Guia 2

2.3 En una urna hay 3 bolas verdes y 5 bolas rojas.

(**a**) Se realizan 4 extracciones con reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

(**b**) Se realizan 4 extracciones sin reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

3 V
5 R

4 extracciones con reposición $\longrightarrow \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}$

Tener en cuenta contador de casos

$\mathbb{P}(V=0) = P(0 \text{ verdes}) = \frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8} \cong 0,152$

4 formas $\binom{4}{1}$

$\mathbb{P}(V=1) = P(1 \text{ verde}) = \left(\frac{5}{8}\right)^3 \frac{3}{8} \cong 0,091$

$\binom{4}{2}$

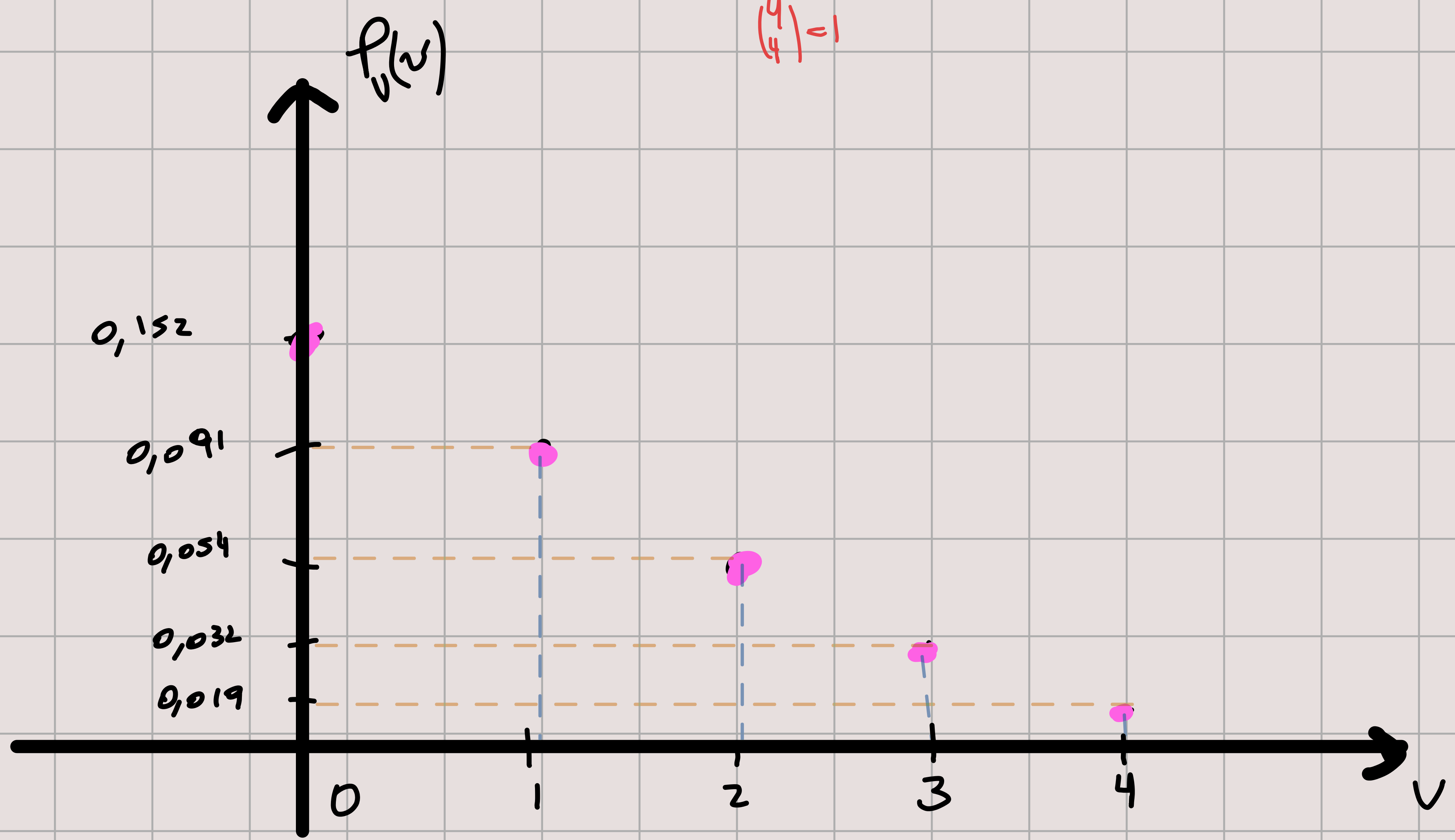
$\mathbb{P}(V=2) = P(2V) = \left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^2 \simeq 0,054$

$\binom{4}{3}$

$\mathbb{P}(V=3) = P(3V) = \left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right) \simeq 0,032$

$\mathbb{P}(V=4) = P(4V) = \left(\frac{3}{8}\right)^4 \simeq 0,019$

$\binom{4}{4}=1$



(b) Se realizan 4 extracciones sin reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

extracciones sin reposición

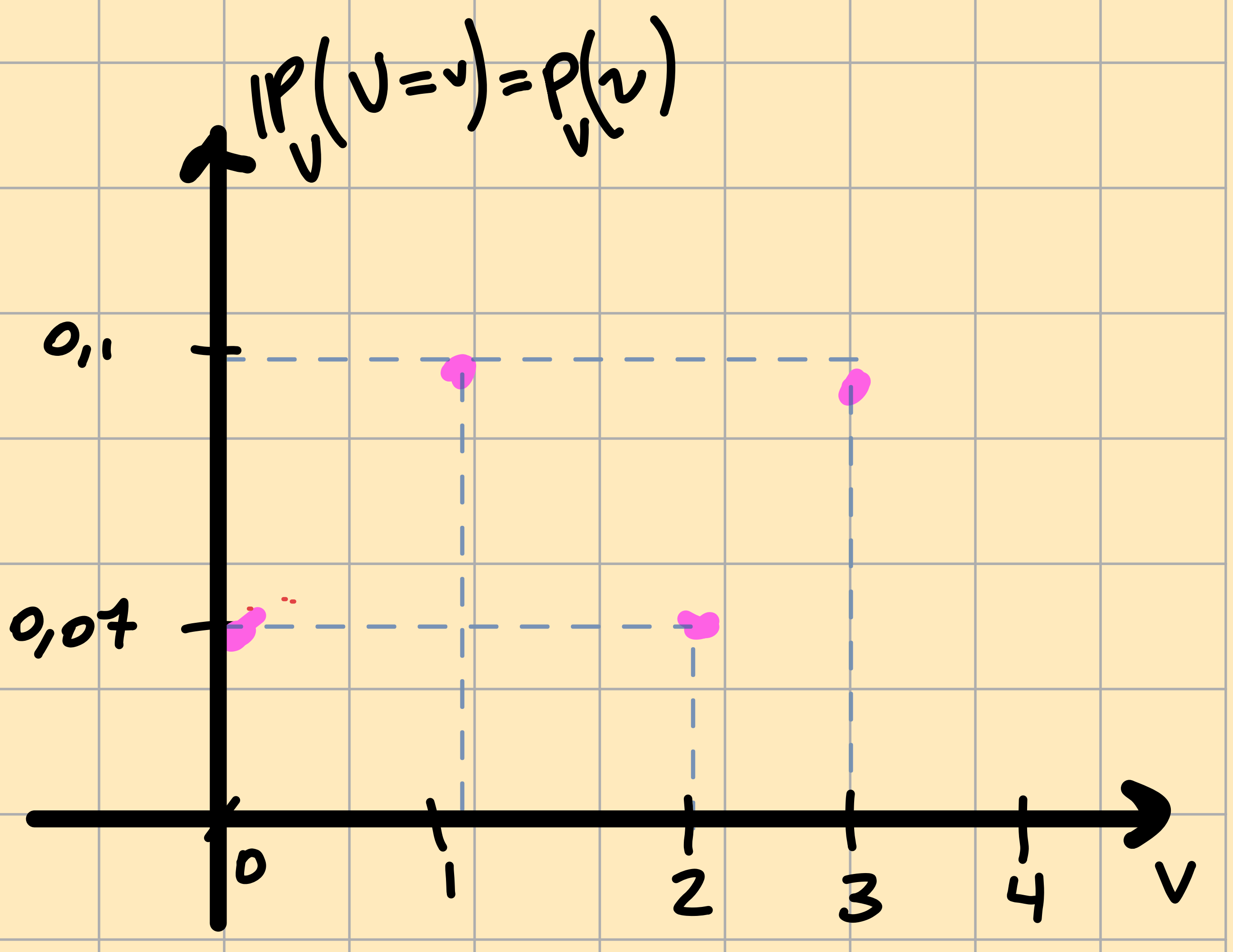
$$\mathbb{P}(V=0) = \frac{5}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5} \simeq 0{,}07$$

$$\mathbb{P}(V=1) = \frac{3}{8}\frac{5}{7}\frac{4}{6}\frac{3}{5} \simeq 0{,}1$$

$$\mathbb{P}(V=2) = \frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}\frac{4}{5} \simeq 0{,}07$$

$$\mathbb{P}(V=3) = \frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}\frac{5}{5} \simeq 0{,}01$$

$\mathbb{P}(V=4) = 0 \longrightarrow$ no hay 4 verdes



2.4 Se tiene una moneda cargada con probabilidad $p = 5/8$ de salir "cara".

(a) Hallar, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función de probabilidad de la cantidad N_k de lanzamientos necesarios de dicha moneda hasta observar k-ésima cara.

- $P(\text{"cara"}) = \frac{5}{8}$

N = "cant lanzamientos para observar k caras"

$$\mathbb{P}(N_1 = n) = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N_k = n) = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{5}{8}\right)^{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-k}}$$

(b) Calcular la probabilidad de que N_1 sea par.

$$\mathbb{P}(N_1 = 2m) \longrightarrow \begin{aligned} &\mathbb{P}(N_1=2) = \binom{n-1}{k-1}=\binom{1}{0}\ \frac{5}{8}\,\frac{3}{8} \\ &\mathbb{P}(N_1=4) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^3 \\ &\mathbb{P}(N_1=6) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^5 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(N_1 = 2m) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^{2m-1}, \quad m \in \mathbb{N} \quad ¿?$$

(c) Calcular $\mathbf{P}(N_1 = 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 = 5|N_1 = 2)$.

(c)

$$\mathbb{P}(N_1=3) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{5}{8}\,\frac{9}{64} \cong \boxed{0{,}08}$$

$$\mathbb{P}(N_2=5 \mid N_1=2) = \frac{\mathbb{P}(N_2=5 \cap N_1=2)}{\mathbb{P}(N_1=2)} \quad (*)$$

$* \ \mathbb{P}(N_1=2) = \frac{5}{8}\,\frac{3}{8}^{2-1} = \frac{5}{8}\,\frac{3}{8} \cong \boxed{0{,}23}$

$* \ \mathbb{P}(N_1=2 \cap N_2=5) = \mathbb{P}(N_1=2)\ \mathbb{P}(N_2=5)$

son ind

$* \ \mathbb{P}(N_2=5) = \left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^3 \cong \boxed{0{,}02}$

$(*) \ \dfrac{0{,}02}{0{,}23} \simeq 0{,}089$

(d) Calcular $\mathbf{P}(N_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_1 > 5|N_1 > 2)$.

(d)

$$\mathbb{P}(N_1>3) = 1 - \mathbb{P}(N_1 \leq 3) \quad (*)$$

$* \ \mathbb{P}(N_1 \leq 3) = \mathbb{P}(N_1=0 \cup N_1=1 \cup N_1=2 \cup N_1=3)$

$\underset{\text{me}}{=} \mathbb{P}(N_1=0) + \mathbb{P}(N_1=1) + \mathbb{P}(N_1=2) + \mathbb{P}(N_1=3)$

$= 0 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8}\,\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2 \cong \boxed{0{,}94}$

$(*) \ 1 - 0{,}94 = 0{,}06$

$$\mathbb{P}(N_1>5 \mid N_1>2) = 1 - \mathbb{P}(N_1 \leq 5 \mid N_1>2)$$

$$(*) \ \mathbb{P}(N_1 \leq 5 \mid N_1>2) = \frac{\mathbb{P}\big((N_1=1 \cap N_1=2 \cap N_1=3 \cap N_1=4 \cap N_1=5) \cap N_1>2\big)}{\mathbb{P}(N>2)} = \frac{\mathbb{P}(N_1=3 \cup N_1=4 \cup N_1=5)}{\mathbb{P}(N>2)}$$

$* \ \mathbb{P}(N_1>2) = 1 - \mathbb{P}(N_1 \leq 2)$

$\mathbb{P}(N_1 \leq 2) = \mathbb{P}(N_1=1 \cup N_2=2) \underset{\text{me}}{=} \mathbb{P}(N_1=1) + \mathbb{P}(N_1=2) = \frac{5}{8} + \frac{5}{8}\,\frac{3}{8} = \boxed{0{,}85}$

$\mathbb{P}(N_1>2)$

$1 - 0{,}85 = \boxed{0{,}15}$

$* \ \mathbb{P}(N_1=3 \cup N_1=4 \cup N_1=5) \underset{\text{me}}{=} \mathbb{P}(N_1=3) + \mathbb{P}(N_1=4) + \mathbb{P}(N_1=5) = \frac{5}{8}\left(\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^4\right)$

$\frac{5}{8}(0{,}14 + 0{,}05 + 0{,}019) \simeq \boxed{0{,}13}$

$\mathbb{P}(N_1>5 \mid N_1>2)$

$(*) \ \dfrac{0{,}13}{0{,}15} \simeq 0{,}86 \Rightarrow 1 - 0{,}86 = \boxed{0{,}13}$

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(N_2 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 > 5|N_2 > 2)$.

e

$$\mathbb{P}(N_2>3) = 1-\mathbb{P}(N_2\leq 3) \circledast$$

$$* \ \mathbb{P}(N_2\leq 3) = \mathbb{P}(N_2=1 \cup N_2=2 \cup N_3=3)$$

$$\text{me} \rightarrow = \mathbb{P}(\cancel{N_2=1}) + \mathbb{P}(N_2=2) + \mathbb{P}(N_3=3) = \left(\tfrac{5}{8}\right) + \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 \tfrac{3}{8} \cong 0{,}77 \ \circledast \longrightarrow 1-0{,}77 \simeq \boxed{0{,}33}$$

0

$$\mathbb{P}(N_2>5 \mid N_2>2) = 1 - \mathbb{P}(N_2\leq 5 \mid N_2>2) \ \circledast$$

$$* \ \mathbb{P}(N_2\leq 5 \mid N_2>2) = \frac{\mathbb{P}((N_2=2 \cup N_2=3 \cup N_2=4 \cup N_2=5) \cap N_2>2)}{\mathbb{P}(N_2>2)} = \frac{\mathbb{P}(N_2=3 \cup N_2=4 \cup N_2=5)}{\mathbb{P}(N_2>2)}$$

$$\mathbb{P}(N_2>2) = 1-\mathbb{P}(N_2\leq 2) = 1-\mathbb{P}(\cancel{N_2=1} \cup N_2=2) = 1-\mathbb{P}(N_2=2) = 1-\left(\tfrac{5}{8}\right)^2 \cong \boxed{0{,}6}$$

0

$$\mathbb{P}(N_2=3 \cup N_2=4 \cup N_2=5) = \mathbb{P}(N_2=3)+\mathbb{P}(N_2=4)+\mathbb{P}(N_2=5) = \left(\tfrac{5}{8}\right)^2\left(\tfrac{3}{8}+\left(\tfrac{3}{8}\right)^2+\left(\tfrac{3}{8}\right)^3\right)$$

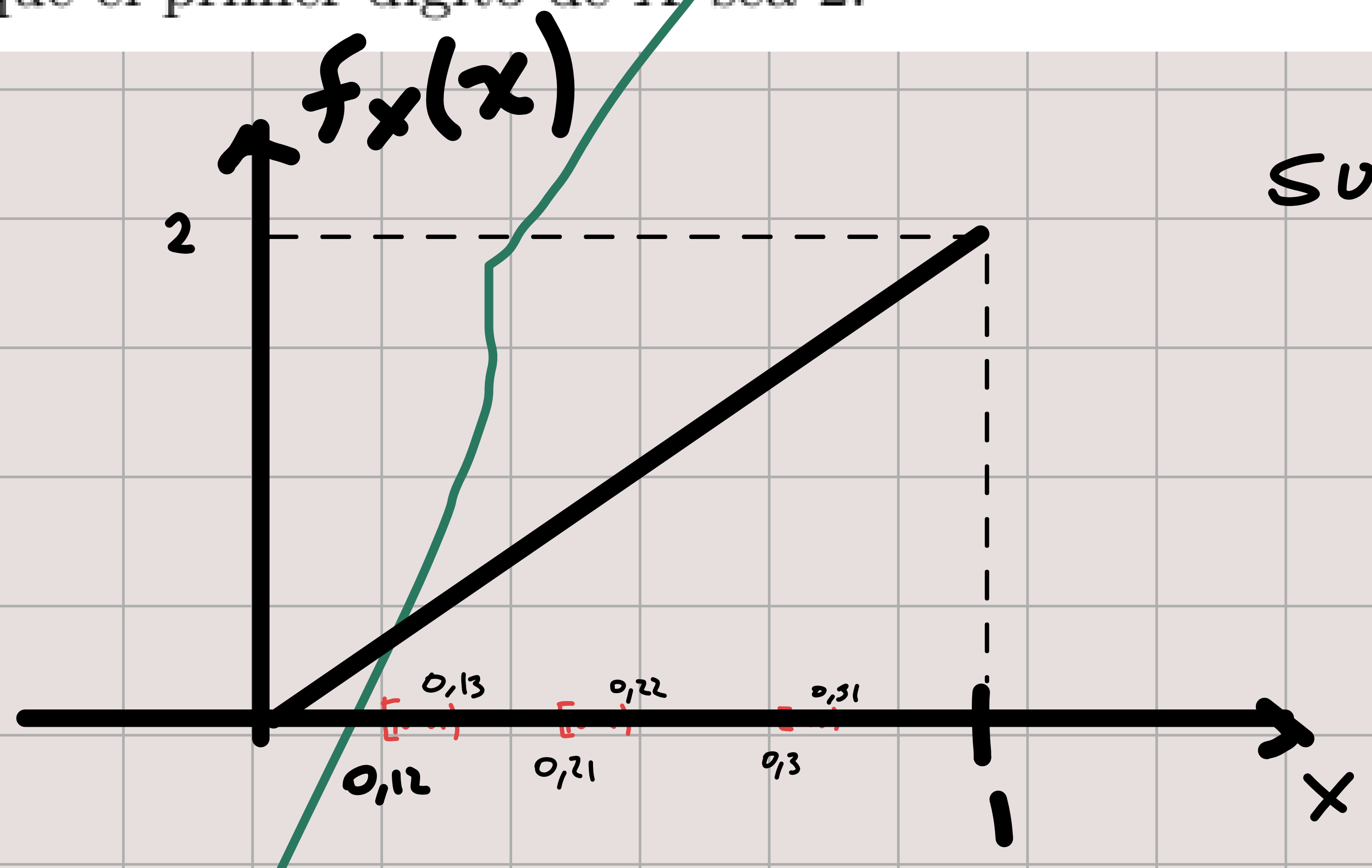
$$= 0{,}39(0{,}37+0{,}14+0{,}05) \simeq \boxed{0{,}21}$$

$$\circledast \quad 1-\frac{0{,}219}{0{,}6} \cong \boxed{0{,}63}$$

2.7 Sea X una variable aleatoria con función densidad

$$f_X(x) = 2x\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

. Sabiendo que la suma de los primeros dos dígitos decimales de X es 3, calcular la probabilidad de que el primer dígito de X sea 2.



Suma primeros 2 digitos=3

$0,12 \longrightarrow 0,1299 \sim <0,13$

$0,21 \longrightarrow 0,2199 \sim <0,22$

$0,30 \longrightarrow 0,3099 \sim <0,31$

Como estoy en continuas $F(X<0,2199) = F(X<0,23)$

$\underbrace{F(X=0,2)=0}$

D_1= "primer digito" D_2= "segundo digito"

$$\mathbb{P}(D_1=2 \mid D_1+D_2=3) = \frac{\mathbb{P}(D_1+D_2=3 \cap D_1=2)}{\mathbb{P}(D_1+D_2=3)}$$

$$* \ \mathbb{P}(D_1+D_2=3) = \mathbb{P}\big((0,12 \leq X < 0,13) \cup (0,21 \leq X < 0,22) \cup (0,3 \leq X < 0,31)\big)$$

conjuntos m e

$$= \mathbb{P}(0,12 \leq X < 0,13) + \mathbb{P}(0,21 \leq X < 0,22) + \mathbb{P}(0,3 \leq X < 0,31)$$

$$= F(0,13) - F(0,12) + F(0,22) - F(0,21) + F(0,31) - F(0,3)$$

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2t \, dt \, \mathbb{1}\{0<t<x\} \quad \text{con } x \in [0,1] \qquad = \int_0^x 2t\,dt = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = x^2}$$

$\rightarrow 0,017 - 0,014 + 0,048 - 0,044 + 0,096 - 0,09$

$\mathbb{P}(D_1+D_2=3) = 0,013$

$$\mathbb{P}(D_1+D_2=3 \cap D_1=2) = \mathbb{P}(0,21 \leq x < 0,22) = F(0,22) - F(0,21) = 0,048 - 0,044$$

$$= \boxed{4\,10^{-3}}$$

$$* \ \frac{\mathbb{P}(D_1+D_2=3 \cap D_1=2)}{\mathbb{P}(D_1+D_2=3)} = \frac{4\,10^{-3}}{0,013} \simeq 0,307$$

2.8 [*ver* **Ejercicio 2.4**] El tiempo en segundos que tarda una fuente de polonio en emitir k partículas alfa es una variable aleatoria T_k con función densidad

$$f_{T_k}(t) = \frac{(1/2)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-t/2} \mathbf{1}\{t > 0\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(T_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_1 > 5 | T_1 > 2)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(T_3 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_3 > 5 | T_3 > 2)$.

$$F_{T_k}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\frac{t}{2}} \mathbb{1}\{t>0\}\, dt$$

$$= \int_0^t \frac{(\frac{1}{2})^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt$$

a

✱ $\mathbb{P}(T_1>3) = 1 - \mathbb{P}(T\leq 3) = 1 - F_{T_1}(3)$

$* \; F_{T_1}(3) = \int_0^3 \frac{(\frac{1}{2})^1}{(1-1)!} \underset{1}{3^0} e^{-\frac{3}{2}}\, dt = \int_0^3 \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\, dt = 0{,}77$

✱ $1 - 0{,}77 \simeq \boxed{0{,}22}$

✱ $\mathbb{P}(T_1>5 | T_1>2) = 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq 5 | T_1 > 2)$

$* \; \mathbb{P}(T_1\leq 5 | T_1>2) = \frac{\mathbb{P}(T_1\leq 5 \cap T_1>2)}{\mathbb{P}(T_1>2)} = \frac{\mathbb{P}(2 < T_1 \leq 5)}{\mathbb{P}(T_1>2)} = \frac{F_{T_1}(5) - F_{T_1}(2)}{1 - F_{T_1}(2)}$

① $F_{T_1}(2<t\leq 5) = \int_2^5 \frac{(\frac{1}{2})^1}{0!} t^0 e^{-\frac{t}{2}}\, dt \overset{!}{=} \boxed{0{,}28}$

② $1 - F_{T_1}(2) \overset{!}{\simeq} \boxed{0{,}36}$

$\Longrightarrow \frac{0{,}28}{0{,}36} \simeq 0{,}761$

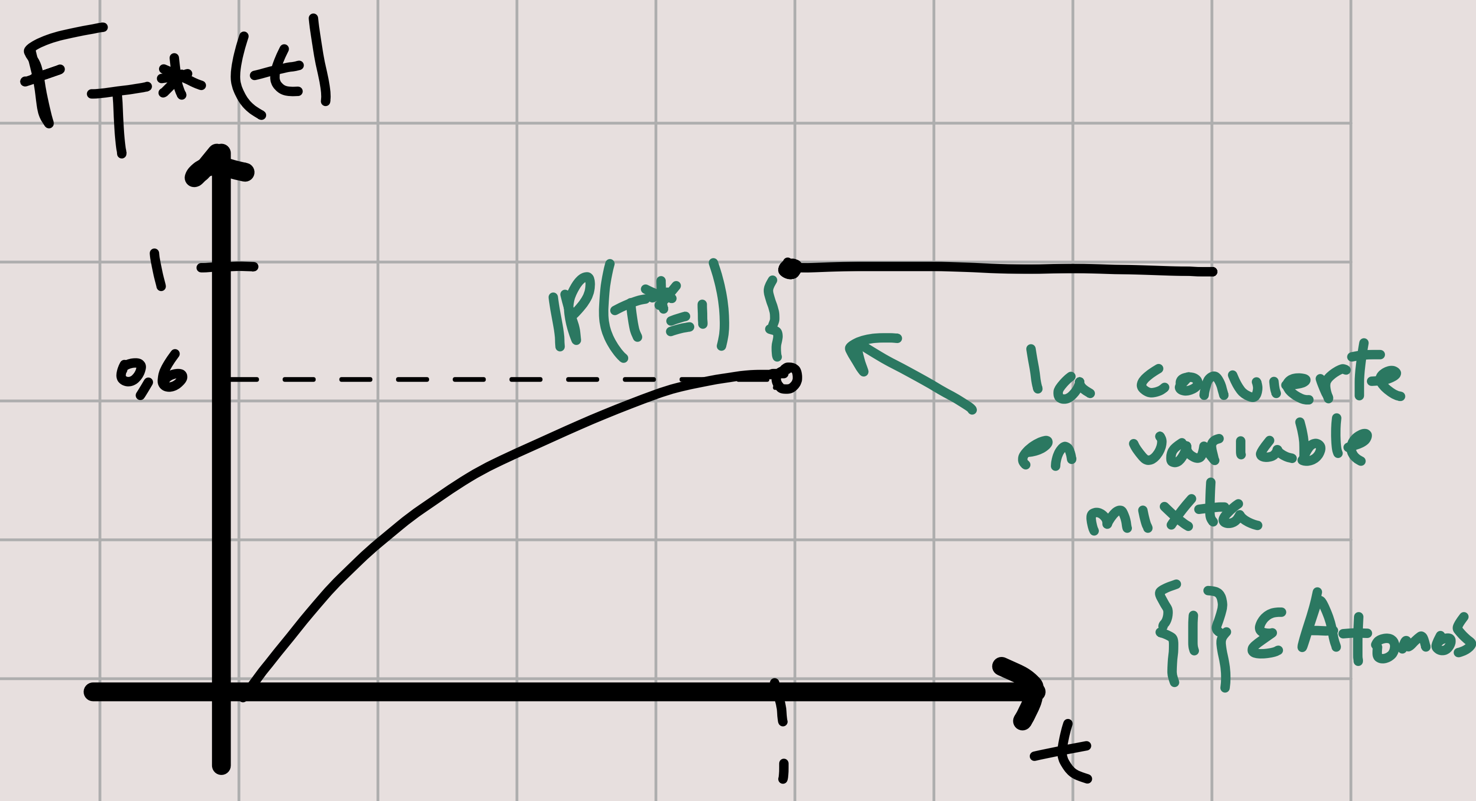
$* \; \mathbb{P}(T_1>5 | T_1>2) = 1 - 0{,}76 \simeq \boxed{0{,}23}$

2.12 Sea T la duración en años del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema electrónico cuya función de distribución es $F_T(t) = (1 - e^{-t})\,\mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**a**) Hallar y graficar la función de distribución de $T^* = \text{mín}(T, 1)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(T^* = 1)$.

(a) $$T^* = \begin{cases} T & T < 1 \\ 1 & T > 1 \\ 0 & T < 0 \end{cases}$$



(b) $$\mathbb{P}(T^*=1) = F_T(1) - \underbrace{F_T(1^-)}_{\lim_{t\to 1^-}(F_T(t))}$$
$$= 1 - (1-e^{-1}) = \boxed{0{,}36}$$

$$F_{T^*}(t) = (1-e^{-t})\,\mathbb{1}\{0<t<1\} + 1\,\{t \geq 1\}$$

2.16 Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de intensidad $1/2$. Hallar una función h tal que la variable aleatoria $h(X)$ tenga la función de distribución de la variable aleatoria T^* definida en el **Ejercicio 2.12**.

$$F_X(x) = F_T(t) \Rightarrow t = \underbrace{F_T^{-1}(\overbrace{F_X(x)}^{u})}$$ sabiendo que $F_T(t) \sim U(0,1)$, $\underline{F_T(t) = u}$

$$h(X) = (F_T^{-1} \circ F_X)(x)$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-t} = u$$
$\Rightarrow$ ① $t = -\ln(1-u)$
$\Rightarrow$ ② $1 = u$

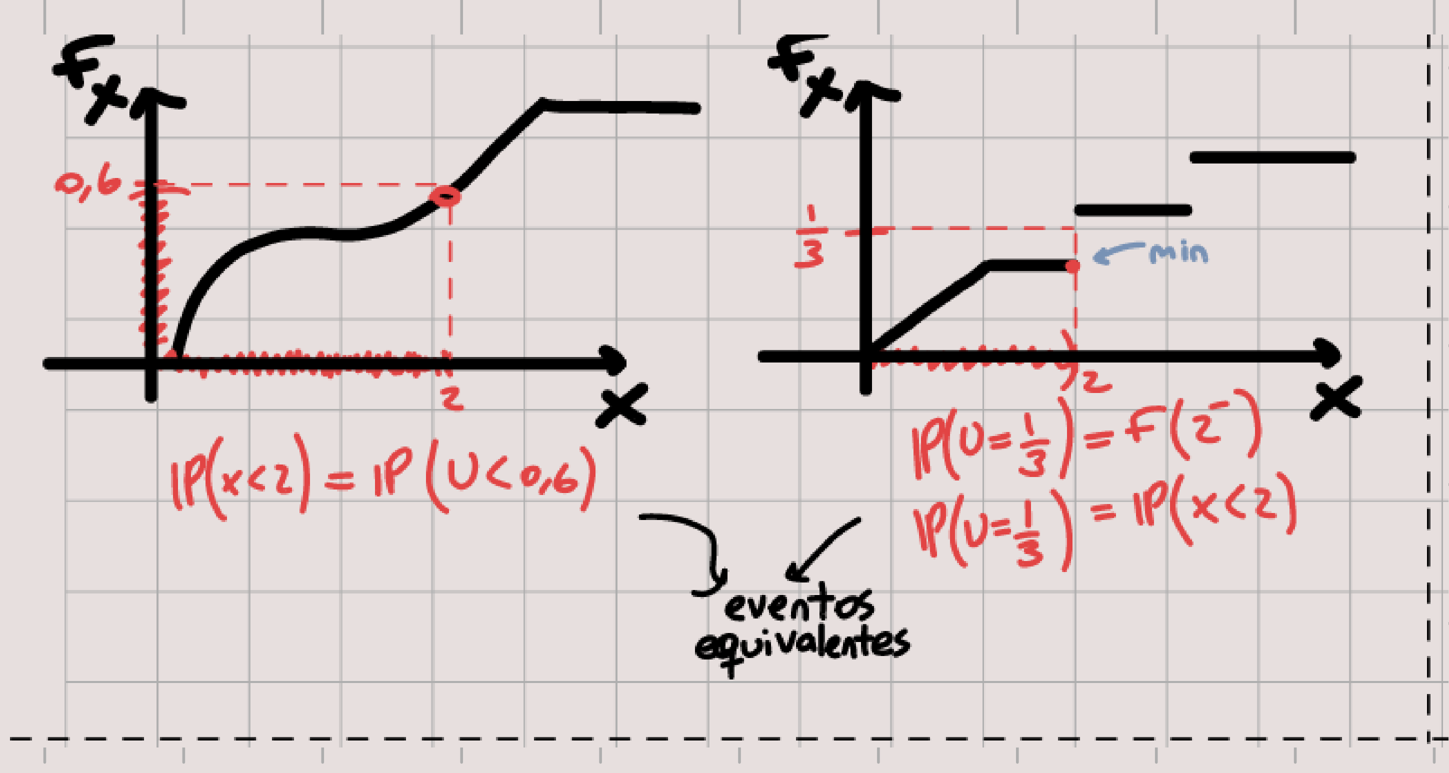
$$\Rightarrow F_T^{-1}(u) \begin{cases} -\ln(1-u) & \text{si } 0<t<1 \\ 1 & \text{si } t>1 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$$

¿?

* Ahora reemplazo u por $F_X(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t>0$ $\longrightarrow$ $h(X) = (F_T^{-1} \circ F_X)(x)$

$$t = h(X) = \begin{cases} -\ln(1-\lambda e^{-\lambda x}) & \text{si } 0<t<1 \\ 1 & \text{si } t>1 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$$

?



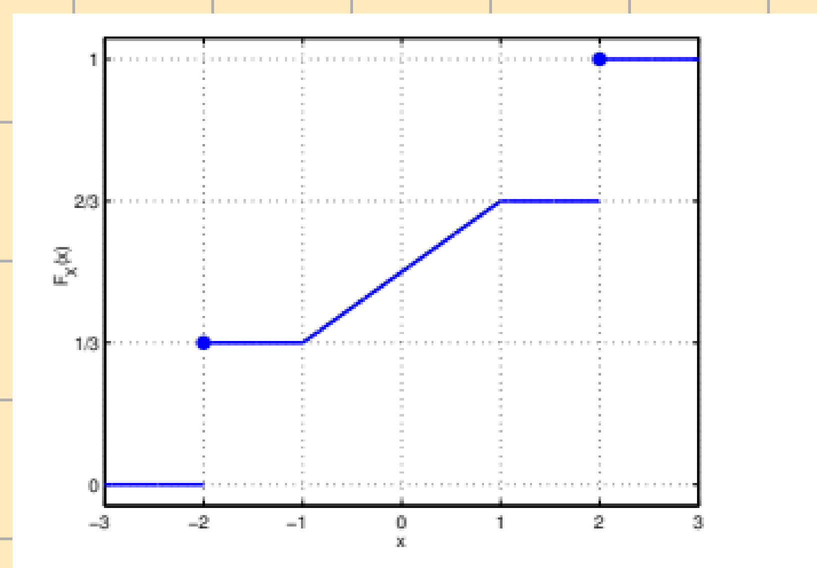
Teorema 7.3 (Simulación). Sea U una variable aleatoria con distribución $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ (uniforme o número random), F_X una función de distribución, entonces $X := F^{-1}(U)$ es una variable aleatoria con distribución dada por F_X.

Demostración. Notar que son equivalentes: $F_X^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F_X(x)$ (no es tan sencillo como parece, recordar que F_X^{-1} es la inversa generalizada).

Luego

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbf{P}(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F(x)$$

2.15 Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,1]$. Hallar una función h tal que la variable aleatoria $h(U)$ tenga la función de distribución dada en **Ejercicio 2.2**. Simular una muestra de 10.000 valores de dicha variable aleatoria, graficar la función de distribución empírica y comparar con la original.



$F_X(x) = F_{h(U)}(h(u)) \longrightarrow x = F_X^{-1}(\overbrace{F_h(h(U))}^{\omega})$

$F_X(x) = \omega$ $\qquad x = (F_X^{-1} \circ F_h)(h(U))$

$\omega \sim U$

$F_X(x) = \frac{1}{3}\mathbb{1}\{-2<x<-1\} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)\mathbb{1}\{-1<x<1\} + \frac{2}{3}\mathbb{1}\{1<x<2\} + \mathbb{1}\{x>2\}$

$F_X(x) = \omega$

1. $\omega = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\omega = 1$
2. $\omega = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 6\omega - 3 = x$
3. $\omega = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3\omega}{2} = 1$
4. $\omega = 1 \Rightarrow \omega = 1$

$$F_X^{-1}(\omega) = x \begin{cases} 3\omega \\ 6\omega - 3 \\ \frac{3}{2}\omega \\ \omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ahora reemplazo los ω por

2.17 Sea T el tiempo hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbf{1}\{t > 0\},$$

donde $\alpha, \beta > 0$.

(**a**) Hallar la función de distribución y la función densidad de T.

$$F_T(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds} \quad \mathbb{1}\{t>0\}$$

Funcion de intensidad de Fallas

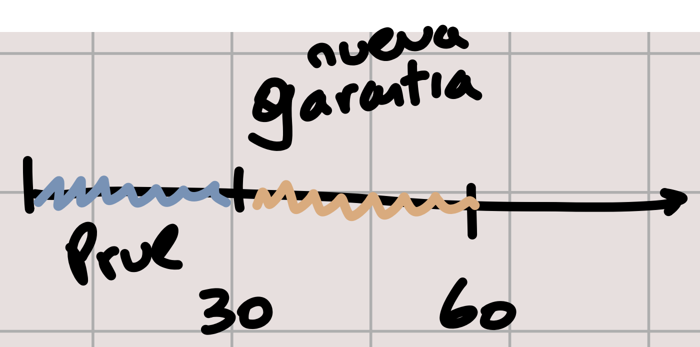
$$* \int_0^t \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\beta-1} ds = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1}{\alpha^{\beta-1}} \int_0^t s^{\beta-1}\,ds = \frac{\beta\,\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}\,\alpha^{\beta}}\,\frac{s}{\beta}\Big|_0^t = \frac{\cancel{\beta}\,t^{\beta}}{\alpha^{\beta}\,\cancel{\beta}} = \frac{t^{\beta}}{\alpha^{\beta}}$$

$$\boxed{F_T(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad \mathbb{1}\{t>0\}}$$

2.18 La función de distribución del tiempo T (en días) hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial es

$$F_T(t) = \left(1 - e^{-\sqrt{t/60}}\right) \mathbf{1}\{t > 0\}.$$

El producto tiene una garantía de 30 días. Debido a la gran cantidad de reclamos se decidió someter todos los productos a una prueba de 30 días y descartar los que fallan. Hallar la probabilidad de que un producto no descartado falle antes de los siguientes 30 días.



$T =$ " cant de dias hast fallo "

$$\mathbb{P}(30<T<60 \mid \text{no fue descartado en la prueba})$$

$$\mathbb{P}(30<T<60 \mid T>30) = \mathbb{P}\frac{(30<T<60 \cap T>30)}{\mathbb{P}(T>30)} = \frac{\mathbb{P}(30<T<60)}{\mathbb{P}(T>30)}$$

$$* \ \mathbb{P}(T>30) = 1 - \mathbb{P}(T\leq 30) = 1 - F(30) \cong \boxed{0{,}49}$$

$$* \ \mathbb{P}(30<T<60) = F(60) - F(30) = 0{,}63 - 0{,}5 \cong \boxed{0{,}13}$$

$$* \ \frac{\mathbb{P}(30<T<60)}{\mathbb{P}(30<T)} = \frac{0{,}13}{0{,}49}$$

$$\boxed{\cong 0{,}2}$$

2.19 El diámetro X (en mm.) de las arandelas fabricadas por una máquina tiene como función de densidad a

$$f_X(x) = \frac{2x}{225}\mathbf{1}\{0 < x < 15\}.$$

Un sistema de control descarta las arandelas cuyo diámetro es inferior a 3 o superior a 12.

(a) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas no descartadas.

(b) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas descartadas.

$$f_X(x) = \frac{2x}{225}\mathbb{1}\{0<x<15\} \longrightarrow F_X(x) = \int_0^x \frac{2x}{225}dx\,\mathbb{1}\{0<x<15\}$$

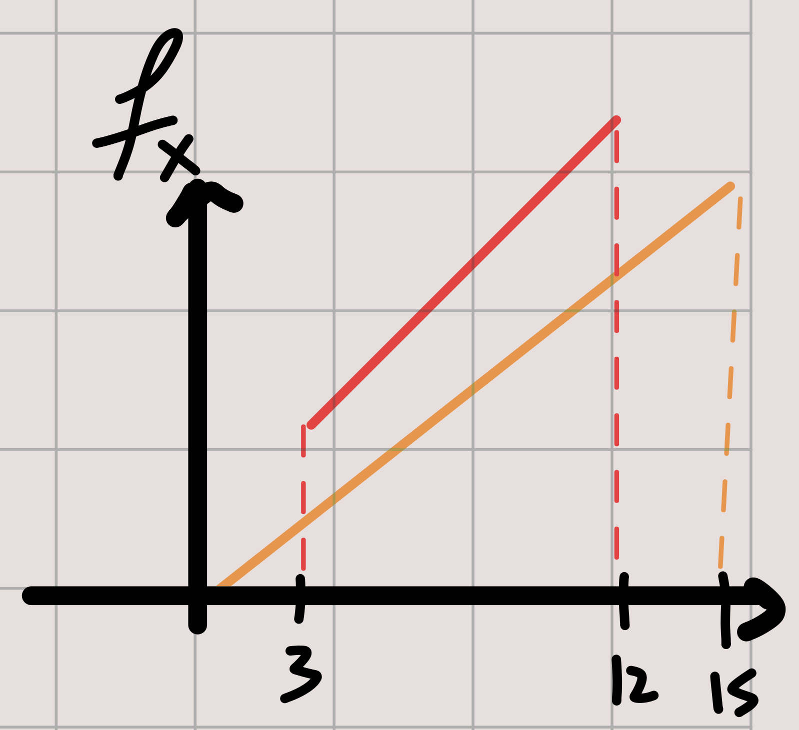
$$= \frac{2x^2}{450}\Big|_0^x = \boxed{\frac{x^2}{225} = F(x)}$$

(a) $$f_{X|X\in A}(x) = \frac{f_X(x)\mathbb{1}\{x\in A\}}{\mathbb{P}(X\in A)} = \frac{\frac{2x}{225}\mathbb{1}\{3<x<12\}}{\mathbb{P}(x\in A)} \quad (*)$$

A = "no descartadas" = [3, 12]

$$\mathbb{P}(x\in A) = \mathbb{P}(3<X<12) = F(12) - F(3) = 0{,}64 - 0{,}04 = 0{,}6 = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$(*) \quad \frac{\frac{2x}{225}\mathbb{1}\{3<x<12\}}{\frac{3}{5}} = \frac{2x}{135}\mathbb{1}\{3<x<12\}$$



(b) B = "Arandelas descartadas"

$$f_{X|X\in B}(x) = \frac{f_X(x)\mathbb{1}\{x\in B\}}{\mathbb{P}(X\in B)}$$

$$* \ \mathbb{P}(X\in B) = \mathbb{P}(X\in[0,3] \cup X\in[12,15]) \overset{me}{=} \mathbb{P}(0<X<3) + \mathbb{P}(12<X<15) = F(3) - F(0) + F(15) - F(12) = 0{,}04 + 1 - 0{,}64$$

$$= 0{,}4 = \frac{2}{5}$$

$$* \ f_X(x)\mathbb{1}\{x\in B\} = \frac{2x}{225}\mathbb{1}\{x\in B\} \longrightarrow \frac{\frac{2x}{225}\mathbb{1}\{x\in B\}}{\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{x}{4}\mathbb{1}\{x\in B\}}$$

2.20 Sea X, la distancia (en decímetros) del punto de impacto al centro de un blanco circular, una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{2}{7}\mathbf{1}\{0 \leqslant x < 2\} + \frac{10-2x}{21}\mathbf{1}\{2 \leqslant x < 5\}. \longrightarrow \text{decimetros}$$

(a) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto menores que 30 cm. → centimetros

(b) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto mayores que 30 cm.

ⓐ

$$f_{X|X<30}(x^*) = \frac{\frac{2}{7}\mathbb{1}\{0<x<2\} + \frac{10-2x}{21}\mathbb{1}\{2 \leq x < 5\}}{\mathbb{P}(X<3)}$$

$$\mathbb{P}(X^*<3) = \int_0^3 f_X(x^*)\,dx = \int_0^2 \frac{2}{7}dx + \int_2^3 \frac{10-2x}{21}dx = \frac{2}{7}2 + \left.\frac{10x - x^2}{21}\right|_2^3$$

$$= \frac{4}{7} + 1 - \frac{16}{21}$$

$$= \boxed{\frac{17}{21}}$$

$$\circledast \quad \frac{\frac{2}{7}}{\frac{17}{21}}\mathbb{1}\{x \in A\} + \frac{10-2x}{\frac{17}{21}}\mathbb{1}\{x \in A\}$$

$$\boxed{\circledast \quad \frac{6}{17}\mathbb{1}\{x\in A\} + \frac{210-42x}{17}\mathbb{1}\{x \in A\}}$$

ⓑ

$$f_{X|X\in\bar{A}}(x) = \frac{f_X(x)\,\mathbb{1}\{x\in\bar{A}\}}{\mathbb{P}(X\in\bar{A})} = \frac{f_X(x)\,\mathbb{1}\{x\in\bar{A}\}}{1-\mathbb{P}(A)} = \boxed{\frac{10-2x}{21}\mathbb{1}\{2<x<3\}}$$

2.21 Una urna contiene 3 bolas verdes, 2 amarillas y 3 rojas.

(**a**) Se seleccionan 4 bolas al azar (sin reposición). Sean X la cantidad de bolas verdes observadas e Y la cantidad de bolas amarillas observadas. Hallar la función de probabilidad conjunta y las funciones de probabilidad marginales. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de bolas verdes o amarillas observadas no supere a 2?

(**b**) Repetir el inciso anterior para extracciones con reposición.

a

3V
2A
3R

→ 4 extracciones sin reposición al azar

X = "cant verdes"
Y = "cant amarillas"

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0, Y=0) =$ no se puede

$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{R}{R}\ \frac{R}{R}\ \frac{V}{R}\ \frac{R}{V} = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{8}{4}}$

hipergeométrica

N = total
x = cant de exitos
n = extracciones
d = individuos exito
N−d = no son

discreta

$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = P_{XY}(x,y) = \dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{4-x-y}}{\binom{8}{4}}$, $x \in \{0,1,2,3\}$, $y \in \{0,1,2\}$, $(x,y) \in (X,Y) - \{(0,0),(3,2)\}$

Probabilidad marginal

$X = \{0,1,2,3\}$

$Y = \{0,1,2\}$

$P_X(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}_Y} P_{XY}(x,y)$

$P_Y(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} P_{XY}(x,y)$

Y \ X	0	1	2	3	P_Y
0	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{3}{14}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{7}$
2	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	0	$\frac{3}{14}$
P_X	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

$P_X(1) = \sum_{y \in \mathbb{R}_Y} P_{XY}(1,y) = \frac{3}{7}$

$$= \mathbb{P}\big((10)\cup(01)\cup(11)\cup(20)\cup(02)\big)$$

$$\mathbb{P}(X+Y\le 2) = P_{XY}(1,0)+P_{XY}(01)+P_{XY}(11)+P_{XY}(20)+P_{XY}(02)$$

$$\frac{3}{70}+\frac{1}{35}+\frac{9}{35}+\frac{9}{70}+\frac{3}{70}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Y \ X	0	1	2	3	P_Y
0	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{3}{14}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{7}$
2	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	0	$\frac{3}{14}$
P_X	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

(b) multinomial

↳ repetir N experimentos

$$\mathbb{P}(X=1,Y=2)=\underbrace{\binom{4}{1}\binom{4-x}{y}}_{\text{permutaciones}}\underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)^{x}\left(\frac{2}{8}\right)^{y}\left(\frac{3}{8}\right)^{4-x-y}}_{\text{probabilidades}}$$

cantidad

---

laplace (1)

Al azar $\binom{X=1}{Y=2}$

$$\#CF = \binom{4}{1}\,\underline{3}\,\binom{3}{2}\underline{2}\ \ \underline{2}\ \ \underline{3} = 432$$

favorables

$$\#CP = 8^4 = 4096 \longrightarrow \frac{432}{4096}=\boxed{\frac{27}{256}}$$

total

---

(2) con probobabilidades

$\binom{X=1}{Y=2}$

$$\binom{4}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^{1}\binom{3}{2}\left(\frac{2}{8}\right)^{2}\binom{1}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^{1}=\boxed{\frac{27}{256}}$$

---

multinomial

$$\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1}=\frac{4!}{2!}=12$$

↳ los que tienen mas de 1

Distribución multinomial: dado un experimento multinomial que consiste en n ensayos independientes, con una probabilidad p_k de obtener el resultado E_k para cada k, entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_1, ..., X_k$ (que representan el número de ocurrencias de $E_1, ..., E_k$) es:

anagrama $\frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}$

$$f(x_1,...,x_k;p_1,...,p_k,n)=\binom{n}{x_1,\ldots,x_k}p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_k^{x_k}$$

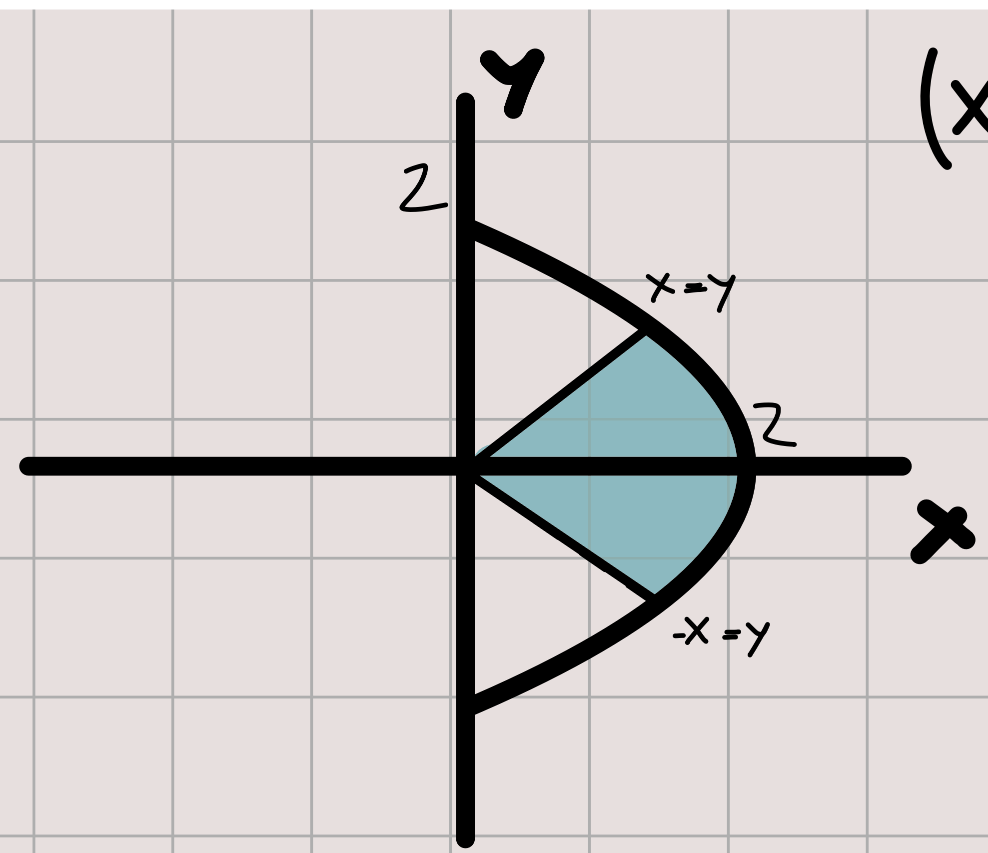
Ejemplo: un aeropuerto tiene 3 pistas. Las probabilidades de que cada una de las pistas sean utilizadas por un avión son $P_1=\frac{2}{9}$, $P_2=\frac{1}{16}$, $P_3=\frac{11}{18}$. ¿Cuál es la probabilidad de que 6 aviones que llegan al azar se distribuyan de la siguiente manera: 2, 1, 3? Resolvemos: $f(2,1,3;\frac{2}{9},\frac{1}{16},\frac{11}{18},6)=\binom{6}{2,1,3}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{16}\right)^1\left(\frac{11}{18}\right)^3=0,1127$.

2.22 Sea (X,Y) un punto con distribución uniforme sobre el semicírculo $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 4,\, x \geqslant 0\}$.

(a) Calcular $\mathbf{P}(|Y| < X)$.

(b) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(c) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?



$(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 4,\; x \geq 0$ $\quad X,Y \sim U$

a $\quad \mathbb{P}(|Y|<X) = \mathbb{P}(Y<X \cup Y>-X)$

$\uparrow$ me

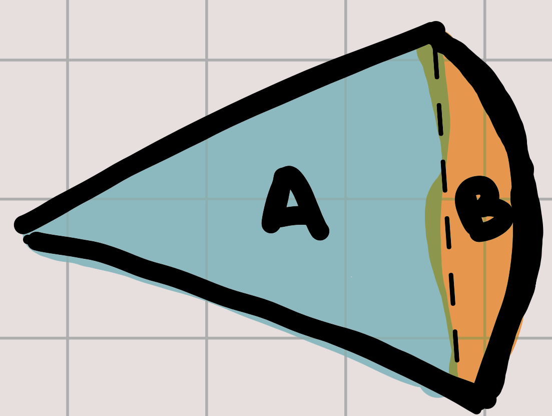
$= \mathbb{P}(Y<X) + \mathbb{P}(Y>-X)$

$= \boxed{\mathbb{P}(-X<Y<X)}$

Area de $|Y|<X \cap \Lambda$ encerrada

$\pi r^2 = \text{Area circulo}$

$\frac{\pi r^2}{2} = \pi 2 = \boxed{\pi 2}$ $\quad (X,Y) \sim U$



$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}\{x^2+y^2 \leq 4, x>0\}$

$\Rightarrow$ paso a polares

$x = R\cos(\varphi)$

$y = R\operatorname{sen}(\varphi)$

$J = R$

$\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$R \in [0,2]$

$\Rightarrow \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} R \frac{1}{2\pi}\, d\varphi\, dR$

$= \frac{R^2}{2}\Big|_0^2 \frac{\cancel{2}\pi}{4} \frac{1}{2\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \quad \forall x \in R_X$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\, dy\, \mathbb{1}\{x^2+y^2 \leq 4\} \mathbb{1}\{x>0\}$

despejo y

$\hookrightarrow$ $y \leq \pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$

$= \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2\pi}\, dy \quad = \boxed{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi} \mathbb{1}\{0<x<2\}}$

$x \in \mathbb{R}_X$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}dx \, \mathbb{1}\{x^2+y^2 \leq 4\} \, \mathbb{1}\{x>0\}$$

despejo x

$\mathbb{1}\{-\sqrt{4-y^2} < x < \sqrt{4-y^2}\}$

$$= \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{2\pi}dx \qquad = \boxed{\frac{\sqrt{4-y^2}}{\pi} \mathbb{1}\{-2<y<2\}}$$

hardodeo el rango

(c) X e Y son ind? $\longrightarrow$ por grafico NO!

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}\{\ \} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi}\frac{\sqrt{4-y^2}}{\pi}\mathbb{1}\{\ \}$$

$$\frac{1}{2\pi} \neq \frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi}\frac{\sqrt{4-y^2}}{\pi} \longrightarrow \text{No son ind!}$$

2.23 Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}.$$

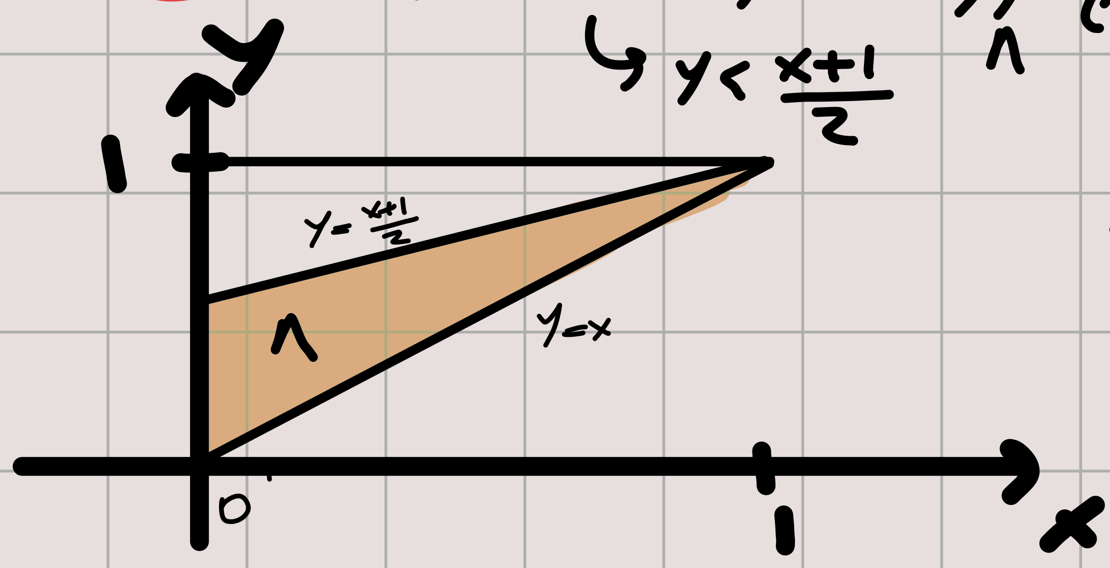
(**a**) Calcular $\mathbf{P}(X+1>2Y)$.

(**b**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**c**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

(a) $\mathbb{P}(X+1>2Y) = \iint_{\Lambda} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$\hookrightarrow y < \frac{x+1}{2}$



$$= \int_0^1 \int_x^{\frac{x+1}{2}} 8xy \, dy\,dx \approx \boxed{\frac{5}{12}}$$

(b) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 8xy\,dy \quad \mathbb{1}\{0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

$x \leq y \leq 1$

$$= \int_x^1 8xy\,dy = 8x \left.\frac{y^2}{2}\right|_x^1 = 8x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right) = \boxed{4(x-x^3)\,\mathbb{1}\{0 \leq x \leq 1\}}$$

numeros

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 8xy\,dx\, 𝟙\{0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

$\hookrightarrow 0 \leq x \leq y$

numeros

$$= \int_0^y 8xy\,dx = 8y\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = 8\,\frac{y^3}{2} = 4y^3 \quad 𝟙\{0<y<1\}$$

ⓒ X e Y por grafico → **No son ind!**

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

$$8xy\,𝟙\{\} = 4(x-x^3)\,4y^3\,𝟙\{\}\,𝟙\{\}$$

$$8xy \neq 4(x-x^3)4y^3 \longrightarrow \text{No son ind!}$$

2.24 Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**a**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**b**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

ⓐ $$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\,e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}\pi}\,e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dy = \boxed{\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}} \rightarrow x\in\mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}\pi}\,e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx = \boxed{\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}} \rightarrow y\in\mathbb{R}$$

ⓑ $$f_X(x)\,f_Y(y) = f_{(XY)}(x,y)$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \neq \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\,e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)} \rightarrow \text{NO son IND!}$$

2.25 Una fábrica textil produce rollos de tela con dos tipos de fallas: de tejido y de teñido. En cada rollo, la cantidad de fallas de tejido tiene distribución Poisson de parámetro 2 y la cantidad de fallas de teñido tiene distribución Poisson de parámetro 4. Ambas cantidades son independientes.

(**a**) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela no tenga fallas.

(**b**) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela tenga exactamente una falla.

(**c**) Dado que un rollo de tela tiene exactamente una falla, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea una falla de tejido?

(a) A = " cant de fallas de tejido"

B = " cant de fallas de teñido"

$A \sim Poi(2)$

$B \sim Poi(4)$

$f_A(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}, \quad x \in \mathbb{Z}_0$

$f_B(y) = \frac{4^y e^{-4}}{y!}, \quad y \in \mathbb{Z}_0$

son ind

$\mathbb{P}(A=0 \cap B=0) = \mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=0)$

$\mathbb{P}(A=0) = f_A(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2}$

$\mathbb{P}(B=0) = f_B(0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = e^{-4}$

$\mathbb{P}(A=0 \cap B=0) = e^{-2}\, e^{-4} = \boxed{e^{-6}}$

(b) $\mathbb{P}(\text{"tenga solo 1 falla"}) = \mathbb{P}((A=1 \cap B=0) \cup (A=0 \cap B=1)) \overset{me}{=} \mathbb{P}(A=1 \cap B=0) + \mathbb{P}(A=0 \cap B=1)$

$A+B=1$

$\overset{ind}{=} \mathbb{P}(A=1)\mathbb{P}(B=0) + \mathbb{P}(A=0)\mathbb{P}(B=1)$

$= 2e^{-2} \cdot e^{-4} + e^{-2}\, 4e^{-4}$

$= e^{-6}(2+4)$

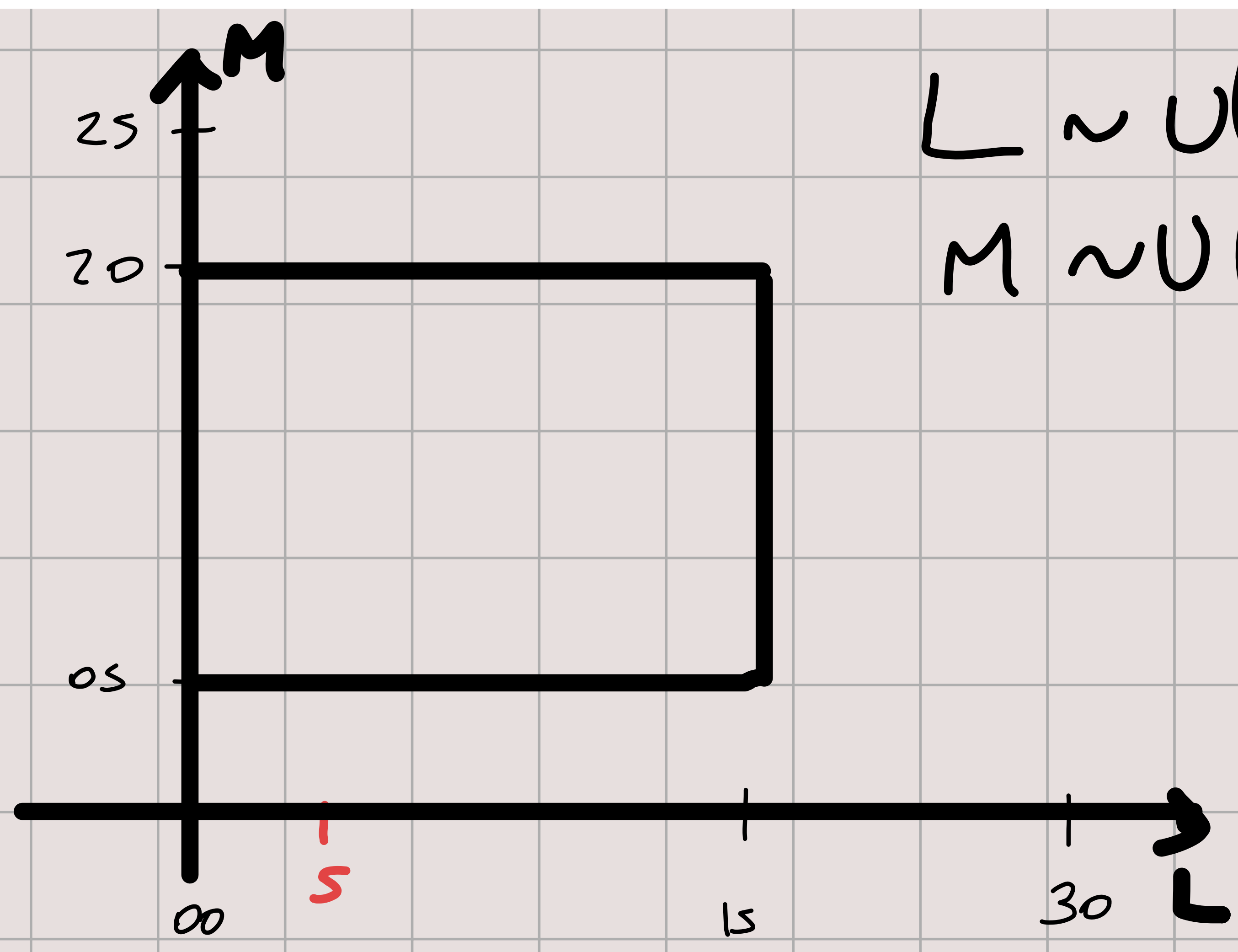
$= \boxed{6e^{-6}}$

$\mathbb{P}(A=1) = f_A(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$

$\mathbb{P}(B=1) = f_B(1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 4e^{-4}$

(c) $\mathbb{P}(A=1 \mid A+B=1) = \frac{\mathbb{P}(A=1 \cap A+B=1)}{\mathbb{P}(A+B=1)} = \frac{\mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=0)}{\mathbb{P}(A+B=1)} = \frac{2e^{-6}}{6e^{-6}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

2.26 Lucas y Monk quedaron en encontrarse en el bar del CEI a las 18:00. El horario de llegada de Lucas, L, es uniforme entre las 18:00 y las 18:15. Lucas espera 15 min. a Monk y si no llega se va. El horario de llegada de Monk, M, es independiente del de Lucas y se distribuye uniformemente entre las 18:05 y 18:20. Monk es más impaciente que Lucas y espera como máximo 5 min. antes de irse. Calcular la probabilidad de que Lucas y Monk se encuentren.



$L \sim U(0,15)$

$M \sim U(5,20)$

lucas espera 15min

Monk espera 5min

$f_L(x) = \frac{1}{15}\mathbb{1}\{0<l<15\}$

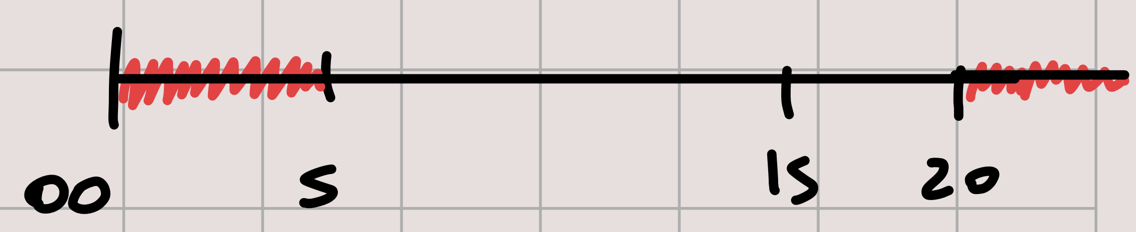
$f_M(y) = \frac{1}{15}\mathbb{1}\{5<M<15\}$

Quedan estas relaciones

$f_{XY}(xy) = \frac{1}{15^2}\mathbb{1}\{0<l<15\}\mathbb{1}\{5<m<20\}$

① Si lucas llega primero

Si monk llega primero



$(5,15) \cup (15,20)$

①