Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 1103 - Cálculo y Álgebra Lineal
Tutor: Marco Salazar Vega

Tiempo disponible: 2 horas y 30 minutos
Periodo: II Semestre 2024
Puntaje total: 30 puntos

Tercer examen parcial

Ordinario (Solución)

Instrucciones:

1. El examen consta de **siete preguntas** de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas y 30 minutos** para contestar los ítems del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Considere la matriz definida por $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) [**3 puntos**] Calcule $\det(M)$ utilizando la definición de determinante.

$$|M| = 0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |M| = 0 + 3[-2\cdot -1 - 1\cdot 4] + -2[-2\cdot 0 - 1\cdot 1]$$

$$\Rightarrow |M| = 3\cdot -2 - 2\cdot -1$$

$$\Rightarrow |M| = -4$$

b) [**3 puntos**] Si se sabe que $\det(P) = 5$ y $\det(K) = -2$, calcule $\det(P^{-1} \cdot K^T \cdot 2M)$, utilizando propiedades de los determinantes.

$$\det(P^{-1}\cdot K^T \cdot 2M) = \det(P^{-1})\cdot \det(K^T)\cdot \det(2M)$$

$$= \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(K)\cdot 2^3 \cdot \det(M)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot -2\cdot 8 \cdot -4$$

$$= \frac{64}{5}$$

2. [4 puntos] Sean $u = (2, 6, 4)$, $v = (-3, 12, -6)$ y $w = (-2, 1, 5)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que u, v y w son linealmente independientes.

Note que $\alpha u + \beta v + \theta w = \vec{0} \Rightarrow \alpha(2,6,4) + \beta(-3,12,-6) + \theta(-2,1,5) = (0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 0 \\ 6 & 12 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}F_1 \to \tilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & -1 & 0 \\ 6 & 12 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{-4F_1+F_3 \to \tilde{F_3}}{\overset{-6F_1+F_2 \to \tilde{F_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 21 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{21}\tilde{F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{3}{2}F_2+\tilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{9}\tilde{F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{-\frac{1}{3}F_3+\tilde{F_2}}{\overset{\frac{1}{2}F_3+\tilde{F_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, se demuestra que u, v y w son linealmente independientes.

3. [4 **puntos**] Sean $u = (1, -1, 1)$ y $v = (1, 0, 1)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Halle los vectores m y n en $\mathbb{R}^3$ que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

a) $m \parallel u$

b) $n + v = m$

c) La proyección de n sobre v es igual a $-2v$

Sean $m = (a, b, c)$ y $n = (d, e, f)$ vectores en $\mathbb{R}^3$

Condición (a)

$$(a, b, c) = \lambda(1, -1, 1) \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = -\lambda \\ c = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Condición (b) $(d, e, f) + (1, 0, 1) = (a, b, c) \Rightarrow (d+1, e, f+1) = (a, b, c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} d+1 = a \\ e = b \\ f+1 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = a-1 \\ e = b \\ f = c-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \lambda - 1 \\ e = -\lambda \\ f = \lambda - 1 \end{cases}$$

Condición (c) $\text{proy}_v^n = -2v \Rightarrow \dfrac{v \cdot n}{\|v\|^2} \cdot \cancel{v} = -2\cancel{v}$

$$\Rightarrow \frac{(1,0,1) \cdot (d,e,f)}{\left(\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}\right)^2} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{d+f}{2} = -2$$

$$\Rightarrow \lambda - 1 + \lambda - 1 = -4$$

$$\Rightarrow 2\lambda - 2 = -4$$

$$\Rightarrow 2\lambda = -2$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

Así $m = \overset{a}{(-1}, \overset{b}{1}, \overset{c}{-1)}$ y $n = \overset{d}{(-2}, \overset{e}{1}, \overset{f}{-2)}$

4. Considere las rectas

$$L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2} \qquad\qquad L_2 : x-1 = -y-5 = z+2$$

a) [**2 puntos**] Verifique que las dos rectas se intersecan y determine su punto de intersección.

Note que

$$L_1 : \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+3 \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = -\lambda-5 \\ z = \lambda-2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Así $\begin{cases} 2t+3 = \lambda+1 \\ 3t+3 = -\lambda-5 \\ 2t = \lambda-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t-\lambda = -2 \\ 3t+\lambda = -8 \\ 2t-\lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t-\lambda = -2 & (1) \\ 3t+\lambda = -8 & (2) \end{cases}$

Sumando (1) y (2), se tiene que:

$$\begin{array}{r} 2t-\lambda = -2 \\ +\ 3t+\lambda = -8 \\ \hline 5t = -10 \\ \Rightarrow t = -2 \end{array}$$

Así, el punto de intersección entre L_1 y L_2 viene dado por:

$$L_1 : \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+3 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow L_1 : \begin{cases} x = 2\cdot -2+3 \\ y = 3\cdot -2+3 \\ z = 2\cdot -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -4 \end{cases}$$

Así, el punto de intersección entre L_1 y L_2 es $\overset{x}{(-1}, \overset{y}{-3}, \overset{z}{-4)}$

b) **[2 puntos]** Determine el ángulo entre L_1 y L_2

Un vector director de L_1 es: $(2,3,2)$

Un vector director de L_2 es: $(1,-1,1)$

El ángulo entre L_1 y L_2 viene dado por: $\theta = \arccos\left(\frac{(2,3,2)\,(1,-1,1)}{\|(2,3,2)\|\cdot\|(1,-1,1)\|}\right)$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{51}}{51}\right)$$

5. [4 puntos] Halle una ecuación del plano que pasa por el punto $S = (2, 1, -1)$ y contiene la intersección entre los planos de ecuaciones $2x - y + 3z = 1$ y $x - 4y + z = 3$

Sea π_1 el plano que pasa por $S = (2,1,-1)$

Sea $\pi_2 : 2x - y + 3z = 1$

Sea $\pi_3 : x - 4y + z = 3$

La intersección entre π_2 y π_3 viene dada por:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-2F_1 + \tilde{F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\tfrac{1}{7}\tilde{F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/7 & -5/7 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{4F_2 + \tilde{F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & -5/7 \end{array}\right)$$

Así:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{11}{7}z = \frac{1}{7} \\ y + \frac{1}{7}z = \frac{-5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} - \frac{11}{7}z \\ y = \frac{-5}{7} - \frac{1}{7}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} - \frac{11}{7}t \\ y = \frac{-5}{7} - \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Así $L: \left(\frac{1}{7}, \frac{-5}{7}, 0\right) + t\left(\frac{-11}{7}, \frac{-1}{7}, 1\right)$

Note que un vector director de L es $d = \left(\frac{-11}{7}, \frac{-1}{7}, 1\right)$. Además, como π_1 contiene al punto $S = (2,1,-1)$.

Ahora:

$$[(x,y,z)-(2,1,-1)]\cdot\left(\frac{-11}{7},\frac{-1}{7},1\right)=0$$

$$\Rightarrow (x-2,y-1,z+1)\cdot\left(\frac{-11}{7},\frac{-1}{7},1\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{7}x+\frac{22}{7}-\frac{1}{7}y+\frac{1}{7}+z+1=0$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{7}x-\frac{1}{7}y+z+\frac{30}{7}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{7}x-\frac{1}{7}y+z=\frac{-30}{7}$$

$$\Rightarrow 11x+y-7z=30$$

Así, una ecuación del plano π es $\pi: 11x+y-7z=30$

6. [5 puntos] Determine una ecuación del plano π que cumple simultáneamente las condiciones siguientes:

a) Es perpendicular al plano $\theta : -2x + y - z = 1$

b) Es paralelo a la recta $L : 1 - x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$

c) Contiene al punto $P(2, -3, 1)$

Sea $n = (a, b, c)$

Condición (c) Como π contiene al punto $P = (2,-3,1)$, se tiene que:

$[(x,y,z) - (2,-3,1)] \cdot (a,b,c) = 0$

$\Rightarrow (x-2, y+3, z-1) \cdot (a,b,c) = 0$

$\Rightarrow a(x-2) + b(y+3) + c(z-1) = 0$

$\Rightarrow ax - 2a + by + 3b + cz - c = 0$

$\Rightarrow ax + by + cz = 2a - 3b + c$ (1)

Condición (a) Como $\pi \perp \theta$, se tiene que $n \perp n_1$, con $n_1 = (-2,1,-1)$ vector normal del plano θ, entonces:

$n \cdot n_1 = 0 \Rightarrow (a,b,c) \cdot (-2,1,-1) = 0$

$\Rightarrow -2a + b - c = 0$ (2)

Condición (b) Como $\pi \parallel L$, entonces $n \perp d$, con $d = (-1,2,3)$ vector director de la recta $1 - x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$, así:

$n \cdot d = 0 \Rightarrow (a,b,c) \cdot (-1,2,3) = 0$

$\Rightarrow -a + 2b + 3c = 0$ (3)

De (2) se tiene que: $-2a + b - c = 0 \Rightarrow b = 2a + c$ (4)

Sustituyendo en (3), se tiene que: $-a + 2b + 3c = 0 \Rightarrow -a + 2(2a+c) + 3c = 0$

$\Rightarrow -a + 4a + 2c + 3c = 0$

$\Rightarrow 3a + 5c = 0$

$\Rightarrow a = \frac{-5c}{3}$

Sustituyendo en (4), se tiene que: $b = 2a + c \Rightarrow b = 2\left(\frac{-5c}{3}\right) + c$

$$\Rightarrow b = \frac{-10c}{3} + c$$

$$\Rightarrow b = \frac{-7c}{3}$$

Así, la solución del sistema sería:

$$\begin{cases} a = \frac{-5c}{3} \\ b = \frac{-7c}{3} \end{cases}$$

Cuando $c = 3$, una solución particular sería: $(\overset{a}{-5}, \overset{b}{-7}, \overset{c}{3})$

Así, un plano que satisface las condiciones dadas sería:

$$ax + by + cz = 2a - 3b + c \Rightarrow -5x - 7y + 3z = 14.$$

7. Considere los puntos $A = (1,2,1)$, $B = (2,3,2)$ y $C = (3,3,-2)$

$a)$ **[1 punto]** Verifique que los puntos A, B y C no son colineales.

$\vec{AB} = B - A = (2,3,2) - (1,2,1) = (1,1,1)$

$\vec{AC} = C - A = (3,3,-2) - (1,2,1) = (2,1,-3)$

$\vec{BC} = C - B = (3,3,-2) - (2,3,2) = (1,0,-4)$

Como $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ no son paralelas, A, B y C no son colineales.

$b)$ **[2 puntos]** Calcule el área del triángulo de vértices A, B y C.

El área del triángulo viene dada por

$$A = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{BC}\|}{2} \Rightarrow A = \frac{\|(1,1,1) \times (1,0,-4)\|}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\|(-4,5,-1)\|}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{42}}{2}$$

$$\Rightarrow A = 3.240370\ (ul)^2$$

Pregunta opcional

El siguiente ejercicio es opcional, sin embargo, se asignará puntaje únicamente a las soluciones completamente correctas, o bien, se asignará un porcentaje parcial a las soluciones que, a criterio del profesor, se acerquen considerablemente a la solución correcta. En caso que la asignación de puntos en este ejercicio provocará que el estudiante obtenga un puntaje en la prueba mayor que el puntaje máximo, entonces se asignará dicho puntaje máximo y una nota de 100 en el examen.

[**4 puntos**] Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Determine los valores propios de A y encuentre un vector propio asociado a alguno de los valores propios encontrados.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow P(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = (-1-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot -3$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = -4 + \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 6$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$ Polinomio Característico

$$\Rightarrow 0 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \lor \lambda = 2$$ Valores Propios

⊛ Si $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-1 & -3 & 0 \\ 2 & 4-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}\tilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{-2F_1 + \tilde{F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así $\begin{cases} x + \frac{3}{2}y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ 0 = 0 \end{cases}$

Un vector propio para $\lambda = 1$ es de la forma $\left(-\frac{3}{2}y, y\right)$, $y \in \mathbb{R}$

⊛ Si $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-2 & -3 & 0 \\ 2 & 4-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{3}\tilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{-2F_1+\tilde{F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así $\begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ 0 = 0 \end{cases}$

Un vector propio para $\lambda = 2$ es de la forma (y, y), $y \in \mathbb{R}$

Las matemáticas son el lenguaje, son el idioma que usó Dios para escribir el mundo.

[Galileo Galilei]