Prädikatenlogik

Mehr endlose Schmerzen

Verzweifelte Studierende

18. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

Einführung

- Aussagenlogik weist Prädikate einem bestimmten Subjekt zu.
- Lässt man das Subjekt hingegen offen ("variabel"), lässt es also beliebig aus einer Grundmenge wählbar, so erhält man eine Aussageform.
- Das Prädikat ist hierbei eine aussagenlogische Formel p, in welcher ein (oder mehrere) Teile stellvertretend durch eine Variable (z.B. x) ersetzt werden. Man schreibt hierfür $p(x)$, um die Abhängigkeit der aussagenlogischen Formel p von der Variable x explizit auszudrücken.

Begriffe

Grundmenge Die Menge X an für x möglichen Werte.
$=$ "Aussageform über X"
Gültigkeitsbereich Jene Werte $x = a$, für welche die Aussage $p(a)$ `wahr` ist, wird als Gültigkeitsbereich der Aussageform bezeichnet.

- $p(x), q(x) : p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow (p \wedge q)(x) \Leftrightarrow (p \circ q)(x)$

All-Aussage $\forall x \in \mathbb{N} : p(x)$
Negation: $\neg \forall x \in \mathbb{N} : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \neg p(x)$
Existenz-Aussage $\exists x \in \mathbb{N} : p(x)$
Negation: $\neg \exists x \in \mathbb{N} : p(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : \neg p(x)$
Gebundene Variablen Sind teile eines All- oder Existenz Aussage ($\exists x$ / $\forall x$)
Freie Variablen Alle anderen Variablen
(Gewöhnliche) Aussage Alle Variablen einer Form sind gebunden.

Variable Prädikate

$$\forall x : p(x) \to p(a)$$

ist p kein näher spezifiziertes Prädikat, und a keine näher spezifizierte Konstante, d.h. es handelt sich hierbei um eine prädikatenlogische Formel. Diese werden bisweilen mit griechischen Buchstaben notiert, etwa könnte $\psi(p, a)$ die obige Formel bezeichnen.

Mathematische Sätze

Implikation $p(x) \Rightarrow q(x)$ für jedes $p(x)$ da `wahr` ist muss $q(x)$ auch `wahr` sein.
Ist eine Meta-Aussage
Logische Äquivalenz $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ wenn p und q für jede Belegung x aus X denselben Wert haben.

(Mathematische) Definition

Eine Definition ist eine vereinbarte logische Äquivalenz von definierten neuen Begriffen und den definierenden, bereits bekannten, Begriffen oder Eigenschaften.

Symbol für Definition logischer Formeln $:\Leftrightarrow$, gelesen als "definiert logisch äquivalent zu".
Symbol für Definition von Termen $:=$, gelesen als "definiert als"