1. **[1 punto]** Dada la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

Determine si la siguiente serie converge o diverge, en caso de converger indique a qué valor converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+4)$$

Por criterio de divergencia

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+13)}{6} = +\infty$$

$$\boxed{\therefore \text{ Diverge}}$$

2. Sea $\{m_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, tal que $m_n = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+2)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}$

   a) **[1 punto]** Calcule el término m_5

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} = \boxed{\frac{7}{64}}$$

   b) **[4 puntos]** Determine si $\{m_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no monótona.

Supongamos que m_n es creciente

$$\frac{\cancel{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n+2)}(n+3)}{\cancel{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)}(2n+4)} \cdot \frac{\cancel{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)}}{\cancel{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n+2)}} \geq 1$$

$$\frac{n+3}{2n+4} \geq 1$$

$$n+3 \geq 2n+4$$

$$0 \geq n+1$$

Falso

$$\boxed{\therefore \text{ Es decreciente}}$$

3. Determine si las siguientes series convergen o divergen. En caso de alguna ser convergente, determine su valor de convergencia.

   a) **[5 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3} + 6}{5^n}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot (-2)^3}{5^n} + 6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

$$-8 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 6 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$-8\left[\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^3}{1--\frac{2}{5}}\right] + 6\left[\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1-\frac{1}{5}}\right]$$

$$-\frac{64}{175}+\frac{3}{50}$$

$$=\frac{149}{350}$$

$$\boxed{\text{Converge a } \frac{149}{350}}$$

b) **[3 puntos]** $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(p)}{p+1} - \frac{\cos(p-1)}{p}$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(p-1)}{p} - \frac{\cos(p)}{p+1}\right]$$

$$-\left[1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(p)}{p+1}\right]$$

$$\frac{-1}{p+1} \leq \frac{\cos(p)}{p+1} \leq \frac{1}{p+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pm 1}{p+1} = 0$$

$$-1$$

$$\boxed{\text{Converge a } -1}$$

4. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

a) **[3 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(n^2)+1}{7^n}$

Por crit de cmp directa

$$-1 \leq \mathrm{Sen}(n^2) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{\mathrm{Sen}(n^2)+1}{7^n} \leq \frac{2}{7^n}$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n \quad |r| = \frac{1}{7} < 1$$

Converge

$\boxed{\therefore \text{ Converge}}$

b) **[4 puntos]** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$

Por crit de raiz

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left[\left(\frac{3n^2+3n+1}{5+5n^2}\right)^{3}\right]^{\cancel{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n^2+3n+1}{5+5n^2}\right)^{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3\cancel{n^2}}{5\cancel{n^2}}\right)^{3} = \frac{27}{125} < 1$$

$\boxed{\therefore \text{ Converge}}$

5. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(n+1)!}$ Conver abs o cond?

Por crit de razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cdot\cancel{(n+1)!}\cdot n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

$\boxed{\text{Converge absolutamente}}$

b) **[2 puntos]** Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001

N	$N+1$	a_{n+1}
7	8	$2{,}2045 \cdot 10^{-5} < 1 \cdot 10^{-4}$

$$\sum_{x=0}^{6} \frac{(-1)^x \cdot x}{(x+1)!} = -0{,}2642$$

$\underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}$

7 terminos

TENER ESTO
EN CUENTA

6. **[4 puntos]** Determine el intervalo de convergencia (no analice los extremos) para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^{n+4}}{(3n+6)\cdot 11^n}$$

Por crit de razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(5x)^{n+4}}\cdot(5x)}{(3n+9)\cdot \cancel{11^n}\cdot 11} \cdot \frac{(3n+6)\cdot \cancel{11^n}}{\cancel{(5x)^{n+4}}}$$

$$|5x| \lim \frac{3n+6}{33n+99}$$

$$|5x| \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{3n}}{\cancel{33n}} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{11} \cdot |5x| < 1$$

$$|5x| < 11$$

$$-11 < 5x < 11$$

$$\frac{-11}{5} < x < \frac{11}{5}$$

$$\boxed{\text{Intervalo} = x \in \left] \frac{-11}{5}, \frac{11}{5} \right[}$$