Números complejos en forma polar

Ejercicios con condiciones

1. Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

   R/ $\nexists$

$$\begin{cases} |w-2| = \dfrac{5}{2} \\ \arg(\overline{w+3i}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

   R/ $w = 1 + (3-\sqrt{15})i$

$$\begin{cases} |z-3i| = 4 \\ \arg(2-2z) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z-2i| = 2 \\ \arg(z+\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

4. Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

   R/ $w = -3 - \dfrac{5}{2}i$

$$\begin{cases} |w-3| = \dfrac{13}{2} \\ \arg(w+3) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

5. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:
R/ $w = -1 - \frac{1}{2}i$

$$\begin{cases} |z - \overline{z} + 2| = \sqrt{5} \\ \arg(z+1) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

6. Encuentre el número $z \in \mathbb{C}$ que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z - \overline{z}| = 2 \\ \arg(z) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

7. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:
R/ $z = 3 + 4i$

$$\begin{cases} |z| = 5 \\ \arg(3 - z) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

8. Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |w + 1 - i| = 5 \\ \arg(w - 2) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

9. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:
R/ $z = 2 - \sqrt{3}i$

$$\begin{cases} |z - 1| = 2 \\ \arg(z - 2 - i) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

10. Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |w-1| = 2 \\ \arg(w) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

11. Encuentre los números z y w que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} z - w = 4 - 2i \\ \arg(z \cdot \overline{w}) = \dfrac{-\pi}{2} \\ \operatorname{Re}(\overline{z}) = 3 \end{cases}$$

12. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $z = -2 - i$, $z = 1 - 4i$

$$\begin{cases} |z + 2i| = \sqrt{5} \\ \arg(\overline{z} + 3) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

13. Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |w + 2i| = |w| \\ \arg(\overline{w} + 2) = \dfrac{-\pi}{4} \end{cases}$$

14. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $z = -3\sqrt{2}i$

$$\begin{cases} |z - \overline{z}| = 6\sqrt{2} \\ \arg(\overline{z} - 3\sqrt{2}) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

15. Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $w = \dfrac{-9 \pm \sqrt{41}}{2} + \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{2}i$

$$\begin{cases} |w - 3i + 3| = \operatorname{Im}(\overline{7 - 5i}) \\ \arg(w + 3i) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

16. Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |w + i| = \sqrt{34} \\ \arg(w - i) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

17. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z - 1 + i| = 1 \\ \arg(z + 2\overline{z} - 1) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

18. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $z = -1 + 4i$

$$\begin{cases} |\overline{z} + (1 - i)| = 5 \\ \arg(z - (1 + 2i)) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

19. Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z - \overline{z}| = 4 \\ \arg(z \cdot (2 + 3i)) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

20. Encuentre el número $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z-2| = 5 \\ \arg(z-1) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

21. Encuentre los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z-2| = 3 \\ \arg(z+1) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

22. Determine los números complejos $z = a + bi$, con $b \neq 0$ y $w = c + di$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \overline{w} - z = \overline{(\sqrt{3} - i)} \\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0 \\ \arg(z \cdot w) = \dfrac{-\pi}{3} \end{cases}$$

23. Considere los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. Determine la forma polar para los z que satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} |w| = 1 \\ \dfrac{w}{1 + i\sqrt{3}} \text{ es un número real} \\ z = \sqrt{w} \end{cases}$$

Potencias enteras de un número complejo

1. Calcule y represente en forma rectangular el resultado de las siguientes operaciones:

   a) $(-2-3i)^6$ R/ $2\,035-828i$

   b) $(-1+i)^7$ R/ $8\sqrt{2}$

   c) $(\sqrt{3}+i)^4$

   d) $(1-i)^{-4}$ R/ $\dfrac{-1}{4}$

   e) $(2+3i)^5$ R/ $122-597i$

   f) $i^3(1-i)^{-4}$ R/ $\dfrac{i}{4}$

   g) $(5+2i)^{-3}(4-3i)^4$ R/ $-3{,}36+2{,}172i$

   h) $\dfrac{(2-i)^4}{(1-i)^3}$ R/ $\dfrac{31}{4}+\dfrac{17}{4}i$

   i) $\dfrac{(i+2)^4}{(2i-1)^5}$ R/ $\dfrac{-1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

   j) $\dfrac{(3i+1)^4}{(2+i)^5}$ R/ $\dfrac{-8}{5}+\dfrac{4}{5}i$

   k) $\dfrac{(2i-1)^4}{(1-i)^6}$ R/ $3+\dfrac{7}{8}i$

   l) $\dfrac{8(2i-2\sqrt{3})^8}{(1-i\sqrt{3})^4}$

   m) $\dfrac{(1-i)^{15}}{(2+2i)^5}$

   n) $\dfrac{(1+i)^{20}}{(2\sqrt{3}+2i)^5}$

   ñ) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{30}}{(1-i\sqrt{3})^5}$

   o) $\dfrac{(1-i)^6\cdot(1-i\sqrt{3})^3}{(2i-2\sqrt{3})^7}$ R/ $\dfrac{1}{512}-\dfrac{\sqrt{3}}{512}i$

   p) $\dfrac{(1-i)^{15}}{(2+2i)^5}+\dfrac{(1+3i)^2}{1-i^{459}}$ R/ $-2+7i$

   q) $\dfrac{(2+4i)^{10}}{(1-3i)^{10}}-i^{125}+4i$ R/ $-29i$

   r) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{200}$ R/ $\dfrac{1}{2^{100}}$

   s) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-55}$

2. Halle dos números reales a y b tales que

$$\frac{(1-i)^{15}}{(2+2i)^5}=a+bi$$

3. Si se sabe que $w=-1-i$, determine la forma rectangular del número complejo

$$\frac{w^{20}}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

4. Determine la forma rectangular de $w = \dfrac{(-1+i)^8 \cdot i^{31}}{\alpha - i}$, sabiendo que α es una constante real. R/ $\dfrac{16}{\alpha^2+1} - \dfrac{16\alpha i}{\alpha^2+1}$

5. Considere $z = 1+i$, $w = 3-i$ números complejos. Resuelva $\dfrac{i^{10} z^8}{w}$ y represente su resultado en forma rectangular. R/ $\dfrac{-24}{5} - \dfrac{8i}{5}$

Raíces de un número complejo

1. Encuentre las raíces cúbicas de $z = (1-i)^2$.

2. Encuentre las raíces cúbicas de $z = -4 - 4i\sqrt{3}$

   R/ $z_k = 2 \text{ cis}\left(\frac{-2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

3. Determine las tres raíces cúbicas de $w = -2 + 2i$

   R/ $w_k = 2\sqrt{2} \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$

4. Encuentre las raíces cúbicas de $w = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

   R/ $w_k = \text{cis}\left(\frac{-\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

5. Encuentre las raíces cúbicas de $r = 8 \text{ cis}\left(\frac{-\pi}{5}\right)$.

6. Considere el número complejo $z = \frac{-3+4i}{2-i} - i$

   a) Represente z en la forma rectangular. R/ $z = -2$

   b) Calcule las raíces cúbicas de z y déjelas expresadas en forma polar.

7. Encuentre las raíces cuartas de $z = (1-i)^3$.

8. Encuentre las raíces cuartas de $z = -128 + 128i\sqrt{3}$.

   R/ $z_k = 4 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)$

9. Encuentre las raíces cuartas de $t = 16 \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.

10. Sean w y z dos números complejos y n un número natural mayor que uno.

    a) Sea $w = r \cdot \text{Cis}(\theta)$ una de las raíces n-ésimas de z. Pruebe que $r \cdot \text{Cis}\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)$ es otra raíz n-ésima de z.

    b) Suponga que $w = 2 \cdot \text{Cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ es una de las raíces cuartas de z. Determine las otras raíces cuartas de z en forma rectangular.

11. Encuentre las raíces quintas de $z = 4\sqrt{3} - 4i$ y expréselas en forma rectangular.

12. Encuentre las raíces quintas de $x = 2 - 2i\sqrt{3}$ R/ $x_k = \sqrt[5]{4}\,\text{cis}\left(\dfrac{-\pi}{15} + \dfrac{2k\pi}{5}\right)$

13. Encuentre las raíces sextas de $y = 5 - 5i$ y expréselas en forma rectangular.

14. Resuelva en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

   a) $w^2 - 1 - i = 0$

   b) $ix^2 + 2ix + \sqrt{3} = 0$

   c) $z^3 - (1-i)^3 = 0$

   d) $z^3 = -2\sqrt{3} - 2i$

   e) $z^3 = i - 1$ R/ $\sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

   f) $z^3 + 2 = -2i$

   g) $z^3 + 2i = -2\sqrt{3}$ R/ $\sqrt[3]{4}\,\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right))$

   h) $z^3 + 8 = 0$ R/ $2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

   i) $z^3 = -8 + 8i\sqrt{3}$

   j) $w^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$

   k) $w^4 + 4 + 3i = 0.$

   l) $z^4 = -3 + 3i\sqrt{3}$

   m) $(w^3 - i)(w^2 + 4w + 3) = 0$

   n) $(w^3 - i)(w^2 + w + 1) = 0$

Exponentes, logaritmos y potencias en números complejos

1. Realice los cálculos y exprese el resultado en forma rectangular para cada una de las siguientes expresiones:

   a) $e^{\pi i}$

   b) e^{2-i}

   c) $(-1)^{2+i}$ R/ $e^{-\pi}$

   d) $(-1)^{4+i}$ R/ $e^{-\pi}$

   e) $\text{Ln}(-2)$

   f) $\text{Ln}(3{,}99232 - 6{,}21768i)$

2. Determine el valor de $\dfrac{e^{2+\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\pi i}}{e^{1-2\pi i}}$ y exprese el resultado en forma rectangular. R/ $-ei$

3. Exprese en forma rectangular el número complejo $\dfrac{1-i}{(-\sqrt{3}+i)^5} + \text{Ln}(-5)$ R/ $1{,}6208 - 0{,}0426i$

4. Exprese el número complejo $z = \dfrac{\text{Ln}(1+i)}{\sqrt{-25} \cdot i^{34}}$ en su forma rectangular.

5. Calcule $\text{Ln}^2(z)$ si $z = \dfrac{i^{2013}}{1+i}$, expresándolo en forma rectangular.

6. Exprese el número complejo z en su forma rectangular si R/ $\ln(2) - \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\right) i$

$$z = \text{Ln}(-2i) + \frac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(-1+i^{23})^{10}}$$

7. Calcule y represente en forma rectangular el resultado de $(3-3i)^6 \cdot \text{Ln}(-\sqrt{3}+i)$.

8. Calcule $(1-i)^i$ y exprese su resultado en forma rectangular.

9. Calcule $(-1-i)^i$ y exprese su resultado en forma rectangular. R/ $9{,}9234 + 3{,}5838i$

10. Calcule $(-1+i)^i$ y exprese su resultado en forma rectangular.

11. Determine $(2+2i)^{1-i}$ y exprese su resultado en forma rectangular. R/ $6{,}0039 - 1{,}5607i$

12. Calcule $(1-i)^{1-i}$ y exprese el resultado en forma rectangular.

13. Calcule $(2 - i\sqrt{3})^{1-i}$ y exprese su resultado en forma rectangular. R/ $-0{,}1498 - 1{,}2872i$

14. Calcule $(2 + i)^{1+i}$ y exprese el resultado en forma rectangular.

15. Calcule $(1 - i)^{2+3i}$ y exprese su resultado en forma rectangular. R/ $2{,}6293 - 1{,}5443i$

16. Dados $z = 4 - 4i$ y $w = -\sqrt{3} + 2i$, determine el valor del número complejo z^w y exprese su resultado en forma rectangular. R/ $-2{,}0768 + 2{,}0535i$

17. Si se sabe que $z = \dfrac{4+i}{i^3}$, represente en forma rectangular el número complejo dado por $w = (z + 2)^{\overline{z}-1}$ R/ $0{,}0158 - 0{,}0452i$

18. Calcule $\dfrac{(1-2i)^{3i}}{1-i}$ y exprese su resultado en forma rectangular.

19. Exprese en forma rectangular el valor exacto del resultado de la operación i^{2+i}

20. Exprese y calcule el número complejo dado por $z = (1 + i)^{-i} + (2\sqrt{3} - 2i)^5$ en su forma rectangular. R/ $-884{,}71 - 512{,}73i$

21. Represente en forma rectangular al número $w = z^{\overline{z}}$, si $z = \dfrac{3-i}{i^6}$

22. Obtenga la forma rectangular de w, donde $w + e^i = 2\text{Ln}(1 - i)$ R/ $[\text{Ln}(2) - \text{cis}(1)] - \dfrac{\pi}{2}i$

23. Si $w \in \mathbb{C}$, obtenga la forma rectangular de w, donde $w = 2\text{Ln}(1 - i) + e^{i\cdot 2\pi}$

24. Exprese en su forma rectangular el número complejo $\text{Ln}(1 - \sqrt{3}i) - \dfrac{\pi}{3}e^{\frac{-\pi}{2}i}$ R/ $\text{Ln}(2)$

25. Determine la forma rectangular del número complejo e^z, donde R/ $\dfrac{\pi}{2}i - 3$

$$z = \text{Ln}(1 + i) - \text{Ln}(1 - i) + 3e^{\pi i}$$

26. Exprese en forma rectangular al número complejo $\text{Ln}(z)$, donde

$$z = e^{i\theta}[\text{sen}(\theta) + i\cos(\theta)]$$

27. Calcule $\ln(z)$ sabiendo que $z = \dfrac{1 - e^{\frac{\pi}{2}i}}{1 + e^{\frac{\pi}{2}i}}$

28. Si $w = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, represente en la forma polar el número complejo $\left(\overline{w} + 2\sqrt{2}\right)^w$

29. Determine la forma rectangular de $z = (1 + \mathrm{Ln}(-1) + e^{\pi i})^i$

30. Calcule y exprese el siguiente número complejo dado por $w = \dfrac{3e^{\frac{-\pi}{2}i}}{16 + i^{2023}} + i^{-i}$ en su forma rectangular. R/ $4{,}8221 - \dfrac{48i}{257}$

31. Halle $z \in \mathbb{C}$ y expréselo en forma rectangular, tal que z satisface la ecuación: R/ $\dfrac{-i - \pi}{\pi}$

$$\overline{\pi i z} = \mathrm{Ln}(-e)$$

32. Determine la forma rectangular del número complejo z tal que: R/ $z = -1 - \pi$

$$\overline{z} + 2 = \ln(-e) - \pi e^{\left(\frac{\pi i}{4} + \ln(\sqrt{2})\right)}$$

33. Verifique las siguientes identidades:

   a) $2\mathrm{Ln}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\pi i$

   b) $e^{\pi/4} \cdot \mathrm{cis}[\ln(\sqrt{2})] - (1 - i)^i = 0$

   c) $4e^{-\pi/6}\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^{i-1} = e^{i\cdot\ln(4) + i\pi/6}$

   d) $[\mathrm{Ln}(1 + i)]^2 + \dfrac{\pi^2}{16} = \dfrac{[\mathrm{Ln}(2)]^2}{4} + \dfrac{\pi i \cdot \mathrm{Ln}(2)}{4}$

Ejercicios combinados

1. Considere el número complejo z en su forma exponencial $z = 2 \cdot e^{\frac{-\pi i}{6}}$

   a) Calcule las raíces cúbicas de z (puede dejarlas expresadas en su forma polar)

   b) Determine la forma rectangular del número z^z

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación $z^3 = e^{\ln(5)+\frac{\pi i}{4}}$

3. Determine la forma rectangular de todos los números complejos z que cumplen, simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $z = \pi + \left(-\sqrt{3}\pi + 1\right) i$

$$\begin{cases} i \cdot \operatorname{Ln}(e^{3\pi i}) + \operatorname{Re}(\overline{z}) = 0 \\ \arg(z - i) = \dfrac{-\pi}{3} \end{cases}$$

4. Determine todos los números complejos z que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \arg(z + 2i) = \arg(e^{5\pi i}) \\ |z + i| = 2 \end{cases}$$

5. Encuentre el o los números $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, con $a > 0$ y $b > 0$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} z_1 \text{ es una raíz cuadrada de } 2i \\ \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2} \\ \arg(\overline{z_1} \cdot z_2) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

6. Determine todos los números complejos w que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones: R/ $z = 5\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)$

$$\begin{cases} \arg(w) = \arg\left[\dfrac{(-1+i)^5}{\sqrt{3} - i}\right] \\ |w| = \left|(3 - i) \cdot \overline{2i - 1}\right| \end{cases}$$

7. Resuelva el siguiente sistema, con incógnitas z y $w \in \mathbb{C}$: R/ $z = \dfrac{33i}{50} - \dfrac{11}{50}$

$$\begin{cases} 5z + (3-2i)w = \operatorname{Im}\left(2e^{\frac{-\pi}{2}i}\right) \\ \overline{(\overline{zi} + 3i) \cdot 5i} - iw = 3i - 17 \end{cases}$$

8. Determine todos los números complejos z que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones: R/ $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3} - i$

$$\begin{cases} z^4 = -8(1 + i\sqrt{3}) \\ \arg(z + 2i) = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Ejercicios especiales

1. Pruebe que si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces se cumple que

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)}$$

2. Si z es un número complejo arbitrario, demuestre que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

3. Si z y w son dos números complejos cualesquiera, demuestre que $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

4. Si z y w son dos números complejos cualesquiera, demuestre que $|z \div w| = |z| \div |w|$

5. Si z y w son dos números complejos cualesquiera, demuestre que:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re}(\overline{z} \cdot w)$$

6. Si z y w son dos números complejos cualesquiera, demuestre que:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

7. Dados z_1 y z_2 complejos que verifican que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ demuestre que el cociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ es un imaginario puro.

8. Si α y β son dos ángulos cualquiera, entonces, pruebe que:

$$\text{cis}(\alpha) \cdot \text{cis}(\beta) = \text{cis}(\alpha + \beta)$$

9. Si α y β son dos ángulos cualquiera, entonces, pruebe que:

$$\frac{\text{cis}(\alpha)}{\text{cis}(\beta)} = \text{cis}(\alpha - \beta)$$

10. Demuestre que si $z = r \cdot \text{cis}(\theta)$ es un número complejo cualquiera no nulo y sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que:

$$z^n = r^n \cdot \text{cis}(n \cdot \theta)$$