

# Teoria dos Grafos

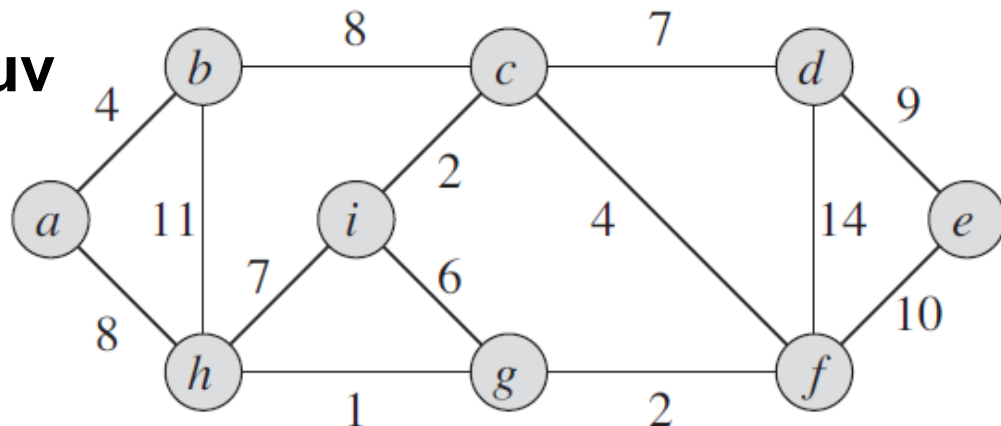


Universidade Federal do ABC

- Problemas de **otimização**
  - **maximização**
    - Exs. lucro, fluxo
  - **minimização**
    - Exs. tempo, distância, custo

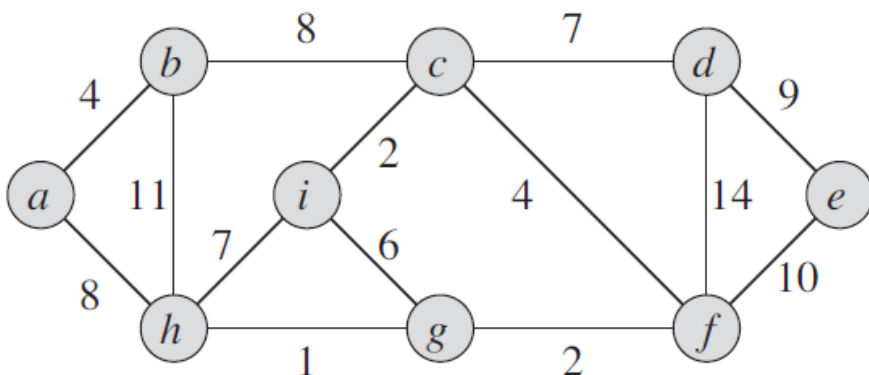
- **Grafos ponderados**

- $w(uv)$  = **peso** da aresta  **$uv$**



### Tarefa

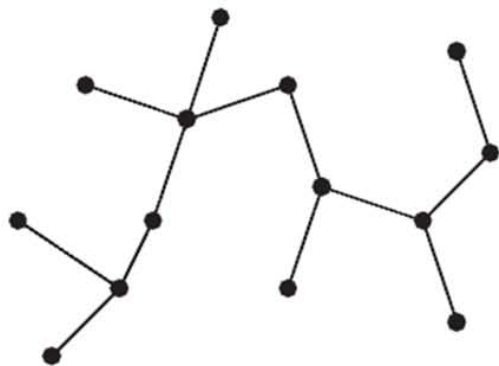
- Grafos ponderados



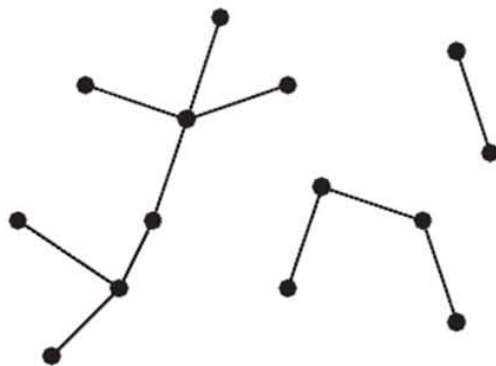
- Exemplo de implementação em Java
- Página da disciplina:
  - <https://sites.google.com/site/alexnomahome/grafos>

## MST: árvore geradora mínima

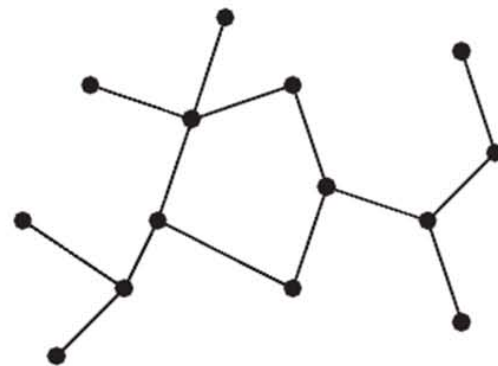
- Uma **árvore** é um grafo **conexo** e **acíclico** (sem ciclos).



(a)



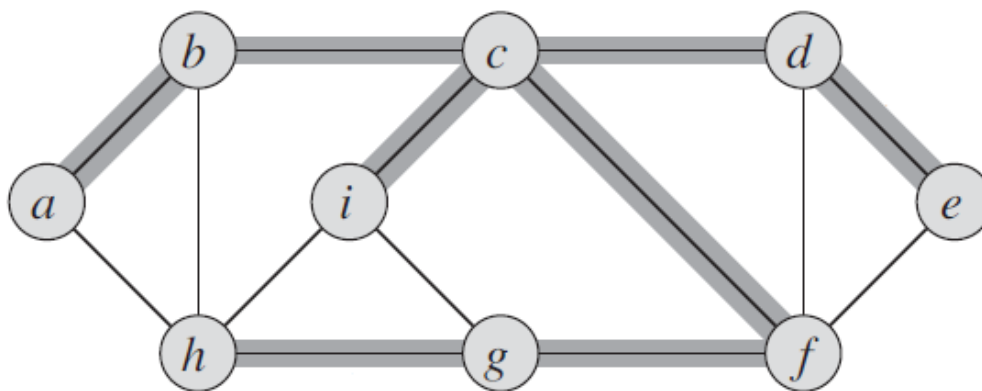
(b)



(c)

## MST: árvore geradora mínima

- Dado um grafo conexo  $\mathbf{G}$ ,
  - uma **árvore** que conecta todos os vértices de  $\mathbf{G}$  é chamada de uma **árvore geradora**.



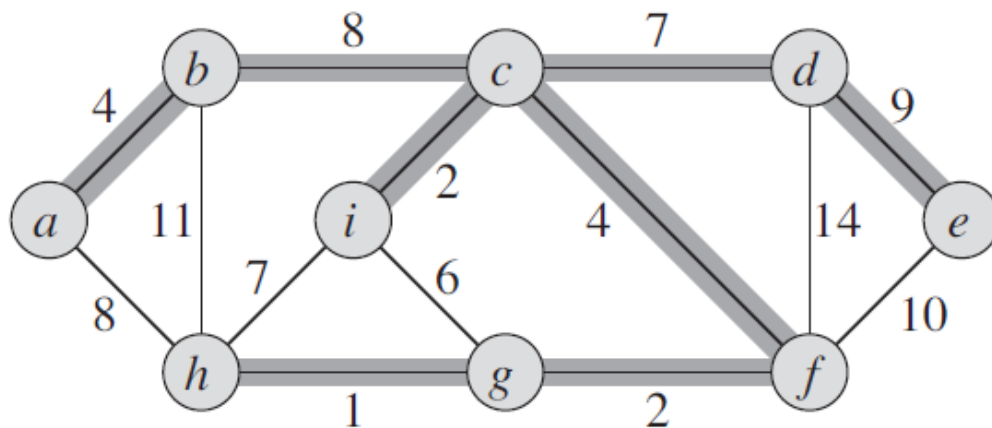
MST: árvore geradora mínima

(MST: Minimum Spanning Tree)

- **Problema:**
  - Dado um grafo conexo **G**,
  - obter uma **árvore geradora** com peso **mínimo**.

- **Minimizar**

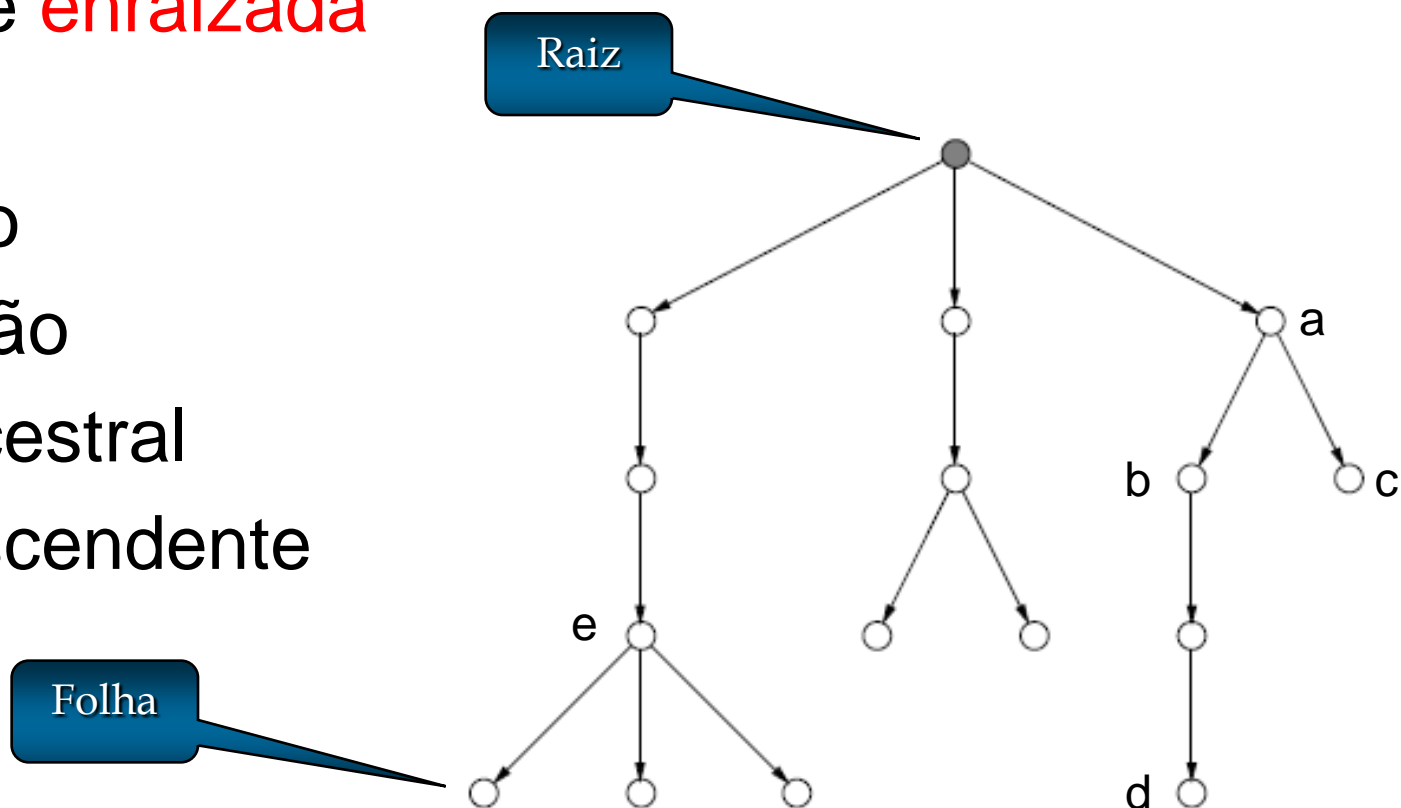
$$w(T) = \sum_{uv \in T} w(uv)$$



## MST: árvore geradora mínima

### ■ Árvore **enraizada**

- pai
- filho
- irmão
- ancestral
- descendente



MST: árvore geradora mínima

(MST: Minimum Spanning Tree)

- MST-Prim( $G, w, r$ )

- Entrada

- $G$  conexo e ponderado
- $w$  é uma função peso
- $r$  é um vértice inicial

- Saída

- uma MST com raiz  $r$

- Atributos de vértices

- $v.chave$
- $v.pai$

- Baseado em fila de prioridade

- ExtraiMinimo( $Q$ )



### Fila de prioridade: operações

- **Inserer(Q, x)**
  - insere elemento x no conjunto Q
- **Mínimo(Q)**
  - devolve o elemento de Q com a menor chave
- **ExtraiMínimo(Q)**
  - remove e devolve o elemento de Q com a menor chave
- **DiminuiChave(Q, x, k)**
  - diminui o valor da chave de x para o novo valor k.

## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

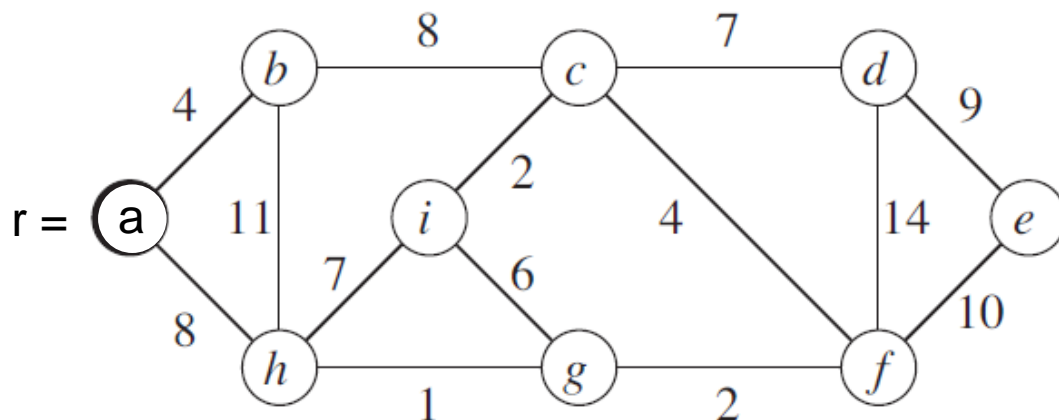
```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 


---


5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 

```

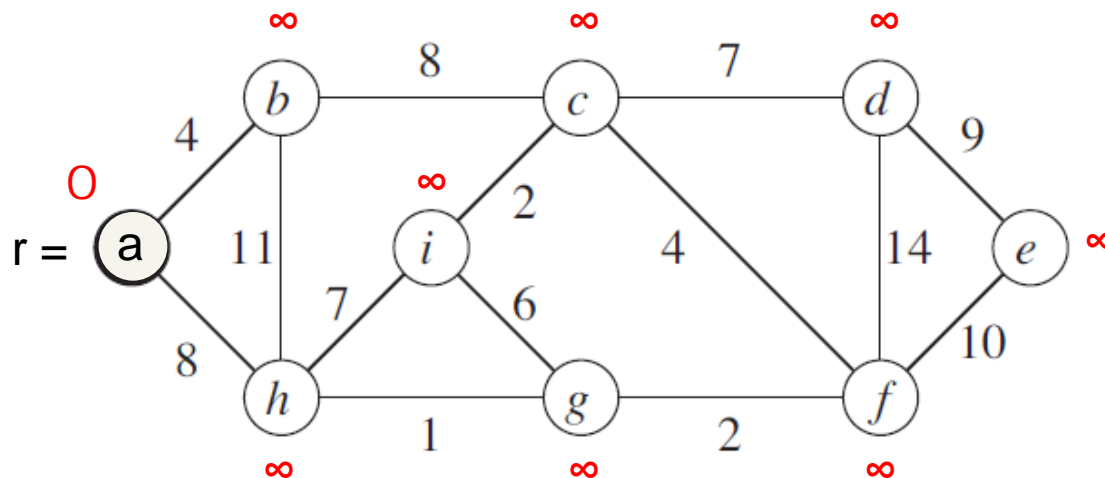


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```

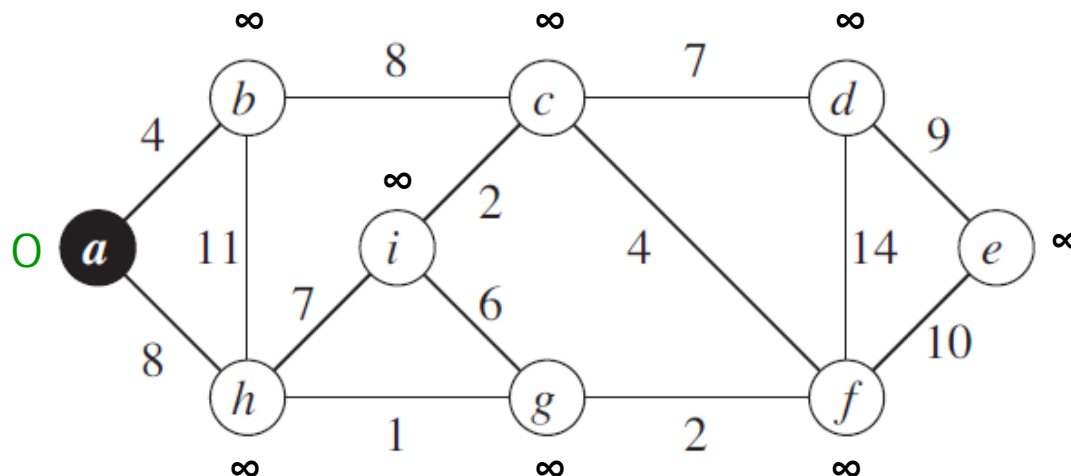


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```

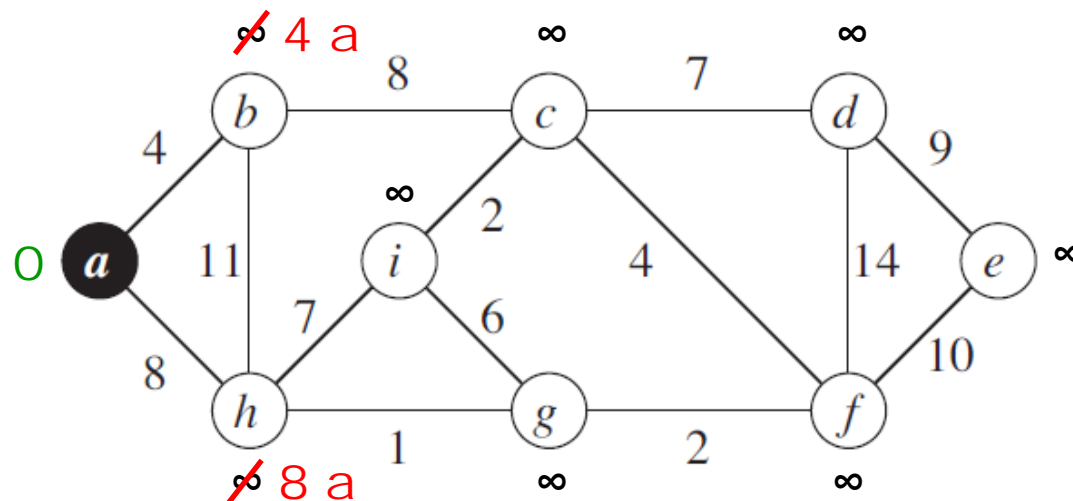


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```

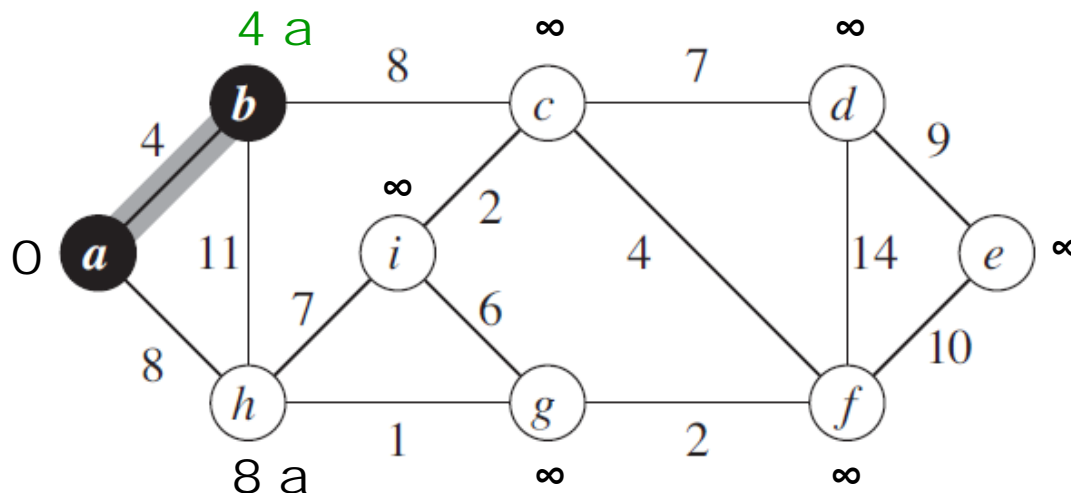


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```



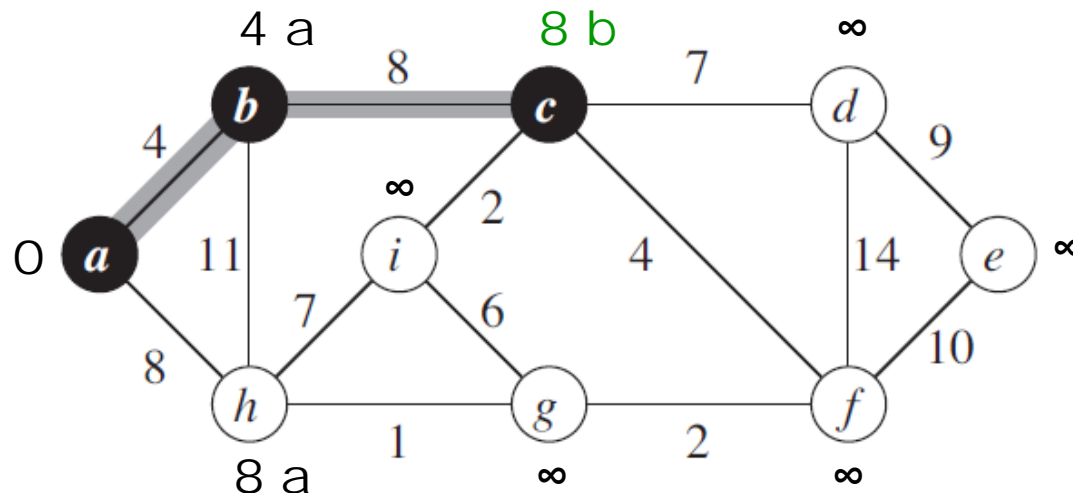


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```



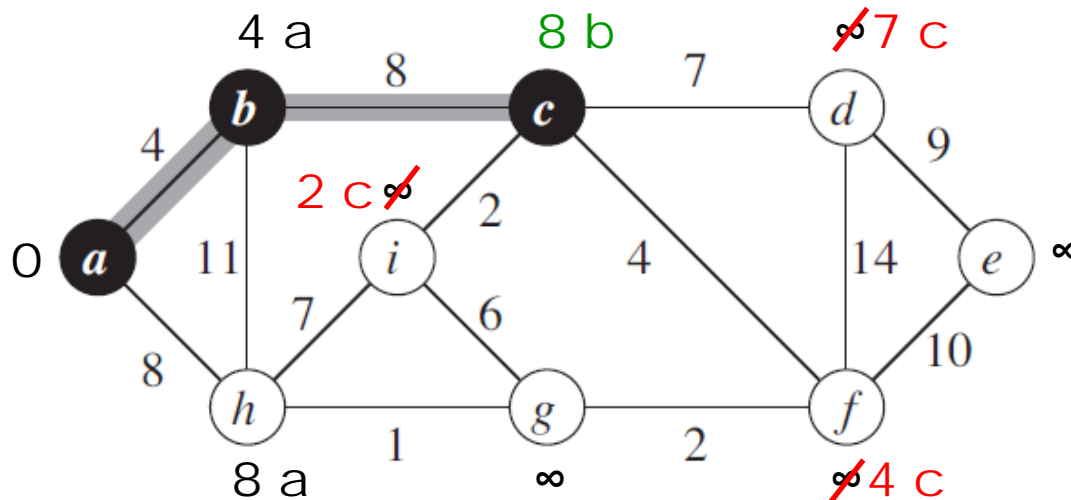


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```

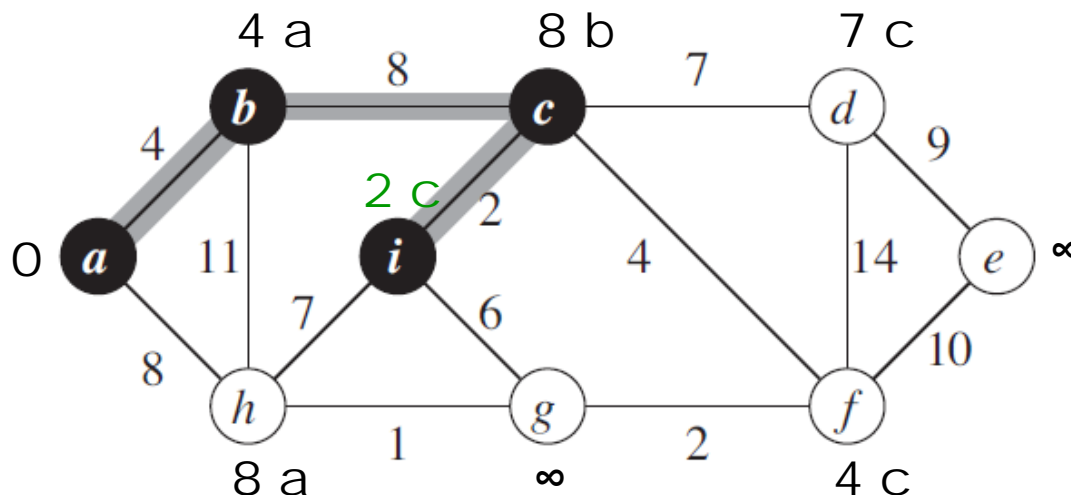


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
  
```



## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça

2      $u.chave = \text{INFINITO}$

3      $u.pai = \text{NIL}$

4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$

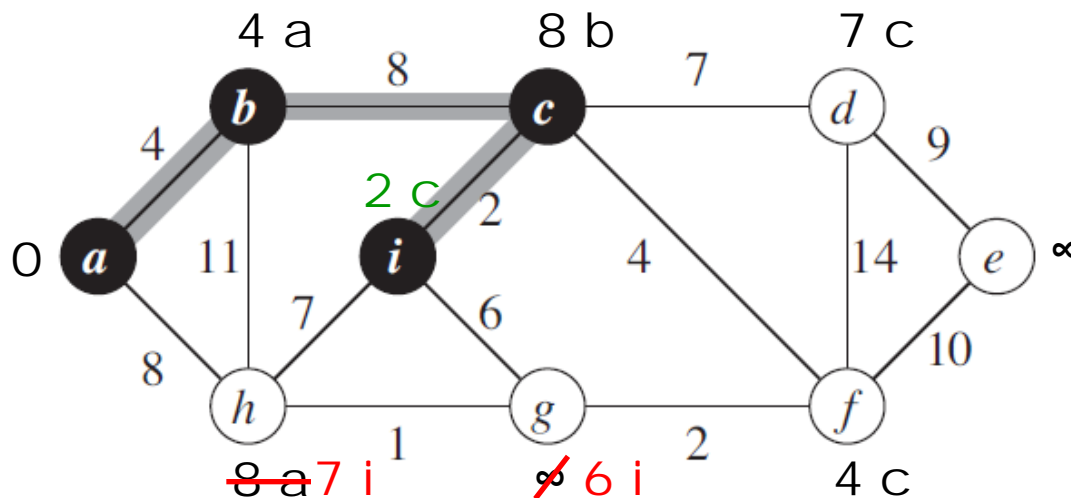
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça

6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$

7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça

8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$

9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$



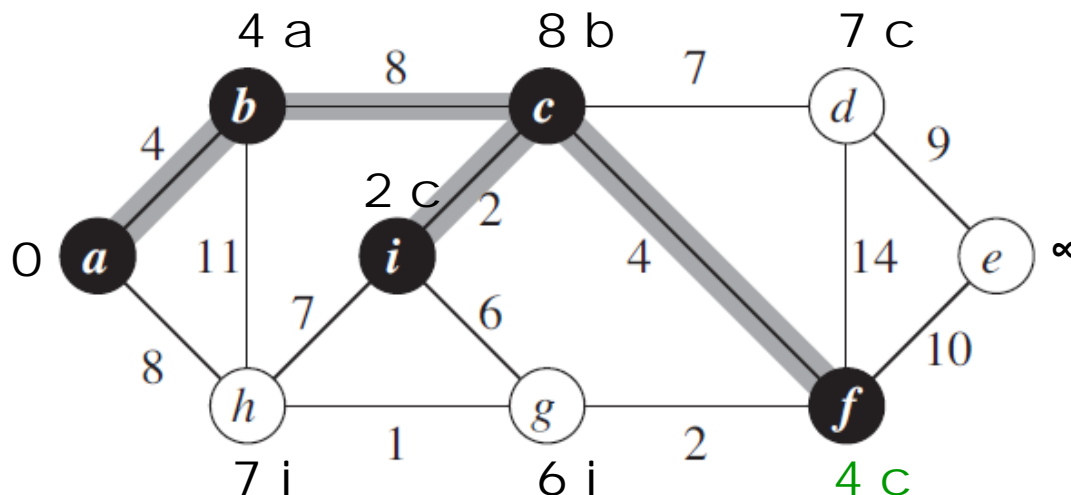
## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 

```

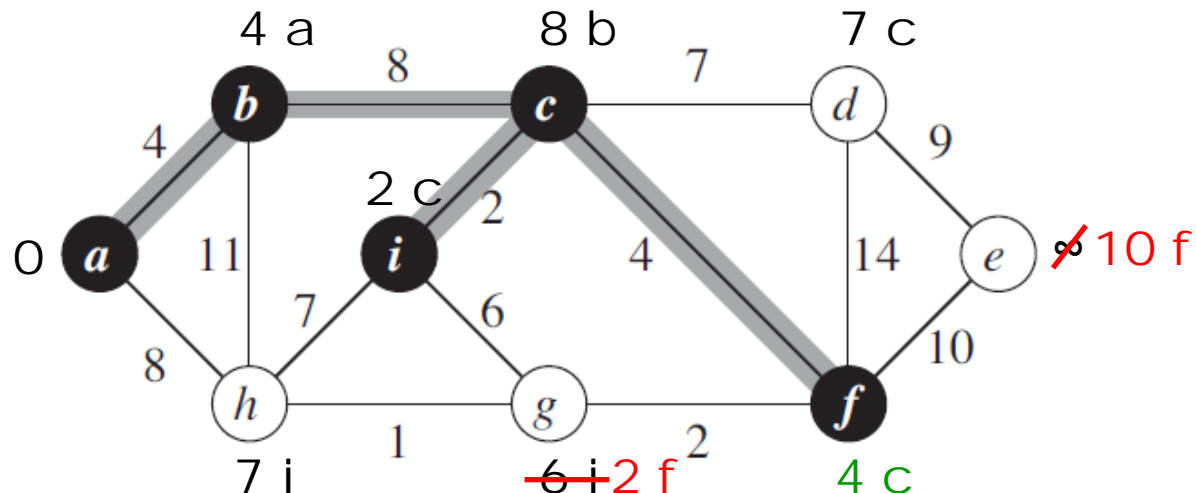


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```



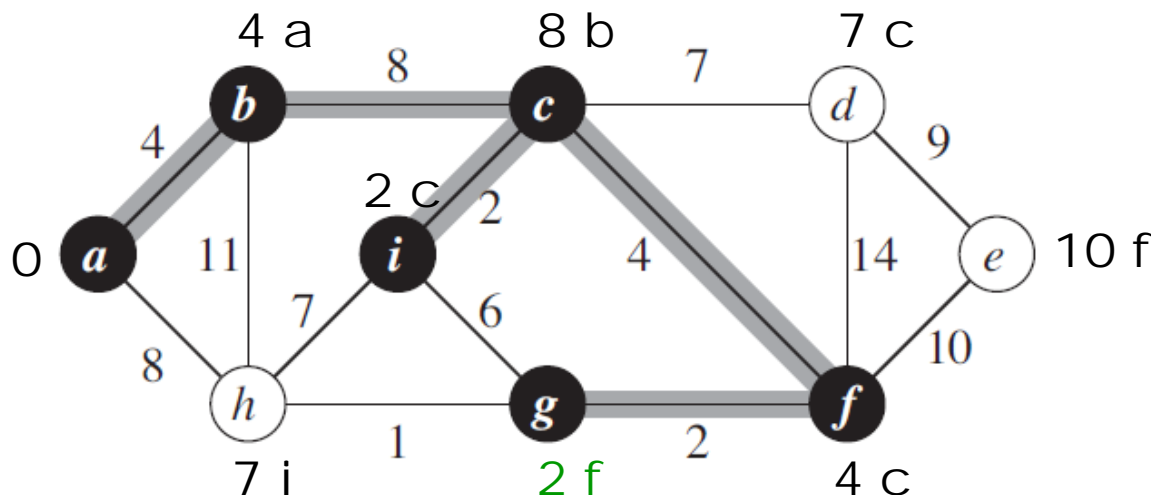
## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 

```

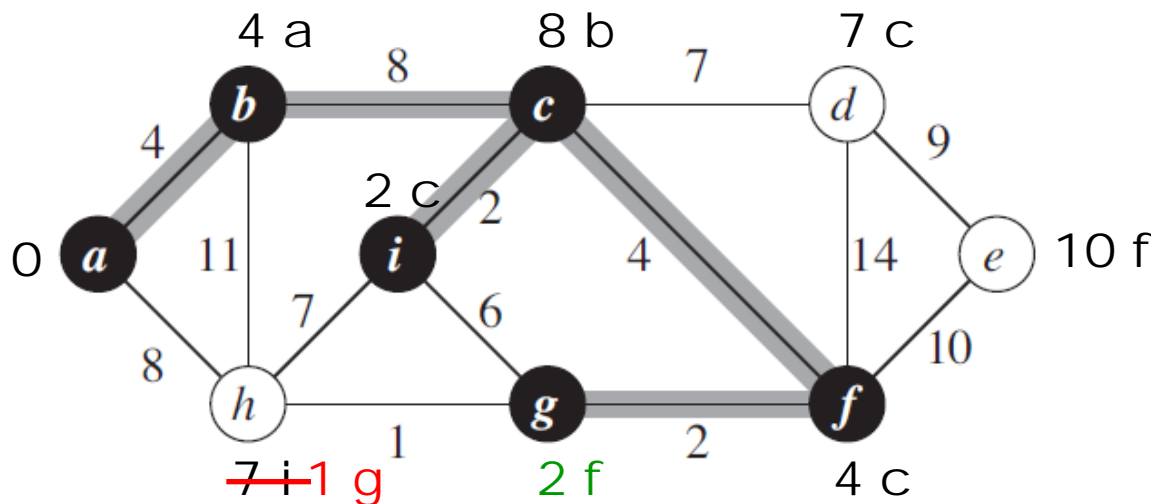


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2    $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3    $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6    $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7   para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8     se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9       então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
  
```



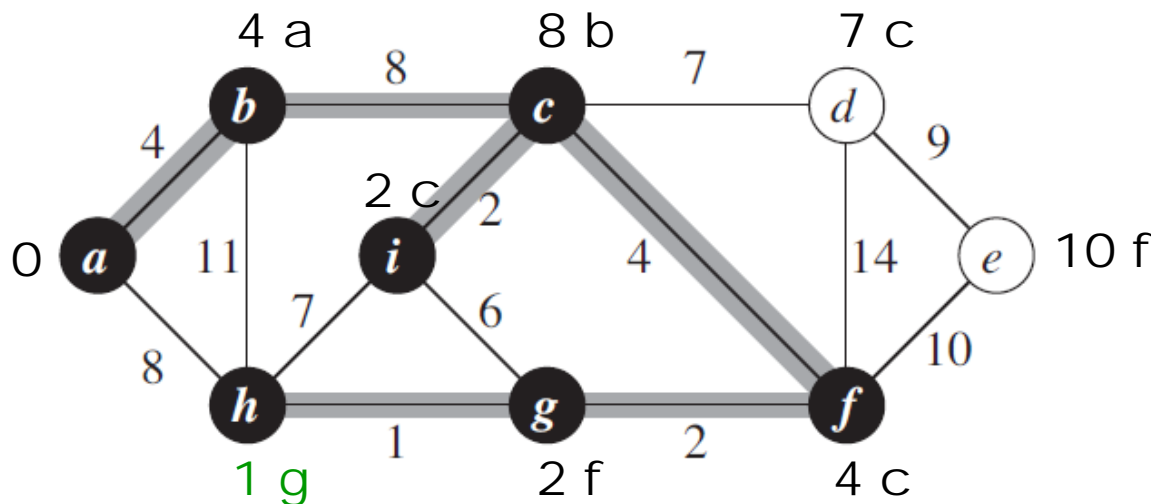
## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 

```





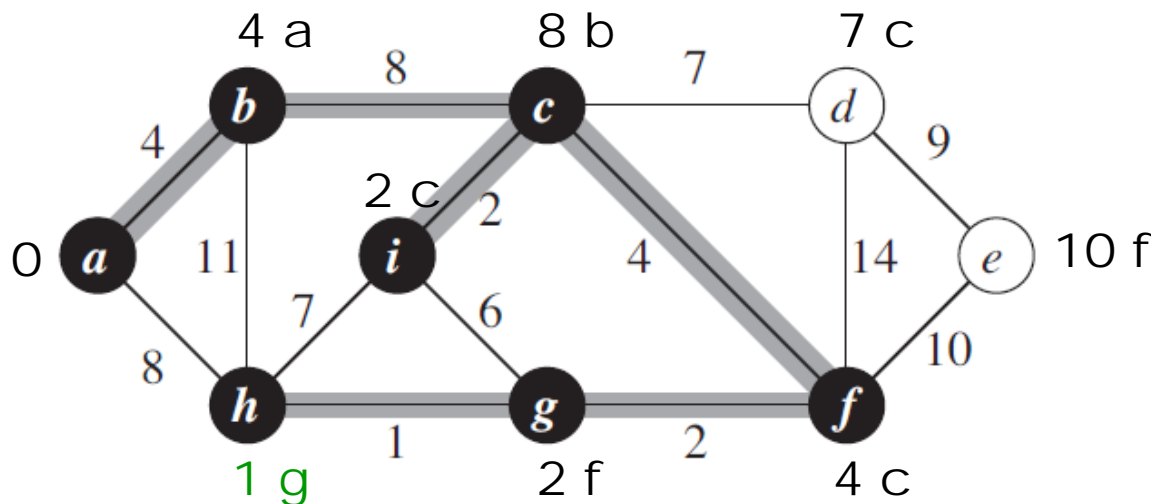
## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 

```



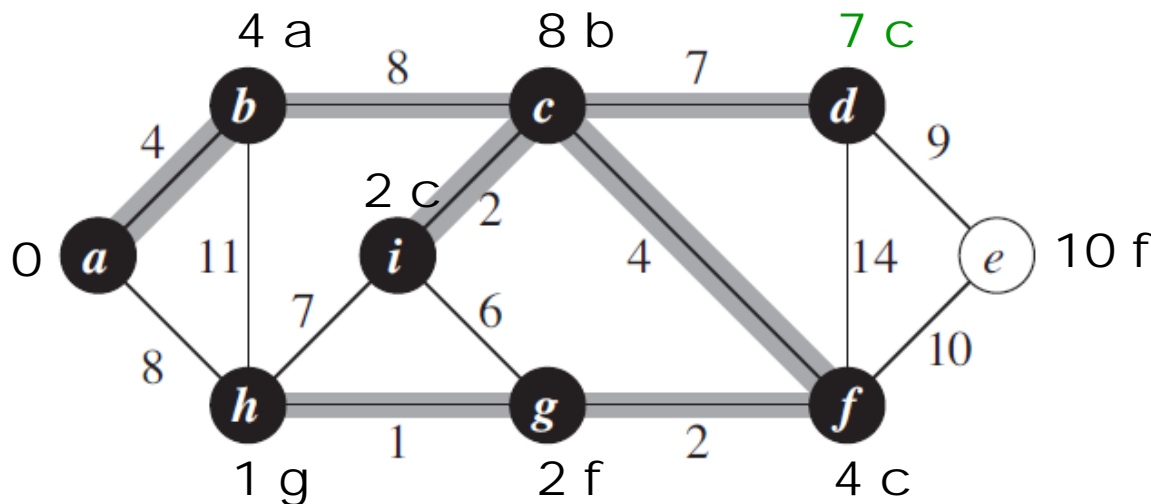
## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 

```



## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça

2      $u.chave = \text{INFINITO}$

3      $u.pai = \text{NIL}$

4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$

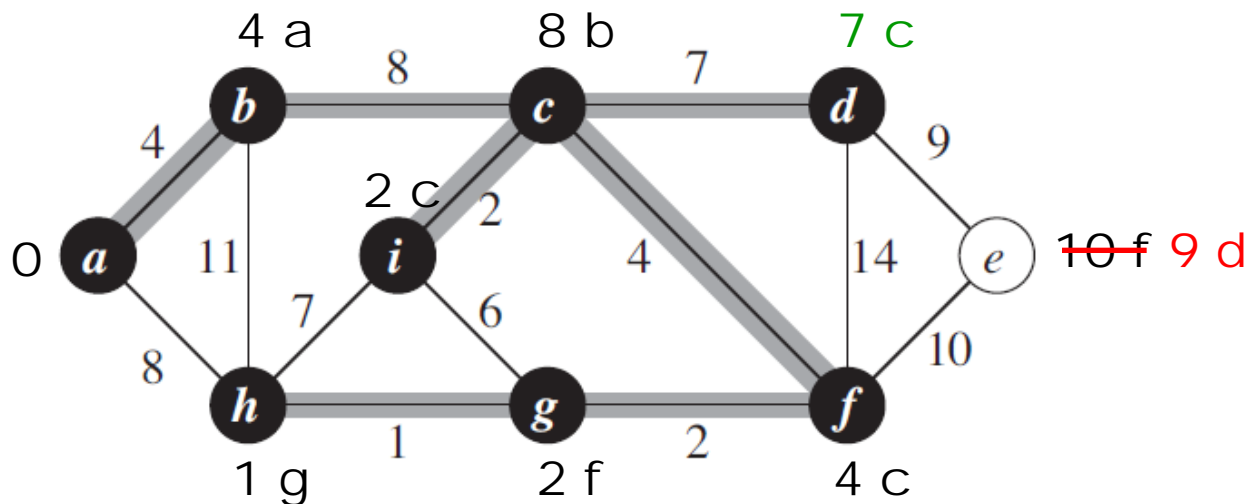
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça

6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$

7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça

8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$

9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$



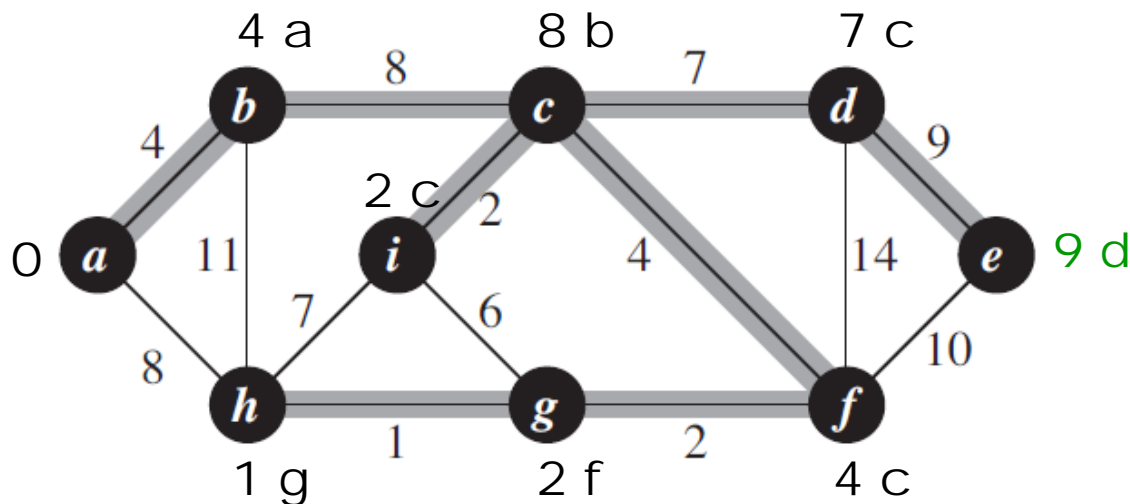
## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.\text{Adj}[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 

```

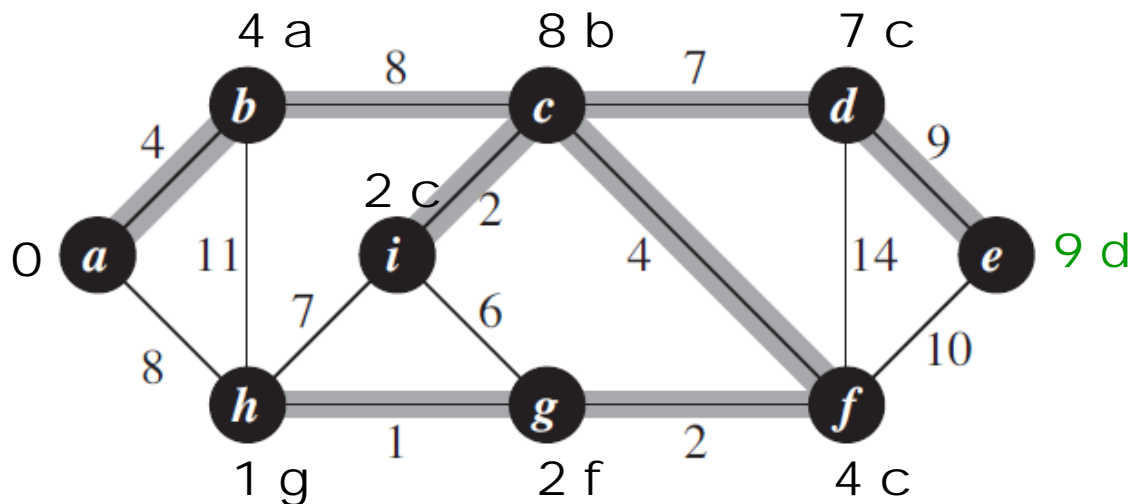


## MST: árvore geradora mínima

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice  $u$  em  $G.V$  faça
2      $u.chave = \text{INFINITO}$ 
3      $u.pai = \text{NIL}$ 
4  $r.chave = 0$ ;  $Q = G.V$ 
5 enquanto  $Q \neq \text{VAZIO}$  faça
6      $u = \text{ExtraiMinimo}(Q)$ 
7     para cada  $v$  em  $G.Adj[u]$  faça
8         se  $v$  está em  $Q$  e  $w(uv) < v.chave$ 
9             então  $v.chave = w(uv)$ ;  $v.pai = u$ 
    
```





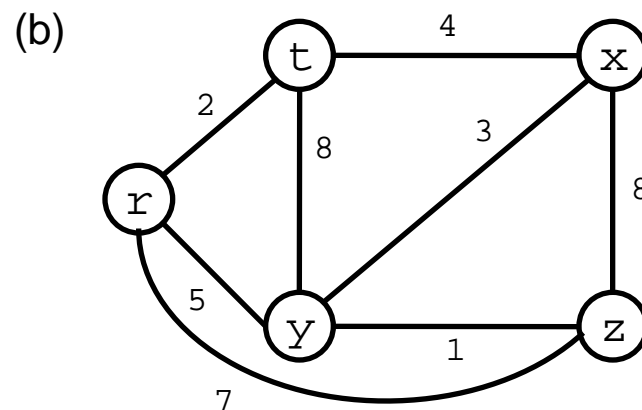
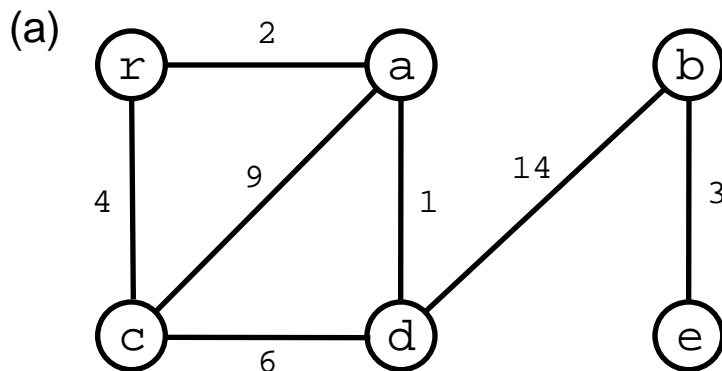
## MST: árvore geradora mínima

- Exercício: Para cada grafo, calcular uma **árvore geradora mínima**.

**MST-Prim**( $G, w, r$ )

```

1 para cada vértice u em G.V faça
2   u.chave = INFINITO
3   u.pai = NIL
4 r.chave = 0; Q = G.V
5 enquanto Q != VAZIO faça
6   u = ExtraiMinimo(Q)
7   para cada v em G.Adj[u] faça
8     se v está em Q e w(uv) < v.chave
9       então v.chave = w(uv); v.pai = u
  
```



### Tarefa

- Exercícios:
  - Lista 2





### Tarefa



- EP 2

- Página da disciplina:

- <https://sites.google.com/site/alexnoma/home/grafos>