Ruang Vektor

Definisi : Misal $V \neq \emptyset$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar di dalamnya.
V disebut ruang vektor jika untuk setiap u, v, w di V dan untuk setiap α, β bil. real berlaku :

1. $u+v \in V$ dan $u+v = v+u$.
2. $(u+v)+w = u+(v+w)$
3. $\exists\, 0 \in V$, $u+0 = 0+u = u$.
4. $\exists -u \in V$, $-u+u = u+(-u) = 0$
5. $\alpha u \in V$
6. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
7. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta) u$
8. $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
9. $1.u = u$.

setiap $v \in V$ disebut vektor.

Contoh.

1. $R^2 = \{(x,y) \mid x \in R, y \in R\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang berlaku di R^2.
2. $R^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_i \in R \;\; \forall i\}$
3. $P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid \text{polinom derajat} \leq n\}$.
4. $M_{2\times2} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \middle| \; a_i \in R \right\}$.

Sub Ruang (= Ruang Bagian).

Definisi : Misal V ruang vector, $W \subseteq V$ disebut ruang bagian atau sub ruang dari V jika W membentuk ruang vektor atas penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang berlaku di V.

Teorema : $W \subset V$ disebut ruang bagian jika dan hanya jika

1. $W \neq \emptyset$, $\exists\, 0 \in W$ $(0 \in V \rightarrow 0 \in W)$.
2. $u + v \in W$ $\forall\, u, v$ dr W.
3. $\alpha u \in W$ $\forall \alpha \in R$, $\forall u \in W$.

Contoh.

1. $W = \{(a,0,0) \mid a \in R\} \subseteq R^3$
   $\rightarrow$ sub ruang R^3.
2. $W = \{(1,0,b) \mid b \in R\} \subseteq R^3$
   $\rightarrow$ bukan sub ruang R^3, karena $(0,0,0) \notin W$.
3. $W = \{(a,b,c) \mid b = a + 2c$, a,b,c real$\} \subseteq R^3$
   $\rightarrow$ sub ruang R^3
4. $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 2a_1 - a_2 \ \forall a_i \in R\}$.
   $\rightarrow$ sub ruang P_2.
5. $W = \{$semua titik (x,y,z) di bidang $2x - y + z = 0\}$.
   $\rightarrow$ sub ruang R^3.
6. $W = \{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \mid a_i \in R\}\ a_1 = a_4\}$.
   $\rightarrow$ sub ruang $M_{2\times2}$.

7. $W = \{$ semua vektor di R^3 yang $\perp$ vektor $(-1,4,5)\}$
$\rightarrow$ sub ruang R^3

8. Misal V ruang vektor dan $a, b \in V$.
$W = \{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta$ real$\}$
$\rightarrow$ sub ruang V
Dalam hal ini W disebut ruang linier yg dibangun oleh a dan b.

Konsep Kombinasi Linier

- Misal $\{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\}$ vektor² di V.
suatu vektor $a \in V$ di sebut kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ jika $\exists\, \alpha_i \in R$, $i = 1..n$, $\ni$ $a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$.
- Himpunan semua kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ membentuk sub ruang dari V.

contoh.

1. $(-1,3,4)$ adalah kombinasi linier dari $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
sebab, $\exists\, \alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$ $\ni$
$$(-1,3,4) = -1\cdot(1,0,0) + 3\cdot(0,1,0) + 4\cdot(0,0,1).$$

2. Apakah $(-1,3,4)$ kombinasi linier dari $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$?
3. Apakah $2 - 3x^2$ kombinasi linier dari
$\{1, x + x^2, 1 - x^2\}$?

4. Tentukan k, agar $(-2,4,k)$ kombinasi linier dari
$\{(1,2,3), (-3,4,5)\}$.

Konsep Membangun / Merentang.

⊙ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ dikatakan membangun / merentang ruang vektor V hanya jika $\forall a \in V$, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$.

$\Rightarrow \forall a \in V, \ \exists \alpha_i \in R, \ i = 1 \ldots n \ \ni$

$$a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n .$$

Contoh.

1. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ membangun R^3, sebab.

   $\forall (x,y,z) \in R^3 \ \exists \alpha_1 = x, \ \alpha_2 = y, \ \alpha_3 = z \ \ni$

   $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

2. $\{1, x, x^2\}$ membangun P_2, sebab

   $\forall a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ di P_2 $\exists \alpha_1 = a_0, \ \alpha_2 = a_1, \ \alpha_3 = a_3 \ni$

   $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_3 x^2$.

3. $\{(1,0,1), (1,1,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ membangun R^3, sebab.

   $\forall (x,y,z) \in R^3$ ~~Ambil~~

   SPL : $(x,y,z) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(1,1,0) + \alpha_4(0,1,1)$

   $\rightarrow x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

   $y = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ $\rightarrow$ punya solusi

   $z = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$ (SPL sol. banyak (?!))

Konsep Bebas linier.

⊙. $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ dikatakan bebas linier jika persamaan

$0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ hanya punya solusi trivial.

$(\alpha_i = 0 \quad \forall i)$.

Contoh:

1. $\{1+2x,\ x-3x^2\}$ dua vektor di P_2 yang bebas linier, karena:

$\alpha_1(1+2x) + \alpha_2(x-3x^2) = 0 + 0x + 0x^2$

hanya dipenuhi jika $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$.

2. $\{(1,3,1), (-1,2,0), (-3,0,0)\}$ 3 vektor di R^3 yang bebas linier karena:

$\alpha_1(1,3,1) + \alpha_2(-1,2,0) + \alpha_3(-3,0,0) = (0,0,0)$

hanya dipenuhi jika $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

⊙ Dalam hal $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ tidak bebas linier, maka SPL

$0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$

punya solusi banyak. $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ dikatakan bergantung linier.

Contoh:

3. $\{(1,-1,2), (3,0,1), (4,-1,3)\}$ tiga vektor di R^3.

tinjau SPL: $\alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(3,0,1) + \alpha_3(4,-1,3) = (0,0,0)$

$$\rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 \qquad - \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0-6-4-0+1+9=0$$

SPL solusi banyak.

Jadi $\{(1,-1,2),(3,0,1),(4,-1,3)\}$ tidak bebas linier.

4. $\{1+2x-x^2,\ 3+x,\ -4-x+x^2,\ x-x^2\}$ empat vektor di P_2.

tinjau SPL:

$$\alpha_1(1+2x-x^2)+\alpha_2(3+x)+\alpha_3(-4-x+x^2)+\alpha_4(x-x^2)$$
$$=0+0x+0x^2$$

$$\rightarrow \begin{aligned} \alpha_1+3\alpha_2-4\alpha_3 \quad &= 0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4 &= 0 \\ -\alpha_1 \quad +\alpha_3-\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2-2b_1 \\ b_3+b_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} 5b_3+3b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{SPL solusi banyak.}$$

Jadi $\{1+2x-x^2,\ 3+x,\ -4-x+x^2,\ x-x^2\}$ tidak bebas linier

c) Dalam hal $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ bergantung linier maka selalu ada u_i (untuk suatu i) yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier vektor² selain u_i (vektor² lainnya).

Contoh.

1. $\{(1,-1,1), (0,-2,3), (3,1,0), (1,0,1), (1,1,0)\}$ tidak bebas linier di R^3 (Mengapa ?!).

$$\rightarrow \alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,-2,3) + \alpha_3(3,1,0) + \alpha_4(1,0,1) + \alpha_5(1,1,0) = (0,0,0)$$

SPL:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2+b_1 \\ b_3-b_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2b_3+3b_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \alpha_1 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}r + 5s \\ \rightarrow -2\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{2}r - 2s \\ \rightarrow 6\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 = 0 \end{matrix}$$

$\rightarrow \alpha_3 = -\frac{1}{2}\alpha_4 - \frac{2}{3}\alpha_5$.

$\alpha_4 = r$

$\alpha_5 = s$ (r, s sebarang real).

Jika r dan s diambil bil. 2 dan -3, maka diperoleh.

$$\overset{-14}{\cancel{17}}(1,\overset{-1}{\cancel{-11}},1) + 5(0,-2,3) + (3,1,0) + 2(1,0,1) - 3(1,1,0) = (0,0,0)$$

Karena $\alpha_1 = \overset{-14}{\cancel{17}} \neq 0$, maka:

$$(1,-11,1) = \frac{3}{\underset{-14}{\cancel{14}}}(1,1,0) - \frac{2}{\underset{-14}{\cancel{17}}}(1,0,1) - \frac{1}{\underset{-14}{\cancel{17}}}(3,1,0) - \frac{5}{\underset{-14}{\cancel{17}}}(0,\cancel{-2},3).$$

atau $(1,\cancel{-11},1)$ kombinasi linier dari $\{(0,-2,3), (3,1,0), (1,0,1), \overset{(1,1,0)}{\cancel{(1,1,0)}}\}$

2. $\{1+x,\ x-x^2,\ 1+2x-x^2,\ 2-3x^2\}$ tidak bebas linier di P_2.

$$\rightarrow \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x-x^2) + \alpha_3(1+2x-x^2) + \alpha_4(2-3x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

SPL:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2-b_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ b_3+b_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow -5\alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_4 = 0$

$\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$, $\quad \alpha_3 = t \in R$

$\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_3$

Jika diambil $\alpha_3 = t = 1$, maka diperoleh.

$\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 0$.

Sehingga :

$-(1+x) - (x - x^2) + (1 + 2x - x^2) = 0 + 0x + 0x^2$

atau $(1+x) = (1+2x-x^2) - (x-x^2)$.

$\therefore$ $(1+x)$ kombinasi linier dari $(1+2x-x^2, x-x^2)$.

Konsep Basis ruang vektor

- $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ disebut basis ruang vektor V jika $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ bebas linier di V dan membangun V.
- Akibat : Jika $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ basis V maka setiap vektor $a \in V$ dapat dinyatakan sbg kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ secara tunggal.
- Jika $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ basis dari V maka dikatakan dimensi V adalah n.

  Dimensi ruang vektor V adalah banyaknya vektor dalam basis V.
- Sifat : Basis suatu ruang vektor tidak tunggal tetapi dimensi ruang vektor adalah tetap (tunggal).

Contoh :

1. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ adalah basis R^3.

   karena : $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bebas linier di R^3 dan membangun R^3.

   Jadi dimensi $R^3 = \dim(R^3) = 3$.

2. $\{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ ini juga basis R^3

   (coba di cek !!)

3. $\{1, x, x^2\}$ basis P_2.
   Jadi $\dim(P_2) = 3$.

4. $\{1+x+x^2, 1+x, 1\}$ juga basis P_2.
5. $\{1+x+x^2, 1+x^2, 2+x+2x^2\}$ bukan basis P_2.
   (coba dicek ya !!)

6. $\{(1,1,1), (0,0,0), (1,-1,3)\}$ bukan basis R^3.

Teorema : Misal V ruang vektor berdimensi n. Maka PBE.
1. Banyak vektor dalam basis V ada n
2. Setiap n vektor yang membangun V pasti bebas linier
3. setiap n vektor yang bebas linier di V pasti membangun V

Akibat : Jika V berdimensi n, maka.

$\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$, jika $r < n$ maka tidak membangun V
jika $r > n$ maka tidak bebas linier.

Contoh.

1. $\{(1,1,1), (-2,1,0)\} \rightarrow$ tidak membangun R^3
2. $\{(1,1,1), (-2,1,0), (-1,0,1), (1,-2,3)\} \rightarrow$ tidak bebas linier di R^3.

Teorema : Misal V ruang vektor berdimensi n. Jika $W \subseteq V$ adalah sub ruang dari V, maka $\dim(W) \leq \dim(V)$.

contoh.

1. $W = \{(x,y,z) \mid 2x - y + z = 0\} \subset R^3$.

   maka W adalah sub ruang R^3 (coba dicek !!).

   Cara menentukan basis W :

   $W = \{(x,y,z) \mid 2x - y + z = 0\}$

   $= \{(x,y,z) \mid y = 2x + z\}$

   $= \{(x, 2x+z, z) = (x, 2x, 0) + (0, z, z)\}$

   $= \{(x, 2x+z, z) = x(1,2,0) + z(0,1,1), \ x.z \text{ real}\}$

   $\rightarrow$ W dibangun oleh $\{(1,2,0), (0,1,1)\}$.

   Kedua vektor tsb bebas linier di R^3 (cek !!!)

   Jadi $\{(1,2,0), (0,1,1)\}$ merupakan basis W.

   $\dim(W) = 2$.

2. W dibangun oleh $\{(1,3,2), (-1,1,0) (2,1,-1), (0,1,-2), (0,3,-1)\}$

   maka W adalah sub ruang R^3. Tetapi ke-5 vektor yang membangun W tsb tidak bebas linier (mengapa ?!)

   Cara memilih vektor basis untuk W :

   $$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 2b_3 - b_2 \end{array}$$

   $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

   Calon 1 utama

   maka $\{(1,3,2), (-1,1,0), (2,1,-1)\}$ bebas linier dan masih membangun W

   Jadi basis $W = \{(1,3,2), (-1,1,0), (2,1,-1)\}$

   $\dim(W) = 3$.

soal² ruang vektor.

1. Diketahui $\{(1,2,3), (1,1,1), (0,1,-4)\}$ tiga vektor di R^3.

   a. Jika W adalah himpunan kombinasi linier dari ketiga vektor tsb. apakah W membentuk sub ruang dari R^3?

   b. Jika benar, tent. basis dan dimensi W.

2. Apakah vektor $1+2x-3x^2$ kombinasi linier dari $1-x$ dan $x+2x^2$?

3. Diketahui $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ membangun R^3. apakah $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (1,0,1)\}$ masih bisa membangun R^3?

4. Diketahui SPL homogen:
$$\begin{aligned} x-2y+3z&=0\\ 3x+y-z&=0\\ 4x-y+2z&=0 \end{aligned}$$

   Jika $W=\{(x,y,z) \mid x,y,z$ solusi SPL tsb$\}$.

   a. apakah W membentuk sub ruang dari R^3?

   b. Tent. suatu basis untuk W, berapa dim(W)?

5. Selidiki apakah $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ bisa menjadi basis R^3! Jika benar, nyatakan $(1,2,3)$ sebagai kombinasi linier dari $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

Transformasi Linear

Definisi : Misal U dan V ruang vektor. Suatu fungsi $T : U \to V$ disebut transformasi linear hanya jika :

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, $\forall u_1, u_2$ di U
2. $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$, $\forall u_1$ di U , $\alpha \in R$.

contoh :

1. $T : R^3 \to R^2$

$(x, y, z) \mapsto (x+y, y+z)$

maka : •) untuk $(1,2,3)$ di R^3,

$T(1,2,3) = (1+2, 2+3) = (3,5) \in R^2$.

•) ambil sebarang 2 vektor di R^3, misal (a_1, a_2, a_3) dan (b_1, b_2, b_3) .

$T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2, a_2 + a_3)$

$T(b_1, b_2, b_3) = (b_1 + b_2, b_2 + b_3)$

$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$$\begin{aligned}T(a_1, a_2, a_3) + T(b_1, b_2, b_3) &= (a_1 + a_2, a_2 + a_3) + (b_1 + b_2, b_2 + b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_2 + a_3 + b_2 + b_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T[(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] &= T(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2, a_2 + b_2 + a_3 + b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_2 + a_3 + b_2 + b_3) \\ &= T(a_1, a_2, a_3) + T(b_1, b_2, b_3)\end{aligned}$$

•) $\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$

$$\begin{aligned}T(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) &= (\alpha a_1 + \alpha a_2, \alpha a_2 + \alpha a_3) \\ &= \alpha(a_1 + a_2, a_2 + a_3) \\ &= \alpha T(a_1, a_2, a_3)\end{aligned}$$

$\therefore$ T bersifat linear .