



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA**  
**DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA**

Describir los métodos geométricos algebraicos  
y desacoplo cinemático

Fonseca Camarena Jonathan.  
Ing. Mecatrónica

22 de octubre de 2019

## 0.1 Cinemática Directa

El problema cinemático directo consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las posiciones articulares y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

$$x = f(q)$$

En general, un robot de "n" grados de libertad está formado por "n" eslabones unidos por "n" articulaciones, de forma que cada par articulación-eslabón constituyen un grado de libertad. A cada eslabón se le puede asociar un sistema de referencia solidario a él y, utilizando las transformaciones homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen el robot. La matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los distintos sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot se denomina  ${}^{i-1}A_i$ . Del mismo modo, la matriz  ${}^0A_k$ , resultante del producto de las matrices  ${}^{i-1}A_i$  con i desde 1 hasta k, es la que representa de forma total o parcial la cadena cinemática que forma el robot con respecto al sistema de referencia inercial asociado a la base. Cuando se considera todos los grados de libertad, a la matriz  ${}^0A_n$  se le denomina T, matriz de transformación que relaciona la posición y orientación del extremo final del robot respecto del sistema fijo situado en la base del mismo. Así, dado un robot de 6 gdl, se tiene que la posición y orientación del eslabón final vendrá dado por la matriz T:

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot \dots \cdot {}^nA_n$$

Para describir la relación que existe entre dos sistemas de referencia asociados a eslabones, se utiliza la representación Denavit-Hartenberg (D-H).

## 0.2 Cinemática Inversa

El problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot  $[q = q_1, q_2, \dots, q_n]$  para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

Al contrario que el problema cinemático directo, el cálculo de la cinamática inversa no es sencilla ya que conssite en la resolución de una serie de ecuaciones fuertemen dependiente de la configuración del robot, además de existir diferentes *n-uplas*  $[q=q_1, q_2, \dots, q_n]$  que resuelve el problema. En la actualidad existen procedimientos genéricos susceptibles de ser progrmados para la resolución de la cinemática inversa y obtener la *n-upla* de valores articulares que posionen y orienten el extremo final. Sin embargo, el principla inconveniente de estos procedimientos es que son métodos numéricos iterativos, que no siempre garantizan tener la solución en el momento adecuado. De esta manera, a la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada. Es decir, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$k = 1 \dots n(\text{gradosdelibertad})$$

Para poder conseguir esta relación suele ser habitual emplear geométricos, que consisten en la utilización de las relaciones trigonométricas y la resolución de los triángulos formados por los elementos y articulaciones del robot. La mayoría de los robots suele tener cadenas cinemáticas relativamente sencillas, y los tres primeros grados de libertad (gdl), que posicionan al robot en el espacio, suelen tener una estructura planar. Esta condición facilita la resolución de la *n-upla*. Además, los tres últimos grados de libertad suelen usarse para la orientación de la herramienta, lo cual permite la resolución desacoplada (descoplo cinemático) de la posición del extremo del robot y de la orientación de la herramienta. Como alternativa para reoslver el mismo problema se puede recurrir a manipular directamente las ecuaciones correspondientes al problema cinemático directo. Es decir, a partir de la relación entre la matriz de transformación y las ecuaciones en función de las coordenadas articulares  $q=[q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$ , es posible despejar las n variables articualaciones  $q_i$  en función de las componentes de los vectores **n**, **o**, **a** y **p**:

$$\begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [t_{ij}(q_i, \dots, q_n)]$$

Donde los elementos  $t_{ij}$  son funciones de las coordenadas articulares  $(q_i, \dots, q_n) \cdot e^t$ .

La matriz de tranformación homogénea es una matriz 4 x 4 que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogéneas desde un sistema de coordenado a otro. En general se representa:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ F_{1 \times 3} & 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{rotación} & \text{traslación} \\ \text{perspectiva} & \text{escaldo} \end{bmatrix}$$

### 0.3 Metodo Geométrico

El método gemoetrico explota la configuración de un manipulador particular para resolver por medio de relaciones geométricas planas los valores de cada ángulo de articulación. A continuación se presenta una solución geométrica para el robot Mitsubishi RV-M1.

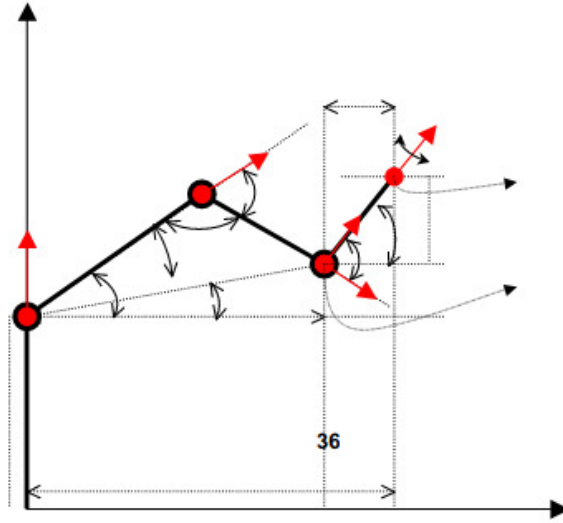


Figure 1: RV-M1

La solución para la articulación de cintura está dad por:

$$\theta_1 = atan2(p_y, p_x)$$

Es posible, dada la configuración cinemática del Mitsubishi RV-M1, simplifacar el conjunto de parámetros requeridos para solucionar las variables siguientes (eliminando las coordenadas sobre el eje "y") llevando la geometría

a coincidencia con un solo plano, tal y como se muestra en la la figura anterior (plano xz). Para ellos es necesario aplicar una rotación de  $-\theta_1$  alrededor del eje  $z_0$  sobre la matriz de transofrmación homogénea que expresa la posición y orientación del efector final El resultado se utilizaría eentonces para hallar las variables del ángulo siguientes.

$$Tn_5^0 = T_{z_0-\theta_1} T_5^0$$

Sin embargo, tomaremos la vía convencional.

En primera instancia determinamos el punto coincidente con el origen de la articulación de muñeca.

$$p_m = p - d_3 a$$

Donde,  $\alpha$  corresponde al vector unitario de aproximación del efecto extraído de  $T_5^0$ ,  $d_5$  al largo del efecto final y  $p$  al subvector de posición extraído de  $T_5^0$ .

La distancia entre el eje de articulación del hombro y el eje de la muñeca ( $p_m$ ) está dado por,

$$R = \sqrt{p_m^2 + p_m^2 + (p_{m_x}^2 - d_1)^2}$$

Encontrando el ángulo parcial asociado con el hombro,

$$\theta_{2a} = atan2(p_m, \sqrt{p_{m_x}^2 + p_{m_y}^2})$$

y aplicando la ley de cosenos para resolver por  $0 \leq \theta_{2b} \leq \pi$  de tal manera que se preserva la geometría

$$\theta_{2b} = |acos(\frac{R^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2 R})|$$

Entonces,

$$\theta_2 = \begin{cases} \theta_{2b} & -\theta_{2a} & si R \leq (a_2 + a_3) \\ \theta_{2a} & -\theta_{2b} & si R \succ (a_2 + a_3) \end{cases}$$

$z_0$  Nuevamente empleando la ley de cosenos para halar la variable de articulación n úmero tres ( $\theta_3$ )

$$\theta_3 = -|acos(\frac{R^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3})|$$

El signo de  $\theta_3$  es siempre negativo, debido a la limitación en movimiento del codo en este manipulador.

Estos tres primeros ángulos de articulación representan la posición de la muñeca en el espacio euclídeo tridimensional. Empleando estos resultados parciales para encontrar la posición y orientación de la muñeca podemos deducir rápidamente los ángulos restantes que otorgan la orientación de la misma.

$$T_3^0 = A_1^0(\theta_1)A_2^1(\theta_2)A_3^2(\theta_3)$$

El vector de aproximación de la mano,  $\alpha$ , se extrae directamente de  $T_5^0$  y según la morfología del manipulador se orienta en el sentido del elemento  $d_5$  y es referenciado con respecto del sistema de base del robot. Examinando la geometría del efecto final, de manera más precisa la orientación de los vectores de la mano extraídos de  $T_5^0$ , en relación con  $T_3^0$  encontramos que el movimiento de "pitch" está siempre sobre el plano de  $\theta_1$ .

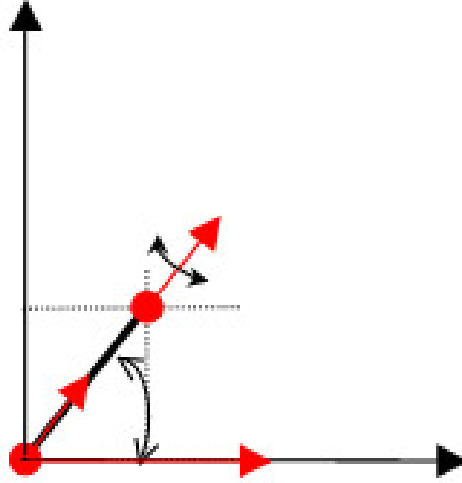


Figure 2: Esquematico 2

Consecuentemene,

$$\text{sen}(\theta_4) = a' \cdot w_3$$

$$\cos(\theta_4) = a' \cdot u_3$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(a^T \cdot u_3, a^T \cdot w_3)$$

De igual manera para  $\theta_5$ , encontramos  $T_4^0$ , y evaluamos las proyecciones de  $T_5^0$ , sobre el sistema de coordenadas resultante,

$$\text{sen}(\theta_5) = n^T \cdot v_4$$

$$\cos(\theta_5) = o^T \cdot v_4$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(n^T \cdot v_4, o^T \cdot v_4)$$

Es de notar que para el caso del ángulo de "roll" se utiliza el vector de deslizamiento/orientación de la uña.

### Características del Metodo Geométrico

Es un método no sistemático que utiliza las relaciones geométricas para obtener la posición del extremo del robot.

Normalmente se emplea para la obtención de la posición y no de la orientación.

Se usan en robots de pocos grados de libertad.

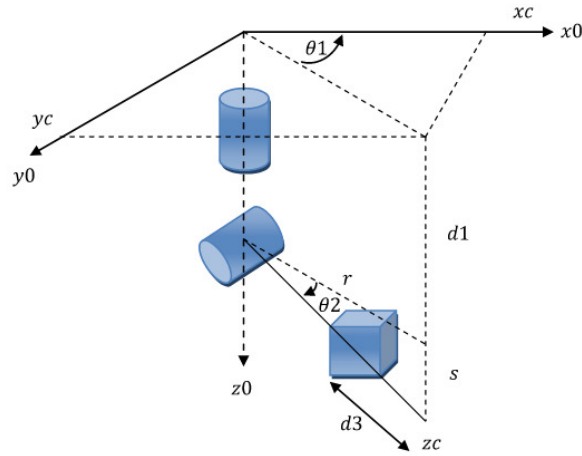


Figure 3: Caracteiristicas del metodo geométrico

## 0.4 Metodo Algebraico

Como se discutíó en la sección anterior sólo en casos especiales pueden los robots manipuladores resolverse de manera cerrada y analítica. Para ello el manipulador debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

Tres ejes de articulación adyacentes intersectantes en un punto y/o muchos  $\alpha_i$  iguales a  $0 \pm 90$  grados.

Tres ejes de articulación adyacentes son paralelos entre sí (condición suficiente).

Las siguientes equivalentes trigonometricas son de gran utilidad para simplificar las expreciones matriciales a partir de las condiciones anteriore:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\text{sen}(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a+b+c) = \text{sen}(a)\cos(b)\cos(c) + \cos(a)\text{sen}(b)\cos(c) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)\text{sen}(c) + \cos(a)\cos(b)\text{sen}(c)$$

$$\cos(a+b+c) = \cos(a)\cos(b)\cos(c) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(c) - \text{sen}(a)\cos(b)\text{sen}(c) - \cos(a)\text{sen}(b)\text{sen}(c)$$

El siguiente método se le atribuye a Paul y consiste en encontrar cada variable de manera secuencial, aisalado cada una mediante la premultiplicación las correspondientes transformadas inversas, como se indica en las ecuaciones (AQUÍ QUEDAMOS). Para el caso de un manipulador de 6 grados de libertad los productos de las transformaciones dadas en las matrices homogénea 4x4, comenzando desde la articulación 6 hasta llegar a la base del robot están dados por; seis ecuaiones matriales se pueden obtener a partir de esta ecuación, pre-multiplicandola sucesivamente por las inversas de las matrices A.

$$(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_0^1$$

$$(A_2^1)^{-1}(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^2$$

$$(A_3^2)^{-1}(A_2^1)^{-1}(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^3$$



$$(A_4^3)^{-1}(A_3^2)^{-1}(A_2^1)^{-1}(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^4$$

$$(A_5^4)^{-1}(A_4^3)^{-1}(A_3^2)^{-1}(A_2^1)^{-1}(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^5$$

El procedimineto consiste en revisar los elementos del lado derecho de las ecuaciones, encontrar aquellos que sean cero o constantes, e igualarlos con los elementos respectivos del lado izquierdo de la ecuación.

La matriz homogénea  $T^0$  que especifican la localización del sistema de coordenadas i-ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base esta dado por;

$$T_i^0 = A_1^0 A_2^1 \dots A_i^{i-1} = \prod_{j=1}^i A_j^{j-1} = \begin{bmatrix} R_j^0 & p_i^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Donde;

$\mathbf{R}_i^0$ : Matriz de orientación del sistema de coordenadas i-ésimo establecido en el elemento i con respecto al sistema de coordenadas de la base. Es la submatriz superior izquierda de 3x3 de  $T_i^0$

$\mathbf{p}_i^0$ : Vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenada i-ésimo. Es la submatriz superior derecha 3x1 de  $T_i^0$ .

## 0.5 Desacoplo Cinemático

Ahora bien, como es sabido, en general no basta con posicionar el extremo del robot en un punto del espacio, sino que casi siempre es preciso también conseguir que la herramienta que aquel porta se oriente de una manera determinada. Para ello, los robots cuentan con otros tres grados de libertad de una manera determinada. Para ello, los robots cuentan con otros tres grados de libertad, situados al final de la cadena cinemática y cuyos ejes, generalmente, se cortan en un punto, que infomralmente se denomina muñeca del robot.

Si bien la variación de estos tres ultimos grados de libertad origina un cambio en la posición final del extremo real del robot, su verdadero ojeetivo es poder orientar la herramienta del robot libremente en el espacio.

El método de desacoplo cinemático saca de este hecho, separando ambos problemas; Posición y Orientación. Para ello, dada una posición y orientación final deseada, establece las coordenadas del punto de corte de los 3 ultimos ejes (muñeca del robot) calculando los valores de las tres primeras variables articulares  $q_1, q_2, q_3$  que consiguen este punto.(ver figure 4)

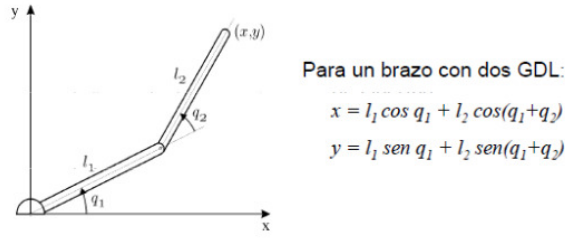


Figure 4: Cinemática Inversa

La primera variables articular se calcula de la siguiente manera:

$$\theta_1 = \text{atan2}(x_c, y_c)$$

Siempre y cuando  $x_c, y_c$  ambas no sean cero.

De la figura 4, el ángulo  $\theta_2$  se calcula de la siguiente manera:

$$\theta_2 = \text{atan2}(r, s) + \frac{n}{2}$$

Donde:

$$r^2 = x_c^2 + y_c^2, s = z_c - d_1$$

La distancia lineal  $d_3$  se calcula como sigue:

$$d_3 = \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + (z_c^2 - d_1^2)}$$

En cuanto a la cinemática inversa de orientación, las últimas dos variables articulares  $\theta_4, \theta_5$  se calculan utilizando los ángulos de Euler. Dada una matriz R denotando la orientación deseada del marco del efector final respecto del

marco inercia y la matriz de rotación  $R_0^3$  es posible encontrar  $\theta_4$  y  $\theta_5$ , como a continuación se muestra.

Matriz  $R_0^3$

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1 & -(\cos\theta_1\sin\theta_2)d_3 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1 & -(\sin\theta_1\sin\theta_2)d_3 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & -(\cos\theta_2)d_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz  $R_3^5$

$$R_3^5 = \begin{bmatrix} \cos\theta_4\cos\theta_5 & -\cos\theta_4\sin\theta_5 & -\sin\theta_4 \\ \sin\theta_4\cos\theta_5 & -\sin\theta_4\sin\theta_5 & \cos\theta_4 \\ -\sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la solución de Euler se puede aplicar en la siguiente ecuación:

$$R_3^5 = (R_0^3)^T R$$

$$-S_4 = C_1 2r_1 3 + S_1 C_2 r_2 3 - S_2 r_3 3$$

$$C_4 = -C_1 S_2 r_1 3 - S_1 2r_2 3 - C_2 r_3 3$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(-S_4)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(C_4)$$

## 0.6 Referencias

@articlede2017ingenieria, title=INGENIERÍA MECATRÓNICA EN COMPETENCIAS PROFESIONALES, author=DE ROBOTS, ASIGNATURA DE CINEMATICA, year=2017 @mastersthesisgranja2014modelacion, title=Modelación y análisis de la cinemática directa e inversa del manipulador Stanford de seis grados de libertad, author=Granja Oramas, María Victoria, type=B.S. thesis, year=2014, school=Quito, 2014.