

Inducción matemática

Inducción con notación expandida

Utilizando el principio de inducción matemática demuestre que:

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \geq 1$
4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall n \geq 3$
5. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}, \forall n \geq 1$
6. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + (n-1)(n+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}, \forall n \geq 2$
7. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}, \forall n \geq 2$
8. $1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \dots + n(n+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}, \forall n \geq 1$
9. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+1}(n-1) + 2, \forall n \geq 1$
10. $3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + (n+1) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1} - 4, \forall n \geq 2$
11. $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1), \forall n \geq 1$
12. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1, \forall n \geq 1$
13. $\frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \geq 2$
14. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}, \forall n \geq 1$
15. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}, \forall n \geq 1$

$$16. \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 3$$

Inducción con notación sigma

Utilizando el principio de inducción matemática demuestre que:

$$1. \sum_{i=0}^n (7 - 11i) = \frac{(n+1)(14 - 11n)}{2}$$

$$2. \sum_{i=2}^n (i^2 - i) = \frac{n(n^2 - 1)}{3}$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{k - (k-1)^2}{k!} = 1 + \frac{n-1}{n!}$$

$$4. \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

$$5. \sum_{k=1}^n [(k-1)(k-1)! + 1] = n! + n - 1$$

$$6. \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

$$7. \sum_{j=1}^k (2j-1) \cdot 3^j = 3 + (k-1) \cdot 3^{k+1}$$

$$8. \sum_{n=0}^k \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$9. \sum_{j=1}^k (2j-1) \cdot 3^j = 3 + (k-1) \cdot 3^{k+1}$$

$$10. \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{(k^2+k) \cdot 2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$$

Inducción con valor de convergencia

1. Considere la serie $W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$

b) ¿ W converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ 3

2. Considere la serie $M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-3}{2^k}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{k=1}^n \frac{2k-3}{2^k} = \frac{2^n - 2n - 1}{2^n}$

b) ¿ M converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ 1

3. Considere la serie $M = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k-3}{3^k}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{k=2}^n \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$

b) ¿ M converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ $\frac{1}{3}$

4. Considere la serie $J = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i-1}{2^i}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{i=1}^n \frac{3i-1}{2^i} = 5 - \frac{3n+5}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) ¿ J converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ 5

5. Considere la siguiente serie $T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{n=0}^k \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

b) ¿ T converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

6. Considere la serie $M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

b) ¿ M converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ $\frac{1}{2}$

7. Considere la serie $R = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

b) ¿ R converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ $\frac{1}{10}$

8. Considere la serie $H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{n=1}^k \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^k}$

b) ¿ H converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ 1

9. Considere la siguiente serie $T = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{n=3}^k \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{6} - \frac{1}{(k+1)!}$

b) ¿ T converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ $\frac{1}{6}$

10. Considere la serie $M = \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{i^2 + 2i} \right)$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $\sum_{i=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{i^2 + 2i} \right) = \ln(2) + \ln \left(\frac{k+1}{k+2} \right)$

b) ¿ M converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ $\ln(2)$

11. Considere la siguiente serie $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ y sea S_k su k-ésima suma parcial

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que $S_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$

b) ¿T converge o diverge? en caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ 1

12. Considere la siguiente serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i$

a) Calcule las primeras tres sumas parciales de S

b) Demuestre, utilizando inducción matemática que la n-ésima suma parcial de S es $S_n = 2^{n+1} - 2$, para todo entero $n \geq 1$

13. Considere la igualdad F , definida por $1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que F es válida para todo $n \geq 1$

b) Determine si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 5^k$, definida a partir de F converge o diverge, en caso de ser convergente, calcule la suma.

R/ Diverge

14. Dada la sucesión $\{s_n\}$, donde $s_n = \sum_{k=1}^n \log_3 \left(\frac{2k-1}{2k+1} \right)$

a) Muestre, utilizando el principio de inducción matemática que $s_n = -\log_3(2n+1)$

b) Justifique si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log_3 \left(\frac{2k-1}{2k+1} \right)$ converge o diverge, en caso de ser convergente, calcule la suma.

R/ Diverge

15. Considere la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)}$

a) Demuestre, utilizando inducción matemática que el n-ésimo término de las sumas parciales asociado a la serie S es $S_n = \frac{n}{3(2n+3)}$

b) Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n+6) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \right]$ es convergente o divergente.

En caso de ser convergente, calcule su suma.

R/ Diverge

16. Considere la serie $J = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{(k^2+k) \cdot 2^k}$

- a) Demuestre, utilizando inducción matemática que el n-ésimo término de las sumas parciales asociado a la serie J es $J_n = 1 - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$
- b) Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{(k^2+k) \cdot 2^k} \right]$ es convergente o divergente. En caso de ser convergente, calcule su suma.

Ejercicios especiales

1. Utilice el principio de inducción matemática para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^k (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^k a_n + \sum_{n=1}^k b_n$$

2. Sea $r \in \mathbb{R}$, con $r \neq 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ se cumple que:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

3. Considere la sucesión definida por

$$\{a_m\}_{m=4}^{+\infty} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \right\}_{m=4}^{+\infty}$$

Utilice el principio de inducción matemática para demostrar que $a_m = \frac{3m+3}{4m}$