Sistem Persamaan Linier (SPL)

Bentuk umum:

- Persamaan linier:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b_1$$

- Sistem Persamaan Linier

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Dalam bentuk matriks dinyatakan sbb:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}}_{A_{m\times n}} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

$$X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$$

Jika $B = 0$ disebut SPL Homogen
$B \neq 0$ disebut SPL tak homogen

Masalah: Menentukan solusi $\equiv \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \text{SPL dipenuhi}\}$

Metoda untuk menentukan solusi:

1. Eliminasi Gauss (Gauss-Jordan) – OBE
2. Dengan Menggunakan determinan (Aturan Crammer)
3. Dengan Menggunakan Invers ($x = A^{-1}B$)

Eliminasi Gauss

Operasinya :

1. Dua persamaan tukar tempat
2. Mengalikan satu persamaan dengan suatu bilangan real yang tidak nol.
3. Menambahkan kelipatan suatu persamaan kepada persamaan yg lain.

Dalam bentuk Matriks :

1. Tuliskan matriks lengkapnya : $[A \mid B]_{m \times (n+1)}$
2. Lakukan OBE sampai diperoleh matriks Esselon atau Esselon tereduksi
3. Selesaikan untuk setiap nilai x dg melakukan substitusi mundur.

Contoh :

1. $x_1 + 2x_2 - x_3 = -4$
   $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$
   $x_1 + x_2 - x_3 = -3$

P.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & 17 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \odot\odot \\ \rightarrow \odot \\ \rightarrow -x_2 = 1 \rightarrow \boxed{x_2 = -1} \end{array}$$

$\odot$ $-2x_2 + 5x_3 = 17 \rightarrow -2(-1) + 5x_3 = 17$

$5x_3 = 15 \rightarrow \boxed{x_3 = 3}$

$\odot\odot$ $x_1 + 2x_2 - x_3 = -4$

$x_1 + 2(-1) - 3 = -4 \rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

$\therefore$ solusinya : $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. atau $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. $x_1 + x_2 - x_3 = 4$
   $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7$
   $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$

P.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ b_3 - b_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Dari baris 3 diperoleh $0 = -8 \neq 0 \rightarrow$ proporsisi F

Jadi SPL tidak punya solusi

3. $x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$

$2x_1 - x_3 = 1$

I. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right] b_3 - b_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Dengan substitusi mundur diperoleh

$$2x_2 - 3x_3 = -3 \rightarrow x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \rightarrow x_1 = 2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_3\right) - x_3$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 .$$

Dengan mengambil harga $x_3 = t$, sebarang bil. real maka diperoleh

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t$$

$$x_3 = t .$$

karena nilai t dapat dipilih sebarang, maka dikatakan SPL punya solusi banyak (tak hingga banyaknya).

Jadi ada tiga kemungkinan solusi SPL :

1. solusi tunggal
2. solusi banyak
3. tidak punya solusi.

4. Tentukan nilai² a agar SPL
$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 + (a^2-10)x_3 = a.$$
punya sol. tunggal, sol. banyak dan tidak punya solusi.

J.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & (a^2-10) & a \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ b_2-b_1 \\ b_3-b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-10+1 & a-3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & (a-3) \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{array}\right]$$

∘) agar SPL punya solusi tunggal, maka $a^2-9 \neq 0$
$(a-3)(a+3) \neq 0$
$a \neq 3$ dan $a \neq -3$

∘) agar SPL punya solusi banyak, maka $a^2-9=0 \wedge a-3 \neq 0$
$\Rightarrow a = 3$

∘) agar SPL tidak punya solusi, maka $a^2-9=0 \wedge a-3 \neq 0$
$\Rightarrow a = -3$.

5. $$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + (a^2+1)x_3 = a+1$$

J.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & a^2+1 & a+1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ b_2-2b_1 \\ b_3-2b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right]$$

⊙ agar SPL punya solusi tunggal, maka $a^2-1 \neq 0$
$a \neq 1 \wedge a \neq -1$

⊙ agar SPL punya solusi banyak, maka $a^2-1=0 \wedge a-1=0$
$a = 1$

⊙ agar SPL tidak punya solusi, maka $a^2-1=0 \wedge a-1 \neq 0$
$a = -1$

SPL $A\ X = B$

Jika $B = 0$ maka SPL disebut Homogen.

untuk SPL Homogen selalu punya solusi, setidaknya $X = 0$ pasti merupakan solusi SPL Homogen.

Dalam hal $x = 0$, adalah satu² nya solusi, dikatakan solusi tunggal atau solusi trivial. Sebaliknya untuk solusi yang bukan $x = 0$, dikatakan solusi non trivial.

6. Tentukan semua nilai λ sehingga SPL Homogen berikut punya solusi tak trivial.

$$(\lambda-3)x + y = 0$$
$$x + (\lambda-3)y = 0$$

P.

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_1 \leftrightarrow b_2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda-3 \\ \lambda-3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2-(\lambda-3)b_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda-3 \\ 0 & 1-(\lambda-3)^2 \end{bmatrix}$$

Jadi agar punya solusi non trivial

$$1-(\lambda-3)^2 = 0$$
$$1-(\lambda^2-6\lambda+9) = 0$$
$$\lambda^2-6\lambda+8 = 0$$
$$(\lambda-4)(\lambda-2) = 0$$
$$\lambda = 4 \lor \lambda = 2$$

Penyelesaian SPL dengan menggunakan Determinan
→ Metoda Crammer.

Perhatikan SPL $A_{n\times n}\, X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$

Jika $|A| \neq 0$, maka

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

A_i diperoleh dari A dimana kolom ke-i diganti B.

Contoh.

1. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+6\cancel{-2}\cancel{+2}-3+4 = 5 \neq 0$$

Dari perhitungan dengan OBE diperoleh solusi

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = -1$ $\quad x_3 = 3$.

Dengan menggunakan metoda Crammer diperoleh,

$$x_1 = \frac{1}{|A|}|A_1| = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 9 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(8\cancel{-18}-9-6+12\cancel{+18}) = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}|A_2| = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(\cancel{-9}-12+6\cancel{+9}+9-8) = -1$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}|A_3| = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(-6+18\cancel{-8}\cancel{+8}-9+12) = 3$$

Penyelesaian SPL dengan menggunakan Invers

Perhatikan SPL $\quad A_{n\times n}\, X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$

Jika $|A| \neq 0$ maka A^{-1} ada, sehingga

$$X = A^{-1} B$$

untuk SPL
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad |A| = 5 \neq 0,$$
Jadi A^{-1} ada.

• menentukan A^{-1}.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$