1

A) Förenkla uttrycket $(3x+1)^2-(x-2)(x+2)+(x-3)^2$

$9x^2+6x+1-(x^2-4)+x^2-6x+9$

$9x^2 \cancel{+6x} +1 \cancel{-x^2} +4 \cancel{+x^2} \cancel{-6x} +9$

$9x^2+1+4+9$

$9x^2+14$

B) Lös $3\ln 2-\ln x=\ln\frac{1}{4}$

$ln(2^3)-\ln x=\ln\frac{1}{4}$

$3\ln(2)-\ln(x)=\ln(2^{-2})$

$3\ln(2)-\ln(x)=-2\ln(2)$

$-ln(x)=-2\ln(2)-3\ln(2)$

$-\ln(x)=-5\ln(2)$

$ln(x)=-(-5\ln(2))$

$\ln(x)=\ln(2^5)$

$x=e^{5\ln(2)}$

$x=2^5$

$x=32$

C) Lös ekvationen $2\sqrt{x}+3=x$

$\cancel{2}\sqrt{x}=\frac{x-3}{2}$

$\sqrt{x}=\frac{x-3}{2}$

$x=\frac{x^2-6x+9}{4}$

$4x=x^2-6x+9$

$0=x^2-10x+9$

$0=x(x-5)-(-5)^2+9$

$0=x(x-5)-25+9$

$0=x(x-5)-\sqrt{16}$

$0=(x-5+\sqrt{16})(x-5-\sqrt{16}) \quad \sqrt{16}=4$

$0=(x-1)(x-9)$

$x_1=1$

$x_2=9$

2

A) Beräkna $f'(x)$ om $f(x)=6e^{-\frac{1}{2}x}+x^{\frac{3}{2}}$

$6\cdot-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{1}}$

$-3\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}$

$f'(x)=-3\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$f'(4)=-3\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}+\frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}$

$f'(4)=-3e^{-\frac{4}{2}}+\frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}$

$f'(4)=-3\cdot e^{-2}+\frac{3}{2}\cdot 2$

$f'(4)=-3e^{-2}+\frac{6}{2}$

$f'(4)=-3e^{-2}+3$

B) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y=x^2-3x+2$ i punkten där $x=4$ samt bestäm denna tangents skärning med x-axeln.

$y'(x)=2x-3$

$y'(4)=2\cdot 4-3$

$y'(4)=5$

$(4,6)$

4^2-12+2

$16-10=6$

$y-6=5(x-4)$

$y-6=(5x-20)$

$y=5x-14=0$

$0=\frac{14}{5}=\frac{5x}{5} \quad 0=\frac{14}{5}=x \quad \frac{14}{5}=2,8$

$y=5x-14 \quad x=2,8=\frac{14}{5} \quad (0,\frac{14}{5})$

3

Låt $f(x)=2x^3-9x^2+10$.

A) Bestäm alla eventuella lokala minimi-, maximi- och terrasspunkter till $f(x)$. Ange även för vilka x funktionen är växande.

$f'(x)=6x^2-18x$

$6x(x-3)$

$x_1=0 \quad x_2=3$

$54-81+10=64-81=-17$

		0		3	
6	+		+		+
x	-		+		+
x-3	-		-		+
---	---	---	---	---	---

		0		3	
$f'(x)$	+		-		+
	upp		ner		upp
$f(x)$		10		-17	

maximi punkt $(0, 10)$
minimi punkt $(3, -17)$
Växande när $x \leq 0 \quad x \geq 3$

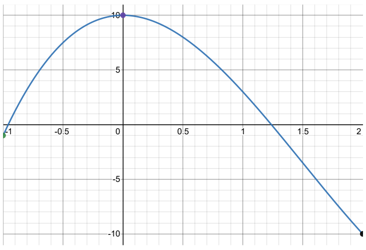
B) Rita grafen till $f(x)$ i intervallet $-1 \leq x \leq 2$. Bestäm om möjligt funktionens största respektive minsta värde i det intervallet.

b)

$f(-1) = -2 - 9 + 10 = -1$

$f(0) = 10$

$f(2) = 16 - 36 + 10 = -10$



Största värdet är 10

Minsta värdet är -10

4

A) Ange den primitiva funktion till $f(x) = 2x - \frac{1}{x^3}$ som antar värdet 2 när $x = 1$.

$f(x) = 2x - \frac{1}{x^3} \quad f(x) = 2x - x^{-3}$

$F(x) = x^2 + \frac{1}{2x^2} + C$

$F(1) = 2$

$1^2 + \frac{1}{2 \cdot 1^2} + C = 2$

$1 + \frac{1}{2} + C = 2$

$2 - 1 - \frac{1}{2} = C$

$1 - \frac{1}{2} = C$

$C = \frac{1}{2} = 0,5$

Svar: $x^2 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$

B) Beräkna arean mellan kurvan $y = x^2 + 1$ och x-axeln för $1 \leq x \leq 4$.

$\int_1^4 x^2 + 1dx = \left[\frac{x^3}{3} + 1x\right]_1^4$

$\left(\frac{4^3}{3} + 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right)$

$\left(\frac{64}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$

$\frac{64}{3} - \frac{1}{3} + 4 - 1$

$\frac{63}{3} + 3$

$21 + 3 = 24$

Svar: 24 a.e

5

A) I triangeln ABC är vinkeln 30° vid hörnet A och sidan $AB = 3\ \mathrm{cm}$. Vidare är arean av triangeln $4\ \mathrm{cm}^2$. Bestäm exakt längden av sidan AC.

Area: $\frac{ab \cdot \sin c}{2}$

$4 = \frac{3 \cdot b \cdot \sin(30)}{2}$

$8 = 3 \cdot b \cdot \sin(30)$

$\frac{8}{3 \cdot \sin(30)} = b$

$\frac{8}{3 \cdot 1/2} = b$

$\frac{8}{\frac{3}{2}} = b$

$\frac{8}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3} = b$

B) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $1 + \cos v = \sqrt{3} \sin 60^\circ$ som uppfyller att $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$. Markera dessa lösningar i enhetscirkeln.

$sin(60)^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$1 + \cos v = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
$1 + \cos v = \frac{3}{2}$
$\cos v = \frac{3}{2} - \frac{2}{2}$
$\cos v = \frac{1}{2}$
Svar: $\cos 60^\circ \quad \cos 300^\circ$

6

Grafen till $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$ innesluter tillsammans med x-axeln områden med begränsad area. Beräkna den sammanlagda arean av dessa områden. Skissa en enkel och rimlig figur (derivatan behöver inte undersökas) där arean som beräknas markeras ut.

$-x\left(x^2 - x - 6\right)$

$-x(x+2)(x-3)$

$x_1; 0 \quad x_2; -2 \quad x_3 : 3$

$A_1 = [-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2]_{-2}^{0}$

$\int_{-2}^{0} \left(-\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} + 3 \cdot 0^2\right) - \left(-\frac{-2^4}{4} + \frac{-2^3}{3} + 3 \cdot -2^2\right)$

$\int_{-2}^{0} 0 - \left(4 + \frac{8}{3} - 12\right) = \frac{8 \cdot 3}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

$$A2 = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3$$

$$\left(-\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2\right) - 0$$

$$\left(-\frac{81}{4} + 9 + 27\right)$$

$$\left(-\frac{81}{4} + 36\right) \quad \left(-\frac{81}{4} + \frac{36 \cdot 4}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{81}{4} + \frac{144}{4}\right) = \left(\frac{63}{4}\right)$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$\left(\frac{63}{4}\right) + \left(\frac{16}{3}\right) = \frac{63}{4} + \frac{64}{12} = \frac{189}{12} + \frac{64}{12}$$

$\frac{253}{12}$ a.e