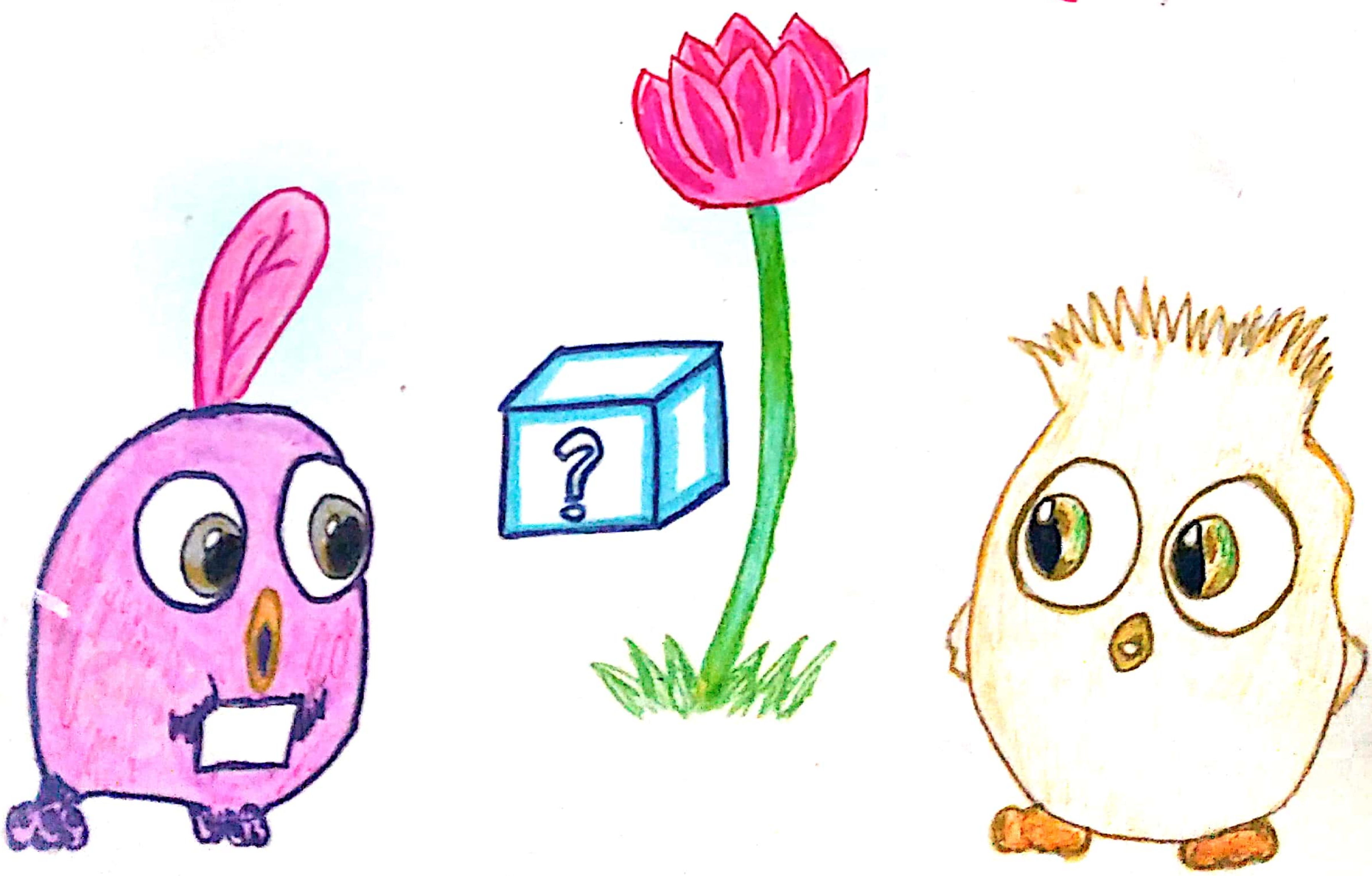
SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁

Este documento solo puede ser usado en el grupo de Telegram, no puede salir y ser difundido en Facebook o cualquier otra red social, inclusive la wikifiuba. De lo contrario se hará el reclamo pertinente. Muchas Gracias. Vero.

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁



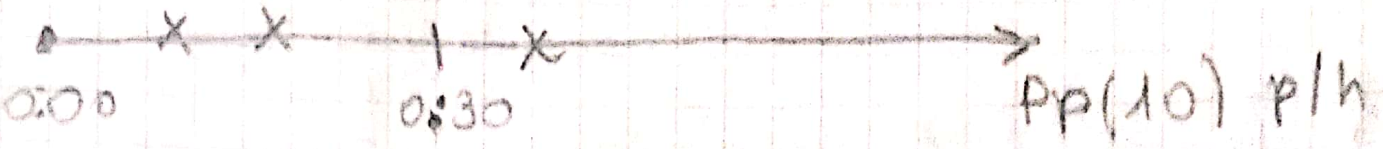
1° Cuatrimestre
2018

Verónica Bustamante

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

702) $N(a,b)$ = "# de accidentes en int (a,b)" $\sim Poi(10\cdot(b-a))$



G = "tiempo de espera hasta el 3° $\underbrace{\text{evento de Poisson}}_{\text{accidente}}$"

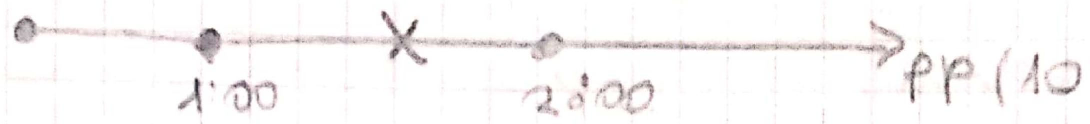
$G \sim \Gamma(3,10)$

a) $\mathbb{P}(G>1/2) = \mathbb{P}(N(0,1/2)<3)$

$$= \sum_{i=0}^{2} \frac{5^i}{i!} e^{-5}$$

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

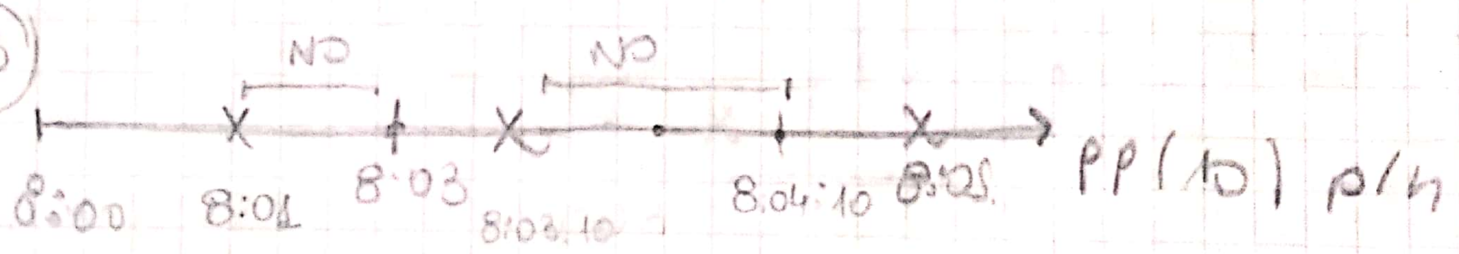
b)



$\mathbb{P}(N(1,2)=1) = \mathbb{P}(N(0,1)=1) = \frac{10}{1!}e^{-10}$

es indep de la ubicación, sólo depende de la long

703)



O sea que la otra part esté a dist ≥ 2 de la anterior

Lo fijo es la cant de parts (5)

$S_2 \sim \Gamma(2,10)$ = "tiempo de espera hasta el 2° PP"

$S_3 \sim \Gamma(3,10)$ = " " " " 3° PP"

$S_i \sim \Gamma(i,10)$ = " " " " i° PP"

2 mins

$\mathbb{P}(S_2 > 1/30)$ = prob de que el i PP ocurra en un tpo > 2 mins desde el i-1 PP

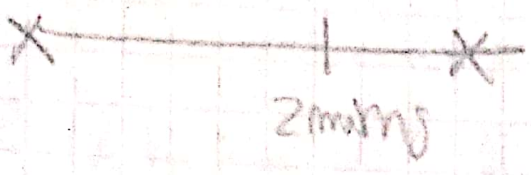
$= \mathbb{P}(N(t_1, t_1+1/30) < 2)$ = prob de que haya menos de 2 PP entre el 1°

→ $\boxed{\text{ver mejor atrás}}$

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

N = # de parts detectada en un tiempo n desde la ult emisión



Pide que el tiempo entre 2 eventos consecutivos sea > 2 mins

$\Rightarrow P(1°\text{ part sea registrada}) = 1$

$P(2°\text{ part sea registrada})$

$= P(T_2 > 1/30) = P(N(1/30) = 0) = e^{-10/30} = e^{-1/3}$

donde $T_2 \sim \exp(10)$ = tpo entre el 1° y 2° ev de Poisson.

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

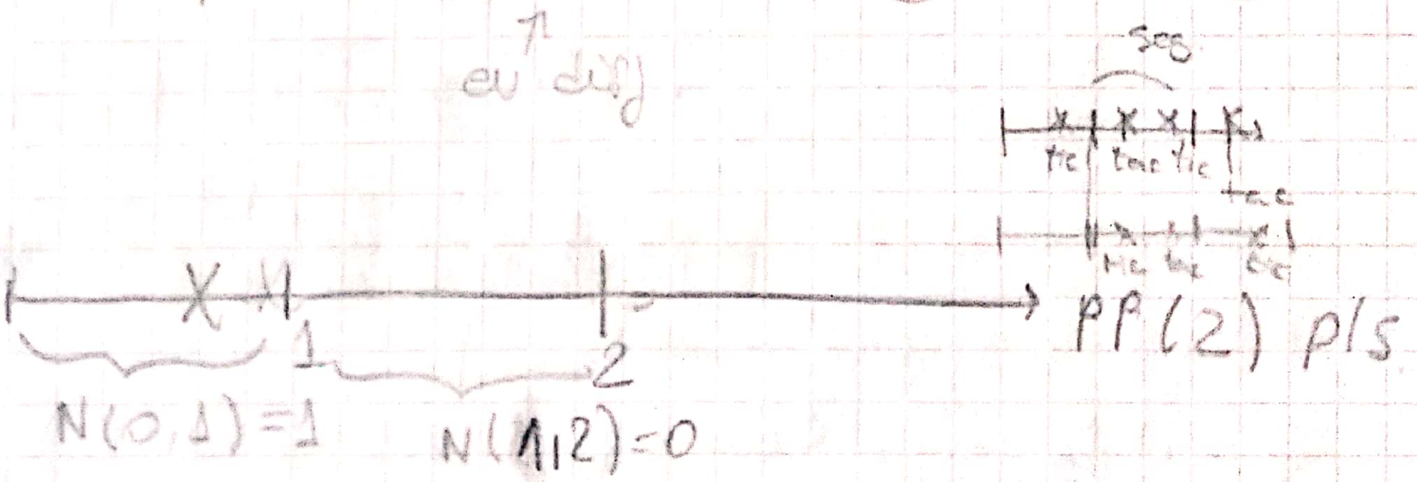
(*) como las variables $N(0,t)$ y $N(t_1, t_1+t)$ tienen igual distr $\Rightarrow$ las prob de que sean regist las demas parts en un tiempo t son iguales.

Como el n° de eventos en int no sup son VA ind (eventos disjuntos):

$P(\text{detectar la } 1°, \text{la } 2°, \text{la } 3°, \text{la } 4°, \text{la } 5°) \underset{\text{ev disj}}{=} 1 \cdot e^{-1/3} \cdot e^{-1/3} \cdot e^{-1/3} \cdot e^{-1/3}$

7o4)

a)



$P(N(1,2)=0 \mid N(0,1)=1) = \dfrac{P(N(1,2)=0, N(0,1)=1)}{P(N(0,1)=1)}$

$N(0,1) \sim Poi((1-0)2)$

$\underset{\text{disj}}{=} \dfrac{P(N(1,2)=0) \cdot P(N(0,1)=1)}{P(N(0,1)=1)}$

$= P(N(1,2)=0) \underset{(*)}{=} P(N(0,1)=0) = e^{-2}$

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate

(1.95) a)

19:30 — 19:35 → pp (12) p/h

$N(a,b) = \#$ de colectivos en el int (a,b) "$\sim Poi(12.(b-a))$"

$\mathbb{P}(N(0, 5/60) = 0) = e^{-1}$

si tiene que esperar + de cinco mins es porque no pasó ninguno en esos 5

b) $\mathbb{P}(N(1/60, 6/60) = 0) = e^{-1}$

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate

(1.96) en la carpeta

(1.97)

9:00 — x — 9:15 — x — x — 10:00 → pp (4) p/h

T: tpo h/ la 1° llam $\sim exp(1/15)$

S: tpo h/ la 2° llam $\sim \Gamma(2, 1/15)$

a) $\mathbb{P}(\underbrace{N(0, 15/60)}_{N(15/60)} \geq 1 \mid \underbrace{N(0,1) = 3}_{S_3 = 1})$

$\mathbb{P}(T \leq 15 \mid N(0,1)=3)$

$W = \#$ de llamadas que llegan en el int $(0, 15/60)$ de 3 que llegan en el int $(0,1) \sim Bin(3, \frac{15/60}{1})$

$\mathbb{P}(W \geq 1) = \binom{3}{0} (15/60)^0 (45/60)^3 =$

$1 - \mathbb{P}(W < 1)$

$= 1 - \left(\frac{45}{60}\right)^3$

b)

9:00 — x — x — 9:30 — x — 10:00 →

$\mathbb{P}(N(0, 1/2) = 2 \mid N(0,1) = 3)$

$\mathbb{P}(\tilde{W} = 2) = (1/2)^2$

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁
SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

(1.9)

0:00 — 0:10 — 0:30 — 0:40 → PP(6) p/h

$\mathbb{P}\left(N(0,10/60)=0 \mid N(0,1/2)=3\right)$
$\cap\, N(30/60,40/60)=0)$

Recordar que del ejercicio 6.15 cuando teníamos $X_a, X_b, \dots, X_n$ binomiales,

$$X_a \mid X_b = u \sim Bin\left(n-u, \frac{p_k}{p}\right)$$

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

Veo si para este caso

$$N(0,10/60)=0,\ N(30/60,40/60)=0 \mid N(0,1/2)=3$$
$$,\ N(10/60,30/60)=3$$
$$\sim Mult\left(3-0-0, \frac{10/60}{1/2}, \dots, \frac{10/60}{1/2}\right)$$

Veamos:

$$\mathbb{P}\left(N(0,10/60)=0,\ N(30/60,40/60)=0 \mid N(0,1/2)=3\right)$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(N(0,10/60)=0 \cap N(30/60,40/60)=0 \cap N(0,1/2)=3\right)}{\mathbb{P}(N(0,1/2)=3)} =$$

se pone como en 2.5)

$$= \frac{\mathbb{P}(N(10/60,30/60)=3)\cdot\mathbb{P}(N(0,10/60)=0)\cdot\mathbb{P}(N(30/60,40/60)=0)}{\mathbb{P}(N(0,1/2)=3)} = \frac{2^3 e^{-2}}{3!}\,\frac{3!}{3^3 e^{-3}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 e^{-2+3} = \left(\frac{2}{3}\right) e^{1}$$

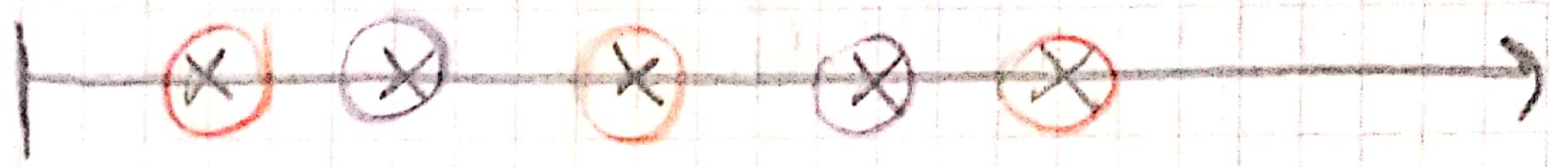
$N(0,1/2) \sim Poi(3)$

$N(10/60,30/60) \sim Poi\big(\underbrace{6\cdot(\underbrace{20/60}_{1/3})}_{2}\big)$ $\quad \mathbb{P}(N(0,1/2)=3) = \dfrac{2^3 e^{-2}}{3!}$

$\mathbb{P}(N(10/60,30/60)=3) = 3^3 e^{-3}/3!$

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁

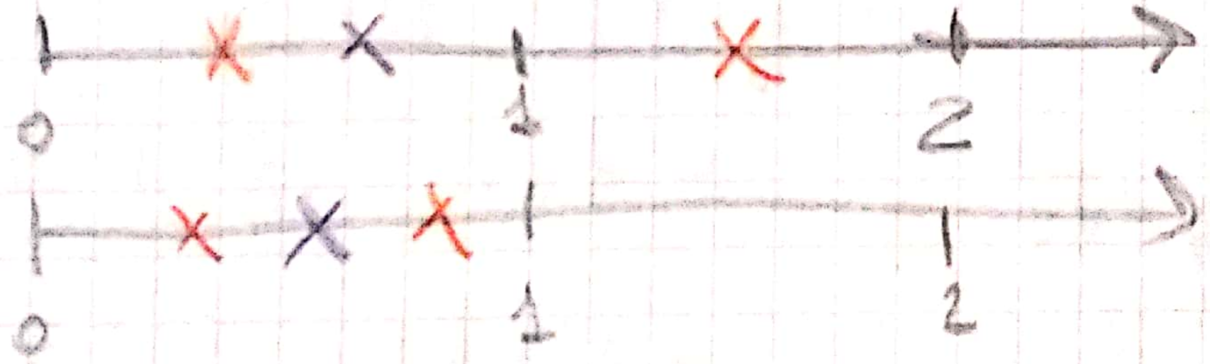
704



PP(2) P/S

Registra solo las violetas.

$$\mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{no registre}\\ \text{nada en el } 2^\circ \text{ seg}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}\text{Registró } 1\\ \text{en el } 1^\circ \text{ seg}\end{matrix}\right) = \frac{\mathbb{P}\ N\ (*)}{\mathbb{P}(N(0,1)=2 \lor N(0,1)=3)}$$



puede o no haber una naranja

$$(*)\ \mathbb{P}(N(0,1)=3,\ N(1,2)=0) + \mathbb{P}(N(0,1)=2,\ N(1,2)\leq 1)$$

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁

SOLO USO
Ya nos vamos de mate

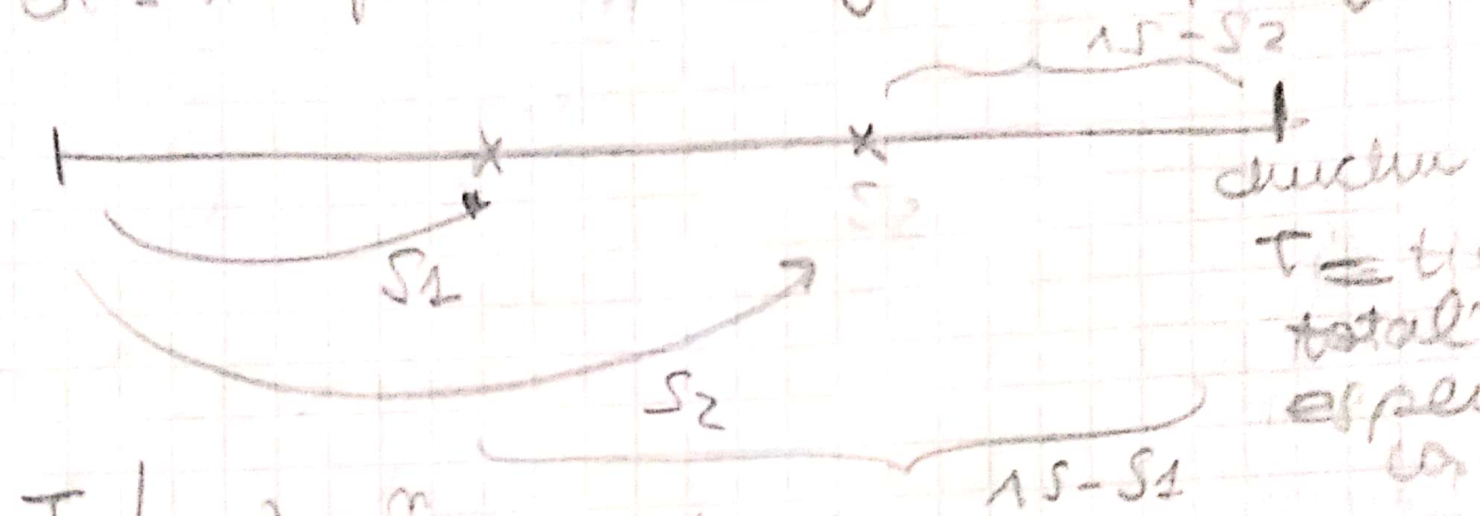
SOLO USO
Ya nos vamos de mate

(7.8) 15 PP(30) p/min

N = # de personas que llegaron a la estación en el int $(0, 15)$

$N \sim Poi\left(\frac{30 \cdot 15}{45}\right)$

S_i = tiempo hasta la llegada del pasajero i.



T = tiempo total que esperaron los pasajeros

$$T\,|_{N(t)} = \sum_{i=1}^{n} (15 - S_i \,|_{N=n})$$

$$E[T|_{N=n}] = E\left[\sum_1^n 15 - \sum_1^n S_i \,|_{N=n}\right]$$

$$= 15n - \sum_1^n E[S_i \,|_{N=n}]$$

$$= 15n - 15/2\, n = \frac{15}{2} n$$

$$S_1, \dots, S_n \,|_{N=n} \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}[0, 15]$$

$$E[T|N] = \frac{15}{2} N$$

$$E[T] = E[E[T|N]] = \frac{15}{2} E[N] = \frac{15 \cdot 450}{2}$$

SOLO USO
Ya nos vamos de mate

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

7.010

$\longrightarrow PP(1/20)$ en m

T = long h/ 1° falla detectada (long del rollo)

$T \sim \exp\left(\frac{75}{100} \cdot \frac{1}{20}\right)$ a) $E[T] = \frac{2000}{75} = 26{,}67$ m

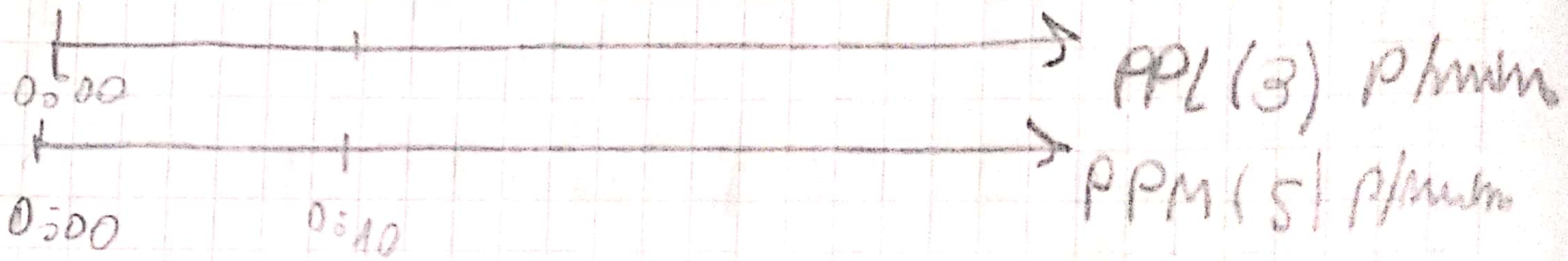
$V[T] = 711{,}11$

b) $E[F]$ F: # de fallas en 1 rollo (son las no detectadas)

$F \mid T=t \sim Poi\left(t \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{25}{100}\right)$

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

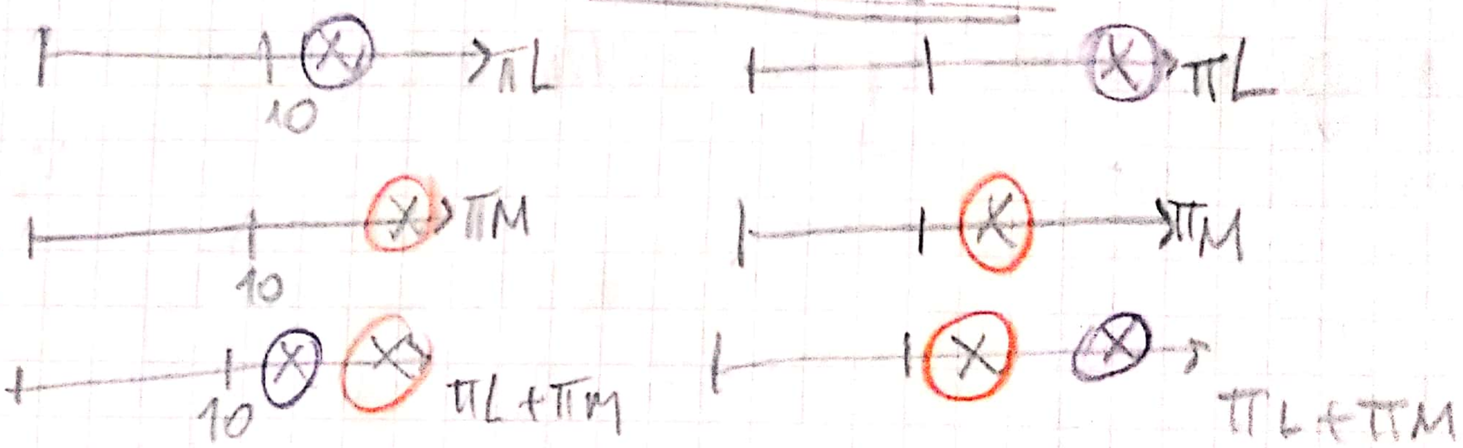
7.012



indep.

a) Hallar la prob de que la 1° señal emitida dsp de las 0:00 haya sido emit dsp de las 0:10.

2 eventos



T = "tiempo hasta la emisión de la 1° señal dsp de las 0:00"

$\mathbb{P}(T > 10) \underset{\text{por ser continua}}{=} \mathbb{P}(T \geq 10) = \mathbb{P}(N(0,10) = 0)$

$N(a,b)$ = # de señales emitidos en el int(a,b)

$N_L(a,b)$ = # " " " por L en " "

$N_M(a,b)$ = # " " " " M " " "

como $\{N_L(a,b), b-a \geq 0\}$ y $\{N_M(a,b), b-a \geq 0\}$ son PP indep de tasas 3 y 5 ...

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

$N(a,b) = N_L(a,b) + N_M(a,b)$

$N(a,b)$ define un pp de tasa $3+5=8$.

$$\boxed{N(a,b) \sim Poi((b-a)8)}$$

$$\mathbb{P}(N(0,10)=0) = e^{-80}$$

$\downarrow$

$N(0,10) \sim Poi(80)$

<u>Otra forma:</u>

$$J = \begin{cases} L & \text{el arribo es de Lucas} \\ M & \text{el arribo es de Monk} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(T \geq 10) = \mathbb{P}(T \geq 10 \, \mathbb{1}\{J=L \cup J=M\})$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(T \geq 10, J=L)} + \mathbb{P}(T \geq 10, J=M)$$

$$= \mathbb{P}(T \geq 10)\mathbb{P}(J=L) + \mathbb{P}(T \geq 10)\mathbb{P}(J=M)$$

$\downarrow$ J y T indep

$$e^{-80} \cdot \frac{3}{5+3} + e^{-80} \cdot \frac{5}{5+3} = e^{-80}$$

<u>Otra +:</u>

$$\mathbb{P}(N(0,10)=0) = \mathbb{P}(\underbrace{N_L(0,10) + N_M(0,10) = 0})$$

esta cond ocurre sii $N_1(0,10)=0$ y $N_2(0,10)=0$ ya que siempre toman valores $\oplus$ (son PP)

$$= \mathbb{P}(N_L(0,10)=0, N_M(0,10)=0)$$

$$= \mathbb{P}(N_L(0,10)=0) \cdot \mathbb{P}(N_M(0,10)=0)$$

$\uparrow$ VA indep

$$= e^{-10 \cdot 3} \cdot e^{-10 \cdot 5} = e^{-80}$$

SOLO USO
Ya nos vamos de mate😁

SOLO USO Ya nos vamos de mate😊

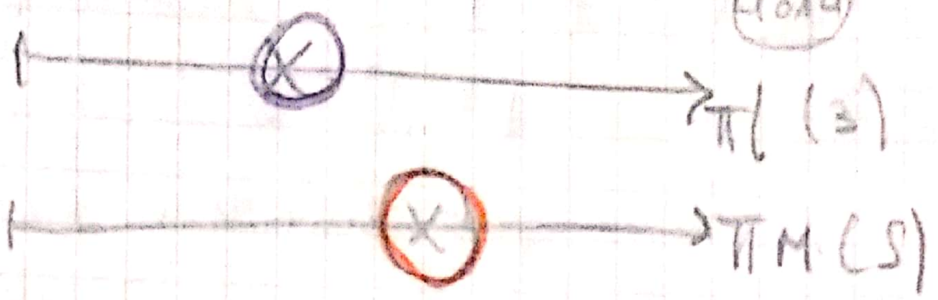
VA
T_L, T_M ind. $\quad T_L \sim exp(3) \quad T_M \sim exp(5)$

SOLO USO Ya nos vamos de mate😊

T_L = tiempo hasta que se emite la 1° señal de Lucas
T_M = ... 1° señal de Mark

b) $\mathbb{P}$(la 1° señal haya sido emitida por Lucas) $= \mathbb{P}(T_L < T_M) = \mathbb{P}(J = L)$

$= \frac{3}{8}$
↑
Teo lema (4.14)



SOLO USO Ya nos vamos de mate😊

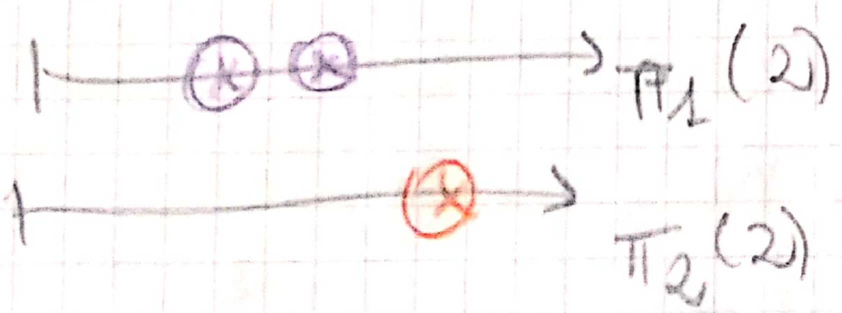
c) $\mathbb{P}$(la 1° señal emitida dsp de las 0800 haya sido emitida dsp de las 0:10 y que haya sido emit x Lucas)

$$\mathbb{P}(T \geq 10, J = L) = \mathbb{P}(T \geq 10)\,\mathbb{P}(J = L) = e^{-80} \cdot \frac{3}{8}$$

↑
VA ind, teo de compet, Teo 4.14

$5+3<10$
$5<10$ y $3<10$

(7.13) $\mathbb{P}$(los 2 pp. eventos provengan de Π_1) $= \mathbb{P}(T_{11} + T_{12} < T_{21})$



$$= \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

es la unión de 2 competencias, por pérdida de memoria de la exp, la 2da comp es idéntica a la 1°.

→ que la 1° de Π_1 le gane a la 1° de Π_2
→ que la 2° de Π_1 le gane a la 1° de Π_2

T_{11} = tiempo hasta el 1° pp en Π_1

T_{12} = tiempo desde el 1° pp hasta el 2° pp en Π_1

T_{21} = tiempo hasta el 1° pp en Π_2.

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

b) $e^{1/3}$ ... $\frac{2}{2+2+2}$

7.14

Π_P (60) p/h

Π_C (40) p/h

Π_C, Π_P ~~independientes~~ PP

$N_P \sim Poi((b-a)\,60)$

$N_P(a,b)$ = # de policías que arriban a plaza Victoria en el int (a,b)

$N_C(a,b)$ = # de chisperos que arriban a pza victoria en el int (a,b)

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

$$\mathbb{P}\left(N_P(1/60, 2/60) \geq 2 \mid N_C(0, 3/60)\right) =$$

$$\underset{\text{prob condic.}}{=} \frac{\mathbb{P}\left(N_P(1/60, 2/60) \geq 2,\ N_C(0, 3/60) = 2\right)}{\mathbb{P}\left(N_C(0, 3/60) = 2\right)}$$

$$\underset{\text{ind}}{=} \frac{\mathbb{P}\left(N_P(1/60, 2/60) \geq 2\right) \cdot \cancel{\mathbb{P}\left(N_C(0, 3/60) = 2\right)}}{\cancel{\mathbb{P}\left(N_C(0, 3/60) = 2\right)}} =$$

$$\underset{\text{complemento}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(N_P(1/60, 2/60) < 2\right)$$

$N_P(1/60, 2/60) \sim Poi(1)$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(N_P(1/60, 2/60) = 1\right) - \mathbb{P}\left(N_P(1/60, 2/60) = 0\right)$$

$$= 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$$

7.15

PP (4) p/h

$N(1)$ = # de arribos de clientes al servidor en el período de 1h

$N(1) \sim Po(4)$

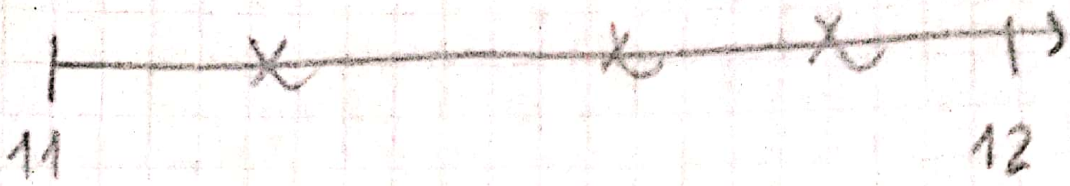
V_i = tp de trabajo consumido en cada servicio del cte i

$V_i \sim N(5, 1/4)$

E[tp servicio entre 11 y 12 ... que arribó entre las 11 y 12] y V[tiempo servidor entre 11 y 12]

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate



por cada cte que arriba se consume un t p de trabajo

$S = \sum_{i=1}^{N} Z_i$, es PP compuesto

ya que:
$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \{Z_i, i \geq 1\} \text{ iid e indep} \\ \bullet N \text{ es PP} \end{array} \right.$

$\Rightarrow E[S] = 4\, E[Z_i] = 4 \cdot 5 = 20$

Cada Z_i tiene esperanza finita

$\Rightarrow V[S] = 4\, E[Z_i^2] = 4\, E\left[\left((Z+5)\frac{1}{2}\right)^2\right]$

Cada Z_i tiene $V(Z_i)$ finita

$Z \sim N(0,1)$

$Z_i \sim N(5, 1/4)$

$= 4\, E\left[\frac{1}{4}(Z+5)^2\right]$

$= 4 \cdot \frac{1}{4}\, E[(Z+5)^2]$

linealidad

$= E[Z^2 + 5Z + 25]$

$= 25 + 5\,E[Z] + \underbrace{E[Z^2]}_{1}$

$Z^2 \sim \chi_1^2$ $\quad = 25 + 5 \cdot 5 + 1$

$= 51$

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

7a16 $\longmapsto$ PP(3000) p/semana

Y_i = # de integrantes de la flia i

$A_{Y_i} = \{5, 4, 3\}$ $P(Y_i = 5) = 0{,}1$ $P(Y_i = 3) = 0{,}5$

$P(Y_i = 4) = 0{,}4$

$\boxed{\text{Para calcular la media y la varianza de la cant de africanos que llegan en un período de 4 semanas}}$

$N(t)$ = # de familias que llegan en un período t

SOLO USO Ya nos vamos de mate😁

$N(t) \sim Poi(t \cdot 4)$

El nro total de inmigrantes que llegan en un período de 4 semanas es $X(4) = \sum_{i=1}^{N(4)} Y_i$

$E[N(4)] = 4 \cdot 3000 = 12000$

donde la cant de personas que tiene una flia es indep del resto y donde c/u puede tener 5, 4 o 3 integrantes, sanitd

Busco

$$\underbrace{E\left[X(4) \mid N(4) = n\right]}_{\text{E total de inmigrantes que llegan en un período de 4 sem sabiendo que llegaron n flias en 4 semanas}} = E\left[\sum_{i=1}^{N(4)} Y_i \mid N(4) = n\right] = (*)$$

y, además la cant de integrantes de cada flia es indep de otro

Y_i y $N(4)$ ind

$(*)$ $= E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i \mid N(4) = n\right] = n\,E[Y_i]$

$= n \cdot 3{,}6$

En consec. $\Rightarrow E[X(4) \mid N(4)] = N[4] \cdot 3{,}6$

$E[X(4)] = E[E[X(4) \mid N(4)]]$

int $[0,4]$ $= E[3{,}6 \cdot N(4)] = 3{,}6 \cdot E[N(4)] = 43200$

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁

la cuentita:

$E[X(4)|N(4)=n] = n \cdot E[Y_i] = n \cdot [5 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,5] =$

$V[X(4)] = E[V[X(4)|N(4)]] + V[E[X(4)|N(4)]]$

$= E[N(4) \cdot 0,64] + V[N(4) \cdot 3,6]$

$= 0,64 \cdot E[N(4)] + 3,6^2 \cdot 12000$

$= 0,64 \cdot 12000 + 3,6^2 \cdot 12000 = 163200$

SOLO USO
Ya nos vamos
de mate😁

$V[X(4)|N(4)=n] = V\left[\sum_{i=1}^{N(4)} Y_i | N(4)=n\right]$

$= V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i | N(4)=n\right)$

$= V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = n V[Y_i] = n \cdot 0,64$

N(4) y Y_i indep — iid

$V[Y_i] = E[Y_i^2] - E[Y_i]^2 = 13,6 - 3,6^2 = 0,64$

$V[X(4)|N(4)] = N(4) \cdot 0,64$

E 17

PP (10) p/min

P(el vehículo es un auto) $= 0,7$ P(el vehículo es una moto) $= 0,1$

P(el vehículo es un camión) $= 0,2$

$N_A(t) \sim Poi(t \cdot 10 \cdot 0,7)$

a) $P(N_A(30) \geq 2)$

$= 1 - P(N_A(30) < 2)$

$= 1 - P(N_A(30) = 1)$

$- P(N_A(30) =$

carga auto ~ 1400 kg

" motos ~ 120 kg

" camiones ~ 1300 kg

SOLO USO Ya nos vamos de mate

SOLO USO Ya nos vamos de mate

Explicación:

Estoy en un proceso de conteo
$\{N(t), t>0\}$ es un pp de tasa 10, cada vez que ocurre un arribo se clasifica de tipo auto, moto o camión, con prob p_a, p_M y p_c respect indep de todos los demás arribos $\neq$) siendo la # de arribos en un tot $N(t) = N_A(t) + N_M(t) + N_C(t)$

Asume que:
$\{N_A(t), t>0\}$, $\{N_M(t), t>0\}$ y $\{N_C(t), t>0\}$ son pp indep de tasas $10 \cdot p_a$, $10 \cdot p_M$ y $10 \cdot p_c$

SOLO USO Ya nos vamos de mate

b) $P(N_A(1) = 7, N_M(1) = 1, N_C(1) = 2)$

$= P(N_A(1) = 7) \cdot P(N_M(1) = 1) \cdot P(N_C(1) = 2)$

eventos indep $= \frac{7^7 e^{-7}}{7!} \cdot \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \cdot \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = 7{,}418 \times 10^{-3}$

c) $C_M = \begin{cases} 400 \; (C_A) & \text{si } A \\ 120 \; (C_M) & \text{si } M \\ 1300 \; (C_C) & \text{si } C \end{cases}$

$C_M = C_A \cdot P_A + C_C \cdot P_C + C_M \cdot P_M$

$E[C_M] = E[C_A] \cdot P[A] + E[C_C] \cdot p_c + E[C_M] \cdot P_M$

$E[X(t)] = E[E[X(t) \mid N(t)]] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_A \cdot 400 + Y_C \cdot 120 + Y_M \cdot 1300\right]\right]$

d) $X(t)$ = carga media total que atraviesa el peaje en una hora.
(faltaría escribir mejor)

$E[X(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_M\right] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_A \cdot P_A + C_C \cdot P_C + C_M \cdot P_M\right]$

$= E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_A \cdot P_A\right] + E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_C \cdot P_C\right] + E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_M \cdot P_M\right]$

$= E[N(1)] [C_A \cdot P_A + C_C \cdot P_C + C_M \cdot P_M] =$