

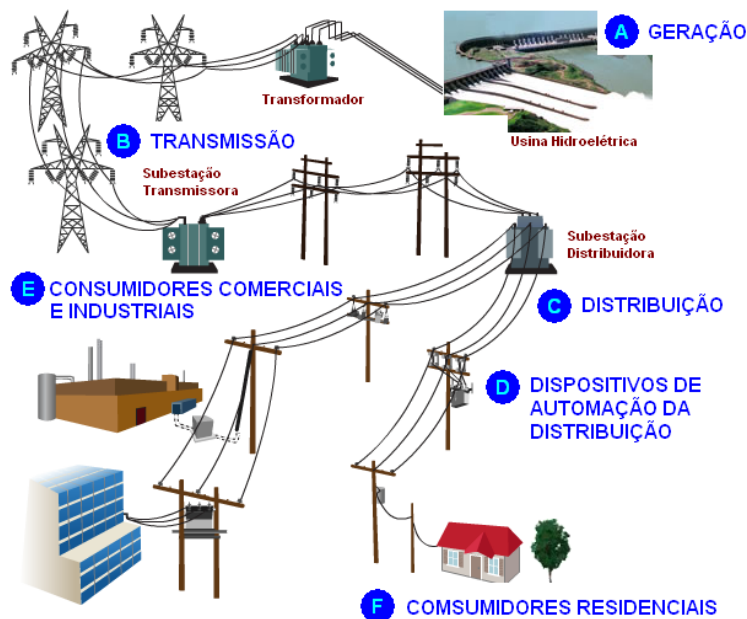
# Teoria dos Grafos



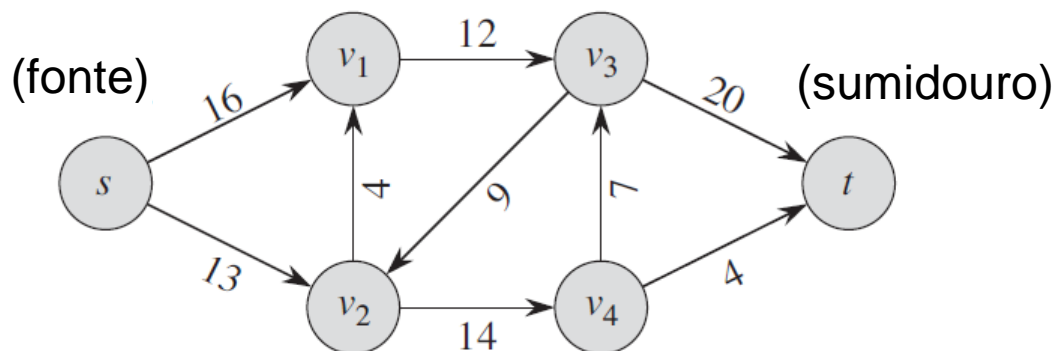
Universidade Federal do ABC

## Fluxo máximo

- Exemplos de **fluxo**:
  - informação
  - corrente elétrica
  - líquido, mercadoria, etc



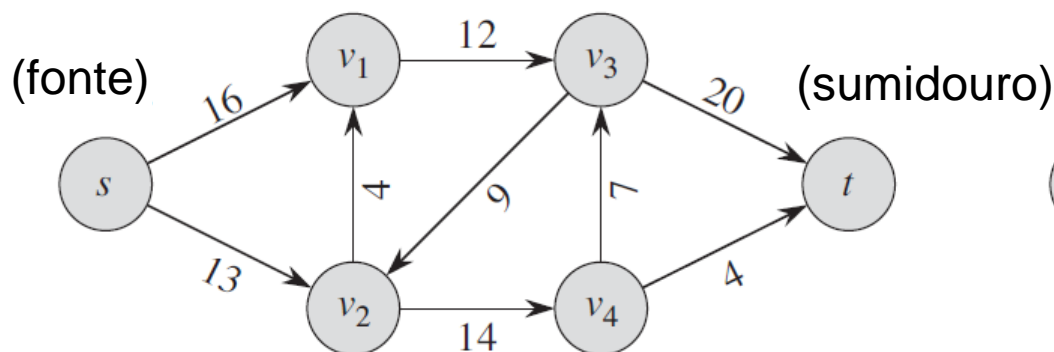
- Dados
  - $G$  ponderado (peso = capacidade)
  - fonte  $s$  e sumidouro  $t$
- **Problema:** Qual é o **fluxo máximo** de  $s$  a  $t$ ?



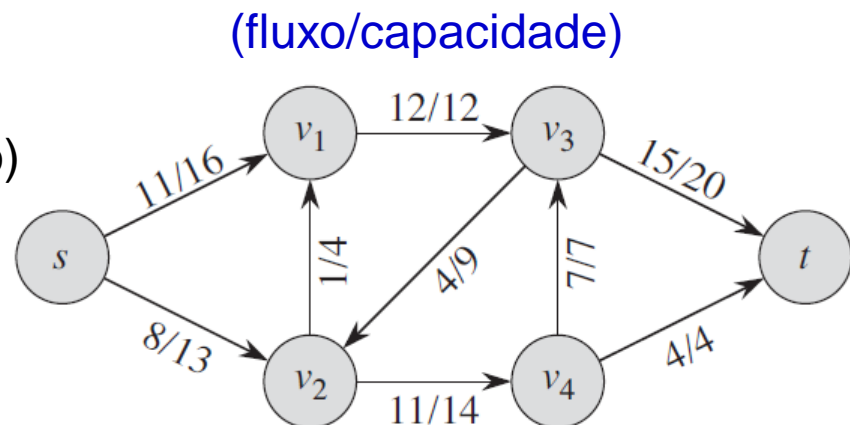
(a)

## Fluxo máximo

- Dados
  - G ponderado (peso = capacidade)
  - fonte s e sumidouro t
- **Problema:** Qual é o **fluxo máximo** de s a t?



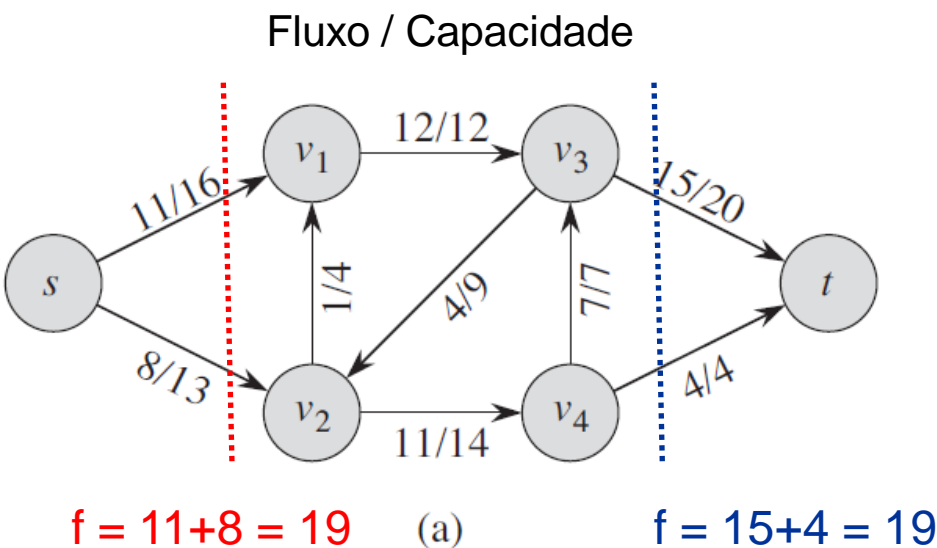
(a)



(b)

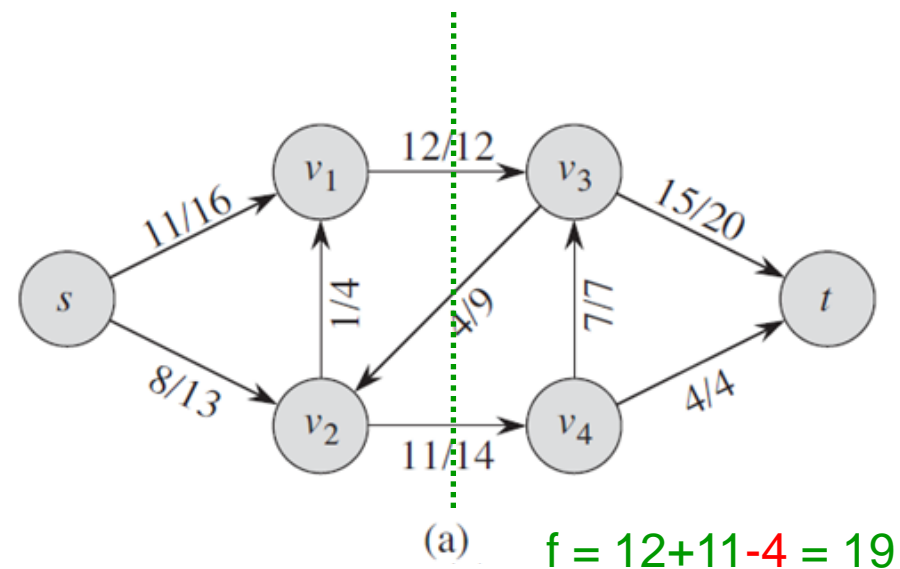
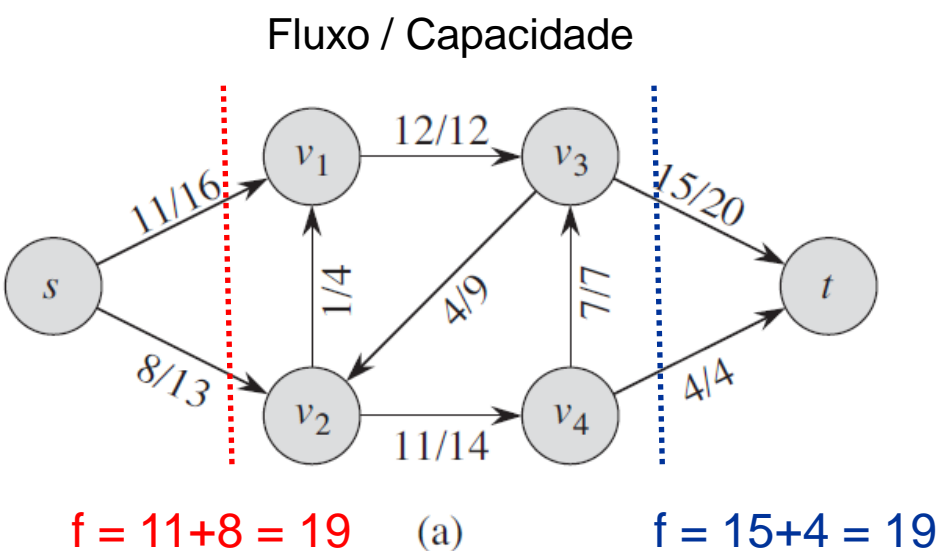
### Propriedade: Conservação do fluxo

- Corte (S,T)



### Propriedade: Conservação do fluxo

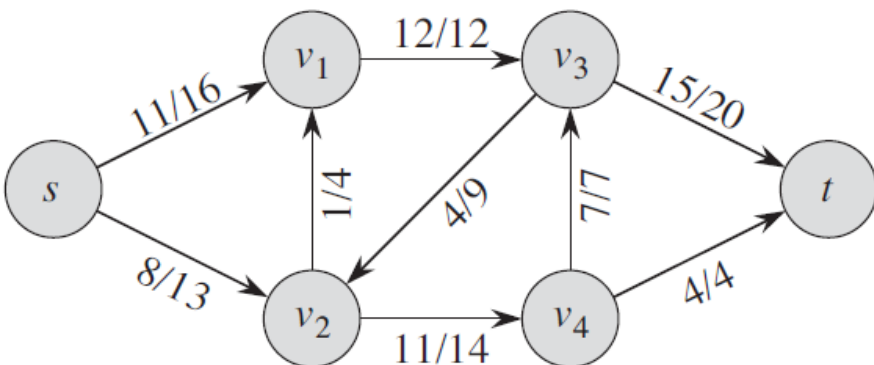
#### ■ Corte (S,T)



### Rede residual

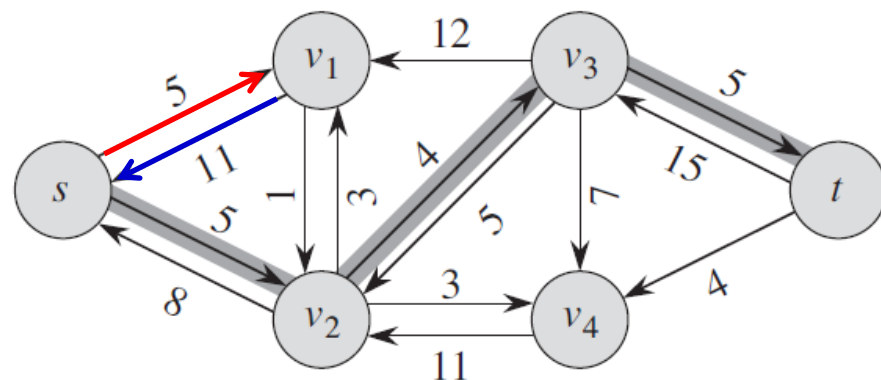
("capacidades residuais de ida" + "fluxo de volta")

Fluxo / Capacidade



(a)

Rede residual

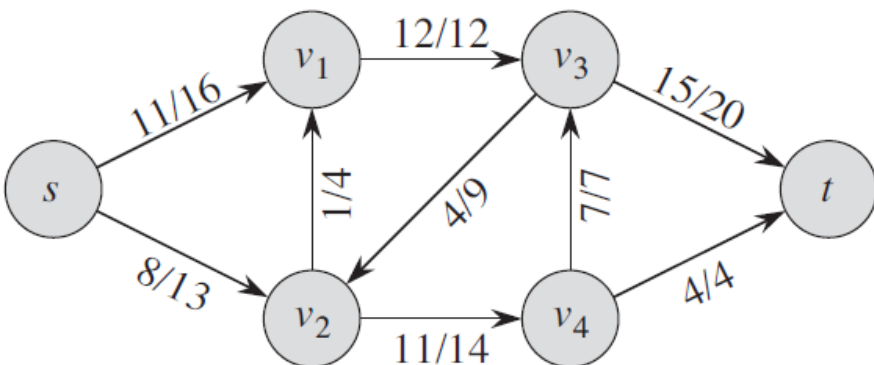


(b)

### Rede residual

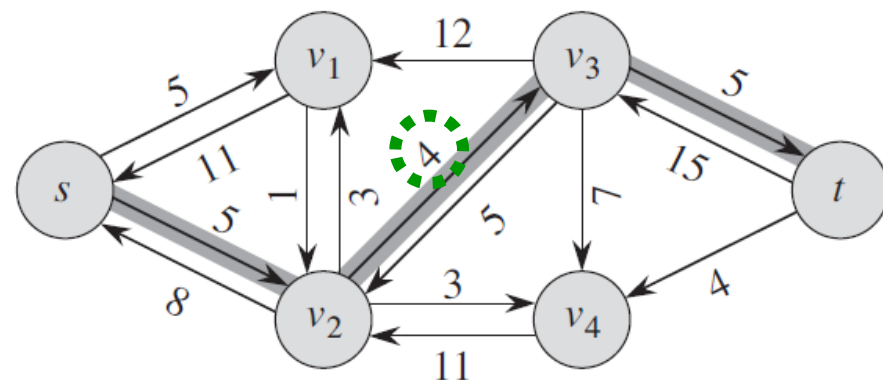
- Um caminho é **augmentante**
  - se é um caminho de  $s$  a  $t$  na rede residual.  
(será usado para **augmentar** o fluxo)

Fluxo / Capacidade



(a)

Rede residual



(b)

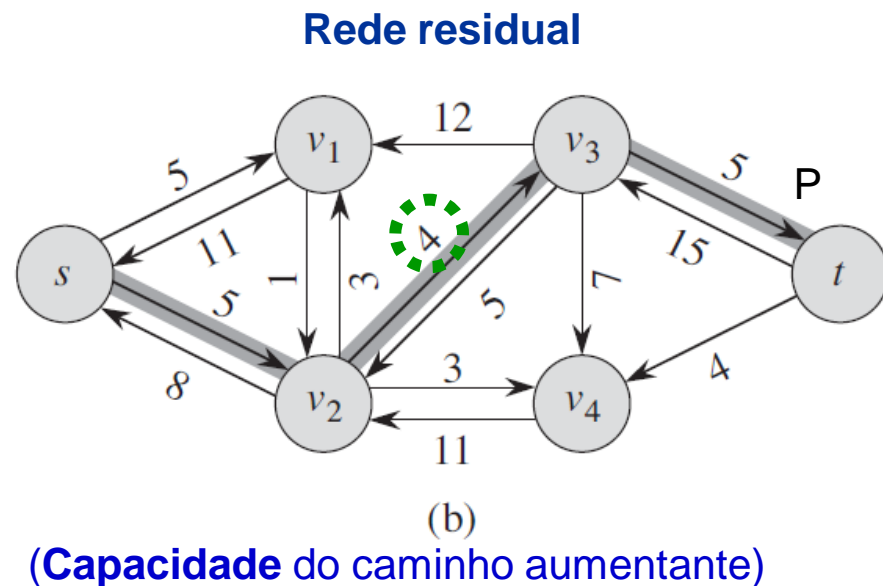
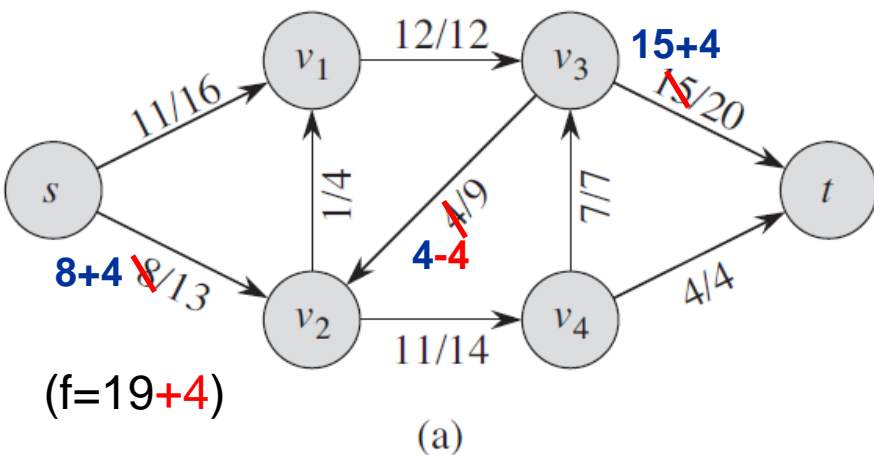
(Capacidade do caminho aumentante)



## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson-Method**( $G, s, t$ ):

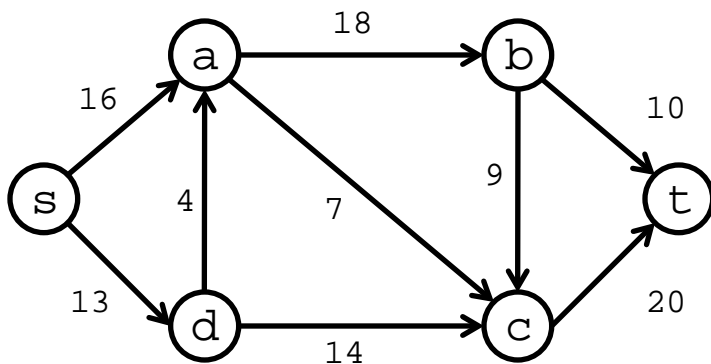
- 1 Inicialmente, fluxo  $f = 0$
- 2 Enquanto existir um **caminho aumentante**  $P$ , faça
- 3     Incremente o fluxo  $f$  (usando  $P$ )
- 4 Devolva  $f$



### Exercício: Calcular o fluxo máximo de $s$ a $t$

**Ford-Fulkerson-Method**( $G, s, t$ ):

- 1 Inicialmente, fluxo  $f = 0$
- 2 Enquanto existir um **caminho aumentante**  $P$ , faça
- 3     Incremente o fluxo  $f$  (usando  $P$ )
- 4 Devolva  $f$



### Tarefa

- Exercícios:
  - Lista 5



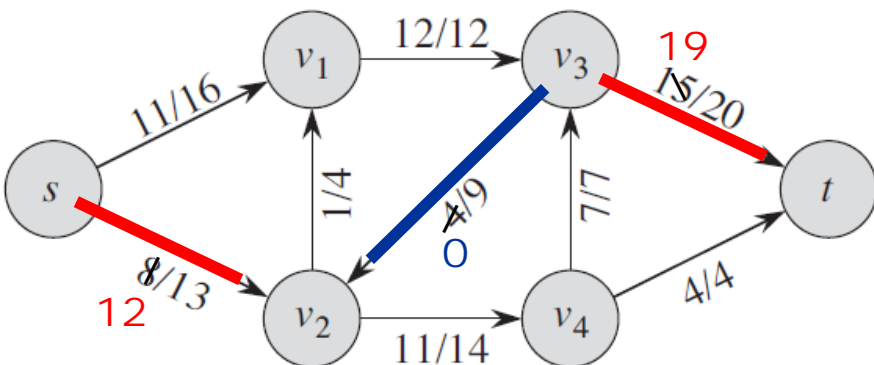
## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

- 1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$
- 2  $uv.f = 0$
- 3 enquanto existir **caminho aumentante**  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
- 4 para cada  $uv$  em  $P$ , faça
- 5 se  $uv$  em  $G.E$
- 6 então  **$uv.f = uv.f + cf(P)$**  (ida)
- 7 senão  **$vu.f = vu.f - cf(P)$**  (volta)

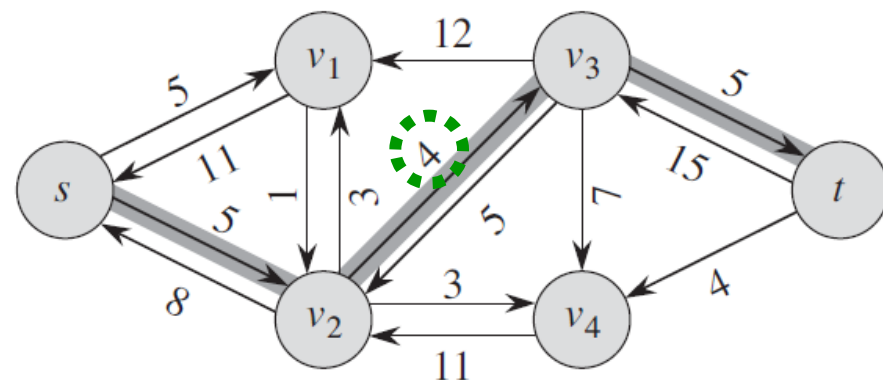
■ **Atributo**

■  $uv.f$ : fluxo



( $f=19+4$ )

(a)



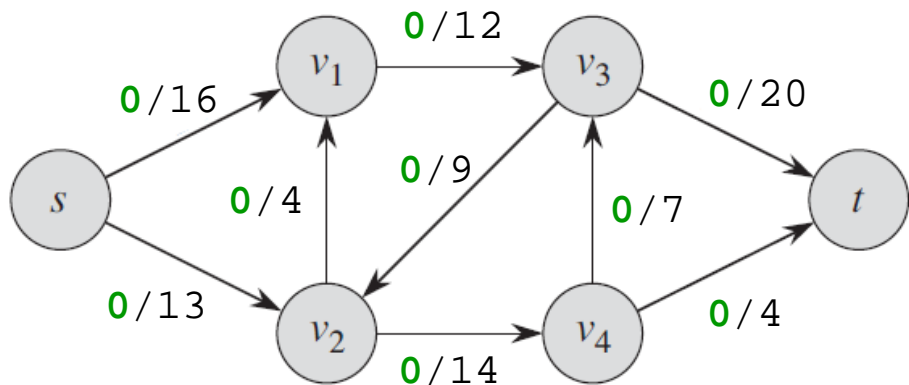
(b)

(Capacidade do caminho aumentante)

## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```
1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
```

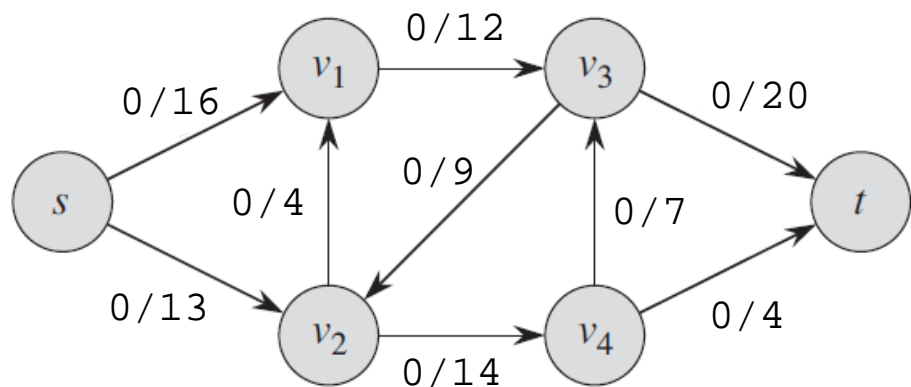


## Fluxo máximo

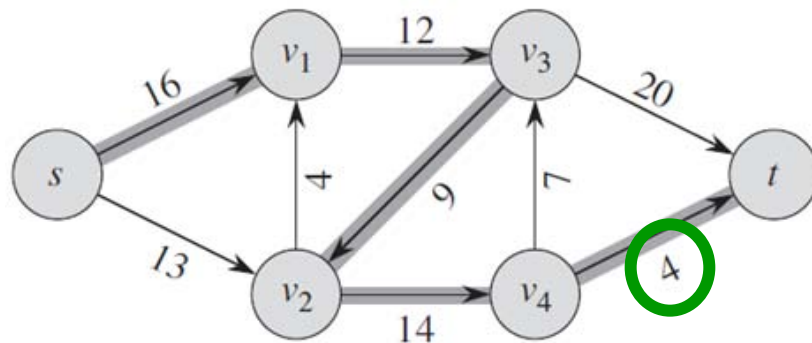
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



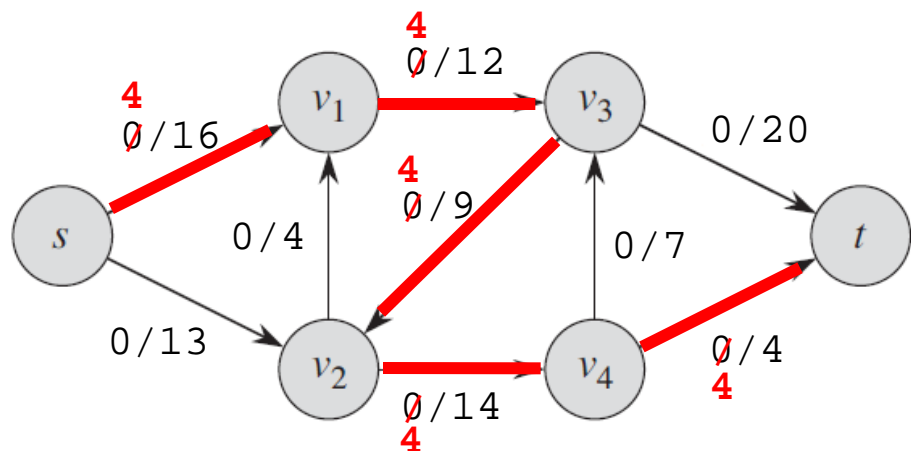
Rede residual (1)



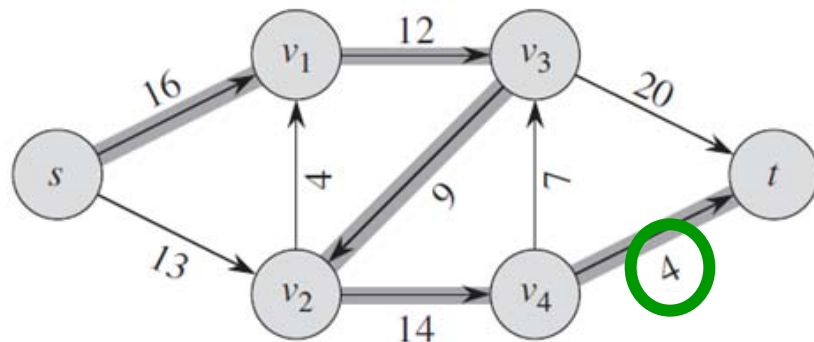
## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

- 1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$
- 2  $uv.f = 0$
- 3 enquanto existir **caminho aumentante**  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
- 4 para cada  $uv$  em  $P$ , faça
- 5 se  $uv$  em  $G.E$
- 6 então  **$uv.f = uv.f + cf(P)$**
- 7 senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$



Rede residual (1)

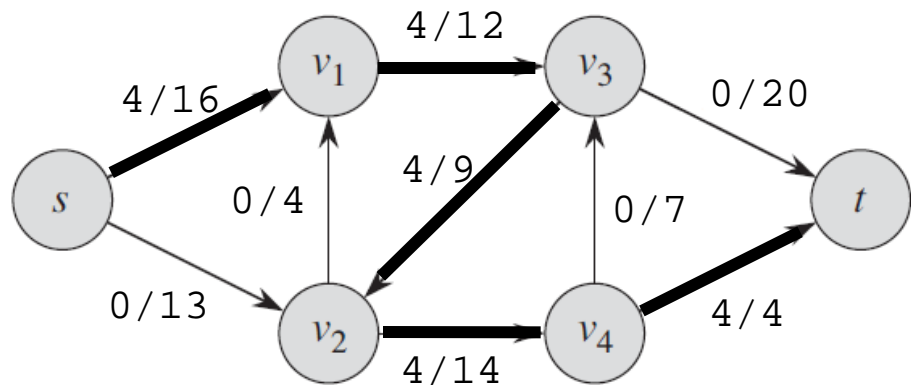


## Fluxo máximo

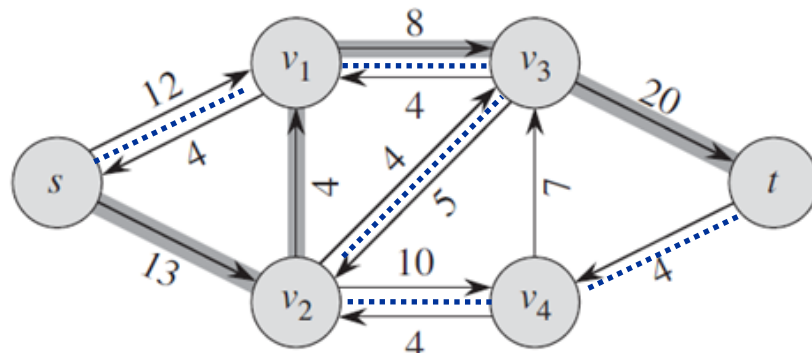
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



Rede residual (2)



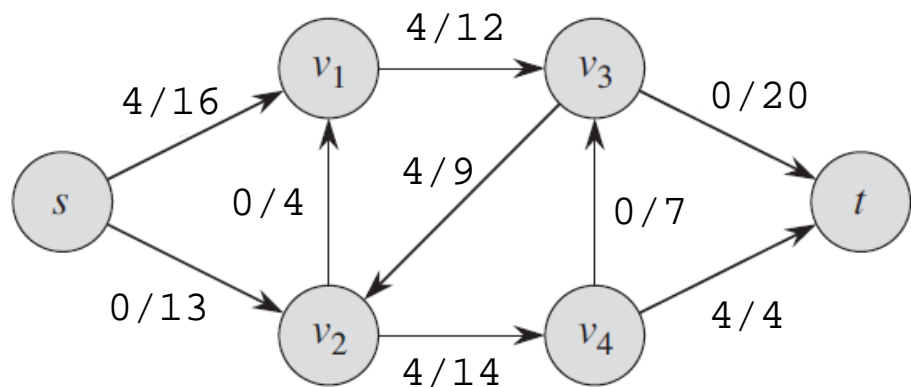


## Fluxo máximo

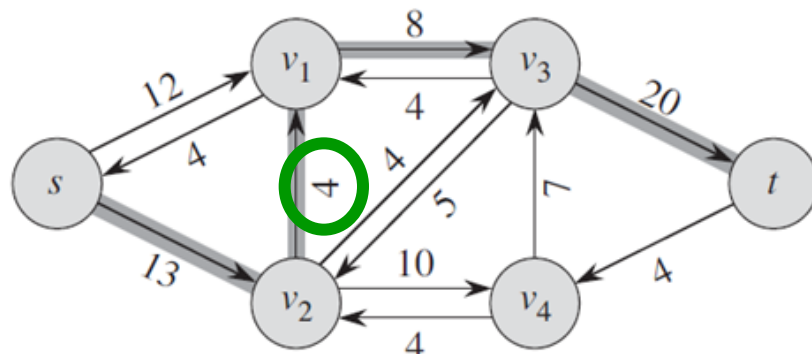
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



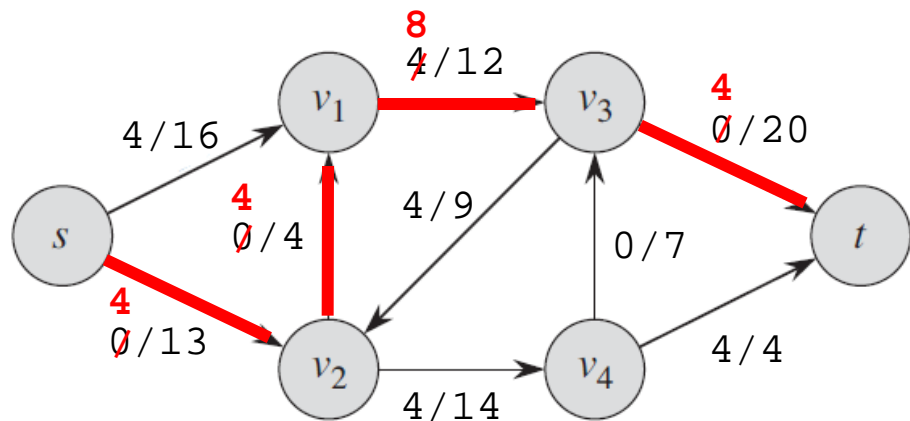
Rede residual (2)



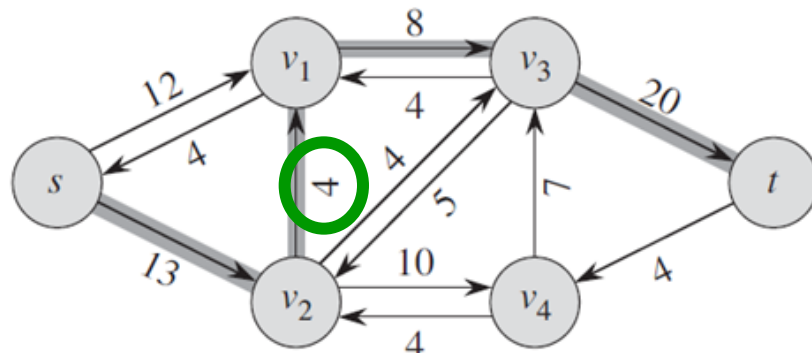
## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

- 1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$
- 2  $uv.f = 0$
- 3 enquanto existir **caminho aumentante**  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
- 4 para cada  $uv$  em  $P$ , faça
- 5 se  $uv$  em  $G.E$
- 6 então  **$uv.f = uv.f + cf(P)$**
- 7 senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$



Rede residual (2)

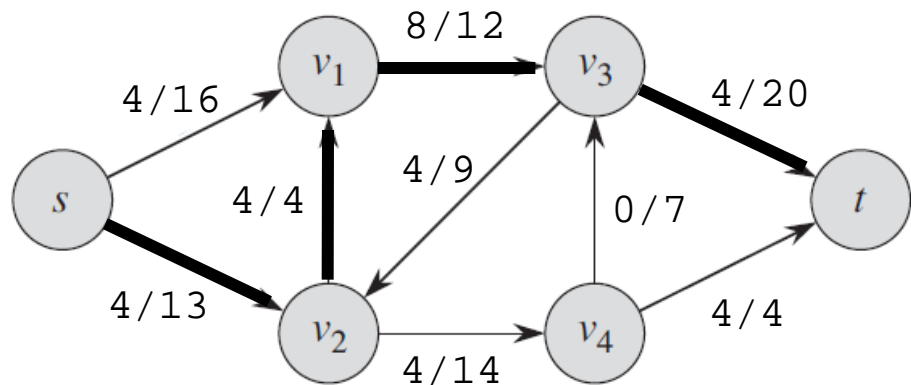


## Fluxo máximo

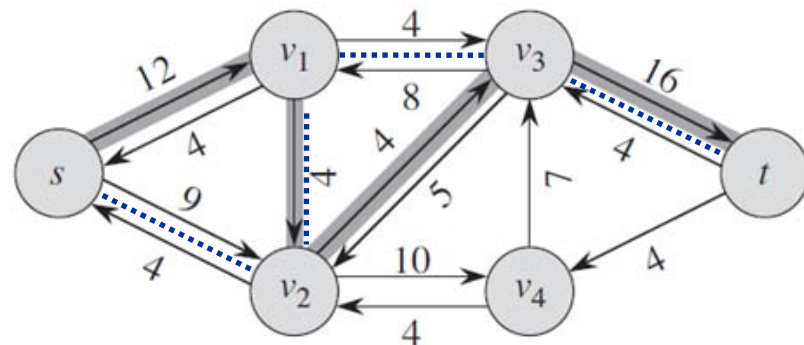
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



Rede residual (3)

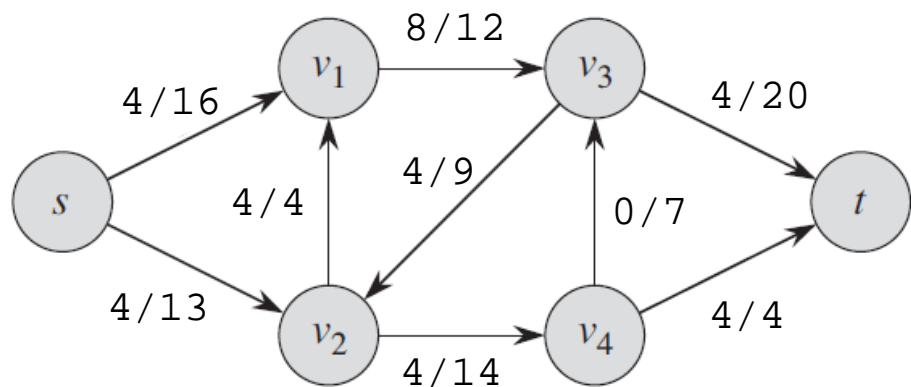


## Fluxo máximo

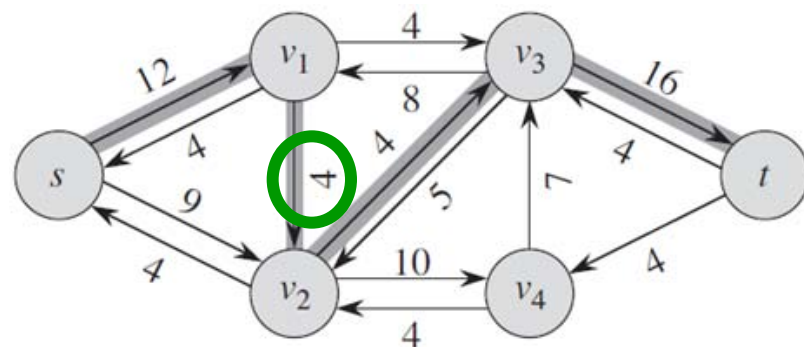
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



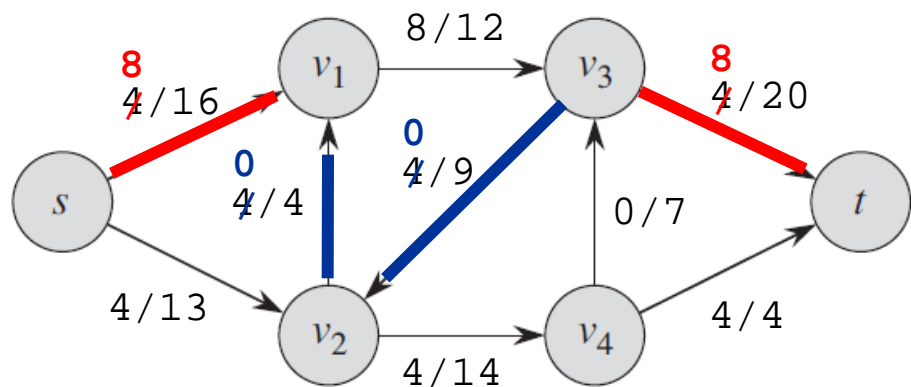
Rede residual (3)



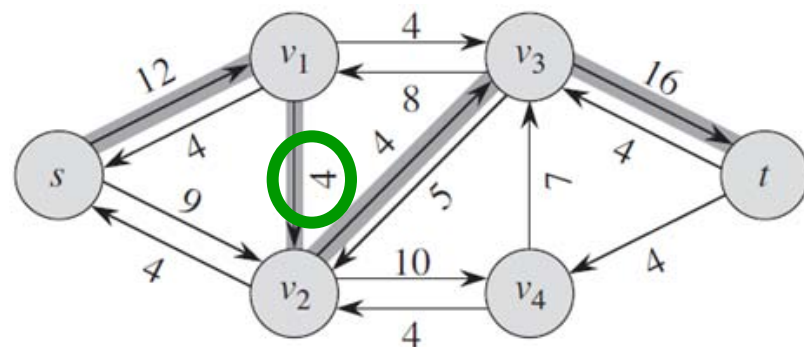
## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

- 1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$
- 2  $uv.f = 0$
- 3 enquanto existir **caminho aumentante**  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
- 4 para cada  $uv$  em  $P$ , faça
- 5 se  $uv$  em  $G.E$
- 6 então  **$uv.f = uv.f + cf(P)$**
- 7 senão  **$vu.f = vu.f - cf(P)$**



Rede residual (3)

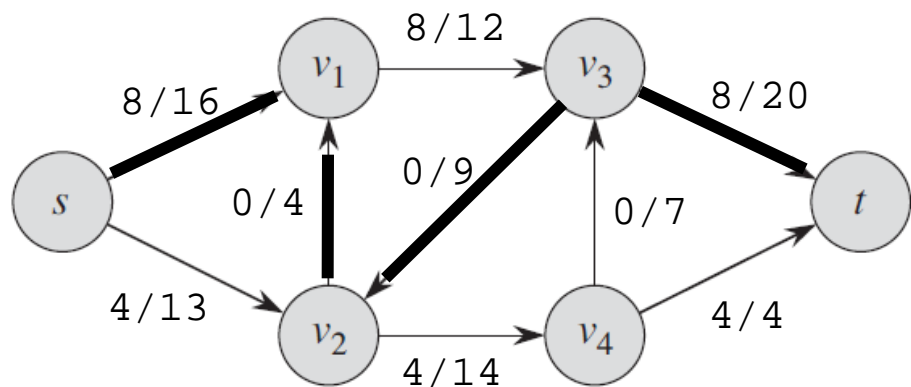


## Fluxo máximo

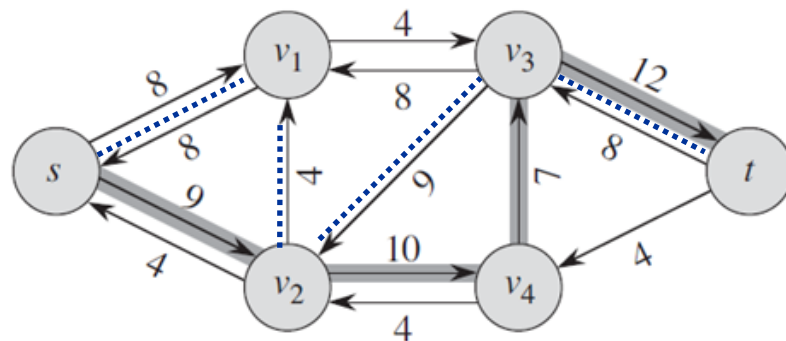
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



Rede residual (4)

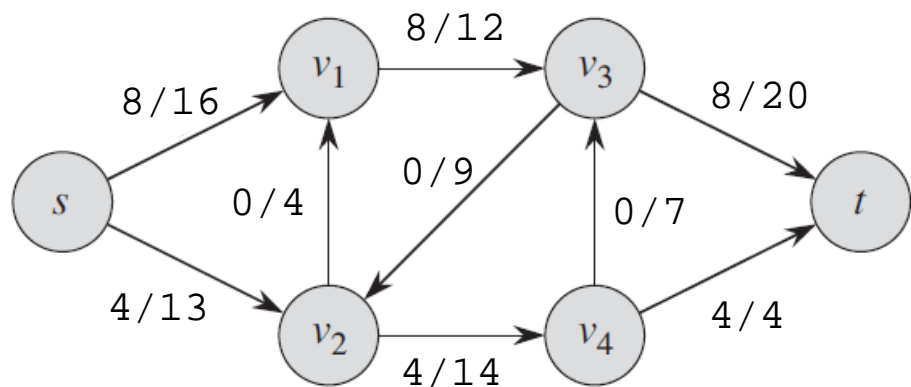


## Fluxo máximo

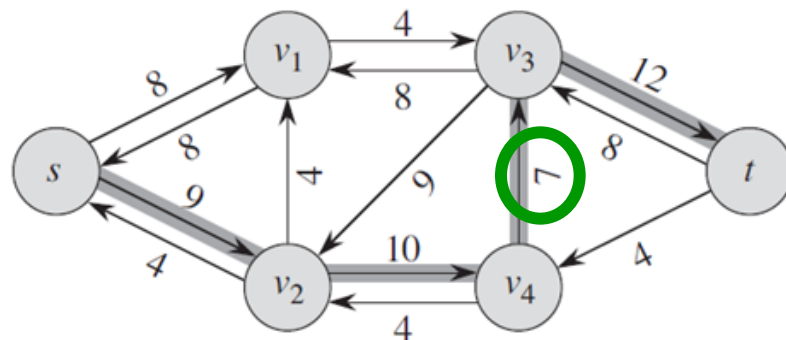
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



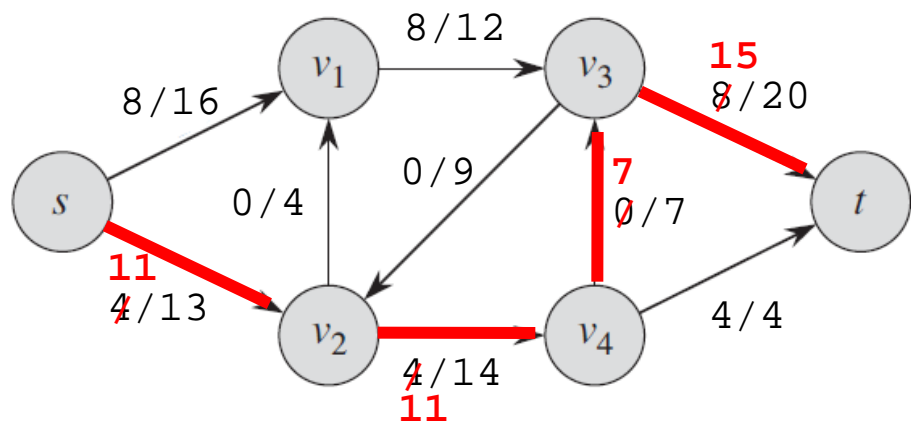
Rede residual (4)



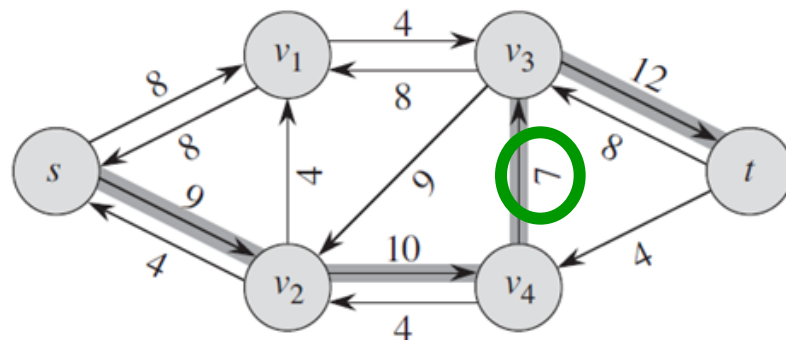
## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

- 1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$
- 2  $uv.f = 0$
- 3 enquanto existir **caminho aumentante**  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
- 4 para cada  $uv$  em  $P$ , faça
- 5 se  $uv$  em  $G.E$
- 6 então  **$uv.f = uv.f + cf(P)$**
- 7 senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$



Rede residual (4)



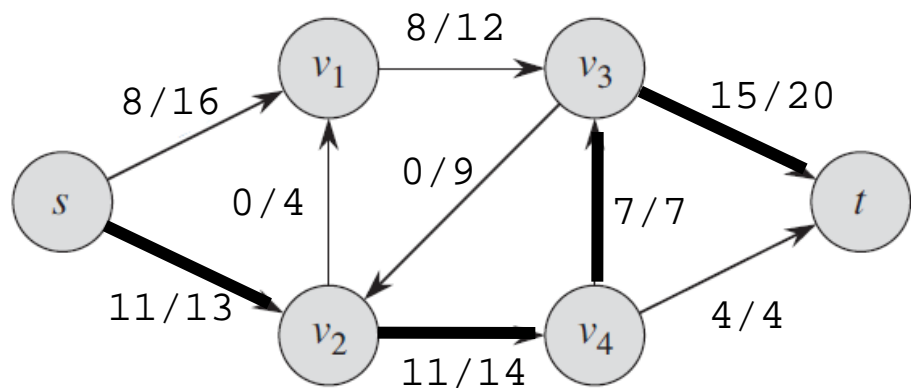


## Fluxo máximo

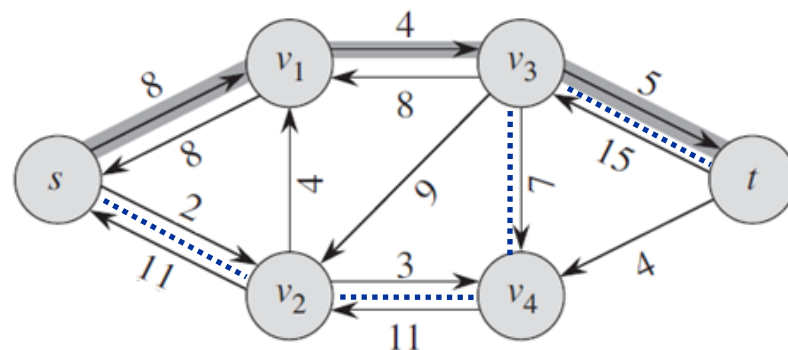
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



Rede residual (5)

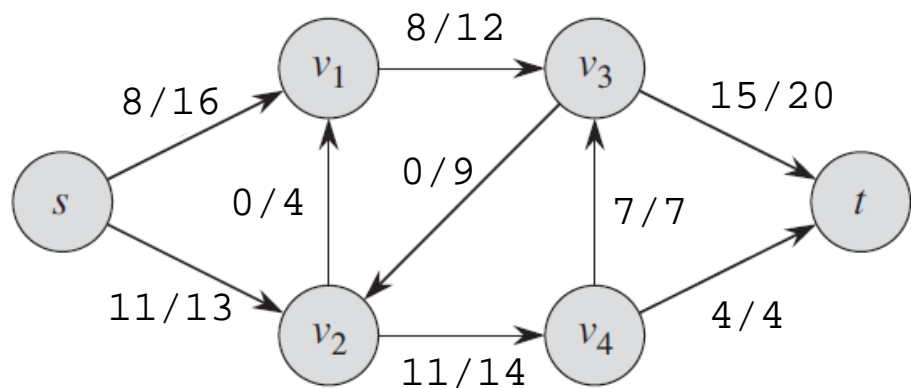


## Fluxo máximo

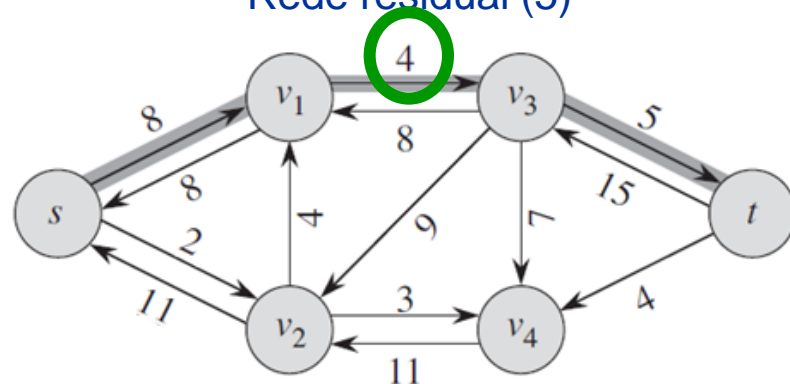
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



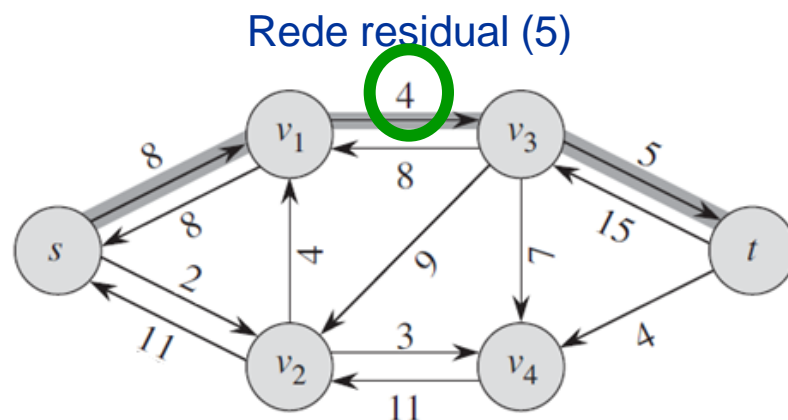
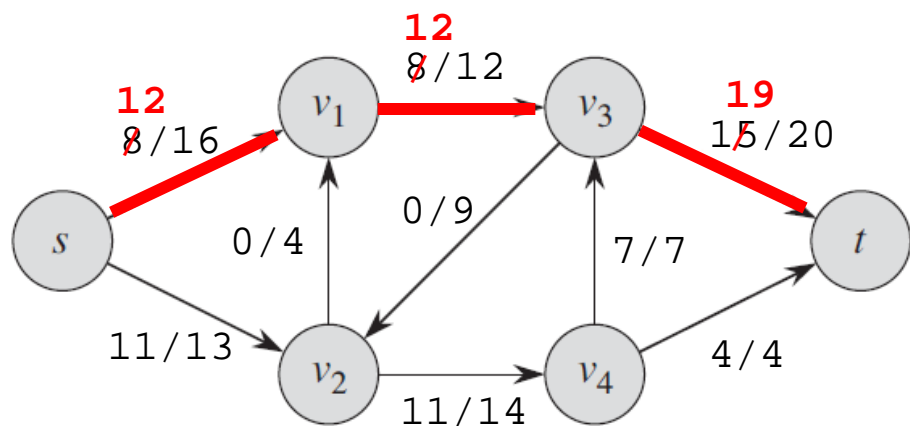
Rede residual (5)



## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

- 1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$
- 2  $uv.f = 0$
- 3 enquanto existir **caminho aumentante**  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
- 4 para cada  $uv$  em  $P$ , faça
- 5 se  $uv$  em  $G.E$
- 6 então  **$uv.f = uv.f + cf(P)$**
- 7 senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$

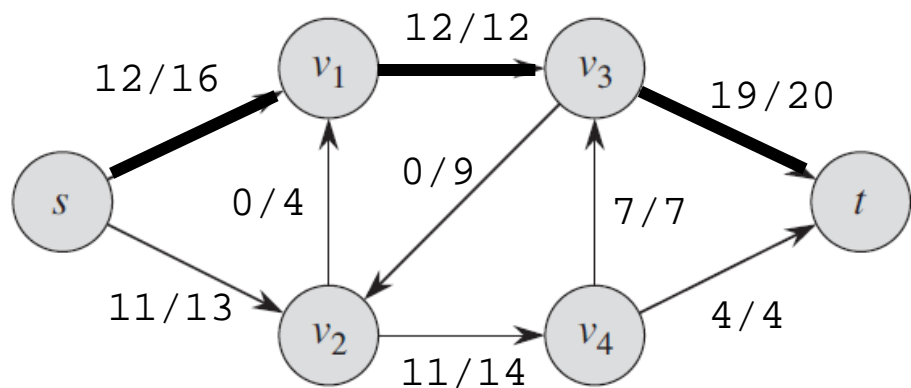


## Fluxo máximo

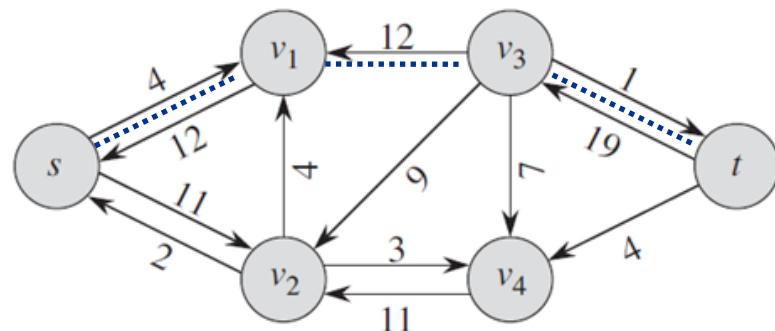
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



Rede residual (6)

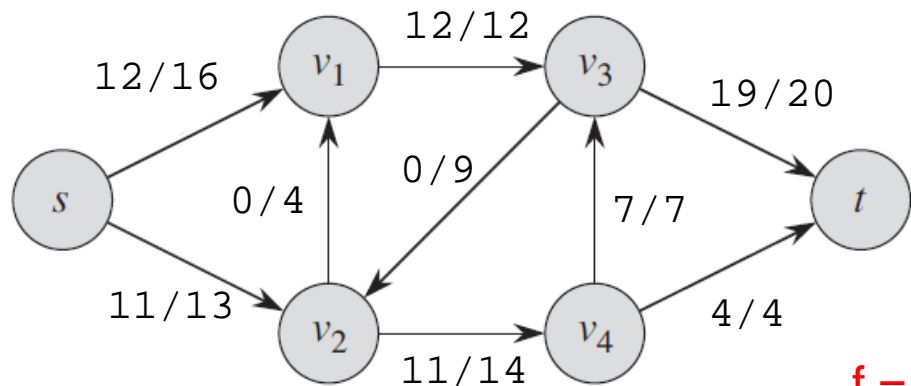


## Fluxo máximo

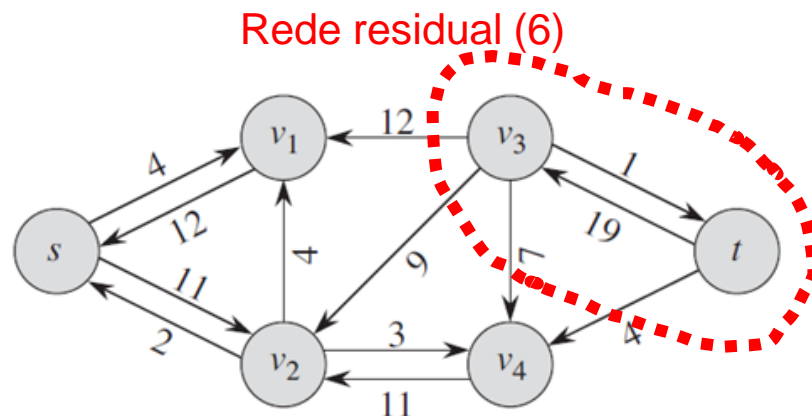
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



$f = 23$

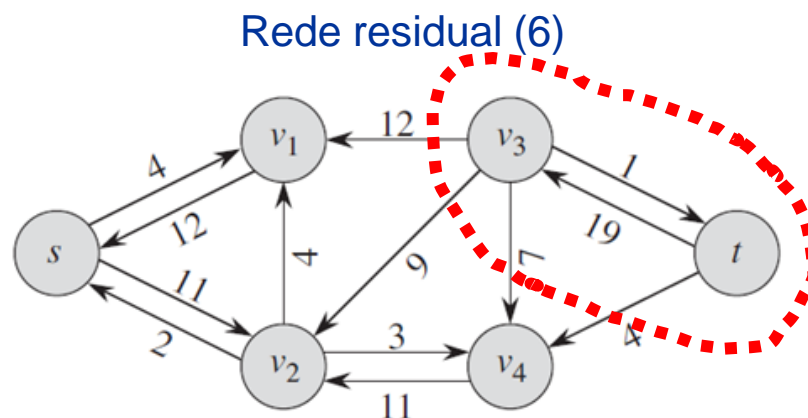
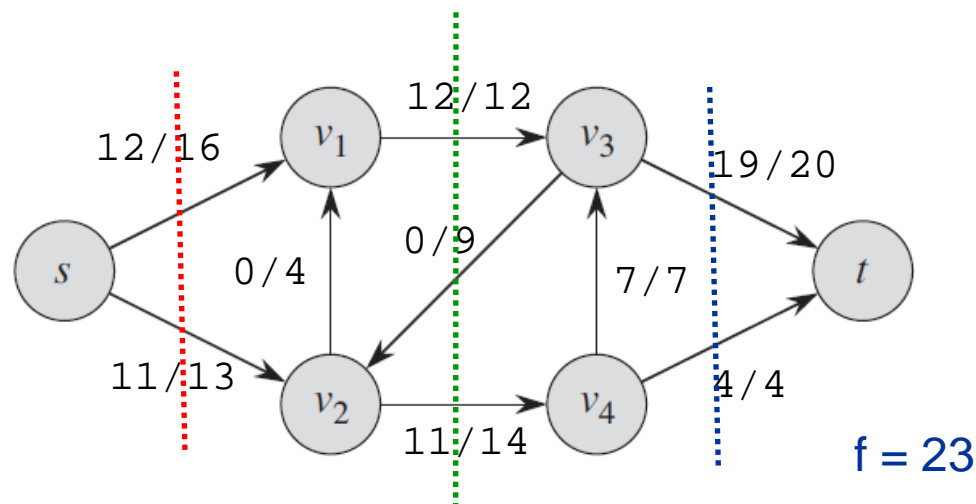


## Fluxo máximo

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```

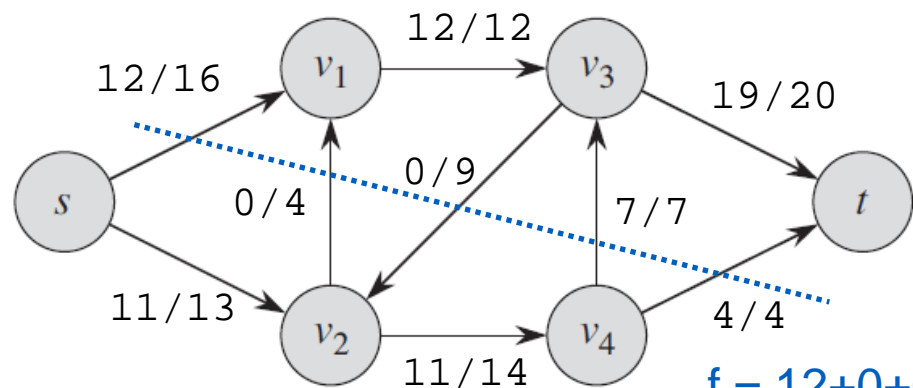


## Fluxo máximo

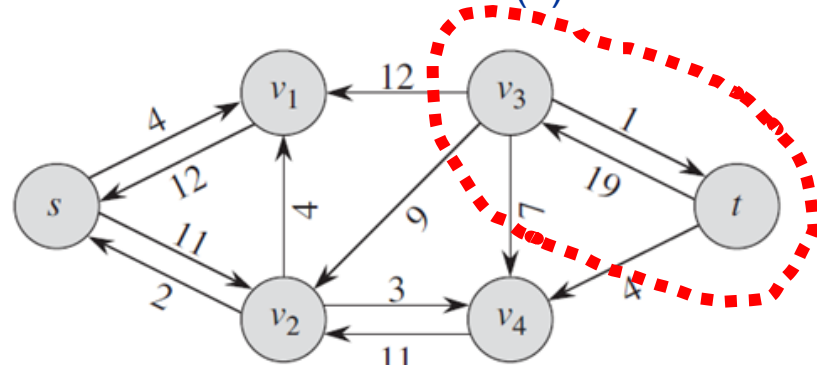
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ ):

```

1 para cada aresta  $uv$  em  $G.E$ 
2    $uv.f = 0$ 
3 enquanto existir caminho aumentante  $P$  de  $s$  a  $t$ , faça
4   para cada  $uv$  em  $P$ , faça
5     se  $uv$  em  $G.E$ 
6       então  $uv.f = uv.f + cf(P)$ 
7       senão  $vu.f = vu.f - cf(P)$ 
  
```



Rede residual (6)



## Tarefa



### ■ Seminário

- Escolher um **artigo** para ser apresentado e **entregar** uma **cópia impressa** para o professor na próxima aula.
- O **tema** é **livre** e pode ser relacionado com a sua pesquisa, mas seria interessante escolher um artigo envolvendo algum tópico de Teoria dos Grafos.



### Tarefa



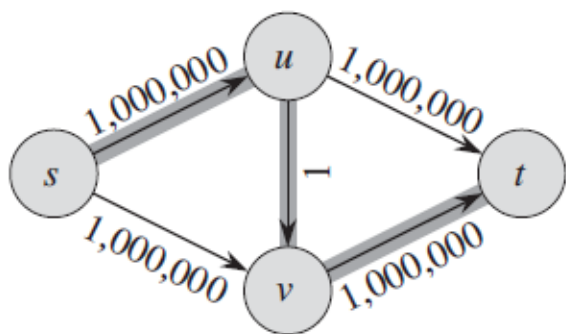
- EP 5

- Página da disciplina:

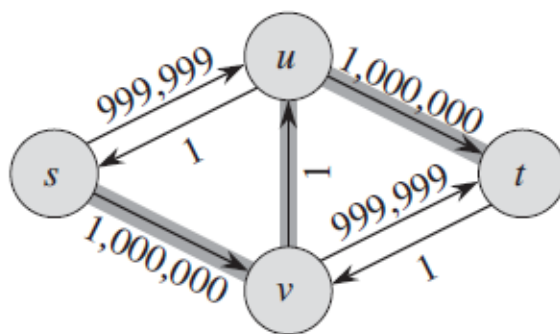
- <https://sites.google.com/site/alexnoma/home/grafos>

### Caminho aumentante?

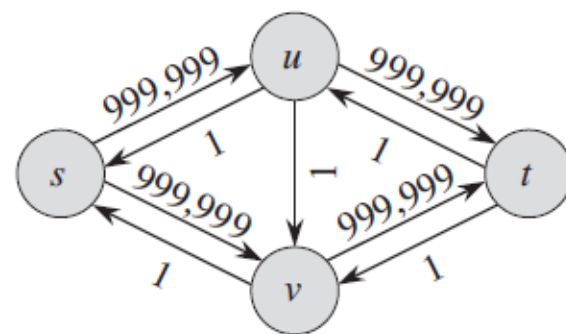
**Dica:** Você pode usar **BFS** para obter um caminho aumentante com a menor quantidade de arcos.



(a)



(b)



(c)