NILAI DAN VEKTOR EIGEN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui definisi nilai dan vektor eigen
2. Menghitung nilai eigen
3. Menentukan basis, rank dan nullitas dari ruang eigen
4. Mengetahui syarat agar suatu matriks dapat didiagonalisasi
5. Menentukan matriks *P* yang dapat mendiagonalisasi suatu matriks *A*

Materi :

6.1 Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 6.1

Jika *A* matriks $n \times n$ maka vektor tak nol $\bar{x} \in R^n$disebut *vektor eigen* dari *A* jika $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut *nilai eigen* dari *A* dan $\bar{x}$ sering disebut sebagai vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen λ.

Untuk mencari nilai eigen, pandang persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ dapat dituliskan kembali menjadi $A\bar{x} = \lambda I\bar{x}$ dan ekivalen dengan $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$.

Agar suatu nilai eigen λ dapat ditentukan maka SPL homogen harus punya solusi non trivial, hal ini hanya terjadi jika $\det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ disebut *persamaan karakteristik* dan $\mathrm{p}(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ disebut *polinom karakteristik*. Kadang-kadang nilai dan vektor eigen sering disebut *nilai dan vektor karakteristik*. Ruang eigen adalah ruang solusi dari SPL $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$

Definisi 6.2

Ruang eigen adalah ruang solusi dari persamaan $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$ didefinisikan dengan $\left\{\bar{x} \middle| (\lambda I - A)\bar{x} = 0\right\}$

Contoh 6.1

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tentukan :

a. Nilai dan vektor eigen

b. Ruang eigen

Penyelesaian:

a. $\det(\lambda I - A) = \bar{0}$ maka

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda&0&2\\-1&\lambda-2&-1\\-1&0&\lambda-3\end{pmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1&\lambda-2\\-1&0\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)+2(0+\lambda-2)=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$$

dengan memfaktorkan diperoleh $(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)$=0 maka nilai eigen adalah 2 dan 1.

Untuk mendapatkan vektor eigen maka disubstitusikan nilai-nilai eigen ke persamaan $(A-\lambda I)\overline{x}=\overline{0}$ yaitu:

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&2\\-1&\lambda-2&-1\\-1&0&\lambda-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda=2$ diperoleh

$$\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&0&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&0&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Sehingga solusi $\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, maka vektor eigen adalah $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Untuk $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Sehingga solusi $\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ dan vektor eigen adalah $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

b. Ruang eigen yang berkaitan dengan nilai $\lambda = 2$ adalah $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan basis = $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ dan ruang eigen yang berkaitan dengan nilai $\lambda = 1$ adalah $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan basis = $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

✍ **Latihan 6.1**

Tentukan nilai eigen dan ruang eigen dari matriks-matriks berikut ini

a. $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

6.2 Diagonalisasi

Definisi 6.3

Suatu matriks bujur sangkar *A* dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu matriks yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ adalah suatu matriks diagonal, *P* dikatakan mendiagonalkan *A*.

Teorema 6.1

Jika *A* adalah matriks *n*x*n*, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen

a. *A* dapat didiagonalkan
b. *A* mempunyai *n* vektor eigen yang bebas linear

Langkah-langkah untuk mendiagonalkan matriks *A:*

1. Cari *n* vektor-vektor eigen yang bebas linear dari *A* misalkan $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$.
2. Bentuk matriks *P* yang mempunyai $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
3. Matriks $P^{-1}AP$ akan menjadi matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ berturut-turut adalah anggota diagonalnya dimana λ_i adalah nilai eigen yang berpadanan dengan $\bar{p}_i$ untuk *i* = 1,2,...,*n*.

Contoh 6.2

Carilah suatu matriks *P* yang mendiagonalkan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Telah diperoleh untuk

$\lambda = 2$ $\qquad \bar{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\bar{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ $\qquad \bar{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sehingga dari tiga vektor basis diperoleh matriks *P* sebagai berikut

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dapat ditunjukkan bahwa

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D adalah matriks diagonalisasi dan jika kedua ruas dikalikan dengan P dan P^{-1} persamaan ini dapat dituliskan kembali menjadi

$$PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = IAI = A$$

Jika dipangkatkan n maka diperoleh

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$$

Dengan ini kita dapat menghitung pangkat dari suatu matriks *A* dengan mengubah *A* menjadi matriks PDP^{-1}

✍ **Latihan 6.2**

Carilah suatu matriks *P* yang mendiagonalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Apakah matriks *A* dapat didiagonalkan?

Hitunglah A^{10}