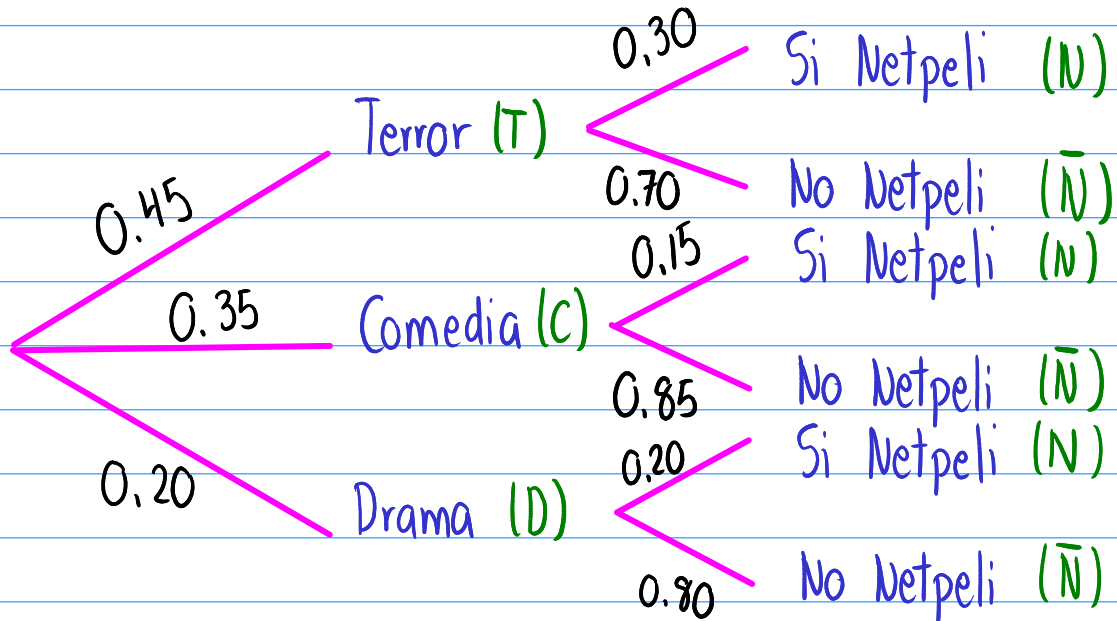


## Solución Examen I I Semestre 2019

1. En la carrera de Computación de la Universidad Bienestar Seguro, el 45% de los estudiantes prefieren películas de terror, el 35% prefiere las películas de comedia y el resto prefiere las películas de drama. Además el 15% de los estudiantes prefieren las películas de comedia y utilizan Netpeli (cierta plataforma de películas en línea). Por otro lado, el 30% de los que prefieren las películas de terror utilizan Netpeli al igual que el 20% de los que prefieren las películas de drama. Se elige al azar un estudiante de la carrera de computación.

(a) Halle la probabilidad de que el estudiante elegido utilice Netpeli. (4 puntos)



Note que la probabilidad de que el estudiante elegido utilice Netpeli viene dada por:

$$P(T) \cdot P(N) + P(C) \cdot P(N) + P(D) \cdot P(N) = 0.45 \cdot 0.30 + 0.35 \cdot 0.15 + 0.20 \cdot 0.20$$
$$= 0.2275$$

$\therefore$  La probabilidad de que el estudiante elegido utilice Netpeli es de 0.2275. ■

- (b) Si el estudiante elegido resultó que no utiliza Netpeli, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera las películas de comedia? (4 puntos)

Note que la probabilidad de que el estudiante elegido prefiera las películas de comedia, sabiendo que no utiliza Netpeli viene dada por:

$$\begin{aligned} P(C|\bar{N}) &= \frac{P(C) \cdot P(\bar{N})}{P(T) \cdot P(\bar{N}) + P(C) \cdot P(\bar{N}) + P(D) \cdot P(\bar{N})} \\ &= \frac{0,35 \cdot 0,85}{0,45 \cdot 0,70 + 0,35 \cdot 0,85 + 0,20 \cdot 0,80} \\ &= 0,3851 \end{aligned}$$

∴ La probabilidad de que el estudiante elegido prefiera las películas de comedia, sabiendo que no utiliza Netpeli es de 0,3851. ■

2. Se tiene una canasta con treinta bolas numeradas de la 1 a la 30. Determine el número de maneras de elegir 5 bolas de forma que:

(a) exactamente tres bolas tenga múltiplos de tres.

(3 puntos)

Sea  $S_3$  el subconjunto que contiene las bolas numeradas con múltiplos de tres, así:  $S_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

\_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_

Etapa ①: colocar las tres bolas múltiplos de tres.

$$C(10, 3) = 120 \text{ maneras}$$

Etapa ②: colocar el resto de bolas

$$C(20, 2) = 190 \text{ maneras}$$

TOTAL:  $120 \cdot 190 = 22\,800$  maneras.

$\therefore$  El número de maneras de elegir cinco bolas, en donde exactamente tres son múltiplos de tres es de 22 800 maneras.

(b) al menos una bola tenga un número múltiplo de cinco.

(3 puntos)

Sea  $S_5$  el conjunto que contiene las bolas múltiplos de cinco, así  $S_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

Note que esta pregunta puede hacerse mediante cinco casos, sin embargo, una forma alternativa, es mediante complemento, así:

⊗ Parte ①: elegir las cinco bolas.

$$C(30, 5) = 142\,506 \text{ maneras}$$

⊗ Parte ②: ninguna bola múltiplo de cinco

$$C(24, 5) = 42\,504 \text{ maneras}$$

Por complemento, se tiene que:

$$\begin{aligned} C(30, 5) - C(24, 5) &= 142\,506 - 42\,504 \\ &= 100\,002 \text{ maneras} \end{aligned}$$

∴ El número de maneras de elegir cinco bolas, en donde al menos una tenga un múltiplo de cinco es de 100 002 maneras. ■

(c) al menos cuatro múltiplos de cinco y a lo sumo un múltiplo de tres. (5 puntos)

Sea  $S_3$  el subconjunto que contiene las bolas numeradas con múltiplos de tres, así:  $S_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

Sea  $S_5$  el conjunto que contiene las bolas múltiplos de cinco, así  $S_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

Caso ①: cuatro múltiplos de cinco y una múltiplo de tres

Etapas ①: elegir múltiplos de cinco  $C(6,4) = 15$  maneras

Etapas ②: elegir múltiplos de tres  $C(10,1) = 10$  maneras

Total:  $C(6,4) \cdot C(10,1) = 150$  maneras

Caso ②: cinco múltiplos de cinco y cero múltiplo de tres

Etapas ①: elegir múltiplos de cinco  $C(6,5) = 6$  maneras

Etapas ②: elegir múltiplos de tres  $C(10,0) = 1$  manera

Total:  $C(6,5) \cdot C(10,0) = 6$  maneras

TOTAL:  $150 + 6 = 156$  maneras

∴ El número de maneras de elegir cinco bolas en donde al menos cuatro son múltiplos de cinco y a lo sumo una es múltiplo de tres de 156 maneras. ■

5. En una bolsa se tienen 10 bolas blancas, 6 bolas verdes y 4 bolas rojas. Considere el experimento en que se extrae una bola al azar, se anota su color y se devuelve la bola extraída con dos bolas del mismo color al de las bola extraída. Suponga que el experimento se repite hasta obtener dos bolas verdes consecutivas. ¿Determine la probabilidad de que se realicen exactamente 3 extracciones? (4 puntos)

Note que en la bolsa se tienen:

10 bolas blancas (B)  
6 bolas verdes (V)  
4 bolas rojas (R)

Sea  $\Omega = \{BVV, RVV\}$

⊗ Para BVV

$$\frac{10}{20} \cdot \frac{6}{22} \cdot \frac{8}{24} = \frac{1}{22}$$

1º Intento					
Blancas	$\frac{10}{20}$	Verdes	$\frac{6}{20}$	Rojas	$\frac{4}{20}$
2º Intento					
Blancas	$\frac{12}{22}$	Verdes	$\frac{6}{22}$	Rojas	$\frac{4}{22}$
2º Intento					
Blancas	$\frac{12}{24}$	Verdes	$\frac{8}{24}$	Rojas	$\frac{4}{24}$

⊗ Para RVV

$$\frac{4}{20} \cdot \frac{6}{22} \cdot \frac{8}{24} = \frac{1}{55}$$

$$\begin{aligned} \text{Así } P(BVV) + P(RVV) &= \frac{1}{22} + \frac{1}{55} \\ &= \frac{7}{110} \\ &\approx 0.0636 \end{aligned}$$

1º Intento					
Blancas	$\frac{10}{20}$	Verdes	$\frac{6}{20}$	Rojas	$\frac{4}{20}$
2º Intento					
Blancas	$\frac{10}{22}$	Verdes	$\frac{6}{22}$	Rojas	$\frac{6}{22}$
2º Intento					
Blancas	$\frac{10}{24}$	Verdes	$\frac{8}{24}$	Rojas	$\frac{6}{24}$

∴ La probabilidad de que en el experimento dado se realicen exactamente tres extracciones es de 0.0636. ■

6. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  eventos no nulos tales que:  $A \cup B = \Omega$ ,  $A$  y  $C$  son independientes.

(a) Demuestre que  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son disjuntos.

(1 punto)

Note que  $A \cup B = \Omega \Rightarrow \overline{A \cup B} = \bar{\Omega}$

$$\Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$$

Ley De Morgan

Como en  $\bar{A}$  y en  $\bar{B}$  no hay elementos en común, se demuestra que  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son disjuntos.

(b) Pruebe que

(4 puntos)

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - P(\bar{A})P(C) - P(\bar{B} \cup \bar{C})$$

Note que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) &= P(A \cup B \cup C) - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \quad \text{def Universo} \\ &= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A) \cdot P(C) + P(B \cap C) \quad \text{def independencia} \\ &= 1 - [1 - P(\bar{A})] - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A) \cdot P(C) + [1 - P(\bar{B} \cap \bar{C})] \quad \text{def complemento} \\ &= 1 - 1 + P(\bar{A}) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A) \cdot P(C) + 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) \quad \text{de Morgan} \\ &= 1 + P(\bar{A}) - \cancel{P(B)} - P(C) + P(A) + \cancel{P(B)} - P(A \cup B) + P(A) \cdot P(C) - P(\bar{B} \cup \bar{C}) \quad \text{por } (*) \\ &= 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) + P(\bar{A}) - P(C) - P(A \cup B) + P(A) \cdot P(C) \\ &= 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) + P(\bar{A}) - P(C) + P(A) \cdot P(C) - 1 \quad \text{por dominación} \\ &= 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) + P(\bar{A}) + (P(A) - 1)P(C) - 1 \quad \text{factor común} \\ &= 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) + P(\bar{A}) + \cancel{[1 - P(\bar{A})]} \cancel{P(C)} - 1 \quad \text{por complem} \\ &= 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) + P(\bar{A}) - P(\bar{A})P(C) - 1 \\ &= 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) + P(\bar{A}) \cancel{[1 - P(C)]} - 1 \\ &= 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) - P(\bar{A}) \cdot P(C) \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad (*)$$