Criterio de la integral

El criterio de la integral

Teorema (criterio de la integral, CI, o criterio de Maclaurin-Cauchy)

Sea $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ una función monótona en algún intervalo[9] $[c,\infty[$ para $c \ge a$, y sea N un entero mayor o igual que a. Entonces

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ converge} \iff \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Teorema (versión simplificada del criterio de la integral, CI

Sea $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ una función con un número finito de puntos críticos en algún intervalo $[c,\infty[$ para $c \ge a$, y sea N un entero mayor o igual que a. Entonces

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ converge} \iff \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

La serie converge si la integral impropia converge

$\nexists$ Conver

$\pm\infty$ Diver

Se necesita

$\int \frac{2}{x-1}$ No es continua, $x=1$

1) Que sea continua (Que no se indefina) $\int \frac{x}{2}$ Es continua

2) Que sea positiva en $\mathbb{N}$ $(1,2,3\ldots)$

3) Que $\underbrace{\text{sea decreciente}}_{\text{Que } f'(x)<0}$ en $\mathbb{N}$ $(1,2,3\ldots)$ y $f'(x)\begin{cases} + & \nearrow \\ - & \searrow \end{cases}$

Esta

Ejemplus

1) Deter si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n e^{1-n^2}$ conver o diver

a) Sea $f(x) = x e^{1-x^2}, x \in \mathbb{R}$

b) Calcular $f'(x)$

$f(x) = xe^{1-x^2}$

$f(x) = e^{1-x^2} + xe^{1-x^2} \cdot -2x$

$= e^{1-x^2} - 2x^2 e^{1-x^2}$

$= e^{1-x^2}(1-2x^2)$

c) Ptos criticos $f'(x)=0 \wedge f'(x) \nexists$

$f'(x) = e^{1-x^2}(1-2x)$

$e^{1-x^2}(1-2x^2)=0$ $\quad \cancel{f'(x)\nexists}$

$\cancel{e^{1-x^2}=0}$ $\quad 1-2x^2=0$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	$+$		$+$
$1-2x^2$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$		$-$

Necesita ser decreciente

$f(x)$	$+$	$-$

↳ Decrece ✓

D) Aplicando crit de la integral

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{1-n^2}$$

Entonces

En el continuo

$$\int_0^{+\infty} x e^{1-x^2} \, dx$$

El criterio de la integral

Teorema (criterio de la integral, CI, o criterio de Maclaurin-Cauchy)

Sea $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ una función monótona en algún intervalo[9] $[c,\infty[$ para $c \geq a$, y sea N un entero mayor o igual que a. Entonces

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ converge} \iff \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

La serie converge si la integral impropia converge

Conver

$\pm\infty$ Diver

Calculando la integral indefinida

$$\int x e^{1-x^2} \qquad u = 1-x^2$$

$$du = -2x$$

$$\int e^u \cdot \frac{-1}{2} du \qquad \frac{-1}{2} du = x$$

$$\frac{-1}{2} \int e^u \, du$$

$$\frac{-1}{2} e^u + C$$

$$\frac{-1}{2} e^{1-x^2} + C$$

Ahora calculando la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{-1}{2} e^{1-x^2} \Big|_0^{+\infty}$$

Cuando se evalua aquí se usa $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$-\frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} e^{1-x^2} - \left(- \frac{e^{1-0^2}}{2} \right)$$

$$\frac{-1}{2} e^{1-\infty} + \frac{e}{2}$$

$$\neq e^{-\infty} + \frac{e}{2}$$

$$0 + \frac{e}{2} \qquad \leftarrow \text{Converge}$$

$$\frac{e}{2} \qquad \pm\infty \text{ Diverge}$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{1-x^2} = \frac{e}{2}, \text{ Converge}$$

$$\int_0^{x} \quad \frac{\quad}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} n e^{1-n^2} \text{ Converge}$$

2) Det si $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ Conver o diver

a) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{-1}{[x\ln^2(x)]^2} \cdot \qquad \ln^2(x) + x \cdot \ln^2(x)'$$

$$\ln^2(x) + 2\cancel{x}\ln(x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= -\frac{\cancel{\ln(x)}(\ln(x)+2)}{x^2\cancel{\ln^4(x)}}$$

$$= -\frac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)}$$

c) $-\dfrac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)} = 0 \qquad f' \nexists \quad x=0$

$-\ln(x)+2=0$

$2=\ln(x)$

$\ln(x)=2$

$\cancel{e}^{\cancel{\ln}(x)} = e^2$

$x = e^2$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} \to \int \frac{1}{x\ln(x)} \qquad u=\ln(x) \quad du = \frac{1}{x}dx$

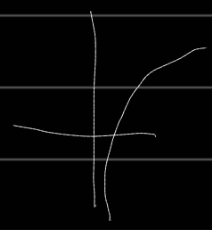
$$\int \frac{1}{u}\,du$$

$$\int_2^{+\infty} \ln|\ln(x)| \Big|_2^{+\infty} \longleftarrow \ln|\ln(x)| + C$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln|\ln(x)| - \ln|\ln(2)|$$

$$\ln|+\infty| - \ln|\ln(2)|$$

$$+\infty$$



$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} \quad \text{Diverge}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln(n)} \quad \text{Diverge}$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$$

$$f(x) = x\cdot e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-x^2} + x\cdot e^{-x^2}\cdot -2x$$

$$= e^{-x^2} - e^{-x^2}\cdot 2x^2$$

$$= e^{-x^2}(1-2x^2) = 0$$

$$\cancel{e^{-x^2}} = 0 \qquad 1-2x^2 = 0$$

$$x = \cancel{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \qquad x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Solo $\in \mathbb{N}$

	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$1-2x^2$	+		−
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	+		−

Decrece

$$\int_0^{+\infty} n\cdot e^{-n^2} \longrightarrow \int x\cdot e^{-x^2}$$

$u = -x^2$

$du = -2x$

$-\frac{1}{2}du = x$

$$\frac{-1}{2}\int e^u\,du$$

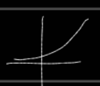
$$\frac{-1}{2}\cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{-e^{-x^2}}{2}$$

Se puede empezar en any value

$$\frac{-1}{2} -e^{-x^2} \Big|_1^{+\infty}$$

$$\frac{-1}{2}\left(-e^{-1^2} - \lim \cancel{-\infty}\right)$$



$$x \to +\infty \quad = 0$$

$$\frac{-1}{2} e^{-1}$$

$\boxed{\text{Converge}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^2}$

$$f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\ln(x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x^2} - \ln^2(x) \cdot 2x}{x^4}$$

$$\frac{2x\ln(x) - \ln^2(x) \cdot 2x}{x^4} = 0$$

$$\underbrace{2x\ln(x)}_{>0}\underbrace{(1 - \ln(x))}_{<0} = 0 \quad \searrow$$

$x \geq 3$ (repasar forma de ballestero)

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2} \longrightarrow \int \frac{\ln^2(x)}{x^2} \qquad u = \ln(x) \to x = e^u$$

$$du = \frac{1}{x}\, du$$

$$\int \frac{u^2}{e^u}\, du$$

$$\int u^2 \cdot e^{-u}\, du$$

Por partes 2 veces

G) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

$$f' = \frac{-1}{(x\ln(x))^2} \cdot \ln(x) + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$\frac{-\ln(x) + 1}{x^2\ln^2(x)}, \quad \text{Decreciente}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \qquad u=\ln(x)$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{u}\,du$$

$$\ln|u|$$

$$\ln|\ln(x)|$$

$$\ln|\ln(x)| \Big|_2^{+\infty}$$

$$\ln|\ln(+\infty)| - \ln|\ln(2)|$$

$$+\infty$$

$\therefore$ Diverge