Método Iterativo de Newton-Raphson

Jonathan Guzmán Araya, Mariano Muñoz Masís, Luis Daniel Prieto Sibaja, Josué Araya García
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Área Académica Ingeniería en Computadores
jonathana1196@gmail.com marianomm1301@gmail.com prieto.luisdaniel@gmail.com jdag98228@gmail.com

***Resumen*—In the following document, an iterative method to solve non-linear equations will be explained in detail and solved mathematically. Initially, the document shall introduce Newton-Raphson's method to solve non-linear equations using several iterations. This method's mathematical formulation will be explained in detail in the following section. Some examples will be provided to ease the understanding of this method, including the initial values used for its solution. A pseudocode of the iterative method will be provided to ensure a good future computational implementation. Finally, a famous engineering problem which requires this method's execution shall be discussed and solved.**

***Index Terms*—Newton-Raphson, iteration, equation, matrix, error tolerance.**

I. INTRODUCCIÓN

ESTE informe se encarga de explicar el método de Newton-Raphson, el cual es un método iterativo cuyo propósito es resolver ecuaciones no lineales mediante una aproximación a su solución, con cierto margen de error.

El problema que se desea resolver es la obtención de la solución de ecuaciones no lineales, las cuales presentan la siguiente forma:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

En el planteamiento anterior, $f(x)$ es cualquier función representada por una ecuación no lineal. Para el método de Newton-Raphson, la solución se aproxima mediante una sucesión de elementos aproximados mediante iteraciones generadas por la siguiente fórmula:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \tag{2}$$

En la fórmula anterior, el término del denominador se refiere a la primera derivada de la función con la que se desea evaluar el elemento de la sucesión. En caso de no poder calcularse la derivada de forma automática con una implementación computacional, la misma se puede aproximar mediante la definición de la derivada, la cual es la siguiente:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

Sin embargo, si $x \to a$ se aproxima a cero, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{4}$$

El método de Newton-Raphson es un método iterativo el cual genera un error muy pequeño, por eso es de los métodos iterativos para aproximar ecuaciones no lineales más populares. En muy pocas iteraciones puede llegar a la solución del problema, gracias a la exactitud del mismo, una de las ventajas de utilizar las derivadas en dicha ecuación. Para calcular el error del método iterativo, se puede aproximar como el valor absoluto de la función evaluando la iteración respectiva:

$$Error = |f(x_k)| = |\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}| \tag{5}$$

La condición de parada de este método es la misma que los demás métodos iterativos, la cual es simplemente que el error absoluto de la iteración sea menor que la tolerancia del método:

$$Error < Tol \tag{6}$$

El método de Newton-Raphson se usa mayoritariamente para ecuaciones no lineales de una variable. Pero existe una variante del método que puede resolver sistemas de ecuaciones no lineales. El objetivo del presente documento es presentar la variante del método de Newton-Raphson que puede resolver estos sistemas de ecuaciones, como se verá en el siguiente apartado.

II. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En este apartado se expondrá la formulación matemática del método de Newton-Raphson, dando un resumen de los pasos para obtener la solución del método. Primero se va a realizar el resumen para ecuaciones no lineales de una variable, y luego para sistemas de ecuaciones no lineales en varias variables.

II-A. *Una Incógnita*

Realizando un resumen de lo que fue expuesto en la introducción, se puede simplificar el método de Newton-Raphson a los siguientes pasos:

- Se realiza la primera iteración con el valor inicial x^0 cuyo valor numérico es dado previamente.
- Se realiza la primera iteración con le ecuación del método de Newton-Raphson.
- Se calcula el error de la iteración utilizando el valor absoluto de la función evaluando el valor de la iteración.
- Si este error es menor a la tolerancia, se detiene el algoritmo, si no lo es, se regresa al paso 2.

Los pasos anteriores generalizan la forma de calcular el método de Newton-Raphson para cualquier ecuación no lineal de la forma f(x) = 0. Sin embargo, para realizar el método de Newton-Raphson sobre un sistema de ecuaciones, se requieren pasos adicionales, los cuales serán explicados a continuación.

II-B. N Cantidad de Incógnitas

El método de Newton-Raphson descrito en la sección anterior puede expandirse para un número cualquiera de variables, dado de esta forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} . \tag{7}$$

Este sistema de ecuaciones lineales se puede generalizar como $f_i(x) = 0$ donde cada $f(x)$ es una función diferenciable. Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones no lineales, se le realizan algunas modificaciones al método de Newton-Raphson. Para calcular la aproximación de las soluciones mediante este método, se debe modificar el método iterativo de Newton con la siguiente recursión, sustituyendo la recursión original:

$$x_k = x_{k-1} - [J_f(x_{k-1})]^{-1} \cdot f(x_{k-1}) \tag{8}$$

Nótese que para resolver este método iterativo, se debe primero calcular la matriz Jacobiana de la función a calcular mediante el método. La matriz Jacobiana se define por un conjunto de funciones $f_i(x)$ cuyas primeras derivadas parciales existen en el vector c, el cual está definido por $c = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$ en el conjunto de los reales. El jacobiano está definido entonces como:

$$[J_f(x_k)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{9}$$

En el proceso iterativo, el término que está restando se puede calcular como $y = [J_f(x_k)]^{-1} \cdot f(x_k)$, esto es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$J_f(x_k) \cdot y = f(x) \tag{10}$$

Una vez calculado este sistema, simplemente se pueden realizar las iteraciones necesarias para encontrar la solución de la siguiente forma:

$$x_k = x_{k-1} - y \tag{11}$$

Para estos métodos iterativos, las aproximaciones del error son relativas, no absolutas, por lo que se pueden calcular simplemente mediante la fórmula:

$$Error = \|f(x_k)\| \tag{12}$$

Al ser un método iterativo, la condición de parada es la misma, que el error calculado anteriormente sea menor que la tolerancia dada al principio.

III. Implementación

La implementación computacional del método de Newton-Rapshon para múltiples variables se da bajo ecuación dada en 13

$$x^{(v+1)} = x^{(v)} - [J^{(v)}]^{-1} \cdot f(x^{(v)}) \tag{13}$$

La ecuación anterior se puede resolver mediante una serie de pasos los cuales se describen a continuación:

- Paso 0: Se inicializa el contador de iteraciones (v = 0) y se provee un valor inicial para el vector x, por ejemplo x = $x^{(v)}$ = $x^{(0)}$
- Paso 1: Se realiza la computación matemática del Jacobiano mediante la ecuación 9.
- Paso 2: Calcular $x^{(v+1)}$ mediante la ecuación 13
- Paso 3: Revisar sí se cumple con la ecuación 12
  - Si se ha cumplido con lo establecido en la ecuación 12 entonces se dice que el algoritmo converge y la solución esta dada por $x^{(v+1)}$
  - Sino, continúa el paso 4.
- Paso 4: Actualizar el valor del contador de iteraciones $v \leftarrow v + 1$ y continuar con el paso 1.

El pseudocódigo se puede apreciar en la figura 1

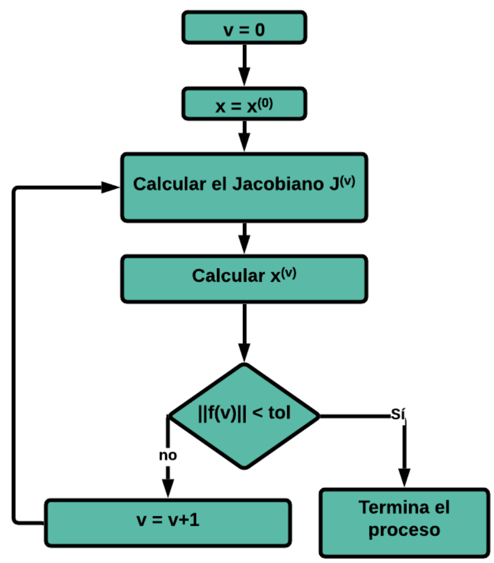

Figura 1. Pseudocódigo del Método de Newton-Raphson para varias variables

```
Newton Rapshon(x, f, x0, tol, iterMax)
itera = 1
error = 1
xk = x0
valore = vector de zeros de las mismas dimensiones de x
replace = vector auxiliar
MIENTRAS itera sea menor que iteraMax
  xAprox=xk
  DESDE i HASTA el tamanio de x
    DESDE k HASTA el tamanio de x
      replace += [x[k], xAprox[k]]
    CONVERTIR A SIMBOLICO LA FUNCION f[i]
      valores[i] = reemplazar con replace los valores de
```

f[i]

SE LLENA EL VECTOR DEL VALOR NUMERICO DE f(x)

SE REINICIA replace = []

SE CALCULA EL JACOBIANO

Jacobiano (func, var, valores)

DESIGNADO jacobo

jacobiano = matriz de zeros de tamanio func x var

replace = []

DESDE n HASTA el tamanio de func

DESDE M HASTA el tamanio de var

replace += [var[m], val[m]]

jacobiano[n][m] = DERIVADA DE func[n] CON RESPECTO A var[m] REEMPLAZANDO CON LOS VALORES DE replace

xk = xAprox - MENOS LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES de jacobo y valores

error = NORMA DE valores

SI error ES MENOR QUE tol

TERMINA LA FUNCION

SINO

SE AUMENTA LA ITERACION

itera +=1

IV. Problema Presente en Ingeniería: Canal de Descarga de Flujo

El problema presente es calcular la forma de un canal de descarga de flujo gravitacional que minimice el tiempo de tránsito de partículas granulares descargadas. El canal esta compuesto de cuatro segmentos, con ángulos determinados por un cierto valor de θ. El mismo se observa en la figura 2

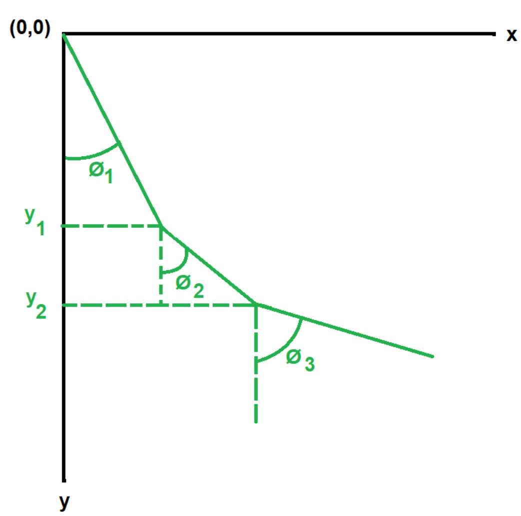

Figura 2. Canal de Descarga

Para este caso r = (θ_1, θ_2, θ_3, θ_4)^t y se procede a resolver el sistema de ecuaciones 14.

$$\begin{cases} f_1(r) = \frac{\sin\theta_2}{5{,}08} - \frac{\sin\theta_1}{3{,}59} \\ f_2(r) = \frac{\sin\theta_3}{6{,}22} - \frac{\sin\theta_2}{5{,}08} \\ f_3(r) = \frac{\sin\theta_4}{7{,}18} - \frac{\sin\theta_3}{6{,}22} \\ f_4(r) = 0,2(\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2) + \\ \tan(\theta_3) + \tan(\theta_4)) - 2 \end{cases} . \tag{14}$$

El sistema de ecuaciones se resuelve para $r^{(0)}$ = (1, -1, 1, -1)^t, el método converge para una cantidad de iteraciones N = 5 y produce

$$r^{(5)} = (0{,}51748398, 0{,}77541715, 1{,}02961840, 1{,}42484470)^t$$

V. Conclusiones

El método de newton es eficiente en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, converge muy rápidamente y proporciona una muy buena precisión en los resultados. El método se emplea en la solución de problemas académicos y en problemas propios del mundo real. [2]

El método de Newton-Rapshon, ofrece una amplia variedad de modificaciones las cuales optimizan el código, por ejemplo existe una modificación para acelerar la convergencia, en este caso el método original es modificado para resolver problemas de sistemas de ecuaciones no lineales, que dada la investigación que se realizó, es bastante usado en la industria, por ejemplo en la producción de químicos mediante torres de destilación o platos recolectores, también en la química en la formulación de ecuaciones químicas de compuestos, o en la industria y la administración.

A pesar de las ventajas proveídas por el método de Newton-Raphson, este no es infalible, hay restricciones que este debe cumplir. Por lo que si un sistema de ecuaciones no cumple con estas restricciones, no puede ser solucionado por el método iterativo. En el caso del método de Newton-Raphson, una condición que se debe cumplir es que el Jacobiano debe ser invertible, por lo que solo se puede resolver este sistema. Es posible que el Jacobiano se convierta en una matriz singular, lo cual haría imposible que el sistema de ecuaciones se resuelva mediante el método de Newton-Raphson. Por lo tanto, el método no es infalible ya que hay sistemas de ecuaciones que no pueden ser resueltos por el mismo.

Referencias

[1] H. Kopka and P. W. Daly, *A Guide to LaTeX*, 3rd ed. Harlow, England: Addison-Wesley, 1999.

[2] Bravo Bolivar, J. E., Botero Arango, A. J., Botero Arbeláez , M. *EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON - LA ALTERNATIVA DEL INGENIERO PARA RESOLVER.*. Scientia Et Technica, XI(27), 221-224. (2005).