Conteo

Principios elementales de conteo

- **Principio de la suma**

  Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en k casos y C_i es el conjunto de maneras de realizar el proceso, ubicados en el caso i, con $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, se tiene que hay $|C_1| + |C_2| + \ldots + |C_k|$ maneras de realizar el proceso.

- **Principio del producto**

  Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en k etapas y E_i es el conjunto de maneras de realizar el proceso, ubicados en la etapa i, con $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, se tiene que hay $|E_1| \cdot |E_2| \cdot \ldots \cdot |E_k|$ maneras de realizar el proceso.

- **Anagramas**

  El anagrama de una palabra es un ordenamiento de las letras de la palabra dada. Las posiciones de un anagrama se enumeran de izquierda a derecha.

Definición 1.9 Principio de inclusión-exclusión.

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad \textbf{si} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

$$\left|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k<l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \cdots$$

$|\overline{A}| = |U| - |A|$

$$\left|\overline{\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5}}\right| \xrightarrow{\text{DM}} = \left|\overline{\boxed{\overline{A_1}} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{A_5}}\right|$$

$$= |U| - \Big[\sum |\overline{A_i}| - \sum \overline{A_i} \cap \overline{A_j} + \sum \overline{A_i} \cap \overline{A_j} \cap \overline{A_k} - \sum \overline{A_i} \cap \overline{A_j} \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_l} + \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$$

- **Permutación**

  Una permutación de n objetos distintos es un ordenamiento de ellos. Al número de permutaciones de n objetos distintos se le denota por $P(n)$ y si fórmula viene dada por:

  $$\boxed{P(n) = n!}$$

El orden importa, entonces $AB \neq BA$

- **Arreglo**

  Un arreglo de r objetos tomados de n objetos distintos es una escogencia ordenada de r objetos tomados de los n objetos. El número de arreglos de r objetos tomados de n objetos distintos, se denota por $P(n, r)$ y su fórmula viene dada por:

  $$\boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

El orden importa, entonces $AB \neq BA$ y de hecho $P(n) = P(n, n)$

$n! = P(n, n)$

- **Combinación**

Una combinación tomada de r objetos tomados de n distintos es una selección de r objetos tomados de los n, es decir, si A es el conjunto de los n objetos, entonces una combinación de r objetos tomados de los n es un subconjunto de A de cardinalidad r. El número de combinaciones de r objetos tomados de n distintos, se denota por $C(n, r)$ y su fórmula viene dada por:

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

El orden no importa entonces AB = BA

$C(n, r)$ Por eso $C(2,1) \wedge C(2,2) = 1$

Cantidad total de objetos

Cantidad total de espacios

(Siempre el mayor va primero)

$C(4, 2)$ = De 4 objetos, elijo 2

- **Conteo de permutaciones con objetos repetidos**

En este caso, se tiene que

objetos totales

$$\boxed{P(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}}$$

repetidos

ALAJUELA → 8 letras, 3A, 2L, 1J, 1U, 1E

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3360$$

- **Conteo de combinaciones con repetición**

En este caso, se tiene que el número de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ es

$$\boxed{C(n+r-1, r)}$$

Conteo de distribuciones

- **Distribuciones de objetos distinguibles** (Diferentes)

  Si se tienen r objetos distinguibles y n cajas distintas, el número de maneras de distribuir r objetos distinguibles en n cajas distintas viene dado por:

  1. Si $r < n$ entonces el número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, donde a lo sumo debe estar un objeto en cada caja es $P(n, r)$
  2. El número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, si no hay restricciones es n^r

- **Distribuciones de objetos indistinguibles** (Iguales)

  Si se tiene r objetos indistinguibles en n cajas distintas, el número de maneras de distribuir r objetos indistinguibles en n cajas distintas viene dado por:

  1. Si $r < n$ entonces el número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, donde a lo sumo debe estar un objeto en cada caja es $C(n, r)$
  2. El número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, si no hay restricciones es $C(n + r - 1, r)$

Objetos (r)	Cajas (n)	Restricción	Resultado
Iguales	Diferentes	-	$C(n+r-1, r)$
Iguales	Diferentes	Al menos un objeto	$C(n, r)$
Diferentes	Diferentes	Al menos un objeto	$P(n, r)$
Diferentes	Diferentes	-	n^r

Iguales = Repetidos

Diferentes = Sin repetir

Al menos $\rightarrow$ $x \geq k$

A lo sumo $\rightarrow$ $x \leq k$, k constante $\in \mathbb{R}$

Exactamente $\rightarrow$ $x = k$

Probabilidades

Reglas de Bayes

- **Regla de Bayes #1**

  Sean A y B eventos sobre un espacio muestral Ω, con B no vacío, entonces, se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- **Regla de Bayes #2**

  Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral Ω. Sean A y B dos eventos arbitrarios, con B no vacío, entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Ley de Laplace

Sea Ω un conjunto no vacío y finito, entonces la función $P : \mathcal{P}(\Omega) \Longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$$

es una medida de probabilidad en Ω. Una forma de interpretarla viene dada por

$$P(X) = \frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ de casos totales}}$$

Reglas del producto

- **Regla del producto #1**

  Se dice que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si y solo si

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

- **Regla del producto #2**

  Se dice que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si y solo si

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cdot A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n|(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}))$$

Probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral Ω. Sea B un evento cualquiera, entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

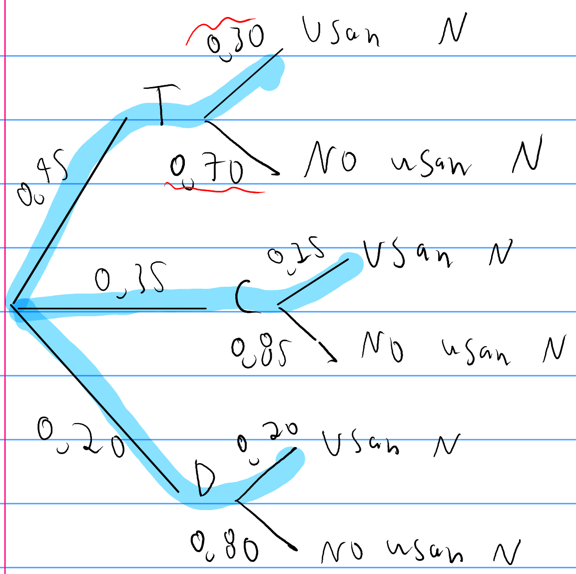
Esta se puede reducir:

$$P(A)_i \cdot P(B|A_i)$$

$$= P(A)_i \cdot \frac{P(B) \cdot \cancel{P(A)_i}}{\cancel{P(A_i)}} = \boxed{P(A_i) \cdot P(B)}$$

En la carrera de computación de la **Universidad Bienestar Seguro**, el 45 % de los estudiantes prefieren películas de terror, el 35 % prefiere las películas de comedia y el resto prefiere las películas de drama. Además, el 15 % de los estudiantes prefieren las películas de comedia y utilizan Netpeli (cierta plataforma de películas en línea). Por otro lado, el 30 % de los que prefieren películas de terror utilizan Netpeli, al igual que el 20 % de los que prefieren las películas de drama. Se elige al azar un estudiante de la carrera de computación.

a) Halle la probabilidad de que el estudiante elegido, utilice Netpeli.



Ejemplo del árbol de probabilidades

$$P(T)\cdot P(N|T) + P(C)\cdot P(N|C) + P(D)\cdot P(N|D)$$

$$0{,}45\cdot 0{,}30 + 0{,}35\cdot 0{,}15 + 0{,}20\cdot 0{,}20$$

$$0{,}2275 \,//$$

Espacio muestral

Un espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio y se denota como Ω

Eventualidad

Es un resultado particular de un fenómeno aleatorio. Dicho de otra forma, es un elemento del espacio muestral.

Evento

Es un conjunto de resultados de un fenómeno aleatorio, es decir, un subconjunto de elementos de un espacio muestral.

Ocurrencia de un evento

Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades.

Propiedades de sucesos y eventos

Ojo P es probabilidad, NO permutaciones

Sean A y B eventos arbitrarios.

1. **Suceso imposible:** es un suceso que no contiene sucesos elementales. Se representa como

$$P(\varnothing) = 0$$

2. **Suceso contrario:** es un suceso opuesto al dado inicialmente. Se representa como

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

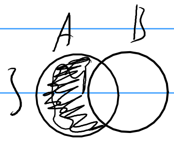
3. **Unión de sucesos:** se da cuando ocurre un evento u ocurre otro evento. Se representa como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

similar al principio de inclusión-exclusión

4. **Diferencia de sucesos:** se da cuando ocurre un evento y no ocurre otro evento. Se representa como

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



5. **Evento excluyente:** son eventos que no comparten nada en común. Se representa como

$$P(A \cap B) = \varnothing$$

6. **Evento independiente:** la probabilidad de ocurrencia de un evento, no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento. Se representa como

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Probabilidad condicionada

Sea P una función de probabilidad sobre Ω. Sea B un evento de probabilidad no nula. Se define la probabilidad condicional sobre B por

| = "Dado que"

$$P(X|B) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)}$$

y se lee como **probabilidad de X dado B**

Ninguna probabilidad es > 1 por lo que se representan como 0,algo

0,2 ↔ 0,20 → 20%   ← Tener cuidado con estos caso
0,25 → 25%
0,02 → 2% ←

P(C | Q) ← La condicion va despues del dado que "|"

"Probabilidad de perder calculo dado que perdio Quimica"

El "|" solo se usa cuando hay implicita o explicitamente un "sabiendo que" o un "si" ← de if

TIPS:

1) Solo cuando no se pueda repetir, se debe hacer posicionamiento y luego la colocacion

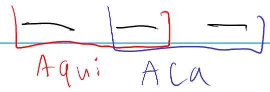
2) La formula $n+k-1$ donde n es la cantidad de espacios disponibles y k el tamaño del bloque, se usa para elegir cuantas posiciones puede ocupar un bloque k, en n espacios, que ocupa k espacios consecutivos

Un Ejemplo de 1) y 2)

Tengo los numeros 1,2,3 y quiero ver de cuantas maneras se pueden acomodar si el 1 y el 3 deben ir juntos, sin repetir numeros

Etapa 1: Elegir posiciones del bloque $\boxed{1\ 3}$
$n-k+1$, hay 3 posiciones (n) y el bloque(k) mide 2

$3-2+1=\boxed{2}$ posiciones disponibles



Etapa 2: Colocar bloque →
Si el orden importa → $P(2,2)=2$ ($13 \neq 31$)
Si el orden NO importa $C(2,2)=1$ ($13=31$)

Etapa 3: Elegir posicion de resto de numeros
$P(1,1) \vee C(1,1) = 1$

Etapa 4: Colocar resto de numeros
$P(1,1) \vee C(1,1) = 1$

Total: Con orden: $\boxed{2.2.1=4}$ Sin orden $\boxed{2.1.1=2}$

En ejercicios como este de letras separadas

Ejemplo 4.17 Considere la palabra «INDEPENDENCIA».

b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas, con las vocales «E» separadas por al menos una vocal?

$\Omega_V = \{I, I, E, E, E, A\} = 6$

$\Omega_C = \{N, N, N, D, D, P, C\} = 7$

Hay que considerar inicio y final y colocar las demas en el centro de forma intercalada

_ I _ I _ A _

Posicionar bloque de vocales $\to 13-6+1 = 8$

Posiciones de E's $\to C(4,3) = 4$

Colocar resto de vocales $\to \dfrac{3!}{2!} = 3$

Colocar resto de consonantes $\to \dfrac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$

Total: $8\cdot 4\cdot 3\cdot 420 = \boxed{40320}$