Auswertung des Versuches "Erzeugung ultrakurzer Laserpulse" (IQ 7)

SS 2015, Kohärente Optik Jacqueline Rösler Julien Streich Abgabe: 17.09.2015

Betreuer: Bernhard Kreipe

Inhaltsverzeichnis

1	\mathbf{E}_{i}	inleitung			
2	2.1	⁷ -Betrieb			
		1.1 Verlauf der g ₀ -P-Kennlinie			
		1.2 Lebensdauer der Photonen			
	2.	1.3 Relaxationsoszillation			
	2.2	Auswertung			
	2.	2.1 Charakterisierung des Lasers			
	2.	2.2 Erzeugung der Moden im Resonator	8		
	2.3	Fehlerbetrachtung			
3	G 3.1	epulster Betrieb			
	3.2	Fehlerbetrachtung			
4	4.1	zeugung der 2. Harmonischen			
	4.	1.1 Frequenzverdopplung	11		
	4.	1.2 Strahlradius	11		
	4.2	Fehlerbetrachtung	12		
5	A 5.1	itokorrelationAuswertung			
	5.2	Fehlerbetrachtung	14		
6	Fa	zit	15		
7	A	nhang	16		
	7.1	Ermittlung des Strahlprofils	.16		
	7.2	Ermittlung des Divergenzwinkels $\theta_{x,y}$	19		
	7.3	Ermittlung der Strahlradien mithilfe von Mathematica	21		

1 Einleitung

Eine der bedeutendsten Errungenschaften des Lasers ist seine Fähigkeit, im gepulsten Betrieb elektromagnetische Strahlung zu emittieren. Das Einsatzspektrum dieser Anwendung ist extrem breit und erstreckt sich von der metallischen Materialbearbeitung bis hin zu medizinischen Behandlungsmethoden. Der Laser kann dabei in verschiedenen Betriebsregimen laufen. Hiermit lässt sich die Pulsdauer bis auf wenige zehn Atto-Sekunden reduzieren. Interessant ist, dass die Pulse extrem hohe Spitzenleistungen erreichen können.

Bei diesem Versuch soll es speziell um die Erzeugung und Vermessung ultrakurzer Laserpulse gehen. Dazu wird zunächst der Laser charakterisiert und im Folgenden die verschiedenen gepulsten Betriebsarten (cw-Betrieb, cw-ML-Betrieb, QS-ML-Betrieb) genauer untersucht. Nach der Erzeugung der 2. Harmonischen sowie der Untersuchung der Winkelabhängigkeit eines Frequenzverdoppelten Strahls geht es um die Bestimmung des Strahlradius'. Zum Abschluss wird mithilfe der optischen Autokorrelation die Pulsdauer gemessen.

2 cw-Betrieb

2.1 Vorüberlegungen

2.1.1 Verlauf der g₀-P-Kennlinie

Im cw-Betrieb stellt sich nach einer gewissen Zeit ein stationärer Zustand ein, das bedeutet, dass unter anderem der Gewinn zeitlich konstant bleibt. Daraus folgt für die g₀-P-Kennlinie:

$$T_{\rm R} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dt}} = \frac{g_0}{T_{\rm L}} - \frac{gP}{P_{\rm sat}} - \frac{g}{T_{\rm L}} = 0 \iff P = \frac{P_{\rm sat}}{T_{\rm L}} \left(\frac{g_0}{g} - 1\right)$$

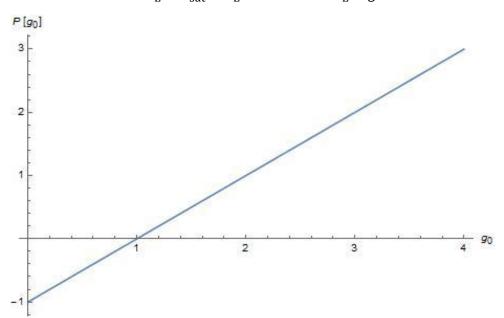


Diagramm 1: g₀-P-Kennlinie

Daran wird deutlich, dass die Leistung linear mit dem Kleinsignalgewinn steigt.

Bei $g_0=g$ ist die Laserschwelle erreicht, für $g_0>g$ wird Licht emittiert.

2.1.2 Lebensdauer der Photonen

Unter den Annahmen einer konstanten Leistung des Lasers, welche signifikant größer als die mit den Vakuumfluktuationen korrespondierende Leistung ist, gilt:

$$T_{\rm R} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{dt}} = 2g(P + P_{\rm vac}) - \frac{P}{T_{\rm p}} \Longrightarrow 0 = 2gP - \frac{P}{T_{\rm p}} \Longleftrightarrow g = \frac{1}{2T_{\rm p}} =: l$$

2.1.3 Relaxationsoszillation

Durch eine plötzliche Störung des Lasers kommt es zu Schwankungen in der Ausgangsleistung. Weil es eine Kopplung zwischen Photonenfeld und Verstärker, also zwischen stimulierter Emission und Absorption, gibt, kommt es zur Oszillation des Gewinns im Laser und somit zu einer periodischen Schwankung in der Leistung. Aufgrund von linearen Verlusten wird diese Schwingung gedämpft.

2.2 Auswertung

2.2.1 Charakterisierung des Lasers

Zunächst soll es darum gehen, an den beiden Laserausgängen die Ausgangsleistung in Abhängigkeit vom Pumpstrom zu untersuchen sowohl unter Verwendung eines HR-Spiegels als auch eines Auskopplers mit verschiedenen Transmissionsgraden.

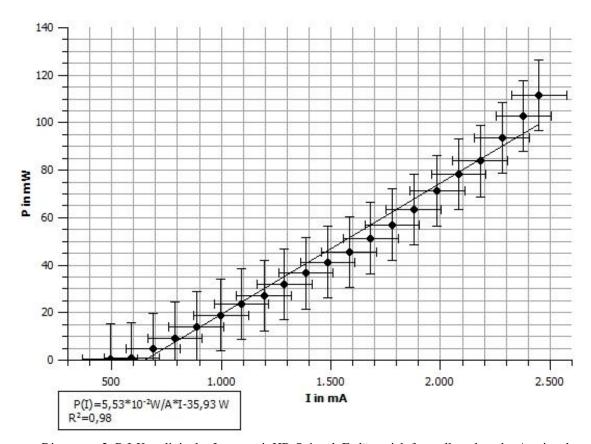


Diagramm 2: P-I-Kennlinie des Lasers mit HR-Spiegel. Es lässt sich feststellen, dass der Anstieg der Leistung linear mit dem Strom zunimmt.

Der Schwellenstrom lässt sich aus der Nullstelle bestimmen:

$$P(I) = 5.53 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{A}} \cdot I - 35.93 \text{W} = 0 \iff I \approx 649 \text{mA} \implies I_{\text{schwell}} \approx 649 \text{mA}$$

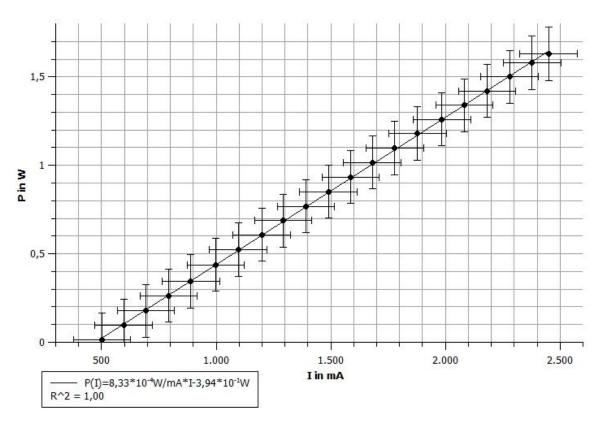


Diagramm 3: P-I-Kennlinie der Pumpdiode. Die Pumpleistung ist proportional zum Pumpstrom.

Um nun den differentiellen Wirkungsgrad zu bestimmen, wird die Funktion der Laserleistung durch die Funktion der Pumpleistung dividiert. Dies wird im nächsten Diagramm grafisch demonstriert.

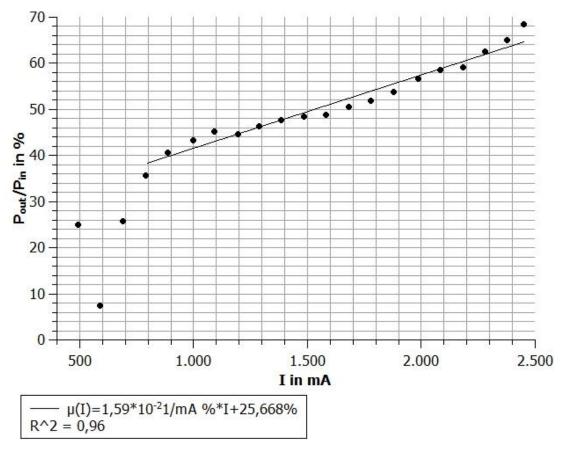


Diagramm 4: Differentieller Wirkungsgrad des Lasers.

Es werden hier erst die Messwerte ab einer Stromstärke von 800mA in dem Fit betrachtet, da die Werte zuvor in keinem erkennbaren Muster verteilt liegen. Dies ist auf die kleinen Pumpleistungen zurückzuführen.

Als nächstes lässt sich der Einfluss der verschiedenen Auskoppler auf die P-I-Kennlinie bestimmen. Hierbei werden beide Ausgänge gemessen, um den Laser vollständig zu charakterisieren.

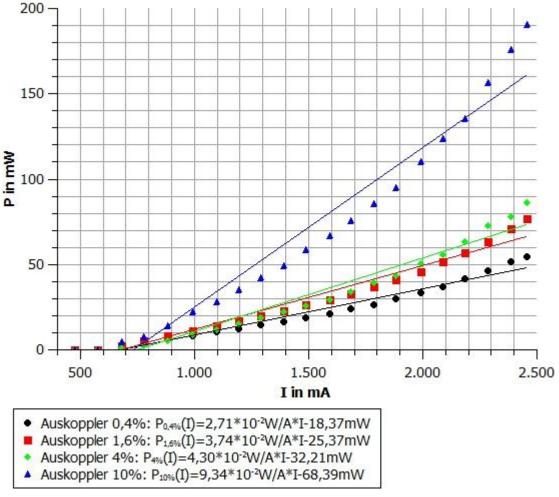


Diagramm 5: Gesamtleistung der Laserausgänge mit verschiedenen Auskopplern.

Aus dem Vergleich geht hervor, dass bei höherer Auskopplung die Ausgangsleistung größer wird. Zudem verschiebt sich der Schwellstrom zu größeren Werten. Dies begründet sich darin, dass durch die größere Auskopplung die Verluste im Resonator größer sind und somit mehr Energie für den Betrieb benötigt wird.

-ln(R)	P in mW
0,0040	622,38
0,0161	415,81
0,0408	717,64
0,1054	923,24

Tabelle 1: Errechnete Werte der Laserschwellen. Der rote Wert wurde nicht berücksichtigt.

Mithilfe des Mediums des Findlay-Clay-Diagramms lassen sich zum einen die Streuverluste und zum anderen die Gesamtverluste ermitteln. Die Streuverluste entsprechen der Steigung und der x-Achsenabschnitt dem Gesamtverlust pro Durchgang. Dazu werden die Schwellleistungen¹ über den negativen Logarithmen der Reflexivitäten aufgetragen.

_

¹ Aufgrund der wenigen verwertbaren Messwerte wurden diese genauer bestimmt. Dafür wurden die Schwellleistungen nicht wie zuvor durch Geraden, sondern durch Parabeln erstellt, welche den Verlauf speziell bei größeren Leistungen besser wiedergeben.

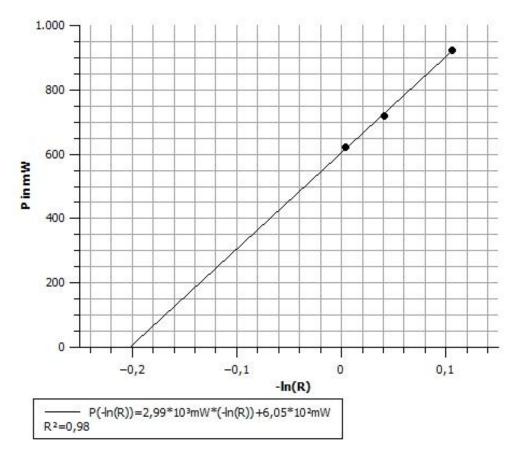


Diagramm 6: Findlay-Clay-Diagramm.

Aus der Funktionsgleichung lassen sich ermitteln:

- Streuverluste von etwa 3 W
- Gesamtverluste von etwa 20,2%

Der Wert für R=0,984 ist hier nicht aufgeführt, da dieser stark von der vorliegenden Funktion abweicht.

Um nun die Reaktion des Lasers auf eine kurzzeitige Störung zu untersuchen, setzt man einen akusto-optischen Modulator ein. In diesem befindet sich ein Kristall, in dem stehende Wellen eine periodische Dichtefluktuation bewirken.

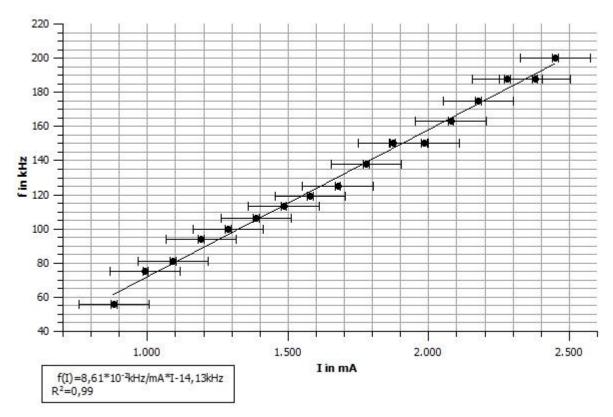


Diagramm 7: Einfluss des akusto-optischen Modulators. Die Frequenz der Relaxationsoszillation ändert sich linear mit dem Pumpstrom.

2.2.2 Erzeugung der Moden im Resonator

Durch Verkippung des Spiegels im Resonator lassen sich verschiedene transversale Modenprofile erzeugen. Die nachfolgenden Bilder zeigen den Einfluss der Justage.



Abb. 1: (von links nach rechts) TEM_{00} , TEM_{10} , TEM_{20}

2.3 Fehlerbetrachtung

Die Aufnahme der P-I-Kennlinien ist sowohl beim Ablesen der Leistung als auch Einstellen der Stromstärke fehleranfällig. Diese Fehler wurden wie üblich mit 5% des maximalen Messbereiches angenommen. Selbiges gilt auch für die weiteren Diagramme.

3 Gepulster Betrieb

3.1 Auswertung

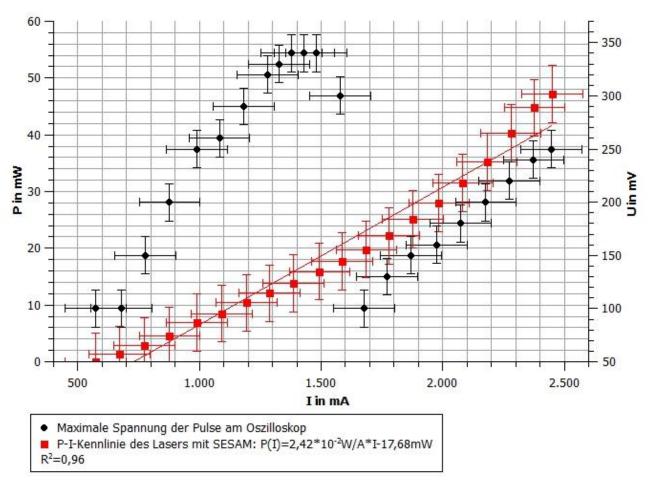


Diagramm 8: P-I-Kennlinie des Lasers mit SESAM und maximale Spannung am Oszilloskop. Aufgetragen ist in rot die P-I-Kennlinie des Lasers mit eingebautem SESAM. Zum anderen ist in schwarz die maximale Spannung am Oszilloskop eingezeichnet. Deutlich zu sehen sind die einzelnen Regime: cw bis 700 mA, QS-ML bis 1600 mA und cw-ML darüber.

Die Aufnahme der P-I-Kennlinie erfolgte wie bereits in den Messungen zuvor. Durch die Aufnahme der Spannung am Oszilloskop lassen sich die verschiedenen gepulsten Betriebsarten in Abhängigkeit vom Pumpstrom identifizieren. Mögliche Betriebe sind cw., QS-ML und cw-ML.

cw-Betrieb, kurz für continuous wave-Betrieb, ist der Dauerstrichbetrieb, der bei sehr schwachen Pumpströmen (und damit Laserleistungen) auftritt. Der QS-Betrieb, kurz für Q-switching, beschreibt den Zustand, bei dem es zu periodischen Schwankungen der Laserleistung kommt, verursacht durch den sättigbaren Absorber (SESAM). Da sich die Verluste durch diesen periodisch ändern, wird auch die Ausgangsleistung in regelmäßigen Abständen verändert. In ML-Betrieben, kurz für mode-locking-Betrieb, werden alle vorhandenen longitudinalen Moden miteinander gekoppelt. Die Lichtpulse hier sind wesentlich kürzer als Pulse der Güteschaltung, enthalten zugleich weniger Energie.

Der Schwellenstrom bestimmt sich durch die Nullstelle der oben gezeigten P-I-Kennlinie, welche

bei $I_{schwell} = 73,0\,\text{mA}$ liegt. Von diesem Anfangswert bis etwa $700\,\text{mA}$ ist der cw-Betrieb zu beobachten. Danach tritt der QS-ML-Betrieb bis zu einer Stromstärke von etwa $1600\,\text{mA}$ auf. Darüber hinaus erfolgt der cw-ML-Betrieb.

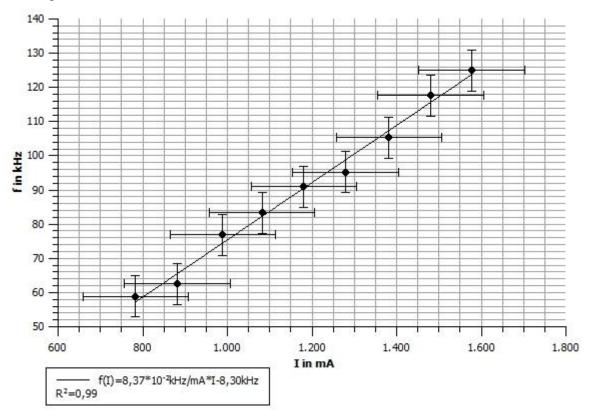


Diagramm 9: Frequenz der Riesenpulse. Im QS-ML-Betrieb werden Riesenpulse erzeugt, deren Frequenz linear mit dem Strom ansteigt. Dies fußt darauf, dass durch die größere Stromstärke mehr Energie zur Erzeugung der Pulse bereitgestellt wird und damit in kürzeren Abständen Riesenpulse produziert werden können.

Das Auftreten der Pulse im QS-ML-Betrieb erfolgt periodisch. Wie in der Grafik ersichtlich, beeinflusst die Stromstärke die Frequenz linear.

Anschließend geht es darum, die Resonatorlänge L zu bestimmen. Dazu ist es zweckmäßig, die Umlaufzeit τ im Resonator zu betrachten. In diesem läuft ein Lichtpuls zwischen den Spiegeln. In jedem Umlauf, welcher der doppelten Länge entspricht, wird ein Puls emittiert. Da der Umlauf mit Lichtgeschwindigkeit c erfolgt, ist die Umlaufzeit gerade:

$$\tau = \frac{2L}{c} \iff L = \frac{\tau c}{2}$$

Folglich ist τ der Abstand zwischen zwei Peaks im Oszillator. Der lässt sich ablesen mit τ =26ns. Daraus ergibt sich:

$$L = 3.9 \, \text{m}$$

3.2 Fehlerbetrachtung

Mögliche Fehlerquellen in diesem Versuchsteil sind vor allem die Ungenauigkeit beim Einstellen des Pumpstroms sowie die Unsicherheit des Oszilloskops, dessen Anzeige sich nur ungefähr ablesen lässt aufgrund von Rauschen. Beide Fehler wurden hier mit jeweils 5% angenommen, was einer üblichen Abweichung entspricht.

4 Erzeugung der 2. Harmonischen

4.1 Auswertung

4.1.1 Frequenzverdopplung

Brennweite der Linse in mm	Leistung des fre- quenzverdoppelten Lichtes in mW	
40	95,0	
50	67,6	
100	76,6	

Tabelle 2: Leistung bei den verschiedenen Linsen

Die vorliegende Messreihe zeigt, dass bei der Linse mit Brennweite 40 mm die größte Intensität vorliegt. Das liegt daran, dass bei kleineren Brennweiten der austretende Gauß-Strahl stärker fokussiert wird und deshalb einen kleineren Taille aufweist, was eine höhere Intensität $I \propto E^2$ zur Folge hat. Mit dieser Linse wird nun die Winkelabhängigkeit der Frequenzverdopplung gemessen, indem der BBO-Kristall auf einem Rotationstisch montiert wird. Die hohe Intensität ist von Bedeutung, um den nichtlinearen Effekt der Frequenzverdopplung in einem gut messbaren Bereich erzeugen zu können. Dieser Anteil der Polarisation P gemäß $P = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \mathcal{O}(E^3) \right)$ ist wegen $\chi^{(2)} \ll \chi^{(1)}$ nur in Verbindung mit großen Intensitäten $I \propto E^2$ relevant.

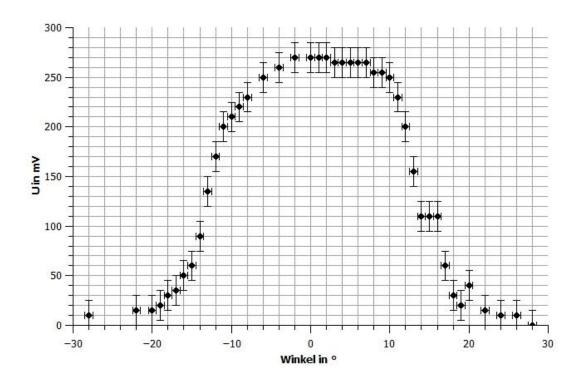


Diagramm 10: Winkelabhängigkeit der Frequenzverdopplung

4.1.2 Strahlradius

Die Idee hinter der Messung des Strahlradius' basiert auf der Rasierklingen-Methode. Bei dieser

wird sukzessive eine Rasierklinge in den Strahl gefahren und dahinter die Restintensität detektiert. Dafür wird der Gauß-Strahl durch eine Linse fokussiert, welche das charakteristische Profil des Strahls nicht ändert. Deshalb lässt sich die Gauß-Optik als Modell zugrunde legen.

Wichtig ist dabei, dass sowohl in \vec{x} - als auch in \vec{z} -Richtung² gemessen wird, da es sich um einen elliptischen Strahl handelt. Aufgrund des Gauß-Profils des Strahls ist bei der Messung zu erwarten, dass sich die Intensität beim Einfahren der Klinge gemäß der Gauß'schen Fehlerfunktion ändert. Über die Ableitung der gefitteten Funktion, bei der es sich um die Gauß-Glocke handelt, kann nun der Strahlradius errechnet werden. Da die Gauß-Funktion auf einen Maximalwert von 0,4 normiert ist, muss dieser Wert bei den vorliegenden Messwerten berücksichtigt werden. Zur Renormierung wird der Maximalwert der Messung ermittelt und durch 0,4 dividiert, um einen konstanten Faktor für die Datenreihe zu erhalten. Hier wird die Intensität I \propto E² gemessen, deswegen ist der Abfall der Gauß-Funktion auf $\frac{1}{e^2}$ zu verwenden, um den Strahlradius zu erhalten. Mit Hinblick auf den eben genannten Normierungsfaktor ergibt sich ein zu betrachtender Abfall auf

$$j \coloneqq \frac{\left(\frac{\text{Maximalwert}}{0.4}\right)}{e^2}.$$

Durch Messung des Strahlradius' an verschiedenen Abständen von der Linse, kann der Divergenzwinkel $\theta_{x,y}$ ermittelt werden. Dieser ergibt sich bei einer Geraden der Form y = mx + b zu $\theta_{x,y} = \arctan(m)$. Mithilfe der Formel

$$w_0 \theta_{x,y} = \frac{\lambda}{\pi}$$

kann man nun auf die Strahltaille w_0 schließen. Der Laser emittiert auf einer Wellenlänge von $\lambda=1064$ nm. Wie genau die Berechnungen mithilfe von Mathematica durchgeführt werden, ist aus dem Anhang ersichtlich. Die Vorzeichen dabei sind irrelevant, entscheidend ist vor allem der Betrag eines Winkels. Somit ist auch der Betrag der Taille das gesuchte Ergebnis.

Es ergibt sich damit:

$$w_{0,x} = 5.89 \mu m$$

$$w_{0,z} = 4,48 \mu m$$

4.2 Fehlerbetrachtung

Es zeigte sich in diesem Abschnitt eine Reihe von Unsicherheiten. Zunächst ergab sich bei der Frequenzverdopplung die Ungenauigkeit beim Ablesen des Winkels. Der Fehler wird hier mit 1° angenommen. Des Weiteren kann die Intensität durch Fehlstellen im Kristall stark beeinflusst werden (positiv wie auch negativ). Wie zuvor liegt ein Fehler von 5% bei den Messwerten der Leistung vor. Wegen der Werte von $R^2 > 0,99$ kann das Fortpflanzen dieses Fehlers vernachlässigt werden. Die Position der Rasierklinge ließ sich durch die insgesamt drei Mikrometerschrauben bis auf etwa 10 µm genau einstellen, was bei den Messwerten als unbedeutend betrachtet werden kann.

 2 Als \vec{y} -Achse wurde die Entfernung von der Linse gewählt. Die weiteren Achsen bilden ein Linkssystem.

5 Autokorrelation

5.1 Auswertung

In diesem Abschnitt misst man den optischen Intensitätsautokorrelator, wobei der Überlapp zweier zeitverzögerter Energiesignale gemessen wird. Das Verwenden des Autokorrelators ist notwendig aufgrund der extrem kurzen Pulsdauer von 1ns, welche zu gering ist, um sie mit herkömmlicher Elektronik zu vermessen. Durch die Autokorrelation wird der Faktor c (Lichtgeschwindigkeit) in die Rechnung eingebaut, was den Messprozess effektiv um 6 Größenordnungen streckt.

Die Autokorrelation ist definiert durch:

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} dt \, x(t) x(t - \tau)$$

Erzeugt wird diese Zeitverzögerung durch das Aufteilen des Strahls in zwei Einzelstrahlen. Diese passieren dann Wege unterschiedlicher Länge, von denen eine durch einen Verschiebetisch verstellt werden kann. Anschließend werden sie durch eine Linse wieder fokussiert und in einen nichtlinearen Kristall gelenkt. Dadurch entsteht ein frequenzverdoppelter Strahl, welcher sich aus den beiden Einzelstrahlen zusammensetzt. Eine Anwendung der optischen Autokorrelation ist die Vermessung der Pulslänge von ultra-kurzen Laserpulsen. Die Verschiebung des Tisches ist proportional zur Pulsdauer. Da das Licht den Weg auf dem Verschiebetisch hin und zurück laufen muss, ist die Weglänge das Doppelte der Verschiebung. Zudem ist zu beachten, dass die FWHM³ der Autokorrelationsfunktion bei der gewählten Pulsform (sech-Puls) ein Verhältnis von 1,5427 zur FWHM des Originalpulses hat.

³ FWHM: Full Width Half Maximum; gemessen wird also die Breite auf halber Höhe des Maximums.

13

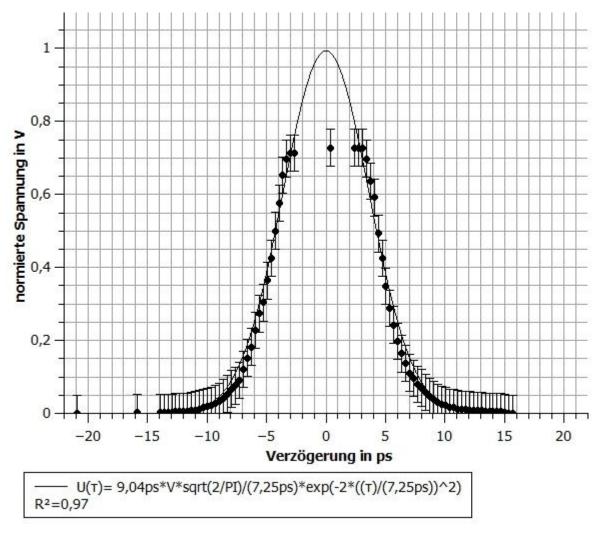


Diagramm 11: Autokorrelationsfunktion (normiert). Aus der Breite des Pulses auf halber Höhe lässt sich die Pulsdauer bestimmen.

Um die Messwerte auf einsichtige Weise auswerten zu können, wurde die x-Achse so gewählt, dass das Maximum bei x=0 liegt, die Gauß-Kurve also nicht verschoben ist. Des Weiteren sind die gemessenen Spannungen normiert worden, um den Abfall auf $\frac{1}{e^2}$ aus der Funktionsgleichung ablesen zu können. Dies ist gerade σ bzw. hier τ_{AKF} .

$$\tau_{AKF} = 7,25\,ps.$$

Unter Berücksichtigung des bekannten Verhältnisses der Breite der Pulse $t_{sech} = \frac{\tau_{AKF}}{1.5427}$ ergibt sich:

$$t_{\rm sech} = \frac{\tau_{\rm AKF}}{1.5427} \approx 4,70 \, \rm ps \, .$$

5.2 Fehlerbetrachtung

Die größten Ungenauigkeiten treten durch das Ablesen der Werte am Oszilloskop auf, diese werden wegen ihrer Schwankungen auf 10% geschätzt. Bei einer Ableseungenauigkeit von 0,05 mm im Hinblick auf die Verschiebeweiten des Tisches ist es nicht notwendig, diese in der Auswertung zu berücksichtigen.

Als problematisch erwies sich beim Aufnehmen der Messreihe, dass der Messkopf keine Werte oberhalb von 48 V aufnahm, sondern bei dieser Zahl blieb. Aufgrund dessen bildete sich ein Plateau

bei den Messungen um das Maximum der Funktion. Wegen der vielen weitgehend präzisen Werte in den umliegenden Bereichen lässt sich dennoch ein verlässlicher Fit erstellen.

6 Fazit

Ziel war es, ultra-kurze Laserpulse zu vermessen. Dies erfolgte sowohl räumlich, wie auch zeitlich. Die Fähigkeit von Lasern im gepulsten Betrieb zu emittieren ist eine ihrer herausragenden Eigenschaften, speziell auf sehr kurzen Zeitskalen.

Nach der genauen Untersuchung der einzelnen Betriebsarten (cw, QS-ML, cw-ML), erfolgte die Erzeugung der 2. Harmonischen im gepulsten Betrieb. Das Resultat daraus ist, dass sich die Frequenzverdopplung mit dem Winkel in einem nicht trivialen Verlauf ändert. Darauf folgend wurde der Strahlradius gemessen. Auf Grundlage der Rasierklingen-Messung wurde der elliptische Strahl vermessen. Es ergab sich dabei eine Taille in \vec{x} -Richtung von 5,89 µm bzw. in \vec{z} -Richtung 4,48 µm. Im letzten Versuchsteil ging es um die Autokorrelation. Mithilfe eines Autokorrelators konnte eine Pulsdauer von 4,90 ps ermittelt werden.

Die Durchführung hat gezeigt, dass es bereits mit vergleichsweise simplen Mitteln möglich ist, Laserpulse bis in den Bereich von Picosekunden zu erzeugen. Dazu reicht es schon aus, einen Spiegel des Resonators durch einen sättigbaren Absorber (SESAM) zu ersetzen. Wird sein Aufbau optimiert, so lassen sich noch kürzere Pulsdauern erreichen.

7 Anhang

7.1 Ermittlung des Strahlprofils

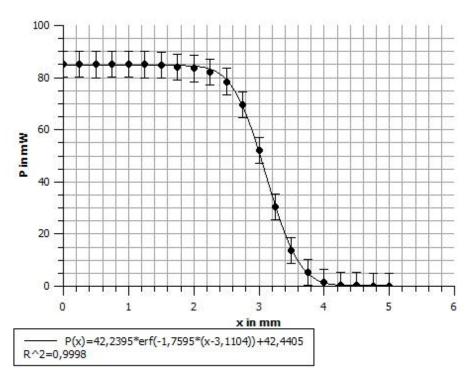


Diagramm 12: Strahlprofil bei Abstand 1 cm und z fest. Die Messwerte zeigen den Verlauf der Gauß'schen Fehlerfunktion, worüber die Gauß-Glocke zu ermitteln ist. Für eine genaue Ausführung, s. Kapitel 4.1.2

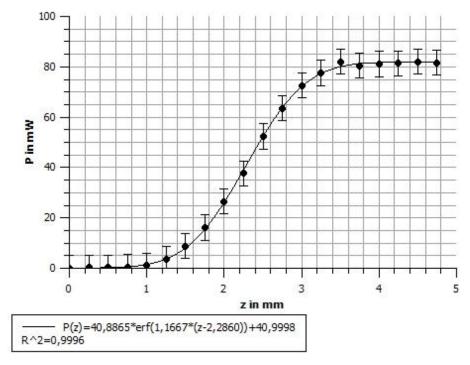


Diagramm 13: Strahlprofil bei Abstand 1cm und x fest.

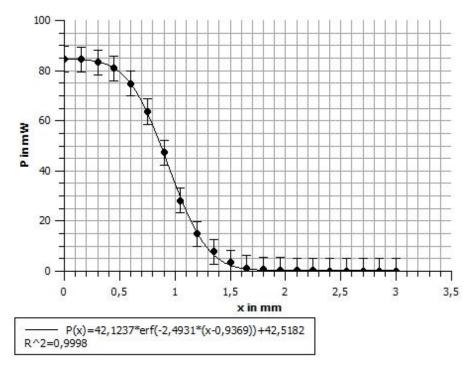


Diagramm 14: Strahlprofil bei Abstand 1,5 cm und z fest.

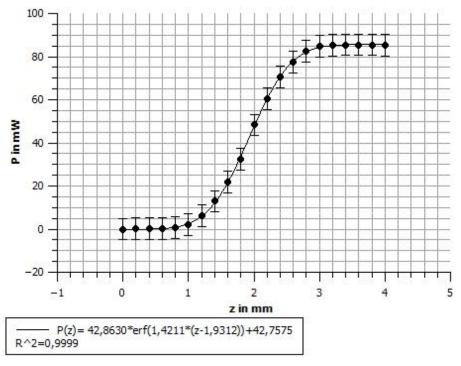


Diagramm 15: Strahlprofil bei Abstand 1,5 cm und x fest.

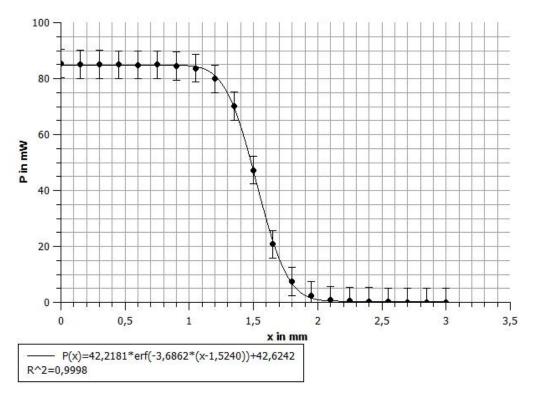


Diagramm 16: Strahlprofil bei Abstand 2cm und z fest.

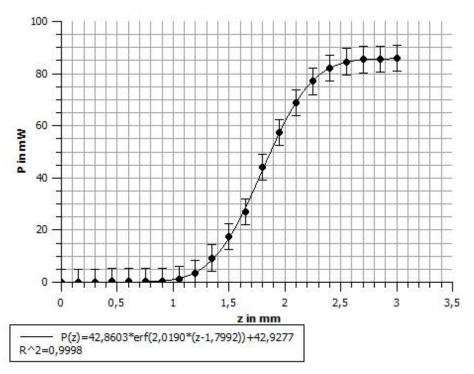


Diagramm 17: Strahlprofil bei Abstand 2cm und x fest.

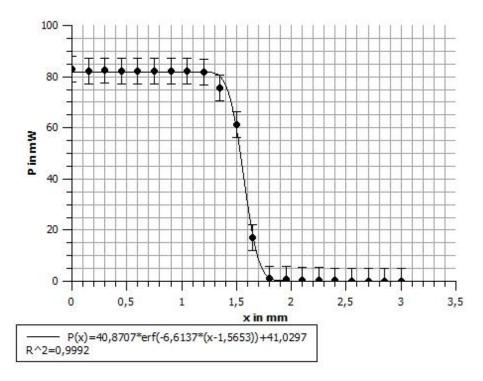


Diagramm 18: Strahlprofil bei Abstand $2,5\,\mathrm{cm}$ und z fest.

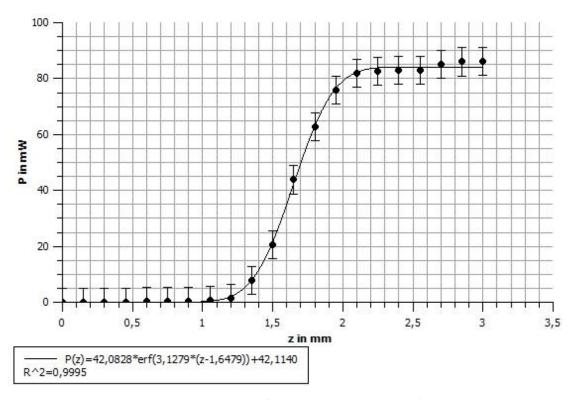


Diagramm 19: Strahlprofil bei Abstand 2,5cm und x fest.

7.2 Ermittlung des Divergenzwinkels $\theta_{x,y}$

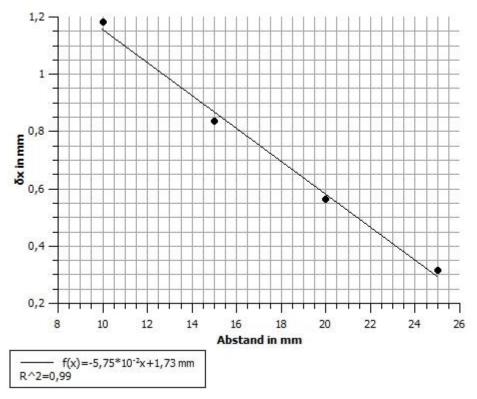


Diagramm 20: Strahlradius in \vec{x} -Richtung. Der Arcustangens der Steigung der Geraden ist der Divergenzwinkel in \vec{x} -Richtung.

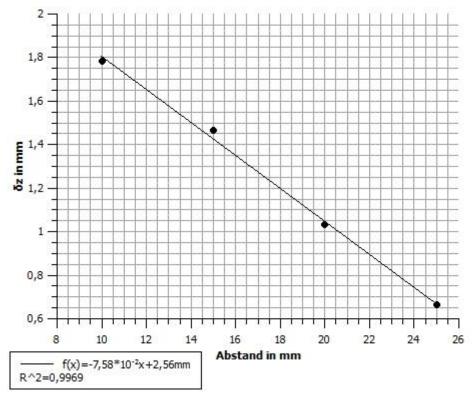


Diagramm 21: Strahlradius in **z**-Richtung. Der Arcustangens der Steigung der Geraden ist der Divergenzwinkel in **z**-Richtung.

7.3 Ermittlung der Strahlradien mithilfe von Mathematica