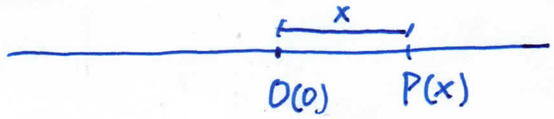
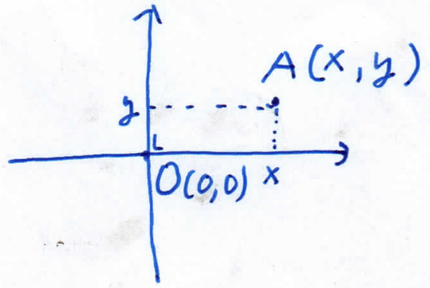
Analitik Ruang

Susunan Koordinat Ruang

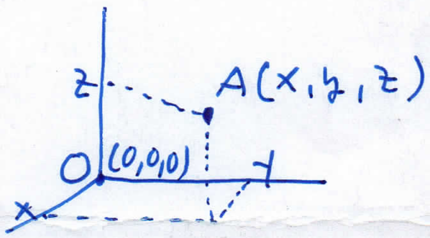
·) Ruang dimensi -1 (R^1)



·) Ruang dimensi - 2 (R^2)



·) Ruang dimensi - 3 (R^3)

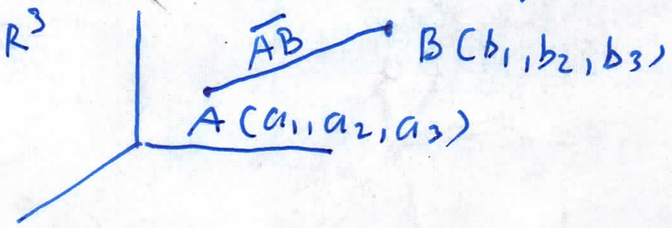


Hal-hal yang perlu diperhatikan :

- Entitas paling kecil dalam ruang adalah titik.
- Setiap titik punya alamat, yg disebut koordinat.
- koordinat titik di R^1 dinyatakan dengan 1-tupel (x).
  R^2 2-tupel (x, y).
  R^3 3-tupel (x, y, z)

Ruas Garis.

Jika terdapat 2 titik di Ruang, misal A dan B, maka akan diperoleh satu ruas garis $\overline{AB}$



panjang ruas garis $AB \equiv |\overline{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$
(sesuai rumus phytagoras).

Vektor di Ruang

Definisi : vektor $\equiv$ ruas garis berarah, notasi : $\overrightarrow{AB}$

vektor mempunyai dimensi panjang dan arah.

arah vektor = arah ruas garis.

$AB = BA$ tetapi $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$. (arah berlawanan).

panjang vektor = panjang ruas garis.

selanjutnya vektor akan dinotasikan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OA}$ atau $\overrightarrow{OB}$.
untuk vektor $\overrightarrow{OA}$ akan dinotasikan $\vec{a}$ dan $\overrightarrow{OB}$ dinotasikan $\vec{b}$.
jika titik $A(a_1, a_2, a_3)$ maka vektor

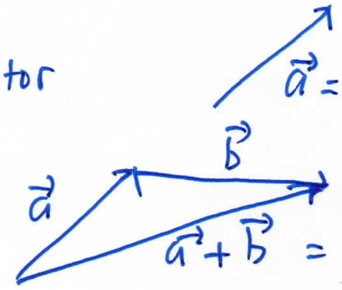
$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1-0,\ a_2-0,\ a_3-0) = (a_1, a_2, a_3).$$

dan $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

panjang vektor $\vec{a}$ dinotasikan : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Aljabar vektor

1. Penjumlahan vektor



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\qquad$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a}+\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$.

2. Perkalian vektor dengan skalar.

3. kesamaan dua vektor.

$\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

$\vec{a} = -\vec{b} \longrightarrow \vec{a}$ berlawanan arah dengan $\vec{b}$,
sedang panjangnya sama

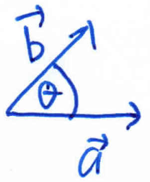
4. Perkalian Titik (Dot Product = perkalian skalar)

Misal $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\in \mathbb{R})$.

•) $|\vec{a}| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2}$

•) misal θ sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$



, maka $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

•) vektor satuan $\equiv$ vektor yang panjangnya 1 satuan .

Vektor satuan arah sb-x $\equiv \vec{i} = (1,0,0)$

vektor satuan arah sb-y $\equiv \vec{j} = (0,1,0)$

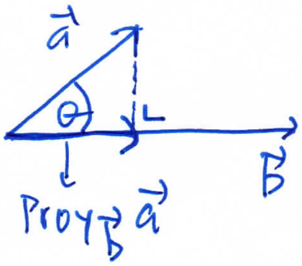
vektor satuan arah sb-z $\equiv \vec{k} = (0,0,1)$

untuk setiap vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dapat dinyatakan sebagai $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$.

vektor satuan arah vektor $\vec{a} \equiv \vec{u}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

•) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

•) Proyeksi orthogonal

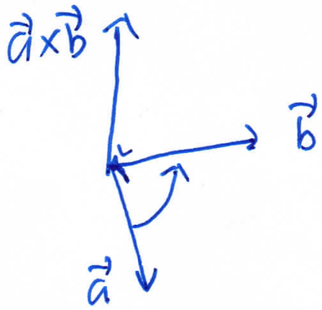


$$
\begin{aligned}
|Proy_{\vec{b}}\vec{a}| &= |\vec{a}| \cos\theta \\
&= \cancel{|\vec{a}|} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\cancel{|\vec{a}|}|\vec{b}|} \\
&= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} .
\end{aligned}
$$

5. Perkalian Silang (Cross Product = perkalian vektor)

Misal $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$



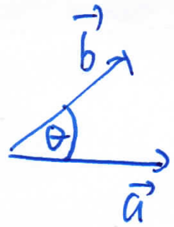
→ menurut kaidah tangan kanan Ampere.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ dan $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

Sifat :

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
3. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

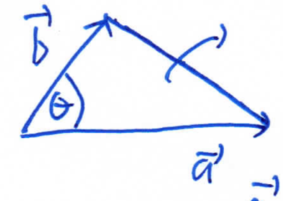
Jika



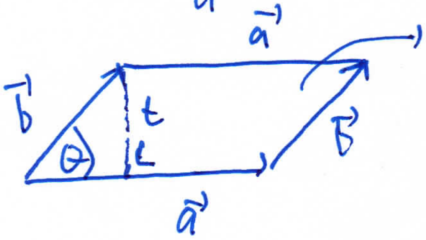
$$\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Jadi $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

arti geometri $\vec{a} \times \vec{b}$



segitiga yang diperoleh



Jajar genjang yang diperoleh.

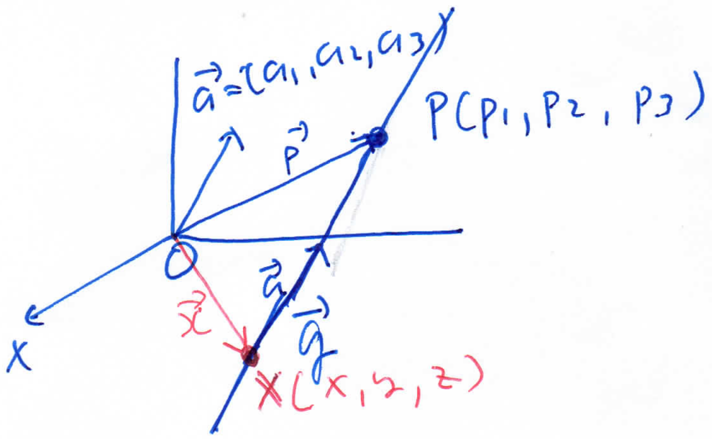
$t = |\vec{b}| \sin\theta$

$$L_{\text{jajar genjang}} = \text{alas} \times \text{tinggi} = \cancel{|\vec{a}|} \times \cancel{|\vec{b}|} \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\cancel{|\vec{a}|}\cancel{|\vec{b}|}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Persamaan Garis di ruang.

Garis ≡ perpanjangan ruas garis (≡ kumpulan titik²).

- Misal garis $\vec{g}$ melalui titik $P(p_1, p_2, p_3)$ dan searah vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.



Masalah : $X(x, y, z) = ?$

Dari gambar di atas, dapat diturunkan :

$$\vec{x} + \alpha\vec{a} = \vec{p}$$

$$\vec{x} = \vec{p} - \alpha\vec{a} = \vec{p} + \beta\vec{a} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

persamaan (1) disebut sebagai persamaan ~~gar~~ vektor dari garis $\vec{g}$.

Dalam hal ini, vektor $\vec{p}$ diperoleh dari informasi satu titik yg dilalui $\vec{g}$, vektor $\vec{a}$ disebut vektor arah garis $\vec{g}$ sedangkan α atau β disebut parameter. Jadi persamaan vektor garis $\vec{g}$:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + \beta(a_1, a_2, a_3).$$

atau (x, y, z)

Selain persamaan vektor, garis $\vec{g}$ biasa juga dinyatakan dalam bentuk persamaan parameter ataupun persamaan kartesian.

Dari persamaan vektor

$$\vec{x} = \vec{p} + \beta \vec{a}$$

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \beta (a_1, a_2, a_3)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= p_1 + \beta a_1 \\ y &= p_2 + \beta a_2 \\ z &= p_3 + \beta a_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{persamaan parameter. (2)}$$

selanjutnya :

$$\text{dari } x = p_1 + \beta a_1 \rightarrow \beta = \frac{x - p_1}{a_1}$$

$$y = p_2 + \beta a_2 \rightarrow \beta = \frac{y - p_2}{a_2}$$

$$z = p_3 + \beta a_3 \rightarrow \beta = \frac{z - p_3}{a_3}$$

diperoleh

$$\frac{x - p_1}{a_1} = \frac{y - p_2}{a_2} = \frac{z - p_3}{a_3} \rightarrow \text{pers. kartesian. (3)}$$

syarat : $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$

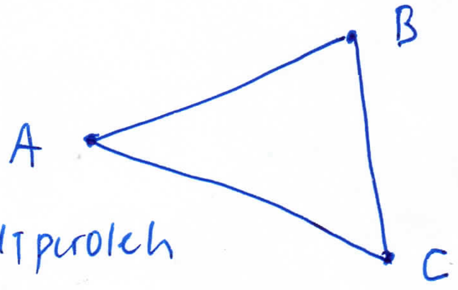
dalam hal ada yang nol, (misal $a_2 = 0$)

maka persamaan kartesian :

$$\begin{cases} \dfrac{x - p_1}{a_1} = \dfrac{z - p_3}{a_3} \\ y = p_2 \end{cases}$$

Persamaan Bidang di Ruang. (Kumpulan titik juga!)

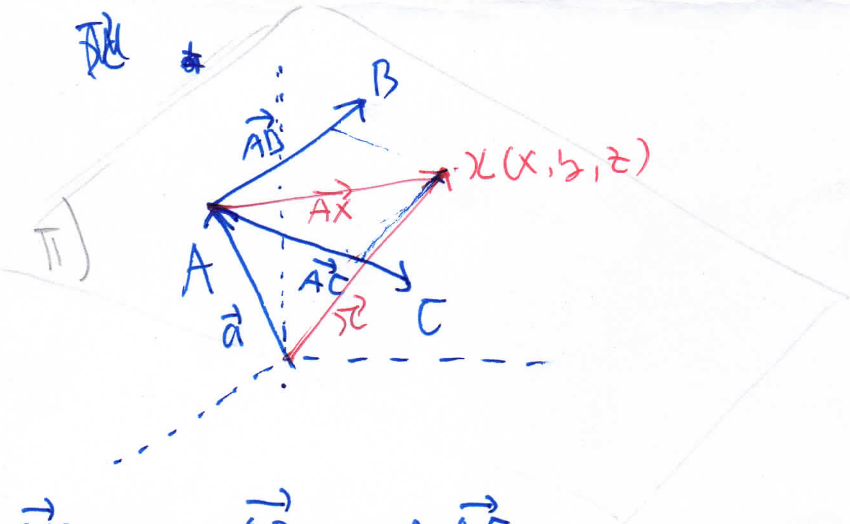
Misal diketahui titik $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ dan $C(c_1, c_2, c_3)$.



maka diperoleh bidang datar perluasan bidang ABC yang memuat ketiga titik A, B, C.

Dari titik A, B, C setidaknya diperoleh dua vektor, katakanlah $\vec{AC}$ dan $\vec{AB}$.

Persamaan bidang datar yang memuat ke-tiga titik A, B, C tsb dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan vektor sbb.



$$\vec{AX} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$(x-a_1, y-a_2, z-a_3) = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$(x, y, z) - (a_1, a_2, a_3) = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Persamaan (4) disebut sebagai persamaan vektor dari bidang π yang memuat titik A dan vektor $\vec{AB}$ serta $\vec{AC}$.

Sama seperti pada persamaan garis, persamaan bidang juga bisa dinyatakan dengan persamaan kartesian.
dalam hal ini diperlukan informasi vektor normal, yaitu vektor yang tegak lurus bidang π.
Vektor normal dinotasikan dengan $\vec{n}_\pi$.

Misal bidang π memuat titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dengan vektor normal $\vec{n}_\pi = (n_1, n_2, n_3)$, maka persamaan bidang π :

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3) = 0 .$$

→ persamaan kartesian (5).

soal :

1. Tentukan persamaan garis $\vec{g}$ yang melalui titik $P(-1,3,-2)$ dan searah vektor $\vec{a} = (0,1,3)$.

$\boxed{P}$. garis $\vec{g}$ melalui titik $P(-1,3,-2)$, vektor arah : $(0,1,3)$.

•) Persamaan vektor garis $\vec{g}$:

$$\vec{x} = (-1,3,-2) + \beta(0,1,3).$$

•) Persamaan parameter garis $\vec{g}$:

$$x = -1$$
$$y = 3 + \beta$$
$$z = -2 + 3\beta$$

•) Persamaan kartesian garis $\vec{g}$:

$$x = -1$$
$$\frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{3}$$

2. Tentukan persamaan garis $\vec{g}$ yang melalui titik $A(1,3,-4)$ dan $B(-2,0,5)$.

$\boxed{P}$ garis $\vec{g}$ melalui titik $A(1,3,-4)$,

vektor arah : $\vec{AB} = (-2,0,5) - (1,3,-4)$
$= (-3,-3,9)$.

Jadi persamaan vektor garis $\vec{g}$:

$$\vec{x} = (1,3,-4) + \alpha(-3,-3,9).$$

3. Jika $\vec{g}$ adalah $\vec{x} = (2,1,0) + \beta(1,0,-1)$,

a. apakah titik $A(1,1,1)$ dilalui $\vec{g}$?

b. bagaimana dengan titik $B(6,2,1)$?

4. Tentukan persamaan bidang W yang memuat titik $A(1,1,1)$, $B(-1,0,2)$ dan $C(2,1,3)$.

$\boxed{P}$. Dari tiga titik tsb diperoleh vektor²

$$\vec{AB} = (-1,0,2) - (1,1,1) = (-2,-1,1)$$
$$\vec{AC} = (2,1,3) - (1,1,1) = (1,0,2).$$

Jadi persamaan vektor bidang W :

$$\vec{x} = (1,1,1) + \beta(-2,-1,1) + \alpha(1,0,2).$$

Persamaan kartesian diperoleh dg terlebih dahulu mencari vektor $\vec{n}$.

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i(-2) - j(-5) + k(1) = (-2,5,1).$$

Bidang W memuat titik $A(1,1,1)$.

$$\vec{n} \cdot x - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$$
$$-2x + 5y + z - (-2+5+1) = 0$$
$$-2x + 5y + z = 4.$$

5. Tentukan persamaan garis $\vec{g}$ yang melalui titik $P(2,3,4)$ dan $\perp$ bidang W : $\vec{x} = (1,1,1) + \beta(2,1,1) + \alpha(1,2,1)$.