DETERMINAN

Pertemuan : 3&4

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui sifat-sifat determinan.
2. Menggunakan teknik ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan.
3. Menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Materi :

2.1 Pendahuluan

Definisi 2.1

Misalkan *A* adalah matriks bujur sangkar berukuran 2x2. Determinan matriks *A* didefinisikan sebagai :

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinan dapat dihitung dengan menggunakan metode Sarrus, diilustrasikan sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

-       +

✍ **Latihan 2.1**

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini (bisa menggunakan aturan Sarrus) :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

*Aturan Sarrus hanya berlaku untuk matriks berukuran maksimal 3x3.

2.2 Ekspansi Kofaktor

Cara lain untuk menghitung determinan matriks yang memiliki orde lebih besar dari 3x3 adalah dengan menggunakan ekspansi kofaktor. Sebelum dijelaskan metode ekspansi kofaktor, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai pengertian minor dan kofaktor dari sebuah matriks.

Definisi 2.2

Jika *A* sebuah matriks bujursangkar *n*x*n* maka **minor** dari a_{ij} dituliskan dengan M_{ij} adalah determinan dari sub-matriks yang masih tersisa, setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari *A*, sedangkan C_{ij} disebut **kofaktor** anggota a_{ij} dimana $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Contoh 2.1:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \cancel{-2} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} \\ -4 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 15 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23} = -15$$

✍**Latihan 2.2**

Dengan menggunakan matriks **contoh 2.1** tentukan M_{21} , C_{21} dan M_{23} , C_{23}

Teorema 2.1

Determinan suatu matriks A berukuran nxn dapat dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan yaitu untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$ (ekspansi kofaktor disepanjang kolom ke-j)

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$ (ekspansi kofaktor disepanjang baris ke-i)

Contoh 2.2:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}C_{13}$$

$$= 3.(-1)^2 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0.(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) + (-1)(-11) + 0 = -1$$

✍**Latihan 2.3**

Gunakan kolom atau baris lainnya untuk menghitung determinan A! Apakah nilai determinan yang diperoleh sama dengan **contoh 2.2**? Apakah yang dapat disimpulkan?

2.3 Sifat-sifat Determinan

Sebelumnya telah dibahas tentang cara menghitung determinan, berikutnya akan dijelaskan sifat-sifat determinan yang dapat digunakan untuk menghitung determinan dari matriks khususnya matriks yang berukuran lebih besar.

✍**Latihan 2.4**

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini!

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots..$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \ldots..$

b. $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \ldots.$ $\qquad \det(A^T) =$

c. $\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad \det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Apa yang dapat disimpulkan dari poin a,b, dan c?

Teorema 2.2

Jika A matriks bujur sangkar maka:

i) Jika A mempunyai sebuah baris nol atau sebuah kolom nol maka det(A) = 0.

ii) det(A)=det(A^T)

Teorema 2.3

Jika *A* adalah suatu matriks segitiga nxn (segitiga atas,segitiga bawah, atau diagonal) maka det(*A*) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

Teorema 2.4

Misalkan *A* matriks *n*x*n*

a. Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari *A* dikalikan dengan suatu skalar α, maka det(*B*) = α.det(*A*).
b. Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau kolom dari *A* dipertukarkan maka det(*B*) = -det(*A*).
c. Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika suatu panggandaan suatu baris *A* ditambahkan pada **baris** lainnya atau jika suatu penggandaan suatu **kolom** ditambahkan pada kolom lainnya, maka det(*B*) = det(*A*).

Contoh 2.3:

Hubungan	**Operasi**
a. $\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det(*B*)=α.det(*A*)	Baris pertama *A* dikalikan dengan α.
b. $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det(*B*) = - det(*A*)	Baris pertama dan kedua dari *A* dipertukarkan.
c. $\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & a_{13}+\alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det(*B*) = det(*A*)	Suatu penggandaan baris kedua dari *A* ditambahkan pada baris pertama.

a. $\begin{vmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 1 & 18 & 0 \\ 7 & -81 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 18 & 0 \\ 7 & -81 & 4 \end{vmatrix} = 3.4\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 18 & 0 \\ 7 & -81 & 1 \end{vmatrix} = 3.4.3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 7 & -27 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -27 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & 18 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -11 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

Teorema 2.5

Jika A adalah matriks bujur sangkar dengan dua baris proporsional atau dua kolom proporsional, maka det (A)=0.

Contoh 2.4 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Dari contoh baris pertama dan baris kedua adalah dua baris yang proporsional sehingga nilai determinannya adalah 0.

✍**Latihan 2.5**

1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & 2 & 8 & 10 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \\ 1 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Periksalah bahwa matriks-matriks diatas mempunyai determinan nol, berikan alasannya!

2. Gunakan beberapa cara untuk menghitung determinan dari matriks berikut!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & -10 & 8 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.6

Sifat-sifat dasar determinan:

Misalkan A dan B matriks nxn dan α skalar maka

1. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$

2.4 Menghitung Determinan Menggunakan Sifat-sifat Determinan

Kita dapat menggunakan reduksi baris, sifat-sifat determinan yang dibahas sebelumnya dan perluasan kofaktor untuk menghitung determinan matriks khususnya matriks berukuran besar. Perhatikan contoh berikut dan tentukan sifat-sifat yang digunakan untuk menentukan determinannya.

Contoh 2.5: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

det(A)= $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1.5\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5(-2+3) = -5$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}3&5&-2&6\\1&2&-1&1\\2&4&1&5\\3&7&5&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&1&3\\1&2&-1&1\\0&0&3&3\\0&1&8&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-1&1&3\\0&3&3\\1&8&0\end{vmatrix}=-1.\begin{vmatrix}-1&-2&3\\0&0&3\\1&8&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-3)\begin{vmatrix}-1&-2\\1&8\end{vmatrix}=3.(-8+2)=-18$$

✍**Latihan 2.6**

a. Gunakan cara lain untuk menghitung determinan dari matriks B dari contoh diatas
b. Tentukan determinan dari matriks berikut ini

$$P=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-6&3\\2&0&2\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}3&2&3&3\\2&4&5&2\\-1&3&2&4\\4&2&3&2\end{pmatrix}$$

2.5 Aplikasi Determinan

Salah satu kegunaan determinan adalah untuk menentukan invers suatu matriks

Teorema 2.7
Matriks *A* mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(A)\neq 0$

Definisi 2.3
Matriks yang mempunyai determinan $\neq 0$ disebut **matriks tak singular**, sedangkan matriks yang mempunyai determinan = 0 disebut **matriks singular**.

Definisi 2.4
Jika *A* adalah sebarang matriks *n*x*n* dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\dots&C_{1n}\\C_{21}&C_{22}&\dots&C_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n1}&C_{n2}&\dots&C_{nn}\end{pmatrix}$$

disebut **matriks kofaktor** dari *A*. Transpos dari matriks ini disebut **adjoin *A*** dinyatakan adj(A).

Teorema 2.8
Jika *A* adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)$$

✍ **Latihan 2.7**

Tentukan adj(*A*) dan A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\6&7&-1\\-3&1&4\end{pmatrix}$$

Teorema 2.9

Jika *A* dan *B* adalah matriks – matriks *nxn* yang taksingular, maka *AB* juga tak singular dan $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.6 Aturan Cramer

Definisi 2.5

Diketahui suatu sistem persamaan linear :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

dapat dituliskan dalam bentuk hasil kali matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{atau } Ax = b$$

Teorema 2.10

Jika $Ax = b$ merupakan suatu sistem *n* persamaan linear dengan *n* peubah sedemikian sehingga $A \neq 0$ maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det\left(A_n\right)}{\det(A)}$$

Dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke-*j* dari *A* dengan anggota-anggota pada matriks

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Contoh 2.6 :

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Penyelesaian

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

✍ **Latihan 2.8**

Selesaikan sistem persamaan berikut menggunakan aturan Cramer

$$\begin{aligned} 4x + 5y \quad &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 5z &= 1 \\ -x - y \quad &= 1 \\ 2x + 4y + 3z &= -1 \end{aligned}$$