§1. Conjuntos

§1.1. Introducción

Definición 1.1 .

Un *conjunto* es una colección de objetos distintos, llamados sus *elementos* , y cada elemento *pertenece a* , es un *miembro de* o está *contenido en* el conjunto.

- $a \in A$
- $a \notin A$

Si un conjunto tiene un número finito de elementos entonces se le llama un conjunto *finito* ; en caso contrario se le llama un conjunto *infinito* .

Definición 1.2 .

Un conjunto que no tenga elementos se conoce como conjunto *nulo* o *vacío* .

Definición 1.3 .

Dos conjuntos A y B se dice que son *iguales* , y se escribe $A = B$ si y solo si tienen exactamente los mismos elementos. Si uno de los conjuntos tiene un elemento que no está en el otro, ellos son distintos y se escribe $A \neq B$.

Nota 1.1 .

De la definición anterior se concluye que *un* conjunto vacío es *el* conjunto vacío, ya que es único. Se denotará por $\emptyset$.

§1.2. **Subconjuntos**

Definición 1.4.
Un conjunto A es un *subconjunto* de un conjunto B, denotado por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es también un elemento de B. Se acepta que $\emptyset$ es un subconjunto de todo conjunto.

Nota 1.2.
Observe que $A \subseteq A$ para todo conjunto. Además es posible redefinir la igualdad entre conjuntos como $A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B$.

Definición 1.5 .
El *conjunto potencia* de un conjunto A, es el conjunto de subconjuntos de A. Se denota por 2^A o $\mathrm{P}(A)$. Vamos a denotar además por $|A|$, al número de elementos del conjunto A.

Teorema 1.1 .
Sea n un entero no negativo. Si A es un conjunto con n elementos, entonces hay 2^n subconjuntos diferentes de A.

Es decir, $|\mathrm{P}(A)| = |2^A| = 2^{|A|}$.

§1.3. **Operaciones**

Definición 1.6 .

Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera del conjunto universo $\mathcal{U}$. Entonces:

- $\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$
- $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \land x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \lor x \in B\}$
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $A \triangle B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$
- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \land y \in B\}$

Definición 1.7 .

Dos conjuntos A y B se dicen que son *disjuntos* o *mutuamente exclusivos* si no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \emptyset$.

Definición 1.8 .

Algunas leyes de conjuntos:

- Identidad: $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \mathcal{U} = A$
- Absorción: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$; $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Idempotencia: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
- Complementos: $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$
- Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Distributividad:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

§1.4. **Principio de inclusión–exclusión**

Definición 1.9 (Principio de inclusión-exclusión.).

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| \quad \textbf{si} \quad A \cap B = \emptyset \\
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\
&\quad + |A \cap B \cap C| \\
\left| \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad - \sum_{i<j<k<l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \cdots
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.1 .

En una clase de 50 alumnos, 30 utilizan python para programar, 25 utilizan C, y 10 utilizan ambos. ¿Cuántos alumnos utilizan C o python para programar?

R/ 45

Ejemplo 1.2 .

En un lote de 100 de un producto específico, se encuentran los defectos D_1, D_2 y D_3 presentes en algunos de los productos. Sean A, B y C los subconjuntos que tienen los defectos D_1, D_2 y D_3 respectivamente. Si $|A| = 23$, $|B| = 26$, $|C| = 30$, $|A \cap B| = 7$, $|A \cap C| = 8$, $|B \cap C| = 10$ y $|A \cap B \cap C| = 3$, ¿cuántos productos no tienen ningún defecto? R/ 43

Ejemplo 1.3 .

Un psicólogo realizó un experimento con 50 ratones en un laberinto, y reporta que 25 eran machos; 25 ya estaban entrenados; 20 doblaron a la izquierda (en el primer punto de escogencia), 10 eran machos entrenados; 4 machos voltearon a la izquierda; 15 ratones entrenados voltearon a la izquierda; y 3 machos previamente entrenados voltearon a la izquierda.

a) ¿Cuántas hembras entrenadas había? R/ 15

b) ¿Cuántas que estaban sin entrenar no doblaron a la izquierda? R/ 6

Ejemplo 1.4.

Un profesor tiene 24 libros de introducción a la computación, y está interesado en la forma en que tratan los temas de compiladores (A), estructuras de datos (B) e intérpretes (C). Los siguientes datos representan la cantidad de libros que contienen material relacionado a estos temas: $|A| = 8$, $|B| = 13$, $|C| = 13$, $|A \cap B| = 5$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 6$ y $|A \cap B \cap C| = 2$.

a) ¿Cuántos libros incluyen el material de solo uno de los temas? R/ 12

b) ¿Cuántos libros no tratan ninguno de los temas? R/ 2

Ejemplo 1.5 .

En una exposición científica individual de una escuela, 34 estudiantes recibieron premios por sus proyectos científicos. Se dieron 14 premios por proyectos de biología, 13 de química y 21 de física. Si tres estudiantes recibieron premios en las tres áreas temáticas, ¿cuántos recibieron premios por exactamente:

a) un área temática? R/ 23

b) dos áreas temáticas? R/ 8

Ejemplo 1.6 .

Suponga que 100 de los 120 estudiantes de un colegio estudian al menos uno de los idiomas Inglés, Francés y Alemán. Supongamos también que 65 estudian Inglés, 45 estudian Francés, 42 estudian Alemán, 20 Inglés y Francés, 25 Inglés y Alemán y 15 Frances y Alemán. Determine:

a) ¿Cuántos estudian los tres idiomas?

b) ¿Cuántos estudian Inglés y Francés pero no Alemán?

c) ¿Cuántos estudian solo Inglés?

Ejemplo 1.7 .

En un grupo de Probabilidades se realizó una encuesta sobre los dispositivos que usan los estudiantes para jugar videojuegos. A 8 personas les gusta jugar en consola, a 5 les gusta jugar en PC y a 7 les gusta jugar en celular. Se descubrió que no hay estudiantes que les guste jugar en PC y celular. Solo hay 2 que les gusta jugar en consola y PC. Además, a 3 les gusta jugar en consola y celular. ¿Cuántos estudiantes respondieron en la encuesta que les gusta jugar en alguno de los tres dispositivos mencionados?

Ejemplo 1.8 .

Se entrevistaron a los usuarios de cierto autobús. Se destacan tres preguntas de sí o no: ¿volvería a usar el servicio?, ¿recomendaría el transporte? y ¿le agradó la actitud del chofer? De las 245 personas que respondieron «Sí» a al menos una de las preguntas antes mencionadas, 25 marcaron afirmativa la primera únicamente, 61 respondieron afirmativa la segunda pero no la primera, y 32 respondieron afirmativa la tercera únicamente. ¿Cuántas personas marcaron la primera pregunta como afirmativa?

Ejemplo 1.9 .

Un banco hace un estudio con 500 de sus clientes. De estas personas, 360 personas tienen algún tipo de crédito (vivienda, automóvil o tarjeta), 150 personas tienen un crédito de vivienda, 100 personas tienen un crédito para automóvil y 300 personas tienen deudas en su tarjeta de crédito. Se supo también que 77 personas tienen crédito de vivienda y automóvil, 78 tienen deudas en la tarjeta y crédito de automóvil, y 97 tienen deuda en la tarjeta y crédito de vivienda. ¿Cuántas personas tienen los tres tipos de crédito de ese banco (vivienda, automóvil y tarjeta)?

Ejemplo 1.10 .

En una compañía multinacional, se realiza un estudio de las habilidades de 300 empleados, de los cuales, 210 trabajan en alguna de las siguientes tres áreas: Análisis de Datos, Desarrollo de Software y Gestión de Proyectos. Se sabe que en Análisis de Datos trabajan 150 personas, en Desarrollo de Software trabajan 120 personas y en Gestión de Proyectos trabajan 100 personas. Además, 60 personas trabajan en Análisis de Datos y Gestión de Proyectos, 50 personas trabajan en las tres áreas, y 190 personas trabajan en Análisis de datos o en Desarrollo de Software.

a) ¿Cuántas personas trabajan únicamente en Análisis de Datos?

b) ¿Cuántas personas trabajan en exactamente dos áreas?

Ejemplo 1.11 .

Se encuestó a 100 científicos sobre las técnicas que utilizaron en sus proyectos. Del total de encuestados, 40 utilizaron redes neuronales, 55 emplearon clustering y 45 trabajaron con optimización de hiperparámetros. Se sabe que 96 científicos usaron al menos una de estas técnicas, 7 combinaron las tres metodologías y 13 utilizaron tanto redes neuronales como clustering. Además, el número de investigadores que usaron exclusivamente clustering con optimización es igual al número que usó únicamente redes neuronales con optimización.

a) Determine cuántos científicos usaron exactamente dos técnicas.

b) Calcular cuántos investigadores trabajaron exclusivamente con una sola metodología.

§3. Reglas básicas de conteo

Ejemplo 3.1 Hay n ladrillos rojos (con n un número par) y 3 ladrillos azules, todos indistinguibles (salvo por el color). Se van a colocar en una fila. Determine la cantidad total de formas de colocarlos si entre dos ladrillos azules siempre debe haber la misma cantidad de ladrillos rojos.

§3.1. **Regla de la suma**

Definición 3.1 Regla de la suma.

Al separar un problema en casos **disjuntos**, se resuelve cada caso de manera independiente, y luego se **suman** los resultados para obtener la respuesta.

§3.2. **Regla del producto**

Definición 3.2 Regla del producto.

Si una tarea se puede realizar de m formas distintas, y otra subsecuente se puede realizar de n formas distintas, entonces ambas tareas se pueden realizar de $m \cdot n$ formas distintas.

Nota 3.1 Siempre que multiplicamos, estamos asumiendo que el orden importa.

Ejemplo 3.2 Un alfabeto reducido está conformado por cinco letras distintas y seis números diferentes. ¿Cuántas palabras de cuatro símbolos se pueden formar si:

a) no hay restricciones?

b) los símbolos deben ser distintos?

c) se permite repeticiones y no se permite que haya dos (o más) números adyacentes?

d) no se permiten repeticiones ni que haya dos (o más) números adyacentes?

Definición 3.3 Regla del complemento

$$|A| = |U| - |\overline{A}|$$

Nota 3.2 Recuerde las reglas de DeMorgan:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cdots \overline{A_n}$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cdots \overline{A_n}$$

Ejemplo 3.3 Un alfabeto reducido está conformado por cinco letras distintas y seis números diferentes. ¿Cuántas palabras de cuatro símbolos existen, tales que al menos uno de los símbolos se encuentra repetido una o más veces?

§3.3. **Permutaciones**

Definición 3.4 Ordenar r de n objetos distintos

$$nPr = P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-(r-1))$$

Nota 3.3 Cuando encuentre en un enunciado la palabra “al menos”, piense cómo se puede hacer el ejercicio por complemento. No, en realidad, siempre piense si sería mejor hacer el ejercicio por complemento.

Ejemplo 3.4 Diez personas (4 mujeres y 6 hombres) se sientan en 10 sillas enumeradas del 1 al 10. ¿De cuántas maneras se pueden sentar las personas en las sillas si

a) no hay restricciones?

b) las mujeres deben ir en sillas impares?

c) al menos una mujer debe ir en una silla impar?

Definición 3.5 Permutaciones de n, con objetos repetidos

Sean n objetos, donde hay n_1 objetos iguales de tipo 1, n_2 objetos iguales de tipo 2, ..., n_k objetos de tipo k, tal que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Así, el número de formas de ordenar los n objetos es:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Ejemplo 3.5 Considere la palabra «IMPLEMENTACION»:

a) ¿Cuántos anagramas (permutaciones) existen de esta palabra?

b) Determine el número de anagramas de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas y después de la cuarta posición.

c) Determine la cantidad total de **anagramas de 4 letras** en los que hay a lo sumo dos vocales y las consonantes no se pueden repetir.

Ejemplo 3.6 Considere la palabra «PROCESO». Determine la cantidad posible de anagramas si:

a) no hay restricciones;

b) las dos letras «O» no estén juntas.

c) tengan solo 4 letras en los que hay al menos una vocal.

Ejemplo 3.7 Considere la palabra «COMPROMISO».

a) ¿Cuántos anagramas de esta palabra hay que inicien con vocal?

b) Determine la cantidad de anagramas que se pueden formar con esta palabra en donde las letras «M» deben ir separadas por al menos otra letra.

Ejemplo 3.8

a) Determine la cantidad de anagramas de la palabra **PROBABILIDAD** en los que se cumple que:

   a) tanto las letras **I** como las letras **B** están siempre separadas por al menos una letra.

   b) la letra **P** debe estar antes que la letra **R** y la letra **P** debe estar en la sexta o en la décima posición específicamente.

Ejemplo 3.9 Considere la palabra «DOCUMENTACION»

a) ¿Cuántos anagramas (permutaciones) existen de esta palabra?

b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en las que no queden O juntas ni C juntas?

c) Determine el número de anagramas de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas y después de la cuarta posición.