Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	01
Fecha	Lunes 29 de julio del 2024 (semana 02)
Contenidos	a) Cálculo de términos de sucesiones
	b) Monotonía de sucesiones
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Sucesión

Una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números reales es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

En las sucesiones, la notación funcional cambia por la notación de subíndices, es decir:

$$\begin{array}{rcl} a(0) & = & a_0 \\ a(1) & = & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a(n) & = & a_n \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Por otro lado, se acostumbra a utilizar una letra minúscula para nombrar a una sucesión. Luego, cada elemento se denota con el nombre de la sucesión, seguido por un subíndice que indica su posición en la lista.

Figura 1.6.1: *Elementos de una sucesión*

Sucesión factorial

La sucesión definida por $\{n!\}_{n=0}^{\infty}$ se puede expresar como:

$$n! = n(n-1)!$$

con $n \geq 1$ y sabiendo que $0! = 1$ es conocida como la **sucesión factorial**.

Sucesión de Fibonacci

La sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

con $n \geq 3$ es conocida como la **sucesión de Fibonacci**.

Ejercicio: Escriba los primeros cinco términos para las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3i+1)}{2^{i+1}(i+1)!}$, para $i \geq 0$

R/ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{35}{48}, \frac{91}{96}$

$a_0 = \dfrac{1}{2^{0+1}(0+1)!} \Rightarrow a_0 = \dfrac{1}{2}$

$a_1 = \dfrac{1\cdot 4}{2^{1+1}(1+1)!} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{2}$

$a_2 = \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{2^{2+1}(2+1)!} \Rightarrow a_2 = \dfrac{7}{12}$

$a_3 = \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{2^{3+1}(3+1)!} \Rightarrow a_3 = \dfrac{35}{48}$

$a_4 = \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}{2^{4+1}(4+1)!} \Rightarrow a_4 = \dfrac{91}{96}$

b) $y_n = 3y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3}$, para $n \geq 4$ y con $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$

R/ $-2, 0, 1, 5, 17$

$y_1 = -2$

$y_2 = 0$

$y_3 = 1$

$$\begin{aligned} y_4 &= 3y_{4-1} + 2y_{4-2} - y_{4-3} \\ &= 3y_3 + 2y_2 - y_1 \\ &= 3\cdot 1 + 2\cdot 0 - -2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_5 &= 3y_{5-1} + 2y_{5-2} - y_{5-3} \\ &= 3y_4 + 2y_3 - y_2 \\ &= 3\cdot 5 + 2\cdot 1 - 0 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Sucesiones monótonas

Existen cuatro métodos para determinar si una sucesión es creciente o decreciente, entre ellos:

Comparación de fracciones

Recuerde que si existen dos fracciones con numeradores y denominadores positivos y ambas fracciones tienen igual numerador, entonces la fracción que posea el mayor denominador es la menor.

Note que si a, b y c son números positivos, entonces, se cumple que: $a \leq b \Longrightarrow \frac{c}{a} \geq \frac{c}{b}$ y note que, si C es una constante, entonces:

- **Creciente:** $\dfrac{\text{constante}}{\text{función decreciente}}$
- **Decreciente:** $\dfrac{\text{constante}}{\text{función creciente}}$

Ejemplos:

(a) $\dfrac{5}{-x}$ crece

(b) $\dfrac{87}{-x^2+3}$ crece

(a) $\dfrac{5}{x}$ decreciente

(b) $\dfrac{87}{x^2+3}$ decreciente

Derivación

Para esto se utiliza el criterio de la primera derivada, el cual dice que:

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en el intervalo $I =]a,b[$, entonces se cumple que:

- Si $f'(x) > 0, \forall x \in I$, entonces f es creciente en $[a,b]$
- Si $f'(x) < 0, \forall x \in I$, entonces f es decreciente en $[a,b]$

Ejercicio: Para cada una de las siguientes sucesiones, determine si son crecientes, decrecientes o no son monótonas.

a) $f_m = m^3 - 5m^2 - 25m, \forall m \geq 5$ R/ Crece

Note que $f(x) = x^3 - 5x^2 - 25x \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - (5x^2)' - (25x)'$

$$= (x^3)' - 5(x^2)' - 25(x)'$$
$$= 3x^2 - 10x - 25$$
$$= (x-5)(3x+5)$$

$x = 5 \quad \vee \quad x = \frac{-5}{3}$

Tabla de signos

	$-\infty$ $-5/3$	$-5/3$ 5	5 $+\infty$
$(x-5)$	$-$	$-$	$+$
$(3x+5)$	$-$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\therefore$ La sucesión es creciente, $\forall m \geq 5$

b) $c_n = \dfrac{n^4}{e^n}, \forall n \geq 4$

R/ Decrece

Tabla de signos

Una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice que es:

- **Creciente:** si y solo si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- **Decreciente:** si y solo si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- **En otro caso:** la sucesión no es monótona.

Resta de términos consecutivos

Una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice que es:

- **Creciente:** si y solo si $a_{n+1} - a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- **Decreciente:** si y solo si $a_{n+1} - a_n \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- **En otro caso:** la sucesión no es monótona.

Cociente de términos consecutivos

Una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice que es:

- **Creciente:** si y solo si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
- **Decreciente:** si y solo si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
- **En otro caso:** la sucesión no es monótona.

Original — Resta consecutivos

Creciente: $a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow 0 \leq a_{n+1} - a_n$

$\Downarrow$

$1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ Cociente consecutivos

Original — Resta consecutivos

Decreciente: $a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow 0 \geq a_{n+1} - a_n$

$\Downarrow$

$1 \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ Cociente consecutivos

Ejercicio: Para cada una de las siguientes sucesiones, determine si son crecientes, decrecientes o no son monótonas.

a) $c_n = \dfrac{3n!}{n \cdot 7^{n+1}}$ R/ Crece

Suponga que C_n es creciente, entonces:

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} \geq 1 \iff \left(\frac{\dfrac{3(n+1)!}{(n+1)\cdot 7^{n+1+1}}}{\dfrac{3n!}{n\cdot 7^{n+1}}} \right) \geq 1$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$\iff \frac{3(n+1)! \cdot n \cdot 7^{n+1}}{(n+1)\cdot 7^{n+2} \cdot 3n!} \geq 1$$

$$\iff \frac{(n+1)\cdot(n+1-1)! \cdot n \cdot 7^n \cdot 7^1}{(n+1)\cdot 7^n \cdot 7^2 \cdot n!} \geq 1$$

$$\iff \frac{n! \cdot n \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot n!} \geq 1$$

$$\iff \frac{n}{7} \geq 1$$

$$\Rightarrow n \geq 7$$

$\therefore$ C_n es creciente $\forall n \geq 7$

b) $a_t = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3t+1)}{3^{t-1} \cdot (2t)!}$ R/ Decrece

Suponga que a_t es creciente

$$\frac{a_{t+1}}{a_t} \geq 1 \iff \left(\frac{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3t+1)(3(t+1)+1)}{3^{t+1-1} \cdot (2(t+1))!}}{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3t+1)}{3^{t-1} \cdot (2t)!}} \right) \geq 1$$

$$\iff \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3t+1)(3(t+1)+1) \cdot 3^{t-1} \cdot (2t)!}{3^{t+1-1} \cdot (2(t+1))! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3t+1)} \geq 1$$

$$\iff \frac{(3t+3+1) \cdot 3^t \cdot 3^{-1} \cdot (2t)!}{3^t \cdot (2t+2)!} \geq 1 \quad ✓$$

$n! = n(n-1)!$

$$\iff \frac{(3t+4) \cdot 3^{-1} \cdot (2t)!}{(2t+2)(2t+1)!} \geq 1$$

$(2t+2)! = (2t+2)(2t+2-1)!$
$= (2t+2)(2t+1)!$

$$\iff \frac{(3t+4) \cdot 3^{-1} \cdot (2t)!}{(2t+2)(2t+1)(2t)!} \geq 1$$

$$\iff \frac{(3t+4)}{3 \cdot (2t+2)(2t+1)} \geq 1$$

$$\iff 3t+4 \geq 3(2t+2)(2t+1)$$

$$\iff 3t+4 \geq 3(4t^2+2t+4t+2)$$

$$\iff 3t+4 \geq 12t^2+6t+12t+6$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \geq 12t^2 + 6t + 12t + 6 - 3t - 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \geq 12t^2 + 15t + 2$$

Como la desigualdad es falsa ($\forall t \in \mathbb{N}$) y se supuso que la sucesión era creciente, por contradicción, la sucesión a_t es decreciente $\forall t \geq 0$

c) $a_n = \dfrac{24 \cdot 30 \cdot 36 \cdot \ldots \cdot (6n+6)}{n!}$ R/ Crece

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Escriba los primeros cinco términos para las siguientes sucesiones:

a) $a_k = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}{(2k)!}$, a partir de $k = 0$

R/ $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{48}, \dfrac{3}{128}$

b) $s_n = \dfrac{1}{1 + s_{n-1}}$ y con $s_1 = 1$

R/ $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}$

Ejercicio #2: Para cada una de las siguientes sucesiones, determine si son crecientes, decrecientes o no son monótonas.

a) $a_n = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{(2n+4)!}$

R/ Crece

b) $p_k = \dfrac{7^k}{k!}$

R/ Decrece