INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA	DURACIÓN: 2 HORAS MIN.
ESCUELA DE MATEMÁTICA	PUNTOS: 34 PUNTOS
CÀLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL	I SEMESTRE 2014

II Parcial (Solución)

Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadoras programables ni teléfonos celulares.

---

1. Determine la factorización completa de $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 16x + 6$ en $\mathbb{C}$ sabiendo que $\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$ es un cero de $P(x)$. (4 Pts)

$$\begin{array}{cccccc|c}
4 & -12 & 22 & -16 & 6 & & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\
 & 2-2i & -6+4i & 10-6i & -6 & & \\
\hline
4 & -10-2i & 16+4i & -6-6i & 0 & & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\
 & 2+2i & -4-4i & 12+12i & & & \\
\hline
4 & -8 & 12 & 0 & & &
\end{array}$$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 12} = \sqrt{-128} = 8\sqrt{2}i$

$$P(x) = 4\left[x - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\right]\left[x - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\right]\left[x - \left(\frac{8+8\sqrt{2}i}{8}\right)\right]\left[x - \left(\frac{8-8\sqrt{2}i}{8}\right)\right]$$

2. Determine la forma rectangular del número complejo z tal que:

$$\overline{z} + 2 = \ln(-e) - \pi e^{\left(\frac{\pi i}{4} + \ln\sqrt{2}\right)}$$

(4 Pts)

$$\overline{z} + 2 = \ln(-e) - \pi e^{\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i} \rightarrow \overline{z} = \ln\left[e\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)\right] - \pi e^{\ln\sqrt{2}}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right) - 2$$

$$= \ln e + \pi i - \pi\sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) - 2 = -1 - \pi \rightarrow z = -1 - \pi$$

3. Determine el o los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfagan simultáneamente las siguientes condiciones:

$$z^4 = -8(1 + i\sqrt{3})$$

$$Arg\,(z + 2i) = \frac{\pi}{6}$$

(4 Pts)

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i = 16\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{2}\right)\right] = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{3} - i$$

Si $z = a + bi$ entonces $z + 2i = a + (b+2)i$ y como $Arg\,(z+2i) = \frac{\pi}{6}$ se tiene $a > 0$ y $b > -2$, por lo que se descartan z_1 y z_2.

$$z_0 + 2i = 1 + (\sqrt{3} + 2)i \rightarrow Arg\,(z_1 + 2i) = \frac{5\pi}{12}$$

$$z_3 + 2i = \sqrt{3} + (-1 + 2)i \rightarrow Arg\,(z_4 + 2i) = \frac{\pi}{6} \checkmark$$

4. Un sistema de ecuaciones se reduce hasta la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha + 6 \end{array}\right)$$

a) Determine el valor de α de manera que el sistema tenga solución. (1 Pt)

El sistema tiene infinitas soluciones si $3\alpha + 6 = 0 \rightarrow \alpha = -2$.

b) Utilizando el valor de α obtenido en la parte a), determine el conjunto solución del sistema. (2 Pts)

$$x + 0y + 2z = 5 \rightarrow x = 5 - 2z$$

$$y - z = 2 \rightarrow y = z + 2$$

$$S = \{(5 - 2z, z + 2, z)\}\,,\ z \in \mathbb{C}$$

5. Determine el conjunto solución de:

$$\begin{cases} 2x - 8y + 4z = -2 \\ 2x - 4y = 6 \\ 3y - z = 0 \\ x - 4z = 1 \end{cases}$$

(4 Pts)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}\mathbf{F}_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} -2\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ -\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}\mathbf{F}_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} 4\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \\ -3\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ -4\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\mathbf{F}_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} 2\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_2 \\ 2\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

$S = \varnothing$

6. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2i & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2i \end{pmatrix}$. Determine la matriz X si:

$$XA^{-1} - B^T = C^T$$

(4 Pts)

$$X = \left(C^T + B^T\right) A \to X = \left[\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

7. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, determine A^{-1}. (4 Pts)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -F_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-3F_1+F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$3F_2+F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{2}F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-2F_3+F_4 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$2F_4+F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

8. Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & m \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine el valor o los valores de m tales que $|B| = 2$. (4 Pts)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & m \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\left(2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & m \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right) +$$
$$3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -\left[2\left(2-2m\right) - 2\left(2+8\right)\right] + 3\left(2+8\right) = 4m+46$$

$4m + 46 = 2 \rightarrow m = -11$

9. Si $\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ -1 & i & c \\ 3 & 1 & -i \end{vmatrix} = 10$, calcule $\begin{vmatrix} a+6 & b-6c & 2-6i \\ -3 & 3c & 3i \\ 3 & -i & 1 \end{vmatrix}$. (3 Pts)

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ -1 & i & c \\ 3 & 1 & -i \end{vmatrix} = 10 \rightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & b \\ -3 & 3i & 3c \\ 3 & 1 & -i \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ -3 & 3c & 3i \\ 3 & -i & 1 \end{vmatrix} = -30$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a+6 & b-6c & 2-6i \\ -3 & 3c & 3i \\ 3 & -i & 1 \end{vmatrix} = -30$$