \Rightarrow Var[T|F=f] = Var\left[\sum_{i=1}^{f} N_i\right] = \sum_{i=1}^{f} Var[$

$Var[N_i] = (0{,}5\times 9 + 0{,}4\times 16 + 0{,}1\times 25) - \left(\frac{18}{5}\right)^2 = \frac{67}{5} - \frac{324}{25} = \frac{11}{25}$

$Var[T|F=f] = f\,\frac{11}{25} \Rightarrow Var[T|F] = F\,\frac{11}{25}$

$Var[T] = E\left[F\frac{11}{25}\right] + Var\left[\frac{18}{5}F\right] = \frac{11}{25}E[F] + \left(\frac{18}{5}\right)^2 Var[F] =$

$\frac{11}{25}\times 3000\times 4 + \left(\frac{18}{5}\right)^2\times 3000\times 4 = 5280 + 155520 \Rightarrow Var[T] = 160$

7.17) $\longmapsto$ PP(10) x min $V(a,b)$ = "cantidad de vehículos que arriban en el intervalo (a,b)" $\sim Po(10(b-a))$

$P(A)=0{,}7$; $P(M)=0{,}1$; $P(C)=0{,}2$

400 kg ; 120 kg ; 1300 kg

PP(7) x min $A(a,b)$ = # de autos

$P(A(0;30)\geq 2) = 1 - P(A(0;30)<2) = 1 - \underbrace{P(A(0;30)=0)}_{P_0(30\cdot 7)} - P(A(0;...$

$= 1 - e^{-210} - 210e^{-210} = 1$

b) $P(A(0;1)=7, M(0;1)=1, C(0;1)=2) = P(A(0;1)=7)\cdot P(M(0;1)=1)\cdot P(C(0;...$

$= \frac{7^7}{7!}e^{-7} \cdot \frac{1^1}{1!}e^{-1} \cdot \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 0{,}0148$

c) C = " carga de un vehículo"

$E[C] = E[C|V=k]$

$E[C|V=k] = 0{,}7\,400 + 0{,}1\,120 + 0{,}2\,1300 = 552$

$\Rightarrow E[C] = 552$

d) T = " carga total en 1 hora"

$T = \sum_{i=1}^{V} C_i \Rightarrow T = \sum_{i=1}^{A} 400\,kg + \sum_{i=1}^{M} 120\,kg + \sum_{i=1}^{C} 1300\,kg$

$E[T] = E[A(0;60)]\,400\,kg + E[M(0;60)]\,120\,kg + E[C(0;60)]\,.$

$= 420\cdot 400\,kg + 60\cdot 120\,kg + 120\cdot 1300\,kg = 331200\,kg$

$\Rightarrow E[T] = 331200\,kg$

7.18) $\longmapsto PP(2)$ x min $A(a,b)$ = " cantidad de piezas de la maquina A en el intervalo (a,b)" $\sim Po(2(b-a))$

$\longmapsto PP(1)$ x min $B(a,b)$ = " cantidad de piezas de la maquina B en el intervalo (a,b)" $\sim Po(1(b-a))$

$\longmapsto PP(3)$ x min $N(a,b)$ = " cantidad de piezas de A y B que arriban en el intervalo (a,b)" $\sim Po(3(b-a))$

X = " cantidad de pares hasta el 1ero de cada pieza"

T = " tiempo hasta obtener el par de diferentes maquinas"

T_i = " tiempo entre i pares" $T_i \sim \Gamma(2,3)$

$T = \sum_{i=1}^{X} T_i$

$X \sim Geo(p) \Rightarrow X \sim Geo(4/9)$

$E[T] = E[E[T|X]]$

$p = P(A_1 \cap B_2 \cup A_2 \cap B_1) =$

$P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1)$

$$E[T|X=x] = E\left[\sum_{i=1}^{x} T_i\right] = x\,E[T_i] = x\,\frac{2}{3}$$

$$E[T|X] = X\frac{2}{3} \Rightarrow E[T] = E\left[X\frac{2}{3}\right] = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{3}{2}$$

$$Var[T] = E\left[Var[T|X]\right] + Var\left[E[T|X]\right]$$

$$Var[T|X=x] = Var\left[\sum_{i=1}^{x} T_i\right] = x\,\frac{2}{9}$$

$$Var[T|X] = \frac{2}{9}X$$

$$Var[T] = E\left[\frac{2}{9}X\right] + Var\left[X\frac{2}{3}\right] = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}_{2}} + \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}_{1}}\cdot\frac{\cancel{45}^{5}}{\cancel{16}_{4}} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

*' 7.4) $\longrightarrow$ PP(2) x seg

= El contador registra un tac en el 1er segundo $\Rightarrow$ P(No registre ninguna señal en el siguiente)

$\Gamma(2,2)$

$T \sim exp(2)$

$\Gamma(2,2)$ = " tiempo hasta la segunda señal "

P(" en el 2do seg no registre " | " en el 1er seg registro ") =

$$\frac{P(\text{" en el 2do no reg " ; " en el 1ero seg "})}{P(\text{" en el 1er seg registre "})} = \frac{P(N(0,1)=2).P(N(1,2)=0) + P(N(0,1)=2).P(N(1,2)=1) + P(N(0,1)=3).P(N(1,2)=0)}{P(N(0,1)=2) + P(N(0,1)=3)}$$

$$= \frac{\frac{2^2}{2!}e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}\cdot\frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!}e^{-2}}{\frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2}}$$

$$= \frac{2e^{-2}.e^{-2} + 2e^{-2}2e^{-2} + \frac{4}{3}e^{-2}.e^{-2}}{2e^{-2} + \frac{4}{3}e^{-2}} = \frac{e^{-4}(2+4+4/3)}{e^{-2}(2+4/3)} = \frac{e^{-4}\,22}{e^{-2}\,10}$$

$$= e^{-2}\,\frac{11}{5}$$

Scanned by CamScanner