1. **[5 pts]** Considere la función $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{9}{x}$, y sea h un número real con $h \neq 0$. Determine la **simplificación** de la expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\frac{\frac{9}{x+h} - \frac{9}{x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{9x - 9(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{9x - 9x - 9h}{x^2 + hx}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-9h}{x^2+hx}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \frac{-9h}{(x^2+hx)h}$$

$$= -\frac{9}{x^2+hx} = \boxed{-\frac{9}{x(x+h)}}$$

2. **[4 pts]** Considere la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq -5 \\ -4x + 5, & -5 < x \leq 5 \\ -5, & x > 5 \end{cases}$$

Determine los valores de $f(x)$ de la tabla siguiente:

x	-6	-5	4	9
$f(x)$	33	22	-11	-5

$f(-6) = (-6)^2 - 3$
$= 36 - 3$
$\boxed{= 33}$

$f(-5) = (-5)^2 - 3$
$= 25 - 3$
$\boxed{= 22}$

$f(4) = -4(4) + 5$
$= -16 + 5$
$\boxed{= -11}$

$f(9) \boxed{= -5}$

3. Considere la función $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & x < 2 \\ x - 7, & 2 \leq x < 3 \\ 8, & x \geq 3 \end{cases}$

Determine lo que se le indica:
   a) **[1 pt]** La imagen de 2.
   b) **[3 pts]** Las preimágenes de -4.

a) $f(2) = 2 - 7$
$\boxed{= -5}$

b) $-4 = x^2 - 5x$
$-x^2 + 5x - 4 = 0$

$x \quad -1 = x$
$-x \quad 4 = 4x$
$5x$

$(x-1)(-x+4) = 0$

$x - 1 = 0$
$\boxed{x = 1}$

$-x + 4 = 0$
$-x = -4$
$\boxed{x = 4}$

$x - 7 = -4$
$\boxed{x = 3}$
X

$\boxed{-4 = 8}$
Falso

$\boxed{\text{Preimagenes: } 1}$

4. Determine si las siguientes ecuaciones definen a y como función de x. Justifique su respuesta.
   a) **[3 pts]** $x + y^2 = 9$
   b) **[2 pts]** $x^2y + y = 1$

a) $x + y^2 = 9$

$y^2 = 9 - x$

$|y| = \sqrt{9-x}$

$\boxed{y = \pm\sqrt{9-x}}$

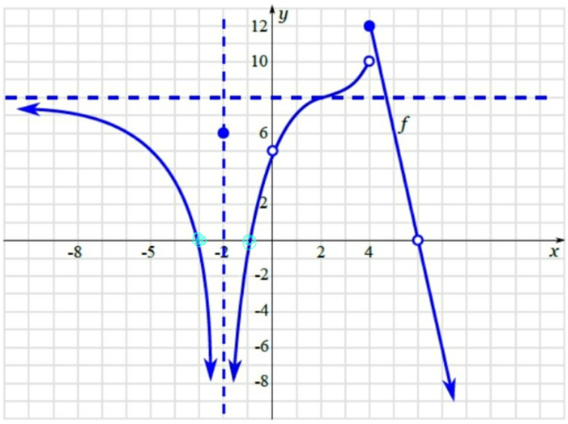
R/ No es funcion por que hay mas de 1 valor asociado a una x

b) $x^2y + y = 1$

$y(x^2+1) = 1$

$\boxed{y = \dfrac{1}{x^2+1}}$

R/ es funcion por a cada x le corresponde 1 sola y



Determine las siguientes características de la función f.

a) Dominio Real
b) Ámbito
c) Intersecciones con ambos ejes coordenados.
d) Las ecuaciones de las asíntotas.
e) Monotonía (Crece, decrece, constante).
f) Signos (Positiva, negativa, neutro).

a) $]-\infty, +\infty[- \{-2, 6, 0\}$

b) $]-\infty, 12]$

c) Ix: $(-3,0), (-1,0)$ Iy $= \emptyset$

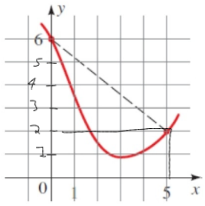
d) Asintota vertical en x

d) Asintota vertical en $x = -2$
Asintota orizontal en $y = 8$

e) $f \nearrow \ ]-2, 4[$
$f \searrow \ ]-\infty, -2[, \ [4, +\infty[$
$f \to$ No hay

$f(x) > 0 : \ ]-\infty, -3[, \ ]-1, 6[$
$f(x) < 0 : \ [-3, -2[, \ ]-2, -1[, \ ]6, +\infty[$
$f(x) = 0 : \ (-3, 0), (-1, 0)$

6. **[2 pts]** De acuerdo con la gráfica de la función, determine la rapidez de cambio promedio de la función entre los valores de la variable dados.



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 5 \qquad y_1 = 6 \quad y_2 = 2$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \frac{2-6}{5-0} = -\frac{4}{5} = \boxed{-0{,}8}$$

7. **[2 pts]** Si usted hace un viaje de $100\ millas$ en $2\ horas$, entonces su promedio de velocidad es igual a:

promedio de rapidez = ——— = ______

$$\text{Velocidad Promedio} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}$$

$$\frac{100 \text{ millas}}{2 \text{ horas}}$$

$$= \frac{100}{2} = 50,$$

R/ La velocidad promedio es de 50 millas por hora

8. **[4 pts]** Considere la función $h: \mathbb{R} - \left\{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{-x^2+2}{2x^3+1}$.

Determine la rapidez de cambio promedio de la función h entre los siguientes puntos, $x = -5$ y $x = -1$.

$$\boxed{\frac{f(a)-f(b)}{b-a}}$$

$$f(-1) = \frac{-(-1)^2+2}{2(-1)^3+1} = \frac{-1+2}{-2+1} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$$

$$f(-5) = \frac{-(-5)^2+2}{2(-5)^3+1} = \frac{-25+2}{-250+1} = \frac{-23}{-249} = \boxed{\frac{23}{249}}$$

$$\frac{-1-\frac{23}{249}}{-1-(-5)}$$

$$= \frac{-1-\frac{23}{249}}{4}$$

$$= \frac{\frac{-1\cdot 249-23}{249}}{4}$$

$$= \frac{\frac{-272}{249}}{\frac{4}{1}}$$

$$\frac{-272}{996} = \boxed{-\frac{68}{249}}$$

9. Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados de las siguientes funciones:
   a) **[3 pts]** $s: D_s \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $s(x) = s^3 + s^2 - 12s$
   b) **[2 pts]** $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x-1} - 2$

a) $Ix: \; s^3 + s^2 - 12s = 0$

$s(s^2 + s - 12) = 0$

$\boxed{s = 0}$

$s \quad 4 = 4s$

$s \quad -3 = -3s$

$\quad\quad\quad s$

$(s+4)(s-3) = 0$

$s + 4 = 0 \qquad s - 3 = 0$

$\boxed{s = -4} \qquad \boxed{s = 3}$

$\boxed{Ix = (-4,0), (3,0), (0,0)}$

$Iy = 0^3 + 0^2 - 12(0)$

$0 + 0 - 0$

$\boxed{0}$

$\boxed{Iy = (0,0)}$

b) **[2 pts]** $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x-1} - 2$

b) $Ix: \; \frac{1}{x-1} - 2 = 0$

$\rightarrow \frac{1}{x-1} = 2$

$\rightarrow 1 = 2(x-1)$

$\rightarrow 1 = 2x - 2$

$\rightarrow -2x = -2 - 1$

$\rightarrow -2x = -3$

$\rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

$Ix = (\frac{3}{\;} , \;)$

$Iy: \; \frac{1}{0-1} - 2$

$= \frac{1}{-1} - 2$

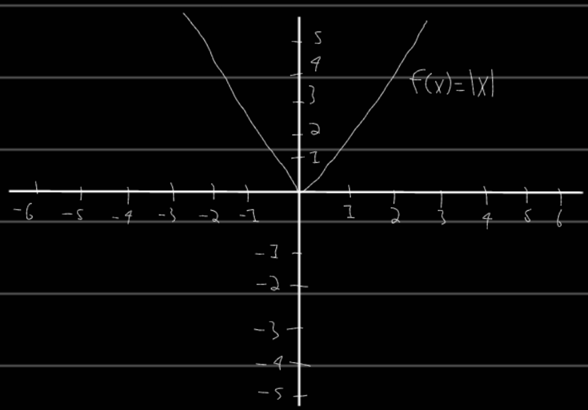
$= -1 - 2$

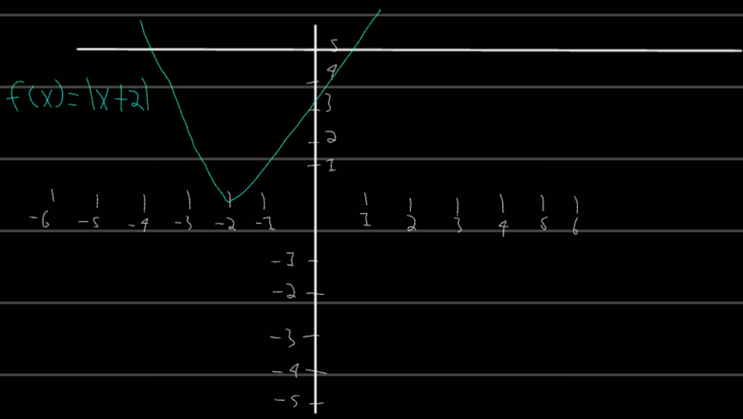
$= -3$

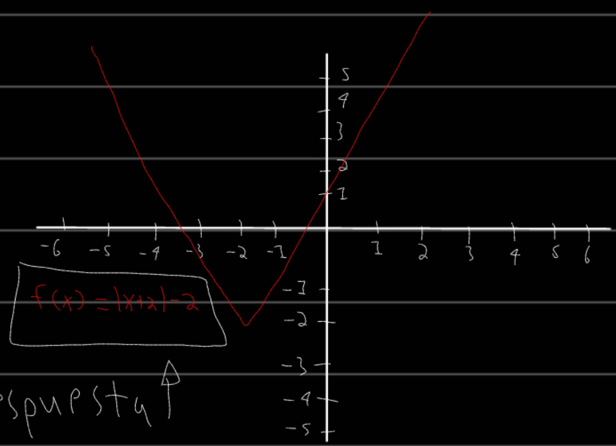
$Iy = (0, -3)$

$x = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

10. **[2 pts]** Trace la gráfica de la función $f(x) = |x+2| - 2$, empezando con la gráfica de una función estándar (básica) y aplicando transformaciones.







Respuesta

11. **[2 pts]** Considere la función g como una transformación de la función f, tal que $g(x) = f(x+6) - 3$. Si el punto $(2,4)$ pertenece al gráfico de la función f, al aplicarle a este punto la transformación, indique si el punto $(-4,1)$ pertenece o no pertenece al gráfico de la función g.

$(2, 4)$
$x \quad y$

$f(2) = \boxed{4}$, se quiere saber si $g(-4) = 1$

$g(-4) = f(-4+6) - 3$
$f(2) - 3$
$4 - 3$
$\boxed{1}$

$\boxed{\text{R/ el punto } (-4, 1) \text{ pertenece a la función}}$

12. Sabiendo que, $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 + x}$. Determine el criterio y dominio de

a) **[3 pts]** $f + g$
b) **[2 pts]** $f \cdot g$
c) **[2 pts]** $\frac{f}{g}$

a) $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1+x}$

$\sqrt{(2-x)(2+x)} + \sqrt{1+x}$

$(2-x)(2+x) \geq 0$ $\qquad$ $1 + x \geq 0$

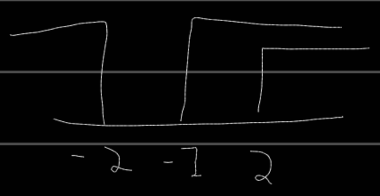
$\boxed{x \geq -1}$

$2 - x = 0$ $\qquad$ $2 + x = 0$ $\qquad$ $D_g = [-1, +\infty[$

$-x = -2$ $\qquad$ $\boxed{x = -2}$

$\boxed{x = 2}$

$D_f = [-2, 2]$



	$-\infty$	-2		-1		2		$+\infty$
$2+x$	$-$	$\bullet$	$+$		$+$		$\vert$	
$1+x$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	
$2-x$	$+$		$+$		$+$	$\bullet$	$-$	
$*$	$+$		$-$		$+$		$-$	

$\boxed{\text{Dominio} = [-1, 2]}$

b) $\sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{(2-x)(2+x)(1+x)} \geq 0$$

$$(2-x)(2+x)(1+x) \geq 0$$

$2-x=0$ $2+x=0$ $1+x=0$

$-x=-2$ $\boxed{x=-2}$ $\boxed{x=-1}$

$\boxed{x=2}$

	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1+x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$*$	$+$		$-$		$+$		$-$

≥ 0

$$\boxed{\text{Dominio} =]-\infty,-2] \cup [-1,2]}$$

c) $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{1+x}} \geq 0$, $1+x \neq 0$

$1+x \neq 0$ $4-x^2 \geq 0$

$\boxed{x \neq -1}$ $(2-x)(2+x) \geq 0$

$2-x=0$ $2+x=0$

$-x=-2$ $\boxed{x=-2}$

$\boxed{x=2}$

	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1+x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$*$	$+$		$-$		$+$		$-$

$$\boxed{\text{Dominio} =]-\infty,-2] \cup]-1,2]}$$

13. **[2 pts]** Considere las funciones $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g: [-2, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, tal que $g(x) = \sqrt{x+2}$. Determine el criterio de la función $(f \circ g)(x)$.

$f(g(x))$

$f(\sqrt{x+2})$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x+2} - 1}}$$

14. Considere la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x-3| - 13x$. Determine lo que se indica:
a) **[1 pts]** Intersecciones con los ejes coordenados.
b) **[2 pts]** Las preimágenes de -2.
c) **[4 pts]** Intervalo(s) donde la función es positiva.

Caso 1

$|x-3|$: $x-3$ si $x-3 \geq 0$ → $x-3 \geq 0$, $\boxed{x \geq 3}$

$-(x-3)$ si $x-3 < 0$ → $x-3 < 0$, $\boxed{x < 3}$

Caso 2

$-\infty$ $]-\infty, 3[$ 3 $[3, +\infty[$ $+\infty$

$]-\infty, 3[$	$[3, +\infty[$
$-(x-3) - 13x = 0$	$x - 3 - 13x = 0$
$-x + 3 - 13x = 0$	$-12x - 3 = 0$
$-14x + 3 = 0$	$-12x = 3$
$-14x = -3$	$\boxed{x = -\frac{1}{4}}$ ✗
$\boxed{x = \frac{3}{14}}$ ✓	

$$\boxed{I_x = \left(\frac{3}{14}, 0\right)}$$

$I_y = |0-3| - 13(0)$

$3 - 0$

$\boxed{3}$

$$\boxed{I_y = (0,3}$$

b) Preimagenes de -2

$$|x-3| \begin{cases} x-3 \text{ si } x-3 \geq 0 & \text{caso 1} \quad x-3 \geq 0 \quad \boxed{x \geq 3} \\ -(x-3) \text{ si } x-3 < 0 & \text{caso 2} \quad x-3<0 \quad \boxed{x<3} \end{cases}$$

$-\infty \quad]-\infty, 3[\quad 3 \quad [3, +\infty[\quad +\infty$

$]-\infty, 3[$	$[3, +\infty[$
$-(x-3) - 13x = 0$	$x - 3 - 13x = 0$
$-x + 3 - 13x = 0$	$-12x - 3 = 0$
$-14x + 3 = 0$	$-12x = 3$
$-14x = -3$	$\boxed{x = -\frac{1}{4}}$ ✗
$\boxed{x = \frac{3}{14}}$ ✓	

Asi que $-(x-3) - 13x = -2$

$-x + 3 - 13x = -2$

$-14x + 3 = -2$

$-14x = -5$

$$\boxed{\text{preimagen de } -2 = \boxed{x = \frac{5}{14}}}$$

c) Intervalo donde es positiva

$$|x-3| \begin{cases} x-3 \text{ si } x-3 \geq 0 & \text{Caso 1} \\ -(x-3) \text{ si } x-3 < 0 & \text{Caso 2} \end{cases}$$

$x-3 \geq 0$

$\boxed{x \geq 3}$

$x-3 < 0$

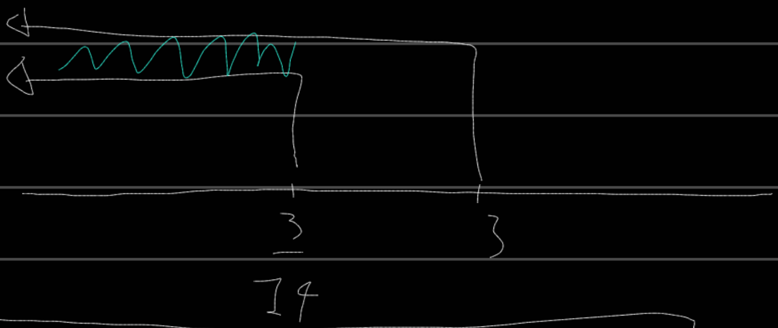
$\boxed{x < 3}$

$-\infty$ $]-\infty, 3[$ 3 $[3, +\infty[$ $+\infty$

$]-\infty, 3[$	$[3, +\infty[$
$-(x-3)-13x=0$	$x-3-13x=0$
$-x+3-13x=0$	$-12x-3=0$
$-14x+3=0$	$-12x=3$
$14x=-3$	$\boxed{x=-\frac{1}{4}}$ ✗
$x=\frac{3}{14}$ ✓	

$\boxed{-\infty, \frac{3}{14}[}$

Intersecar $]-\infty, 3[$ y $]-\infty, \frac{3}{14}[$



R/ La funcion es positiva en el intervalo $]-\infty, \frac{3}{14}[$

15. **[4 pts]** Resuelva la desigualdad no lineal, exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución de $\frac{6}{x-1}-\frac{6}{x}\geq 1$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{6}{x} \geq 1$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{6}{x} - 1 \geq 0 \qquad (x-1)(x)(1)$$

$$\frac{6(x) - 6(x-1) - 1(x-1)(x)}{x(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{6x - 6x + 6 - x^2 + x}{x^2 - x} \geq 0$$

$$\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 - x} \geq 0$$

$-x^2 + x + 6$

$-x \quad 3 = 3x$

$x \quad 2 = \frac{-2x}{x}$

$$\frac{(-x+3)(x+2)}{x(x-1)} \geq 0$$

$\boxed{x \neq 0}$

$x - 1 = 0$

$\boxed{x \neq 1}$

$-x + 3 = 0$

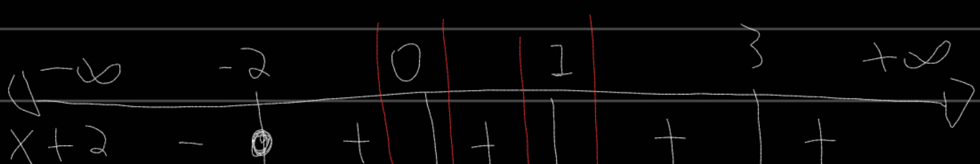
$-x = -3$

$\boxed{x = 3}$

$]-\infty, 3]$

$x + 2 = 0$

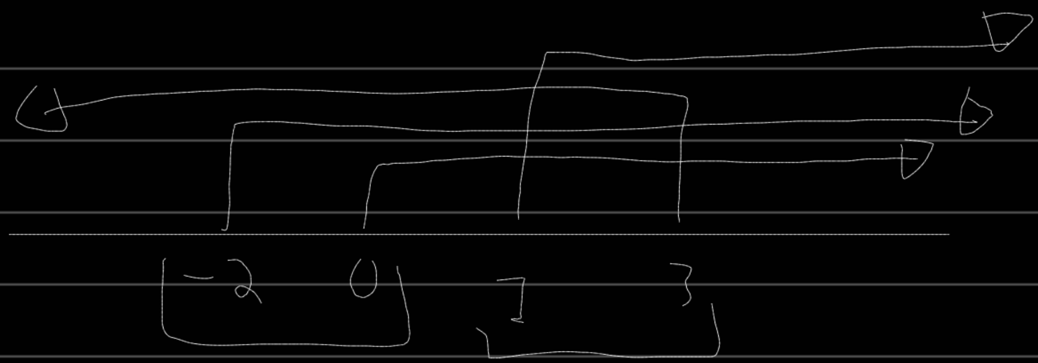
$\boxed{x = -2}$



$x-1$	$-$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x+3$	$+$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$*$	$-$	$+$		$-$		$+$		$-$

≥ 0

$$\boxed{D = [-2, 0[\cup]1, 3]}$$



$$\boxed{[-2, 0[\cup]1, 3]}$$