

## Ejercicio # 1

Objetivo; Simplex 2 Fases  $\rightarrow$  min

$$\min z = 8x + 2y$$

Sujeto a:

$$6x + 2y = 6$$

$$8x + 6y \geq 12$$

$$2x + 4y \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

### Fase I

$$\min r = A_1 + A_2 \rightarrow r - A_1 - A_2 = 0$$

Sujeto a:

$$6x + 2y + A_1 = 0$$

$$8x + 6y - E_2 + A_2 = 12$$

$$2x + 4y + H_3 = 8$$

$$x, y \geq 0$$

### Tabla inicial

Base	VD		Variables			VS
	x	y	A1	A2	H3	
x	6	2	1	0	0	0
A2	8	6	0	1	0	-1
H3	2	4	0	0	1	0
r	0	0	-1	-1	0	0

La tabla inicial es inconsistente porque  
 $A_1$  y  $A_2$  están en la base y no son 0

## Penalización

Base	VD		Variables				VS
	X	y	A1	A2	H3	E2	
A1	6	2	1	0	0	0	6
A2	8	6	0	1	0	-1	12
H3	2	4	0	0	1	0	8
r	14	8	0	0	0	-1	18

$$\underline{VE = X} \quad \underline{RM} \quad \frac{6}{6} = 1 \quad \frac{12}{8} = 1.5 \quad \frac{8}{2} = 4$$

$$\underline{VS = A_1}$$

## Pivote Dividiendo todo entre 6

Base	VD		Variables				VS
	X	y	A1	A2	H3	E2	
$A_1 \rightarrow X$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	1

A2	H3	r
$x = 8 - (8 \cdot 1) = 0$	$x = 2 - (2 \cdot 1) = 0$	$x = 14 - (14 \cdot 1) = 0$
$y = 6 - (8 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$	$y = 4 - (2 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$	$y = 8 - (14 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$
$A_1 = 0 - (8 \cdot \frac{1}{6}) = -\frac{4}{3}$	$A_1 = 0 - (2 \cdot \frac{1}{6}) = -\frac{1}{3}$	$A_1 = 0 - (14 \cdot \frac{1}{6}) = -\frac{7}{3}$
$A_2 = 1 - (8 \cdot 0) = 1$	$A_2 = 0 - (2 \cdot 0) = 0$	$A_2 = 0 - (14 \cdot 0) = 0$
$H3 = 0 - (8 \cdot 0) = 0$	$H3 = 1 - (2 \cdot 0) = 1$	$H3 = 0 - (14 \cdot 0) = 0$
$E2 = -1 - (8 \cdot 0) = -1$	$E2 = 0 - (2 \cdot 0) = 0$	$E2 = -1 - (14 \cdot 0) = -1$
$VS = 12 - (8 \cdot 1) = 4$	$VS = 8 - (2 \cdot 1) = 6$	$VS = 18 - (14 \cdot 1) = 4$

Tabla despues de los calculos

Base	VD	Variables				VS	
	X	y	A1	A2	H3	E2	
A1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	1
A2	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	-1	9
H3	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	6
r	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	0	-1	4

$$\underline{VE = r} \quad \underline{RM} \quad \underline{\frac{1}{3} = 3} \quad \underline{\frac{4}{\frac{10}{3}} = 12} \quad \underline{\frac{6}{\frac{10}{3}} = 18}$$

VS = A2

Pivote Multiplicando todo por  $\frac{3}{10}$

Base	VD	Variables				VS	
	X	y	A1	A2	H3	E2	
$A2 \rightarrow r$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$

X	H3	r
$x = 1 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 1$	$x = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$	$x = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$
$y = \frac{2}{3} - (\frac{1}{3} \cdot 1) = 0$	$y = \frac{2}{3} - (\frac{1}{3} \cdot 1) = 0$	$y = \frac{2}{3} - (\frac{1}{3} \cdot 1) = 0$
$A1 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{5}) = \frac{3}{10}$	$A1 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{5}) = 1$	$A1 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{5}) = -1$
$A2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}) = -\frac{1}{10}$	$A2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}) = -1$	$A2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}) = -1$
$H3 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$	$H3 = 1 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 1$	$H3 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$
$E2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{10}) = \frac{1}{10}$	$E2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{10}) = 1$	$E2 = -1 - (\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{10}) = 0$
$VS = 1 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}) = \frac{3}{5}$	$VS = 6 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}) = 2$	$VS = 4 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}) = 0$

Tabla despues de los calculos

Base	VD			Variables			VS
	X	y	A1	A2	H3	E2	
X	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
y	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
H3	0	0	1	-1	1	1	2
r	0	0	-1	-1	0	0	0

Antes de pasar a fase 2

Existen artificiales en la base? NO

VS en r=0? Si

Entonces podemos pasar a fase 2

Fase 2

$$\min z = 8x + 2y \rightarrow z - 8x - 2y = 0$$

Eliminando las variables artificiales

Base	VD			Variables		VS
	X	y	H3	E2		
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	
y	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$	
H3	0	0	1	1	2	
z	-8	-2	0	0	0	

## Cambio del F0

Paso 1: Convertir x a cero en z  $\rightarrow$  fila 1(x).8 + z

Base	VD	Varrables	VS		
	x	y	H3	E2	
X.8	8	0	0	$\frac{8}{10}$	$\frac{24}{5}$
Z	-8	-2	0	0	0
nuevo Z	0	-2	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{5}$

Tabla modificada despues del paso 1

Base	VD	Varrables	VS		
	x	y	H3	E2	
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
Y	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
H3	0	0	1	1	2
Z	0	-2	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{5}$

Paso 2: Convertir y a cero en z  $\rightarrow$  fila 2(y).2 + z

Base	VD	Varrables	VS		
	x	y	H3	E2	
Y.2	0	2	0	$-\frac{6}{10}$	$\frac{72}{5}$
Z	0	-2	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{5}$
nuevo Z	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$

Tabla modificada despues del paso 2

Base	VD		Variables		VS
	X	y	H3	E2	
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
y	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
H3	0	0	1	1	2
Z	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$

$$\underline{VE = E2} \quad \underline{RM} \quad \underline{\frac{3}{5}} = 6 \quad \text{Las negativas} \\ \underline{\frac{1}{10}} \quad \text{se ignoran}$$

$$\underline{VS = H3}$$

Pivote Multiplicando todo por  $\frac{3}{10}$

Base	VD		Variables		VS
	X	y	H3	E2	
$H3 \rightarrow E2$	0	0	1	1	2

Haciendo Gauss Jordan

$$\text{Fila } X \rightarrow X - \frac{1}{10} \cdot E2$$

Base	VD		Variables		VS
	X	y	H3	E2	
$\frac{1}{10} \cdot E2$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
nuevo X	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$

Haciendo Gauss Jordan

$$\text{Fila } Y \rightarrow Y + \frac{3}{10}E_2$$

Base	VD		Variables		VS
	X	Y	H3	E2	
$\frac{3}{10} \cdot E_2$	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
X	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
nuevo X	0	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{9}{5}$

Haciendo Gauss Jordan

$$\text{Fila } Z \rightarrow Z - \frac{1}{5} \cdot E_2$$

Base	VD		Variables		VS
	X	Y	H3	E2	
$\frac{1}{5} \cdot E_2$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
X	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
nuevo X	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{39}{5}$

Tabla final

Base	VD		Variables		VS
	X	Y	H3	E2	
X	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$
Y	0	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{9}{5}$
E2	0	0	1	1	2
Z	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{39}{5}$

$$X = \frac{2}{5}$$

$$Y = \frac{9}{5}$$

$$\min Z = 8 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{39}{5}$$

Tipo de caso: Solución Única

Ejercicio #2

Sea  $w = r$  (para no enredarse)

Objetivo: Simplex para  $M \rightarrow \max$

$$\text{Max } z = 24x + 16y + 16w$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 12x + 24y + 8w &\leq 80 \\ 8x + 4y + 8w &= 60 \\ x, y, w &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Max } z = 24x + 16y + 16w$$

Sujeto a:

$$12x + 24y + 8w \leq 80$$

$$8x + 4y + 8w = 60$$

$$x, y, w \geq 0$$

Forma estandar para gran M

$$\text{Max } z = 24x + 16y + 16w \rightarrow z - 24x - 16y - 16w + MA_2 = 0$$

Sujeto a:

$$12x + 24y + 8w + H_1 = 80$$

$$8x + 4y + 8w + A_2 = 60$$

$$x, y, w \geq 0$$

Tabla Inicial

Base	VD			Variables		VS
	x	y	w	H <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	
H <sub>1</sub>	12	24	8	1	0	80
A <sub>2</sub>	8	4	8	0	1	60
z	-24	-16	-16	0	M	0

Penalización; Viejo z - m. Fila A<sub>2</sub>

Base	VD			Variables		VS
	x	y	w	H <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	
H <sub>1</sub>	12	24	8	1	0	80
A <sub>2</sub>	8	4	8	0	1	60
z	-24-8M	-16-4M	-16-8M	0	0	-60M

$$\underline{VE = X} \quad RMi \quad \frac{80}{72} \approx \underline{6667} \quad \frac{60}{8} = 7,5$$

$$\underline{VS = HI}$$

Pivote; multiplicando todo por  $\frac{1}{72}$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	HI	A2	
HI $\rightarrow X$	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{72}$	0	$\frac{20}{3}$

Haciendo Gauss Jordan (iteración 1)

Fila A2  $\rightarrow A2 - 8 \cdot X$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	HI	A2	
$8 \cdot X$	8	16	$\frac{16}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{160}{3}$
A2	8	9	8	0	1	60
Nuevo A2	0	-32	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{20}{3}$

Haciendo Gauss Jordan (iteración 1)

Fila Z  $\rightarrow Z + (29+8M)X$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	HI	A2	
$(29+8M)X$	$29+8M$	$48+16M$	$16+\frac{16M}{3}$	$2+\frac{2M}{3}$	0	$160+\frac{160M}{3}$
Z	$-29-8M$	$-36-8M$	$-16-8M$	0	0	$-60M$
Nuevo Z	0	$32+12M$	$-\frac{8M}{3}$	$2+\frac{2M}{3}$	0	$160-\frac{20M}{3}$

### Tabla después Gauss-Jordan (Iteración 1)

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
X	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{20}{3}$
A2	0	-3	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{20}{3}$
2	0	$3x + 12y$	$-\frac{8}{3}M$	$x + \frac{2}{3}M$	0	$160 - \frac{20M}{3}$

$$\underline{VE = W} \quad \underline{RM} \quad \frac{\frac{20}{3}}{\frac{2}{3}} = 10 \quad \frac{\frac{20}{3}}{\frac{8}{3}} = 2,5$$

$$\underline{VS = A2}$$

Pivote: Multiplicando todo por  $\frac{3}{8}$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
A2 $\rightarrow w$	0	$-\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{2}$

### Haciendo Gauss Jordan (Iteración 2)

Fila X  $\rightarrow X - \frac{2}{3}w$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
$\frac{2}{3}w$	0	-3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{3}$
X	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{20}{3}$
Nuevo X	1	5	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	S

Haciendo Gauss Jordan (iteración 2)

Fila →  $Z + \frac{8M}{3} \cdot W$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
$\frac{8M}{3} \cdot W$	0	-12M	$\frac{8M}{3}$	$-\frac{2M}{3}$	M	$\frac{20M}{3}$
Z	0	$32 + 12M$	$-\frac{8M}{3}$	$2 + \frac{2M}{3}$	0	$160 - \frac{20M}{3}$
Nuevo Z	0	32	0	2	M	160

Tabla final

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
X	1	5	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	5
W	0	$-\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{2}$
Z	0	32	0	2	M	160

$$x = 5$$

$$y = 0$$

$$\begin{aligned} \max Z &= 29 \cdot 5 + 16 \cdot 0 + 16 \cdot \frac{5}{2} \\ &= 160 \end{aligned}$$

Tipo de caso: Solución Unica

## \* Ejercicio #3

Objetivo: Simplex 2 fases  $\rightarrow$  Max

Sujeto a:

$$\text{Max } Z = 2x + y + 3w$$

$$3x + y + 2w \leq 10$$

$$x - 2y + 3w \geq 6$$

$$2x + 3y - w \leq 9$$

$$x + y + 2w = 7$$

$$x, y, w \geq 0$$

$$(1) 3x + y + 2w + H1 = 10$$

$$\Rightarrow (2) x - 2y + 3w - E1 + A1 = 6$$

$$(3) 2x + 3y - w + H2 = 9$$

$$(4) x + y + 2w + A2 = 7$$

Fase 1:

$$\min r = A1 + A2 \rightarrow r - A1 - A2 = 0$$

Tabla Inicial:

Base	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	3	1	2	1	0	0	0
A1	1	-2	3	0	0	1	0
H2	2	3	-1	0	1	0	0
A2	1	1	2	0	0	0	1
r	0	0	0	0	0	-1	-1

Se penaliza la fila r con el objetivo de deshacernos de las variables artificiales en FO

Penalización:

	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	3	1	2	1	0	0	0
A1	1	-2	3	0	0	1	0
H2	2	3	-1	0	1	0	0
A2	1	1	2	0	0	0	1
r	2	-1	5	0	0	0	0

→ Iteración 1

$$VE = w \quad RM = \frac{10}{2} = 5 \quad \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{7}{2} = 3.5 \quad VS = A1$$

Pivot = 3

	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	7/3	7/3	0	1	0	-2/3	0
w	1/3	-2/3	1	0	0	1/3	0
H2	7/3	7/3	0	0	1	1/3	0
A2	1/3	7/3	0	0	0	-2/3	1
r	1/3	7/3	0	0	0	-5/3	0

→ Iteración 2

$$VE = y \quad RM = \frac{6}{7/3} = 18/7 \quad \frac{3}{7/3} = 9/7 \quad VS = A2$$

Pivot = 7/3

	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	2	0	0	1	0	0	-1
w	3/7	0	1	0	0	1/7	2/7
H2	2	0	0	0	1	1	-1
y	1/7	1	0	0	0	-2/7	3/7
r	0	0	0	0	0	-1	-1

→ r=0 y no hay variables artificiales, el problema es factible. Ahora saltamos a la siguiente fase

Fase 2:

$$FO \text{ original} = z - 2x - y - 3w = 0$$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
H1	2	0	0	1	0	0	3
w	$\frac{3}{7}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{20}{7}$
H2	2	0	0	0	1	-1	8
y	$\frac{1}{7}$	1	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$
z	-2	-1	-3	0	0	0	0

Ajustamos con Gauss-Jordan

- Fila z  $\rightarrow z + 2y$
- ~~Fila z  $\rightarrow z + 3w$~~

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
z	$-\frac{13}{7}$	0	-3	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$

- Fila z  $\rightarrow z + 3w$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
z	$-4\frac{4}{7}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$6\frac{9}{7}$

→ Iteración 1

$$VE = x \quad RM = \frac{3}{2} = 1.5 \quad VS = H1 \quad \text{Pivot} = 2$$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
x	1	0	0	1/2	0	0	3/2
w	0	0	1	-3/14	0	-1/7	31/14
H2	0	0	0	-1	1	-1	5
y	0	1	0	-1/14	0	2/7	15/14
Z	0	0	0	2/7	0	-1/7	75/7

→ Iteración 2

$$VE = EI \quad VS = y \quad \text{Pivot} = 2/7$$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
x	1	0	0	1/2	0	0	3/2
w	0	1/2	1	-1/4	0	0	11/4
H2	0	7/2	0	-5/4	1	0	35/4
EI	0	7/2	0	-1/4	0	1	15/4
Z	0	1/2	0	1/4	0	0	45/4

$$x = 3/2, y = 0, w = 11/4 \quad Z_{\max} = 45/4 \approx 11.25$$

Tipo de caso: Solución Óptima única

\* Ejercicio 4

Objetivo: Simplex Gran M → Min

$$\text{Min } z = 3x + 4y$$

Sujeto a:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 3 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq -2 \\ y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\} \text{Estandar (Gran M - Min)}$$

$$\begin{array}{l} (1) 3x + y - S_1 + A_1 = 3 \\ (2) x + y + S_2 = 5 \\ (3) -x + S_3 = 2 \\ (4) y + S_4 = 10 \end{array}$$

Tabla Inicial

	x	y	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$A_1$	R
$A_1$	3	1	-1	0	0	0	1	3
$S_2$	1	1	0	1	0	0	0	5
$S_3$	-1	0	0	0	1	0	0	2
$S_4$	0	1	0	0	0	1	0	10
$Z$			$3M - 3$	$M$	0	0	0	$3M$

## Penalización

	X	Y	S1	S2	S3	S4	A1	R
-M(A1)	-3M	-M	M	0	0	0	-M	-3M

	X	Y	S1	S2	S3	S4	A1	R
A1	3	1	-1	0	0	0	1	3
S2	1	1	0	1	0	0	0	5
S3	-1	0	0	0	1	0	0	2
S4	0	1	0	0	0	1	0	10
Z	<del>-3M-3</del>	<del>M-4</del>	<del>-M</del>	0	0	0	0	3M

## → Iteración 1

$$VE = X \quad RM: \underbrace{\frac{3}{3}}_1 = 1 \quad \cancel{\frac{5}{1}} = 5 \quad \text{Pivot} = 3$$

$\cancel{VS} = A1$

	X	Y	S1	S2	S3	S4	A1	R
X	1	$1/3$	$-1/3$	0	0	0	$1/3$	1
S2	0	$2/3$	$1/3$	1	0	0	$-1/3$	4
S3	0	$1/3$	$-1/3$	0	1	0	$1/3$	3
S4	0	1	0	0	0	1	0	10
Z	0	-3	-1	0	0	0	$-1/3$	3

$$x=1, y=0 \Rightarrow Z_{\min} = 3 \cancel{y}$$

Tipo de caso = Solución única  $\cancel{y}$