Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	15
Fecha	Lunes 04 de noviembre del 2024 (semana 16)
Contenidos	a) Ecuación de un plano
	b) Paralelismo, perpendicularidad y ángulo entre planos
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

En un plano existen tres tipos de ecuaciones, a saber, ecuación vectorial, ecuación cartesiana y ecuación normal, las cuales se detallan seguidamente:

- **Ecuación vectorial de un plano:**

  Una recta esta determinada por dos puntos distintos y un plano Π está determinado por tres puntos $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$, no colineales. Los vectores PQ y PR "generan el plano" y se dice que una ecuación vectorial de Π es

  $$\Pi : (x, y, z) = P + t \cdot PQ + s \cdot PR, \text{ con } s, t \in \mathbb{R}$$

- **Ecuación normal de un plano:**

  Un plano Π se puede determinar con solo conocer un punto $P \in \Pi$ y un vector normal n al plano. Si $P, Q \in \Pi$ entonces el segmento $\overline{PQ}$ está en el plano, por lo que $n \perp \overline{PQ}$. De esta manera, un punto $(x, y, z) \in \Pi$ si y sólo si

  $$\begin{aligned} & n \cdot (P - (x, y, z)) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad & n \cdot P - n \cdot (x, y, z) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad & n \cdot P &= n \cdot (x, y, z) \end{aligned}$$

  la cual es una **ecuación normal** del plano.

- **Ecuación cartesiana de un plano:**

  Si se desarrolla una ecuación normal, se obtiene una ecuación cartesiana del plano Π. Si $n = (a, b, c)$ y $P = (x, y, z)$, entonces

  $$\begin{aligned} & (a, b, c) \cdot (x, y, z) &= n \cdot P \\ \Longrightarrow \quad & ax + by + cz &= d, \text{ con } d = n \cdot P \end{aligned}$$

  la cual es una **ecuación cartesiana** del plano.

Puntos no colineales

Cuando una ecuación del plano requiere tres puntos no colineales, se puede utilizar la prueba del determinante, la cual dice que:

Si los tres puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ son no colineales si:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejercicio: Considere los puntos $A = (1, 2-k, -1)$, $B = (1, -1, k)$ y $C = (1, 1-k, k)$. Determine el valor de k para que A, B y C sean colineales.

Para que A, B, C sean colineales, debe darse que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-K & -1 \\ 1 & -1 & K \\ 1 & 1-K & K \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & K \\ 1-K & K \end{vmatrix} + (2-K)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & K \\ 1 & K \end{vmatrix} + -1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-K \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1[-1\cdot K - (1-K)\cdot K] - (2-K)[1\cdot K - 1\cdot K] - 1[1\cdot(1-K) - 1\cdot -1] = 0$$

$$\Rightarrow -K - (1-K)K - (2-K)\cdot 0 - (1-K+1) = 0$$

$$\Rightarrow -K - (K-K^2) - 0 - (2-K) = 0$$

$$\Rightarrow -K - \cancel{K} + K^2 - 2 + \cancel{K} = 0$$

$$\Rightarrow K^2 - K - 2 = 0$$

$$\Rightarrow K = 2 \quad \vee \quad K = -1$$

Los valores de K para que A, B, C sean colineales son K=2 o K=-1

Intersección de planos

Dados tres planos Π_1, Π_2 y Π_3, se tienen dos posibilidades:

1. **Dos planos:** en este caso puede darse que:
   - Los planos no se intersequen.
   - Los planos se intersequen en una recta.
   - Los planos coinciden.
2. **Tres planos:** en este caso puede darse que:
   a) Los planos se intersequen en un punto.
   b) Los planos se intersequen en una recta común a los tres planos.
   c) Los tres planos coinciden.
   d) No hay un conjunto de puntos que está simultáneamente en los tres planos.

Nota: la intersección entre varios planos, si hubiera, es el conjunto de puntos que están simultáneamente en todos los planos.

Si se tiene una ecuación cartesiana de cada uno de los planos, el determinar su intersección equivale a resolver un sistema de ecuaciones lineales, es decir, sean $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $\Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ y $\Pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3$, entonces, determinar la intersección de dos o tres planos requiere resolver un sistema como el siguiente:

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \qquad \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Línea de intersección entre planos

En vez de estar resolviendo un sistema todas las veces que se desee la recta de intersección entre dos planos, se puede determinar una fórmula: Si los planos $\Pi_1 : n_1 \cdot (x,y,z) = d_1$ y $\Pi_2 : n_2 \cdot (x,y,z) = d_2$ se intersecan en una recta, entonces una ecuación vectorial de la recta de intersección L es

$$L : (x,y,z) = P + t \cdot (n_1 \times n_2)$$

Para obtener el punto P de la recta (y que debe estar en ambos planos) solo se debe observar que P es una combinación lineal de n_1 y n_2, es decir, $P = a_1 n_1 + a_2 n_2$, entonces P se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} n_1 \cdot P = d_1 \\ n_2 \cdot P = d_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 ||n_1||^2 + a_2\, n_1 \cdot n_2 = d_1 \\ a_2\, n_1 \cdot n_2 + a_2 ||n_2||^2 = d_2 \end{cases}$$

a partir de esto, se tiene que:

$$a_1 = \frac{d_2(n_1 \cdot n_2) - d_1 ||n_2||^2}{(n_1 \cdot n_2)^2 - ||n_1||^2 ||n_2||^2} \wedge a_2 = \frac{d_1(n_1 \cdot n_2) - d_2 ||n_1||^2}{(n_1 \cdot n_2)^2 - ||n_1||^2 ||n_2||^2}$$

y entonces $L : (x,y,z) = a_1 n_1 + a_2 n_2 + t \cdot (n_1 \times n_2)$

Ejercicio: Determine las ecuaciones paramétricas de la recta L que corresponde a la intersección de los planos

$$\pi_1 : -2x + y - 4z = -1 \qquad \pi_2 : x - 3y + 2z - 5 = 0$$

$$\begin{cases} -2x + y - 4z = -1 \\ x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Representación en matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{2F_1 + \tilde{F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-\frac{1}{5}\tilde{F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 \end{array}\right) \underset{\sim}{3F_2 + \tilde{F_1}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 \end{array}\right) \end{array}$$

Así $\begin{cases} x + 2z = -\dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} - 2z \\ y = -\dfrac{9}{5} \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$

Así $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} - 2t \\ y = -\dfrac{9}{5} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Paralelismo, perpendicularidad y ángulo entre planos

Si n_1 y n_2, son dos vectores normales a Π_1 y Π_2, respectivamente, entonces:

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ si y solo si $n_1 \parallel n_2$
- $\Pi_1 \perp \Pi_2$ si y solo si $n_1 \perp n_2$
- El ángulo entre los planos es el ángulo entre los vectores normales.

Ejercicio #1: Halle el ángulo que forman los planos $\sigma : 2x + y - 2z = 5$ y $\rho : 3x - 6y - 2z = 7$

Un vector normal de σ es $n_1 = (2, 1, -2)$
Un vector normal de ρ es $n_2 = (3, -6, -2)$

El ángulo entre σ y ρ es el ángulo entre n_1 y n_2, es decir,

$$\theta = \arccos\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|}\right) \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{(2,1,-2)\cdot(3,-6,-2)}{\|(2,1,-2)\| \cdot \|(3,-6,-2)\|}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2\cdot 3 + 1\cdot -6 + -2\cdot -2}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = 79.0192^{\circ}$$

π

Ejercicio #2: Halle la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $(0,1,1)$ y es paralelo a los vectores $v=(1,2,3)$ y $w=(2,0,1)$

Sea $n=(x,y,z)$ un vector normal del plano π.

Note que, el plano debe ser paralelo a v y w, es decir:

$$(x,y,z) = tv \quad , t \in \mathbb{R} \qquad\qquad (x,y,z) = sw \quad s \in \mathbb{R}$$
$$= t(1,2,3) \qquad\qquad\qquad\qquad = s(2,0,1)$$

Así $\pi : (0,1,1) + t(1,2,3) + s(2,0,1) \; , \; s,t \in \mathbb{R}.$

Ejercicio #3: Determine la ecuación del plano π que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a los planos

$$\rho : 2x+2y+z=3 \qquad \sigma : 3x-7-2z=5$$

$\sigma: 3x-2z=5+7$
$\sigma: 3x-2z=12$

Un vector normal de ρ es: $n_1=(2,2,1)$
Un vector normal de σ es: $n_2=(3,0,-2)$

Como $\pi \perp \rho$ y $\pi \perp \sigma$, si n es un vector normal de π, entonces:
$n \perp n_1 \ \wedge \ n \perp n_2 \Rightarrow n = n_1 \times n_2$

$$n = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow n=(-4,7,-6)$$

Como π pasa por $P=(1,1,1)$, se tiene que:

$\pi: \overrightarrow{PX}\cdot n = 0 \Rightarrow \pi: (X-P)\cdot n = 0$ Ecuación normal

$\Rightarrow \pi: [(x,y,z)-(1,1,1)]\cdot(-4,7,-6)=0$

$\Rightarrow \pi: (x-1,y-1,z-1)\cdot(-4,7,-6)=0$

$\Rightarrow \pi: -4(x-1)+7(y-1)+-6(z-1)=0$

$\Rightarrow \pi: -4x+4+7y-7-6z+6=0$

$\Rightarrow \pi: -4x+7y-6z+3=0$

$\Rightarrow \pi: -4x+7y-6z=-3$ Ecuación cartesiana

Ejercicio #4: Determine la ecuación del plano π que pasa por el punto $A=(3,1,-1)$, es perpendicular al plano $\sigma: 2x-2y+z=-4$ y la intersección con el eje Z es $(0,0,3)$

$\sigma: 2x-2y+z=-4 \qquad A=(3,1,-1) \qquad B=(0,0,3)$

Si se sabe que π interseca al eje Z en B, significa que π pasa por B y por A.

Un vector normal de σ es: $n_1=(2,-2,1)$

Un vector normal de π es: $n=(a,b,c)$

Como $\pi \perp \sigma$, $n \perp n_1 \Rightarrow n \cdot n_1 = 0$, pero como $A, B \in \pi$, entonces $n \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

$$\begin{cases} n \cdot n_1 = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b,c)\cdot(2,-2,1)=0 \\ (a,b,c)\cdot[(3,1,-1)-(0,0,3)]=0 \\ (a,b,c)\cdot(3,1,-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=0 & (1) \\ 3a+b-4c=0 & (2) \end{cases}$$

De (2), se tiene que: $b=-3a+4c \quad (3)$

Sustituyendo (3) en (1), se tiene que:

$$2a-2(-3a+4c)+c=0$$
$$\Rightarrow 2a+6a-8c+c=0$$
$$\Rightarrow 8a-7c=0$$
$$\Rightarrow 8a=7c$$
$$\Rightarrow \frac{8a}{7}=c$$

Una solución particular es:

Si $a=1$, entonces $c=\frac{8}{7}$

Así $b=-3a+4c \Rightarrow b=-3\cdot 1+4\cdot\frac{8}{7}$

$\Rightarrow b=\frac{11}{7}$

Ahora $d=n\cdot A \Rightarrow d=(a,b,c)\cdot(3,1,-1)$

$\Rightarrow d=\left(1,\frac{11}{7},\frac{8}{7}\right)\cdot(3,1,-1)$

$\Rightarrow d=3+\frac{11}{7}-\frac{8}{7}$

$\Rightarrow d=\frac{24}{7}$

Un plano π es:

$\pi: ax+by+cz=d \Rightarrow x+\frac{11}{7}y+\frac{8}{7}z=\frac{24}{7}$

$\Rightarrow 7x+11y+8z=24$

Ejercicio #5: Considere los puntos $A=(-1,2,5)$, $B=(3,-1,2)$ y $C=(0,4,-5)$ en $\mathbb{R}^3$.

a) Verifique que los puntos A, B y C no son colineales.

$\vec{AB} = B-A = (4,-3,-3)$

$\vec{AC} = C-A = (1,2,-10)$

$\vec{BC} = C-B = (-3,5,-7)$

Como $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ no son paralelos, entonces A, B, C no son colineales.

b) Determine la ecuación del plano que contiene los puntos A, B, C.

Note que $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son vectores de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente:

$$\pi: (x,y,z)-(-1,2,5) = s\vec{AB} + t\cdot\vec{AC}$$
$$\pi: (x+1, y-2, z-5) = s(4,-3,-3) + t(1,2,-10)$$
$$\pi: (x+1, y-2, z-5) = (4s, -3s, -3s) + (t, 2t, -10t)$$

$$\begin{cases} x+1 = 4s+t \\ y-2 = -3s+2t \\ z-5 = -3s-10t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4s+t-1 \\ y = -3s+2t+2 \\ z = -3s-10t+5 \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Sean $\vec{x}=(1,1,0)$ y $\vec{y}=(0,2,-1)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Halle el o los vectores $\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ que cumple simultáneamente las condiciones siguientes:

ⓐ $w \parallel (x+y)$ ⓑ $proy_{\vec{x}}\vec{w} = 4x$

Condición ⓐ $w=\alpha(x+y) \Rightarrow (a,b,c)=\alpha[(1,1,0)+(0,2,-1)]$

$$\Rightarrow (a,b,c)=\alpha(1,3,-1)$$

$$\Rightarrow (a,b,c)=(\alpha,3\alpha,-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\alpha \\ b=3\alpha \\ c=-\alpha \end{cases}$$

Condición ⓑ $proy_{\vec{x}}\vec{w}=4\vec{x} \Rightarrow \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{w}}{\|\vec{x}\|^2}\cdot\cancel{\vec{x}}=4\cancel{\vec{x}}$

$$\Rightarrow \frac{(1,1,0)(a,b,c)}{\|(1,1,0)\|^2}=4$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=4$$

$$\Rightarrow a+b=8$$

$$\Rightarrow \alpha+3\alpha=8$$

$$\Rightarrow 4\alpha=8$$

$$\Rightarrow \alpha=2$$

Así $w=(a,b,c) \Rightarrow w=(\alpha,3\alpha,-\alpha)$

$$\Rightarrow w=(2,6,-2)$$

Sea $\vec{u}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine el vector $\vec{w}$ que satisface simultáneamente:

(a) $\|u\|^2 = 8$ (b) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$ (c) $\measuredangle\, \vec{u}, \vec{w} = \frac{\pi}{3}$ (d) $proy_w\, u = (0,1,1)$

Sea $u = (a,b,c)$ y $w = (d,e,f)$

Condición (a) $\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2 = 8 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 8$

Condición (b) $(a,b,c)\cdot(d,e,f) = 4 \Rightarrow ad+be+cf = 4$

Condición (c) $\theta = \arccos\left(\frac{(a,b,c)\cdot(d,e,f)}{\|(a,b,c)\|\cdot\|(d,e,f)\|}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \arccos\left(\frac{(a,b,c)\cdot(d,e,f)}{\|(a,b,c)\|\cdot\|(d,e,f)\|}\right)$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cancel{\cos}\left(\cancel{\arccos}\left(\frac{(a,b,c)\cdot(d,e,f)}{\|(a,b,c)\|\cdot\|(d,e,f)\|}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(a,b,c)\cdot(d,e,f)}{\|(a,b,c)\|\cdot\|(d,e,f)\|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ad+be+cf}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+e^2+f^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{d^2+e^2+f^2}}$$ por (a) y (b)

$$\Rightarrow \sqrt{d^2+e^2+f^2} = \frac{8}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2+e^2+f^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d^2+e^2+f^2 = 8$$

Condición d $\text{proy}_w u = (0,1,1) \Rightarrow \dfrac{w \cdot u}{\|w\|^2} \cdot w = (0,1,1)$

$$\Rightarrow \frac{(d,e,f)\cdot(a,b,c)}{\|(d,e,f)\|^2} \cdot (d,e,f) = (0,1,1)$$

$$\Rightarrow \frac{ad+be+cf}{\left(\sqrt{d^2+e^2+f^2}\right)^2} \cdot (d,e,f) = (0,1,1)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{d^2+e^2+f^2} \cdot (d,e,f) = (0,1,1)$$ por b y c

$$\Rightarrow \frac{4}{8} \cdot (d,e,f) = (0,1,1)$$

$$\Rightarrow (d,e,f) = 2\,(0,1,1)$$

$$\Rightarrow (d,e,f) = (0,2,2)$$

$$\Rightarrow w = (0,2,2)$$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Sean $P = (2. -3, 1)$, $Q = (0, 2, -1)$ y $R = (1, 0, 2)$. Halle una ecuación cartesiana del plano π que los contiene.

R/ $11x + 4y - z = 9$

Ejercicio #2: Determine una ecuación del plano Π que contiene al punto $(-2, 3, 1)$ y es perpendicular a los planos Π_1 y Π_2 con ecuación:

R/ $7x - y + 19z = 2$

$$\Pi_1 : 3x + 2y - z - 5 = 0$$

$$\Pi_2 : -5x + 3y + 2z + 4 = 0$$

Ejercicio #3: En $\mathbb{R}^3$ considere los puntos $A = (2, -4, 6)$, $B = (5, 2, 3)$ y $C = (14, -2, -3)$

a) Verifique que A, B, C no son colineales.

b) Determine las ecuaciones paramétricas o cartesianas del plano π que contiene a los puntos A, B, C

R/ $L : \begin{cases} x = 2 + 3s + 12t \\ y = -4 + 6s + 2t \\ z = 6 - 3s - 9t \end{cases}$, con $s, t \in \mathbb{R}$

c) Escriba la ecuación normal del plano.

R/ $16x - 3y + 22z = 176$