#1 Pseudocódigo

Entradas: - $F(x)$: Función
- X_0: valor inicial 2
- X_1: valor inicial 1
- tol: tolerancia
- iterMax: número de iteraciones máximas

Salidas: - X_k: valor aproximado
- #iter: cantidad de iteraciones necesarias
- errorf: % error.

① Verificar que aún no se alcanza la tolerancia deseada

② Mientras esa tolerancia no se alcance entonces

③ Calcular: $\underbrace{2X_k - X_{k-1}}$

④ Calcular: $\dfrac{F(\quad) - F(X_{k-1})}{2X_k}$

⑤ Calcular: X_{k+1}

⑥ Actualizar X_{k-1} y X_k

⑦ Calcular % error y

⑧ ir al paso ②

⑨ Mostrar X_k, #iter, % error

#2 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $[-3, 3]$

Un punto fijo x_0, lo es, si satisface que: $f(x_0) = x_0$

Para probar su existencia encontramos los puntos críticos:

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, igualando a cero tenemos que:

$x = 0$, este punto se encuentra en el intervalo.

Evaluando $f(x)$ en 0, -3 y 3 tenemos.

$f(-3) = 0.1 \to$ mínimo

$f(0) = 1 \to$ Tenemos un máximo relativo

$f(3) = 0.1 \to$ mínimo

$\therefore$ Podemos concluir que para todo $x \in [-3, 3]$, la función tiene al menos un punto fijo

Ahora debemos garantizar la existencia de un único punto fijo en el intervalo. Es decir, que existe $0 < L < 1$ tal que $|f'(x)| \leq L$.

$$f'(-3) \leq f'(x) \leq f'(3) \to -0.06 \leq f'(x) \leq 0.06$$

$$\to |f'(x)| \leq \frac{3}{50}$$

Entonces $L = \frac{3}{50} < 1$. Por lo tanto, por teorema de unicidad, el punto fijo es único.

#3

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Determine a cuál sistema se le puede aplica Cholesky

Para poder aplicar cholesky debe ser simétrica

$$A_1^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

∴ es simétrica ya que:

$A_1 = A_1^T \wedge A_2 = A_2^T$

Además debe ser definida positiva.

$D_1 A_1 = |4| = 4$

$D_1 A_2 = |5| = 5$

$D_2 A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15$

$D_2 A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -39$

$D_3 A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 29$

∴ A_1 es simétrica definida positiva y se le puede aplicar Cholesky

A_2 es simétrica, pero no definida positiva, por lo que no se le puede aplicar Cholesky

Aplicando Gauss-Seidel hacia adelante en A_2

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}}{a_{11}} = \dfrac{+3-3\cdot 0-0\cdot 0}{5} = 0.6 \\[2ex] x_2^{(1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}}{a_{22}} = \dfrac{-2-3\cdot 0.6-2\cdot 0}{-6} = 0.633\overline{3} \\[2ex] x_3^{(1)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}}{a_{33}} = \dfrac{-4-0\cdot 0.6-2\cdot 0.633}{-3} = 1.755\overline{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}}{a_{11}} = 0.22 \\[2ex] x_2^{(2)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)}}{a_{22}} = 1.0285 \\[2ex] x_3^{(2)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}}{a_{33}} = 2.019 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(2)} - a_{13}x_3^{(2)}}{a_{11}} = -0.0171 \\[2ex] x_2^{(3)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(3)} - x_3^{(2)}\cdot a_{23}}{a_{22}} = 0.9977 \\[2ex] x_3^{(3)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(2)} - a_{32}x_2^{(3)}}{a_{33}} = 1.9985 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \qquad x^{(3)} = (-0.0171, 0.9977, 1.9985)^T \\ x_3^{(3)} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

#4 $f(x_1,x_2) = (x_1-2)^2 + (x_2+3)^3 + x_1 x_2$

$\bar{X}^{(0)} = (4, -5)^T$

• 1 Iteración

- Calcular $x^{(1)}$

$$x^{(1)} = \underset{x_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} f(x_1, x_2^{(0)}) = \underset{x_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} f(x_1, -5) = \underset{x_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} (x_1^2 - 4x_1 - 1) = 2+\sqrt{5}$$

$$x_2^{(1)} = \underset{x_2 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} f(x_1^{(1)}, x_2) = \underset{x_2 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} f(2+\sqrt{5}, x_2) = \underset{x_2 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} (x_2^3 + 9x_2^2 + 27x_2 + 29 + \sqrt{5}) = -2,1909$$

$$\bar{X}^{(1)} = (2+\sqrt{5}, -2,1909)^T$$