Jeux de billards planaires

Groupes JZ – Sujet 1

Dans ce projet, nous allons étudier le système dynamique que constitue la trajectoire d'une bille de billard. Le but principal est de comprendre l'évolution à long terme du système, en particulier ses propriétés statistiques et asymptotiques. Dans cet objectif, le système sera étudié à l'aide de :

- un espace des phases représentant l'ensemble des états possibles du système considéré ;
- une loi d'évolution donnant l'état du système à l'instant t+1 en fonction de l'état à l'instant t.

Le mouvement de la bille lancée sur la table sera étudiée par la suite des rebonds sur les bords de la table ; plus précisément, à la position des rebonds sur la table et à l'angle d'incidence pour chaque rebond, c'est-à-dire la direction dans laquelle a lieu le rebond. Ainsi, on ramène l'étude de notre système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret : la suite des rebonds de la bille de billard sur les bords de la table.

<u>Espace des phases :</u>

L'angle d'incidence γ est un nombre entre 0 et π, si on appelle $\boldsymbol{U}$ notre table, l'espace des phases est mathématiquement décrit par l'ensemble $\partial \boldsymbol{U} \times [0, \pi]$, où $\partial \boldsymbol{U}$ désigne le bord de la table.

<u>Loi d'évolution :</u>

La loi d'évolution du système est la transformation de l'espace des phases dans lui-même qui associe à un rebond le rebond suivant.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à trois types de billards différents définis par la forme de la table de billard utilisée :

1. Une table de billard circulaire.
2. Une table de billard elliptique.
3. Une table de billard rectangulaire.

Travail demandé :

Dans un premier temps, on néglige les frottements et on assimile la bille à une masse ponctuelle. Les rebonds obéissent aux lois de la réflexion de Fresnel.

- Pour chaque billard, étudier la dynamique du système en considérant que les formes géométriques des tables sont mathématiquement parfaites.
- Refaire l'étude en prenant en compte les imperfections du bord de la table. Proposer une approche de modélisation raisonnable.

Dans un deuxième temps, une bille est modélisée par une sphère de rayon R. Plaçons une bille rouge et une bille blanche sur la table du billard.

- Trouver la direction selon laquelle on doit lancer la bille blanche pour qu'elle rentre en collision avec la boule rouge après 1, 2, …, N rebonds
- En supposant que le choc est parfaitement élastique, peut-on envoyer la boule rouge dans une direction fixée à l'avance ?

Le système solaire

Groupes JZ – Sujet 2

Dans ce projet, nous allons étudier le mouvement des planètes autour du soleil. Ce mouvement est gouverné par une loi de la forme

$$\boldsymbol{F} = -\frac{G\, m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^{\beta}}\boldsymbol{e}_{12}$$

1. Pour un β fixé, écrire un programme qui intègre l'équation du mouvement pour une planète sous l'influence de la gravitation du soleil du temps t_{min} au temps t_{max} en utilisant un pas de temps τ. Enregistrer la position, la vitesse, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie totale en tant que fonctions du temps.
2. Déterminer une valeur raisonnable pour le pas de temps τ. Pour la Terre et en utilisant $\beta = 2$, optimiser τ en utilisant la conservation de l'énergie totale (calculez le changement d'énergie sur une orbite et tracez-le en fonction de τ). Commenter.
3. Vérifiez la troisième loi de Kepler pour toutes les planètes avec des orbites presque circulaires. Comment de choisir les conditions initiales pour obtenir des orbites circulaires ?
4. Étudiez ce qui se passerait si la loi de la force avait un exposant $\beta \neq 2$. Considérons le mouvement de la planète Mercure pour β = 3, 2.5, 2.1 et 2.01. Pour mieux illustrer l'effet, prendre une orbite elliptique.
5. Généralisez votre programme pour simuler pour le système Terre, Jupiter, Soleil et étudiez l'influence de Jupiter sur l'orbite terrestre. Que se passerait-il si la masse de Jupiter était de 10, 100 ou 1000 fois supérieure à sa masse réelle?

<u>Données :</u>

planet	mass(kg)	radius (AU)	eccentricity
Mercury	2.4×10^{23}	0.39	0.206
Venus	4.9×10^{24}	0.72	0.007
Earth	6.0×10^{24}	1.00	0.017
Mars	6.6×10^{23}	1.52	0.093
Jupiter	1.9×10^{27}	5.20	0.048
Saturn	5.7×10^{26}	9.54	0.056
Uranus	8.8×10^{25}	19.19	0.046
Neptune	1.0×10^{26}	30.06	0.010
Pluto	1.3×10^{22}	39.26	0.248
Sun	2.0×10^{30}		

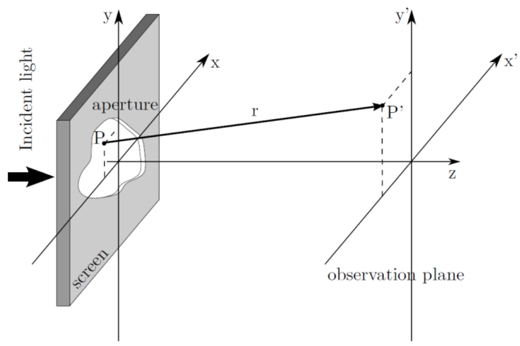
Diffraction de la lumière par une ouverture quelconque

Groupes JZ – Sujet 3

La diffraction est un phénomène qui se produit lors de la propagation d'une onde électromagnétique lorsqu'elle rencontre un obstacle ou une ouverture. Dans la théorie scalaire de la lumière (on ignore la polarisation), les phénomènes de diffraction sont étudiés en utilisant l'équation d'onde suivante :

$$\nabla^2\psi = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Une solution approchée au problème de diffraction est donnée par



$$\psi_d(x', y') = \frac{1}{i\,\lambda}\int \psi_i(x, y)\,\frac{\exp\,(i\,k\,r)}{i\,k\,r}\,dx\,dy \qquad (*)$$

L'intégration se fait sur le plan de l'ouverture et ψ_i est la distribution du champ dans l'ouverture.

<u>Travail demandé :</u>

1. Etudier analytiquement le problème de diffraction (mise en équation, régimes de diffraction, …) et analyser les différentes méthodes de résolution de (*) qui donnent la distribution du champ dans le plan (x', y').
2. Donner la distribution du champ dans le plan (x', y') pour une onde incidente plane et une ouverture fente, une ouverture rectangulaire et une ouverture circulaire.
3. Proposer une approche numérique qui résout le problème pour une ouverture quelconque.
4. Etudier le cas d'une ouverture elliptique en faisant varier son excentricité.
5. Analyse et commentaires.

Etude d'un tambour vibrant

Groupes JZ – Sujet 4

On considère une membrane tendue sur un cadre horizontal. On se propose d'étudier les vibrations libres de cette membrane, pour des petites amplitudes. On cherchera donc les fréquences de vibrations (fréquences propres), ainsi que les modes propres, c.à.d. la forme de la membrane lorsqu'elle vibre à une fréquence propre.

Ce problème se résout analytiquement pour des formes particulières du cadre. Lorsque le cadre est rectangulaire, ou circulaire, la solution se trouve par une méthode de séparation des variables. Mais le problème est encore largement ouvert pour des formes quelconques.

On donne l'équation d'onde en 2D :

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (*)$$

où u = u(x, y, t) est le déplacement transverse et v est la vitesse de propagation.

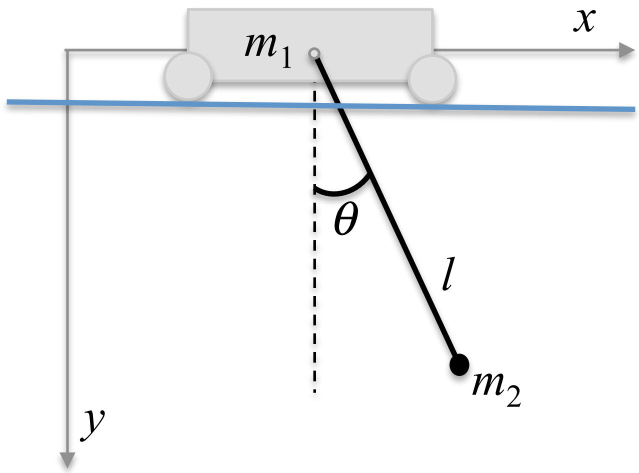
Travail demandé :

1. Justifier l'équation (*)
2. Résoudre analytiquement ce problème pour un tambour circulaire et pour un tambour rectangulaire.
3. Donner un ou plusieurs schémas numériques pour résoudre ce problème.
4. Implémenter au moins une solution numérique.
5. Faites une analyse critique de la solution numérique utilisée.

Système à plusieurs degrés de liberté

Groupes JZ – Sujet 5

Un chariot de masse m_1 est libre de glisser sans friction sur des rails comme le montre la figure ci-dessous. Un pendule constitué d'une autre masse m_2 est suspendu au chariot par une tige de longueur l et dont la masse peut être négligée.

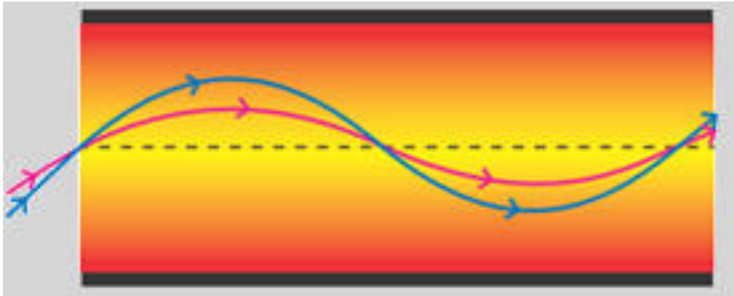


Le déplacement horizontal du chariot est x_1. La position de la masse m_2 est repérée par x_2 et y_2 avec $x_2 = x_1 + l\sin\theta$ et $y_2 = l\cos\theta$

1. Trouver les équations de mouvement du système.
2. En déduire l'équation différentielle (ED) qui régit l'angle θ
3. En supposant que l'angle θ reste faible, linéariser l'ED pour obtenir l'équation (EDL) et la résoudre.
4. Donner un schéma de résolution numérique de l'(ED).
5. Programmer le schéma de la question précédente. Tester le programme en le comparant avec la solution analytique de l'(EDL).

Fibre optique à gradient d'indice

Groupes JZ – Sujet 6



La figure ci-dessus, montre une fibre optique à gradient d'indice. On suppose que la fibre est le long l'axe z de longueur l = 20 cm et que la section à l'entrée de la fibre est dans le plan (x, y). L'indice optique dans la fibre est indépendant de la coordonnée z mais varie dans le plan transverse selon la loi :

$$n^2(x, y) = n_0^2 - n_2(x^2 + y^2); \quad n_0^2 \gg n_2(x^2 + y^2)$$

On suppose qu'un rayon lumineux est injectée dans cette fibre au point (0, 0, 0) selon un angle α avec l'axe z.

- Etudier la propagation de ce rayon à l'intérieur de la fibre.
- Ce rayon pourra-t-il s'échapper de la fibre à la sortie ? Quelle est alors l'ouverture numérique de la fibre à l'entrée ?
- Un deuxième rayon est injecté en même temps mais selon an angle β. Etudier la propagation des deux rayons en utilisant des scénarii différents.
- Quelle est la différence de marche de ces deux rayons par rapport à un rayon injecté selon un angle avec l'axe z = 0°.
- Supposons que la variation de l'indice reste radiale dans le plan (x, y) mais décroissante et de forme quelconque. Proposer une approche discrète pour calculer la trajectoire suivie par un rayon quelconque.
- Implémentez votre solution et validez la. Votre programme devrait calculer également l'O.N. à l'entrée de la fibre.

Génomique musicale (*Connaissances musicales souhaitées*)

Groupes JZ – Sujet 7

Le tableau 1, présente un certain nombre de chansons (échantillons) avec des caractéristiques musicales choisies (traits). Dans ce projet, nous chercherons à ordonner ces morceaux en se basant sur leurs caractéristiques. L'objectif étant de déterminer les chansons les plus similaires en fonction de leurs traits.

SONG	Crescendo	Decrescendo	Staccato	Portamento	Tempo	Intervals
Beat It	4	3	18	0	132	2.417
How Will I Know	17	4	34	0	120	5.281
Together Again	4	2	16	0	120	5.875
No Scrubs	10	4	14	24	90	5.563
Poker Face	4	2	16	8	120	4.75
Crazy in Love	7	4	19	24	100	5.563
Only Girl	18	2	56	11	126	3.24
Say My Name	10	2	21	26	70	5.25
Dreamlover	6	4	19	8	104	5.375
Like a Virgin	4	0	14	0	118	2.938
Billie Jean	9	4	14	9	117	3.15
I Wanna Dance	10	2	38	12	120	1.563
All for You	0	4	10	15	114	4.389
Waterfalls	3	2	15	8	84	1.5
Born This Way	9	1	14	9	124	2.656
Single Ladies	8	0	36	28	96	5.292
Umbrella	5	6	34	4	86	4.375
Bootylicious	14	2	20	16	104	7.75
Fantasy	7	1	16	7	112	5.375
Like a Prayer	3	1	10	0	120	4.375

Tableau 1. Quelques chansons et certaines de leurs caractéristiques (traits).

Soit une matrice symétrique S et une matrice diagonale D telle que $D_{i,i} = \sum_{j=1}^{m} S_{i,j}; 1 \leq i \leq m$, le Laplacien de S est $L = D - S$. Le vecteur propre associé à la valeur propre non nulle (valeur de *Fiedler*) de L est nommé le vecteur de *Fiedler*.

a. Construire une matrice binaire A à partir du Tableau 1 en utilisant les valeurs de seuils suivantes : (crescendo : 8, decrescendo : 2 ; staccato : 22 ; portamento : 10 ; tempo : 109 ; Intervalles : 4).
b. Trouver la matrice de similarité relative à la matrice A. ($S = A.A^T$)
c. Construire L et sa décomposition en valeurs propres.
d. Déterminer Trouver la valeur de Fiedler, le vecteur de Fiedler et l'ordre de chansons.
e. Analyser les résultats.
f. Enrichir cette base de donnée ou en construire une autre avec des styles musicaux différents (Jazz, Pop, Rock, Electro, etc…).
g. Quels autres traits pourraient être rajoutées pour rendre l'analyse plus pertinente.
h. Proposer une méthode d'analyse de la nouvelle base qui utilise le vecteur de caractéristiques sans binariser les traits des chansons. Documentez-vous sur les méthodes de « clustering ».