ALJABAR LINIER & MATRIKS

2. DETERMINAN

Determinan

- Suatu fungsi tertentu yang menghubungkan suatu bilangan real dengan suatu matriks bujursangkar.
- Determinan matriks A dituliskan $|A|$

Determinan

1. Cara Sarrus

- *Metode Sarrus hanya untuk matriks berdimensi 2x2 dan 3x3*

Determinan

1. Cara Sarrus

- **Matriks A_{2x2}**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad determinan\ A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinan

1. Cara Sarrus

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 5.2 = 21 - 10 = 11$$

Determinan

1. Cara Sarrus

- **Matriks A_{3x3}**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (afh + bdi + ceg)$$

untuk memudahkan mengingat

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right| \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array}$$

Determinan

1. Cara Sarrus

contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Determinan } A = |A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (6.3.3 + 1.5.4 + 1.2.2) - (1.3.4 + 6.5.2 + 1.2.3)$$
$$= 78 - 78$$
$$= 0$$

Minor & Kofaktor

- Jika elemen -elemen baris ke-i dan kolom ke-j matriks A dihilangkan sehingga terdapat matriks bujur sangkar (n-1), maka determinan dari matriks bujur sangkar ini disebut dengan ***Minor a** $_{ij}$* dilambangkan dengan M_{ij}

- ***Kofaktor a** $_{ij}$* dilambangkan dengan α_{ij} adalah

  $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Minor & Kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Minor & Kofaktor

$$\text{Minor } a_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ;$$

$$\text{Minor } a_{21} = M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{Minor } a_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\text{Minor } a_{12} = M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \textit{dst}$$

Minor & Kofaktor

kofaktor $a_{11} = \alpha_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$

kofaktor $a_{21} = \alpha_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$

kofaktor $a_{31} = \alpha_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$

kofaktor $a_{12} = \alpha_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$ dst

.

Contoh :

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Minor c_{11} = $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$; Kofaktor c_{11} = $(-1)^{1+1} M_{11} = -6$

Minor c_{21} = $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$; Kofaktor c_{21} = $(-1)^{2+1} M_{21} = -(-11) = 11$

Adioint Matriks

Jika A=(aij) adalah matriks bujur sangkar ordo n, dan jika α_{ij} *adalah kofaktor aij didalam A, maka adjoint matriks A dinotasikan* ***adj.A*** *adalah :*

$$adj.A = (\alpha_{ij})^T = (\alpha_{ji}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & . & . & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & . & . & \alpha_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ maka Adjointnya :

$$adj.A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan

2. **Ekspansi Kofaktor**

- *Nilai Determinan suatu matriks bujur sangkar A berordo n sama dengan jumlah perkalian masing-masing elemen suatu baris (kolom) dengan kofaktornya*

- Determinan suatu matriks A berordo n dapat dicari dengan 2n cara ekspansi kofaktor

Determinan

2. **Ekspansi Kofaktor**

Ekspansi Baris

$$\text{Br}_1 : \ |A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \ldots + a_{1n}\alpha_{1n}$$

$$\text{Br}_2 : \ |A| = a_{21}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22} + \ldots + a_{2n}\alpha_{2n}$$

....

$$\text{Br}_n : \ |A| = a_{n1}\alpha_{n1} + a_{n2}\alpha_{n2} + \ldots + a_{nn}\alpha_{nn}$$

Determinan

2. **Ekspansi Kofaktor**

Ekspansi Kolom

Kl$_1$: $|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \ldots + a_{n1}\alpha_{n1}$

Kl$_2$: $|A| = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + \ldots + a_{n2}\alpha_{n2}$

....

Kl$_n$: $|A| = a_{1n}\alpha_{1n} + a_{2n}\alpha_{2n} + \ldots + a_{nn}\alpha_{nn}$

Determinan

2. **Ekspansi Kofaktor**

Contoh a.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$; Tentukan $|A|$ dengan ekspansi kofaktor baris pertama

Jawab :

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} ; \ \alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ; \ \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1.\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(-3) - 2(-8) + 3(-7)$$

$$|A| = -8$$

Determinan

2. Ekspansi Kofaktor

Contoh b :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ ; Cari } |A|$$

Jawab :

$|A|$ dengan ekspansi kolom ke-3 *(pilih yang mempunyai nilai nol paling banyak)*

$$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} ; \ \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} ; \ \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} ; \ \alpha_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{13}\alpha_{13} + a_{23}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} + a_{43}\alpha_{43}$$

$$|A| = 0.\alpha_{13} + 0.\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} + a_{43}\alpha_{43}$$

$$|A| = 0 + 0 + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0 + 0 + 3.(12) - 2(-6)$$

$$|A| = 48$$

Sifat-sifat Determinan

Dalil 1

Jika semua elemen dalam suatu baris (kolom) matriks bujur A adalah 0, maka $|A| = 0$

Contoh :

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (0.2\text{-}0.3) = 0$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\text{-}2.1.0 + 1.0.4 + 0.\text{-}1.5) - (0.1.4 + 1.\text{-}1.0 + (\text{-}2).0.5) = 0$

Sifat –Sifat Determinan

Dalil 2

Jika A adalah adalah matrik bujur sangkar, maka $|A| = |A^T|$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.4 = -5$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 4.2 = -5$$

Sifat-sifat Determinan

Dalil 3

Jika setiap elemen suatu baris (kolom) dari matriks bujur sangkar A dikalikan dengan skalar k , sehingga menjadi matriks bujur sangkar B maka k $|A|$ = $|B|$

Contoh :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.2 & 3.3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 33 = 3.\ 11$$

Sifat-sifat Determinan

Dalil 4

Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan jalan menukar letak sembarang dua baris (kolom) maka $|B| = -|A|$

Contoh :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Sifat-sifat Determinan

Dalil 5

Jika elemen elemen dari dua baris (kolom) dari matriks A adalah identik maka $|A| = 0$

Contoh :

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Elemen –elemen baris pertama identik dengan elemen-elemen baris ke dua

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Elemen-elemen kolom pertama identik dengan elemen-elemen kolom ke tiga

Sifat-sifat Determinan

Dalil 6

Jika elemen-elemen suatu baris atau kolom dari matriks A sebanding dengan elemen – elemen baris (kolom) yang lain maka $|A| = 0$

Contoh :

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Elemen-elemen kolom pertama sebanding dengan elemen-elemen kolom ke tiga

Sifat-sifat Determinan

Dalil 7 :

Jika setiap elemen suatu baris (kolom) matriks A merupakan jumlah p buah suku, maka $|A|$ dapat dinyatakan sebagai jumlah p determinan. Elemen-elemen pada baris (kolom) itu dari p buah determinan masing- masing adalah suku-suku pertama, suku ke dua, ..., ke p dari keseluruhan semua baris (kolom) matriks A

Contoh:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 54 = -19$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 4+5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (14-24) + (21-30) = -10 + (-9) = -19$$

Sifat-sifat Determinan

Dalil 8 :

Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan menambahkan elemen-elemen pada baris (kolom) ke p dengan k kali elemen –elemen baris (kolom) ke q, maka $|B| = |A|$

Contoh :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2+3+2) - (1+12+1) = -7$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2+2.1 & 1+2.3 & 1+2.1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (14+9+4) - (7+24+3) = 27\text{-}34 = -7$$

Bentuk *Eselon-baris*

Matriks dapat dikatakan *Eselon-baris* apabila memenuhi persyaratan berikut :

- Di setiap baris, angka pertama selain 0 harus 1 (*leading 1*).
- Jika ada baris yang semua elemennya nol, maka harus dikelompokkan di baris akhir dari matriks.
- Jika ada baris yang *leading 1* maka *leading 1* di bawahnya, angka 1-nya harus berada lebih kanan dari *leading 1* di atasny

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

Suatu matriks dapat dibentuk dalam Eselon baris dengan operasi baris elementer.

Ada 3 jenis operasi baris elementer yang dapat dilakukan pada matriks.

- Mempertukarkan posisi dua baris

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

- Mengalikan baris ke-i dengan suatu skalar $t \neq 0$

$$R_i \rightarrow tR_i$$

- Menambahkan suatu baris dengan perkalian skalar baris yang lain.

$$R_j \rightarrow R_j + tR_i$$

Contoh Operasi Baris Elementer

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_2 \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \left(-\frac{1}{8}\right) R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinan

3. Operasi Baris Elementer

- Opersi baris elementer untuk mereduksi **matriks A** yang diberikan menjadi sebuah **matriks R** yang berada di dalam **bentuk eselon baris**, karena sebuah bentuk eselon baris dari sebuah matriks bujursangkar adalah matriks segitiga atas, maka det (A) dapat dihitung dengan menggunakan Teorema berikut :
- Jika A adalah sebuah matriks segitiga yang berukuran nxn, maka det(A) adalah hasil perkalian elemen-elemen pada diagonal utama yaitu $= a_{11}. a_{22} .a_{33} ... a_{nn}$

Determinan

3. Operasi Baris Elementer

Menggunakan sfat-sifat determinal Dalil 3, Dalil 4, dan Dalil 8 untuk menghubungkan nilai det (A) dengan det (R).

Contoh :

Hitunglah determinan A dimana :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan

3. Operasi Baris Elementer

- Det (A)= $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ (Dengan menukarkan baris 1 dan baris 2)

$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ (Baris 1 mempunyai faktor bersama 3 yang di keluarkan dari determinan)

3. Operasi Baris Elementer

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$ (Baris ke-3 ditambah -2 baris ke 1)

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$ (Baris ke -3 ditambah -10 baris ke-2)

$$= -3 x -55 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (Baris ke-3 mempunyai faktor bersama 55 yang dikeluarkan dari determinan)

= -3x-55x1

= 165 Jadi Determinan Matriks A = 165

Invers Matriks

Difinisi :

Kebalikan (invers) A^{-1} dari matriks bujur sangkar non sigular $A = (a_{ij})$ sama dengan adjoint A dibagi dengan determinan A.

$$A^{-1} = \frac{adj.A}{|A|}$$

Tidak semua matriks bujur sangkar mempunyai invers.

Matriks yang mempunyai invers ( ) disebut matrik *non-singular* , matriks yang tidak mempunyai

Contoh

- Carilah Invers dari Matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$adj.A = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj.A}{|A|}$$

$$\frac{1}{|A|}(adj.A) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$