Convergencia de sucesiones numericas

Sucesiones numericas:

Sea $k \in \mathbb{Z} \wedge f : [k, +\infty[\to \mathbb{R}$

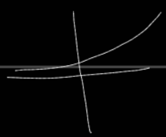
Si $\underbrace{\lim_{x \to +\infty}}_{\text{Continuo}} f(x) = L$, $\to$ $\underbrace{\lim_{n \to +\infty}}_{\text{Var discreta}} f(n) = L$

En este caso decimos $\underbrace{\{f(n)\}}_{\text{Sucesion}}$ converge a L, $L \in \mathbb{R}$

Basicamente convertir a $f(x)$ y calcular $\lim_{x \to +\infty}$

1) Es $\left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\}$ convergente?

$f(x) = \frac{2^x}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$



Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^2}, \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \text{L'hôpital}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x \ln(2)}{2x}, \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \text{L'hôpital}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x \cdot \ln(2) \cdot \ln(2)}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x \cdot \ln^2(2)}{2} = \frac{2^{+\infty} \cdot \ln^2(2)}{2}$$

$$= +\infty$$

$\therefore \left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\}$ diverge

Alterna $(-1 \wedge 1)$

2) $a_n = 2n^2 + (-1)^n \cdot 3n$, $n \in \mathbb{R}$ conver o diver?

$$a_n = \frac{2n^2+(-1)^n \cdot 3n}{5n^2-2n+2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{Conver o diver}$$

Como hay alternacion, teorema del emparedado

> Cuando en la Sucesion intervienen terminos alternados $[(-1)^n]$, factoriales o expresiones trigonometricas.
>
> En estos casos se puede usar el teorema del emparedado
>
> $b_n \leq a_n \leq c_n$
>
> $b_n \wedge c_n$ son suceptibles de aplicarle $\lim\limits_{n \to +\infty}$
>
> Si $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = L = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n$
>
> entonces $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$2n^2+(-1)\cdot 3n \leq 2n^2+(-1)^n \cdot 3n \leq 2n^2+(1)\cdot 3n$$

$$\frac{2n^2-3n}{5n^2-2n+2} \leq \frac{2n^2+(-1)^n \cdot 3n}{5n^2-2n+2} \leq \frac{2n^2+3n}{5n^2-2n+2}$$

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

> Recordar que si en una desigualdad se divide por un negativo cambia signo
>
> $x \leq \frac{3x}{-2}$
>
> $-2x \geq 3x$

Entonces

(b_n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x}{5x^2-2x+2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}} = \frac{2}{5}$$

(c_n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-2x+2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}} = \frac{2}{5}$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{2}{5} = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n$

$$\therefore \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{5}$$

a_n converge a $\frac{2}{5}$

2) $\{a_n\} = \frac{5+(-2)^n}{3^n}$ Conver o diver

$$\frac{5+(-1)^n \cdot 2^n}{3^n}$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$5+(-1)\cdot 2^n \leq 5+(-1)^n \leq 5+(1)\cdot 2^n$$

$$\frac{5-2^n}{3^n} \leq \frac{5+(-1)^n \cdot 2^n}{3^n} \leq \frac{5+2^n}{3^n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5-2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{3^x} - \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{3^x} = 0 \quad - \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

$$0-0=0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{5-2^x}{3^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5+2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{3^x} + \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{3^x} = 0 \quad + \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

$$0+0=0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{5+2^x}{3^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5-2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5+2^x}{3^x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{5+(-2)^n}{3^n} = 0$$

3) $\left\{ \dfrac{\cos(\pi n)}{2^n} \right\}$, Conver o diver?

$$-1 \leq \cos(\pi n) \leq 1$$

$$\frac{-1}{2^n} \leq \cos(\pi n) \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2^n} = \frac{-1}{2^{+\infty}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

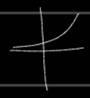
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{2^n} = 0$$, entonces conver en 0

4) $a_n = (1)^n$

4) $a_n = (-1)^n$

$$\lim_{x \to +\infty} (-1)^{+\infty} \quad \nexists$$



$\therefore$ Diverge $\quad -1, 1, -1, 1$

5) $a_n = \dfrac{4 - 7n^6}{n^6 + 3}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4 - 7x^6}{x^6 + 3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-7x^6}{x^6} = -7$$

$\therefore$ Converge a -7

6) $a_n = \dfrac{1}{n^a}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\therefore$ Converge a 0

7) $a_n = a^n \quad |x| < 1 \longrightarrow \frac{1}{2}$

$a < 1 \qquad a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

$\therefore$ Converge

8) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) \quad \nexists$

CADENA DE TÉRMINOS DOMINANTES

Sean $k \in \mathbb{R}, a, p \in \mathbb{R}^+, a > 1$ entonces para n suficientemente grande se tiene que:

$$k \ll \ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Ejemplos donde el teo de emparedado sirve

$(-1)^n$, $\operatorname{sen}(n)$, $\cos(n)$ $\qquad$ sen^2, $\cos^2$

todos $-1 \leq x \leq 1$ $\qquad$ todos $0 \leq x \leq 1$

9) $a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$

$$-1 \leq \cos \leq 1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore \dfrac{\cos(n)}{n}$ Converge

10) $a_n = (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

$$-1-\frac{1}{n} \le (-1)^n\left(1+\frac{1}{2}\right) \le 1+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -1-\frac{1}{n} = -1 \qquad \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$$

$\therefore (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ Converge

Teorema 2.2 Teorema de la función continua
Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n = f(n)$, para $n > N$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Pasar $f(n)$ a $f(x)$

11) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$

$+\infty^0,\ 0^0,\ 1^{+\infty}$ Aplicar $e^{\ln(x)^x}$

$e^{x\ln(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}},\ +\infty^0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

e

$e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \to L$

Calcular L

e^L

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x},\ \frac{+\infty}{+\infty},\ \text{L'hôpital}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \boxed{e^0 = 1}$$

12) $a_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ esto siempre es e^a

$$f(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

$$e^{\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right)}$$

$$e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

$$e^L$$

$$L = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

ilate

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}},\ \frac{0}{0},\ \text{l'hôpital}$$

$+\infty\cdot 0$

ILATE

$a\cdot b$

$\frac{1}{\frac{a}{b}} \vee \frac{a}{\frac{1}{b}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\frac{\cancel{-}a}{\cancel{x^2}}}{\frac{\cancel{-}1}{\cancel{x^2}}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{\cancel{x}}} = a$$

$$\boxed{L = e^{a}}$$