Chapitre 5

Programmation linéaire

I Introduction par l'exemple

Un barman dispose de 30 l de jus d'orange, 24 l jus de pamplemousse et 18 l jus de framboise. Il propose deux coktail :

- le "soleil couchant" à 8€ le litre, soit 80€ le bidon composé de 5l de jus d'orange, 2 l de jus de pamplemousse pour 1 l de jus de framboise et 2l d'eau
- le "balancé" à 6€ le litre, soit 60€ le bidon composé de 3l de jus d'orange, 3l de jus de pamplemousse et 3l de jus de framboise et 1l d'eau

Il désire préparer la quantité optimale de chaque cocktail afin de maximiser son gain.

1 Représentation in Extenso (forme canonique)

VARIABLES DE DECISION :	• x : nombre de bidons de "soleil couchant" (à 80€) • y : nombre de bidons de "balancé" (à 60€)
FONCTION OBJECTIF :	max $(z = 80x + 60y)$
CONTRAINTES :	$5x + 3y \leq 30$ (stock jus d'orange) $2x + 3y \leq 24$ (stock jus de pamplemousse) $1x + 3y \leq 18$ (stock jus de framboise) $x, y \geq 0$ (contraintes de positivité)

2 Formes d'un programme linéaire

Un programme linéaire avec n variables et m contraintes peut s'écrire sous plusieurs formes.

Forme Génerale

$$\begin{array}{lrcll} \text{min / max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{tel que :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \preceq & b_i & \forall i = 1, 2 \ldots m \\ & x_j & \preceq & 0 & \forall j \subseteq \{1, 2 \ldots n\} \end{array}$$

avec $\preceq \in \{\leq, \geq, =\}$

Représentations in extenso/matricielle

	Forme Canonique	Forme Standard	Forme Matricielle de la Forme Standard
	$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\max z = C.X$
$i = 1, 2 \ldots m$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$	$A.X = B$
$j = 1, 2 \ldots n$	$x_j \geq 0$	$x_j \geq 0$	$X \geq \vec{0}$

⚠ le nombre de variable change lorsque l'on passe de la forme canonique à la forme standard puisqu'on introduit m variables d'écart. Si on avait n variables en forme canonique on aura donc $n' = n + m$ variables en forme standard.

L'exemple du Barman dans les trois formes :

Forme canonique :
$\max(z = 80x + 60y)$

$$\text{tel que : } \begin{aligned} 5x + 3y &\leq 30 \\ 2x + 3y &\leq 24 \\ 1x + 3y &\leq 18 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme standard :
$\max(z = 80x + 60y)$

$$\text{tel que : } \begin{aligned} 5x + 3y + e_1 &= 30 \\ 2x + 3y + e_2 &= 24 \\ 1x + 3y + e_3 &= 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme Matricielle :

$$\max z = \begin{array}{c} C \\ (80 \quad 60 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \end{array} \times \begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} B \\ \begin{pmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

Transformations

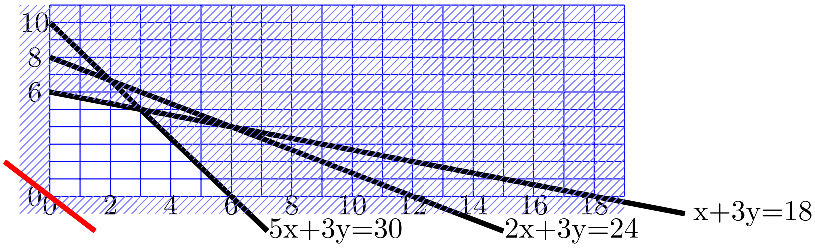
équation $\rightarrow$ inéquation	$ax = b \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ax \leq b \text{ et} \\ ax \geq b \end{cases}$
inéquation $\rightarrow$ équation ajout variable d'écart	$ax \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ax + e = b \quad e \geq 0$ $ax \geq b \quad \Leftrightarrow \quad ax - e = b \quad e \geq 0$
contrainte supériorité $\rightarrow$ infériorité exemple :	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ $9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \quad \Leftrightarrow -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17$
max $\leftrightarrow$ min	$\max f(x) = -\min -f(x)$
variable non contrainte $\rightarrow$ positive	$x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$

Définition 13. *Étant donné un programme linéaire P sous forme Matricielle Standard, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une*

- *solution de P ssi $A.X^T = B$*
- *solution réalisable de P ssi $A.X^T = B$ et $X \geq \vec{0}$*
- *solution optimale de P ssi c'est une solution réalisable qui donne à z une valeur maximale parmi toutes les solutions réalisables.*

II Résolution géométrique

Solutions réalisables intersection des demi-plans (partie non hachurée), droite objectif $80x + 60y = max$ elle est parallèle à $80x + 60y = 0$ (en rouge) qui passe par $(0, 0)$ et $(-3, 4)$.



Le maximum est en $(3, 5)$ et vaut 540.

III Notions sur les polyèdres

D'après les définitions et les théorèmes de géométrie dans $\mathbb{R}^n$, on conclut que :

Corollaire 2. *L'ensemble des solutions réalisables S d'un programme linéaire est un polyèdre borné (polytope) ou non. S'il existe des solutions réalisables dans un espace borné alors il existe au moins un sommet où l'optimum est atteint pour le programme linéaire.*

Cela signifie donc qu'on a trois cas :

1. le programme linéaire a au moins une solution réalisable optimale
   - soit il a une solution réalisable optimale unique (c'est un sommet du polytope)
   - soit il a une infinité de solutions optimales réalisables (lorsque l'optimum est atteint en plusieurs sommets : il est atteint en toute combinaison convexe de ses sommets) : dégénérescence.
2. le programme linéaire n'a pas de solution réalisable (lorsque les contraintes sont incompatibles, le polyèdre est vide).
3. le programme linéaire n'a pas d'optimum (lorsque le polyèdre est non borné).

Ainsi, une manière de résoudre un programme linéaire, on s'intéresse au polytope définissant l'ensemble des solutions (même non réalisables), on part d'un sommet de ce polytope et on passe de sommets en sommets en choisissant celui qui améliore le gain si c'est possible.

IV Résolution algébrique et Simplexe Tableau

Continuons la résolution : on a un système à 3 équations et 5 inconnues donc sauf si les équations sont incompatibles il va y avoir plusieurs solutions. Comme on a deux inconnues en trop, on peut choisir deux inconnues quelconques et exprimer les autres variables en fonction de ces deux inconnues (les faire passer dans le second membre). Par exemple on choisit x et y :

Système 1 : $\max(z = 80x + 60y)$

$$\text{tel que : } \begin{aligned} e_1 &= 30 - 5x - 3y \\ e_2 &= 24 - 2x - 3y \\ e_3 &= 18 - x - 3y \end{aligned}$$

Ici on peut trouver une solution acceptable évidente en fixant x et y à 0, on obtient $e_1 = 30$, $e_2 = 24$ et $e_3 = 18$. Dans ce cas la recette du barman $z = 80x + 60y$ est nulle avec la solution (0,0, 30, 24,18). Le problème est de maximiser la recette.

Les variables que l'on fixe à 0 seront appelées variables hors base car on va résoudre le système en s'intéressant uniquement aux autres variables appelées variables de base.

Définition 14 (Tableau)**.** *Informatiquement, le programme linéaire P caractérisé par X_{in},A,B,C et v est stocké dans le tableau $Tableau(P)$ suivant :*

$$T[1..(m+1), 1..(n+1)] = \left(\begin{array}{cc} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m & \dots & m,n \end{bmatrix} & B \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{bmatrix} \\ C \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \end{bmatrix} & z - v \end{array} \right)$$

où chaque ligne i se lit $\sum_{j=1}^{n} T[i,j]X[j] = T[i, m+1]$

$Tableau(Barman)$:

variables de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
e_1 :	5	3	1	0	0	30
e_2 :	2	3	0	1	0	24
e_3 :	1	3	0	0	1	18
C, v :	80	60	0	0	0	z

Lecture du tableau : $5x+3y+e_1 = 30$, $2x+3y+e_2 = 24$, $x+3y+e_3 = 18$, $80x+60y = z$. Une solution est de rendre les variables hors-base nulles :$x = 0$, $y = 0$: Solution 1 : (0,0,30,24,18), z=0

1 Bases

Définition 15 (Variables de base et hors-base)**.** *Étant donné un programme linéaire sous forme Standard, avec n variables et m contraintes :*

On appelle base, un vecteur colonne X_{in} de m variables prises parmi les n variables. Le vecteur colonne des variables hors-base, X_{out} est constitué des $n - m$ variables restantes.

On notera I_{in} et I_{out} les listes d'indices des variables de base et hors-base respectivement.

Propriété 9 (Réécriture selon une base X_{in})**.**
Pour toute base X_{in} et tout programme linéaire P sous-forme standard dont les contraintes ne sont ni redondantes ni incompatibles et qui admet X_{in} comme base, on a :

$$\left| \begin{array}{l} \max z = C.X \\ A.X = B \\ X \geq \vec{0} \end{array} \right. \quad \textit{est équivalent à :} \quad \left| \begin{array}{l} \max z = v + C'.X_{out} \\ X_{in} = B' - A'.X_{out} \\ X_{in} \geq \vec{0}, X_{out} \geq \vec{0} \end{array} \right.$$

où $X_{out} = X \setminus X_{in}$, $A_{in} = A[1..m, I_{in}]$, $A_{out} = A[1..m, I_{out}]$, $C_{in} = C[I_{in}]$, $C_{out} = C[I_{out}]$ et
- $A' = A_{in}^{-1}.A_{out}$,
- $B' = A_{in}^{-1}.B$,
- $C' = C_{out} - C_{in}.A'$,
- $v = C_{in}.B'$

Définition 16. *Une solution de base associée à l'écriture d'un programme linéaire selon une base X_{in} est la solution particulière obtenue en posant $X_{out} = 0$ ($x_i = 0$ pour $i \in I_{out}$), ce qui implique $X_{in} = B'$.*

Définition 17. *Une base X_{in} est voisine d'une autre base X'_{in} ssi il existe une variable dite sortante s de X_{in} et une variable dite entrante de $X \setminus X_{in}$ telle que $X'_{in} = X_{in} \setminus \{s\} \cup \{e\}$.*

2 Théorèmes d'optimalité

Théorème 4. *S'il existe une solution réalisable pour un programme linéaire borné alors il existe une solution optimale de base réalisable pour ce programme.*

Théorème 5. *Soit X_{in} une base réalisable non dégénérée ($B > 0$) d'un programme linéaire que l'on peut réécrire dans cette base au moyen des matrices A', B', C' et de la valeur v, X_{in} est une base réalisable optimale ssi $\forall j \in I_{out}$, $C'[j] \leq 0$.*

$C'[j]$ est appelé le coût réduit de la variable hors-base x_j.

Le coût réduit est le coefficient de la variable dans l'équation de z. Pour un problème de minimisation, il correspond à la diminution minimale de dépenses qui résulterait de l'utilisation d'une unité de moins pour ce bien. Par exemple si $z = 540 - 15e_1 - 5e_3$ les coûts réduits sont -15 pour e_1 et -5 pour e_3, le mot réduit signifie que disposer d'une unité de jus d'orange de moins diminuerait de 15 la valeur de z.

3 Résolution de l'exemple

Première itération algébrique : pour faire croître au maximum la recette on choisit d'augmenter x car son coefficient est plus fort dans la recette. La valeur maximale d'augmentation pour x est 6 qui rend e_1 nul.

En reformulant en fonction de y et e_1 :

Système 2 : $\max z = 480 + 12y - 16e_1$

$$\text{tel que : } x = 6 - \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}e_1$$
$$e_2 = 12 - \frac{9}{5}y + \frac{2}{5}e_1$$
$$e_3 = 12 - \frac{12}{5}y + \frac{1}{5}e_1$$

Première itération sur le tableau : Dans le tableau représentant le programme, on va chercher le pivot qui indiquera la variable sortante et la variable entrante. La colonne du pivot (variable entrante) correspond au coefficient de z le plus positif . Pour déterminer la ligne du pivot (variable sortante), il faut faire le rapport des contraintes sur les coefficients de la colonne pivot, on choisit la ligne obtenant le plus petit rapport positif ou nul.

variables de base	x : var entrante	y	e_1	e_2	e_3	B	rapport $B[i]/pivot$
e_1 : var sortante	5 : pivot	3	1	0	0	30	6 rapport min
e_2 :	2	3	0	1	0	24	12
e_3 :	1	3	0	0	1	18	18
C, v :	80 : coef max	60	0	0	0	z	

Ce qui donne après pivot (divison de la ligne du pivot par le pivot, puis ajustement des autres lignes) :

variables de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
x :	1	3/5	1/5	0	0	6
e_2 :	0	9/5	$-2/5$	1	0	12
e_3 :	0	12/5	$-1/5$	0	1	12
C, v :	0	12	-16	0	0	$z - 480$

$\boxed{\text{Solution 2 : (6,0,0,12,12) valeur z=480}}$

Deuxième itération (algébrique) : On exprime y en fonction de e_1 et e_3 :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Système 3 : } \max z = 540 - 15e_1 - 5e_3 \\ &\text{tel que : } y = 5 + \frac{1}{12}e_1 - \frac{5}{12}e_3 \\ &\qquad x = 3 - \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_3 \\ &\qquad e_2 = 3 + \frac{1}{4}e_1 + \frac{3}{4}e_3 \end{aligned}}$$

Donc la recette z ne peut plus croître.

Deuxième itération (tableau) : On peut augmenter z grâce au coeff de y qui est maximum positif : y est la colonne du pivot. La ligne du pivot est e_3 le min des rapports (si y dépasse 5, on rend e_3 négatif). Le pivot est 12/5.

Nouveau tableau :

variables de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
x :	1	0	$1/4$	0	$-1/4$	3
e_2 :	0	0	$-1/4$	1	$-3/4$	3
y :	0	1	$-1/12$	0	$5/12$	5
C, v :	0	0	-15	0	-5	$z - 540$

Les coefficients de z sont négatifs l'optimum est atteint : $\boxed{\text{Solution 3 : (3,5,0,3,0) valeur z=540}}$

La solution est donc de préparer 30 litres (3 bidons) du cocktail "soleil couchant", 50 litres de cocktail "balancé" on utilise tout le jus d'orange ($e_1 = 0$) tout le jus de framboise ($e_3 = 0$) et il reste 3 litres de jus de pamplemousse ($e_2 = 3$).

4 L'algorithme primal du simplexe en tableau

(Méthode du simplexe inventée par Dantzig en 1947)

La fonction Simplexe prend en entrée un programme linéaire sous forme standard elle retourne une solution optimale ou le message : "non borné". Il se résume ainsi :

Simplexe(A, B, C, v, X_{in})

On part du programme écrit dans une base réalisable X_{in}.
Tant qu'il existe une variable hors base ($i \in I_{out}$) à coeff > 0 dans z ($C[i] > 0$) :
- en choisir une comme variable entrante e,
- calculer la variable sortante s associée (celle qui minimise $q_s = B[s]/A[s,e]$)
- si $q_s = \infty$ alors Retourner("non borné")
  sinon $(A, B, C, v, X_{in}) =$ Pivot$(s, e, A, B, C, v, X_{in})$

Renvoyer la solution de base (var hors base=0, var en base=B)

où la fonction Pivot réécrit le programme dans la base voisine de X_{in} quand s sort et e entre.

Définition 18 (Pivot dans l'algorithme Simplexe Tableau)**.** *Le pivot est la case qui correspond à la colonne du coefficient de z le plus positif (critère d'entrée facultatif), et à la ligne i sur laquelle le rapport $B[i]/pivot$ est le plus petit et positif ou nul (critère de sortie obligatoire). La variable entrante est la variable de la colonne du pivot, la variable sortante est la variable de la ligne du pivot.*

La fonction Pivot effectue donc l'élimination de Gauss-Jordan sur $Tableau(P)$.

Définition 19. *La valeur du pivot est $A[s,e]$ et la réécriture du programme selon la base voisine revient à appliquer l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan sur la matrice* $\begin{pmatrix} A' & B \\ C' & z-v \end{pmatrix}$

où $A'_{in} = Id$, $A'_{out} = A$, $C'_{in} = \vec{0}$ *et* $C'_{out} = C$.

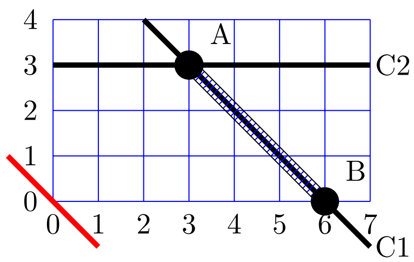
1. *Diviser la (ligne s) du pivot par le pivot $A[s,e]$:* $(nouvelle\_ligne\ s) = \frac{(ligne\ s)}{pivot}$
2. *Pour toute ligne i autre que s :* $(nouvelle\_ligne\ i) = (ligne\ i) - A[i,e] \times (nouvelle\_ligne\ s)$

⚠ On soustrait à la nouvelle ligne s.

V Dégénérescence

Un cas de dégénérescence se produit lorsque la fonction à optimiser est parallèle à l'hyperplan d'une contrainte alors on a des cas avec un nombre infini de solutions.

Soit le PL suivant :
$\max(z = x + y)$
$x + y \leq 6$ (contrainte C1)
$y \leq 3$ (contrainte C2)
$x \geq 0$ et $y \geq 0$



La fonction à optimiser est parallèle à l'hyperplan (ici la droite) limitant le demi-espace déterminé par la contrainte $x+y \leq 6$. Les sommets A et B sont tous deux optimaux. L'enveloppe convexe de ces sommets, c'est à dire le segment [AB], est telle que chacun de ses points donne à z la valeur optimale. C'est un cas de dégénérescence.

Résolution par le simplexe Le cas de dégénérescence se voit lorsque la dernière ligne du tableau comporte au moins 1 valeur nulle comme valeur maximale.

VI Problème primal/dual

In extenso

Primal (max)	Dual (min)
m contraintes d'infériorité	n contraintes de supériorité
n variables	m variables
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ \forall i \in [1,m]$ $x_j \geq 0,\ \forall j = 1, \dots n$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ \forall j \in [1,n]$ $y_i \geq 0,\ \forall i = 1, \dots m$

Matriciel

Primal (max)	Dual (min)
m contraintes	n contraintes
n variables	m variables
$\max C.X$ $A.X \leq B$ $X \geq \vec{0}$	$\min B.Y$ $A^T.Y \geq C$ $Y \geq \vec{0}$

Table 5.1 – Dual d'un programme linéaire en Forme Canonique in extenso/matriciel

⚠ Cette définition du dual n'est valable que pour un programme en Forme Canonique !

Théorème 6 (dualité forte)**.**

a) *Si un des deux problèmes primal ou dual possède une solution optimale avec valeur finie, alors la même chose est vraie pour l'autre problème, et les valeurs optimales des deux problèmes sont égales.*

b) *Si un des deux problèmes n'est pas borné, alors le domaine réalisable de l'autre est vide.*

Théorème 7 (coûts réduits)**.** *Quand le problème a une solution optimale à valeur finie, cette solution s'obtient en donnant aux variables du dual les valeurs égales à l'opposé des coûts réduits des variables d'écart leur correspondant dans le tableau simplexe de la solution primale optimale.*

VII Complexité

Notons que cette méthode (comme celle des flots) transforme un problème à solution réelles en problème discret : puisqu'on explore les sommets d'un polyèdre (pour les flots on modifie successivement les arcs d'une chaîne augmentante).

L'algorithme du Simplexe n'est pas polynomial : si l'on choisit mal la variable à augmenter à chaque étape alors on peut prendre un temps exponentiel. Ainsi Klee et Minty en 1972 ont montré qu'on pouvait trouver une séquence exponentielle (en la taille du PL) de solutions réalisables t.q. le profit s'améliore strictement à chaque fois.

En 1979, Khachian (mathématicien soviétique) a prouvé qu'il existe un algo polynomial pour les problèmes de PL en ramenant ce problème à un autre problème de résolution d'inégalités linéaires. Cet algorithme polynomial est basé sur un encadrement des solutions par des ellipses de plus en plus petites (Ellipsoid algorithm) (cf Combinatorial Optimization Papadimitriou et Steiglitz, Dover Publications Inc. 2013).