útil

$P(T > s+t \mid T > t) = \dfrac{P(T > s+t)}{P(T>t)} = P(T > s)$

$T \sim exp(\lambda)$

$P(T>t) = e^{-\lambda t}$

Bustamante
Verónica
Romina
98640

4.14

$X_1 \sim exp(\lambda_1)$ X_1, X_2 VA indep.

$X_2 \sim exp(\lambda_2)$ $\hookrightarrow F_{X_1 X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$

Busco **a**

$$U = \begin{cases} X_1 & X_1 < X_2 \\ X_2 & X_1 > X_2 \end{cases}$$

$f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ (*)

$f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ (*)

$F_U(u) = P(U \leq u) = 1 - P(U > u)$

$\underline{F_U}(u) = 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > u) = 1 - P(X_1 > u, X_2 > u)$

mayúscula

$F_U(u) = 1 - P(X_1 > u)\, P(X_2 > u)$

$\uparrow$ VA indep

$= 1 - (e^{-\lambda_1 u})(e^{-\lambda_2 u}) \; \mathbb{1}\{u \geq 0\}$

$= 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u} \; \mathbb{1}\{u \geq 0\}$

$U \sim exp(\lambda_1+\lambda_2)$

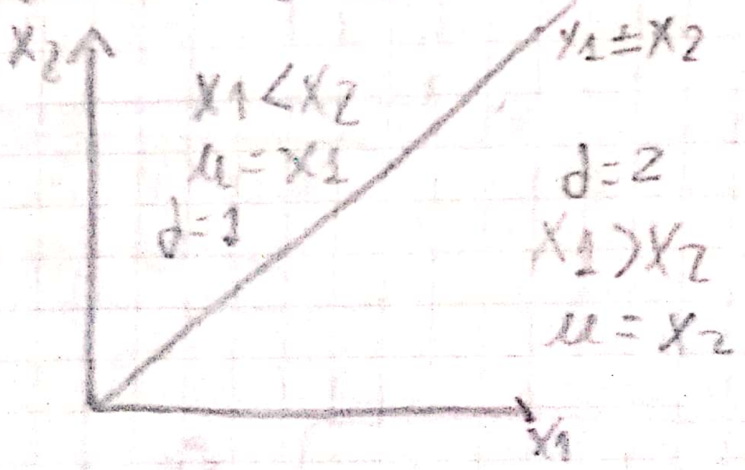
$$\boxed{f_U(u) = (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}}$$

Busco **b**

$$P(J=j) = \begin{cases} P(J=1) & j=1 \\ P(J=2) & j=2 \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} 1 & \text{si } U = X_1 \text{ (si el mín es } X_1\text{)} \\ 2 & \text{si } U = X_2 \text{ (si mín}=X_2\text{)} \end{cases}$$

J vale 1 si el mínimo de X_1 y X_2 es X_1



$P(J=1) = P(\cancel{\min\{X_1, X_2\} = X_1})$

$P(J=1) = P(X_2 \geq X_1)$

es la función de densidad conj integrada donde $X_2 \geq X_1$

minúscula

$$P(J=1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2\, \mathbb{1}\{x_1 \leq x_2\}$$

X_1, X_2 indep

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\right) \mathbb{1}\{x_1 \geq 0\}\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\, \mathbb{1}\{x_2 \geq 0\}\, dx_1\, dx_2\, \mathbb{1}\{x_1 \leq x_2\}$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{x_1}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int_{0}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \underbrace{\left(\int_{x_1}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\, dx_2\right)}_{\text{dado que } X_2 \sim exp(\lambda_2) \Rightarrow P(X_2 > x_1) = S_{X_2}(x_1)} dx_1$$

$$= \int_{0}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\, e^{-\lambda_2 x_1}\, dx_1$$

quiero que se parezca a exp $(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$= \lambda_1 \int_{0}^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}\, dx_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \underbrace{\int_{0}^{\infty} (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}\, dx_1}_{\text{exp}(\lambda_1+\lambda_2) \text{ integrada en el soporte, da } 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(J=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}$$

y análogamente $\boxed{P(J=2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}$

$$\therefore P(J=j) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} & j=1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} & j=2 \end{cases}$$

Bustamante Verónica Romina 98640

(d) Para probar esto, trabajo con $P(U>u)$ porque tiene una forma + sencilla que $P(U \leq u)$. Con la 1° trabajo con la función de supervivencia de la exp.

Si

$F_{JU} = F_J \cdot F_U$ las VA J y U son indep.

$1 - S_{JU} = (1-S_J)\cdot(1-S_U)$ también vale

$$P(J=1) \overset{\text{¿por qué?}}{=} P(J=1, U>u) + P(J=1, U\leq u) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(J=1, U>u) = \ldots = \int_u^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \int_{x_1}^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int_u^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}\, dx_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \underbrace{\int_u^\infty (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}\, dx_1}_{S(u) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}}$$

$$P(J=1, U>u) = \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}_{P(J=1)} \cdot \underbrace{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}}_{\text{debe ser } P(U>u)}$$

Análogamente, se puede verificar:

$$P(J=2, U>u) = \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}_{P(J=1)} \cdot \underbrace{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}}_{P(U>u)}$$

$$P(J=1, U\leq u) = \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}_{P(J=1)} \cdot \underbrace{(1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u})}_{P(U\leq u)}$$

cambia el borde de la 1° integral, va de 0 a u y el resto es idéntico

$$P(J=2, U\leq u) = \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}_{P(J=2)} \cdot \underbrace{(1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u})}_{P(U\leq u)}$$

Con todo esto, J y U son independientes y $U \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2)$

Probé (d)

Hoja (2)

Como uno de los enunciados me pide ver si U y W son indep y no tengo idea como hacer, saco f_{UW}:

$$f_{UW}(u,w) = \frac{f_{UV}(u,v)}{|J^*|}\Bigg|_{\substack{g_1^{-1}(u,w) \\ g_2^{-1}(u,w)}}$$

me conviene el cuaderno con u,v y no x e y para usar en resultados si otro ejercicio → (4.10) b

$$J^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} U = U = g_1(u,v) \\ W = V - U \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} V = U \\ V = W + U \end{array}} \\ \quad \overset{\shortparallel}{g_2(u,v)} \end{array}} \; *$$

del (4.10) resulta en general:

$$f_{UV}(u,v) = \Big(\underbrace{f_{X_1X_2}(v,u)}_{\text{acá es donde } x_2 < x_1} + \underbrace{f_{X_1X_2}(u,v)}_{\text{acá donde } x_2 > x_1}\Big)\underbrace{\mathbb{1}(u \le v)}_{\text{necesariamente pasa porque uno es min y el otro max}}$$

- Breve procedimiento:

$$(u,v) = h(x,y) = \begin{cases} (x_1, x_2) & \text{si } x_1 < x_2 \longrightarrow h_1(x_1,x_2) \\ (x_2, x_1) & \text{si } x_1 > x_2 \longrightarrow h_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

el de $h_1(x_1,x_2)$ — el de $h_2(x_1,x_2)$

como el módulo del jacobiano da 1 en ambos casos queda f_{UV} como ambas

- Para este ejercicio (4.14):

$$f_{UV}(u,v) = \left[\lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1 v + \lambda_2 u)} + \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1 u + \lambda_2 v)}\right]\mathbb{1}(0 < u < v)$$

acá es necesario el 0

Bustamante Verónica Romina

$$f_{UV}(u,v) = \lambda_1\lambda_2\left[e^{-(\lambda_1 v+\lambda_2 u)} + e^{-(\lambda_1 u+\lambda_2 v)}\right]$$

Por * y el resultado de $|J^{*}|$

$$f_{UW}(u,w) = f_{UV}(u,u+w) = \lambda_1\lambda_2\left[e^{-[\lambda_1(u+w)+\lambda_2 u]} + e^{-[\lambda_1 u+\lambda_2(u+w)]}\right] \mathbb{1}\{u>0, w>0\}$$

$$f_{UW}(u,w) = \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}\left[e^{-\lambda_2 w} + e^{-\lambda_1 w}\right] \mathbb{1}\{u>0, w>0\}$$

$$f_{UW} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}\,\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left[\lambda_1\lambda_2\left[e^{-\lambda_2 w} + e^{-\lambda_1 w}\right]\right] \mathbb{1}\{u>0, w>0\}$$

busco hacer aparecer la de U

$$= \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}}_{\text{va bien encaminado, queda la de } u}\left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left[e^{-\lambda_2 w} + e^{-\lambda_1 w}\right]\right] \mathbb{1}\{u>0, w>0\}$$

$$= \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}\,\mathbb{1}\{u>0\}}_{f_u}\ \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}_{P(J=1)}\underbrace{\lambda_2 e^{-\lambda_2 w}}_{f_{X_2}(w)} + \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}_{P(J=2)}\underbrace{\lambda_1 e^{-\lambda_1 w}}_{f_{X_1}(w)}\right]\mathbb{1}\{w>0\}}_{f_W \rightarrow \text{ lo que me pedía}}$$

con esto chequeo que U y W son indep además ya que $f_{UW} = f_U f_W$ — Mostré e

y que $\boxed{f_W = P(J=1)\, f_{X_2}(w) + P(J=2)\, f_{X_1}(w)}$ — c Mostré

Hoja 3