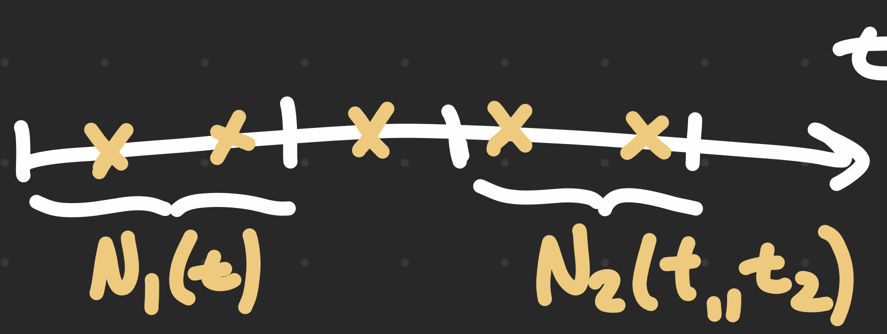
Proceso puntual de Poisson

conjunto de puntos aleatorios

① $N_1(t_1,t_2)$ = "numero de eventos durante un intervalo"



N_1 y N_2 son ind

$PP(\lambda)$

λ tasa de ocurrencia

$$p_N(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$N_i \sim Poi(\lambda(t_2 - t_1))$$

intervalo
distancia de un continuo

② T "tiempo entre 2 eventos consecutivos"

$T \sim Exp(\lambda)$

$$F_T(t) = 1 - \mathbb{P}(T>t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t\geq 0 \end{cases}$$

$$P(T>t) \begin{cases} 1 & t<0 \\ P(N(t)=0) & \end{cases}$$

Ejemplo 1

Los tiempos (en minutos) entre la llegada de personas a la cola de un cajero automático son independientes y con distribución exponencial de parámetro 1/2.

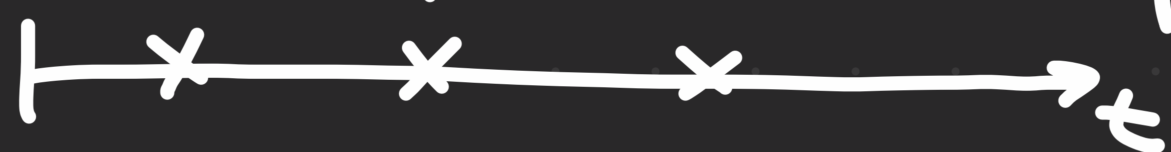
a. Hallar la probabilidad de que en 5 minutos llegue al menos una persona

b. Hallar la prob. de que pasen más de 2 minutos hasta que llegue la 1° persona

c. Hallar la prob. de que pasen mas de 10 min. entre la 8va y la 10ma persona

Ejemplo 1

arribo de personas $\quad PP(\frac{1}{2})$



a) cant de personas en 5 minutos

N = "cant de per en 5 min"

$$N_{(5)} \sim Poi(\tfrac{1}{2}\, 5) = Poi(\tfrac{5}{2})$$

$$p_{N_{(5)}}(n) = \frac{(\frac{5}{2})^n e^{-\frac{5}{2}}}{n!}$$

$$\mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{Al menos}\\ \text{1 per en 5 min}\end{matrix}\right) = \mathbb{P}(N_5 \geq 1)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(N_{(5)} = 0)$$

$$= 1 - \frac{(\frac{5}{2})^0 e^{-\frac{5}{2}}}{0!} = e^{-\frac{5}{2}}$$

$$\boxed{= 1 - e^{-\frac{5}{2}}}$$

b. Hallar la prob. de que pasen más de 2 minutos hasta que llegue la 1° persona

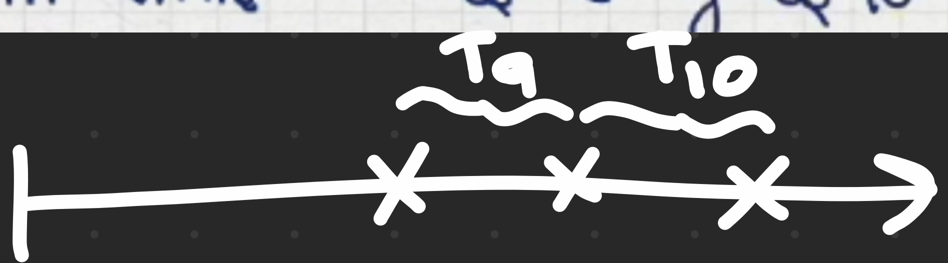
$$\mathbb{P}(T_1 > 2) = 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq 2)$$

$$T_1 \sim Exp(\tfrac{1}{2}) \longrightarrow F_{T_1}(2) = \int_0^2 \tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}\, dt = 1 - e^{-1}$$

$$\mathbb{P}(T_1 > 2) = 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1}$$

Func de supervivencia

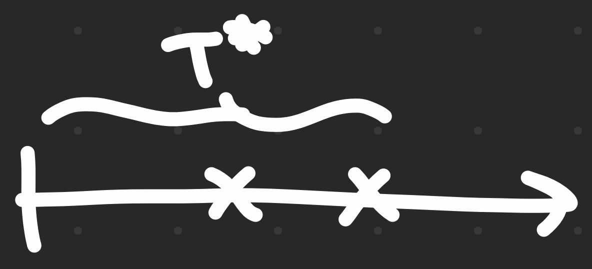
c. Hallar la prob. de que pasen mas de 10 min. entre la 8va y la 10ma persona



$$\mathbb{P}(T_9 + T_{10} > 10) \qquad T^* = T_9 + T_{10} \sim \Gamma(2, \lambda)$$

$$\circledast \quad \mathbb{P}(T^*>10)=\sum_{n=0}^{1} \frac{e^{-\frac{10}{2}}\left(\frac{10}{2}\right)^n}{n!} = e^{-5} + 5e^{-5} = 6e^{-}$$

otra forma equivalente $\circledast$



$$\mathbb{P}(T^*>10)=\mathbb{P}(N_{(t_9,t_{10})}<2)=\mathbb{P}(N_{(10)}<2)$$

$$=\mathbb{P}(N_{(10)}=0)+\mathbb{P}(N_{(10)}=1)$$

Adelgazamiento (coloreo

$$\longrightarrow \quad X \sim Poi(\lambda_x t)$$

$$Y|X \sim Bin(p)$$

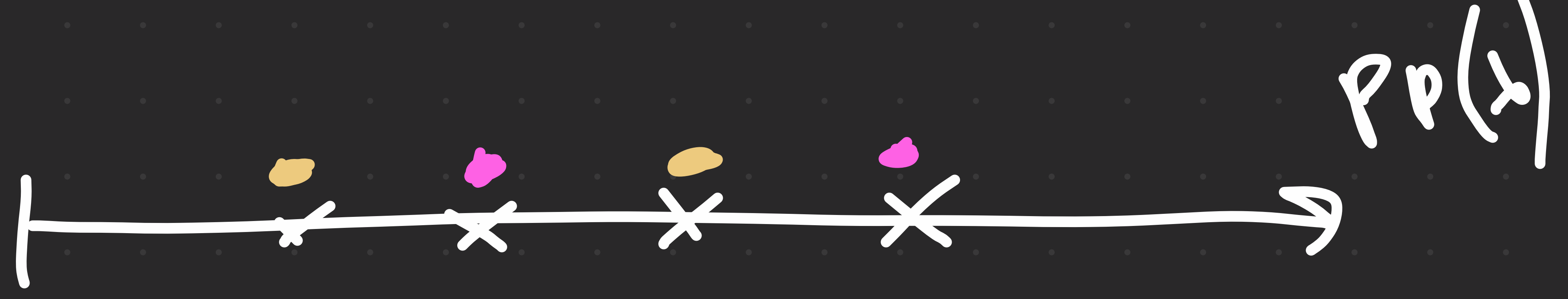
hay eventos $\xrightarrow{\text{tipo I}} p$

$\searrow 1-p$ tipo II

$$\Rightarrow Y \sim Poi(\lambda_x p\, t)$$

$$X-Y \sim Poi((1-p)\lambda_x)$$

$$\circledast \quad N(t) = N_I(t) + N_{II}(t)$$



Ejemplo

Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 25 m. La máquina detecta cada falla con prob. 99 y corta el alambre en la primera falla detectada antes de los 25 metros o a los 25 metros si no se detectan antes.

a. Hallar la media de la longitud de los rollos de alambre

b. Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

L = "long de alambre"

E(L) no conozco dist de L

(*) $\mathbb{P}$("detectar falla") = 0,95

$| \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad , PP(\lambda)$

$\lambda = \frac{1}{25}$

L no la conozco depende del corte

$$T/L \sim Bin(\lambda, pt)$$

$$L = \begin{cases} T & T < 25 \\ 25 & T \geq 25 \end{cases}$$

T = "metros hasta 1° falla detectada"

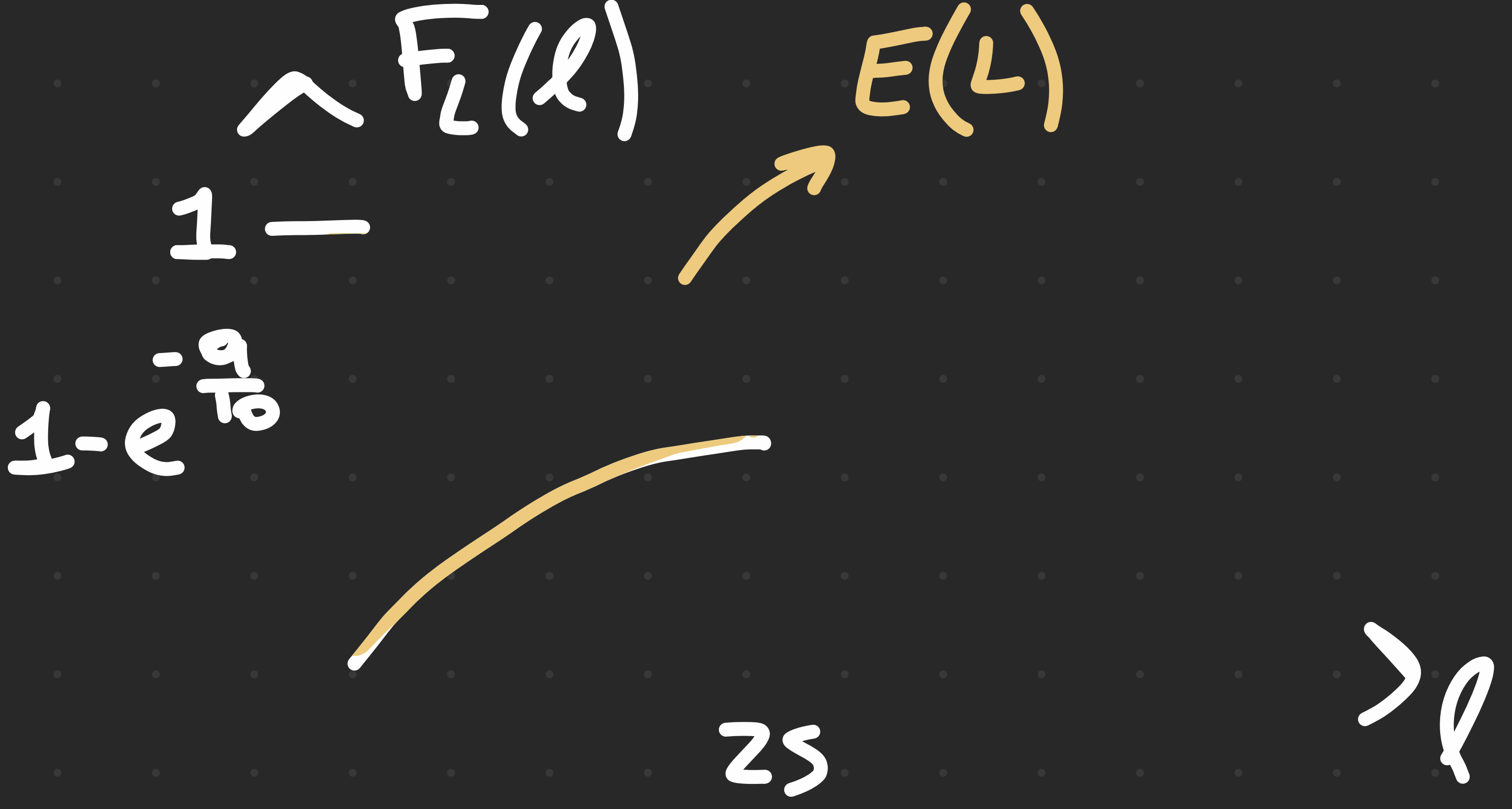
Adelgazam

$$\overbrace{|\ \otimes}^{T_1}\ \overbrace{\ \times\ }^{T_2}\ \overbrace{\ \times\ }^{T_3}\ \overbrace{\ \otimes}^{T_4}\ ,\ PP(\lambda)$$

$$\underbrace{|\ \otimes}_{T_1^*}\ \underbrace{\qquad\qquad\ \otimes}_{T_2^*}\ ,\ PP(\lambda\ p)$$

$T^* \sim \mathcal{E}(\lambda p)$

$$L = \begin{cases} T^* & T^* < 25 \\ 25 & T^* \geq 25 \end{cases}$$



$E(L)$

$$E(L) = \int_0^{25} 1-\left(1-e^{-\frac{9}{230}t}\right) dt$$

$$PP(\lambda) \begin{cases} \xrightarrow{p} PP(\lambda p) \\ \xrightarrow{1-p} PP(\lambda(1-p)) \end{cases}$$

independientes

$$\overbrace{|\ \ \times}^{T_1}\ \overbrace{\ \times}^{T_2}\ \overbrace{\ \times}^{T_3}\ \overbrace{\ \times}^{T_1}\ ,$$

$T_3 \leq 20$

$\mathbb{P}(T_i \leq 20)$ depende de i

N = "cant de intervalos hasta la 1er alarma"

$\underset{>20}{T_1}$ $\underset{>20}{T_2}$ $\underset{\leq 20}{T_i}$ $\sim$ geométrica

suma alarma

$S_N = \sum^{3} T_i$

$N = 3$

$N \sim geo(p)$

$! \; p = \mathbb{P}(T_i \leq 20)$

$T_1, T_2, , T_i \sim iid$

$\Rightarrow p = \mathbb{P}(T_i \leq 20)$

$\sim geo(1 - e^{-1})$

suma aleatoria

$$\Rightarrow L = S_N = \sum^{N} T_i$$

$L =$ "tiempo hasta la 1° alarma" $\longrightarrow$ $E(L) = E(E(L|N))$

depende de N

$\varphi(n) = E(L|N=n)$

$\varphi(N) = E(L|N)$

interpreto y defino $L|N=n$

$\underset{T_1 > 20}{1}$ $\underset{}{2}$ $\underset{T_3 > 20}{3}$ $\underset{}{N-1}$ $\underset{T \leq 20}{N}$

$$L|N=n \sim \sum^{n-1} T_i | T_i > 20 + T_n | T_n \leq 20$$

T_i son independientes
para cada N tengo una condición
que c/T_i se comporta
diferente
↳ tienen diferente esperanza
y diferente rango
⇒ dif distribu

⇒ truncadas $\boxed{E}$!

$$E(L|N=n) = E\left(\sum^{n-1} T_i | T_i > 20 + T_N | T_N \leq 20\right)$$

$$= (n-1)\ E(T_i | T_i > 20) + E(T_N | T_N \leq 20)$$

$$= (n-1)\left(20 + E(T_i)\right) + E(T_N | T_N \leq 20)$$

$$= (n-1)\left(20 + \frac{1}{\lambda}\right) + E(T_N | T_N \leq 20)$$

$$E(T_1) = E(T_1 | T_1 \leq 20)\, \mathbb{P}(T_1 \leq 20) + E(T_1 | T_1 > 20)\, \mathbb{P}(T_1 > 20)$$

$E(T_1) = \frac{1}{\lambda}$

$E(T_1 | T_1 > 20) = 20 + E(T_1)$

$\mathbb{P}(T_1 \leq 20) = F_{T_1}(20)$

$\mathbb{P}(T_1 > 20) = 1 - F_{T_1}(20)$

despejo → $E(T_1 | T_1 \leq 20)$
para no integrar

$\varphi(n)$ = linea de regresion

$\varphi(n) = E(L | N = n)$ (*)

$\varphi(n) \approx 40n - 31{,}6395$

$\varphi(N) = 40EN - 31{,}63 \to E(N) = p$

$E(L|N) = \varphi(N)$ func de reg

$E(L) = E(E(L|N))$

$E(L) = E($

Los mensajes que son spam arriban según un proceso de Poisson de tasa 8 mensajes por hora, mientras que los que no son spam (regulares) lo hacen con una tasa de 2 mensajes por hora, e independientemente de los spam. De los mensajes regulares, con probabilidad p=0.05 y de manera independiente son invitaciones para reunirse con amigos.

T "tiempo para procesar todos los mensajes de 12 a 22"

Se tardan 2 segs. en reconocer y borrar un mensaje spam. El tiempo para leer y contestar un mensaje regular es uniforme entre 60 y 120 segs.. Encontrar la media y la varianza del tiempo necesario para procesar todos los mensajes recibidos entre las 12 y las 22 horas.

T_S = ~~tiempo~~ reconocer y borrar spam → **2 segundos** (no es v.a)

T_R = tiempo contestar regular $\sim U(60, 120)$

tiempo total →

Entonces, ¿cómo podemos escribir a T?

N_S: cant. de mensajes spam entre las 12 y las 22hs. $N_S \sim Poi(8 \times (22-12))$

N_R: cant. de mensajes regulares entre las 12 y las 22hs. $N_R \sim Poi(2 \times 10)$

$$\boxed{Luego, T = \sum_{i=1}^{N_S} 2 + \sum_{j=1}^{N_R} T_{R_j}}$$

Si condicionamos: $(T|N_R = n) = 2 \times N_S + \sum_{j=1}^{n} T_{R_j}$

$E(T|N_R = n) = 2 \times E(N_S) + n \times E(T_R)$

Así, $E(T|N_R) = 2(8 \times 10) + N_R \times \frac{60+120}{2}$

$$\boxed{E(T) = E(E(T|N_R)) = 160 + E(N_R) \times 90 = 1960}$$

| ___ X ___ X > PP

T_B T_c

T_B = "tiempo hasta boletería" $\sim U(20, 40)$

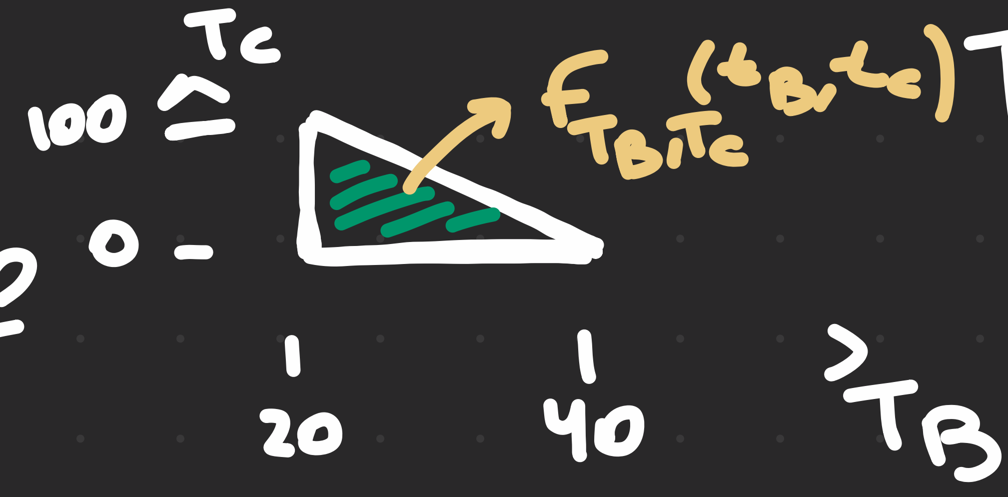
| x > PP

18:00   20
0m   120m

T_c = "tiempo de llegar de boletería → campo"

$\rightsquigarrow \mathbb{P}(T_B + T_C < 120)$

sop



$f_{T_B T_C}(t_B, t_C)$ $T_C \sim \Gamma\left(2, \frac{1}{120}\right)$

$T_C = 120 - T_B$

SON IND

$\Rightarrow$ el tiempo de una no afecta a la otra

$\Rightarrow$ busco la conjunta $f_{XY}(x\,y) =$

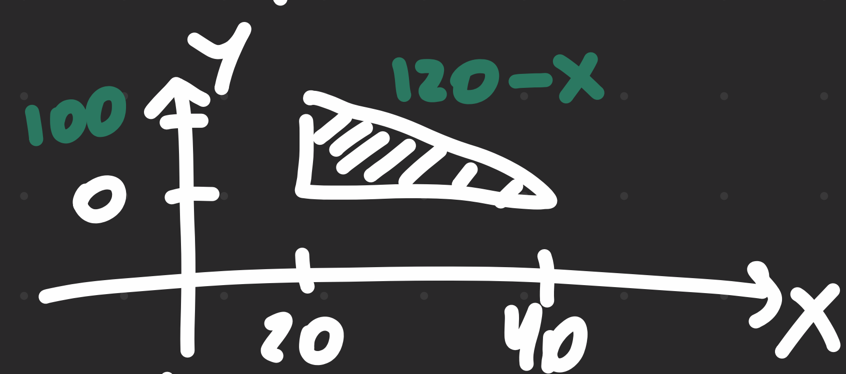
marginales $\begin{cases} f_{T_B}(x) = \frac{1}{20} \\ f_{T_C}(y) = \frac{\left(\frac{1}{120}\right)^2}{2-1\,!}\, y\, e^{-\frac{1}{120} y} \end{cases}$

$$f_{T_B T_C}(x\,y) = f_{T_B}(x)\, f_{T_C}(y) = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{120}\right)^2 y\, e^{-\frac{y}{120}}$$

$\mathbb{1}\{20 < x < 40\}$

$\mathbb{1}\{y > 0\}$

$\Rightarrow$ Voy a tener que condicionar $\longrightarrow$ busco $\mathbb{P}(X+Y \leq 120)$



$$\mathbb{P}(X+Y \leq 120) = \iint_A f_{XY}(x\,y)\, dx\, dy = \int_{20}^{40} \int_0^{120-x} \frac{1}{20} \left(\frac{1}{120}\right)^2 y\, e^{-\frac{y}{120}}\, dy\, dx$$

$\simeq 0{,}173$

No hice Poisson

7.1 Sea $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ el proceso de conteo asociado a un proceso de Poisson de intensidad 2 y sea $N(a,b) = N(b) - N(a)$ el incremento del proceso en el intervalo $(a,b]$. Calcular

(**a**) $\mathbf{P}(N(1) = 0)$.

(**b**) $\mathbf{P}(N(1,2) = 1)$.

$0 \quad \times \quad \times \quad \times \quad \to PP(2)$

$N_{(a,b)}$ = "cant de eventos" $N_{(a,b)} \sim Poi(2(b-a))$

$N_{(a,b)} = N(b) - N(a)$ el incremento del proceso entre $(a,b]$

a) $\mathbb{P}(\underbrace{N(1) = 0}) = \mathbb{P}(N_{(0,1)} = N_{(1)} - N_{(0)} = 0)$

$\mathbb{P}(N_{(1)} = 0) \Rightarrow N_{(1)} = 0 \longrightarrow \dfrac{(2\,1)^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2}$

b) $\mathbb{P}(N(1,2) = 1) = P_{N_{(1,2)}}(1) = \dfrac{(2\,1)^1 e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$

(**c**) $\mathbf{P}(N(1) = 0, N(1,2) = 1, N(2,4) = 2)$.

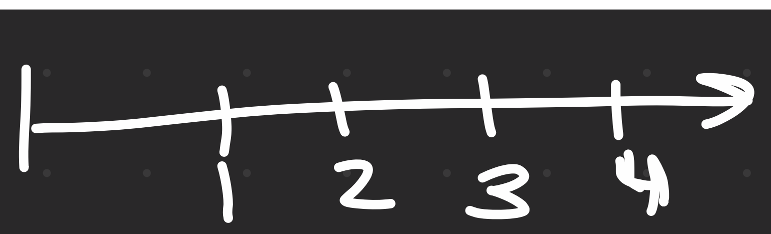
$\mathbb{P}(N(1) = 0, N(1,2) = 1, N(2,4) = 2)$

$1 \quad 2 \quad 4$ ⟶ son intervalos disjuntos

$= \mathbb{P}(N_{(1)} = 0)\, \mathbb{P}(N_{(1,2)} = 1)\, \mathbb{P}(N_{(2,4)} = 2)$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{(2)^0} e^{-2}}{\cancel{0!}} \; \dfrac{2^1 e^{-2}}{\cancel{1!}} \; \dfrac{(2\,2)^2 e^{-2\,2}}{2!} = \dfrac{\cancel{2} e^{-2}\, 16 e^{-4}}{\cancel{2}} = 16\, e^{-6}$

(d) $\operatorname{cov}(N(1,3), N(2,4))$.



$\underbrace{N(1,3), N(2,4)} \Rightarrow$

comparten intervalo

$\operatorname{cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$\operatorname{cov}(N(1,3), N(2,4)) = \operatorname{cov}(N_{(2)} + N(2,3), N(2,3) + N(3,4))$

0 ind

$= \operatorname{cov}(\cancel{N(2)}, N(2,3)) + \operatorname{cov}(\cancel{N(2)}, N(3,4)) + \operatorname{cov}(N(2,3), N(2,3)) + \operatorname{cov}(\cancel{N(2,3)}, N(3,4))$

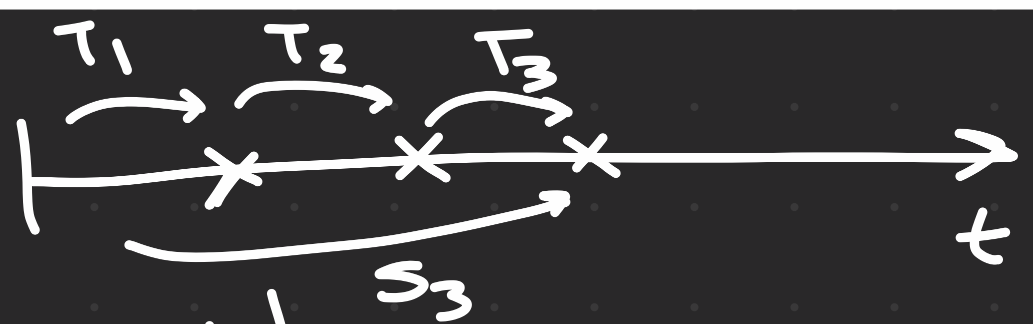
dist cov

ind $\hookrightarrow 0$ $\qquad \hookrightarrow$ ind 0 $\qquad \hookrightarrow \operatorname{cov}(X,X) = \sigma_X^2 = \operatorname{var}(X)$

$\operatorname{cov}(N_{(2,3)}) = 2 \cdot \underset{\uparrow \Delta t}{1} = 2$

Sea S_3 el tiempo de espera hasta que ocurre el tercer evento del proceso de Poisson. Calcular

(e) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2)$



$PP(2) = \pi$

$\mathbb{P}(S_3 > \frac{1}{2})$ $\qquad$ S_3 = "tiempo hasta que ocurre el 3er evento

$S_3 = \sum^3 T_i \sim \Gamma(3,2)$

$\mathbb{P}(S_3 > \frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(S_3 \leq \frac{1}{2})$

supervivencia

$\mathbb{P}(S_3 > \frac{1}{2}) = e^{-2\frac{1}{2}} = e^{-1}$

(f) $\mathbf{P}(N(1/4) = 1 | S_3 = 1/2)$

$\mathbb{P}(N(\frac{1}{4}) = 1 \mid S_3 = \frac{1}{2})$

$\not\Rightarrow \mathbb{P}(N(\frac{1}{4}) = 1 \cap S_3 = \frac{1}{2})$

$\mathbb{P}(S_3 = \frac{1}{2}) \longrightarrow$ S_3 es continua

$\mathbb{P}(S_3 = \frac{1}{2}) = 0$

planteo equivalencia

busco otra

$$\mathbb{P}(S_3 = \tfrac{1}{2}) \neq \mathbb{P}(N_{(\frac{1}{2})} = 3)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N(\tfrac{1}{4}) = 1 \mid S_3 = \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(N(\tfrac{1}{4}) = 1 \mid N(\tfrac{1}{2}) = 3)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N(\tfrac{1}{4}) = 1 \cap N(\tfrac{1}{2}) = 3)}{\mathbb{P}(N_{(\frac{1}{2})} = 3)}$$

$\hookrightarrow N(\tfrac{1}{4}) = 1 \cup N(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = 2$

ind

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N(\tfrac{1}{4}) = 1)\, \mathbb{P}(N(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = 2) = \frac{(2\frac{1}{4})^1 e^{-2\frac{1}{4}}}{1!} \cdot \frac{(2\frac{1}{2})^2 e^{-2\frac{1}{2}}}{2!}$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2} e^{-2}}_{*} \cdot \frac{1\, e^{-1}}{2} = \boxed{\tfrac{1}{4} e^{-3}}$$

(g) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2 \mid N(1/4) = 1)$.

$$\mathbb{P}(S_3 > \tfrac{1}{2} \mid N(\tfrac{1}{4}) = 1) = \frac{\mathbb{P}(S_3 > \frac{1}{2} \cap N(\frac{1}{4}) = 1)}{\mathbb{P}(N(\frac{1}{4}) = 1)} \; *$$

→ busco equiv

invierto signos

$$\mathbb{P}(S_3 > \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(N_{(\frac{1}{2})} < 3)$$

7.5 Los colectivos de la línea 61.09 llegan a la parada de Paseo Colón 850 según un proceso Poisson de intensidad 12 por hora.

(a) Andrés llega a la parada del 61.09 a las 19:30. Calcular la probabilidad de que Andrés tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

T_1

19 30 — 19 35 — min

0 — 5

$\mathbb{P}\mathbb{P}\left(12/hr = \frac{12}{60min}\right) = \Pi$

T_1 = " tiempo hasta el prim colectivo)

$T_1 \sim \mathcal{E}xp\left(\lambda = \frac{12}{hr} = 12 \frac{1}{hr} \frac{1hr}{60min} = \frac{12}{60m}\right)$

$\mathbb{P}(T_1 > 5)$

$12 \to 1hr - 60m$

$x - 1m$

$\mathbb{P}(T_1 > 5) = S(5) = e^{-5m \cdot \frac{12}{60min}} = e^{-5\frac{12}{60}} = e^{-1}$

supervivencia

(c) Matías llega a la parada del 61.09 a las 19:3X, donde X es equiprobable sobre el conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$ e independiente del proceso de arribos de colectivos. Calcular la probabilidad de que Matías tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

$\vdash \longrightarrow_t PP\left(\frac{12}{60m}\right)$

$19\,3X \begin{cases} 32 \\ 33 \\ 34 \\ 35 \end{cases}$ 12

$X = \{2, 3, 4, 5\}$

$\mathbb{P}(T_1 > 5) = \sum$ suma de probabilidad $\mathbb{P}(X = x_i)$

equis probable

$\mathbb{P}(T_1 > 5 \mid X = x)$ = me queda igual que las anteriores

$\mathbb{P}(X = x) = \sum^{4} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$

(d) Magdalena llega a la parada del 61.09 a las 19:00+U, donde U es uniforme sobre el intervalo (0,60) e independiente del proceso de arribos de colectivos. Calcular la probabilidad de que Magdalena tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

$U \sim \mathcal{U}(0,60)$

$\mathbb{P}(T_1 > s)$

T_1 = "tiempo entre que llega hasta que pasan s minutos"

como no tiene memoria
es lo mismo

7.6 El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria exponencial de media 3 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supera 5 kilos. Calcular la probabilidad de que el peso final en la balanza supere los 7 kilos.

P_T = "peso total"

P_{B_i} = "peso bolsa i-nesima"

$P_{B_i} \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{3}\right)$

$P_T = \sum^{n} P_{B_i} \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{3}\right)$