

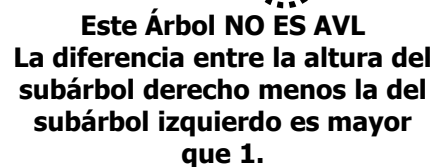
ÁRBOLES AVL

- Adelson, Velskii y Landis
- Es una modificación de los árboles binarios de búsqueda.
- El proceso que este tipo de árbol utiliza para agregar y borrar nodos, mantiene parcialmente balanceado al árbol por lo que se pueden realizar búsquedas más eficientes.

1

-

1



FACTOR DE BALANCEO

- Todo nodo del árbol AVL debe incluir un Factor de Balanceo que se obtiene de la siguiente manera:

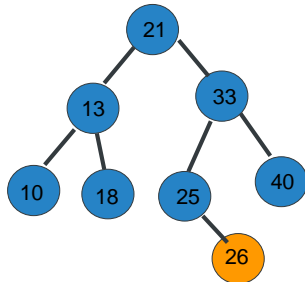
Factor de Balanceo = **Altura del subárbol derecho** – **Altura del subárbol izquierdo**

- Si el Factor de Balanceo es:
 - 0: las alturas son iguales.
 - -1: el subárbol izquierdo es más alto.
 - 1: el subárbol derecho es más alto.
- En estos casos se trata de un árbol AVL

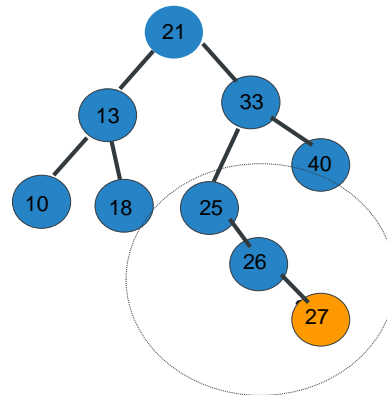
INSERTAR UN NODO AL AVL

1. El nodo se agrega siguiendo las reglas de inserción de un Árbol Binario de Búsqueda.
2. Si al agregar el nodo, el árbol cumple las reglas de un AVL el proceso termina de lo contrario se debe realizar una ROTACIÓN.

EJEMPLO....



Al agregar el valor **26** el árbol cumple con las reglas de un AVL (el Factor de Balanceo de todos los nodos es 0, 1 ó -1) .



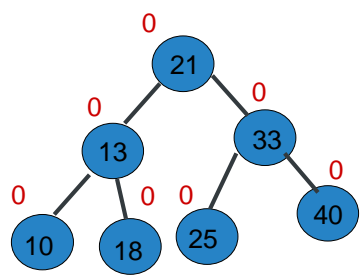
Al agregar el valor **27** el árbol se DESBALANCEÓ (el Factor de Balanceo para el nodo con el valor 25 ahora es 2). Se requiere una ROTACIÓN a la Izq.

ROTACIÓN

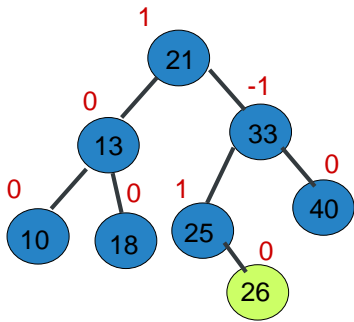
- Es el proceso que se realiza después de la inserción para balancear el árbol.
- Sólo se realiza cuando el nodo que se agrega causa un desbalanceo.
- Para iniciar la Rotación se debe encontrar el NODO PIVOTE.
- NODO PIVOTE: Es el nodo ancestro más cercano del nodo recién insertado cuyo Factor de Balanceo es mayor que $|1|$

EJEMPLOS DE NODO PIVOTE.....

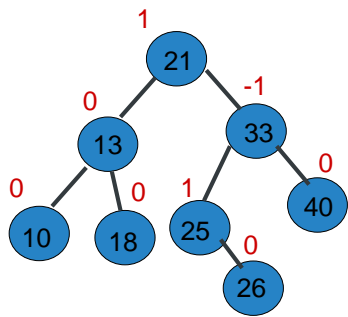
Factores iniciales



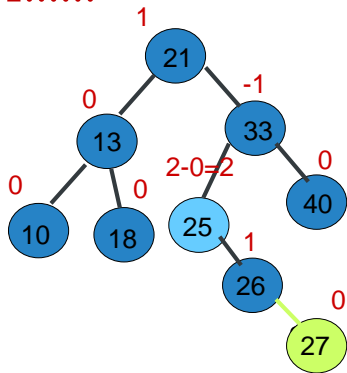
Cuando se agrega el 26, **No hay** nodo PIVOTE. Por lo que el árbol no requiere una ROTACIÓN.



EJEMPLOS DE NODO PIVOTE.....

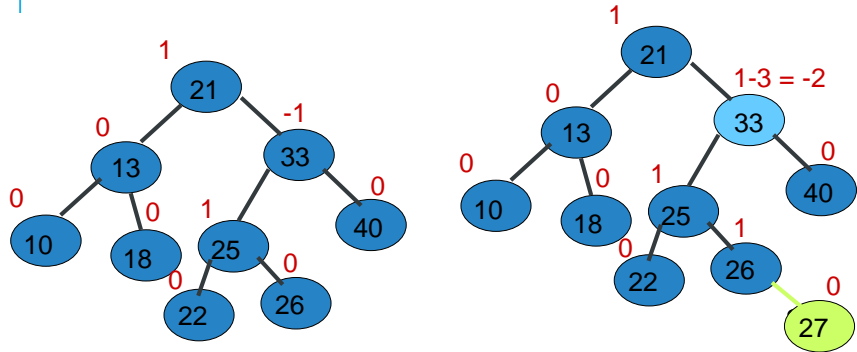


Inicialmente



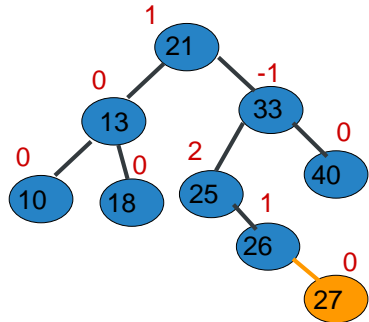
Cuando se agrega el 27 el **nodo Pivote** es 25, porque su $FB > |1|$

EJEMPLOS DE NODO PIVOTE.....



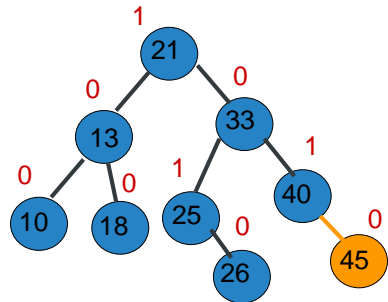
Cuando se agrega el 27 el nodo Pivote es 33.

EJEMPLO ¿CUÁNDO ROTAR?....



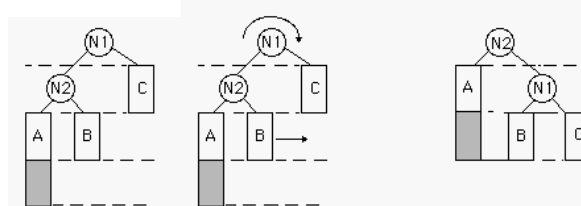
Como el nodo 27 se agregó en el subárbol más largo (el de la derecha) entonces se DEBE HACER UNA ROTACIÓN sobre el pivote

Como el nodo 45 se agregó en el subárbol más corto del 33, NO SE HACE LA ROTACIÓN.

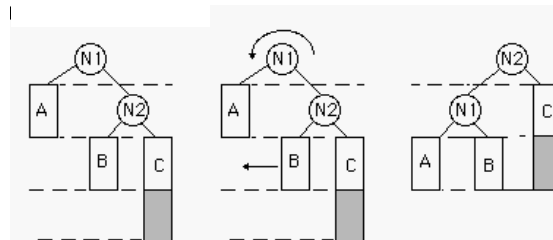


TAD AVL: ROTACIONES

■ Rotación D - Simple



■ Rotación I - simple



TIPOS DE ROTACIÓN

■ Rotación Simple

- Izquierda (RSI)
- Derecha (RSD)

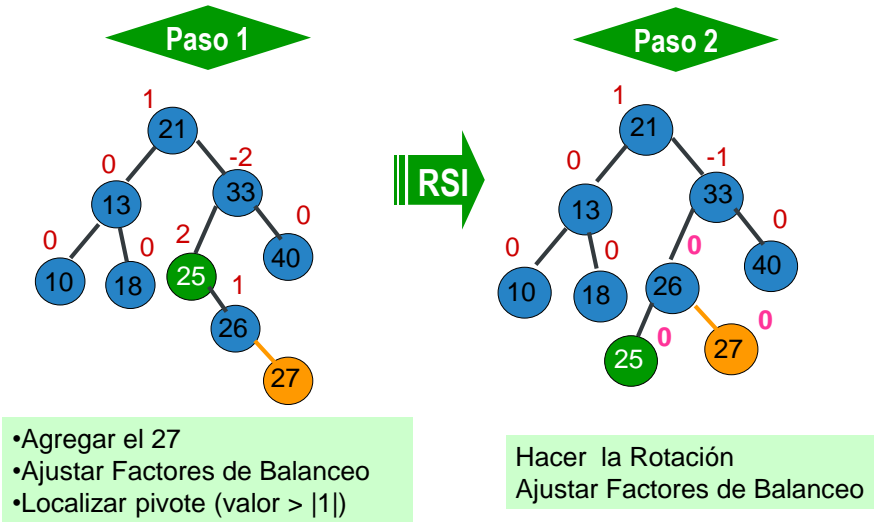
Requiere el movimiento de **3 apuntadores** y ajustar los Factores de Balanceo de los nodos afectados

■ Rotación Doble

- Izquierda (RDI)
- Derecha (RDD)

Requiere el movimiento de **5 apuntadores** y ajustar los Factores de Balanceo de los nodos afectados

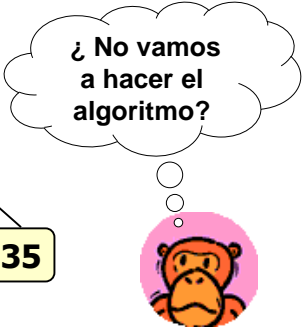
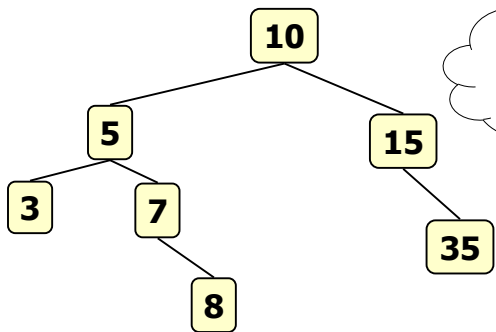
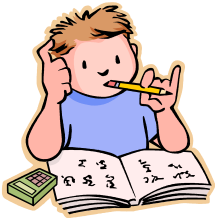
EJEMPLO ROTACIÓN A LA IZQUIERDA



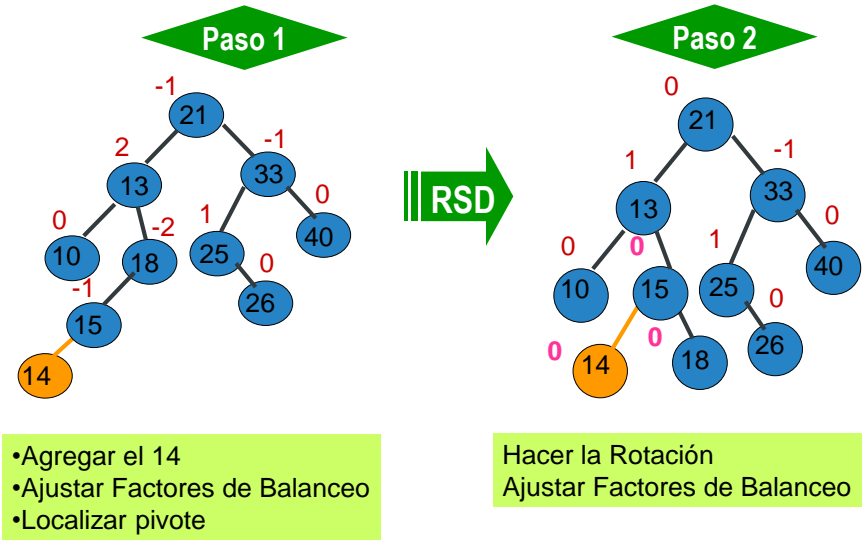
ACTIVIDAD EN INDIVIDUAL

Calcular los factores de balanceo para todos los nodos.

Manteniendo la condición de un ABB y utilizando un balanceo AVL, insertar los siguientes elementos en el árbol: 1, 9, 40, 48



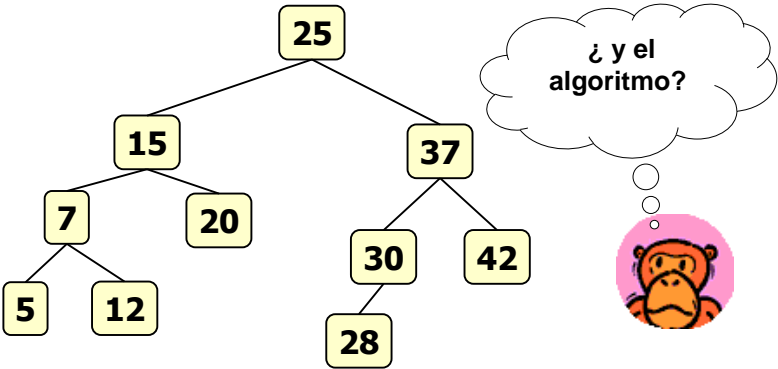
EJEMPLO ROTACIÓN A LA DERECHA



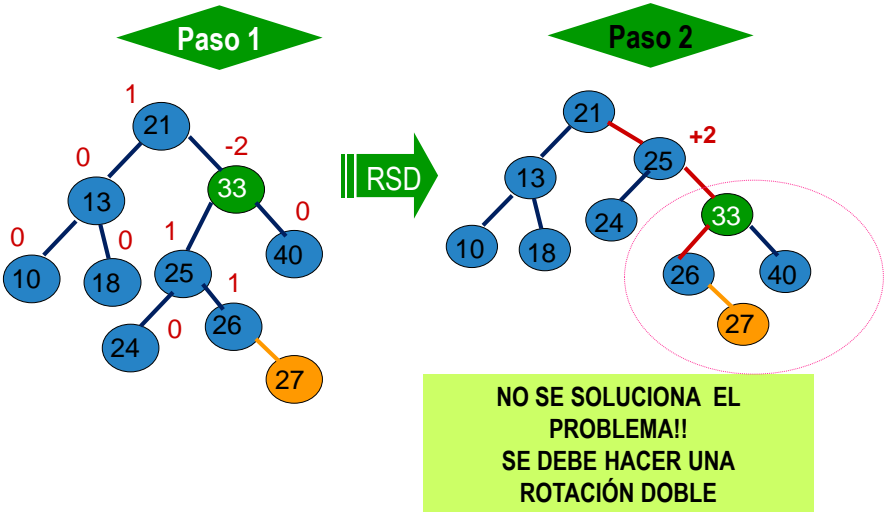
ACTIVIDAD INDIVIDUAL



- Calcular los factores de balanceo para todos los nodos
- Manteniendo la condición de un ABB y utilizando un balanceo AVL, insertar los siguientes elementos en el árbol: 27, 3, 50, 2, 1

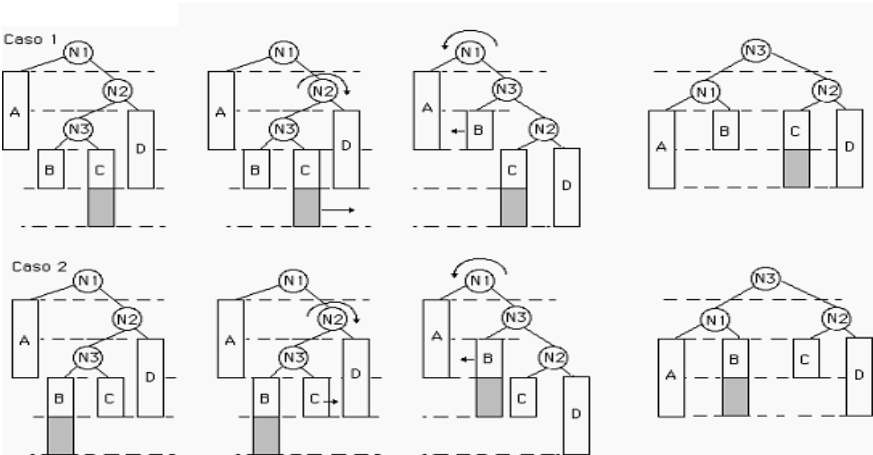


EJEMPLO... AGREGAR

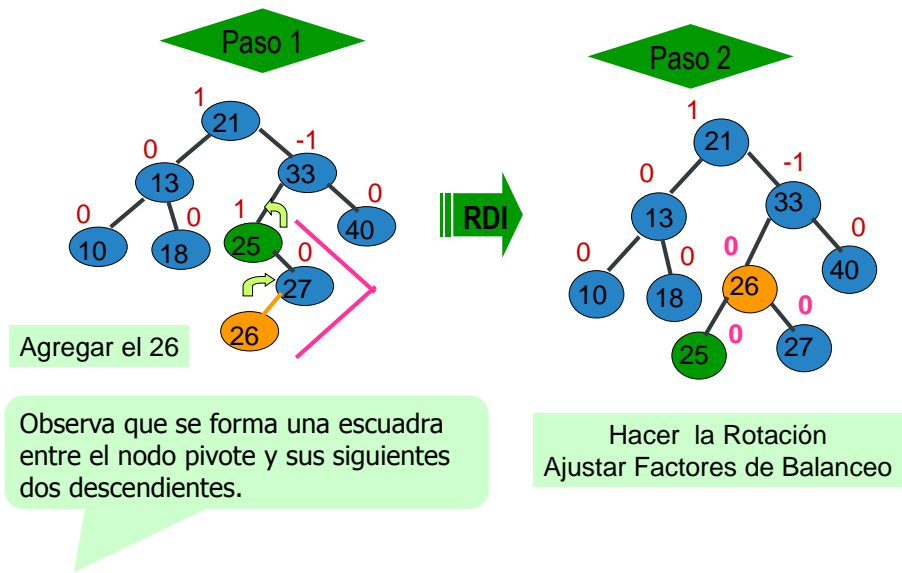


ROTACIONES DOBLES (RDI)

Rotación D-I doble

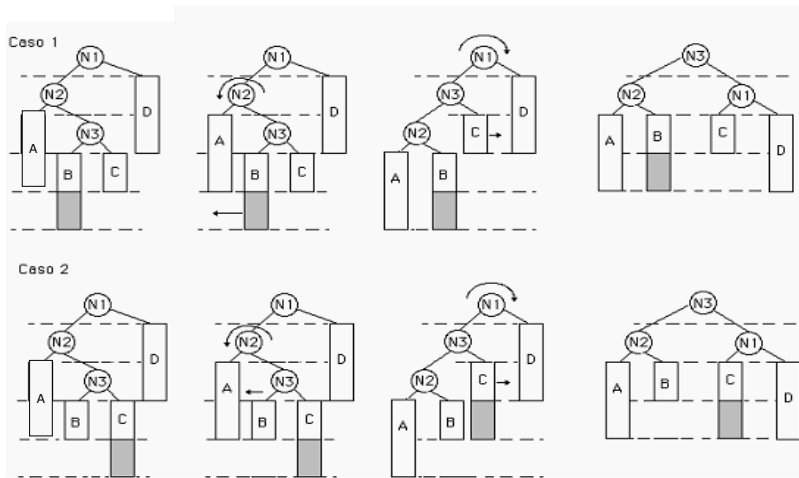


EJEMPLO....

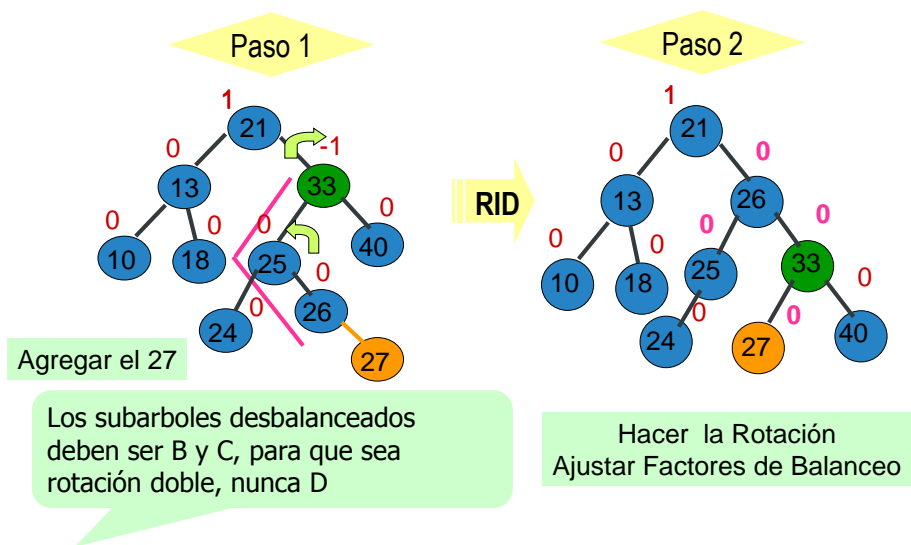


ROTACIONES DOBLES (RID)

Rotación I-D doble



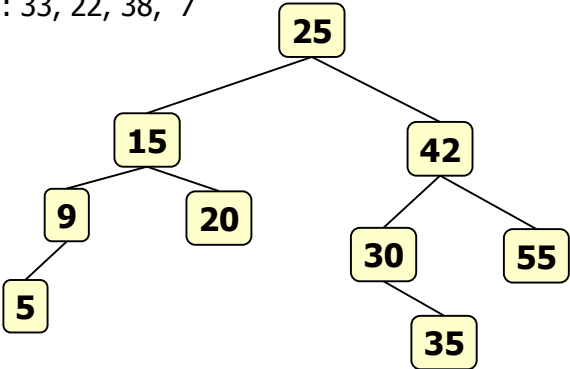
EJEMPLO....



ACTIVIDAD EN INDIVIDUAL



- Calcular los factores de balanceo para todos los nodos.
- Manteniendo la condición de un ABB y utilizando un balanceo AVL, insertar los siguientes elementos en el árbol: 33, 22, 38, 7



CUANDO ES ROTACIÓN SIMPLE Y CUANDO DOBLE?

- Para determinar esto podemos utilizar los siguientes criterios:
- Rotación Simple a la Izquierda (RSI)
 - $FE(\text{pivote}) = +2$ y $FE(\text{Raiz de subárbol der}) = +1$
- Rotación Simple a la Derecha (RSD)
 - $FE(\text{pivote}) = -2$ y $FE(\text{Raiz de subárbol izq}) = -1$
- Rotación Doble a la Izquierda (RDI)
 - $FE(\text{pivote}) = +2$ y $FE(\text{Raiz de subárbol der}) = -1$
- Rotación Doble a la Derecha (RDD)
 - $FE(\text{pivote}) = -2$ y $FE(\text{Raiz de subárbol izq}) = 1$

ACTIVIDAD INDIVIDUAL



- Insertar las siguientes secuencias de números en árboles AVL, manteniendo las condiciones de árboles parcialmente equilibrados
- [15, 1, 9, 4, 7, 20, 5, 45, 12, 8, 3, 14, 35]
- [20, 15, 35, 48, 55, 40, 9, 17, 19, 30, 93]

QUÉ HEMOS APRENDIDO?



PROCESO DE ELIMINACIÓN

- Eliminar el valor como se hace en un Árbol Binario de Búsqueda.
- Una vez realizada la baja, realizar el proceso de verificación del balanceo del AVL.
- ¿Qué puede ocurrir?
 - La baja no provoca desbalanceo en el árbol, sólo hay necesidad de ajustar algunos factores de balanceo.
 - La baja sí provoca desbalanceo en el árbol, por lo que se deberá recuperar el balance a través de rotaciones.

PROCESO DE ELIMINACIÓN

- Cuidado... La eliminación de un nodo puede provocar un desbalanceo TOTAL en el AVL!!! por este motivo, no existe un NODO PIVOTE ya que, en muchas ocasiones será necesario analizar a todos los ancestros del nodo borrado.
- El análisis para detectar un posible desbalanceo inicia en el padre del nodo recién eliminado.
- Si es necesario, una vez analizado el padre, sube al abuelo, y sigue hacia arriba, hasta que detecta que ya no hay problemas o bien, llega a la raíz del árbol.

PROCESO DE ELIMINACIÓN

- Cuando se analiza un nodo:
 - Si tiene un $FB = 0$, NO hay desbalanceo. Se puede asegurar que hacia arriba ya no habrá problemas.
 - Si tiene un $FB \neq 0$ y se borró del subárbol más largo. NO hay desbalanceo, sin embargo se debe analizar hacia arriba porque cambió la altura.
 - Si tiene un $FB \neq 0$ y se borró del subárbol más corto. SÍ hay desbalanceo, hay que hacer ROTACIÓN y seguir analizando hacia arriba.

ACTIVIDAD COLABORATIVA

- Generar el árbol AVL de la siguiente secuencia de números

[20, 18, 15, 12, 11, 9, 7, 6, 3, 1]

- Supóngase que se cuenta con el árbol AVL generado en el ejercicio anterior. Utilizar el algoritmo de eliminación de árboles AVL para eliminar los siguientes números: 3, 12, 6, 18 (en este orden). Dibujar los árboles resultantes al eliminar cada número.

QUÉ HEMOS APRENDIDO?

