Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Cálculo y Álgebra Lineal

Tiempo máximo: 2h 30min.
Puntaje máximo: 34
II semestre 2015

III Examen Parcial

Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadoras programables ni teléfonos celulares.

---

1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) [**2 pts**] Determine los valores propios de la matriz A.

   (b) [**2 pts**] Elija un valor propio encontrado en la parte (a) y determine un vector propio asociado a este.

2. [**3 pts**] Sin utilizar la definición del determinante, compruebe que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Considere los vectores $u = (4, 1, 0)$, $v_1 = (2, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 4)$ y $v_3 = (0, -1, 4)$.

   (a) [**3 pts**] Exprese el vector u como combinación de los vectores v_1, v_2 y v_3

   (b) [**2 pts**] Calcule $\text{Proy}_{v_3} u$

   (c) [**2 pts**] Determine el ángulo formado por los vectores $v_1 = (2, 0, 2)$ y $v_2 = (-1, 1, 4)$

Continua atrás...

4. [**5 pts**] Sean $u = (1,1,1)$ y $v = (1,-1,2)$ vectores en $\mathbb{R}^3$, determine el o los vectores x, y en $\mathbb{R}^3$ que cumplan simultáneamente las condiciones siguientes:

   - ◇ $u = x + y$
   - ◇ $x \parallel v$
   - ◇ $y \cdot v = 7$

5. [**5 pts**] Un triángulo tiene como vértices los puntos $P\,(0,0,0)$, $Q\,(1,1,1)$ y un tercer vértice R situado en la recta L de ecuación:

$$L : (x,y,z) = (0,0,1) + t\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

   Determine los posibles valores de R, sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}\,(ul)^2$.

6. Realice lo siguiente:

   (a) [**2 pts**] Determine un vector director de la recta L_1 obtenida al intersecar los planos π y σ de ecuaciones:

$$\pi : 3x - y = 0$$
$$\sigma : -x + 2y + 4z = 0$$

   (b) [**2 pts**] Determine el punto de intersección P entre la recta L_2 y el plano ρ cuyas ecuaciones son respectivamente:

$$L_2 : x = 1;\ \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

$$\rho : x - 2y + 3z = 0$$

   (c) [**1 pto**] Halle ecuaciones simétricas de una recta L paralela a L_1 y que contiene a P.

7. [**5 pts**] Determine la ecuación cartesiana del plano π que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

   - ◇ Contiene el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones:

$$L_1 : (x,y,z) = (-2,0,1) + t\,(0,-1,1)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$L_2 : -x = -y - 1 = \frac{z}{2}$$

   - ◇ El plano π es perpendicular al plano $\rho : 2x - 3y + z = 2$
   - ◇ El plano π es paralelo a la recta $L : \dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{-z}{3}$

#1 a) $\alpha = 5, \quad -2$

b) $\alpha = 5: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\alpha = -2: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

#2 $F_4 - \frac{1}{2}(F_2 + F_3): \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

#3 a) $u = 2v_1 - v_3$

b) $\frac{-1}{17}\langle 0, -1, 4 \rangle$

c) $\alpha = 60°$

#4 $x = \langle -\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{3} \rangle, \qquad y = \langle \frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{8}{3} \rangle$

#5 R= (2, 1, 1) o R= (0, 0, 1)

#6 a) $\langle -4, -12, 5 \rangle$

b) $P = (1, 2, 1)$

c) $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-12} = \frac{z-1}{5}$

#7 $7x + 3y - 5z = -43$