Matriks

Definisi : . Matriks adalah susunan objek dalam bentuk empat persegi (yg diletakkan diantara tanda kurung)

. Matriks biasa dinotasikan dengan huruf kapital : A, B, ...

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Matriks A di atas terdiri dari 3 baris dan 4 kolom

a_{23} disebut entri/elemen/unsur matriks A yg terletak di baris 2 kolom 3

$(a_{23} = -1)$

Ukuran matriks dinyatakan sebagai ordo matriks yaitu banyak baris x banyak kolom. Jadi untuk matriks A di atas ordonya 3x4.

Kesamaan dua Matriks.

Dua matriks A dan B dikatakan sama hanya jika ordo (A) = ordo (B) dan $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$.

Operasi Matriks

1. Perkalian dengan skalar

Misal A sebarang matriks dan α skalar ($\alpha \in R$), maka $\alpha A = B$, di mana $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$-3A = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 15 & -18 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ -3/2 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Penjumlahan dua Matriks

$$A + B = C \quad \text{di mana} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

syarat : ordo A = ordo B

3. Perkalian dua Matriks

$$\underbrace{A_{np} \times B_{pm}}_{=} = C_{nm}, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

syarat : banyak kolom A = banyak baris B

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

maka :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{3\times 2} = D$$

$$d_{21} = 0\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 19 \\ 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 19 \\ 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 19 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini

$A + C \neq$

$B \times A \neq$

Sifat perkalian Matriks

Misal A, B, C adalah matriks² yang memenuhi syarat perkalian.

1. $A(B+C) = AB + AC$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. (Pada umumnya) $AB \neq BA$

Matriks Transpose

Jika A matriks dengan ordo $m \times n$ maka Transpose dari A adalah $A^T = (a_{ji})$ berukuran $n \times m$, yang diperoleh dengan cara menyusun ulang entri matriks A dimana baris menjadi kolom dan sebaliknya.

contoh : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

sifat :

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $\alpha(A^T) = (\alpha A)^T$, $\alpha \in R$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Beberapa Jenis Matriks

1. Matriks nol = matriks dimana semua entrinya nol

   A matriks nol $\longrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$.

2. Matriks bujursangkar = matriks kwadrat = matriks dg ordo $n \times n$
3. Matriks diagonal = matriks kwadrat dengan $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.
4. Matriks skalar = matriks diagonal dengan $a_{ii} = k$, $k \in R$
5. Matriks identitas = matriks skalar dg $k = 1$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriks segitiga ≡ matriks kwadrat di mana
   - $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \rightarrow$ segitiga bawah

   or
   - $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j \rightarrow$ segitiga atas

7. Matriks simetri ≡ $A = A^T$

   Matriks antisimetri ≡ $A = -A^T$

8. Matriks Esselon ≡ Matriks sebarang dengan kondisi :
   - (Jika ada) baris nol terletak di bawah
   - baris tak nol : . entri pertama yang tak nol harus 1 (disebut satu utama)
     . satu utama baris berikutnya terletak di kolom yang lebih ke kanan

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriks Esselon Baris}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriks Esselon Baris Tereduksi}$$

Transformasi Elementer Pada kolom dan Baris suatu Matriks

1. Tukar tempat ≡ baris ke-i / kolom ke-i tukar tempat dengan baris ke-j / kolom ke-j.

   $(b_i \leftrightarrow b_j \;/\; k_i \leftrightarrow k_j)$

2. Perkalian dengan skalar ≡ baris-i / kolom-i dikalikan α ($\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$)

   $(\alpha b_i \;/\; \alpha k_i)$

3. Penjumlahan ≡ baris-i ditambah kelipatan baris-j / kolom-i ditambah kelipatan kolom-j

$(b_i + \alpha b_j \ / \ k_i + \alpha k_j)$

ketiga operasi tsb sering dikenal dengan sebutan OBE (operasi Baris Elementer).

Teorema : $A_{n\times m} \underset{OBE}{\approx} A^*_{n\times m}$ yg sudah Eselon Baris / Esselon Baris tereduksi

contoh :

1. $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_1 \leftrightarrow b_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2 - 5b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -13 & -13 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} -3b_2 + 13b_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_2 \cdot \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Esselon Baris}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_1 - 2b_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Esselon Baris Tereduksi}$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2b_2 - 3b_1 \\ b_3 - b_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -12 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 \cdot \frac{1}{2} \\ b_2 \cdot -\frac{1}{12} \\ b_3 \cdot \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Esselon Baris}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -12 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 + b_3 \\ b_2 - b_3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -12 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3b_1 + b_2 \\ \\ b_3 \cdot \frac{1}{2} \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & -12 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 \cdot \frac{1}{6} \\ b_2 \cdot \frac{-1}{12} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Esselon Baris tereduksi}$$

DETERMINAN

Definisi : $f : M_{n \times n} \longrightarrow R$

$$A \longmapsto \det(A) = |A|$$

$|A|$ disebut determinan dari matriks A.

Cara hitung determinan

Misal $A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

untuk setiap entri a_{ij} didefinisikan :

- Minor $a_{ij} \equiv M_{ij}$, diperoleh dari $|A|$ dimana baris-i dan kolom-j di hapus
- kofaktor $a_{ij} \equiv A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

maka

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad , \text{ untuk suatu } j.$$

atau

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad , \text{ untuk suatu } i.$$

Jadi $|A|$ dihitung secara rekursif.

untuk ordo-2 $\rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$|A| = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} A_{ij} \quad \text{untuk satu-}j.\ (j = 1, 2)$$

untuk $j = 1$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21}$$
$$= a\, A_{11} + c\, A_{21} = ad + c(-b)$$
$$= ad - bc.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 |d| = d$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)\ |b| = -b$$

~~untuk~~ cara cepat: (metoda sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$\quad -\quad +$

untuk ordo-3 $\rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Jika dipilih $i = 2$, maka

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij} \quad , i = 2$$
$$= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$$

di mana:

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32})$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})$$

sehingga diperoleh

$$|A| = -a_{21}(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{22}(a_{11}\,a_{33} - a_{13}\,a_{31})$$
$$- a_{23}(a_{11}\,a_{32} - a_{12}\,a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33}$$

Cara cepat (metoda Saarus)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{ccccc} - & - & -\;+ & + & + \end{array}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$
$$- a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Perhatian : Cara Saarus hanya dapat digunakan untuk ordo-2 dan ordo-3, sedangkan ordo lebih tinggi tidak diperkenankan menggunakan cara ini.

Contoh :

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Jika dipilih $i = 2$, maka

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}A_{2j} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$= 4\cdot(-7) + 5\cdot 2 + 1\cdot(-4) = -22$$

dimana :

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Jika $|A|$ dihitung dengan menggunakan metoda Saarus :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.5.4 + 1.1.(-2) + (-3).4.1 - (-3).5.(-2) - 2.1.1 - 1.4.4$$

$$= 40 - 2 - 12 - 30 - 2 - 16 = -22 \text{. (sama!!)}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 14 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Jika dipilih $j=3$ maka

$$|A| = \sum_{i=1}^{4} a_{i3} A_{i3} = \underbrace{a_{13}}_{=0} A_{13} + \underbrace{a_{23}}_{=0} A_{23} + a_{33} A_{33} + a_{43} A_{43}$$

$$= 0 + 0 + (-3)\,64 + 3 \cdot 24$$

$$= -120$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 14 & 6 \end{vmatrix} = \cancel{24} - \cancel{24} + 56 - 24 + 56 - 24 = 64$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(\cancel{4} - 12 + 0 - 12 - 0 - \cancel{4}) = 24$$

Sifat² Determinan

1. $|A| = 0$ jika terdapat baris atau kolom nol.
2. $|A|$ tidak berubah jika satu baris (kolom) di jumlah kelipatan baris (kolom) lain.
3. $|A|$ berubah menjadi α kalinya jika satu baris (kolom) dikalikan α $(\alpha \in R,\ \alpha \neq 0)$.
4. $|A|$ berubah tanda jika dua baris (kolom) tukar tempat

5. $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, jika A adalah matriks segitiga.

6. $|A| = |A^T|$

Cara lain menghitung $|A|$, yaitu dengan bantuan OBE dengan mengingat sifat² determinan.

Prinsip : Dengan menggunakan OBE, ubah matriks A menjadi matriks segitiga.

contoh :

1. $$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1 \\ b_4 - 2b_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ 3b_4 - b_2 \end{array}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ b_3 \leftrightarrow b_4 \\ \\ \end{array}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{3}} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot -2 \cdot 2 = 4 .$$

Matriks Invers

Definisi : Matriks $B_{n \times n}$ disebut invers dari $A_{n \times n}$ hanya jika

$$BA = AB = I_n \quad (\text{notasi } B = A^{-1})$$

Dalam hal A^{-1} ada dikatakan A non singular, sebaliknya jika A^{-1} tidak ada dikatakan A singular

~~Jika~~ Sifat : 1. Jika ada, maka A^{-1} tunggal.

2. $(A^{-1})^{-1} = A$

3. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Cara menentukan A^{-1}.

1. Dengan bantuan Determinan

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adjoint } (A) \quad , \quad |A| \neq 0$$

adjoint $(A) \equiv$ matriks kofaktor dari A

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^{T}$$

dimana $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, kofaktor dari a_{ij}.

Contoh.

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= -2 + 6 \cancel{-2} \cancel{+2} - 3 + 4 = 5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{T}$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & -5 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Dengan Menggunakan OBE.

Prinsip : 1. Tulis Matriks Pelengkap $[A \mid I]$

2. Gunakan OBE untuk mendapatkan $[I \mid B]$

3. $A^{-1} = B$

Contoh.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 1 \neq 0 \quad A^{-1}$ ada.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2b_2 - 3b_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{b_2 - b_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{b_1 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\left[\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I_2}\middle|\underbrace{\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{array}}_{A^{-1}}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32$

$= -1 \neq 0$

A^{-1} ada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] b_3 + 2b_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] b_3(-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 - 3b_3 \\ b_2 + 3b_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] b_1 - 2b_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$I_3 \qquad \qquad A^{-1}$$