1. **[5 puntos]** Para las variables aleatorias independientes X y Y se tiene que

$$X \sim B\left(15\theta, \frac{1}{3}\right) \quad , \quad Y \sim B\left(16\theta, \frac{1}{4}\right)$$

Además, considere los estimadores para θ determinados por

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X+Y}{9} \quad , \quad \hat{\theta}_2 = X - Y$$

¿Cuál de ellos es mejor estimador para el parámetro θ

$$X \sim B(\underset{n}{15\theta}, \underset{p}{\tfrac{1}{3}}) \qquad Y \sim B(\underset{n}{16\theta}, \underset{p}{\tfrac{1}{4}})$$

Insesgados? $\qquad E(X) \vee E(Y) = np$

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{E(X) + E(Y)}{9} \qquad E(X) = 15\theta \cdot \tfrac{1}{3} = 5\theta$$
$$E(Y) = 16\theta \cdot \tfrac{1}{4} = 4\theta$$

$$= \frac{5\theta + 4\theta}{9} = \frac{\cancel{9}\theta}{\cancel{9}} = \theta \quad \therefore \theta_1 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(X) - E(Y)$$
$$= 5\theta - 4\theta$$
$$= \theta \quad \therefore \theta_2 \text{ es insesgado}$$

Comparando θ_1 con θ_2

$$h = \frac{Var(\theta_1)}{Var(\theta_2)} \quad , \quad \begin{array}{l} < 1 \rightarrow \theta_1 \text{ es mejor} \\ > 1 \rightarrow \theta_2 \text{ es mejor} \end{array}$$

$$= \frac{Var\left(\frac{X+Y}{9}\right)}{Var(X - Y)}$$

Continua abajo

$$\frac{Var\left(\frac{X+Y}{9}\right)}{Var(X-Y)}$$

$Var(aX) = a^2 Var(X)$

Ej:

$Var(-X) = (-1)^2 Var(X)$

$= Var(X)$

$$\frac{\frac{\cancel{Var(X)+Var(Y)}}{9^2}}{\frac{\cancel{Var(X)+Var(Y)}}{1}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{81} < 1 \quad \therefore \theta_1 \text{ es mejor estimador}}$$

2. El proveedor del cargador para celulares marca *Light* está realizando un estudio para estimar el tiempo medio de carga de su producto. En una muestra aleatoria de 49 cargadores se obtuvo una desviación estándar de 5 minutos.

a) **[4 puntos]** Si se concluyó, correctamente que el intervalo para el tiempo de carga medio de estos dispositivos es $]11.8383226, 15.27629571[$, determine el nivel de confianza utilizado.

$n = 49 \geq 30 \to Z \qquad \sigma = 5 \qquad \bar{x} = \frac{a+b}{2}$

$\bar{x} = \frac{11,8383226 + 15,27629571}{2} \qquad E = b - \bar{x}$

$\bar{x} = 13,55730916$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

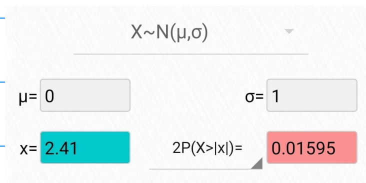
$E = 15,27629571 - 13,55730916$
$= 1,718986555$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = E$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{49}} = 1,718986555$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1,718986555 \cdot \sqrt{49}}{5} \approx 2,41$

$Z_{2,41} = 0,01595$



$1 - 0,01595 \approx 0,98 = \boxed{98\,\%}$

2. El proveedor del cargador para celulares marca *Light* está realizando un estudio para estimar el tiempo medio de carga de su producto. En una muestra aleatoria de 49 cargadores se obtuvo una desviación estándar de 5 minutos.

b) [**4 puntos**] El proveedor de este cargador afirma que el tiempo medio de carga es menor a 15 minutos. ¿Respaldan los datos obtenidos en la muestra esta afirmación, con una significancia de 4 %?

$n = 49 \geq 30 \rightarrow z \quad \sigma = 5$ $\qquad \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$

$\bar{x} = \dfrac{11,8383226 + 15,27629571}{2}$

$\bar{x} = 13,5573091 6$ (inciso a)

$H_0 : \mu = 15 \; (\geq)$

$H_1 : \mu < 15$, cola izquierda

Estandartarizando

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{13,55730916 - 15}{\frac{5}{\sqrt{49}}} \approx -2,02$$

$P(\bar{x} < \mu_{obs})$

$= P(\bar{x} < -2,02) = 0,02169$

Como $p = 0,02169 < 0,04$ entonces se rechaza H_0

$\boxed{\text{R/ Si, los datos respaldan la afirmacion del proveedor}}$

3. [**5 puntos**] Para una variable aleatoria X con distribución $f_X(x|\lambda) = \frac{1+\lambda}{9}\left(\frac{x}{9}\right)^{\lambda}$ para $x \in [0,9]$, se tiene la muestra aleatoria $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 7$, $x_4 = 4$, $x_5 = 8$, $x_6 = 6$ y x_7. Si se sabe que la estimación de máxima verosimilitud para el parámetro λ es 2, determine el valor de x_7.

$$L(\lambda|x_i) = \left(\frac{1+\lambda}{9}\right)^7 \cdot \left(\frac{5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7}{9^7}\right)^{\lambda}$$

$$\ln(\lambda|x_i) = 7\ln\left(\frac{1+\lambda}{9}\right) + \lambda\ln\left(\frac{5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7}{9^7}\right)$$

$$= 7(\ln(1+\lambda) - \cancel{\ln(9)}) + \lambda(\ln(5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7) - 7\ln(9))$$

$$\frac{L'(\lambda|x_i)}{L(\lambda|x_i)} = \frac{7}{\lambda+1} + \ln(5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7) - 7\ln(9)$$

$\lambda = 2$ (enunciado)

$$\frac{7}{2+1} + \ln(5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7) - 7\ln(9) = 0$$

$$\frac{7}{3} - 7\ln(9) = \ln(5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7)$$

$$e^{\frac{7}{3} - 7\ln(9)} = e^{\ln(5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7)}$$

$$e^{\frac{7}{3} - 7\ln(9)} = 5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7$$

$$\boxed{x_7 = \frac{e^{\frac{7}{3} - 7\ln(9)}}{5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6}}$$