

# Prueba de hipótesis para una medida

## Aceptar o rechazar vs correcta o incorrecta

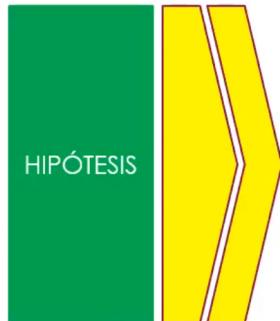
¿Cuál sería la su opinión en relación con la controversia planteada en el título?

La afirmación inicial sobre la composición de la caja, en cuanto a que tenga 5 bolas verdes y 1 bola blanca, le llamaremos una hipótesis y en la Estadística Inferencial la Prueba de Hipótesis constituye la herramienta para la toma de decisiones a partir de la información disponible.

Es importante tener presente que una prueba de hipótesis basa la toma de decisiones en hechos probabilísticos, por lo que no se puede garantizar su certeza, al depender de muchos factores relacionados con la calidad de la muestra usada para dicha toma de decisión. La prueba matemática por su parte, usa un método deductivo para garantizar la veracidad de sus conclusiones apoyado en las reglas de inferencia.

## ¿Qué es una hipótesis?

Si una persona, que podría ser un policía, llega a la escena donde ha ocurrido un accidente, podría de pronto establecer algunas conjeturas sobre lo ocurrido, es decir, proponer sus hipótesis, pero la certeza o falsedad de estas conjeturas deberán verificarse con evidencia tangible.



- ▶ Afirmación sobre la que se desea determinar su realidad
- ▶ Supuesto, posible o no
- ▶ Proposición no demostrada que se admite para orientar una investigación o experimento
- ▶ Conjetura de partida para poder explicar racionalmente la causa real de un hecho.

## Hipótesis Estadística

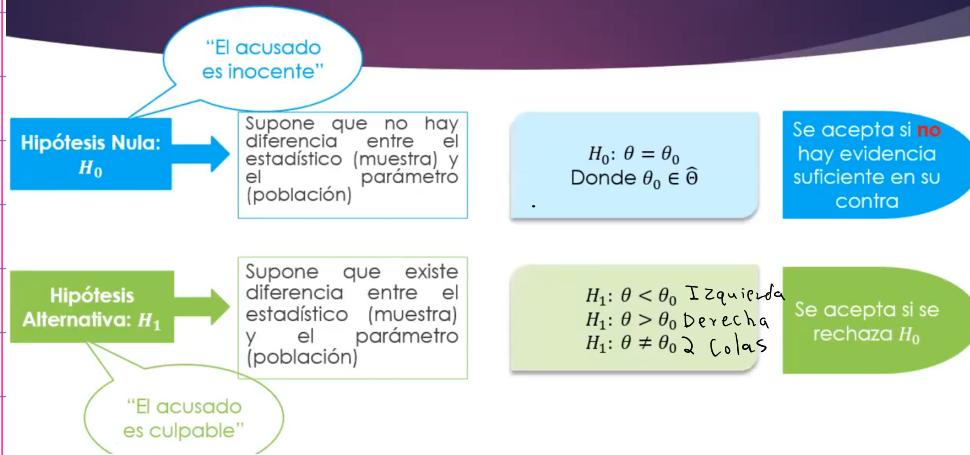
Conjetura o supuesto que se realiza con respecto a una población, concretamente con respecto a un parámetro.

## Prueba de Hipótesis

Es un método de investigación que parte de:

1. La afirmación sobre el valor de un parámetro ( $\mu, \sigma, \sigma^2, p$ )
2. Define dos hipótesis opuestas, donde una de ellas es la afirmación
3. Busca evidencia para aceptarlas o rechazarlas

## Tipos de hipótesis



Se realiza una investigación sobre el gasto promedio por desayuno en la Soda Periférica del Tec. Alguien afirma que una persona gasta en promedio  $\$1300$ .

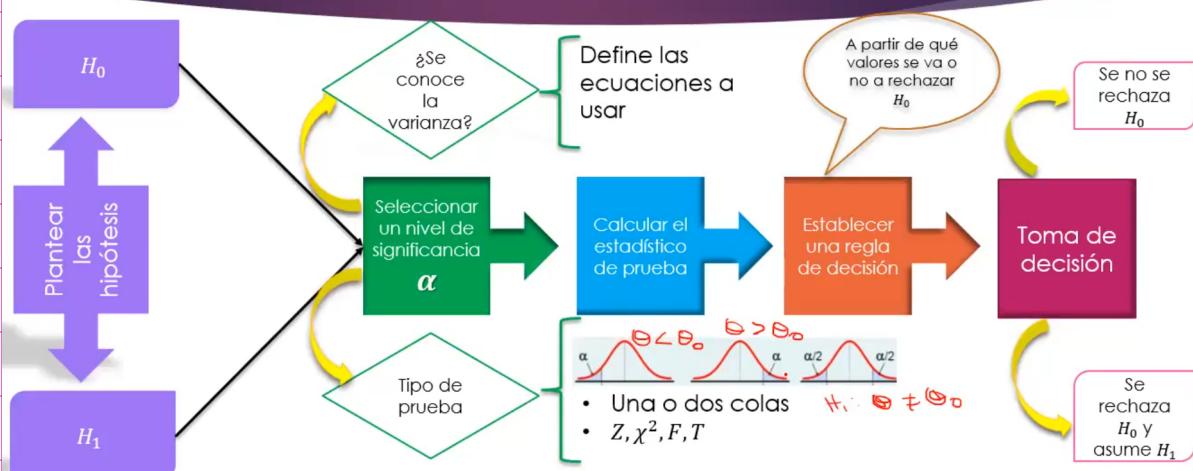
Para el caso anterior, plantee la hipótesis nula y alternativa posibles.

**NOTA:** En las pruebas de hipótesis, lo que se busca es probar  $H_0$ , las hipótesis alternativas poseen el problema de que dan infinitas opciones.

$$H_0: \mu = \$1300$$

$$H_1: \mu \neq \$1300, \mu > \$1300, \mu < \$1300$$

## Proceso para una prueba de hipótesis



Recordemos que a nivel legal "Toda persona es inocente hasta que se demuestre lo contrario", en este sentido  $H_0$  equivale a decir que a priori, la persona es inocente. De esta manera:

- ▶ No rechazar  $H_0$ : No significa necesariamente que se acepta que el "acusado es inocente", sino que NO HAY EVIDENCIA suficiente y fuerte en su contra.
- ▶ Rechazar  $H_0$ : Hay suficiente EVIDENCIA en contra.

en promedio

Un gimnasio recién inaugurado, invita a su afiliación argumentando una reducción de peso de al menos 4.6 kg. Una muestra de 34 personas revela un promedio de reducción de peso de 4.1kg, con desviación típica de 1.8kg.

A un nivel de significancia del 1%.

1. ¿Se puede creer lo tan anunciado por al gimnasio?

$$n = 34 \geq 30 \rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{r}\right)^2$$

$$\bar{x} = 7,1 \rightarrow \text{Estadístico de prueba}$$

$$\sigma = 1,8$$

$$\alpha = \text{Significancia} = 0,01$$

## I- Planteamiento de hipótesis

Indirectamente se considera que sea mayor o igual esto por ser una igualdad

$$H_0: \mu = 7,6$$

$$H_1: \mu < 7,6$$

$H_1$  se suele influenciar del estadístico de prueba, en este caso  $\bar{x} = 7,1$ , el cual es menor a 7,6

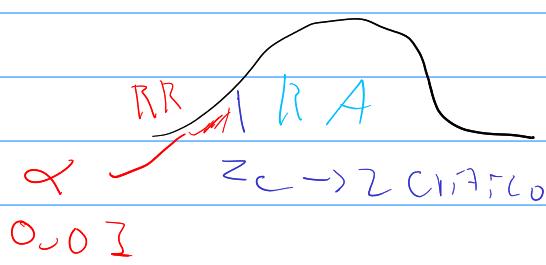
## 2- Definir tipo de prueba (una o dos colas)

Izquierda Derecha Igual

Al ser  $\mu < 7,6$  se

usará una prueba de cola izquierda

$H_1: \theta < \theta_0$  Izquierda  
 $H_1: \theta > \theta_0$  Derecha  
 $H_1: \theta \neq \theta_0$  2 colas



El dibujo es solo ilustración no obligatorio



Región de Rechazo  
Región de Aceptación

Se debe estandarizar  $\bar{X}$ , o sea pasarlo a su equivalente en distribución normal estandarizada. En este paso se encuentra el  $Z_{\text{obs}}$

Formula:  $Z = \frac{\bar{x} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ , como no se conoce  $\sigma$  pero  $n \geq 30$  se tomara  $\sigma = s$  hacerlo normal

$$n = 34 \geq 30$$

$$\bar{x} = 9,1$$

$$\sigma = 1,8$$

$$\alpha = \text{Significancia} = 0,01$$

$u = 7,6$  porque se asume certeza

De  $H_0$

$$Z = \frac{\bar{x} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{9,1 - 7,6}{\frac{1,8}{\sqrt{34}}} \approx -1,6397$$

Definir regla de decisión

$$\alpha = \text{Significancia} = 0,01$$

OJO!, SI Importa  
en la app

$$\text{Calcular } Z_c = Z_{\alpha} = Z_{0,01} = -2,32635$$

No se rechazara  $H_0$  si se cumple

$$Z_{\text{obs}} > Z_c$$

$$-1,6397 > -2,32635 \text{ Verdadero}$$

✓ No se encontró suficiente info para rechazar  $H_0$ . Así lo anunciado por el gym es válido

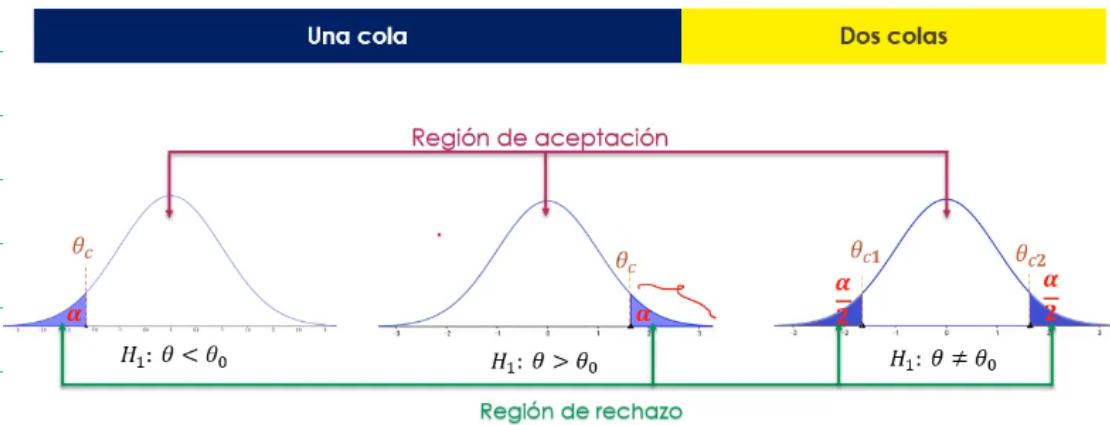
## Tipos de errores

**ERROR TIPO I:** Es conocido como "Condenar al inocente" y ocurre cuando rechazamos una hipótesis nula verdadera. Decimos que hay un efecto o relación pero en realidad no lo hay. La probabilidad de un Error de Tipo I está dada por  $\alpha$  (alfa)

**ERROR TIPO II:** Es conocido como "Dejar libre al culpable" ocurre cuando aceptamos una hipótesis nula falsa. Fallamos en rechazar una hipótesis nula falsa. Hay un efecto o relación pero no lo detectamos. La probabilidad de un Error de Tipo II está dada por  $\beta$  (beta)

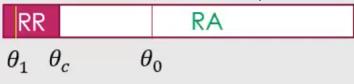
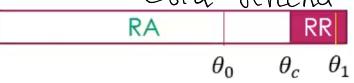
$H_1: \theta < \theta_0$  Izquierda  
 $H_1: \theta > \theta_0$  Derecha  
 $H_1: \theta \neq \theta_0$  2 Colas

## Región de rechazo y aceptación



Verdadera	Rechazamos $H_0$	No Rechazamos $H_0$
Hipótesis nula es verdadera (No diferencia)	Error Tipo I ( $\alpha$ ) Diferencia detectada, pero en realidad no existe	Decisión correcta. Diferencia no existe y por lo tanto no es detectada
Hipótesis nula es falsa (Diferencia)	Decisión correcta. Diferencia existe y es detectada	Error Tipo II ( $\beta$ ) Diferencia no detectada, pero en realidad existe.



Tipo de prueba	Error tipo 1	Error tipo 2
Cola izquierda 	$\alpha = P(\hat{\theta}_{obs} < \theta_c   \theta = \theta_0)$	$\beta = P(\hat{\theta}_{obs} > \theta_c   \theta = \theta_1)$
Cola derecha 	$\alpha = P(\hat{\theta}_{obs} > \theta_c   \theta = \theta_0)$	$\beta = P(\hat{\theta}_{obs} < \theta_c   \theta = \theta_1)$
Dos colas 	$\alpha = P(\hat{\theta}_{obs} < \theta_{c1} \vee \hat{\theta}_{obs} > \theta_{c2}   \theta = \theta_0)$	$\beta = P(\theta_{c1} < \hat{\theta}_{obs} < \theta_{c2}   \theta = \theta_1)$

## Error tipo I y II: conclusiones

En cierta medida los errores Tipo I y II son opuestos, así si se trata de evitar el error tipo I (condenar al inocente) se puede caer en el error tipo II (dejar libre al culpable), esto conlleva a que se pueda controlar solo uno de los errores, el más grave.

¿Cuál de los errores es considerado más grave?

En un juicio se prefiere dejar libre al culpable que condenar a un inocente, es decir se considera más grave condenar a un inocente.

Recuerde que "el acusado es inocente hasta que se demuestre lo contrario", entonces se controla el error tipo I, se acepta inicialmente  $H_0$  (el acusado es inocente) y si no se encuentra suficiente evidencia en contra para rechazar  $H_0$ , se prefiere "dejar libre al acusado" y evitar el error tipo I.

**Coeficiente o nivel de significancia:** representa la probabilidad de cometer error Tipo I y se denota por  $\alpha$  (usualmente se usa  $\alpha = 0,01$  o  $\alpha = 0,05$ )

**Coeficiente de confianza:** Probabilidad de que la hipótesis nula  $H_0$  sea aceptada. Esto corresponde al complemento del Error Tipo I:  $1 - \alpha$

**Riesgo:** representa la probabilidad de cometer Error Tipo II y se denota con  $\beta$ . Se asocia con el riesgo del consumidor: "Se adquiere el producto con el riesgo de que falle"

**Potencia:** representa la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando es falsa y se denota por  $1 - \beta$ . La potencia es conocida como "El poder de una prueba". Para una hipótesis alternativa  $H'_1$  es la probabilidad de que no ocurra el error tipo II.

Suponga que la edad promedio  $\mu$  de los niños de cierta comunidad es mayor que 11 y suponga que la hipótesis alternativa específica es:  
 $H_1: \mu > 12$

### 1. Redacte $H_0$ y $H_1$

Se afirma que:  $\mu > 11$

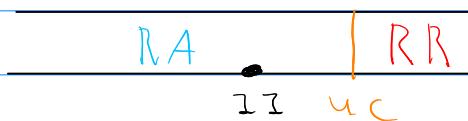
Estadístico de prueba:  $\bar{X}$

Hipótesis:  $H_0: \mu = 11$  (Por que  $H_1$  es  $\neq 11$ )

$$H_0: \mu = 11$$

$H_1: \mu > 11$ , cola derecha

### 2. Establezca las regiones de aceptación y de rechazo (Dibujar)



### 3. Redacte el Error Tipo I y II

Hay que encontrar  $\alpha$  en este caso

Error Tipo I:

$\boxed{\bar{x} \text{ dice } \mu_c \text{ cuando debió } \text{en realidad debió ser } \mu_1}$

$$\alpha = P(H_1 | H_0) = P(\bar{x} > u_c | \mu = 11)$$

Quedarse con  $H_1$  significa que se rechaza  $H_0$ , esto ocurre en RR

Error Tipo II:

$$\beta = P(H_0 | H_1) = P(\bar{x} < u_c | \mu = 12)$$

Quedarse con  $H_0$ , cuando esta es falsa  
Pues la verdadera sería  $H_1'$

3. Calcule la probabilidad de cometer error tipo II de la prueba, suponiendo que el porcentaje de amas de casa que utilizan el detergente es en realidad de 35%.

Se cree que al menos el 40% de las amas de casa de una ciudad utilizan el detergente X. Se toma una muestra aleatoria de 100 amas de casa y si más de 36 utilizan el detergente, se aceptará que el porcentaje poblacional es de al menos el 40%. Recuerde que  $\hat{p}$  es insesgado y suponga  $\hat{p} \sim N(p, \frac{pq}{n})$ .

1. Determine las regiones de aceptación y de rechazo

$$\hat{p} \sim N(p, \frac{pq}{n})$$

$$n = p \\ \sigma^2 = \frac{pq}{n}$$

① Hipótesis: Afirmación:  $p \geq p_0$  &

$H_0: p = p_0$  & ( $\geq$ ), por eso el  $H_1$  es

$H_1: p < p_0$  & el contrario ( $<$ )

La cola izquierda

Para definir las regiones de aceptación y rechazo, es necesario conocer alfa, que en este caso no se nos da, pero, por la redacción del problema se aceptará  $H_0$  siempre que el p estimador sea mayor que 36/100, así:

$$P_c = \frac{36}{100} = 0.36$$

36 ← Condición

100 ← n

RR	RA
Pc 0,36	

2. Calcule la probabilidad de cometer error tipo I de la prueba

Están preguntando por  $\alpha$        $I = \alpha$   
 $II = \beta$

$$P(H_1 | H_0)$$

$$= P(\hat{p} \in \text{RR} | p = 0.7)$$

$$= P(\hat{p} < p_c | p = 0.7)$$

$$= P(\hat{p} < 0.36 | p = 0.7)$$

OPCIÓN I: Dist normal  
no estandar  
 $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ , como no es normal estandar, debemos calcular  $\mu$  y  $\sigma$

$$p = 0.7 \quad q = 0.3 \quad \mu = 0.7 \quad (H_0)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{200}} = 0.04899$$

Entonces con esto se busca el  $P(X < x)$   
en este caso

$$P(\hat{p} < 0.36 | p = 0.7) = 0.20711$$



Opción 2: Estandarizando

$$\text{Fórmula: } \frac{P_C - P}{\sigma}$$

$$n = 0.8 (H_0)$$

$$n = 100 \quad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.09899$$

$$P(\hat{P} < 0.36 | p = 0.4) \quad \hat{P}_C = 0.36$$

$$Z = \frac{0.36 - 0.4}{0.09899} \approx -0.8165$$

$$P(\hat{P} < 0.36 | p = 0.4) = P(Z < -0.8165) = 0.20711$$



Notese que en ambos se busca el  $P(X < x)$

3. Calcule la probabilidad de cometer error tipo II de la prueba, suponiendo que el porcentaje de amas de casa que utilizan el detergente es en realidad de 35%.

Para calcular los Errores de Tipo II se requiere de una hipótesis alternativa específica que se va a asumir como la verdadera en lugar de  $H_0$ .

Se debe calcular  $\beta$ :

Entonces aquí mas bien servía

$H_1$  → Hip. Alt. Especif.

$H_1: p = 0,35$  → cuando  $H_0$  no es rechazada?

$P(H_0 | H_1)$

RR	RA
$p_c = 0,36$	

$$= P(\hat{p} > p_c | p = 0,35)$$

$$= P(\hat{p} > 0,36 | p = 0,35)$$

→ cuando  $\hat{p} > p_c$

Formula:  $\frac{p_c - p}{\sigma}$

Estandarizando 0,36

$$p_c = 0,36, \quad p = 0,35 \text{ (enunciado)}$$

$$n = 100, \quad q = 0,65$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{100}}, \quad Z = \frac{0,36 - 0,35}{\sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{100}}} = 0,2096$$

$$P(\hat{p} > 0,36 | p = 0,35) = P(Z > 0,2096)$$

$$= [0,71699]$$

# 1. ¿Se puede creer lo tan anunciado por al gimnasio?

Pag 3 de este archivo

Un gimnasio recién inaugurado, invita a su afiliación argumentando una reducción de peso de al menos 4.6 kg. Una muestra de 34 personas revela un promedio de reducción de peso de 4.1kg, con desviación típica de 1.8kg.

A un nivel de significancia del 1%.

3. Determine el tamaño de la muestra que se debe usar para el estudio si se de desea un nivel de significancia de 5%, una potencia de 85%, sabiendo que el verdadero promedio de reducción de peso es de 4kg.  $H_0: \mu = 4$ ,  $H_1: \mu < 4$ .

**Coefficiente o nivel de significancia:** representa la probabilidad de cometer error Tipo I y se denota por  $\alpha$  (usualmente se usa  $\alpha = 0.01$  o  $\alpha = 0.05$ )

**Potencia:** representa la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando es falsa y se denota por  $1 - \beta$ . La potencia es conocida como "El poder de una prueba". Para una hipótesis alternativa  $H'_1$  es la probabilidad de que no ocurra el error tipo II.

$$\alpha = 0.05 \quad \beta = 1 - \text{potencia} = 1 - 0.85 = 0.15 \\ \sigma = 1.8$$

$$H_0: \mu = 4.6 \quad (z \geq z_{\alpha})$$

$$H_1: \mu < 4.6, \text{ I cola} \\ \text{Izquierda}$$

Tipo de prueba	Una población
Supuestos: $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H'_1: \mu = \mu_1 \end{cases}$	

$$\text{Una cola} \quad n \geq \frac{(|z_\alpha| + |z_\beta|)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

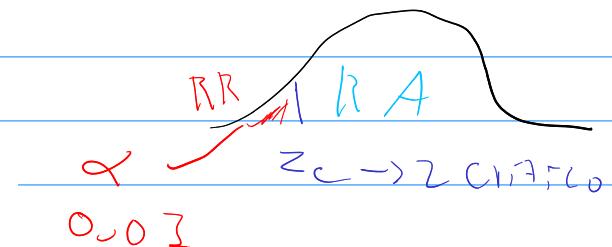
$$\text{Dos colas } H_1: \mu \neq \mu_0 \quad n \geq \frac{(|z_{\alpha/2}| + |z_\beta|)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

$$H_1: \mu = 4$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\beta = 0.15 \quad n \geq \frac{(|z_\alpha| + |z_\beta|)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

$$\sigma = 1.8$$



$$z_\alpha = z_{0.05} = -1.64485$$

$$z_\beta = z_{0.15} = -1.03643$$

X~N( $\mu, \sigma$ )

X~N( $\mu, \sigma$ )

$$H_0: \mu = 4.6$$

$$H_1: \mu = 4$$

Supuestos:  $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H'_1: \mu = \mu_1 \end{cases}$

$$n \geq \frac{(|z_\alpha| + |z_\beta|)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

$$\rightarrow n \geq \frac{(1 - 1.64485 + 1 - 1.03643)^2 \cdot 1.8^2}{(4 - 4.6)^2}$$

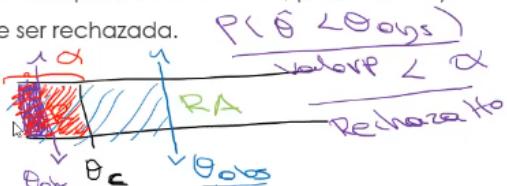
$$n \geq 68.7039$$

$$\boxed{n \geq 65}$$

## Enfoque de valor P o Prueba P

- ▶ Es el nivel de significancia más bajo en el que el valor observado es significativo para rechazar  $H_0$  (recuerde que el nivel de significancia está asociado con  $\alpha$ )
- ▶ Indica el valor mínimo de posibilidad de cometer Error Tipo I. Siempre hay incertidumbre si al rechazar  $H_0$  y aceptar la  $H_1$  como cierta, estemos errando en "culpar al inocente", entonces, si esta incertidumbre es muy pequeña, estaremos más tranquilos de la decisión, pero si es muy grande, mantenemos la premisa de que  $H_0$  no puede ser rechazada.
- ▶ Vídeo: <https://youtu.be/bBfDemiDgP4>

$$\text{No se rechaza } H_0 \quad P(\hat{\theta} < \theta_{0.05}) > \alpha \\ \text{Valor } P > \alpha$$



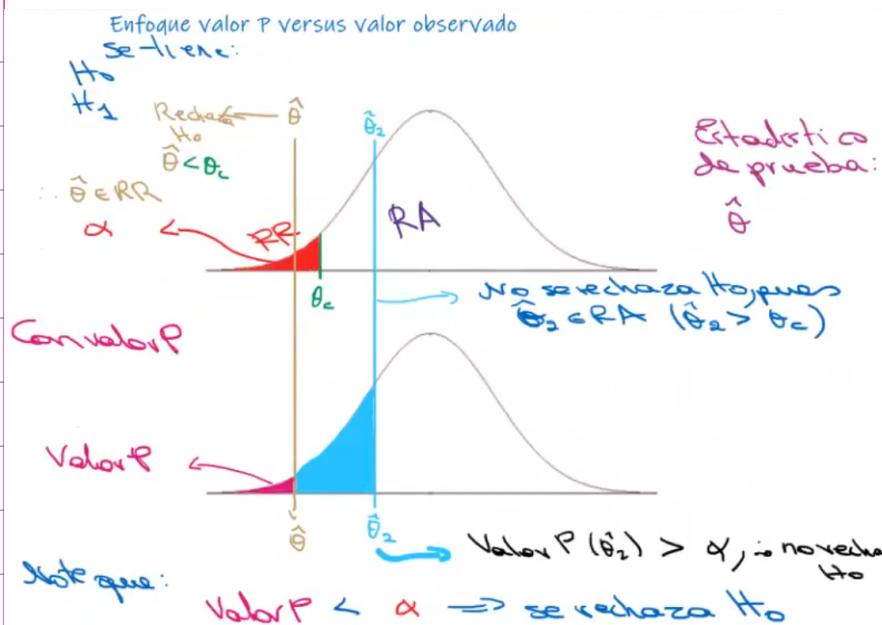
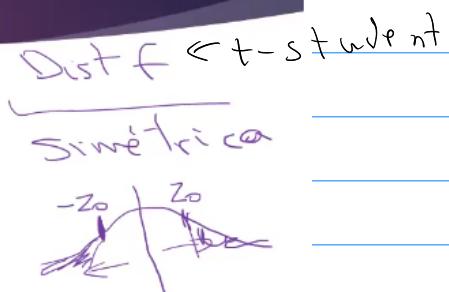
## Valor P: caso de la Dist. Normal

$$\text{Valor } P = \begin{cases} 2(1 - \text{área de } z) & (\text{Caso de dos colas}) \\ 1 - \text{área de } z & (\text{Caso de cola superior}) \\ \text{área de } z & (\text{Caso de cola inferior}) \end{cases}$$



### Decisión:

- ▶ Si  $\text{valor } P < \alpha$ , se rechaza  $H_0$
- ▶ Si  $\text{valor } P \geq \alpha$ , NO se rechaza  $H_0$



Un gimnasio recién inaugurado, invita a su afiliación argumentando una reducción de peso de al menos 4.6 kg. Una muestra de 34 personas revela un promedio de reducción de peso de 4.1kg, con desviación típica de 1.8kg.

A un nivel de significancia del 1%.

¿Se puede creer lo tan anunciado por el gimnasio?

Realice la prueba usando el criterio de Valor P

(s)

$$u = 9,6 \quad n = 34 \geq 30 \quad \bar{x} = 4,1 \quad \sigma = 1,8$$

① Planteamiento de hipótesis

$$H_0: u = 9,6$$

$H_1: u < 9,6$  → Se hizo con Z en la página 3

② Tipo de prueba

Usando valor P

$$\text{Valor } P = P(\bar{x} < \bar{x}_{obs})$$

$$= P(\bar{x} < 4,1)$$

Estandarizando 4,1

Se debe estandarizar  $\bar{x}$ , o sea pasarlo a su equivalente en distribución normal estandarizada. En este paso se encuentra el  $Z_{obs}$

$$Z = \frac{4,1 - 9,6}{\frac{1,8}{\sqrt{34}}} = -1,6197$$

$$\text{Formula: } Z = \frac{\bar{x} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$= P(\bar{x} < -1,6197) = 0,05265$$

Ahora comparando con  $\alpha = 0,01$

Como valor  $P = 0,05265 > \alpha = 0,01$   
entonces no se rechaza  $H_0$ .

