Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden k como $E(X^k)$. Además, se define la función generadora de momentos para X por

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in R_X} e^{tk} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera:

- **Esperanza**

  Consiste en calcular la primera derivada de la función generadora de momentos y luego evaluarla en $t = 0$ así:

  $$E(X) = m'_X(0)$$

- **Varianza**

  Consiste en calcular la segunda derivada de la función generadora de momentos, luego evaluarla en $t = 0$ y finalmente restarle la esperanza al cuadrado, así:

  $$Var(X) = m''_X(0) - [m'_X(0)]^2$$

Sea Y una variable aleatoria discreta cuya función generadora de momentos tiene criterio:

$$m_Y(t) = \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine la esperanza y la varianza de Y R/ $E(Y) = \frac{11}{10}$ y $Var(Y) = \frac{69}{100}$

$$m'_Y(t) = \left(\frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2 \cdot e^{2t}}{5}\right)'$$

$$0 + \frac{3 \cdot e^t}{10} + \frac{2 \cdot e^{2t} \cdot 2}{5}$$

$$\frac{3e^t}{10} + \frac{4e^{2t}}{5}$$

Ahora evaluar en $t=0$ $\frac{3 \cdot e^0}{10} + \frac{4e^{2 \cdot 0}}{5}$

$$\boxed{E(Y) = \frac{11}{10}}$$

$$m''_y(t) = \left(\frac{3e^t}{10} + \frac{4e^{2t}}{5}\right)'$$

$$\frac{3e^t}{10} + \frac{4 \cdot e^{2t} \cdot 2}{5}$$

$$\frac{3e^t}{10} + \frac{8 \cdot e^{2t}}{5}$$

Evaluar $m''_y(t)$ en $t=0$ y restar $(m'_y(0))^2$

$$\left(\frac{3 \cdot e^0}{10} + \frac{8 \cdot e^{2 \cdot 0}}{5}\right) - \left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{69}{100}}$$

Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = \frac{2^{x+1}}{4^x}, \text{ con } x = 2,3,4,\ldots$$

a) Determine la función generadora de momentos de X R/ $m_X(t) = \dfrac{e^{2t}}{2-e^t}$

Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden k como $E(X^k)$. Además, se define la función generadora de momentos para X por

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in R_X} e^{tk} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera:

$$M_x(t) = \sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{2^{x+1}}{4^x}$$

$$2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{tx} \cdot 2^x}{4^x}$$

$$2 \sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{e^t \cdot 2}{4}\right)^x$$

$$2 \sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^x$$

valor de t?

$\frac{e^t}{2} < 1 \rightarrow e^t < 2$

$t < \ln(2)$

$$2 \cdot \left(\frac{\left(\frac{e^t}{2}\right)^2}{1 - \frac{e^t}{2}}\right) = 2\left(\frac{\frac{e^{2t}}{\cancel{4}}}{\frac{2-e^t}{\cancel{2}}}\right) = \cancel{2}\,\frac{e^{2t}}{\cancel{2}(2-e^t)}$$

$$\boxed{m_x t = \frac{e^{2t}}{2-e^t}, \quad t < \ln(2)}$$

Esperanza ?

Varianza ?