ulm university universität uulm

Universität Ulm
Fakultät für Mathematik & Wirtschaftswissenschaften

Maximal Range Flight

Projekt zur Vorlesung „Numerik von gewöhnlichen Differentialgleichungen“

14.07.2015

Daniel Ruepp
Fabian Rupp
Paula Truöl
Jonathan Zoller

Randwertproblem aus dem Pontryaginprinzip

Aus dem Minimumprinzip von Pontrygin (Satz 10.1) wollen wir im Folgenden das zugehörige Randwertproblem für unser Projekt „Maximal Range Flight“ herleiten. Dazu formulieren wir den Steuerprozess zunächst in der Form (10.1) aus der Vorlesung.

Unser Ziel ist es, den Flug eines Flugzeugs in der $x-h$-Ebene so zu steuern, dass eine vorgegebene Reisehöhe erreicht wird. Der Endzeitpunkt t_f des Flugs ist dabei vorgegeben. Den Zustandsvektor des Flugzeugs zur Zeit t definieren wir als $s(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ h(t) \\ v(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^n$,

wobei
$x(t)$ die x-Koordinate des Massenschwerpunktes S des Flugzeugs sei,
$h(t)$ die h-Koordinate des Massenschwerpunktes S,
$v(t)$ die Geschwindigkeit und
$\gamma(t)$ der Anstellwinkel des Flugzeugs.
x_0 sei ein Startwert für die x-Koordinate. Wir wollen die Reichweite des Flugzeugs maximieren, also $-(x(t_f) - x_0)$ minimieren.
Steuern können wir das Flugzeugs durch Veränderungen des Schubs $T(t)$ und des sogenannten Auftriebsbeiwerts $C_L(t)$. Den Steuervektor zur Zeit t defininieren wir dementsprechend als $u(t) := \begin{pmatrix} T(t) \\ C_L(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^m$. In der Schreibweise der Vorlesung ergibt sich aus der Dynamik des Flugzeugs folgendes **Optimalsteuerungsproblem**:

Minimiere

$$-(s_1(t_f) - x_0) = F(s,u) = g(s(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t,s,u)dt = g(s(t_f))$$

unter

$$\dot{s}(t) = f(t,s,u) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_3(t)\cos s_4(t) \\ s_3(t)\sin s_4(t) \\ \frac{1}{m}[u_1(t) - F\cdot(C_{D_0} + K\cdot u_2^2(t))\cdot \frac{1}{2}\alpha e^{-\beta s_2(t)}\cdot s_3^2(t) - mg\sin s_4(t) \\ \frac{1}{m\cdot s_3(t)}[F\cdot u_2(t)\cdot\frac{1}{2}\alpha e^{-\beta s_2(t)}\cdot s_3^2(t) - mg\cos s_4(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, t_f]$
mit $s(0) = s_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ h_0 \\ v_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$, $\psi(s(t_f)) = \begin{pmatrix} s_2(t_f) - h_f \\ s_4(t_f) \end{pmatrix} = 0$
und $u(t) \in U = [0, T_{max}] \times [C_{\text{L, min}}, C_{\text{L, max}}] \neq \emptyset$. Dabei ist $U \in \mathbb{R}^2$ konvex und abgeschlossen.
Es gilt also $f_0 = 0$ und die **Hamiltonfunktion** ergibt sich als

$$H(t,s,\lambda,u) = \lambda_0 \cdot \underbrace{f_0}_{=0} + \lambda^T \cdot f(t,s,u) = \lambda^T \cdot f(t,s,u)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^4$.
Wir überprüfen die Voraussetzungen aus dem Satz 10.1 über das Minimumprinzip von Pontryagin und bemerken, dass $(\psi_s(s(t_f)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vollen Rang, nämlich Rang 2 hat.

Es sei s^* die optimale Lösung für des Zustandsvektor des Steuerungsproblems und $u^* := \arg\min_{u\in U} H(t,s,\lambda,u)$.
Zu unserem Steuerprozess gehört nach dem Satz die adjungierte Differentialgleichung $\dot\lambda^T = -\lambda^T f_s$ mit $f_s =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos s_4(t) & -s_3(t)\sin s_4(t) \\ 0 & 0 & \sin s_4(t) & s_3(t)\cos s_4(t) \\ 0 & \frac{F}{m}(C_{D_0} + K\cdot u_2^2(t))\cdot\frac{\alpha\beta}{2}e^{-\beta s_2(t)}\cdot s_3^2(t) & -\frac{F}{m}(C_{D_0}+K\cdot u_2^2(t))\cdot\alpha e^{-\beta s_2(t)}\cdot s_3(t) & -g\cos s_4(t) \\ 0 & -\frac{F}{m\cdot s_3(t)}\cdot u_2(t)\cdot\frac{\alpha\beta}{2}e^{-\beta s_2(t)}\cdot s_3^2(t) & \frac{F}{m}\cdot u_2(t)\cdot\frac{1}{2}\alpha e^{-\beta s_2(t)} & \frac{g\sin s_4(t)}{s_3(t)} \end{pmatrix}$$

Für die Endbedingungen in $\psi(s(t_f))$ gilt der Spezialfall $s_2(t_f) = h_f = \text{const}$ und $s_4(t_f) = 0$. Es gilt $g_s(t) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ und damit erhalten wir außerdem aus der Transversalitätsbedingung die Endbedigungen $\lambda_1(t) = \lambda_0 \cdot g_{s_1}(s^*(t_f)) = \lambda_0\cdot(-1) = -\lambda_0$ und $\lambda_3(t) = \lambda_0\cdot g_{s_3}(s^*(t_f)) = \lambda_0\cdot 0 = 0$ (vgl. 10.3). Insgesamt ergeben sich daraus also die vier Endbedingungen.
Zusammen mit den vier Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$ ergibt sich als Randwertproblem für (s,λ):

$$\begin{aligned} \dot s^*(t) &= f(t, s^*, u^*(t, s^*(t), \lambda(t)), \\ \dot\lambda^T &= -\lambda^T f_s(t, s, \lambda, u^*(t, s^*(t), \lambda(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)}\ \ & \lambda_1(t) = -\lambda_0, \\ \text{(II)}\ \ & s_2(t_f) = h_f, \\ \text{(III)}\ \ & \lambda_3(t) = 0, \\ \text{(IV)}\ \ & s_4(t_f) = 0, \\ \text{(V)}\ \ & s_1(0) = x_0, \\ \text{(VI)}\ \ & s_2(0) = h_0, \\ \text{(VII)}\ \ & s_3(0) = v_0, \\ \text{(VIII)}\ \ & s_4(0) = \gamma_0. \end{aligned}$$