Explicar el operador Jacobiano

Fonseca Camarena Jonathan

Universidad Politécnica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

Profesor: Carlos Enrique Morán Garabito

30 de septiembre del 2019

Índice general

0.1. Introducción

En cálculo vectorial, se llama jacobiano o determinante jacobiano al determinante de la matriz jacobiana. Tanto la matriz jacobiana como el determinante jacobiano reciben su nombre en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.
En geometría algebraica, el jacobiano de una curva hace referencia a la variedad jacobiana, un grupo y variedad algebraica asociada a la curva, donde la curva puede ser embebida.

0.2. Matriz Jacobiano

La matriz jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto. En este sentido, el jacobiano representa la derivada de una función multivariable.
Propiamente deberíamos hablar más que de matriz jacobiana de diferencial jacobiana o aplicación lineal jacobiana ya que la forma de la matriz dependerá de la base o coordenadas elegidas. Es decir, dadas dos bases diferentes la aplicación lineal jacobiana tendrá componentes diferentes aun tratándose del mismo objeto matemático.

0.3. Operador Jacobiano

Para la obtención del operador Jacobiano, se deben tener las velocidades lineal y angular de cada uno de los planos del sistema de robot de tres grados de libertad, con el método de la velocidad de propagación.

• Velocidades del primer plano

La velocidad angular del plano cero es nula, ya que no tiene niguna rotación por ser el plano de referencia para los demás planos. Remplazando

$${}^{1}_{1}\omega = {}^{1}_{0}R * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix}$$

- Velocidad lineal

En el primer plano no existe de movimiento de translación por consiguiente la velocidad lineal es cero.

$$ {}^{1}_{1}v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Velocidades del segundo plano:

- Velocidad angular

$$ {}^{i+1}_{i+1}\omega = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}_{i}\omega + \theta'_{i+1}\,{}^{i+1}_{i+1}\hat{Z} $$

$$ {}^{2}_{2}\omega = {}^{2}_{1}R\,{}^{1}_{1}\omega + \theta'_{2}\,{}^{2}_{2}\hat{Z} $$

Remplazando y solucionando:

$$ {}^{2}_{2}\omega = \begin{bmatrix} cos54 & sen54 & 1 \\ -sen54 & cos54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} $$

Se realiza el producto punto entre matrices y se suma

$$ {}^{2}_{2}\omega = \begin{bmatrix} (cos54)(0) + (sen54)(0) + (0)(\theta'_1) \\ (-sen54)(0) + (cos54)(0) + (0)(\theta'_1) \\ (0)(0) + (0)(0) + (1)(\theta'_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 \\ 0+0 \\ \theta'_1 + \theta'_2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 + \theta'_2 \end{bmatrix} $$

Velocidad lineal:

$$ {}^{i+1}_{i+1}v = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}_{i}v + {}^{i}_{i}\omega \times {}_{i+1}{}^{i}P\right) $$

$$ {}^{2}_{2}v = {}^{2}_{1}R\left({}^{1}_{1}v + {}^{1}_{1}\omega \times {}_{2}{}^{1}P\right) $$

Solución del producto cruz

$$ {}^{1}_{1}\omega \times {}^{1}_{2}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{1}\omega \times {}^{1}_{2}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{1}\omega \times {}^{1}_{2}P = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \ddot{k} \\ 0 & 0 & \theta_1' \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} $$

$$ {}^{1}_{1}\omega \times {}^{1}_{2}P = \hat{\imath}\big((0 * 0) - (0 * \theta_1')\big) - $$

$$ j((0 * 0) - (5 * \theta_1') + k((0 * 0) $$

$$ -(5 * 0)) $$

$$ {}^{1}_{1}\omega \times {}^{1}_{2}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 * \theta_1' \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}v = \begin{bmatrix} cos54 & sen54 & 1 \\ -sen54 & cos54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 * \theta_1' \\ 0 \end{bmatrix} \right) $$

$$ {}^{2}_{2}v = \begin{bmatrix} cos54 & sen54 & 1 \\ -sen54 & cos54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 5 * \theta_1' \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}v = \begin{vmatrix} (cos54)(0) + (sen54)(5 * \theta_1') + (0)(0) \\ (-sen54)(0) + (cos54)(5 * \theta_1') + (0)(0) \\ (0)(0) + (0)(5 * \theta_1') + (1)(0) \end{vmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}v = \begin{bmatrix} 5sen54\theta_1' \\ 5cos54\theta_1' \\ 0 \end{bmatrix} $$

Velocidades del tercer plano • Velocidad angular AL tener el mismo ángulo de rotación el plano tres con el dos la velocidad angular es igual.

$$ {}^{3}_{3}\omega = {}^{3}_{2}\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1' + \theta_2' \end{bmatrix} $$

Velocidad Lineal

$$ {}^{i+1}_{i+1}v = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}_{i}v + {}^{i}_{i}\omega \times {}_{i+1}{}^{i}P) $$

$$ {}^{3}_{3}v = {}^{3}_{2}R({}^{2}_{2}v + {}^{2}_{2}\omega \times {}_{3}^{2}P) \qquad (1) $$

Solución del Producto de Cruz

$$ {}^{2}_{2}\omega \times {}^{3}_{2}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1' + \theta_2' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}\omega \times {}^{3}_{2}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1' + \theta_2' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}\omega \times {}^{3}_{2}P = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \ddot{k} \\ 0 & 0 & \theta_1' + \theta_2' \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{2}\omega \times {}^{3}_{2}P = \hat{\imath}\big((0*0) - (0*\theta_1' + \theta_2')\big) - $$

$$ \hat{\jmath}((0*0) - (3*\theta_1' + \theta_2') + k((0*0) $$

$$ -(3*0)) $$

$$ {}^{1}_{1}\omega \times {}^{3}_{2}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 3*(\theta_1' + \theta_2') \\ 0 \end{bmatrix} $$

Remplazando en la ecuación (1)

$$ {}^{3}_{3}v = \begin{bmatrix} 5sen54\theta_1' \\ 5cos54\theta_1' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5(\theta_1' + \theta_2') \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}_{3}v = \begin{bmatrix} 5sen54\theta_1' \\ 5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2') \\ 0 \end{bmatrix} $$

Por tanto el Jacobiano expresado en el plano tres es:

$$ J^3(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\delta 5sen54\theta_1'}{\delta\theta_1} & \dfrac{\delta 5sen54\theta_1'}{\delta\theta_2} \\ \dfrac{\delta 5cos54\theta_1' + 3(\theta_1' + \theta_2')}{\delta\theta_1} & \dfrac{\delta 5cos54\theta_1' + 3(\theta_1' + \theta_2')}{\delta\theta_2} \end{pmatrix} $$

$$ J^3(\theta) = \begin{bmatrix} 4.04 & 0 \\ 7.04 & 3 \end{bmatrix} $$

La velocidad del plano tres expresada en el plano de referencia cero:

$$ {}^{0}_{3}v = {}^{0}_{3}R\, {}^{0}_{3}v = {}^{0}_{1}R\, {}^{1}_{2}R\, {}^{2}_{3}R\, {}^{3}_{3}v $$

$$ = \begin{bmatrix} C_{25} & S_{25} & 0 \\ -S_{25} & C_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{54} & S_{54} & 0 \\ -S_{54} & C_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5sen54\theta_1' \\ 5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2') \\ 0 \end{bmatrix} $$

Se realiza el producto entre las matrices

$$ {}^{0}_{3}v = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.57 & 0 \\ -0.57 & 0.81 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.58 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.58 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5sen54\theta_1' \\ 5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2') \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}v = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.97 & 0 \\ -0.97 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5sen54\theta_1' \\ 5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2') \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}v = \begin{bmatrix} 0.1(5sen54\theta_1') + 0.97(5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2')) \\ -0.97(5sen54\theta_{1)}' + 0.01(5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2')) \\ 0 \end{bmatrix} $$

El Jacobiano expresado en 3 es:

$$J^{3}(\theta)\begin{pmatrix} \frac{\delta 0.1(5sen54\theta_1') + 0.97(5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2'))}{\delta\theta_1} & \frac{\delta 0.1(5sen54\theta_1') + 0.97(5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2'))}{\delta\theta_2} \\ \frac{\delta - 0.97(5sen54\theta_{1}') + 0.01(5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2'))}{\delta\theta_1} & \frac{\delta - 0.97(5sen54\theta_{1}') + 0.01(5cos54 + 3(\theta_1' + \theta_2'))}{\delta\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$J^{3}(\theta) = \begin{bmatrix} 2.89 & 3.92 \\ -3.861 & 0.03 \end{bmatrix}$$

El vector es la relación de las velocidades articulares con las velocidades cartesianas del extremo.

0.4. Conclusión

Esta investigació permite explicar con un cálculo concreto la velocidad de las articulaciones de un robot manipulador, sin importar cuantas tenga, y permite la relación de la velocidad angular y lineal. Mas complicado que las tareas pasadas, en las siguientes practicas pondremos a prueba los conocimiientos antes mencionados.

[1]

Bibliografía

[1] Aníbal Ollero Baturone. Robótica manipuladores y robots móviles. *Marcombo*, page 600, 2001.