Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	09
Fecha	Lunes 23 de setiembre del 2024 (semana 10)
Contenidos	a) Operaciones con matrices
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Matriz

Es un arreglo rectangular de información que se organiza en filas (horizontales) y columnas (verticales). Las matrices se denotan con un par de paréntesis alrededor de sus elementos. Al nombrar una matriz, usualmente se utiliza una letra mayúscula. También, se acostumbra a denotar con la letra m al número de filas de una matriz y con la letra n al número de columnas de la matriz. Así, a la expresión $m \times n$ se le llama **dimensión o tamaño de la matriz**.

Los elementos o entradas de una matriz se denotan con el nombre de la matriz, pero en minúscula y con dos subíndices, donde el primero indica el número de fila (denotado con la letra i) y el segundo el número de columna (denotado con la letra j), numerando las filas de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha. Así, una matriz se representa como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Igualdad de matrices

Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$. Se dice que $A = B$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El orden de ambas matrices es el mismo.
2. Los valores entrada por entrada son los mismos.

Tipos de matrices

Matriz transpuesta

Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, su transpuesta, denotada como A^T es la matriz de tamaño $n \times m$ que resulta de convertir las filas de A en columnas y las columnas de A en filas, esto es:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz inversa o matriz no singular

Si A es una matriz de orden n y además I_n es la matriz identidad de orden n, la matriz no singular es la matriz que posee inversa, es decir, cumple que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Para matrices de orden dos, la inversa puede calcularse con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Nota: si $ad - bc = 0$, entonces la matriz no tiene inversa.

En caso de que la matriz sea de orden n, con $n \geq 2$, entonces, su cálculo se realiza de la siguiente manera:

Sea A una matriz de orden n, donde A viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces al incorporar la matriz aumentada se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Luego de esto, deben realizarse operaciones elementales hasta obtener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

donde $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ es la matriz inversa de $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ahora bien, si resulta imposible obtener una matriz como la mencionada, significa que para la matriz A no existe una matriz inversa.

Operaciones con matrices

Adición de matrices

Sean A y B dos matrices de tamaño $m \times n$. Se dice la operación $A+B$ se da al sumar entrada por entrada los elementos de ambas matrices, esto es:

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$, entonces

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Sustracción de matrices

Sean A y B dos matrices de tamaño $m\times n$. Se dice la operación $A-B$ se da al restar entrada por entrada los elementos de ambas matrices, esto es:

$$\text{Sean } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}\text{, entonces}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix}$$

Producto de una matriz con un escalar

Sea A una matriz de tamaño $m\times n$ y sea $\beta\in\mathbb{R}$ un escalar. Se dice la operación βA se da al multiplicar el escalar por cada uno de los elementos de la matriz, esto es:

$$\text{Sea } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \text{ y } \beta\in\mathbb{R}\text{, entonces } \beta A=\begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \dots & \beta a_{1n}\\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \dots & \beta a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \dots & \beta a_{mn}\end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Sea A una matriz de tamaño $m\times n$ y B una matriz de tamaño $n\times p$, entonces el producto de las matrices A y B es una matriz de tamaño $m\times p$ formada por los productos de cada fila de A por cada columna de B, esto es:

$$\text{Sean } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np}\end{pmatrix}\text{, entonces } A\cdot B=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n1} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n2} & \dots & a_{11}\cdot b_{1p}+a_{12}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{np}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{n1} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{n2} & \dots & a_{21}\cdot b_{1p}+a_{22}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{np}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{n1} & a_{m1}\cdot b_{12}+a_{m2}\cdot b_{22}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{n2} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1p}+a_{m2}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{np}\end{pmatrix}$$

Ejercicio #1:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Verifique que A satisface la ecuación $A^2 - 4A - 5I_3 = O_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando el resultado del inciso anterior, demuestre que $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I)$

Note que $A^2 - 4A - 5I_3 = O_3 \Rightarrow A^2 - 4A = O_3 + 5I_3$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A(A - 4I_3) = 5I_3 \\
&\Rightarrow A^{-1} \cdot A(A - 4I_3) = A^{-1} \cdot 5I_3 \\
&\Rightarrow I_3(A - 4I_3) = A^{-1} \cdot 5I_3 \\
&\Rightarrow (A - 4I_3) = 5A^{-1} \\
&\Rightarrow \frac{1}{5}(A - 4I_3) = A^{-1}
\end{aligned}$$

c) Halle A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio #2:

Si se sabe que $J = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Determine en caso de existir J^{-1}.

R/ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{8}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/8 & -3/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{-10F_1 + F_3}{\overset{5F_1 + F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/8 & -3/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 1/8 & 5/8 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & -5/4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{8}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/8 & -3/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & -5/4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{-\frac{1}{4}F_2 + F_3}{\overset{\frac{1}{8}F_2 + F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -5/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \overset{-3F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{-\frac{1}{3}F_3 + F_2}{\overset{\frac{1}{3}F_3 + F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Así $J^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Ejercicio #3:

Considere las matrices: $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule $B^T \cdot (C + 2I_3)^{-1}$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C + 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C + 2I_3)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\vdots$$

Así $B^T (C + 2I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ -10 & -6 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio #4: Considere las matrices cuadradas del mismo orden A, B y X, donde $A-B$ es no singular, tales que $XA^T = I + (BX^T)^T$, con I la matriz identidad.

a) Utilice operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X en términos de las matrices I, A y B.

Note que $XA^T = I + (BX^T)^T \Rightarrow XA^T = I + (X^T)^T \cdot B^T$ pues $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$\Rightarrow XA^T = I + X \cdot B^T$ pues $(A^T)^T = A$

$\Rightarrow XA^T - XB^T = I$

$\Rightarrow X(A^T - B^T) = I$

$\Rightarrow X(A^T - B^T)(A^T - B^T)^{-1} = I(A^T - B^T)^{-1}$

$\Rightarrow X \cdot I = I(A^T - B^T)^{-1}$ pues $AA^{-1} = I$

$\Rightarrow X = (A^T - B^T)^{-1}$ pues $AI = A = IA$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, determine X utilizando el inciso *a*

Como $X = (A^T - B^T)^{-1}$, entonces:

$$A^T - B^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ahora $(A^T - B^T)^{-1} = \dfrac{1}{2 \cdot -4 - 7 \cdot -1} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio #5:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Determine la matriz X tal que $XB^{-1} + AC = I_2$

Note que $XB^{-1} + AC = I_2 \Rightarrow XB^{-1} = I_2 - AC$

$\Rightarrow XB^{-1} \cdot B = (I_2 - AC) \cdot B$

$\Rightarrow X \cdot I_2 = (I_2 - AC) \cdot B$ pues $B^{-1} \cdot B = I$

$\Rightarrow X = (I_2 - AC) \cdot B$ pues $AI = IA = A$

Ejercicio #6:

Considere las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Utilizando únicamente operaciones con matrices, determine (de manera explícita) la matriz X que satisface la ecuación matricial siguiente: $XAB^T = AB^T + XC^2$

Note que $XAB^T = AB^T + XC^2 \Rightarrow XAB^T - XC^2 = AB^T$

$$\Rightarrow X(AB^T - C^2) = AB^T$$

$$\Rightarrow X(AB^T - C^2)(AB^T - C^2)^{-1} = AB^T(AB^T - C^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow X \cdot I = AB^T(AB^T - C^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow X = AB^T(AB^T - C^2)^{-1}$$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Calcule $C(A+3I_3)^{-1} \cdot B^T$

R/ $\begin{pmatrix} \frac{59}{2} \\ -46 \end{pmatrix}$

Ejercicio #2:

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Verifique la igualdad $A^3 + I_3 = O_3$

b) Utilizando el inciso *a*, calcule A^{10}

R/ $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio #3:

Si se cumple que $XA - 2X + B^T B = O_3$ para las matrices A y X de 3×3 y B de 2×3, utilice álgebra matricial para despejar X de la ecuación dada y luego calcúlela explícitamente para el caso particular en que

R/ $\begin{pmatrix} -27 & 8 & 32 \\ -39 & 11 & 39 \\ -63 & 18 & 66 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y además } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$