Regresion lineal multiple

Se tiene un sistema de ecuaciones $y = Xb$ y $Xb = y$, X una matriz de coeficientes y se toman n muestras

Número de Muestra i	Muestra
1	$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1k}, y_1)$
2	$(x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2k}, y_2)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots, x_{nk}, y_k)$

Modelo de RLM:

$$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_k x_k = y$$

Objetivo: estimar los diferente parámetros beta_i, con i=0,..,k, a partir de b_i, con i=0,..,k.

$$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_k x_k = \hat{y}$$

Evaluamos cada muestra en el modelo:

Sistema de ecuaciones lineales con "n" ecuaciones y "k" incógnitas

$$\begin{cases} b_0 + x_{11} b_1 + x_{12} b_2 + \ldots + x_{1k} b_k = y_1 \\ b_0 + x_{21} b_1 + x_{22} b_2 + \ldots + x_{2k} b_k = y_2 \\ \vdots \\ b_0 + x_{n1} b_1 + x_{n2} b_2 + \ldots + x_{nk} b_k = y_k \end{cases}$$

Tamaño : $n \times k$

Forma aumentada del sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz asociada al sistema}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}}_{\text{Vector de incógnitas}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\text{Vector solución}}$$

$$\underbrace{n \times (k+1) \qquad (k+1) \times 1}_{n \times 1} \qquad\qquad n \times 1$$

$$\underbrace{X \cdot b = Y}_{\text{Sistema } Xb = Y}$$

Modelos de regresión lineal múltiple

Se calculan las derivadas parciales de SS_E con respecto a cada b_i, se igualan a cero y se resuelve el sistema. El siguiente teorema muestra una forma de calcular estos estimadores:

TEOREMA: los estimadores por el método de mínimos cuadrados de los parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$, a partir de la muestra $(\underline{x}_i, y_i), i = 1,2,\dots,n$, son los siguientes:

$$b = (X^t \cdot X)^{-1} \cdot (X^t \cdot y)$$

Las operaciones se pueden resolver en la calculadora

Ejemplo 100 *Se tienen las siguientes observaciones*

x_1	0	1	1	0	-1
x_2	1	0	-1	0	1
Y	1	4	6	3	0

1. *Estime la ecuación de regresión de Y como función lineal de x_1, x_2.*

x_1	x_2	y
0	1	1
1	0	4
1	-1	6
0	0	3
-1	1	0

Modelo

$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2$ a partir de

$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 \cdot x_2$

Se debe agregar una columna de 1s al principio y luego los demas e igualar a y

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 \cdot x_2$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{R/ El modelo de RLM es } \hat{y} = 3 + 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2}$

La calcu solo permite 4x4 max.

Regresion NO lineal multiple

Ejemplo 1: Se tienen las siguientes observaciones en la tabla adjunta:

- Estime los coeficientes en la ecuación

$$z = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 y^2$$

- Determine z cuando $x = 2$ y $y = 7$

X	Y	Z
3	5	-46
8	9	-110
13	4	10
16	6	-12
20	2	64

Se deben estimar los coeficientes de :

$$z = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 y^2$$

Sea $X_1 = x$, $X_2 = y$, $X_3 = y^2$

Remplazamos en z usando b y las X_n

$$z = b_0 + b_1 x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 x_3$$

Construyendo nueva tabla

x X_1	y X_2	y^2 X_3	z
3	5	5^2	-46
8	9	9^2	-110
13	4	4^2	10
16	6	6^2	-12
20	2	2^2	64

Recordar los 1

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5^2 \\ 1 & 8 & 9 & 9^2 \\ 1 & 13 & 4 & 4^2 \\ 1 & 16 & 6 & 6^2 \\ 1 & 20 & 2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} -46 \\ -110 \\ 10 \\ -12 \\ 64 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot y)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{El modelo de RNLS es } z = 2 + 4x - 7y - y^2}$$

Determine z cuando $x = 2$ y $y = 7$

$$z = 2 + 4x - 7y - y^2$$

$$z = 2 + 4 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 7^2$$

$$\boxed{z = -88}$$

Ejemplo 2: Dadas las siguientes observaciones estime los coeficientes de la ecuación

$$z = \beta_0 x^{\beta_1} y^{\beta_2}$$

- Determine z cuando $x = 2$ y $y = 7$

X	Y	Z
1	0,5	0,06
1,5	1	6,7
2	2	512
1	2	64

$$z = \beta_0 x^{\beta_1} \cdot y^{\beta_2}$$

$$\ln(z) = \ln(\beta_0 x^{\beta_1} \cdot y^{\beta_2})$$

$$\ln(z) = \ln(\beta_0 \cdot x^{\beta_1}) + \ln(y)^{\beta_2}$$

$$\underset{\downarrow\, z_1}{\ln(z)} = \underset{\downarrow\, b_0}{\ln(\beta_0)} + \underset{\downarrow\, b_1}{\beta_1} \underset{\downarrow\, x_1}{\underline{\ln(x)}} + \underset{\downarrow\, b_2}{\beta_2} \underset{\downarrow\, x_2}{\underline{\ln(y)}}$$

Modelo de estimacion para $z = \beta_0 \cdot x^{\beta_1} y^{\beta_2}$

$$z_1 = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$$

Construyendo nueva tabla

$$\underbrace{\ln(z)}_{z_1} = \underbrace{\ln(\beta_0)}_{b_0} + \underbrace{\beta_1}_{b_1}\underbrace{\ln(x)}_{x_1} + \underbrace{\beta_2}_{b_2}\underbrace{\ln(y)}_{x_2}$$

X	Y	Z
1	0,5	0,06
1,5	1	6,7
2	2	512
1	2	64

$x_1 = \ln(x)$	$x_2 = \ln(y)$	$z_1 = \ln(z)$
$\ln(1)$	$\ln(0{,}5)$	$\ln(0{,}06)$
$\ln(1{,}5)$	$\ln(1)$	$\ln(6{,}7)$
$\ln(2)$	$\ln(2)$	$\ln(512)$
$\ln(1)$	$\ln(2)$	$\ln(64)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \ln(1) & \ln(0{,}5) \\ 1 & \ln(1{,}5) & \ln(1) \\ 1 & \ln(2) & \ln(2) \\ 1 & \ln(1) & \ln(2) \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} \ln(0{,}06) \\ \ln(6{,}7) \\ \ln(512) \\ \ln(64) \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y)$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0{,}6744 \\ 3{,}0078 \\ 5{,}0260 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{array} \end{array}$$

$$\ln(z) = 0{,}6744 + 3{,}0078\ln(x) + 5{,}0260\ln(y)$$

Volviendo al modelo original

$$\underset{Z_1}{\underset{\downarrow}{\ln(z)}} = \underset{b_0}{\underset{\downarrow}{\ln(\beta_0)}} + \underset{b_1}{\underset{\downarrow}{\beta_1}} \underset{x_1}{\underset{\downarrow}{\underbrace{\ln(x)}}} + \underset{b_2}{\underset{\downarrow}{\beta_2}} \underset{x_2}{\underset{\downarrow}{\underbrace{\ln(y)}}}$$

$$\underset{Z_1}{\underset{\downarrow}{\ln(z)}} = \underset{b_0}{\underset{\downarrow}{0,6744}} + \underset{b_1}{\underset{\downarrow}{3,0078}} \underset{x_1}{\underset{\downarrow}{\underbrace{\ln(x)}}} + \underset{b_2}{\underset{\downarrow}{5,0260}} \underset{x_2}{\underset{\downarrow}{\underbrace{\ln(y)}}}$$

$$z = \beta_0 x^{\beta_1} \cdot y^{\beta_2}$$

El β_0 es el resultado de $\ln(\beta_0)$, entonces hay que volver hacia atras

$$\ln(B) = 0,6744$$
$$e^{B} = e^{0,6744} \approx 1,9628$$

Finalmente

$$z = \beta_0 x^{\beta_1} \cdot y^{\beta_2}$$

$$\boxed{z = 1,9628 \cdot x^{3,0078} \cdot y^{5,0260}}$$

Determine z cuando $x = 2$ y $y = 7$

$$z = 1,9628 \cdot x^{3,0078} \cdot y^{5,0260}$$

$$z = 1,9628 \cdot 2^{3,0078} \cdot 7^{5,0260} = \boxed{279330,9343}$$