Instituto Tecnológico de Costa Rica | II Semestre, 2023
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal | Tiempo: 2 horas y 30 minutos
Escuela de Matemática | Puntaje total: 33 pts
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

Tercer Examen Parcial Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **7 preguntas** de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas con treinta minutos** para contestar las preguntas del examen.
3. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
4. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Considere la sucesión $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\right\}_{n\geq 1}$, determine si es una sucesión creciente, decreciente o no es monótona. **[4 puntos]**

   Solución:

   $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\dfrac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}=\dfrac{2n+1}{2(n+1)}<1\Leftrightarrow 2n+1<2n+2,$
   lo cual es cierto para $n\geq 1$.

   Por lo tanto, $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n n!}\right\}_{n\geq 1}$ es decreciente.

2. Si se sabe que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{i^2+2i}\right)=\ln 2+\ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right)$, determine el valor de convergencia de $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{i^2+2i}\right)$. **[2 puntos]**

   Solución:

   $$\lim_{k\to\infty}\left[\ln 2+\ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2}\right)=\ln 2+\ln 1=\ln 2.$$

   Por lo tanto la serie converge.

3. Considere la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(5p)^n}{2^{n+1}}$

a) Determine para qué valores de $p \in \mathbb{R}$, la serie es convergente. **[3 puntos]**

Solución:

$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(5p)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{5p}{2}\right)^n$. Esta serie es geométrica y converge si $\left|\dfrac{5p}{2}\right| < 1$, es decir, si y solo si $-1 < \dfrac{5p}{2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{5} < p < \dfrac{2}{5}$.

Por lo tanto, la serie es convergente para $p \in \left]\dfrac{-2}{5}, \dfrac{2}{5}\right[$.

b) Para los valores de p donde la serie converge, determine el valor de la suma infinita en términos de p. **[3 puntos]**

Solución:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(5p)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{5p}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{5p}{2}\right)^3}{1-\frac{5p}{2}}\cdots = \frac{125p^3}{16-40p}$$

4. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3n^2}{n^2+1}\right]$ **[3 puntos]**

Solución:

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3n^2}{3n^2+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n^2+1} = 0+1 = 1 \neq 0$, la serie es divergente por el criterio de condición necesaria.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos^2(n-1)}{n^3+1}$ **[4 puntos]**

Solución:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos^2(n-1) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 1+\cos^2(n-1) \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n^3+1} \leq \frac{1+\cos^2(n-1)}{n^3+1} \leq \frac{2}{n^3+1} < \frac{2}{n^3} \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}$ es convergente por ser $p-$ serie con $p=3>1$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1+\cos^2(n-1)}{n^3+1}\right]$ es convergente por comparación directa.

.

Continúa en la página siguiente

5. Considere la siguiente serie numérica $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k^3 - 1}$.

   a) Utilice el criterio de series alternadas para verificar que la serie S es convergente.
   . **[3 puntos]**

   Solución:

   $a_k = \frac{1}{2k^3 - 1}$. Sea $f(x) = \frac{1}{2x^3 - 1}$, $x \in [1, \infty[$.
   $f'(x) = \frac{-6x^2}{(2x^3 - 1)^2} < 0$, para $x \geq 1$, por lo que f es decreciente y por ende $a_k = \frac{1}{2k^3 - 1}$ también lo es.

   Por otro lado, $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{2k^3 - 1} = 0$, por lo que, por el crieterio de series alternadas, S es convergente.

   b) Determine el menor valor para N de manera que S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error E_N tal que $E_N < 0{,}001$. **[3 puntos]**

   Solución:

   $|S - S_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{2(N+1)^3 - 1} < 0,001 \Leftrightarrow 1000 < 2(N+1)^3 - 1 \Leftrightarrow 10001 < 2k^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1001}{2}} - 1 = 6{,}93965 < k$.

   Por la tanto, N debe ser al menos 7.

6. Determine el intervalo y radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$. No debe analizar extremos del intervalo. **[4 puntos]**

   Solución:

   $$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)\, 3^{n+1}} (x-5)^{n+1} \cdot \frac{n3^n}{(-1)^{n-1} (x-5)^n} \right|$$
   $$= \frac{|x-5|}{3} \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{3} < 1$$
   De donde $\frac{|x-5|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 3$ (radio 3, centro 5, por lo que el IC es $]2, 8[$), o bien

   $|x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 5 < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8$

7. Si se sabe que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, determine la serie de Maclaurin que corresponde con la función f, donde $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$. **[4 puntos]**

Solución:

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&\Rightarrow\ -\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} \\
&\Rightarrow\ 1-\cos x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} \\
&\Rightarrow\ 1-\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} \\
&\Rightarrow\ \frac{1-\cos x}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}}{x} \\
&\Rightarrow\ \frac{1-\cos x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n)!},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}
$$