SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui sifat-sifat dan operasi matriks
2. Mengetahui bentuk – bentuk penyelesaian sistem persamaan linear.
3. Menggunakan operasi baris elementer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dan menentukan invers dari suatu matriks

Motivasi

Beberapa pemanfaatan matriks dalam aplikasi

1. Analisis Deteksi Tepi pada Citra dimana tepi adalah perubahan nilai intensitas derajat keabuan yang mendadak (besar) di dalam jarak. Beberapa algoritma yang digunakan adalah deteksi tepi Sobel, Prewit, Robert, Canny.

Ref: http://www.catenary.com/howto/diagedge.html

2. Metode Item Based Collaborative Filtering pada sistem rekomendasi cerdas yang digunakan pada E-commerce yang bertujuan untuk memberikan rekomendasi pada pelanggan dalam memilih barang yang akan dibeli. Matriks direpesentasikan sebagai tabel yang berisi nilai rating dari setiap pelanggan yang telah membeli suatu barang tertentu.
3. Matrik Probabilitas Transisi pada Rantai Markov. Salah satu penerapnnya adalah untuk mengetahui peralihan pelanggan akibat iklan, promosi ataupun harga dari produk sejenis dengan beberapa merek tertentu.
4. Metode Analytic Heararcy Process yang digunakan dalam Sistem Pengambilan Keputusan.
5. Metode Artificial Neural Fuzzy pada Artificial Inteligent untuk mengenali alphanumerik.
6. Enkripsi Data dalam Security.
7. Pemrosesan sinyal mengubah sinyal dari analog menjadi digital.

Materi :

1.1 Bentuk Umum Matriks

Definisi 1.1 Matriks adalah suatu susunan banjar (*array*) bilangan-bilangan dalam bentuk segi empat, dengan jumlah baris sebanyak *m* dan jumlah kolom sebanyak *n*.

dinotasikan dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kolom jumlahnya n

atau dapat ditulis secara ringkas dengan $A = (a_{ij})_{m \times n}$

baris jumlahnya *m*

dimana *i* =1,...,*m* dan *j* =1,...,*n* , a_{ij} adalah elemen matriks *A* pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Ukuran (orde) matriks *A* di atas adalah *mxn*.

Contoh 1.1:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 4\\ 2 & 3 & -3 & 7\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 6\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 7 & 0 & -3\\ 3 & 5 & 4\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}$$

✍ Tentukan orde dari matriks berikut dan tentukan elemen dari matriks berikut ini $a_{12,}\ b_{23}, c_{31}, d_{42}$

Definisi 1.2 Kesamaan dua matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika dimensi kedua matriks sama dan elemen-elemen seletaknya sama.

✍ Berikan dua contoh matriks yang sama

1.2 Operasi dan Sifat Matriks

Definisi 1.3 Operasi Matriks

a) Jika $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ masing-masing adalah matriks *m*x*n*, maka $A+B$ adalah matriks *m*x*n* yang elemen ke-*ij* adalah $a_{ij}+b_{ij}, \forall(i,j)$.
b) Jika *A* adalah matriks *m*x*n*, *α* adalah suatu skalar maka *αA* adalah matriks yang dibentuk dari perkalian setiap elemen *A* dengan *α*.
c) Jika *A* dan *B* adalah matriks *m*x*n* maka $A-B$ adalah matriks *m*x*n* yang dapat dituliskan dari $A-B=A+(-B)$.
d) Jika *A* matriks *m*x*r* dan *B* matriks *r*x*n* maka hasil kali A.B=C adalah matriks *m*x*n* yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad \forall i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$$

Contoh 1.2:

Misalkan diketahui $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$,

Tentukan :

a. *A+B*
b. α*A*, dimana α adalah skalar
c. –A atau (-1)A
d. *A-B*
e. *A.B*

Penyelesaian

a. $A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$

b. $\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}$

c. $-A=(-1)A=$

d. $A-B=A+(-B)$

e. $A.B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=$

✍**Latihan 1.1** Selesaikan soal berikut ini

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan matriks 2*C* dan -3*C*
b. Tentukan matriks *A+B*, periksalah apakah matriks yang diperoleh sama dengan matriks *B+A*
c. Tentukan matriks *A-B*, periksa pula matriks *B-A*! Apa kesimpulan yang dapat diambil? Apakah dua matriks dengan orde yang berbeda dapat dijumlahkan/dikurangkan?
d. Tentukan matriks *AC*, *BC* dan *CA*. Apakah semua matriks tersebut dapat ditentukan nilai elemen-elemennya? Apa syarat agar dua matriks dapat dikalikan?
e. Hitunglah *(A+B)C* bandingkan hasilnya dengan *AC* + *BC*

Teorema 1.1
Untuk setiap skalar α, β dan untuk setiap matriks *A,B* dan *C* dimana operasi-operasi yang bersangkutan terdefinisi maka berlaku :

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $(AB)C=A(BC)$
4. $A(B+C)=AB+AC$
5. $(A+B)C=AC+BC$
6. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
9. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Bukti dapat dilihat di *Howard Anton, Aljabar Linear Elementer*

1.3 Beberapa Matriks Istimewa

a. Matriks berukuran 1x*n* disebut **vektor baris**, matriks berukuran *m*x1 disebut **vektor kolom**.
Contoh 1.3:
$\overline{p}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{q}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{p}$ adalah vektor baris dan $\overline{q}$ adalah vektor kolom.
Penulisan notasi vektor secara khusus akan dibahas pada bab 3.
b. **Matriks bujur sangkar** berorde *n* jika jumlah baris dan kolom matriks sama yaitu *n* buah.
Contoh 1.4:
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.5:
Jika *A* matriks bujur sangkar berorde 3 x 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

maka a_{11}, a_{22}, a_{33} adalah diagonal utama dan yang lainnya elemen –elemen di luar diagonal *A*.

diagonal utama

c. **Matriks diagonal** adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal $= 0$.
Contoh 1.6:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d. **Matriks skalar** adalah matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya memiliki suatu nilai skalar.
Contoh 1.7:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e. **Matriks identitas** adalah matriks skalar dimana semua nilai diagonal utamanya adalah 1, matriks identitas dapat ditulis dengan I_n dengan *n* menyatakan orde dari matriks atau hanya I.
Contoh 1.8:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f. **Matriks null** adalah matriks bujursangkar yang semua elemennya bernilai 0, sering dituliskan dengan matriks O.
Contoh 1.9:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g. **Matriks Segitiga Bawah** adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di atas diagonal utama adalah nol.
Contoh 1.10:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

h. **Matriks Segitiga Atas** adalah matriks bujur sangkar dimana semua elemen di bawah diagonal utama adalah nol.
Contoh 1.11:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&-4&5\\0&1&2\\0&0&7\end{pmatrix}$$

1.4 Transpose dari Suatu Matriks

Definisi 1.4

Jika *A* adalah matriks *m*x*n* maka transpos *A* (ditulis A^T atau *A'*) adalah matriks berukuran *n*x*m* yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dengan kolom dari *A*. $A=(a_{ij})$ dan $A^T=(a_{ji})$. Jika *A* matriks bujur sangkar dan $A^T=A$ maka *A* adalah **matriks simetri**.

Contoh 1.12:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2&-3\\1&4\\0&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&3&8\\4&8&7\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&3&8\\4&8&7\end{pmatrix}$$

✍ Dari contoh, matriks *B* dikenal dengan matriks simetri. Perhatikan contoh matriks B, kemudian berikan contoh matriks simetri lainnya! Apa yang dapat disimpulkan tentang matriks simetri?

Teorema 1.2

Berikut ini adalah beberapa sifat yang dimiliki oleh transpose dari sebuah matriks. Misalkan *A,B* adalah matriks *mxn* dan α adalah skalar maka berlaku sifat:

a) $\left(A^T\right)^T=A$

b) $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$

c) $\left(\alpha A\right)^T=\alpha A^T$

Definisi 1.5

Jika *A* adalah matriks bujur sangkar maka **trace *A*** (ditulis *tr*(*A*)) didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota dari diagonal utama matriks *A*. Trace *A* tidak terdefinisi jika *A* bukan matriks bujur sangkar.

✍ **Latihan 1.2** Diketahui matriks-matriks berikut ini :

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&0\\-1&-3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\3&-2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-4&1\\2&3&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&1&0\\1&5&0\end{pmatrix}$$

Sederhanakan matriks berikut ini **jika mungkin**

a. $2A^T+C$

b. A^T-2B

c. $tr(DD^T)$

d. B^T+CA

e. $tr(CA)+tr(B)$

f. $(AC)^T+D$

1.5 Sistem Persamaan Linear

Definisi 1.6

Secara umum sebuah persamaan linear dengan *n* variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dapat dituliskan sebagai suatu persamaan linear dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

Dengan $a_1, a_2, ..., a_n$ dan b konstanta real.

✍ **Latihan 1.3**

Tentukan persamaan berikut yang merupakan persamaan linear :

a. $x + 3y = 7$

b. $x_1 + 2x_2 - 4x_3^{-1} + 3x_4 = 12$

c. $x_1 = \frac{1}{3}x_2 - 4x_3$

d. $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 1$

e. $\sqrt{x_1} + \frac{1}{2}x_2 - x^{1/2} = 1$

f. $\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 4x_3 + \pi x_4 = 12^{1/2}$

Definisi 1.7

Sebuah himpunan terhingga *m* buah persamaan linear dengan variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ disebut sistem persamaan linear dengan *n* variabel dituliskan sebagai

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Suatu urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$ memenuhi **setiap persamaan** dalam sistem tersebut.

Contoh 1.13: Sistem persamaan linear

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{array}$$

✍ Tentukan jumlah variabel dan banyak persamaan dari sistem persamaan disamping (*m* dan *n*)

Definisi 1.8

Suatu sistem persamaan linear dengan *m* persamaan dan *n* buah variabel dapat dituliskan kembali menjadi $A\overline{x} = \overline{b}$, seperti berikut ini

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\overline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\overline{b}}$$

Jika $\overline{b} = \overline{0}$ maka persamaan $A\overline{x} = \overline{0}$ disebut **sistem persamaan linear homogen.**

Definisi 1.9

Sistem persamaan yang **tidak** mempunyai penyelesaian disebut sistem yang *tak konsisten* sedangkan jika **minimal terdapat satu** penyelesaian maka sistem tersebut disebut *konsisten*.

Setiap sistem persamaan linear mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai tepat satu penyelesaian, atau tak hingga banyaknya penyelesaian.

✍ **Latihan 1.4** Periksalah ketiga sistem persamaan berikut dan gambarkan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut dalam koordinat kartesian. Tentukan sistem persamaan yang mempunyai tepat satu penyelesaian, tak hingga atau tidak mempunyai penyelesaian

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Definisi 1.10

Setiap sistem persamaan linear homogen mempunyai sifat konsisten, karena semua sistem seperti itu mempunyai penyelesaian $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Penyelesaian ini disebut penyelesaian *trivial*. Jika ada penyelesaian lain yang memenuhi sistem persamaan tersebut maka penyelesaian sistemnya disebut penyelesaian *tak-trivial*.

Contoh 1.14:

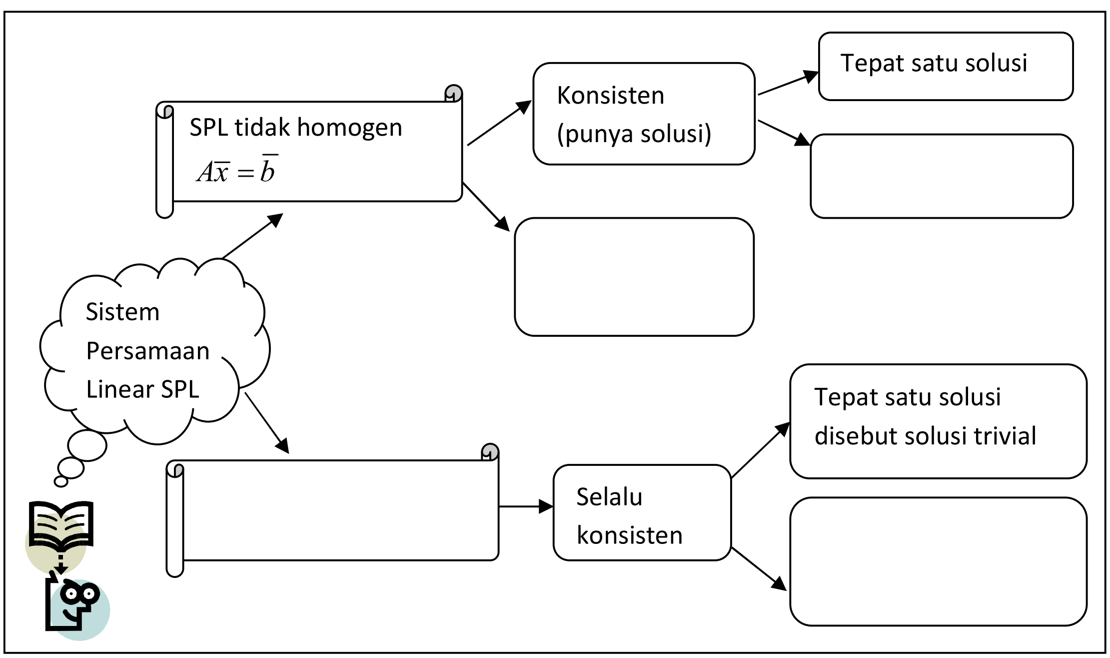
a) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tunjukkan bahwa a) memiliki penyelesaian trivial dan b) memiliki penyelesaian tak-trivial.

✍**Latihan 1.5**

Lengkapi *mind mapping* berikut ini



Definisi 1.11

Sistem *m* persamaan linear dengan *n* buah variabel dapat diubah dalam bentuk matrik yang diperluas (*augmented matrix*) yang dituliskan sebagai:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

✍ **Latihan 1.6**

Buatlah *augmented matrix* dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

1.6 Eliminasi Gaussian

Penyelesaian sistem persamaan dapat dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE) pada matriks yang diperbanyak. Metode dasar dari OBE adalah dengan menggantikan sistem yang diberikan dengan suatu sistem baru yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama tetapi lebih mudah diselesaikan.

Definisi 1.12

Tiga langkah yang digunakan dalam OBE adalah:

1. Kalikan suatu baris dengan bilangan real bukan nol.
2. Pertukarkan dua baris
3. Ganti suatu baris dengan hasil penjumlahannya dengan kelipatan dari baris lain.

Definisi 1.13

Sebuah matriks dikatakan memiliki bentuk baris eselon jika:

1. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1
2. Jika baris *k* tidak seluruhnya mengandung 0, maka banyak elemen nol bagian muka pada baris *k+1* lebih besar dari banyaknya elemen nol di bagian depan baris *k*.
3. Jika terdapat baris-baris yang elemennya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada tepat dibawah baris-baris yang memiliki elemen-elemen bukan nol.

✍ **Latihan 1.7** Tentukan apakah matriks-matriks berikut ini merupakan matriks yang memiliki bentuk eselon baris atau tidak

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi 1.14

Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matrik baris eselon dengan menggunakan OBE disebut *Eliminasi Gauss*.

Definisi 1.15

Suatu matriks memiliki baris eselon tereduksi jika :

1. Matriks memiliki bentuk baris eselon.
2. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya elemen bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matrik baris eselon tereduksi dengan menggunakan OBE disebut *Eliminasi Gauss-Jordan/Reduksi Gauss-Jordan*.

✍ **Latihan 1.8** Tentukan apakah bentuk matriks berikut ini memiliki baris eselon tereduksi atau tidak.

$$a)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&9\\0&0&1&5\end{pmatrix}\qquad b)\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad c)\begin{pmatrix}0&-2&3&1\\3&6&-3&-2\\6&6&3&5\end{pmatrix}$$

Contoh 1.15 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini menggunakan reduksi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}2x_1+4x_2-3x_3&=1\\x_1+\;\;x_2+2x_3&=9\\3x_1+6x_2-5x_3&=0\end{aligned}$$

Langkah – langkah penyelesaian sistem persamaan diatas dilakukan sebagai berikut:

$$\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&-3&1\\1&1&2&9\\3&6&-5&0\end{array}\right)\Rightarrow\underset{(a)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2&9\\2&4&-3&1\\3&6&-5&0\end{array}\right)}\Rightarrow\underset{(b)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2&9\\0&2&-7&-17\\3&6&-5&0\end{array}\right)}\Rightarrow\underset{(c)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2&9\\0&2&-7&-17\\0&3&-11&-27\end{array}\right)}\Rightarrow$$

$$\underset{(d)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2&9\\0&1&-\frac{7}{2}&-\frac{17}{2}\\0&3&-11&-27\end{array}\right)}\Rightarrow\underset{(e)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2&9\\0&1&-\frac{7}{2}&-\frac{17}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right)}\Rightarrow\underset{(f)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2&9\\0&1&-\frac{7}{2}&-\frac{17}{2}\\0&0&1&3\end{array}\right)}\Rightarrow$$

$$\underset{(g)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&\frac{11}{2}&\frac{35}{2}\\0&1&-\frac{7}{2}&-\frac{17}{2}\\0&0&1&3\end{array}\right)}\Rightarrow\underset{(h)}{\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)}$$

Penyelesaiannya adalah
$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3$

Keterangan:

a. Pertukarkan baris pertama dengan baris kedua sehingga diperoleh matriks (a).
b. Kalikan baris pertama dengan -2 kemudian tambahkan dengan bilangan yang ada pada baris kedua sehingga diperoleh matriks (b).
c. Kalikan baris pertama dengan -3 kemudian tambahkan dengan bilangan yang ada pada baris ketiga sehingga diperoleh matriks (c).
d. Kalikan baris kedua dengan $-\frac{1}{2}$ sehingga diperoleh matriks (d).

e. Kalikan baris kedua dengan -3 kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris ketiga sehingga diperoleh matriks (e).
f. Kalikan baris ketiga dengan -2 sehingga diperoleh matriks (f).
g. Kalikan baris kedua dengan -1 kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris pertama sehingga diperoleh matriks (g).
h. Kalikan baris ketiga dengan $\frac{7}{2}$ kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris kedua selanjutnya kalikan baris ketiga dengan -$\frac{11}{2}$ kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris pertama sehingga diperoleh matriks (h).

Perhatikan kembali **contoh 1.15** Proses yang dilakukan dari (a) sampai (f) adalah proses Eliminasi Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \text{ dapat dituliskan menjadi } \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_2 - \tfrac{7}{2}x_3 &= -\tfrac{17}{2} \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_3 = 3$ ke persamaan kedua akan diperoleh $x_2 = 2$ kemudian nilai x_2, x_3 disubstitusikan ke persamaan pertama sehingga diperoleh $x_1 = 1$. Proses yang dilakukan ini disebut dengan cara substitusi balik.

✍ **Latihan 1.9** Gunakan Eliminasi Gauss dan subtitusi balik untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini kemudian periksa hasilnya dengan menggunakan Reduksi Gauss Jordan

$$a)\ \begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$d)\ \begin{aligned} 6x + y &= 0 \\ x + 5y &= 0 \\ x &= 4y \end{aligned} \qquad e)\ \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1.7 Menentukan Invers Matriks dengan Metode Gauss-Jordan

Di dalam pemrograman salah satu cara untuk menentukan invers dari sebuah matriks adalah dengan menggunakan Metode Gauss Jordan. Untuk itu terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai pengertian dari invers matriks.

Definisi 1.16

Suatu matriks *A* bujur sangkar dapat dibalik jika terdapat suatu matriks *B* sehingga berlaku $AB = BA = I$ maka matriks *A* disebut dapat dibalik dan *B* adalah matriks invers dari *A* (ditulis A^{-1}).

✍ **Latihan 1.10** Periksalah apakah *B* adalah invers dari matriks *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.3

Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama maka:

a) *AB* dapat dibalik

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Untuk mendapatkan invers suatu matriks yang dapat dibalik *A*, kita harus menemukan serangkaian OBE yang mereduksi *A* menjadi identitas dan kemudian melakukan serangkaian operasi yang sama pada I_n untuk memperoleh matriks A^{-1}.

Contoh 1.16:

Cari invers dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Kita harus menyandingkan matriks *A* dengan matriks *I* berukuran 3x3 sehingga diperoleh matriks $(A \mid I)$ dan setelah proses OBE diperoleh matriks $(I \mid A^{-1})$.

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{OBE} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) = (I \mid A^{-1})$$

Jadi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

✍ **Latihan 1.11**

1. Lakukan proses OBE pada contoh diatas sehingga terbukti bahwa invers dari *A* adalah $\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Carilah invers dari matriks berikut ini dengan OBE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$