1 Experiencias multinomiales[1]

En lo que sigue supondremos que se realizan de modo independiente experiencias donde los resultados de cada una pueden ser A, B ó C, con $P(A) = p_A; P(B) = p_B; P(C) = p_C$ tales que $p_A + p_B + p_C = 1$. A esto llamamos experiencias multinomiales.

Definición: Si se realizan m experiencias multinomiales y se definen las variables:
K_A : cantidad de resultados A en las m experiencias;
K_B : cantidad de resultados B en las m experiencias;
K_C : cantidad de resultados C en las m experiencias,
entonces el vector aleatorio (K_A, K_B, K_C) tiene distribución Multinomial con parámetros $(m; p_A; p_B; p_C)$.

Esto es,

$$P(K_A = a, K_B = b, K_C = c) = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} p_A^a * p_B^b * p_C^c$$

Ejemplo 1: Un motoquero recorre una avenida. A su paso puede encontrarse con semáforos en verde, amarillo o rojo, independientemente uno de otro y con probabilidades $p_V = 0.5; p_A = 0.2; p_R = 0.3$.Si atravesó 10 semáforos,

la probabilidad de que haya observado 5 verdes, 4 amarillos y 1 rojo será igual a

$$P(K_V = 5, K_A = 4, K_R = 1) = \frac{10!}{5!4!1!} 0.5^5 * 0.2^4 * 0.3^1 = 0.018\,9$$

2 Distribuciones geométricas asociadas a experiencias multinomiales

Se realizan experiencias multinomiales como las descriptas anteriormente y se definen
N_A: cantidad de experiencias hasta observar el primer A
N_B: cantidad de experiencias hasta observar el primer B.
Entonces serán $N_A \sim Geo(p_A)$ y $N_B \sim Geo(p_B)$.
Observar que N_A y N_B **no** son variables independientes! Para verlo, notar que $P(N_A = 1, N_B = 1) = 0$ pero $P(N_A = 1) \neq 0 \wedge P(N_B = 1) \neq 0$.

La distribución conjunta de ambas variables resulta

$$P(N_A = n; N_B = m) = \begin{cases} p_C^{n-1} p_A (1-p_B)^{m-n-1} p_B & \text{si} \quad n < m \\ p_C^{m-1} p_B (1-p_B)^{n-m-1} p_A & \text{si} \quad n > m \end{cases}$$

Propiedad 1

$$P(N_A < N_B) = \frac{p_A}{p_A + p_B} \text{ y } P(N_A > N_B) = \frac{p_B}{p_A + p_B}$$

Demostración:
Notar que $P(N_A = N_B) = 0$ porque no pueden presentarse en la misma experiencia A y B simultáneamente.
Luego, $P(N_A < N_B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} p_C^{n-1} p_A (1-p_B)^{m-n-1} p_B = \dfrac{p_A}{p_A + p_B}$

Ejemplo 2: ¿Cuál es la probabilidad de que el motoquero encuentre un semáforo verde antes que uno rojo?
Esto será igual a

$$P(N_V < N_R) = \frac{p_V}{p_V + p_R} = \frac{0.5}{0.5 + 0.3} = 0.625$$

Propiedad 2

$$U = m\acute{\imath}n\{N_A; N_B\} \sim Geo(p_A + p_B)$$

Demostración:

[1] Probabilidad y Estadística.FIUBA

Si $U = mín\{N_A; N_B\}$, entonces

$$\begin{aligned} P(U &= m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} P(N_A = m; N_B = k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} P(N_A = k; N_B = m) = \\ &= \sum_{k=m+1}^{\infty} p_C^{m-1} p_A (1-p_B)^{k-m-1} p_B + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_C^{m-1} p_B (1-p_A)^{k-m-1} p_A = \\ &= p_C^{m-1} p_B p_A \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-p_B)^{k-m-1} + p_C^{m-1} p_A p_B \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-p_A)^{k-m-1} = \\ &= p_C^{m-1}(p_A + p_B) = (1-p_A-p_B)^{m-1}(p_A+p_B) \end{aligned}$$

Propiedad 3:

Si se define V como la menor cantidad de experiencias necesarias hasta lograr un resultado A y un resultado B, entonces

$$E[V] = \frac{1}{p_A + p_B}\{1 + \frac{p_A}{p_B} + \frac{p_B}{p_A}\}$$

Demostración:

Opción 1: $V = U + W$ con

U : cantidad de experiencias hasta lograr el primer éxito de algún tipo (A ó B). Entonces $U = mín\{N_A; N_B\} \sim Geo(p_A + p_B)$

W : cantidad de experiencias hasta lograr el segundo éxito. Entonces W es una variable mezcla porque, se tiene que

$$W \mid (N_B > N_A) \sim Geo(p_B) \qquad W \mid (N_B < N_A) \sim Geo(p_A)$$

Además, $P(N_B > N_A) = \dfrac{p_A}{p_A + p_B}$ y $P(N_B < N_A) = \dfrac{p_B}{p_A + p_B}$.

Por lo tanto:

$$E[V] = E[U] + E[W] = \frac{1}{p_A + p_B} + \{\frac{p_A}{p_A + p_B} * \frac{1}{p_B} + \frac{p_B}{p_A + p_B} * \frac{1}{p_A}\}$$

Opción 2: siguiendo el camino de la rata...

Condicionando sobre lo que ocurre en la primera experiencia puede escribirse lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} V \mid (1^o \text{ es A}) \sim 1 + Geo(p_B) & \text{con} & P(1^o \text{ es A}) = p_A \\ V \mid (1^o \text{ es B}) \sim 1 + Geo(p_A) & \text{con} & P(1^o \text{ es B}) = p_B \\ V \mid (1^o \text{ es C}) \sim 1 + V' & \text{con} & V' \text{ distribuída como } V \end{array}$$

Entonces se puede calcular $E[V]$ recursivamente a partir de

$$\begin{aligned} E[V] &= E[V \mid (1^o \text{ es A})] * P(1^o \text{ es A}) + E[V \mid (1^o \text{ es B})] * P(1^o \text{ es B}) + E[V \mid (1^o \text{ es C})] * P(1^o \text{ es C}) \Leftrightarrow \\ E[V] &= [1 + \frac{1}{p_B}] * p_A + [1 + \frac{1}{pA}] * p_B + [1 + E[V]] * (1 - p_A - p_B) \Leftrightarrow \\ E[V] &= \frac{1}{p_A + p_B}\{1 + \frac{p_A}{p_B} + \frac{p_B}{p_A}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Hallar la cantidad media de semáforos que debe cruzar hasta encontrarse con uno verde y uno amarillo. Esto será igual a

$$E[V] = \frac{1}{p_A + p_B}\{1 + \frac{p_A}{p_B} + \frac{p_B}{p_A}\} = \frac{1}{0.7}\{1 + \frac{0.2}{0.5} + \frac{0.5}{0.2}\} = 5.571\,4$$

Propiedad 4:

La cantidad de resultados tipo A que se observan antes del primero de tipo B que aparece se distribuye como $K_A \mid (N_B = n) \sim Bin(n-1; \dfrac{p_A}{p_A + p_C})$

Ejemplo 4: Si el primer semáforo rojo que encuentra es el séptimo, ¿cuál es la probabilidad de que antes haya encontrado dos semáforos amarillos? Esto será igual a

$$P(K_A = 2 \mid N_R = 7) = \binom{6}{2}(\frac{0.2}{0.7})^2(\frac{0.5}{0.7})^4 = 0.318\,74$$

2.1 Observaciones:

- Es cierto que $V = N_A + N_B$? NO, porque N_A y N_B empiezan a contar desde el principio.
- Es cierto que $V = \max\{N_A; N_B\}$, pero NO es cierto que
  $V = [\max\{N_A \ ; N_B\} \mid (N_B > N_A)] = [N_B \mid (N_B > N_A)] \sim Geo(p_B)$. La distribución es incorrecta!
  Por ejemplo, $P[N_B = 2 \mid (N_B > N_A)] = p_A p_B \left(\frac{p_A + p_B}{p_A}\right) = p_B(p_A + p_B)$ lo que no se corresponde con una distribución geométrica.