

# MC102 – Aula 26

## Recursão

Prof. Luiz F. Bittencourt

Turmas QR

Instituto de Computação – Unicamp

2019

Conteúdo adaptado de slides fornecidos pelo Prof. Eduardo Xavier.

# Roteiro

- 1 Recursão – Indução
- 2 Recursão
- 3 Fatorial
- 4 O que acontece na memória
- 5 Recursão  $\times$  Iteração
- 6 Soma em uma Lista
- 7 Números de fibonacci
- 8 Exercício

# Recursão – Indução



- Devemos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - ▶ Primeiramente, definimos a solução para caso(s) base;
  - ▶ Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

# Recursão – Indução



- Devemos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - ▶ Primeiramente, definimos a solução para caso(s) base;
  - ▶ Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

# Recursão – Indução



- Devemos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - ▶ Primeiramente, definimos a solução para caso(s) base;
  - ▶ Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

# Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja  $T$  uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais  $n$ .
- Ao invés de provar diretamente que  $T$  é válida para todos os valores de  $n$ , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  - 1 **Passo base:** PROVAR que  $T$  é válido para  $n = 1$ .
  - 2 **Hipótese de Indução:** Assumimos que  $T$  é válido para  $n - 1$ .
  - 3 **Passo de Indução:** Sabendo que  $T$  é válido para  $n - 1$  devemos PROVAR que  $T$  é válido para  $n$ .

# Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja  $T$  uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais  $n$ .
- Ao invés de provar diretamente que  $T$  é válida para todos os valores de  $n$ , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  - ❶ **Passo base:** PROVAR que  $T$  é válido para  $n = 1$ .
  - ❷ **Hipótese de Indução:** Assumimos que  $T$  é válido para  $n - 1$ .
  - ❸ **Passo de Indução:** Sabendo que  $T$  é válido para  $n - 1$  devemos PROVAR que  $T$  é válido para  $n$ .

# Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja  $T$  uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais  $n$ .
- Ao invés de provar diretamente que  $T$  é válida para todos os valores de  $n$ , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  - ❶ Passo base: PROVAR que  $T$  é válido para  $n = 1$ .
  - ❷ Hipótese de Indução: Assumimos que  $T$  é válido para  $n - 1$ .
  - ❸ Passo de Indução: Sabendo que  $T$  é válido para  $n - 1$  devemos PROVAR que  $T$  é válido para  $n$ .



# Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja  $T$  uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais  $n$ .
- Ao invés de provar diretamente que  $T$  é válida para todos os valores de  $n$ , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  - ❶ **Passo base:** PROVAR que  $T$  é válido para  $n = 1$ .
  - ❷ **Hipótese de Indução:** Assumimos que  $T$  é válido para  $n - 1$ .
  - ❸ **Passo de Indução:** Sabendo que  $T$  é válido para  $n - 1$  devemos PROVAR que  $T$  é válido para  $n$ .

# Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja  $T$  uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais  $n$ .
- Ao invés de provar diretamente que  $T$  é válida para todos os valores de  $n$ , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  - ① **Passo base:** PROVAR que  $T$  é válido para  $n = 1$ .
  - ② **Hipótese de Indução:** Assumimos que  $T$  é válido para  $n - 1$ .
  - ③ **Passo de Indução:** Sabendo que  $T$  é válido para  $n - 1$  devemos PROVAR que  $T$  é válido para  $n$ .

# Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja  $T$  uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais  $n$ .
- Ao invés de provar diretamente que  $T$  é válida para todos os valores de  $n$ , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  - ① **Passo base:** PROVAR que  $T$  é válido para  $n = 1$ .
  - ② **Hipótese de Indução:** Assumimos que  $T$  é válido para  $n - 1$ .
  - ③ **Passo de Indução:** Sabendo que  $T$  é válido para  $n - 1$  devemos PROVAR que  $T$  é válido para  $n$ .

- Por que a indução funciona? Por que as duas condições são suficientes?
  - ▶ Mostramos que  $T$  é válida para um caso base, como  $n = 1$ .
  - ▶ Com o passo da indução, automaticamente mostramos que  $T$  é válida para  $n = 2$ .
  - ▶ Como  $T$  é válida para  $n = 2$ , pelo passo de indução,  $T$  também é válida para  $n = 3$ , e assim por diante.

## Exemplo

A soma  $S(n)$  dos primeiros  $n$  números naturais é  $n(n+1)/2$  **Base:** Para  $n = 1$  devemos mostrar que  $n(n+1)/2 = 1$ . Isto é verdade:

$$1(1+1)/2 = 1.$$

**Hip. de Indução:** Vamos assumir que é válido para  $(n-1)$ , ou seja,  $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$ .

**Passo:** Devemos mostrar que é válido para  $n$ , ou seja, devemos mostrar que  $S(n) = n(n+1)/2$ . Por definição,  $S(n) = S(n-1) + n$  e por hipótese  $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$ , logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= (n-1)((n-1)+1)/2 + n \\ &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

## Exemplo

A soma  $S(n)$  dos primeiros  $n$  números naturais é  $n(n+1)/2$  **Base:** Para  $n = 1$  devemos mostrar que  $n(n+1)/2 = 1$ . Isto é verdade:

$$1(1+1)/2 = 1.$$

**Hip. de Indução:** Vamos assumir que é válido para  $(n-1)$ , ou seja,  $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$ .

**Passo:** Devemos mostrar que é válido para  $n$ , ou seja, devemos mostrar que  $S(n) = n(n+1)/2$ . Por definição,  $S(n) = S(n-1) + n$  e por hipótese  $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$ , logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= (n-1)((n-1)+1)/2 + n \\ &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

## Exemplo

A soma  $S(n)$  dos primeiros  $n$  números naturais é  $n(n+1)/2$  **Base:** Para  $n = 1$  devemos mostrar que  $n(n+1)/2 = 1$ . Isto é verdade:

$$1(1+1)/2 = 1.$$

**Hip. de Indução:** Vamos assumir que é válido para  $(n-1)$ , ou seja,  $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$ .

**Passo:** Devemos mostrar que é válido para  $n$ , ou seja, devemos mostrar que  $S(n) = n(n+1)/2$ . Por definição,  $S(n) = S(n-1) + n$  e por hipótese  $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$ , logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= (n-1)((n-1)+1)/2 + n \\ &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

# Recursão



- Definições recursivas de funções funcionam como o *princípio matemático da indução* que vimos anteriormente.
- A idéia é que a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - ▶ Definimos a solução para casos básicos;
  - ▶ Definimos como resolver o problema geral utilizando soluções do mesmo problema só que para casos menores.



# Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ( $n!$ ).

Qual o caso base e o passo da indução?

- Se  $n$  é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para  $n > 1$ , supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n - 1)!$ .

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

# Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ( $n!$ ).

Qual o caso base e o passo da indução?

- Se  $n$  é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para  $n > 1$ , supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n - 1)!$ .

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

# Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ( $n!$ ).

Qual o caso base e o passo da indução?

- Se  $n$  é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para  $n > 1$ , supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n - 1)!$ .

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

# Fatorial

Portanto, a solução do problema **pode ser expressa de forma recursiva** como:

- Se  $n = 1$  então  $n! = 1$ .
- Se  $n > 1$  então  $n! = n * (n - 1)!$ .

Note como aplicamos o princípio da indução:

- Sabemos a solução para um caso base:  $n = 1$ .
- Definimos a solução do problema geral  $n!$  em termos do mesmo problema só que para um caso menor  $((n - 1)!)$ .

# Fatorial em Python

```
def fatorial(n):  
    if (n <= 1):  
        return 1  
    else:  
        x = n-1  
        r = fatorial(x) #sabendo o fatorial de n-1  
        return (n*r)    #calculamos o fatorial de n
```

# Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

# Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

# O que acontece na memória

- Precisamos entender como é feito o controle sobre as variáveis locais em chamadas recursivas.
- A memória de um sistema computacional é dividida em alguns segmentos:
  - ▶ **Espaço Estático:** Contém as variáveis globais e código do programa.
  - ▶ **Heap:** Para alocação dinâmica de memória.
  - ▶ **Pilha:** Para execução de funções.



# O que acontece na memória

O que acontece na pilha:

- Toda vez que uma função é invocada, suas variáveis locais são armazenadas no topo da pilha.
- Quando uma função termina a sua execução, suas variáveis locais são removidas da pilha.

Considere o exemplo:

```
def f1(a, b):  
    c=5  
    return (c+a+b)
```

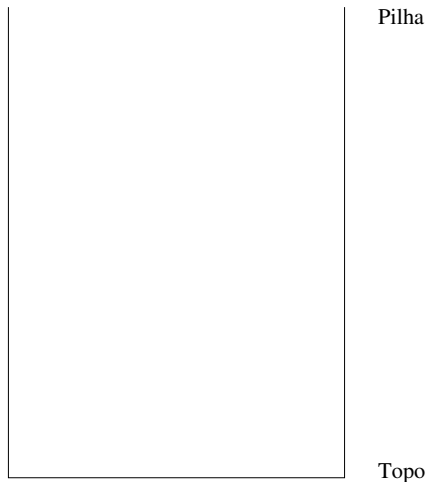
```
def f2(a, b):  
    c = f1(b, a)  
    return c
```

```
def main():  
    f2(2, 3)
```

```
main()
```

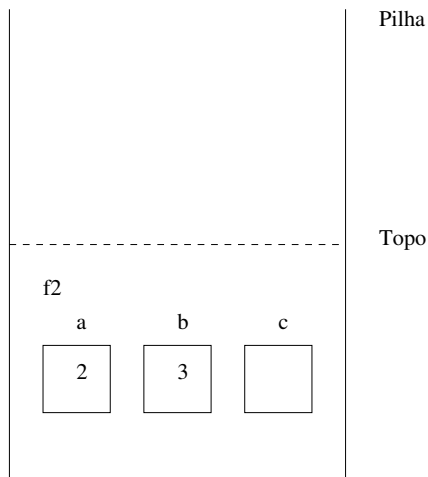
# O que acontece na memória

Inicialmente a pilha está vazia.



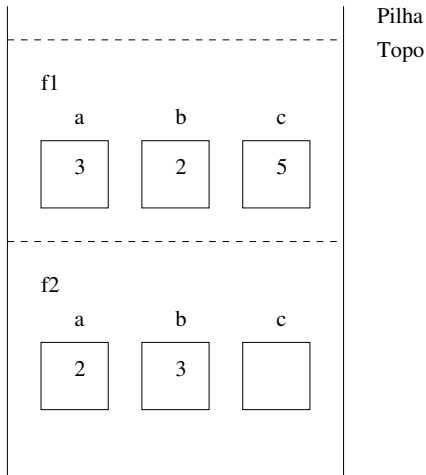
## O que acontece na memória

Quando **f2(2,3)** é invocada, suas variáveis locais são alocadas no topo da pilha.



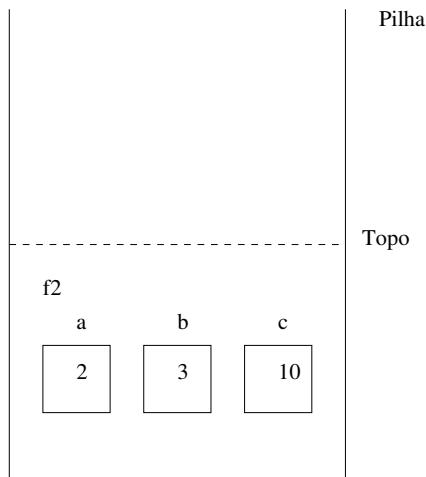
## O que acontece na memória

A função **f2** invoca a função **f1(b,a)** e as variáveis locais desta são alocadas no topo da pilha sobre as de **f2**.



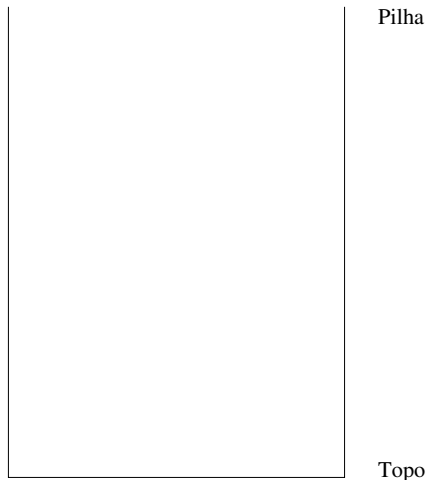
## O que acontece na memória

A função **f1** termina, devolvendo 10. As variáveis locais de **f1** são removidas da pilha.



## O que acontece na memória

Finalmente **f2** termina a sua execução devolvendo 10. Suas variáveis locais são removidas da pilha.



# O que acontece na memória

No caso de chamadas recursivas para uma mesma função, é como se cada chamada correspondesse a uma função distinta.

- As execuções das chamadas de funções recursivas são feitas na pilha, assim como qualquer função.
- O último conjunto de variáveis alocadas na pilha, que está no topo, corresponde às variáveis da última chamada da função.
- Quando termina a execução de uma chamada da função, as variáveis locais desta são removidas da pilha.

# Usando recursão em programação

Considere novamente a solução recursiva para se calcular o fatorial e assumamos que seja feita a chamada **fatorial(4)**.

```
def fatorial(n):  
    if (n <= 1):  
        return 1  
    else:  
        x = n-1  
        r = fatorial(x) #sabendo o fatorial de n-1  
        return (n*r)    #calculamos o fatorial de n
```



# O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatorial* cria novas variáveis locais de mesmo nome  $(n, x, r)$  .
- Portanto, várias variáveis  $n$ ,  $x$  e  $r$  podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome  $n$  (ou  $x$  ou  $r$ ) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

# O que acontece na memória

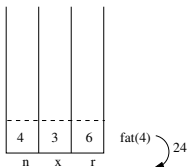
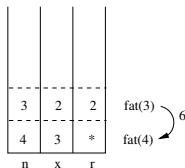
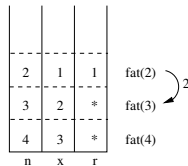
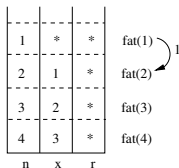
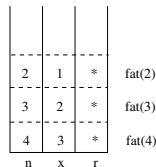
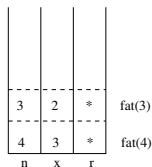
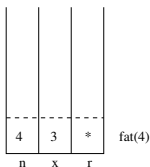
- Cada chamada da função *fatorial* cria novas variáveis locais de mesmo nome  $(n, x, r)$  .
- Portanto, várias variáveis  $n$ ,  $x$  e  $r$  podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome  $n$  (ou  $x$  ou  $r$ ) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

# O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatorial* cria novas variáveis locais de mesmo nome  $(n, x, r)$  .
- Portanto, várias variáveis  $n$ ,  $x$  e  $r$  podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome  $n$  (ou  $x$  ou  $r$ ) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

# O que acontece na memória

Estado da Pilha de execução para *fatorial*(4).



# O que acontece na memória

- É claro que as variáveis  $x$  e  $r$  são desnecessárias.

```
def fatorial2(n):  
    if(n <= 1): #Caso base  
        return 1  
    else: #Passo: sabendo fat. de n-1 calculamos fat. de n  
        return n * fatorial2(n-1)
```

# Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas.
- Soluções iterativas em geral têm a memória limitada enquanto as recursivas, não.
- Cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva é um custo adicional para as soluções recursivas.

# Recursão × Iteração

Neste caso, uma solução iterativa é mais eficiente. Por quê?

```
def fatorial3(n):  
    r = 1  
    for i in range(1, n+1):  
        r = r * i  
    return r
```

## Exemplo: Soma de elementos de uma Lista

- Dada uma lista  $v$  de inteiros, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até  $tam - 1$  onde  $tam$  é o número de elementos da lista.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por  $S(n)$  a soma dos elementos das posições 0 até  $tam - 1$  da lista, e portanto devemos achar  $S(tam - 1)$ .
- O valor de  $S(n)$  pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - ▶ Se  $n = 0$  então a soma  $S(0)$  é igual a  $v[0]$ .
  - ▶ Se  $n > 0$  então a soma  $S(n)$  é igual a  $v[n] + S(n - 1)$ .



## Exemplo: Soma de elementos de uma Lista

- Dada uma lista  $v$  de inteiros, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até  $tam - 1$  onde  $tam$  é o número de elementos da lista.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por  $S(n)$  a soma dos elementos das posições 0 até  $tam - 1$  da lista, e portanto devemos achar  $S(tam - 1)$ .
- O valor de  $S(n)$  pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - ▶ Se  $n = 0$  então a soma  $S(0)$  é igual a  $v[0]$ .
  - ▶ Se  $n > 0$  então a soma  $S(n)$  é igual a  $v[n] + S(n - 1)$ .

## Exemplo: Soma de elementos de uma Lista

- Dada uma lista  $v$  de inteiros, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até  $tam - 1$  onde  $tam$  é o número de elementos da lista.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por  $S(n)$  a soma dos elementos das posições 0 até  $tam - 1$  da lista, e portanto devemos achar  $S(tam - 1)$ .
- O valor de  $S(n)$  pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - ▶ Se  $n = 0$  então a soma  $S(0)$  é igual a  $v[0]$ .
  - ▶ Se  $n > 0$  então a soma  $S(n)$  é igual a  $v[n] + S(n - 1)$ .

# Algoritmo em Python

```
def soma(v, n):  
    if (n == 0):  
        return v[0]  
    else:  
        return v[n] + soma(v, n-1)
```

# Algoritmo em Python

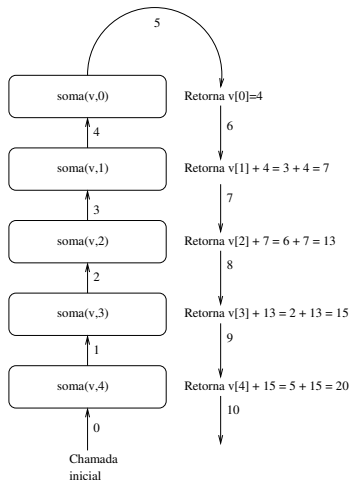
Exemplo de uso:

```
def main():  
    vet = [1,2,3,4,5]  
    print("A soma dos elementos de vet e: %d" %soma(vet, len(vet)-1))  
  
def soma(v, n):  
    if(n == 0):  
        return v[0]  
    else:  
        return v[n] + soma(v, n-1)  
  
main()
```

- Note que na chamada da função o segundo parâmetro é exatamente o índice da última posição do vetor ( $tam - 1$ ).

# Exemplo de execução

$V = (4, 3, 6, 2, 5)$



# Soma do vetor recursivo

- O método recursivo sempre termina:
  - ▶ Existência de um caso base.
  - ▶ A cada chamada recursiva do método temos um valor menor de  $n$ .

# Algoritmo em Python

Neste caso, a solução iterativa também seria melhor (não há criação de variáveis das chamadas recursivas):

```
def soma2(v, n):  
    soma = 0  
    for i in range(0, n+1):  
        soma = soma + v[i]  
    return soma
```

# Recursão com várias chamadas

- Não há necessidade da função recursiva ter apenas uma chamada para si própria.
- A função pode fazer várias chamadas para si própria.
- A função pode ainda fazer chamadas recursivas indiretas. Neste caso a função 1, por exemplo, chama uma outra função 2 que por sua vez chama a função 1.



# Fibonacci

- A série de fibonacci é a seguinte:
  - ▶ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
- Queremos determinar qual é o  $n$ -ésimo número da série que denotaremos por  $\text{fibo}(n)$ .
- Como descrever o  $n$ -ésimo número de fibonacci de forma recursiva?

# Fibonacci

- No caso base temos:
  - ▶ Se  $n = 1$  ou  $n = 2$  então  $\text{fibo}(n) = 1$ .
- Sabendo casos anteriores podemos computar  $\text{fibo}(n)$  como:
  - ▶  $\text{fibo}(n) = \text{fibo}(n - 1) + \text{fibo}(n - 2)$ .

# Algoritmo em Python

A definição anterior é traduzida diretamente em um algoritmo em Python:

```
def fibo(n):  
    if (n <= 2):  
        return 1  
    else:  
        return (fibo(n-1) + fibo(n-2))
```

# Algoritmo em Python

Exemplo de uso.

```
def main():  
    for i in range(1,8):  
        print("O %d-esimo numero de fibonacci e: %d" %(i, fibo(i)))  
  
def fibo(n):  
    if(n <= 2):  
        return 1  
    else:  
        return (fibo(n-1) + fibo(n-2))  
  
main()
```

# Relembrando

- Recursão é uma técnica para se criar algoritmos onde:
  - 1 Devemos descrever soluções para caso(s) base.
  - 2 Assumindo a existência de soluções para casos menores, mostramos como obter a solução para o caso maior.
- Algoritmos recursivos geralmente são mais claros e concisos.
- Implementador deve avaliar clareza de código  $\times$  eficiência do algoritmo.

# Exercício

Mostre a execução da função recursiva **imprime** abaixo:  
O que será impresso?

```
def imprime(v, i, n):  
    if i==n:  
        print(v[i], end=" ")  
    else:  
        imprime(v, i+1, n)  
        print(v[i], end=" ")  
  
vet = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]  
imprime(vet, 0, 9)  
print()
```

# Exercício

- Mostre o estado da pilha de memória durante a execução da função **fibo** com a chamada **fib(5)**.
- Qual versão é mais eficiente para se calcular o  $n$ -ésimo número de fibonacci? A recursiva ou iterativa?