Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
MA-1103: Cálculo y Álgebra Lineal

Tiempo máximo: 3 horas
Puntaje máximo: 38 puntos
II Semestre 2019

Examen de Reposición

Miércoles 27 de noviembre

Instrucciones:

- Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas.
- Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen.
- No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz que presenten algún tipo de alteración.
- Durante el desarrollo de la prueba no se permite el uso de dispositivos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

\# 1. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{1+n^2}$ es convergente o no. Debe indicar el o los criterios utilizados. (4 pts)

Solución:

$$0 \leq \cos^2(n) \leq 1$$
$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$
$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (p - serie, $p > 1$), entonces de acuerdo al criterio de comparación directa la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{1+n^2}$ es convergente.

\# 2. Determine el radio de convergencia de la serie siguiente (5 pts)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k-2)^{2k}(x-1)^k}{(2k-1)^{2k}}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(2k-2)^{2k}(x-1)^k}{(2k-1)^{2k}}\right|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-2)^2\,|x-1|}{(2k-1)^2} \\
&= |x-1| \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-2)^2}{(2k-1)^2} \\
&= |x-1| \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2-8k+4}{4k^2-4k+1} \to 1 \\
&= |x-1|
\end{aligned}$$

Por el criterio de la raíz, la serie es convergente si se cumple que $L<1$. Entonces

$$|x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 0<x<2.$$

Así, el radio de convergencia de la serie dada es $R=1$.

\# 3. Sea $\ln(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k},\ \forall x \in\,]0,2]$.

a) Verifique que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. (3 pts)

Solución:

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} \quad\Rightarrow\quad \ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^{k-1}}{k}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^{k-1}}{k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \left.\frac{x^k}{k}\right|_0^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.
\end{aligned}$$

b) Si se sabe que la sucesión $\{a_k\} = \left\{ \dfrac{1}{k^2} \right\}$ es decreciente y tiende a cero, aproxime la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\,\mathrm{d}x$, de modo que el error en la aproximación sea menor que $0,01$. (2 pts)

Solución:
La sucesión $\{a_k\}$ es decreciente y tiende a cero, entonces se puede emplear el teorema de la cota del error.
Por teorema se tiene que $|S - S_k| \leq a_{k+1}$, tomando $a_k = \dfrac{1}{k^2}$, y por otro lado se quiere que $|S - S_k| < 0{,}01$, por lo que basta tomar k conveniente para que $a_{k+1} < 0{,}01$. Entonces

$$\frac{1}{(k+1)^2} < 0,01 \Rightarrow 100 < (k+1)^2 \Rightarrow k < 9.$$

Así, dicha desigualdad es válida a partir de $k = 10$, por lo tanto:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \approx 0,567962,$$

es la aproximación de la integral con un error absoluto menor que 0,01.

\# 4. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^3 = \mathrm{e}^w$, siendo $w = \ln 5 + \dfrac{\pi}{4} i$. (4 pts)

Solución:

$$z^3 = e^{\ln 5 + \frac{\pi}{4} i} \Rightarrow z^3 = 5 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z = \sqrt[3]{5 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Luego, al buscar las raíces cúbicas del número z tenemos:

- $z_0 = \sqrt[3]{5} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi/4 + 0 \cdot 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
- $z_1 = \sqrt[3]{5} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi/4 + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5} \operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
- $z_2 = \sqrt[3]{5} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi/4 + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5} \operatorname{cis}\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$

\# 5. Considere la siguiente matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{array}\right).$$

Halle una ecuación que contenga los valores reales a, b y c de tal manera que dicha matriz aumentada corresponda a un sistema con infinitas soluciones. (4 pts)

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{array}\right) \xrightarrow{2f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ 0 & -3 & 5 & 2a+c \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & -3 & 5 & 2a+c \end{array}\right)$$

$$\underset{3f_2+f_3}{\overset{4f_2+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & a+\frac{4b}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b+c \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene infinitas soluciones si y solo si $2a+b+c=0$. $\square$

\# 6. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, con A invertible. Verifique que (3 pts)

$$\frac{\det\left(A^T A \left(A^T\right)^{-1}\right)}{\det(A)} = 1.$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\det\left(A^T A \left(A^T\right)^{-1}\right)}{\det(A)} &= \frac{\det\left(A^T\right)\det\left(A\right)\det\left(\left(A^T\right)^{-1}\right)}{\det\left(A\right)} \\ &= \frac{\det\left(A^T\right)\det\left(A\right)}{\det\left(A\right)\det\left(A^T\right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

\# 7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a para los cuales $\lambda = 4$ es un valor propio de la matriz A. (4 pts)

Solución:

$$\begin{aligned} \left|\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \ &\Rightarrow \ \begin{vmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \ \left(a^2-4\right)\cdot\begin{vmatrix} a-4 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \ -4(a-2)(a+2)(a-4) = 0 \\ &\Rightarrow \ a = 2 \ \vee \ a = -2 \ \vee \ a = 4 \end{aligned}$$

Así, $\lambda = 4$ es un valor propio de la matriz A si $a \in \{-2, 2, 4\}$. $\square$

#8. Determine si los vectores $u = (6, 8, -4, -1), v = (1, -2, 5, 6)$ y $w = (7, 6, 1, 5)$ son vectores linealmente independientes o linealmente dependientes. (4 pts)

Solución: Considere la ecuación siguiente si s_1, s_2, s_3 son constantes reales

$$s_1 u + s_2 v + s_3 w = \overrightarrow{0}.$$

$$s_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6s_1 + s_2 + 7s_3 \\ 8s_1 - 2s_2 + 6s_3 \\ -4s_1 + 5s_2 + s_3 \\ -s_1 + 6s_2 + 5s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6s_1 + s_2 + 7s_3 = 0 \\ 8s_1 - 2s_2 + 6s_3 = 0 \\ -4s_1 + 5s_2 + s_3 = 0 \\ -s_1 + 6s_2 + 5s_3 = 0 \end{cases}$ se obtiene como conjunto solución $S = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$, lo que implica que los vectores u, v y w son linealmente dependientes.

#9. Considere las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones respectivas:

$$L_1 : (x, y, z) = (3 - 2t, 4 + t, 1 - t), \qquad L_2 : \begin{cases} x = 5 + 2s \\ y = 1 - s \\ z = 7 + s \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Verifique que las rectas son paralelas y determine la ecuación del plano que las contiene. (5 pts)

Solución:

- Vector director de la recta $L_1 : v_1 = (-2, 1, -1)$
- Vector director de la recta $L_2 : v_2 = (2, -1, 1)$

Es claro que $v_2 = -1 \cdot v_1$, entonces las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

Ahora, para dar la ecuación del plano tomamos dos puntos de L_1 y L_2, sean estos $P = (3, 4, 1)$ y $Q = (5, 1, 7)$.

Generamos un vector que pase por dichos puntos $\overrightarrow{QP} = (-2, 3, -6)$.

Se calcula el vector normal del plano

$$N = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \hat{k} = (-3, -10, -4).$$

Así, la ecucación del plano esta dada por:

$$\begin{aligned} -3(x-3)-10(y-4)-4(z-1)=0 \\ -3x+9-10y+40-4z+4 \\ -3x-10y-4z=-53. \end{aligned}$$