Graphen

Die Stimmen werden lauter

Verzweifelte Studierende

31. Dezember 2023

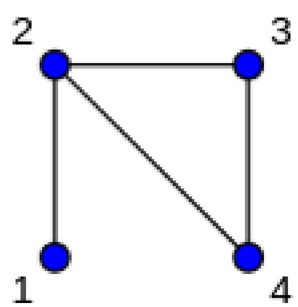
Inhaltsverzeichnis

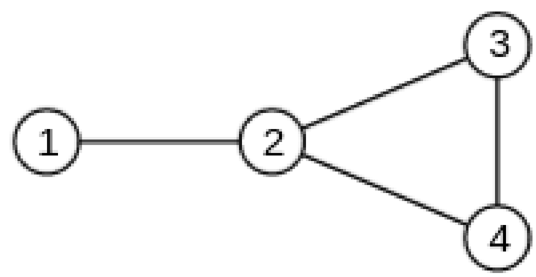
Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, besteht aus einer Menge V von Knoten (vertices) und einer Menge $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V x \neq y\}$ von Kanten.

Die Kanten verbinden die Knoten ohne eine Richtung (daher sind sie zweielementige Mengen und keine Tupel).

Knoten werden graphisch durch Punkte und Kanten durch Verbindungslinien repräsentiert. Der Graph $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ könnte z.B. so aussehen:





Speziele ungerichtete Graphen

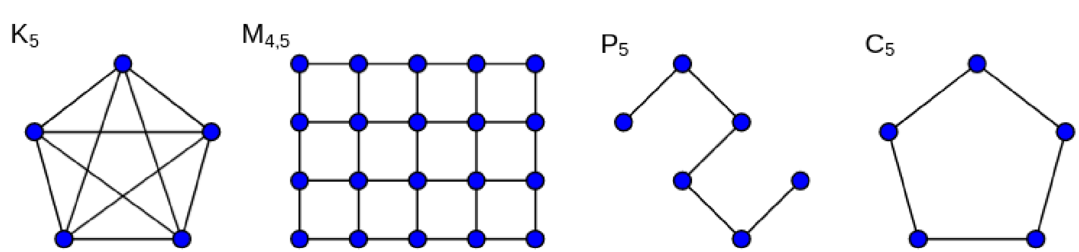
Vollständiger Graph K_n besteht aus n Knoten, die alle paarweise miteinander Verbunden sind

Gittergraph M_m, n besteht aus $m \cdot n$ Knoten, die in einem Gitter mit m Zeilen und n Spalten angeordnet sind

Pfad P_n besteht aus n Kanten und $n + 1$ Knoten, wobei aufeinanderfolgende Knoten miteinander verbunden sind

Kreis C_n besteht aus n Knoten, die zyklisch miteinander verbunden sind

Multigraphen Erlauben Mehrfachkanten und Schlingen (Kenten von einem Knoten zu sich selbst)



Nachbarschaft

Die Menge der Kanten, die durch eine Kante mit dem Knoten v verbunden ist, ist die Nachbarschaft U(v).

$$U(v) := \{u \in V \mid u, v \in E\}$$

Der Grad von v bezeichnet die Größe der Nachbarschaft von v.

$$g(v) := |U(v)|$$

Handschlagslemma In jedem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ gilt $\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|$
Dies gilt, da der Grad eines Knotens die Anzahl der Kanten, die an deisem Konten anliegen ist und jede Kante an genau zwei Knoten anliegt. Somit kommen pro Kante 2 zu Summe hinzu.

Knoten ohne Nachbarn, nennt man **isoliert**.

Begriffe

Sei $G = (V, E)$ ein Graph

adjazent Die Knoten u, v heißen adjazent (benachbart) wenn $u, v \in E$
Endknoten Die Knoten u, v heißen Endknoten der Kante u, v
inzident ein Knoten u und eine Kante e heißen inzident, wenn u ein Endknoten von e ist
Weg w Eine Folge von Knoten aus V, die jeweils mit dem nächsten Verbunden sind
$w = (v_0, ..., v_l) mit \{v_i, v_{i+1}\} \in E$
Pfad w Ein Weg, bei dem alle Knoten paarweise verschieden sind
Anfangsknoten $\alpha(w) := v_0$ vom Weg w
Endknoten $\omega(w) := v_l$ vom Weg w
Einen Weg/Pfad mit Anfgangsknoten u und Endknoten v nennt man u-v-Weg bzw u-v-Pfad
geschlossener Weg Anfangsknoten und Endknoten sind gleich
$v_0 = v_l$
offener Weg Anfangsknoten und Endknoten sind gleich
$v_0 \neq v_l$
innere Knoten alle Knoten vom Weg, außer Anfangs- und Endknoten
Kreis mit Länge $l \geq 3$ ist eine Folge $(v_0, ..., v_{l-1}, v_0)$
$(v_0, ..., v_{l-1})$ ist hierbei ein Weg in G
$\{v_{l-1}, v_0\}$ ist hierbei eine Kante in G
Kreise der Länge 2 sind mit Mehrfachkanten möglich
Kreise der Länge 1 sind mit Schlingen möglich

Wiederholung		offen/geschlossen	Name	Englisch
Knoten	Kanten			
ja	ja	offen	Weg/Kantenfolge	walk
ja	ja	geschlossen	geschl. Weg/Kantenfolge	closed walk
ja	nein	offen	Kantenzug	trail
ja	nein	geschlossen	geschl. Kantenzug	circuit
nein	nein	offen	Pfad	path
nein	nein	geschlossen	Kreis	cycle

Abbildung 1: Alt text

Teilgraph

Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt Teilgraph eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, wenn $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq V_G$. Also wenn G alle Knoten und Kanten von H enthällt.

Induzierter Teilgraph ist ein Teilgraph wo zusätzlich gilt, $E_H = E_G \cap \{\{u, v\} \mid u, v \in V_H\}$.

d.h. für alle Knoten die im Teilgraphen enthalten sind, müssen auch alle Kanten zwischen diesen Knoten enthalten sein

Schreibweise: $H = G[V_H]$

Aufspannender Teilgraph ist ein Teilgraph wo zusätzlich gilt, $V_H = V_G$.

d.h. der Teilgraph enthält alle Knoten, aber nicht zwingend alle Kanten

Zusammenhangskomponente ein Graph heißt zusammenhängend, wenn für jedes paar $u, v \in V$ ein u-v- Pfad existiert

einen Teilgraphen, der zusammenhängend ist, nennt man Zusammenhangskomponente

Bäume und Wälder

Kreisfreier Graph enhält keinen Kreis als Teilgraph

Baum ein zusammenhängender Kreisfreier Graph

viele Probleme, die bei allgemeinen Graphen schwer lösbar sind, sind für Bäume leicht lösbar (z.B. kürzerster Weg)

hat keinen bevorzugten Knoten

für alle Bäume gilt $|E| = |V| - 1$

Wald ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind

Blatt ein Knoten eines Baumes mit dem Grad 1

jeder Baum mit zwei oder mehr Knoten, hat mindestens zwei Blätter

entfernt man bei einem Baum mit zwei oder mehr Knoten ein Blatt, ist das Ergebnis noch immer ein Baum

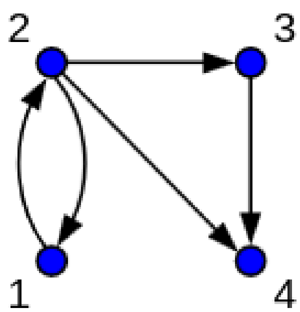
Aufspannende Bäume aufspannende Teilgraphen, die Bäume sind

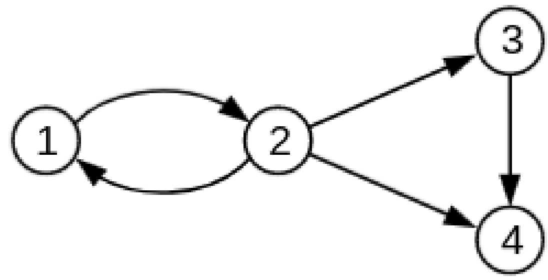
Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph (oder Digraph) $D = (V, A)$, besteht aus einer Menge V von Knoten (vertices) und einer Menge $A \subseteq V \times V$ von gerichteten Kanten (arcs).

Die Kanten verbinden die Knoten in eine Richtung (daher Tupel). Eine gerichtete Kante (a, b) stellt eine Verbindung von a nach b dar und eine gerichtete Kante (b, a), eine von b nach a. Es handelt sich also um zwei unterschiedliche Kanten.

Knoten werden graphisch durch Punkte und Kanten durch Verbindungslinien mit Richtungspfeil repräsentiert. Der Graph $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ könnte z.B. so aussehen:





Bei der gerichteten Kante $e = (u, v)$, heißt u **Anfangsknoten** $\alpha(e) := u$ und v **Endknoten** $\omega(e) := v$

Analoge Definitionen zum ungerichteten Graphen

Folgende Eigenschaften des gerichteten Graphen lassen sich analog zum ungerichteten definieren. Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph.

Induzierter Teilgraph Ein durch $W \subseteq V$ induzierter Teilgraph ist $D_W = D[W] := (W, A \cap (W \times W))$