

1. Considere la siguiente igualdad:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

a) Demuestre, usando inducción matemática que dicha igualdad es válida para toda $n \geq 1$.

$$h=1 \quad S=5 \checkmark$$

$$h=p \quad 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + p \cdot 5^p = \frac{5 + (4p-1) \cdot 5^{p+1}}{16}, \text{ Hi}$$

$$h=p \quad 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + p \cdot 5^p + (p+1) \cdot 5^{p+1} = \frac{5 + (4p+3) \cdot 5^{p+2}}{16}, \text{ HQD}$$

Demó

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + p \cdot 5^p + (p+1) \cdot 5^{p+1}$$

$$\frac{5 + (4p-1) \cdot 5^{p+1}}{16} + (p+1) \cdot 5^{p+1}, \text{ Hi}$$

$$\frac{5 + (4p-1) \cdot 5^{p+1} + 16(p+1) \cdot 5^{p+1}}{16}$$

$$\frac{5 + 5^{p+1} (4p-1 + 16p+16)}{16}$$

$$\frac{5 + 5^{p+1} (20p+15)}{16}$$

$$\frac{5 + 5^{p+1} (5(4p+3))}{16}$$

$$\frac{5 + 5^{p+2} (4p+3)}{16}$$

b) Si $\{S_n\} = \left\{ \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16} \right\}$ corresponde a la sucesión de sumas parciales asociada

a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 5^k$, determine si dicha serie converge o diverge.

(2 puntos)

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{5 + (4h-1) \cdot 5^{h+2}}{16} = +\infty$$

$h \rightarrow +\infty$

16

Diverge

2. Determine todos los valores de b para que de la serie $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{n}{b^n} - \frac{n+1}{b^{n+1}} \right)$ converja y su suma

$$\text{sea } \frac{5}{b^5}$$

$$\frac{5}{b^5} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{b^{k+1}} = 0$$

$$\frac{5}{b^5}, \quad \boxed{b > 1}$$

3. Determine el intervalo de convergencia (NO incluya el análisis de los extremos) de la serie siguiente. (4 puntos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (n+2)! \cdot (x-3)^n}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}$$

Por crit de razón

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{4^k} \cdot \cancel{4} \cdot (k+3) \cdot \cancel{(k+2)!} \cdot \cancel{(x-3)^k} \cdot (x-3)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3k+2) \cdot (3k+5)} = \frac{\cancel{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3k+2)} \cdot (x-3)}{\cancel{4^k} \cdot \cancel{(k+2)!} \cdot \cancel{(x-3)^k}}$$

$$|x-3| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k+12}{3k+5}$$

$$|x-3| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} |x-3| < 1$$

$$|x-3| < \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4} < x-3 < \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{4} < x < \frac{15}{4}$$

$$\boxed{I = x \in \left] \frac{9}{4}, \frac{15}{4} \right[}$$

4. Determine si cada una de las siguientes series convergen o divergen. Debe indicar los criterios aplicados en cada caso.

a) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\arctan k + 4}{(k-4)^2}$

(4 puntos)

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(k) < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{-\frac{\pi}{2} + 4}{(k-4)^2} < \frac{\arctan(k) + 4}{(k-4)^2} < \frac{\frac{\pi}{2} + 4}{(k-4)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} + 4 > \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-4)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} + 4 > \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \text{ p. serie, } p=2 > 1$$

∴ converge

Original converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$

(4 puntos)

Por crit de raíz

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[k]{|1|^{2k}} \cdot \sqrt[k]{\left(2 + \frac{1}{k}\right)^{2k}}}{\sqrt[k]{e^k}}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{k}\right)^2}{e} = \frac{4}{e} > 1$$

∴ Diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{3n} \cdot n^2 \right]$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^3 + 1} - \frac{1}{3^{-n+4}} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + n^2}{n^3 + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n+4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n+4}} \\ \text{diverge} \end{array} \right. \quad \text{por } |r| > 1$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - x^2(3x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x - x^4}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

converge

Original diverge

5. Si la función $f: [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ es continua, positiva y decreciente, determine si la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k(\ln k)^2}$ diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente. (4 puntos)

Por criterio de integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \quad u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{1}{u^2} du \\ \left[-\frac{1}{u} \right] \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln(x)} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad |x(x)| \quad |L(x)|$$

$$\frac{1}{L(x)}$$

$$|L(x)|$$

converge absolutamente

6. Asuma que la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^k}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$ es convergente. Determine el menor valor para n de manera que S_n aproxime a S con un error menor a 10^{-6} . **(3 puntos)**

$$N$$

$$N+1$$

$$n+1$$

$$S$$

$$6$$

$$5,54 \cdot 10^{-8} < 10^{-6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^k}{(2k+1)(2k+1)!} = \boxed{-0,1972935}$$