Función polinomial de grado n

Es la función definida por $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuyo criterio es de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n, \quad \text{con } a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Notación:

1. *n es el grado del polinomio y es mayor de todos los exponentes del mismo.*
2. *Los números reales $a_0, ..., a_n$ se denominan coeficientes del polinomio.*
3. *a_n recibe el nombre de coeficiente principal y $a_n x^n$ el de término principal.*
4. *Si a_n es igual a uno se dice que el polinomio es mónico.*
5. *a_0 es llamado término o coeficiente constante o independiente.*
6. *Si un polinomio está formado por un sólo término, entonces se le puede denominar monomio.*

$f(x) = -x^3 + 2x^2 + x + 5$

No variables en el denominador

No exponentes negativos

Grado → 3

Coeficientes Principal Secundario

$-1 \quad 2 \quad 1 \quad 5$

monomio

$g(x) = -3x^4$

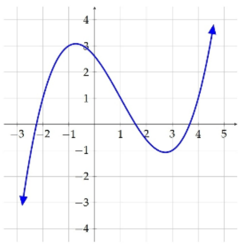
Termino principal $-x^3$

Si el coeficiente principal es , se dice que polinomio es monico $x^2 - 2x + 5$

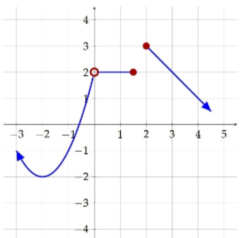
$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 5$

Caracterísiticas de los polinomios

- *Son funciones continuas, es decir no tienen problemas en su dominio, tampoco cortes, saltos o separaciones en su representación gráfica.*

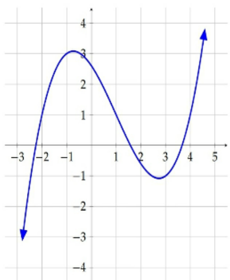


Función polinomial

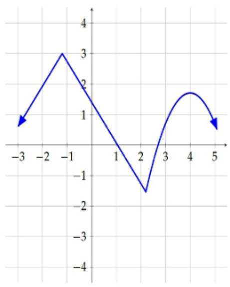


Función no polinomial

- *Son funciones de trazos suaves, gráficamente esto es que sus graficas no poseen picos.*



Función polinomial



Función no polinomial

Ejemplo 151

Determine lo que se le solicita y realiza la gráfica de la función con la ayuda de un graficador: Encuentre los puntos de intersección de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuyo criterio es $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 5x + 15$, con los ejes cordenados

$f(0) = 4(0)^3 - 12(0)^2 - 5(0) + 15$

$\boxed{y = (0, 15)}$

Ix

$4x^2(x-3) - 5(x-3) = 0$

$(4x^2 - 5)(x-3) = 0$

$(x-3)(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5}) = 0$

$2x - \sqrt{5} = 0 \qquad 2x + 5 = 0$

$x = 3 \qquad x = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{I_x = (3,0), \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{5}}{2}, 0\right)}$$

Ejemplo 153

Determine lo que se le solicita y realiza la gráfica de la función con la ayuda de un graficador: Encuentre el o los valores de x para los cuales $m(x) = 0$, si $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y su cuyo criterio está dado por $m(x) = (3x-2)(9x^2-25)(7-x)(x^2+16)$

$(3x-2)(9x^2-25)(7-x)(x^2+16) = 0$

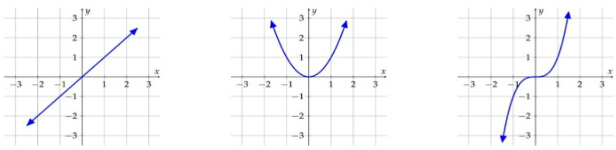
$(3x-2)(3x-5)(3x+5)(7-x)(x^2+16) = 0$

$x = \frac{2}{3} \qquad x = \frac{5}{3} \qquad x = \frac{-5}{3} \qquad x = 7 \qquad x^2 + 16 = 0$

$\left(\frac{2}{3}, 0\right) \left(\frac{5}{3}, 0\right) \left(\frac{-5}{3}, 0\right) (7, 0) \qquad \Delta < 0 \to 0$ Sols

Recordatorio gráficas de las funciones polinomiales básicas

Muchas funciones polinomiales se pueden construír a partir de transformaciones aplicadas a las funciones



$f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = x^3$

Definición 29 [Ceros o raíces "reales" de un polinomio]

Se dice que un valor $x = c$, con $c \in \mathbb{R}$, es un cero o raíz de un polinomio $P(x)$, si al sustituir dicho valor en el polinomio el resultado es cero, es decir, cuando $P(c) = 0$.

Ejemplo 154

Los valores $x = 2$ y $x = -\frac{1}{3}$ son ceros del polinomio $Q(x) = 3x^2 - 5x - 2$ porque:

$$Q(2) = 3(2)^2 - 5(2) - 2 = 0$$

y

$$Q\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = 0$$

Ejemplo 155

Considere el polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ y los números $x = 4$, $x = -2$, $x = 1$y $x = 2$, determine cuáles de estos valores corresponden a ceros del polinomio P y cuales no.

Solución

Para determinar cuáles valores son ceros, basta con evaluar el polinomio y aquellos números para los que el valor numérico obtenido sea cero, diremos que son ceros del polinomio, en caso contrario no lo serán, así:

$P(-4) = (-4)^3 + 3(-4)^2 - 4 = -20 \Rightarrow x = -4$ **no** *es cero del polinomio*

$P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ **sí** *es cero del polinomio*

$P(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ **sí** *es cero del polinomio*

$P(2) = (2)^3 + 3(2)^2 - 4 = 17 \Rightarrow x = 2$ **no** *es cero del polinomio*

Teorema 5

Todo polinomio de grado impar posee al menos un cero real.

Teorema 6

Teorema 6

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ es el producto de una constante, por polinomios de grado uno de la forma $x - c$, donde c es un cero del polinomio, o de polinomios de grado dos irreducibles en $\mathbb{R}$, o bien de polinomios de grados uno y dos irreducibles en $\mathbb{R}$.

Con base en los teoremas anteriores se puede deducir una relación entre el número de ceros que posee un polinomio y el grado del mismo, para esto, se tiene el siguiente teorema

Teorema 7

Número máximo de ceros en un polinomio
Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, entonces existen como máximo n ceros del polinomio, contando multiplicidades (raíces repetidas).

Comportamiento al límite

Comportamiento al límite

También es llamado comportamiento inicial y/o final y describe como se comporta una función cuando x tiende (se acerca) a los infinitos, es decir cuando x se hace muy grande en la dirección positiva o negativa.

Notación:

$x \to -\infty$ *significa que x se hace grande en la dirección negativa.*

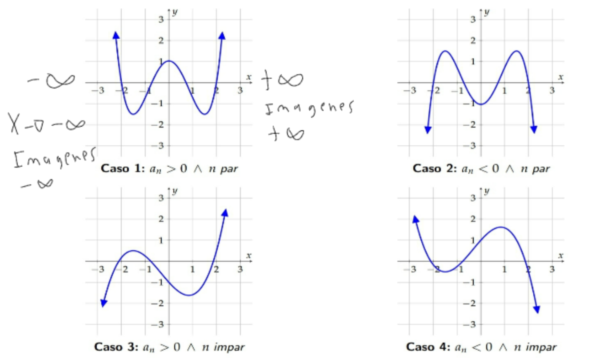
$x \to \infty$ *significa que x se hace grande en la dirección positiva.*

Teorema 8

Sea $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, con $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ un polinomio de grado n, entonces su comportamiento al límite queda determinado por el término a_nx^n:

- *Si n es par el comportamiento queda determinado por el signo de a_n.*
- *Si n es impar el comportamiento queda definido al aplicar la ley de los signos con el signo de a_n y el signo del infinito.*

A continuación se muestran los cuatro casos posibles para el término a_nx^n



Caso 1: $a_n > 0 \wedge n$ *par*
Caso 2: $a_n < 0 \wedge n$ *par*
Caso 3: $a_n > 0 \wedge n$ *impar*
Caso 4: $a_n < 0 \wedge n$ *impar*

Ejemplo 156

Determine el comportamiento al límite (final e inicial) de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^4 + 2x^2 + 1$
2. $g(x) = 7x^3 + 2x^2 + 1$
3. $h(x) = x - 3x^4$
4. $i(x) = -x^3 - 3x + 1$

$5x^4 + 2x^2 + 1$

usar y remplazar en termino principal

$x \to -\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

$5(-\infty)^4$ $\quad$ $5(+\infty)^4$

Simbolo $\quad$ Simbolo

$+ \cdot + = +$ $\quad$ $+ \cdot + = +$

$x - 3x^4$

$x \to -\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

$-3(-\infty)^4$ $\quad$ $-3(+\infty)^4$

$- \cdot + = -$ $\quad$ $- \cdot + = -$

R/ Para $x \to -\infty$ el comportamiento de f es que sus imagenes tienden a $+\infty$ y para $x \to -\infty$ sus imagenes tienden a $+\infty$

misma respuesta pero con $-$

2) $7x^3+2x^2+1$

$7(-\infty)^3$ $\quad$ $7(+\infty)^3$

$+\cdot- = -$ $\quad$ $+\cdot+ = +$

R/ Para $x \to -\infty$ el comportamiento de f es que sus imagenes tienden a $-\infty$ y para $x \to +\infty$ sus imagenes tienden a $+\infty$

4) $-x^3-3x+1$

$-1(-\infty)^3$ $\quad$ $-1(+\infty)^3$

$-\cdot- = +$ $\quad$ $-\cdot+ = -$

R/ Para $x \to -\infty$ el comportamiento de f es que sus imagenes tienden a $+\infty$ y para $x \to +\infty$ sus imagenes tienden a $-\infty$

Relación de los ceros del polinomio con las intersecciones del eje x

Recordemos que si un número real c es un cero del polinomio P, entonces se cumple que $P(c) = 0$. Además, sabemos que para encontrar las intersecciones con el eje x de una función, basta encontrar las preimágenes de cero.

Teorema 9

Sea P una función polinomial y c un número real, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

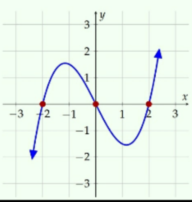
1. *c es un cero de P.*
2. *$x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.*
3. *$x - c$ es un factor de $P(x)$.* **(Teorema del Factor)**
4. *$(c, 0)$ es un punto de intersección de la función P con el eje x.*

Ejemplo 157

Considere a la función $P(x) = \dfrac{x^3}{2} - 2x$, con $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $\boxed{x = -2,\ x = 0 \text{ y } x = 2}$ *son los ceros de P.*

   Trabajar con esto
2. *El conjunto solución de la ecuación $\dfrac{x^3}{2} - 2x = 0$ es $S = \{-2, 0, 2\}$.*
3. *La factorización completa del polinomio P es* $\boxed{P(x) = \dfrac{1}{2}x(x-2)(x+2).}$
4. *Los puntos de intersección de P con el eje x son $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$.*



5) Factores $x \to 0$

$(x-2), (x+2), x$

3) factorización completa

$$\boxed{P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$$

a = coeficiente principal

$$\boxed{\frac{1}{2}x(x-2)(x+2)}$$

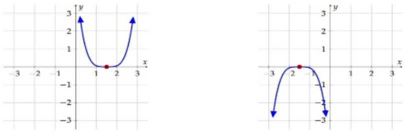
Definición 30 Cero de multiplicidad m

Si c es un cero del polinomio P y en la factorización P el factor $x-c$ está presente exactamente m veces, es decir, en la factorización máxima aparece la expresión $(x-c)^m$, entonces se dice que c es un cero de multiplicidad m.

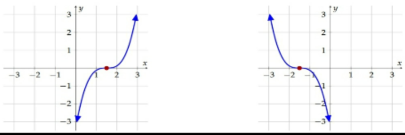
Forma de la gráfica alrededor un cero

Si c es un cero de multiplicidad $m > 1$ del polinomio P, entonces la forma de la gráfica de P cerca de c tiene las siguientes formas:

- *Para m par:*



- *Para m impar:*



$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

$x_1 = -2$

$x_2 = 3 \rightarrow 2$ veces (el segundo se repite 2 veces)

$$1(x - -2)(x-3)(x-3)$$

$$1(x+2)\underbrace{(x-3)^2}_{\text{multiplicidad } 2}$$

División de polinomios entre un monomio

Se debe dividir cada término de la expresión algebraica del dividendo por el monomio que es el divisor, para ello se debe realizar la simplificación de los números y de las variables, mediante la aplicación de las reglas:

$$\frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{ad}{cd} = \frac{a}{c} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 160

Efectúe las operaciones y simplifique al máximo:

$$\left[-16x^6 + 4x^4y^2 + 8x^4y - 4x^3y^2\right] : 2x^3y$$

Solución

$$\begin{aligned} & [-16x^6 + 4x^4y^2 + 8x^4y - 4x^3y^2] : 2x^3y \\ = & -\frac{16x^6}{2x^3y} + \frac{4x^4y^2}{2x^3y} + \frac{8x^4y}{2x^3y} - \frac{4x^3y^2}{2x^3y} \\ = & -\frac{8x^3}{y} + 2xy + 4x - 2y \end{aligned}$$

: = División

$$\boxed{-8x^3y^{-1} + 2xy + 4x - 2y}$$

Ejemplo 161

Ejemplo 162

Efectúe la siguiente división

$$(2x-1-3x^3+5x^2):(2x-x^2)$$

Solución

$$\begin{array}{r|l}
-3x^3+5x^2+2x-1 & -x^2+2x \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-6x^2} & 3x+1 \\
-x^2+2x & \\
\underline{x^2-2x} & \\
-1 &
\end{array}$$

Así:

$$\therefore \frac{-3x^3+5x^2+2x-1}{-x^2+2x}=3x+1-\frac{1}{-x^2+2x}$$

Efectúe la siguiente división

$$(3x+x^2-1-x^5):(x^3+1-3x)$$

Solución

$$\begin{array}{r|l}
-x^5+x^2+3x-1 & x^3-3x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5-3x^3+x^2} & -x^2-3 \\
-3x^3+2x^2+3x-1 & \\
\underline{3x^3-9x+3} & \\
2x^2-6x+2 &
\end{array}$$

Así:

$$\therefore \frac{-x^5+x^2+3x-1}{x^3-3x+1}=-x^2-3+\frac{2x^2-6x+2}{x^3-3x+1}$$

Ejemplo 163

Para los polinomios $P(x)=x^4-2x-15$ *y* $Q(x)=x^2+5$, *efectúe la división* $P(x):Q(x)$ *y exprese el resultado de la forma* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{r|l}
x^4+0x^3+0x^2-2x-15 & x^2+0x+5 \\
\underline{-x^4-0x^3-5x^2-2x-15} & x^2-5 \\
-5x^2-2x-15 & \\
5x^2-0x+25 & \\
-2x+10 &
\end{array}$$

Residuo $-2x+10$

Cociente x^2-5

$$C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}=x^2-5+\frac{10-2x}{x^2+5}$$

Divisor

Ejemplo 164

Para los polinomios $P(x)=x-2x^3+5x^5$ *y* $Q(x)=3x^2-3x-3$, *efectúe la división* $P(x):Q(x)$ *y exprese el resultado de la forma* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{r|l}
5x^5+0x^4-2x^3+0x^2+x+0 & 3x^2-3x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{-5x^5+5x^4+5x^3} & \frac{5}{3}x^3+\frac{5}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{13}{3} \\
5x^4+3x^3+0x^2+x+0 & \\
-5x^4+5x^3+5x^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|}
8x^3 + 5x^2 + x + 0 \\
-8x^3 + 8x^2 + 8x + 0 \\ \hline
13x^2 + 9x + 0 \\
-13x^2 + 13x + 3 \\ \hline
22x + 3
\end{array}$$

Es menor que el x^2 del divisor

Cociente

$\frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{13}{3}$

Residuo

$22x+3$

$$\boxed{R/\ \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{13}{3} + \frac{22x+3}{3x^2-3x-3}}$$

La division sintetica se utiliza unicamente cuando el divisor es un polinomio de grado uno

Ejemplo 165

Realice la siguiente división

$$(3x^2 + 4x^3 + 2 - 5x) : (x+3)$$

$$\begin{array}{cccc|c}
4 & 3 & -5 & 2 & \\
 & -12 & 27 & -66 & -3 \\ \hline
4 & -9 & 22 & \boxed{64} &
\end{array}$$

$$\therefore \frac{4x^3 + 3x^2 - 5x + 2}{x+3} = 4x^2 - 9x + 22 - \frac{64}{x+3}$$

Ejemplo 168

Para los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 12$ *y* $Q(x) = 2x + 3$*, efectúe la división* $P(x) : Q(x)$ *y exprese el resultado de la forma* $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & -3 & -1 & 12 & -\frac{3}{2}
\end{array}$$

$-3 \quad 9 \quad -12$

$2 \quad -6 \quad 8 \quad 0 \to$ Residuo

Cociente $\to 2x^2 - 6x + 8$

$$\boxed{2x^2 - 6x + 8 + \frac{0}{2x^3+3}}$$

Si el residuo da 0 quiere decir que el dividendo y el divisor son divisibles entre si