

Aussagenlogik

Endlose Schmerzen

Verzweifelte Studierende

18. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

Aussage	2
Beispiele	2
Aussagenvariable	2
Symbole, Junktoren	2
Aussagenlogische Begriffe	2
Aussagenlogische Gesetze	3
Logische Beweise	4
Bedingungen	5

Aussage

Eine (elementare) Aussage beschreibt ein bestimmtes Prädikat und Subjekts das einen eindeutigen Wahrheitswert hat.

Beispiele

Aussage	Keine Aussage
3 ist eine Primzahl.	Sie wird eine gute Informatikerin.
Ich glaube, dass es morgen regnen wird.	Löse die Gleichung $x^3 + 1 = 0$
Die Sonne scheint.	Dieser Satz ist falsch.

Prinzip des ausgeschlossenen Dritten Es gibt nur wahr oder falsch, keine dritte Option.

Aussagenvariable

Steht für eine bestimmte Aussage

Symbole, Junktoren

Negation $\neg p$

Und $p \wedge q$

Oder $p \vee q$

Xor $p \dot{\vee} q$

Alternative: $p \dot{\vee} q \iff (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Implikation $p \rightarrow q$

Alternative: $p \rightarrow q \iff \neg p \vee q$

Negation: $\neg(p \rightarrow q) \iff (p \wedge \neg q)$

Kontraposition: $\neg q \rightarrow \neg p$ ist logisch äquivalent zu $p \rightarrow q$

Äquivalenz $p \leftrightarrow q$

Alternative: $p \rightarrow q \wedge (q \rightarrow p)$ oder $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Aussagenlogische Begriffe

Tautologie Alle Belegungen der Variablen sind wahr.

Englisch: Tautology

Symbol: \top

Kontradiktion Alle Belegungen der Variablen sind falsch

Englisch: Contradiction, Unsatisfiable

Symbol: \perp

Erfüllbar Mindestens eine Belegung der Variable ist wahr

Englisch: Satisfiable

Logische Äquivalenz Zwei aussagenlogische Formeln r_1, r_2 sind ident, wenn gilt $r_1 \leftrightarrow r_2$.

r_1 und r_2 müssen dieselbe Wahrheitstabelle haben.

$r_1 \leftrightarrow r_2$ ist eine Meta-Aussage

Meta-Aussage Eine Aussage über Aussagen

Eine Aussage über die Logik selbst

Aussagenlogische Formel Ausdrücke die aus elementaren Aussagen und der Verknüpfungen gebildet werden können

- w und f sind aussagenlogische Formeln
- für zwei AF p und q , sind auch $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ und $\neg p$ aussagenlogische Formeln
- Keine anderen Gebilde sind AF

Aussagenlogische Gesetze

Gesetz	\wedge		\vee	
Kommutativität	$p \wedge q$	$\iff q \wedge p$	$p \vee q$	$\iff q \vee p$
Assoziativität	$(p \wedge q) \wedge r$	$\iff p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r$	$\iff p \vee (q \vee r)$
Distributivität	$p \wedge (q \vee r)$	$\iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$\iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identität	$p \wedge \top$	$\iff p$	$p \vee \perp$	$\iff p$
Negation	$p \wedge \neg p$	$\iff \perp$	$p \vee \neg p$	$\iff \top$
Doppelte Negation	$\neg(\neg p)$	$\iff p$		
Idempotenz	$p \wedge p$	$\iff p$	$p \vee p$	$\iff p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q)$	$\iff \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\iff \neg p \wedge \neg q$
Universale Grenze	$p \wedge \perp$	$\iff \perp$	$p \vee \top$	$\iff \top$
Absorption	$p \wedge (p \vee q)$	$\iff p$	$p \vee (p \wedge q)$	$\iff p$
Tautologie/Kontradiktion	$\neg \top$	$\iff \perp$	$\neg \perp$	$\iff \top$

Duale Form Bei Aussagen, die nur die Junktoren \wedge und \vee enthält, ist die duale Formel r^d jene, bei denen sowohl alle \vee und \wedge als auch jedes \top und \perp vertauscht werden.

Sind r und s zwei logisch äquivalente Formeln, so sind auch die dazu dualen Formeln äquivalent:

$$\text{Wenn } r \leftrightarrow s, \text{ dann } r^d \leftrightarrow s^d$$

$$r : (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \perp)$$

$$\text{dual } r : (p \vee \neg q) \wedge (r \vee \top)$$

Substitutionsregel Sei P eine logische Formel und p eine Variable aus P .

- Ist P eine Tautologie, und ersetzt man jedes p in der Formel durch immer dasselbe q , so entsteht eine neue Formel P_1 die ebenfalls eine Tautologie.
- Sei q eine logisch äquivalente Aussage, also $p \leftrightarrow q$. Ersetzt man in der Formel P einige p durch q , so erhält man eine neue Formel P_2 für welche gilt $P_1 \leftrightarrow P$.

Logische Beweise

Schlussfolge Ist eine Implikation von sogenannten Voraussetzungen (Prämissen) p_1, \dots, p_n auf eine Folgerung (Konklusion / Behauptung) q

Notation: $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$

Wie Entails (\models) in Logic

			Voraussetzungen		Konklusion
p	q	r	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	f	f
f	f	f	f	w	f

Modus Ponens Wenn $p \rightarrow q$ wahr ist und p wahr ist, muss q wahr sein.

$p \rightarrow q$

p

$\therefore q$

Modus Tollens Wenn $p \rightarrow q$ wahr ist und $\neg q$ wahr ist, muss $\neg p$ wahr sein.

$p \rightarrow q$

$\neg q$

$\therefore \neg p$

Syllogismus (Kettenschluss) Wenn $p \rightarrow q$ wahr ist und $q \rightarrow r$ wahr ist, gilt $p \rightarrow r$.

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\therefore p \rightarrow r$

Kontradiktionsregel Man nimmt das Gegenteil dessen an, was man beweisen will, und führt diese (negierte) Aussage ad absurdum.

$\neg p \rightarrow \perp$

$\therefore p$

Bedingungen

Bedingung	Erforderlich	Ausreichend
Notwendige Bedingungen	✓	✗
Hinreichende Bedingungen	✗	✓
Notwendig und hinreichende Bedingungen	✓	✓

p	q	r	Prämissen		$p \wedge r$	q	Konklusion	kritisch?	Konklusion auch wahr?
			$q \rightarrow r$	$p \rightarrow q$			$(p \wedge r) \leftrightarrow q$		
f	f	f	w	w	f	f	w	ja	ja
f	f	w	w	w	f	f	w	ja	ja
f	w	f	f	w	f	w	f	nein	irrelevant
f	w	w	w	w	f	w	f	ja	nein*
w	f	f	w	f	f	f	w	nein	irrelevant
w	f	w	w	f	w	f	f	nein	irrelevant
w	w	f	f	w	f	w	f	nein	irrelevant
w	w	w	w	w	w	w	w	ja	ja

Die Gültigkeit des obigen Schlusses scheitert also wegen der mit * gekennzeichneten Zeile. Dieser Fall ist jener, wo zwar die notwendige Bedingung r erfüllt ist, aber die hinreichende Bedingung p nicht gilt. Die Aussage q kann dennoch aus (alternativen) Gründen $\neq p$ erfüllt, also wahr, sein; dennoch wäre, da p falsch ist, die "gemeinsame Bedingung" $p \wedge r$ falsch, obgleich q erfüllt ist. Damit ist die Schlussweise falsch, und $p \wedge r$ keine notwendige-und-hinreichende Bedingung für q .