Ecuaciones logarítmicas

Como las ecuaciones con radicales y al contrario de las ecuaciones exponenciales o polinomiales, es necesario determinar si los valores obtenidos al despejar la incógnita, se encuentran en el dominio de la función logarítmica, para esto se opta por hacer una prueba, evaluando las expresiones logarítmicas y verificando que el argumento es positivo en todos los casos, o bien hayando el dominio máximo y verificando que el o los valores hallados se encuentren en el dominio.

Necesario hacer el verifique

Ejemplo 210

Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación:

$$\ln\left(x\sqrt[3]{4-2x}\right) = \ln x + \frac{1}{3}\ln(4-2x)$$

Ejemplo 211

Resuelva $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación:

$$\log_3(x+7) + \log_3(x+1) = 1 + \log_3(11-x)$$

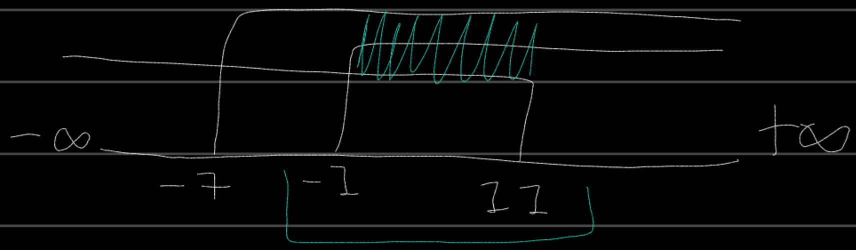
Dom > 0

$$x+7>0 \qquad x+1>0 \qquad 11-x>0$$

$$x>-7 \qquad x>-1 \qquad -x>-11$$

$$\boxed{]-7,+\infty[} \qquad \boxed{]-1,+\infty[} \qquad x<11$$

$$\boxed{]-\infty, 11[}$$



Df: $]-1, 11[$

Ahora se resuelve

$$\log_3(x+7) + \log_3(x+1) = 1 + \log_3(11-x)$$

$$\log_3(x+7) + \log_3(x+1) - \log_3(11-x) = 1$$

$$\log_3[(x+7)(x+1)] - \log_3(11-x) = 1 \quad \text{Prop de suma}$$

$$\log_3\left[\frac{(x+7)(x+1)}{(11-x)}\right] = 1 \rightarrow \text{Prop de resta}$$

$$3^1 = \left[\frac{(x+7)(x+1)}{(11-x)}\right] \rightarrow \text{Propiedad de}$$

$\log (x) = x$

$\log_a(x) = y$

$a^y = x$

$3(11-x) = (x+7)(x+1)$

$33-3x = x^2+x+7x+7$

$0 = x^2+11x-26$

$x_1 = 2$ ✓ $\qquad x_2 = -13$ ✗

$]-1, 11[$

R/ $\{2\}$ el 2 si esta en el dom

Ejemplo 212

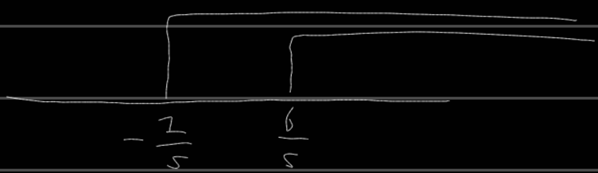
Resuelva $\mathbb{R}$ *la siguiente ecuación:*

$$\log_2(5y-6) - \log_2(5y+1) = 3$$

$5y-6 > 0 \qquad 5y+1 > 0$

$5y > 6 \qquad 5y > -1$

$y > \frac{6}{5} \qquad y > -\frac{1}{5}$



$\boxed{D_f \quad]-\tfrac{1}{5}, \tfrac{6}{5}[}$

$\log_2(5y-6) - \log_2(5y+1) = 3$

$\log_2\left[\frac{5y-6}{5y+1}\right] = 3$

$2^3 = \frac{5y-6}{}$

$5y+1$

$8(5y+1) = 5y-6$

$40y+8 = 5y-6$

$35y = -14$

$y = -\frac{14}{35} \rightarrow \left]-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right[$

$S = \emptyset$

Ejemplo 210

Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación:

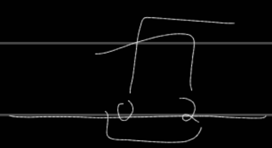
$$\ln\left(x\sqrt[3]{4-2x}\right) = \ln x + \frac{1}{3}\ln(4-2x)$$

$\ln(x) + \ln\left(x\sqrt[3]{4-2x}\right) = \ln(x) + \frac{1}{3}\ln(4-2x)$

$\ln(x) + \frac{1}{3}\ln(4-2x) = \ln(x) + \frac{1}{3}\ln(4-2x)$

$x > 0 \qquad 4-2x > 0$

$x < 2$



$D_f\ \left]0,2\right[$

$\cancel{\ln(x)} + \cancel{\frac{1}{3}\ln(4-2x)} = \cancel{\ln(x)} + \cancel{\frac{1}{3}\ln(4-2x)}$

$0=0 \rightarrow V$

$\therefore$ Infinitas soluciones

$\boxed{S = \left]0,2\right.}$ La solucion sera el dominio maximo

Ejemplo 213

Resuelva $\mathbb{R}$ *la siguiente ecuación:*

$$\left(4^x - 3\cdot 2^x - \frac{7}{4}\right)(\log_3(1-x) - 1) = 0$$

Solución:

$$4^x - 3\cdot 2^x - \frac{7}{4} = 0$$
$$\Rightarrow (2^x)^2 - 3\cdot 2^x - \frac{7}{4} = 0 \qquad \textit{sea } w = 2^x$$
$$\Rightarrow w^2 - 3\cdot w - \frac{7}{4} = 0$$
$$\Rightarrow w = \frac{7}{2} \quad \vee \quad w = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2^x = \frac{7}{2} \quad \vee \quad 2^x = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = \log_2\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$\log_3(1-x) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \log_3(1-x) = 1$$
$$\Rightarrow 1 - x = 3$$
$$\Rightarrow 1 - 3 = x$$
$$\Rightarrow -2 = x$$

Prueba:

Si $x = -2$

$$\log_3(1-(-2)) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \log_3(3) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 0 = 0$$

$$\therefore S = \left\{\log_2 \frac{7}{2}, -2\right\}$$

$$\sqrt{\log_2(x)} = \log_2(\sqrt{x})$$
$$\sqrt{\log_2(x)} = \frac{1}{2}\log_2(x)$$
$$\left(\sqrt{\log_2(x)}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\log_2(x)\right)^2$$

si se eleva a la 2, se pone el 2 en la g de log

$$\log_2(x) = \frac{1}{4}\log_2^2(x)$$
$$-\frac{1}{4}\log_2^2(x) + \log_2(x) = 0$$
$$\log_2(x)\left(-\frac{1}{4}\log_2(x) + 1\right) = 0$$

$$a\cdot b = 0$$
$$a = 0 \vee b = 0$$

$$\log_2(x) = 0 \quad \vee \quad -\frac{1}{4}\log_2(x) + 1 = 0$$

$$2^0 = x$$
$$\boxed{1 = x}$$

$$-\frac{1}{4}\log_2(x) = -1$$
$$\log_2(x) = 4$$
$$2^4 = x$$
$$\boxed{16 = x}$$

$$\boxed{S = \{1, 16\}}$$