Medidas de tendencia central

- **Esperanza**

La esperanza, media o valor esperado de una variable aleatoria discreta X es el promedio ponderado de los valores del rango de X según las probabilidades de que X tome cada uno de estos valores. Así, se define la esperanza como:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{k \in R_X} k \cdot f_X(k)$$

- **Varianza**

Si X es una variable aleatoria discreta tal que $E(X^2)$ converge y $E(X) = \mu_X$, se define la varianza de X como:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right]$$

Este parámetro indica qué tanto varían los valores de la variable con respecto a su esperanza y permite medir la variabilidad de la distribución.

Sea X una variable aleatoria discreta, entonces se cumple que:

$$Var(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\text{Esperanza normal}} - \underbrace{[E(X)]^2}_{\text{Esperanza al cuadrado}}$$

Ojo, los $E(x^2)$ no es esperanza al cuadrado, sino todas las k al cuadrado

donde

$$E(X^2) = \sum_{k \in R_X} k^2 \cdot f_X(k)$$

- **Desviación estándar**

Sea X es una variable aleatoria discreta. Se define la desviación estándar de X como:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad f_X está dada por la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{4}{17}$

Su suma debe ser 1

a) Calcule $E(X)$ R/ $\frac{30}{17}$

$E(x) = \sum x \cdot f(x)$ osea

$$E(x) = 0 \cdot \frac{7}{17} + 1 \cdot \frac{1}{17} + 2 \cdot \frac{2}{17} + 3 \cdot \frac{3}{17} + 4 \cdot \frac{4}{17}$$

$$\boxed{\frac{30}{17}}$$

b) Calcule $Var(X)$ R/ $\frac{800}{289}$

$$\left[0^2 \cdot \frac{7}{17} + 1^2 \cdot \frac{1}{17} + 2^2 \cdot \frac{2}{17} + 3^2 \cdot \frac{3}{17} + 4^2 \cdot \frac{4}{17}\right] - \left(\frac{30}{17}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{800}{289}}$$

c) Calcule σ_X

R/ $\frac{20\sqrt{2}}{17}$

$$\sqrt{\frac{800}{289}} = \boxed{\frac{20\sqrt{2}}{17}}$$

Función de distribución

- **Representación mediante arreglo**

En forma de arreglo, una función de distribución de probabilidad puede verse como:

$$\begin{cases} P(X_i = x) & \text{si} \quad x = a \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad x = b \\ \vdots & \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad x = n \end{cases}$$

con $a, b, \ldots, n \in R_X$ e $i = 0, 1, 2, \ldots$

Es como la tabla pero en forma

$$\begin{cases} 7/17 & \text{si} \quad x=0 \\ 1/17 & \text{si} \quad x=1 \\ 2/17 & \text{si} \quad x=2 \\ 3/17 & \text{si} \quad x=3 \\ 4/17 & \text{si} \quad x=4 \end{cases}$$

0 si $x<0$
$7/17$ si $x<1$
$7/17+1/17$ si $x<2$

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad f_X está dada por la sigui tabla:

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{4}{17}$

Función de distribución acumulada

- **Representación mediante arreglo**

En forma de arreglo, una función de distribución acumulada puede verse como:

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad a \leq x < b \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad b \leq x < c \\ \vdots & \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n \end{cases}$$

con $a, b, c, \ldots, n \in R_X$ e $i = 0, 1, 2, \ldots$

Se tiene una tarjeta con un 100 marcado, dos con un 200 marcado y tres con un 300 marcado. Una persona saca aleatoriamente tres tarjetas. Si X es el total que suman las tres tarjetas:

a) Determine la función de distribución.

Casos posibles:

1 de cada una: $1 \cdot 100 + 1 \cdot 200 + 1 \cdot 300 = 600$
1 de 100 $\wedge$ 2 de 200: 500
1 de 100 $\wedge$ 2 de 300: 700
1 de 200 $\wedge$ 2 de 300: 800
2 de 200 $\wedge$ 1 de 300: 700
3 de 300: 900

Espacio muestral

X	500	600	700	800	900
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

→ Rango
→ Proba $\frac{CF}{CT}$

Hay 2 que dan 700

b) Calcule $E(X)$

$$500 \cdot \frac{1}{6} + 600 \cdot \frac{1}{6} + 700 \cdot \frac{2}{6} + 800 \cdot \frac{1}{6} + 900 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\boxed{700}$$

c) Calcule $Var(X)$

$$\left[500^2 \cdot \frac{1}{6} + 600^2 \cdot \frac{1}{6} + 700^2 \cdot \frac{2}{6} + 800^2 \cdot \frac{1}{6} + 900^2 \cdot \frac{1}{6}\right] - (700)^2$$

$$= \boxed{\frac{50000}{3}}$$

d) Halle la funcion acumulada

x	500	600	700	800	900
$f_x(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

F mayuscula = Acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 500 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 500 \leq x < 600 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6} & 600 \leq x < 700 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6} & 700 \leq x < 800 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6} & 800 \leq x < 900 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} & x \geq 900 \end{cases}$$

Aqui siempre empieza en 0 y se van sumando o "acumulando" los valores

el ultimo es todos sumados y deber dar 1

Una persona paga 400 colones por jugar el juego **Azules**. Este consiste en sacar sucesivamente, sin devolver, dos bolas de una canasta con cinco bolas blancas y tres azules. Por cada bola azul obtenida, gana 300 colones. Sea X el número de bolas azules obtenidas en las dos extracciones.

a) Determine el rango de X. R/ $\{0,1,2\}$

5 Blancas $\wedge$ 3 Azules, 8 en total

Puedo sacar 0, 1, 2 Azules como maximo

R/ $\boxed{\{0,1,2\}}$

b) **Determine la función de distribución de probabilidad.** X = cantidad de bolas azules

$X = 0 \rightarrow BB$

$X = 1 \rightarrow BA, AB$

$X = 2 \rightarrow AA$

X	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$	$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{28}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{14} & \text{si } x = 0 \\ \frac{15}{28} & \text{si } x = 1 \\ \frac{3}{28} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

c) Determine $E(X)$

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$0 \cdot \frac{5}{14} + 1 \cdot \frac{15}{28} + 2 \cdot \frac{3}{28} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

d) Determine $Var(X)$

$$\left[0^2 \cdot \frac{5}{14} + 1^2 \cdot \frac{15}{28} + 2^2 \cdot \frac{3}{28}\right] - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{45}{112}}$$

e) Sea G la ganancia al jugar **Azules**. Exprese G en términos de X. R/ $300X - 400$

Segun enunciado: Por cada bola Azul, gana 300 y paga 400 por jugar

Entonces sea X la cantidad de bolas azules obtenidas

$\therefore \boxed{R/\ G = 300X - 400}$ ← Precio por jugar

Por cada Azul — Cantidad de Azules obtenidas

f) Determine la ganancia ~~esperada~~ Promedio del juego ¿es justo? R/ −175, no

Para determinar algo esperado se aplica $E(X)$ a ambos lados

Formulas importantes
$E(X \pm Y) = E(X) + E(\pm Y)$
$E(CX) = C\,E(X)$
$E(C) = C$
C constante $\in \mathbb{R}$

$$G = 300X - 400$$
$$E(G) = E(300X - 400)$$
$$= E(300X) + E(-400)$$
$$= 300\,E(X) - 400$$
$$= 300 \cdot \frac{3}{4} - 400$$ Inciso c
$$= -175$$

$\boxed{R/\ -175, \text{ no es justo}}$

g) Determine la varianza de G. R/ $\frac{253\,125}{7}$

Para determinar Var de algo se aplica Var(x) a ambos lados

$$G = 300X - 400$$

$$\begin{aligned} Var(G) &= Var(300X - 400) \\ &= Var(300X) + Var(-400) \\ &= 300^2\, Var(X) + 0 \\ &= 300^2 \cdot \frac{45}{112} \\ &= \boxed{\frac{253125}{7}} \end{aligned}$$

Formulas importantes

$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(\pm Y)$

$Var(cX) = c^2\, Var(X)$

$Var(c) = 0$

c constante $\in \mathbb{R}$

Propiedades de la esperanza

Sea c una constante y sea X una variable aleatoria discreta tal que $E(X)$ existe, entonces, se tiene que:

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = c \cdot E(X)$
4. Si $E(X)$ y $E(Y)$ existen, entonces $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Propiedades de la varianza

Sea c una constante y sean X, Y variables aleatorias discretas, entonces, se tiene que:

1. $Var(c) = 0$
2. $Var(X + c) = Var(X)$
3. $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$
4. Si X y Y son variables independientes, entonces $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Sean X, Y dos variables aleatorias discretas tales que $Var(3X+7) = 10$, $E(4X+2) = 9$. Calcule $E(X^2)$

R/ $\frac{601}{144}$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$E(x^2) = Var(x) + [E(x)]^2$$

Este parámetro indica qué tanto varían los valores de la variable con respecto a su esperanza y permite medir la variabilidad de la distribución.

Sea X una variable aleatoria discreta, entonces se cumple que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

donde

$$E(X^2) = \sum_{k \in R_X} k^2 \cdot f_X(k)$$

$E(4x+2) = 9$	$Var(3x+7) = 10$
$E(4x) + E(2) = 9$	$Var(3x) + Var(7) = 10$
$4 \cdot E(x) + 2 = 9$	$3^2 Var(x) + 0 = 10$
$4E(x) = 7$	$Var(x) = \frac{10}{9}$
$E(x) = \frac{7}{4}$	

$E(x^2) = Var(x) - [E(x)]^2$, volviendo

$$\frac{10}{9} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$
$$= \boxed{\frac{601}{144}}$$

Determine la varianza de la variable $Y = \frac{X}{4} - 7$ si $E(Y) = -6$ y $E(X^2) = 17$ R/ $\frac{1}{16}$

Se pide $Var(y)$, así si $y = \frac{x}{4} - 7$, entonces el truco es aplicar Var a ambos lados

$$y = \frac{x}{4}$$
$$Var(y) = Var\left(\frac{x}{4} - 7\right)$$
$$Var(y) = Var\left(\frac{1}{4}x\right) + Var(-7)$$
$$Var(y) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot Var(x) + 0$$
$$Var(y) = \frac{1}{16} Var(x)$$

Ahora saquemos E a ambos lados

$$y = \frac{x}{4} - 7$$
$$E(y) = E\left(\frac{x}{4} - 7\right)$$
$$-6 = E\left(\frac{1}{4}x\right) + E(-7)$$
$$-6 = \frac{1}{4}E(x) - 7$$
$$\frac{1}{4}E(x) = 1$$
$$E(x) = 4$$

Recordando

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$17 - 4^2$$

Enunciado $Var(x) = 1$

$$Var(y) = \frac{1}{16} Var(x)$$
$$\frac{1}{16} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{16}}$$