Para aceptar H_0:

Cola izquierda <

Puede ser χ^2

si se cumple

$Z_{obs} > Z_c$, NO se rechaza H_0

Si se cumple

$Z_{obs} < Z_c$, Se rechaza H_0

Cola derecha

si se cumple

$Z_{obs} < Z_c$, NO se rechaza H_0

Si se cumple

$Z_{obs} > Z_c$, Se rechaza H_0

Para estandarizar

1. B sigue una distribución binomial: $B \sim B(n,p)$
2. $E(\hat{P}) = p$, es decir, $\hat{p}$ es insesgado.
3. $Var(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$, donde $q = 1 - p$

Formula $\frac{\hat{P}_{obs} - P_0}{\sigma}$

$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

$$\frac{\hat{P}_{obs} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 \cdot q_0}{n}}}$$

$p = \frac{\text{Los que cumplen}}{\text{Totales}}$

$P_0 = H_0 \quad q_0 = 1 - P_0$

$$n \geq \frac{(|z_{\alpha/k}|\sqrt{p_0 q_0} + |z_\beta|\sqrt{p_1 q_1})^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

Tamaño mínimo de muestra

k: número de colas

Condición: $n\hat{p} \geq 5 \wedge n\hat{q} \geq 5$, sino binomial pura

Proporciones

Sea p la proporción de determinados éxitos en una población. Dada proporción $\hat{P} = \frac{B}{n}$ para muestras de tamaño n (estadístico asociado al parámetro p)donde B es la variable que indica el número de éxitos en la muestra. Se tiene lo siguiente:

$p = \frac{\text{los que cumplen}}{\text{Totales}}$

1. B sigue una distribución binomial: $B \sim B(n, p)$
2. $E(\hat{P}) = p$, es decir, $\hat{p}$ es insesgado.
3. $Var(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$, donde $q = 1 - p$

Ejemplo 4: una proporción

Puede realizarse con valor P o RRARA

Por estadísticas que se tienen, se ha establecido que a lo sumo 80% de los fanáticos de cierto equipo, apoyan la idea de que se vendan acciones del equipo a los fanáticos. Una muestra aleatoria de 500 aficionados, reveló que 435 de ellos están de acuerdo con la propuesta. A un nivel de significancia del 5%. ¿Tendrán razón la afirmación inicial?

$n = 500 \quad \hat{p} = \frac{435}{500} = 0{,}87 \quad \alpha = 0{,}05$

$H_0: p = 0{,}8$ ($\leq$ por a lo sumo)
$H_1: p > 0{,}8$ (Contrario a $\leq$ y $\hat{p} = 0{,}87$ que es $> 0{,}8$)

→ Cola derecha

1. B sigue una distribución binomial: $B \sim B(n, p)$
2. $E(\hat{P}) = p$, es decir, $\hat{p}$ es insesgado.
3. $Var(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$, donde $q = 1 - p$

$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

Se debe estandarizar con la Formula $\frac{\hat{p} - p_0}{\sigma} \rightarrow \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}}$

→ $p_0 = H_0 \quad q_0 = 1 - p_0$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}87 - 0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{500}}} \approx 3{,}9131$$

$$Z_c = Z_{0{,}05} = 1{,}64485$$

$$\boxed{\text{Como } Z_{obs} = 3{,}9131 > Z_c = 1{,}64485, \text{ se rechaza } H_0}$$

Con valor p

$n = 500 \quad \hat{p} = \frac{435}{500} = 0{,}87 \quad \alpha = 0{,}05$

$H_0: p = 0{,}8$ ($\leq$ por a lo sumo)
$H_1: p > 0{,}8$ (Contrario a $\leq$ y $p = 0{,}87$ que es $> 0{,}8$)

$\rightarrow$ Cola derecha

Se estandariza $\rightarrow$ App $\rightarrow$ Compara con $Z_{\text{significancia}}$

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}} = \frac{0{,}87 - 0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{500}}} \approx 3{,}9131$$

$P(Z > 3{,}9131) = 0{,}00005$

Cola derecha

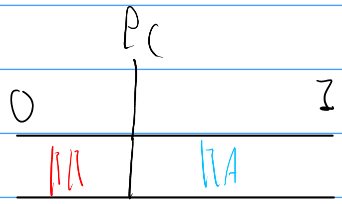
Si se cumple
$Z_{obs} < Z_c$, NO se rechaza H_0

Si se cumple
$Z_{obs} > Z_c$, Se rechaza H_0

Como $0{,}05 > 0{,}00005$

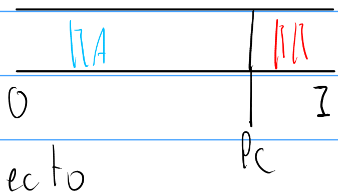
Se rechaza H_0

Regiones de aceptación y rechazo



Cola izquierda RR $]0, P_c[$ RA $]P_c, 1[$

Cola derecha RR: $]P_c, 1[$ RA $]0, P_c[$



Se usa la formula pero con el simbolo correcto
+ para derecha y − para izquierda $\hat{p}_0 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_0\hat{q}_0}{n}}$

H_0: $p = 0{,}8$ ($\leq$ por a lo sumo)
H_1: $p > 0{,}8$ (Contrario a $\leq$ y $\hat{p} = 0{,}87$ que es $> 0{,}8$)

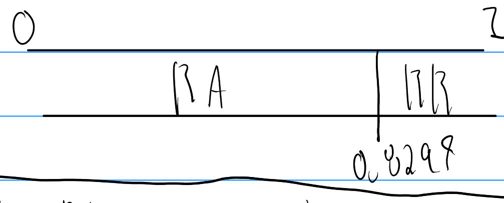
→ Cola derecha

$P_0 = 0{,}8$ $q_0 = 0{,}2$ $n = 500$ $Z_{0,05} = 1{,}64485$

$$0{,}8 + 1{,}64485 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{500}} = 0{,}8294$$

RR: $]0.8294, 1[$ RA: $]0, 0.8294[$

$P_c = 0{,}8294$



$\boxed{\text{Como } \hat{p} = 0{,}87 \in RR \text{ se rechaza } H_0}$

Condición: $n\hat{p} \geq 5 \wedge n\hat{q} \geq 5$

[4 puntos] El gerente de un banco dice que al menos el 78 % de las transacciones que se realizan en su sucursal se hacen en colones. Para verificar su aseveración consulta los registros de las últimas 40 transacciones y observa que 28 de ellas se hicieron en colones.

Haga una prueba de hipótesis con un nivel de significancia del 2,5 % para juzgar la validez de la aseveración del gerente.

$H_0: p = 0{,}78 \ (\geq)$

$H_1: p < 0{,}78$ (Contrario a $\geq$ y porque $\hat{p} = 0{,}7$)

$n = 40 \qquad \hat{p} = \frac{28}{40} = 0{,}7 \qquad \alpha = 0{,}025 \qquad p_0 = 0{,}78 \qquad q_0 = 0{,}22$

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}} = \frac{0{,}7 - 0{,}78}{\sqrt{\frac{0{,}78 \cdot 0{,}22}{40}}} = \underbrace{-1{,}22}_{Z_{obs}}$$

$$P(Z < 0{,}025) = \underbrace{-1{,}95}_{Z_c}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} -1{,}22 > -1{,}95 \\ \therefore \text{ No se rechaza } H_0 \end{array}}$$

Debido a las fuertes lluvias la Comisión Nacional de Emergencias (CNE) recibió la notificación que el 10 % de las familias que residen en el centro de Cartago tuvieron afectación grave en sus viviendas. Cuando los personeros de la CNE visitaron la zona e inspeccionaron un total de 45 viviendas notaron que 8 de estas tenían graves afectaciones.

¿Se puede concluir que la afectación por lluvias en el centro de Cartago fue significativa mente mayor al 10 %? ($\neq$

$H_0: p = 0{,}10 \ (\leq)$ $\qquad \hat{p} = \frac{8}{45} \quad n = 45$

$H_1: p > 0{,}10$ (por que $\hat{p} > 0{,}10$) $\qquad p_0 = 0{,}10 \quad q_0 = 0{,}90$

$n \cdot p_0 \geq 5 ? = 4{,}5 < 5 \rightarrow$ Binomial exacta

$P(8 \geq x) = 1 - P(x < 8)$

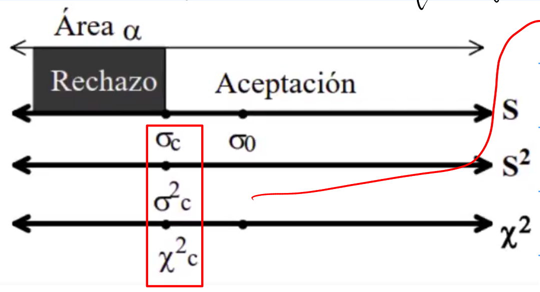
Condición: $n\hat{p} \geq 5 \wedge n\hat{q} \geq 5$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{7} C(45, 8) \cdot 0{,}10^{k} \cdot 0{,}90^{45-k}$$

$$\boxed{= 0{,}07568 < 0{,}05 \quad \text{Se tolera } H_0}$$

Una varianza

Prueba de cola izquierda



Se puede hacer de 3 maneras

Des. Est. Varianza

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \text{ que es equivalente a } H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Por resultados anteriores se tiene que $\chi^2 = \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. En particular, bajo la hipótesis $H_0 : \sigma = \sigma_0$, se tiene que

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$$

c = crítico

$\sigma_c^2 = (\sigma_c)^2$ y $\chi_c^2 = \dfrac{(n-1)\,\sigma_c^2}{\sigma_0^2}$ $\quad \chi_c^2 = \chi^2_{\alpha, n-1}$

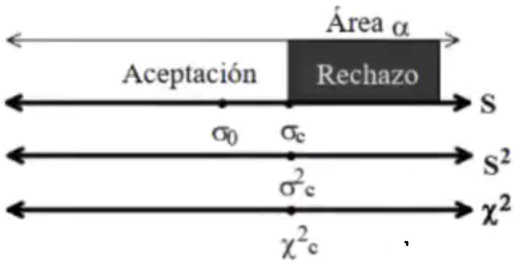
App

Valor P= $\quad P\left(\chi^2 < \chi^2_{obs}\right)$, donde $\chi^2_{obs} = \dfrac{(n-1)\,s^2_{obs}}{\sigma_0^2}$.

Para pasar de 1 a otro es despejar lo que se ocupe, σ^2, σ

Similarmente se tienen los otros casos

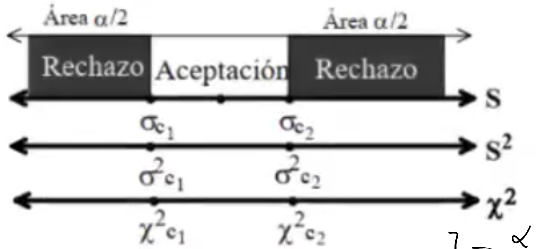
$H_1 : \sigma > \sigma_0$ Derecha



$$\chi_c^2 = \chi^2_{1-\alpha, n-1}$$

Valor $P = P\left(\chi^2 > \chi^2_{obs}\right)$

$H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ dos colas



$1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\chi^2_{c_1} = \chi^2_{\alpha/2, n-1} \quad y \quad \chi^2_{c_2} = \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$$

$$\text{Valor}^6\, P = \begin{cases} 2P\left(\chi^2 > \chi^2_{obs}\right) & si \quad \chi^2_{obs} > n-1 \\ 2P\left(\chi^2 < \chi^2_{obs}\right) & si \quad \chi^2_{obs} < n-1 \end{cases}$$

$$\left.\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}\right\}$$ Formula para estandarizar

Ejemplo 8: una varianza

Se estima que el tiempo que requieren los estudiantes de estadística para resolver el primer parcial se distribuye normalmente. Si este año una muestra de 20 estudiantes dio una desviación estándar de 5 min y considerando una significancia del 10%, ¿hay evidencia de que en realidad la desviación estándar de las notas es menor que los 8 min?.

Para saber que es de este tipo de problema

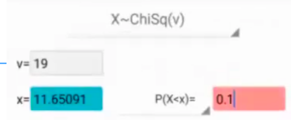
$H_0: \sigma = 8 \; (\geq)$ $\qquad n = 20 \quad gl = 19 \quad \alpha = 0{,}10$

$H_1: \sigma < 8$, cola izquierda $\qquad s = 5 \quad \sigma_0 = 8 \; (H_0)$

chi Cuadrado $\qquad \hookrightarrow$ Por ser muestral y no poblacional

Calcular χ^2_c que para cola izquierda es

$$\chi^2_c = \chi^2_{\alpha,\, n-1} = \chi^2_{0.10,\, 19} = 11{,}65091$$



Caso 1: Usando valor chi cuadrado

$$\chi^2_c = \chi^2_{\alpha,\, n-1} = \chi^2_{0.10,\, 19} = 11{,}65091 \leftarrow \chi^2 \text{crítico}$$

$n = 20 \quad gl = 19 \quad \alpha = 0{,}10$

Estandarizando s $\qquad s = 5 \quad \sigma_0 = 8 \; (H_0)$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

$$= \frac{19 \cdot 5^2}{8^2} = 7{,}4218 \leftarrow Z_{obs}$$

Cola izquierda <

Si se cumple

$\chi^2_{obs} > \chi^2_c$, NO se rechaza H_0

Si se cumple

$\chi^2_{obs} < \chi^2_c$, Se rechaza H_0

$$\boxed{\begin{array}{c} \chi^2_{obs} = 7{,}4238 < \chi^2_c = 11{,}65091 \\ \therefore \text{ Se rechaza } H_0 \end{array}}$$

Caso 2: Usando el valor de la varianza critica

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\cdot \sigma_c^2}{\sigma_0^2}$$

$n=20$ $gl=19$ $\alpha=0{,}10$

$s=5$ $\sigma_0=8\,(H_0)$

$$\sigma_c^2 = \frac{\chi^2_c \cdot \sigma_0^2}{n}$$ Despejando para usar la varianza

$$\chi^2_c = \chi^2_{\alpha,\, n-1} = \chi^2_{0.10,\, 19} = 11{,}65091$$

$\sigma_0^2 = 8^2$ $n=20$

Valor critico

$$\sigma_c^2 = \frac{\chi^2_c \cdot \sigma_0^2}{n} = \frac{11{,}65091 \cdot 8^2}{19} = 39{,}2452$$

(Varianza critica)

Como $s=5$, $s^2_{obs} = 5^2 = 25$

$$\boxed{\begin{array}{c} obs = 25 < 39{,}252 \leftarrow \text{Critico} \\ \therefore \text{ se rechaza } H_0 \end{array}}$$

Caso 3: Usando el valor de la desv. estandart critica

$$\sigma_c^2 = \frac{\chi^2_c \cdot \sigma_0^2}{n} = \frac{11,65091 \cdot 8^2}{19} = 39,2452$$

$$\sigma_c^2 = 39,2452 \rightarrow \sigma_c = \sqrt{39,2452}$$

$$\sigma_c = 6,2646 \qquad s = 5$$

Como $s_{obs} = 5 < \sigma_c = 6,2646$

$\therefore$ Se rechaza H_0

Caso 4: Usando Valor P

Estandarizando s_{obs}

$n = 20 \quad gl = 19 \quad \alpha = 0,10$

$s = 5 \quad \sigma_0 = 8 \; (H_0)$

χ^2_c

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

$$= \frac{19 \cdot 5^2}{8^2} = 7,4219$$

$$P(\chi^2 < 7,4219, 19) = 0,00840 \leftarrow \chi^2_{obs}$$

$\boxed{\text{Como } 0,00840 < 0,10, \text{ se rechaza } H_0}$

Para una determinada población se afirma que $\sigma^2 \geq 24$. Un estudiante de computación realizó correctamente el contraste de hipótesis tomando una muestra de tamaño 40 al nivel de significancia de 0.05, obteniendo que no existe evidencia en contra de la afirmación. ¿Qué tan pequeño puede ser la desviación estándar de los datos de la muestra?

Encontrar valor crítico (el de la afil)

H_0: $\sigma^2 = 24$ ($\geq$)

H_1: $\sigma^2 < 24$, cola izquierda → Esto ya fue probado

$n = 40$ $\quad \alpha = 0,05$

$gl = 39$ $\quad \sigma_0^2 = 24$

$\chi^2_{0.05,39} = 25,69539$

→ Esto esta en terminos de χ^2 pero la pregunta es de σ

Recordando

$$\chi^2_c = \frac{(n-1)\cdot \sigma_c^2}{\sigma_0^2}$$

$$\chi^2_c \cdot \sigma_0^2 = (n-1)\cdot \sigma_c^2$$

$$\sigma_c^2 = \frac{\chi^2_c \cdot \sigma_0^2}{n-1}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\chi^2_c \cdot \sigma_0^2}{n-1}}$$

$n = 40$ $\quad \alpha = 0,05$

$gl = 39$ $\quad \sigma_0^2 = 24$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{25,69539 \cdot 24}{39}}$$

$$\boxed{\sigma_c = 3,9765}$$

[4 puntos] Una máquina corta y enrolla cintas adhesivas. Al analizar una muestra de 20 rollos se observa que la longitud de la cinta en cada uno de ellos sigue una distribución normal con una desviación estándar de 5 pulgadas. Indique si ese dato puede tomarse como evidencia significativa (con un nivel de significancia del 10 %) de que la desviación en la longitud de las cintas es menor a 8 pulgadas.

$H_0: \sigma = 8 \ (\geq)$ $\quad n = 20 \quad gl = 19 \quad s = 5$

$H_1: \sigma < 8 \quad \sigma_0 = 8 \quad \alpha = 0,10$

$\sigma_c^2 = (\sigma_c)^2$ y $\chi_c^2 = \dfrac{(n-1)\,\sigma_c^2}{\sigma_0^2}$ $\qquad \chi_c^2 = \chi^2_{\alpha, n-1}$

Valor P= $P\left(\chi^2 < \chi^2_{obs}\right)$, donde $\chi^2_{obs} = \dfrac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$.

$\chi^2_c = \chi^2_{0.10,\,19} = 11,65091$, pero esta en terminos de σ

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{19 \cdot 5^2}{8} = 7,421875$$

Como $\chi^2_{obs} = 7,421875 < 11,65091$ y es cola izquierda, se rechaza H_0

La empresa de llantas Mundiales ha sacado un nuevo modelo de llantas para automóviles al mercado asegurando que su duración tiene una desviación estándar menor a 5000 km. Suponga que la duración de las llantas se distribuye normalmente. Se quiere contrastar la afirmación a un nivel de significancia del 10% con una muestra aleatoria de 25 llantas del nuevo modelo.

Acote la probabilidad del error tipo II de la prueba si duración de las llantas del nuevo modelo tiene una desviación estándar de 4700 km

$H_0: \sigma = 5000 \ (\geq)$ $\quad n=25 \quad gl=24$

$H_1: \sigma < 5000$ $\quad \sigma_0=5000 \quad \alpha=0{,}10$

$H_1': \sigma = 4700$

$$\chi^2_c = \chi^2_{0.10,\,24} = 15{,}65868$$

Recordando

$$\chi^2_c = \frac{(n-1)\cdot \sigma_c^2}{\sigma_0^2} \;=\; \chi^2_c \cdot \sigma_0^2 = (n-1)\cdot \sigma_c^2$$

$$= \sigma_c^2 = \frac{\chi^2_c \cdot \sigma_0^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow \sigma_c = \sqrt{\frac{\chi^2_c \cdot \sigma_0^2}{n-1}}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{15{,}65868 \cdot 5000^2}{24}}$$ $\quad n=25 \quad gl=24 \quad \sigma_0=5000 \quad \alpha=0{,}10$

$\sigma_c = 4038{,}70$ $\quad$ Contrario a H_1 ($<$)

$$\beta = P(H_0 \mid H_1) = P(s > 4038{,}70)$$ $\quad \sigma_0 = 4700 \ (H_1')$

$$= P\left(\chi^2 > \frac{(n-1)\cdot \sigma_c^2}{\sigma_0^2}\right)$$

$$= P\left(\chi^2 > \frac{24\cdot 4038{,}70^2}{4700^2}\right)$$

$=$