Series de potencias

Recordar

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{k} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\sqrt[n]{n}$: $n^{\frac{1}{n}}$ puede ser

$p(n)$ = polinomio

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k,\ k\in\mathbb{R}$

$\left(1+\frac{k}{n}\right)$: puede ser $\left(\frac{n+k}{n}\right)^n$

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\therefore \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

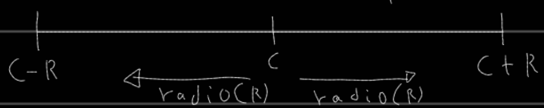
Series de potencia tienen

Forma $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n (x-c)^n$

Serie de pot. centrado en $x=c$

Intervalos donde — conver / diver

Intervalo de conver para "x"



a_n nos permite determinar el criterio de convergencia a usar

→ Razon (mas usados)
Raiz
otro

Usando crit de Razon

$\sum a_n (x-c)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}\cancel{(x-c)^n}(x-c)}{a_n \cancel{(x-c)^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot(x-c)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n}}_{L}$$

Conver $L<1$ Diver $L>1$ U $+\infty$

1) $L\cdot|x-c|<1 \to R=\frac{1}{L}$

$|x-c|<\frac{1}{L}$

$= \frac{-1}{L} < x-c < \frac{1}{L}$

$= c-\frac{1}{L} < x < c+\frac{1}{L}$

$\therefore \left]c-\frac{1}{L}, c+\frac{1}{L}\right[$

Intervalo de Convergen

$(L=0)$

2) $0\cdot|x-c|<1 \to R=\infty$

↳ Desigualdad es siempre verdadera

$L=+\infty$

3) $+\infty\cdot|x-c|<1 \to R=0$

↳ Converge en $x=c$

Todo lo anterior es aplicable cuando se use Crit de raiz

Ejemplos

1) Det interv de conver

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^n}{n^n}, \quad (x-c)^n \to x^n$$

$\therefore c=0$, Centrada en $x=0$ $(x=c)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{a_n} x^n$$

Crit de razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!\cdot x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\cdot x^n}{n^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\cdot \cancel{x^{n}}\cdot |x|\cdot n^{n}}{(n+1)^{n+1}\cdot n!\cdot \cancel{x^{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\cdot|x|\cdot n^{n}}{(n+1)^{n}\cdot \cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}$$

Cuando X quede sola en $\lim_{n\to+\infty}$, Sale Afuera

$$|x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n}}{(n+1)^{n}}$$

$$|x| \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$|x| \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}}_{\text{Puede ser } \left(\frac{n+k}{n}\right)^{n}} = e^{k}, \; k\in\mathbb{R}$

$$|x| \lim_{n\to+} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1} = xe^{-1} = \frac{|x|}{e} < 1$$

1) $|x| \le k \Rightarrow -k \le x \le k$

2) $|x| \ge k \Rightarrow x \ge k \lor x \le -k$

3) $|x| = k \Rightarrow x = k \lor x = -k$

$$\frac{|x|}{e} < 1$$

$|x| < e$ $\quad e = k$

$$\underbrace{-e < x < e}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^{n}}{n^{n}}$ converge en el intervalo $x \in \,]-e, e[$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n}\,(x-1)^{n}}{n}$

Crit de raiz

$$\lim \sqrt[n]{\frac{3^{n}(x-1)^{n}}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3|x-1|}{\sqrt[n]{n}}$$ No depende de x

$$3|x-1| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$ $n^{\frac{1}{n}}$ puede ser

se usa <1 ya que crit de razon $\wedge$ raiz convergen en $\lim_{n\to+\infty} < 1$

$$= 3|x-1| < 1$$
$$x-1 < \frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3} < x-1 < \frac{1}{3}$$
$$1-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}+1$$
$$\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$ Converge en el intervalo $x \in \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$

Para encontrar el radio

1. La serie converge absolutamente solo cuando $x = c$. En este caso, $r = 0$ y $I = \{c\}$.
2. La serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso, $r = \infty$ y $I = \mathbb{R}$.
3. La serie converge absolutamente para todo x tal que $|x-c| < r$ y diverge para todo x tal que $|x-c| > r$. En este caso, el radio de convergencia es la mitad de la longitud del intervalo de convergencia y $I =]c-r, c+r[$, donde los extremos del intervalo pueden ser abiertos o cerrados (según corresponda)

1) Converge para $x=c$, $r=0$, Intervalo $= c$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n (1-x)^n$$

Restriccion de razon y Raiz y geome

$(L=+\infty)$
$+\infty \cdot |x-c| < 1 \to R=0$
↳ Converge en $x=c$

Por criterio de raiz

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[\cancel{n}]{n^{\cancel{n}} \cdot |(1-x)|^{\cancel{n}}}$$ valor Absoluto

no depende de x

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot |1-x|$$

siempre val abs

$$|1-x| \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad , L = +\infty$$

$$1-x = 0$$

$$x = 1$$

$$\boxed{\text{Intervalo} = \{1\}}$$

si el $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$, el radio es 0

$$R = +\infty \; |x-1| < 1$$

$$\boxed{R = 0}$$

2) Converge para $x \in \mathbb{R}$, $r = +\infty$, Intervalo $= \mathbb{R}$ Numeros Reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

Usando criterio de la razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)(x+3)^{n+1}}{\cancel{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}(2n+3)}}{\dfrac{n(x+3)^n}{\cancel{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}}}$$

$(L=0)$

$0 \cdot |x-c| < 1 \to R = \infty$

Intervalo $= \mathbb{R}$

Numeros Reales

Radio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cancel{(x+3)^n} \cdot (x+3)}{n\cancel{(x+3)^n} \cdot (2n+3)}$$

siempre val abs

$$|x+3| \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n^2+3n}$$

$$|x+3| \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{2n^2}$$

$|x+3| \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{1}^{=0}}{\cancel{2}n} = 0$, $L = 0$

$\boxed{\text{Intervalo} = \mathbb{R}}$

$0 \cdot |x+3| < 1$

$\boxed{\text{radio} = +\infty}$

3) La serie converge $\forall x \mid |x-c| < r$

Intervalo (con raiz, razon, geome)

Ejemplo real de esto
$|x-5| < 1$
$-1 < x-5 < 1$
$4 < x < 6$

$x - c < 1$ Restriccion de convergencia

$-1 < x-c < 1$

$-1+c < x < 1+c$

$(L = k)$

$k \cdot |x-c| < 1 \to R = \infty$

Intervalo $= \mathbb{R}$

Radio

Numeros Reales

La resta de $\frac{I_2 - I_1}{2}$ entre 2

Radio va a ser $]x, y[$ $\boxed{\frac{y-x}{2}}$

$]2, 7[\to R = \frac{7-2}{2}$

$= \frac{5}{2}$ //

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1} \cdot (x-1)^n}{8^n}$$

Por crit de raiz

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1} \cdot (x-1)^n}{8^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{|-1|^n} \cdot \sqrt[n]{|3|^n} \cdot \cancel{\sqrt[n]{|3|}}^{=1} \cdot \sqrt{|x-1|^n}}{\sqrt{|8|^n}}$$

$$|x-1| \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{8} \quad (L = k)$$

Restriccion de conver de

Intervalo $\frac{3}{8}|x-1|<1$

crit de raiz

$$3|x-1|<8$$

$$|x-1<\frac{8}{3}$$

$$-\frac{8}{3}<x-1<\frac{8}{3}$$

$$-\frac{5}{3}<x<\frac{11}{3}$$

$\boxed{\text{El inter de conver es } \left]-\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right[}$

$$R =]x,y[\rightarrow \frac{y-x}{2}$$

$$\left]\frac{-5}{3}, \frac{11}{3}\right[\rightarrow \frac{\frac{11}{3} - \frac{-5}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

$\boxed{\text{El radio es } \frac{8}{3}}$