toma Θ como v.a $\qquad f_\Theta(\theta)$

$\underline{X} = (X_1 \quad X_n)$ una m.a

Distribucion "a priori" $\begin{cases} f_\Theta(\theta) & \text{VAC} \\ p_\Theta(\theta) & \text{VAD} \end{cases}$

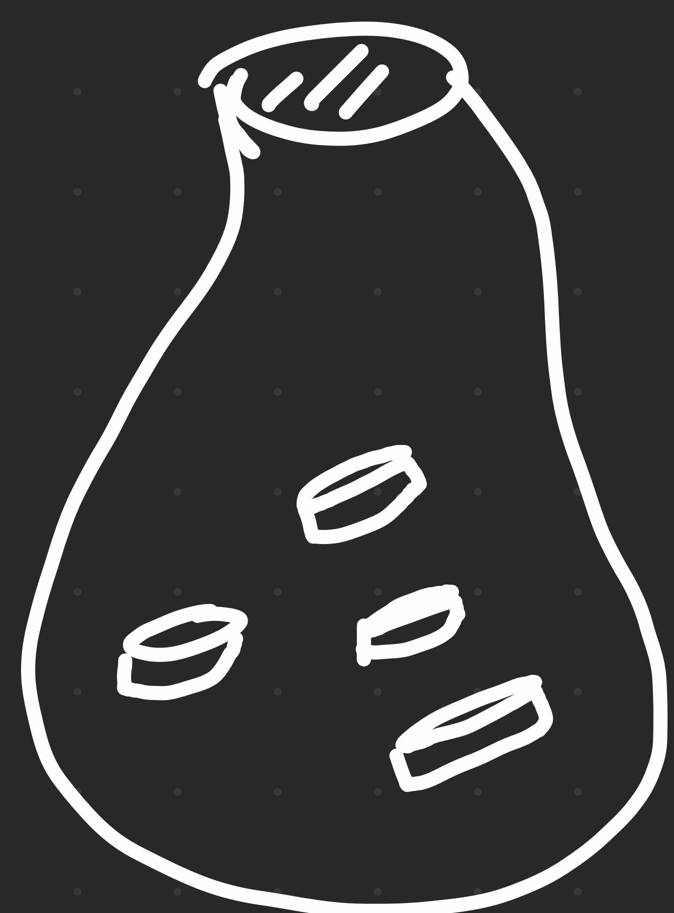
Distribución "a posteriori" $\begin{cases} f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) \\ p_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \underbrace{f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)}_{\text{A posteriori}} = \frac{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\ \overbrace{f_\Theta(\theta)}^{\text{A priori}}}{\underbrace{\int_\Theta f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\ f_\Theta(\theta)\, d\theta}_{f_{\underline{X}}(\underline{x})\ \text{marginal}}}$$

Estimador de Bayes $\qquad E[\Theta \mid \underline{X} = \underline{x}]$

Ejemplo 1

1. Harvey tiene una bolsa con 10 monedas. La distribución a priori de la cantidad de monedas de dos caras es equiprobable sobre $\{1, 2, 3, 4\}$. El resto de las monedas tiene cara y ceca equilibradas. Harvey elije 3 monedas al azar de las cuales 2 resultan ser de 2 caras. Hallar la dist. a posteriori de la cant. de monedas de dos caras que había inicialmente en la bolsa.



10 monedas

dist a priori $\quad F_{\Theta}(\theta) =$

Θ = "cant de mon das 2 caras"

equiprobable $\{1, 2, 3, 4\}$

el resto tiene cara y ceca equilibrada

Al Azar $\xrightarrow[3 \text{ monedas}]{}$ __ __ __

M = "cant de monedas de 2 caras"

$$\mathbb{R}_M = \{1, 2, 3, 4\}$$

A priori $\quad p_M(m) = \frac{1}{4}$

X "cant de monedas de 2 caras en 3ext

"Sin reposición"

$$X\big|_{M=m} = \mathcal{H}(10, m, 3)$$

Busco $P_{M|X=2}(m) \longrightarrow$ Posteriori

(nueva dist de M basada en la m.a. $\boxed{X=2}$)

$$\Rightarrow P_{M|X=2}(m) = \frac{\mathbb{P}(X=2, M=m)}{\mathbb{P}(X=2)}$$

bayes $\longrightarrow$

$$= \frac{P_{X|M=m}(2)\, P_M(m)}{\sum_{\forall m \in At(M)}^{4} P_{X|M=\iota}(2)\, P_M(\iota)}$$

valores del rango de m

valor actual del rango

$\Rightarrow P_{X|M=m}(x) = \dfrac{\binom{m}{x}\binom{10-m}{3-x}}{\binom{10}{3}}$

$\Rightarrow P_M(\iota) = \frac{1}{4}$

$$\sum_{\iota=1}^{4} P_{X|M=\iota}(2)\, P_M(\iota) =$$

Si $M=1 \longrightarrow$ no se cumple ya que se sacaron 2

Ejemplo 2

2. Se quiere estudiar la proporción de componentes electrónicos defectuosos (θ) en un lote muy grande. Por datos históricos, se supone que θ es cercano a 0.04. Se propone una dist. a priori $\Theta \sim \beta(1,24)$. Luego, se pide encontrar un estimador para θ basado en una m.a. de tamaño n.

"a priori" $\Theta \sim Beta(1,24)$

$$Rango(\theta) = (0,1)$$

θ = "proporción de comp defect" → basado en un m a de tam n

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{si el componente } i \text{ es def} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

toma una muestra de n y me fijo la proporción de componentes electrónicos defectuosos

$$\hookrightarrow X_i \big|_{\Theta=\theta} \sim Ber(\theta)$$

dependiendo la muestra o la proporción que sería la cantidad de componentes defectuosos, la probabilidad de obtener un elemento defectuoso depende de titon

si tomo $X_1, \ldots, X_n$ iid

$$P_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \quad , i = 1, \ldots, n$$

a priori → $$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\Gamma(25)}{\Gamma(1)\Gamma(24)} \theta^0 (1-\theta)^{23} \, \mathbb{1}\{0<\theta<1\}$$

si calculo $E(\Theta) = \frac{1}{1+24} = 0{,}04$ $\quad Var(\Theta) = 0{,}0015$

se eligio una distribucion que da el valor esperado de θ en el enunciado

Si tengo $\underline{X}=\underline{x}$ $\longrightarrow$ $f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)$

"a posteriori"

Estimador de Bayes $\quad E[\Theta|\underline{X}=\underline{x}]$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_{\Theta}(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\underline{X}|\theta=\theta}(\underline{x})\, f_{\Theta}(\theta)\, d\theta}$$

Marginal $f_X(x)$

me va a dar una cte (por realización de la muestra)

$$\Rightarrow f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) \propto p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_{\Theta}(\theta)$$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) \propto \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}\, \frac{\Gamma(25)}{\Gamma(1)\Gamma(24)}(1-\theta)^{23}\, \mathbb{1}\{0<\theta<1\}$$

$$\frac{\Gamma(25)}{\Gamma(1)\Gamma(24)} = \frac{(25-1)!}{0!\,(24-1)!} = 24$$

$$\Rightarrow \propto 24\, \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n+23-\sum x_i}\, \mathbb{1}\{0<\theta<1\}$$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = K\,\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n+23-\sum x_i}\,\mathbb{1}\{0<\theta<1\}$$

K: como no calculo el numerador

→ observo su estructura → se parece a una Beta

$$\Theta|_{\underline{X}=\underline{x}} \sim \beta\left(\sum x_i+1,\ n+24-\sum x_i\right)$$

Y Así saco su esperanza

$\sum x_i = a-1$
$b-1 = n+23-\sum x_i$
$b = n+24-\sum x_i$

$\Rightarrow$ EB $\quad \varphi(\underline{x}) = E(\Theta|\underline{X})$

$$E(\Theta|\underline{X}=\underline{x}) = \frac{\sum x_i+1}{\sum x_i+1+n+24-\sum x_i} = \boxed{\frac{\sum x_i+1}{n+25}}$$

$$\varphi(\underline{X}) = \frac{\sum X_i+1}{n+25}$$

Ejemplo 3

3. El tiempo de espera (en hs) hasta que se produce la segunda falla en cierto tipo de sistemas es una V.A. con distribución $\Gamma(2,\lambda)$. A priori se supone que λ tiene una dist. exponencial de media 1. Se observó que en uno de los sistemas el tiempo hasta la segunda falla fue 3/4 de hora. En virtud de la información muestral hallar la prob. de que el tiempo de espera hasta que se produzcan las próximas dos fallas sea mayor a 1 hora

T = "tiempo hasta segunda falla"

$$T|_{L=\lambda} \sim \Gamma(2,\lambda)$$

a priori → $L \sim Exp(1)$

se observo que en un sistema la falla fue en $\frac{3}{4}$ hs

→ tengo una muestra de tamaño 1!

(Bayes → muestras chicas)

$t = \frac{3}{4}$. m a

tengo que estimar la probabilidad basada en una muestra → necesito conocer la dist a posteriori de L

espacio del paramtr

observado cond.cional

$$\mathbb{P}(T_2 > 1 \mid T_1 = 0{,}75)$$

T_i = "tiempo hasta las prox 2 fallas"

T_1 y T_2 T_k son indep

$\Rightarrow T_2$ depende de L y de T_1

$$f_{T_2 \mid L=\lambda, T_1 = 0{,}75}(t) \; f_{L \mid T_1 = 0{,}75}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_2 \mid L=\lambda, T_1=0{,}75}(t) \; f_{L \mid T_1 = 0{,}75}(\lambda) \, d\lambda$$

→ marginal de $T_2 | T_1 = 0{,}75$

cada vez que calculo la probabilidad de un punto en particular tengo que fijarme si ese punto es posible en mi experimento

5. Sea X una variable aleatoria, tal que para cada [illegible] densidad está dada por

$$f_{X|T=\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1\{0 < x < \theta\}$$

A priori, T es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(4, 6)$. Dada la muestra

$$\underline{X} = (3.4,\ 4.0,\ 4.7,\ 4.5) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

hallar la moda a posteriori para θ

$Rg(T) = [4,6]$ $\qquad 1\{0 < x_i < \theta\}$

$$f_{X|T=\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1\{0 < x < \theta\}$$

$$T \sim \mathcal{U}(4,6)$$

T y X VAC

"a priori" $\longrightarrow$

$$f_T(\theta) = \frac{1}{2} 1\{4 < \theta < 6\}$$

$$f_{\theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{f_{\underline{X}|T=\theta}(\underline{x})\, f_T(\theta)}{\int_{4,7}^{6} f_{\underline{X}|T=\theta}(\underline{x})\, f_T(\theta)\, d\theta}$$

$\Rightarrow$ como tengo una muestra de n (x_1, x_2, x_3, x_4) $\longrightarrow$ $L(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1} f_{X_i|T=\theta}(x_i)$

$$f_{\underline{X}|T=\theta}(\underline{x}) = \prod_{i=} f_{X|T=\theta}(x_i) = \frac{2^4}{\theta^{4 \cdot 2}} (3{,}4 \quad 4 \quad 4{,}7 \quad 4{,}5)$$

$$= \frac{16}{\theta^8}(287{,}64) = \frac{4602{,}24}{\theta^8} 1\{\max(x_i) < \theta\}$$

$\mathbb{R}_g(t) = [4,6]$

$$f_{\underline{X}|T=\theta}(\underline{x}) = \prod^{4} \frac{2x_i}{\theta^2} \mathbb{1}\{0<x_i<\theta\}$$

$$= \frac{2^4}{\theta^8} \prod^{4} x_i \; \mathbb{1}\{\max(x_i)<\theta\}$$

$\mathbb{1}\{4,7<\theta\}$!

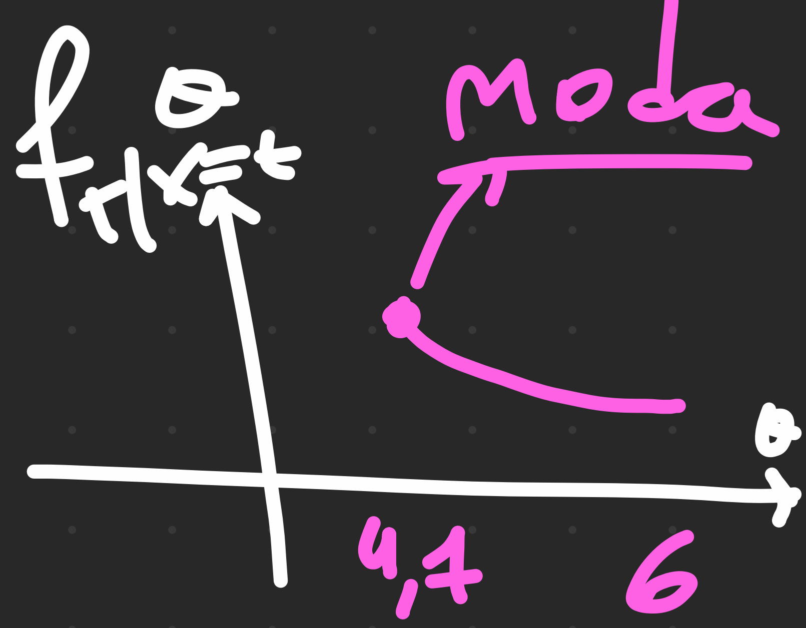
$$\int_T \frac{2^4}{\theta^8} \prod^4 x_i \; \frac{1}{2} \; \mathbb{1}\{4,7<\theta\} \; \mathbb{1}\{4<\theta<6\}$$

$$K = \int_{4,7}^{6} \frac{K_2}{\theta^8} d\theta = K_2 \; 2,309 \; 10^{-6}$$

$$f_{\underline{X}|T=\theta}(x) \; f_T(\theta) = \frac{K_2}{\theta^8} \mathbb{1}\{4,7<\theta<6\}$$

$$f_{T|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{\cancel{K_2}}{\theta^8} \frac{1}{\cancel{K}a} \mathbb{1}\{4,7<\theta<6\}$$

$\longrightarrow$ como es decreciente



$\boxed{\text{moda} = 4,7}$

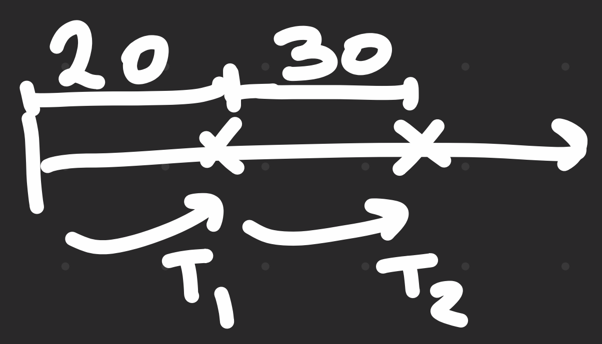
4. El tiempo (en min) entre fallas de cierto tipo de sistemas es una V.A. con dist. exponencial de parámetro λ. A priori se supone que λ es equiprobable sobre $\left\{\frac{1}{120}, \frac{1}{20}\right\}$. Si los tiempos entre los primeros dos fallas fueron 20 y 30 minutos, estimar la probabilidad de que el tiempo entre la 2da y la 3ra sea mayor a 30 min.

Ejemplo 4

T = "tiempo entre fallas"

$$T|_{L=\lambda} \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$$

a priori $\quad R_g(L)=\left\{\frac{1}{120}, \frac{1}{20}\right\} \longrightarrow P\left(L=\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{2}=P\left(L=\frac{1}{120}\right)$

① 

$$P\left(T_3>30 \,\middle|\, \begin{matrix} T_1=20 \\ T_2=30 \end{matrix}\right) \longrightarrow T_3 \text{ depende de } T_2\ T_1 \text{ y } L$$

L es discreta

lo veo como vector $\underline{t}=(t_1,t_2)$

$\underline{T}=(T_1,T_2)$

$\underline{t}=(20,30)$

$$p_{L|\underline{T}=\underline{t}}(\lambda) = \frac{f_{\underline{T}|L=\lambda}(\underline{t})\, p_L(\lambda)}{\sum_{T} f_{\underline{T}|L=\lambda}(\underline{t})\, p_L(\lambda)}$$

bayes para la mezcla

$$p_{L|\underline{T}=\underline{t}}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{120}e^{-\frac{t_1}{120}}\,\frac{1}{20}e^{-\frac{t_2}{120}}\,\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{120}\right)^2 e^{-\frac{50}{120}}\,\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{20}\right)^2 e^{-\frac{50}{20}}\,\frac{1}{2}} \approx 0{,}182 & \text{si } \lambda=\frac{1}{120} \\ 1-0{,}182 \approx 0{,}817 & \lambda=\frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T_3>30 \mid T_1=20, T_2=30) = \mathbb{P}(T_3>30 \mid L=\tfrac{1}{120})\ \underbrace{\mathbb{P}(L=\tfrac{1}{120} \mid T_1=20, T_2=30)}_{0{,}182}$$

$$+\ \underbrace{\mathbb{P}(T_3>30 \mid L=\tfrac{1}{20})}_{1-P(30),\ Exp(\frac{1}{20})}\ \underbrace{\mathbb{P}(L=\tfrac{1}{20} \mid T_1=20, T_2=30)}_{0{,}817}$$

Prob total
MEZCLA

La estimacion bayesiana permite encontrar intervalos de confianza de forma mas simple → solo encontrando cuantiles de la dist "a posteriori"

12.2 La longitud (en cm.) de ciertas varillas es una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desvío estándar 2, donde μ es una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad *a priori* es $\mathbf{P}(\mu = 10) = 0.25$ y $\mathbf{P}(\mu = 14) = 0.75$. Se observa que la longitud de una varilla es 12.1 cm. En virtud de la información muestral, estimar la probabilidad de que la longitud de otra varilla del mismo tipo sea mayor que 13 cm.

L = "long varillas"

$$L|_{M=\mu} \sim N(\mu, 2^2) \qquad \sigma = 2$$

muestra aleatoria tam 1 → $l_1 = 12{,}1$

M v.a.d $\begin{cases} \mathbb{P}(\mu=10) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(\mu=14) = \frac{3}{4} \end{cases}$

M "a priori" → $P_M(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } \mu=10 \\ \frac{3}{4} & \text{si } \mu=14 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(L > 13 \mid M=\mu) = 1 - \mathbb{P}(L \leq 13 \mid M=\mu)$$

$$P_{M|L=\ell}(\mu) = \frac{f_{L|M=\mu}(\ell)\; P_M(\mu)}{\sum_{\mu_i} f_{L|M=\mu_i}(\ell)\; P_M(\mu_i)}$$

$$P_{M|L=12,1}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(12,1-10)^2}{8}} \frac{1}{4}}{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(12,1-10)^2}{8}} \frac{1}{4} + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(12,1-14)^2}{8}} \frac{3}{4}} = a & \text{si } \mu = 10 \\ 1 - P_M(10) = 1 - a = & \text{si } \mu = 14 \end{cases}$$

Prob total
mezcla

parametro

$$\mathbb{P}(L_2 > 13 \mid L_1 = \ell_1) = \mathbb{P}(L > 13 \mid \mu = 10)\,\overbrace{\mathbb{P}(\mu = 10 \mid L_1 = \ell)}^{a} + \underbrace{\mathbb{P}(L_2 > 13 \mid \mu = 14)}\,\underbrace{\mathbb{P}(\mu = 14 \mid L_1 = \ell)}_{1-a}$$

$$L_2 / \mu=14 \sim N(14, 4)$$

$$\mathbb{P}(L_2 > 13 \mid \mu = 14) = 1 - F_{L/N=14}(13)$$

$$\Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$L_2 < \ell_2 \Rightarrow \frac{L_2 - \mu}{\sigma} < \frac{\ell_2 - \mu}{\sigma}$$

$$Z < \frac{l_2 - \mu}{\sigma}$$

$$1 - \phi\left(\frac{l_2 - \mu}{\sigma}\right)$$