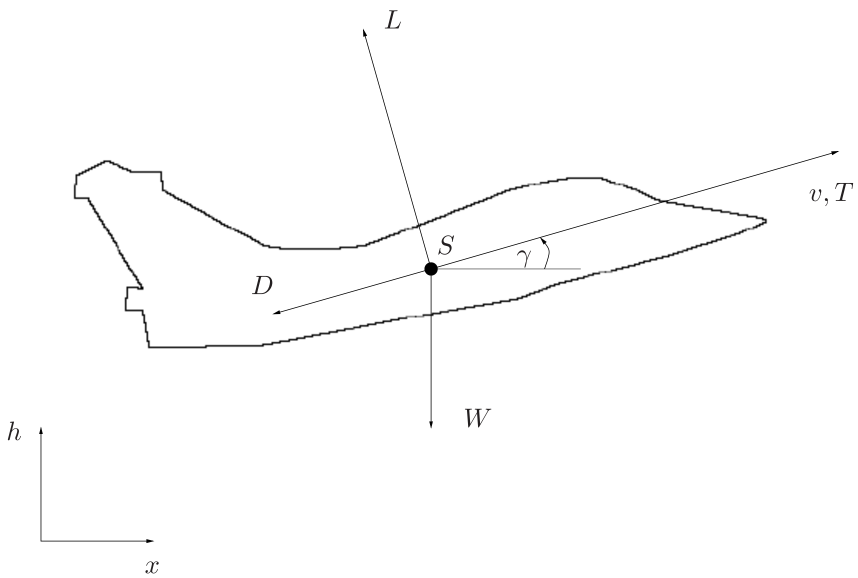
Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen
Projekt 10 - Maximal Range Flight

Modelliert werden soll ein 2-dimensionaler Flug eines Flugzeugs in der x-h-Ebene, bei dem man den Auftriebsbeiwert und den Schub steuern kann, wobei ein maximaler Staudruck nicht überschritten werden darf. Betrachte dazu folgende Skizze



Dabei seien

- $x(t)$: x-Koordinate des Massenschwerpunktes S
- $h(t)$: h-Koordinate des Massenschwerpunktes S
- $v(t)$: Geschwindigkeit
- $\gamma(t)$: Anstellwinkel
- $T(t)$: Schub, Steuerung
- $C_L(t)$: Auftriebsbeiwert, Steuerung.

Auf das Flugzeug wirken einige Kräfte

- Auftriebskraft

  $$L(v(t), h(t), C_L(t)) := F \cdot C_L(t) \cdot q(v(t), h(t))$$

  wobei F die wirksame Fläche, d.h. die von der Luft angeströmte Fläche, ist.

- Luftwiderstand

  $$D(v(t), h(t), C_L(t)) := F \cdot C_D(C_L(t)) \cdot q(v(t), h(t)).$$

- Luftwiderstandsbeiwert

$$C_D(C_L(t)) := C_{D_0} + kC_L^2(t) \qquad \text{mit} \qquad k = \frac{1}{\pi e AR}$$

wobei C_{D_0} der Nullluftwiderstandsbeiwert, e die Oswald Effizienz Zahl und AR die Streckung (*aspect ratio*) bezeichnet.

- Erdanziehungskraft

$$W = mg$$

- Staudruck

$$q(v(t), h(t)) := \frac{1}{2} \cdot \rho(h(t)) \cdot v^2(t).$$

- Luftdichte mit $\alpha = 1.247015$ und $\beta = 0.000104$

$$\rho(h(t)) := \alpha e^{-\beta h(t)}.$$

Das Ziel ist den Flug eines Flugzeuges von einer gegebenen Anfangsposition so zu steuern, dass eine vorgegebene Reisehöhe erreicht wird, der Anstellwinkel dort 0 Grad und die Reichweite maximal ist. Es ergibt sich folgendes Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned}
\min \quad & -(x(t_f) - x_0) \\
\text{s.t.} \quad & \text{Dynamik} \\
& \begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v(t)\cos\gamma(t) \\
\dot{h}(t) &= v(t)\sin\gamma(t) \\
\dot{v}(t) &= \frac{1}{m}\left(T(t) - D(v(t), h(t), C_L(t)) - mg\sin\gamma(t)\right) \\
\dot{\gamma}(t) &= \frac{1}{mv(t)}\left(L(v(t), h(t), C_L(t)) - mg\cos\gamma(t)\right) \\
t &\in [0, t_f]
\end{aligned} \\
& \text{Anfangs-/End-/Zustands-/Steuerbedingungen} \\
& \begin{aligned}
(x, h, v, \gamma)(0) &= (x_0, h_0, v_0, \gamma_0) \\
(h, \gamma)(t_f) &= (h_f, 0) \\
q(v(t), h(t)) &\leq q_{\max} \quad \forall\, t \in [0, t_f] \\
T(t) &\in [0, T_{\max}] \quad \forall\, t \in [0, t_f] \\
C_L(t) &\in [C_{L,\min}, C_{L,\max}] \quad \forall\, t \in [0, t_f].
\end{aligned}
\end{aligned}$$

Wir wählen die Modellparameter für einen *Airbus A380-800*

Parameter	*Bedeutung*	*Wert*
g	Erdbeschleunigung	$9.81\ \text{m/s}^2$
t_f	Endzeitpunkt	1800 s
C_{D_0}	Nullluftwiderstandsbeiwert	0.032
AR	Steckung	7.5
e	Oswald Effizienz Zahl	0.8
F	wirksame Fläche	$845\ \text{m}^2$
m	Masse	276 800 kg
$T_{\max}$	maximale Schubkraft	1 260 000 N
$C_{L,\min}$	minimaler Auftriebsbeiwert	0
$C_{L,\max}$	maximaler Auftriebsbeiwert	1.48

und als Start- sowie Endwerte

$$x_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad h_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0.27 \qquad \text{und} \qquad h_f = 10\,668\,\text{m}.$$