

Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	13
Fecha	Lunes 21 de octubre del 2024 (semana 14)
Contenidos	a) Ángulo entre vectores (paralelos y octogonales)
	b) Proyección vectorial
	c) Producto vectorial en vectores en \mathbb{R}^3 y sus propiedades.
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	<p>Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada Contenidos.</p> <p>Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.</p>

Producto cruz en \mathbb{R}^3

Sean $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces, el producto cruz se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \hat{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{k} \end{aligned}$$

Considere los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $v \cdot (v \times w) = 0$
2. $w \cdot (v \times w) = 0$
3. **Identidad de Lagrange:** $\|v \times w\| = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2$
4. $v \times w = -(w \times v)$
5. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
6. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
7. $\alpha(v \times w) = (\alpha v) \times w = v \times (\alpha w)$
8. $v \times 0_3 = 0_3 \times v = 0_3$
9. Si v y w son paralelos, entonces $v \times w = 0$

Ejercicio: Calcule el producto cruz de los siguientes vectores:

a) $u = (2, 4, -5)$ y $v = (-3, -2, 1)$

b) $p = (1, -3, 4)$ y $q = (-2, 1, 1)$

a) $u \times v$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i} (4 \cdot 1 - -2 \cdot -5) - \hat{j} (2 \cdot 1 - -3 \cdot -5) + \hat{k} (2 \cdot -2 - -3 \cdot 4) \\ &= \hat{i} (-6) - \hat{j} (-13) + \hat{k} (8) \\ &= (-6, 13, 8) \end{aligned}$$

Ángulo entre vectores

Si $v, w \in \mathbb{R}^n$ son vectores no nulos, el ángulo entre v y w , denotado como $\angle v, w$, es el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\begin{aligned} v \cdot w &= \|v\| \|w\| \cdot \cos(\theta) \\ \Rightarrow \quad \theta &= \arccos\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}\right) \end{aligned}$$

Vectores paralelos

Sean u, v dos vectores no nulos, entonces u y v son paralelos si $\angle u, v = 0$ o bien $\angle u, v = \pi$ o dicho de otra forma $u = \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vectores perpendiculares o vectores ortogonales

Sean u, v dos vectores no nulos, entonces u y v son perpendiculares si $\angle u, v = \frac{\pi}{2}$ o dicho de otra forma $u \cdot v = 0$.

Proyección ortogonal

Si $v, w \in \mathbb{R}^n$, con $w \neq 0$, se llama proyección ortogonal de v sobre w al vector dado por:

$$\text{proy}_w^v = \underbrace{\frac{w \cdot v}{\|w\|^2}}_{\text{escalar}} \cdot \underbrace{w}_{\text{vector}}$$

Ejercicio #1: Considere los vectores $u = (4, 1, 0)$, $v_1 = (2, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 4)$ y $v_3 = (0, -1, 4)$

a) Calcule $\text{proy}_{v_3}^u$

$$\begin{aligned}\text{proy}_{v_3}^u &= \frac{v_3 \cdot u}{\|v_3\|^2} \cdot v_3 \Rightarrow \text{proy}_{v_3}^u = \frac{(0, -1, 4) \cdot (4, 1, 0)}{\|(0, -1, 4)\|^2} \cdot (0, -1, 4) \\ &= \frac{0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 0}{(\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2})^2} \cdot (0, -1, 4) \\ &= \frac{-1}{17} \cdot (0, -1, 4) \\ &= \left(0, \frac{1}{17}, \frac{-4}{17}\right)\end{aligned}$$

$$\text{proy}_w^v = \underbrace{\frac{w \cdot v}{\|w\|^2}}_{\text{escalar}} \cdot \underbrace{w}_{\text{vector}}$$

b) Determine el ángulo formado por los vectores v_1 y v_2

$$\theta = \arccos \left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \right)$$

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos \left(\frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} \right) \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{(2, 0, 2) \cdot (-1, 1, 4)}{\|(2, 0, 2)\| \cdot \|(-1, 1, 4)\|} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Ejercicio #2: Sean $u = (-2, 0, 1)$ y $v = (-1, 2, 1)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Halle el o los vectores w en \mathbb{R}^3 tal que

a) w es paralelo a v

b) La proyección de w sobre u es igual a $4u$

Sea $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Condición b) Note que la proyección de w sobre u es $4u$, es decir:

$$\text{proy}_w^v = \underbrace{\frac{w \cdot v}{\|w\|^2}}_{\text{escalar}} \cdot \underbrace{w}_{\text{vector}}$$

$$\text{proy}_u^w = \frac{u \cdot w}{\|u\|^2} \cdot u \Rightarrow 4u = \frac{u \cdot w}{\|u\|^2} \cdot u$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{u \cdot w}{\|u\|^2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{(-2, 0, 1) \cdot (a, b, c)}{\|(-2, 0, 1)\|^2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{-2a + 0b + 1c}{(\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2})^2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{-2a + c}{5}$$

$$\Rightarrow 20 = -2a + c$$

$$\Rightarrow 20 + 2a = c \quad (1)$$

Condición a) Como w es paralelo a v , se tiene que:

$$w = \alpha v \Rightarrow (a, b, c) = \alpha (-1, 2, 1)$$

$$\Rightarrow (a, b, 20 + 2a) = (-\alpha, 2\alpha, \alpha) \quad \text{por (1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2\alpha & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20 + 2a = \alpha & (4) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (4), se tiene que: $20 + 2(-\alpha) = \alpha \Rightarrow 20 - 2\alpha = \alpha$

$$\Rightarrow 20 = 3\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{20}{3} = \alpha$$

$$\text{Así } a = -\frac{20}{3}, \quad b = 2 \cdot \frac{20}{3} \Rightarrow b = \frac{40}{3} \quad y$$

$$20 + 2a = c \Rightarrow 20 + 2 \cdot -\frac{20}{3} = c$$

$$\Rightarrow \frac{20}{3} = c$$

$$\text{Por tanto, } w = \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & \frac{40}{3} & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio #3: Sean $u = (1, -2, 0)$ y $v = (1, 1, 0)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Halle el o los vectores w en \mathbb{R}^3 que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

a) w es perpendicular a u

b) $\|w\| = 9$

c) La proyección de w a lo largo de v es igual a $-6v$

$$\text{Sea } w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{proy}_w^v = \underbrace{\frac{w \cdot v}{\|w\|^2}}_{\text{escalar}} \cdot \underbrace{w}_{\text{vector}}$$

Condición c) Dado que la proyección de w a lo largo de v es $-6v$, se tiene que:

$$\text{proy}_v^w = \frac{v \cdot w}{\|v\|^2} \cdot v \Rightarrow -6v = \frac{v \cdot w}{\|v\|^2} \cdot v$$

$$\Rightarrow -6 = \frac{(1, 1, 0) \cdot (a, b, c)}{\|(1, 1, 0)\|^2}$$

$$\Rightarrow -6 = \frac{1a + 1b + 0c}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2})^2}$$

$$\Rightarrow -6 = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow -12 = a+b$$

$$\Rightarrow -12 - b = a \quad (1)$$

Condición a) Dado que w es perpendicular a u , se tiene que:

$$w \cdot u = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (1, -2, 0) = 0$$

$$\Rightarrow 1a + -2b + 0c = 0$$

$$\Rightarrow a - 2b = 0$$

$$\Rightarrow -12 - b - 2b = 0 \quad \text{por (1)}$$

$$\Rightarrow -12 - 3b = 0$$

$$\Rightarrow -12 = 3b$$

$$\Rightarrow -4 = b \quad (2)$$

Como $a = -12 - b$ (por (1)), se tiene que $a = -12 - -4$ por (2)
 $\Rightarrow a = -8$

Condición b) Como $\|w\| = 9$, entonces:

$$\|(a, b, c)\| = 9 \Rightarrow \|(-8, -4, c)\| = 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + c^2} = 9$$

$$\Rightarrow (\sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + c^2})^2 = (9)^2$$

$$\Rightarrow (-8)^2 + (-4)^2 + c^2 = 9^2$$

$$\Rightarrow 64 + 16 + c^2 = 81$$

$$\Rightarrow c^2 = 81 - 64 - 16$$

$$\Rightarrow c^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = \pm 1$$

Así $w = \overset{a}{(-8}, \overset{b}{-4}, \overset{c}{\pm 1})$

Ejercicio #4: Sean $u = (1, 1, 1)$ y $v = (1, -1, 2)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Determine el o los vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

a) $u = x + y$

b) $x \parallel v$

c) $y \cdot v = 7$

Sean $x = (a, b, c)$ y $y = (d, e, f)$ vectores en \mathbb{R}^3

Condición b) Note que $x \parallel v \Rightarrow x = \alpha v$

$$\Rightarrow (a, b, c) = \alpha (1, -1, 2)$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = (\alpha, -\alpha, 2\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = -\alpha \\ c = 2\alpha \end{cases} \quad (1)$$

Condición c) Note que $y \cdot v = 7 \Rightarrow (d, e, f) \cdot (1, -1, 2) = 7$

$$\Rightarrow 1d + (-1)e + 2f = 7$$

$$\Rightarrow d - e + 2f = 7 \quad (2)$$

Condición a) Note que $u = x + y \Rightarrow (1, 1, 1) = (a, b, c) + (d, e, f)$

$$\Rightarrow (1, 1, 1) = (a + d, b + e, c + f)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + d = 1 \\ b + e = 1 \\ c + f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + d = 1 \\ -\alpha + e = 1 \\ 2\alpha + f = 1 \end{cases} \quad \text{por (1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 1 - \alpha \\ e = 1 + \alpha \\ f = 1 - 2\alpha \end{cases} \quad (3)$$

Substituyendo (3) en (2), se tiene que:

$$d - e + 2f = 7 \Rightarrow 1 - \alpha - (1 + \alpha) + 2(1 - 2\alpha) = 7$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha - 1 - \alpha + 2 - 4\alpha = 7$$

$$\Rightarrow -6\alpha + 2 = 7$$

$$\Rightarrow -6\alpha = 7-2$$

$$\Rightarrow -6\alpha = 5$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{5}{6}$$

Como $\alpha = -\frac{5}{6}$, se tiene que:

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = -\alpha \\ c = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{6} \\ b = \frac{5}{6} \\ c = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1 - \alpha \\ e = 1 + \alpha \\ f = 1 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 - (-\frac{5}{6}) \\ e = 1 + (-\frac{5}{6}) \\ f = 1 - 2 \cdot (-\frac{5}{6}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{11}{6} \\ e = \frac{1}{6} \\ f = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\text{Así } x = \left(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{3} \right) \text{ y } y = \left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{8}{3} \right)$$

Ejercicio #5: Sean A y B dos vectores en \mathbb{R}^3 , los cuales vienen definidos de la siguiente forma: $A = (30, -5, 1)$ y $B = (1, 2, -2)$. Halle los vectores C y D en \mathbb{R}^3 que satisfagan, simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\text{R/ } C = (2, 4, -4) \text{ y } D = (28, -9, 5)$$

$$a) \ A = C + D$$

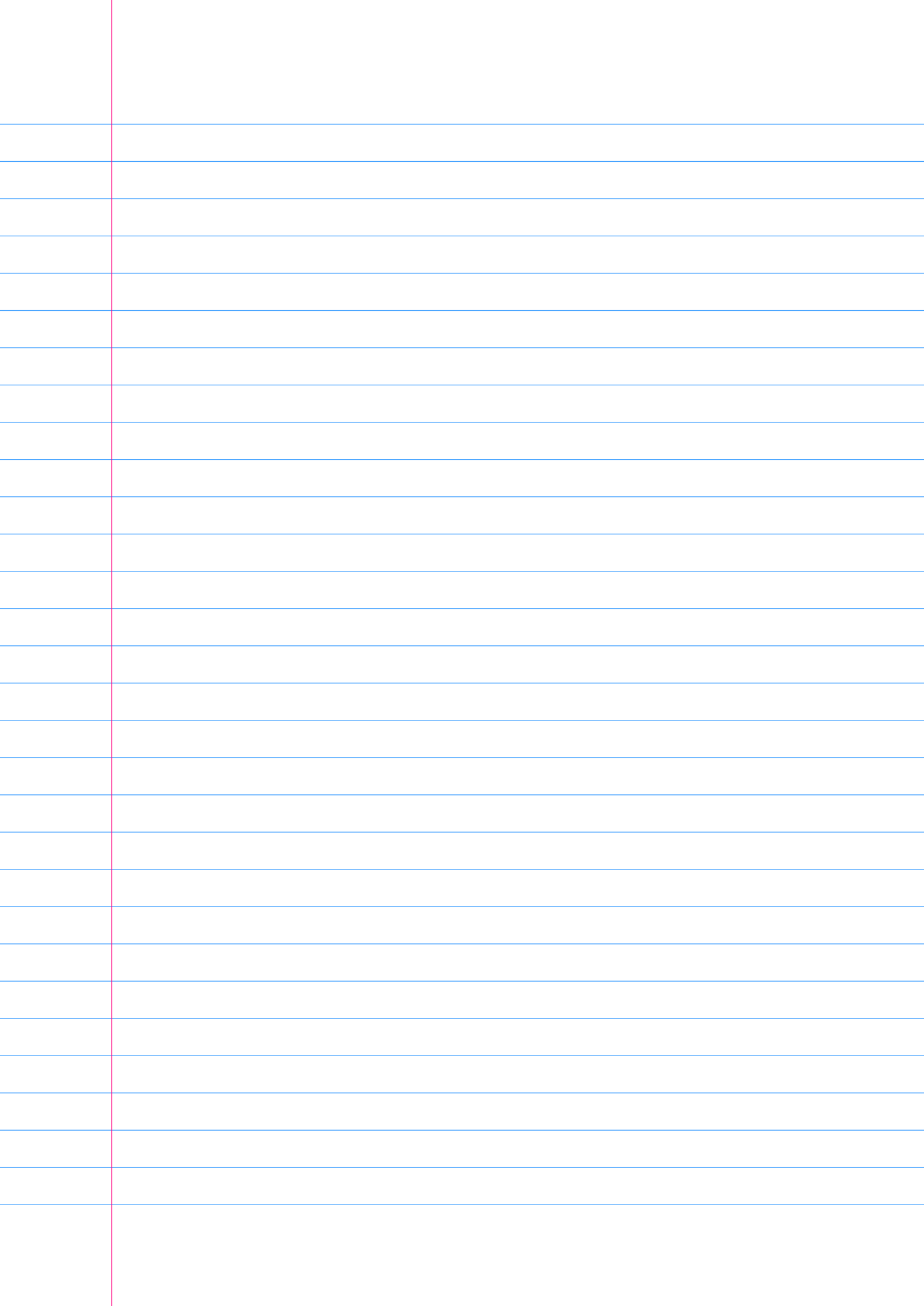
$$b) \ D \perp B$$

$$c) \ C \parallel B$$

Condición a)

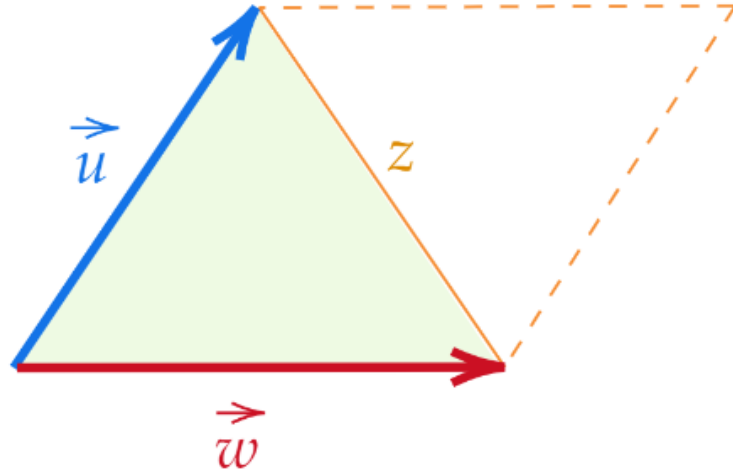
Condición b)

Condición c)



Cálculo de áreas

De la igualdad de Lagrange se puede deducir la fórmula del área de ciertas figuras planas. Sean u, w, z vectores en \mathbb{R}^3 , los cuales se muestran seguidamente:



Área de un triángulo

Note que $\|u\|$, $\|w\|$ y $\|z\|$ representa la longitud de u , w y z , respectivamente. El área de un triángulo formado por los vectores u, w, z viene dada por:

$$A = \frac{\|u \times w\|}{2}$$

Nota: si un triángulo es equilátero, significa que $\|u\| = \|w\| = \|z\|$, si es isósceles, significa que $\|u\| = \|w\|$ o $\|u\| = \|z\|$ o $\|w\| = \|z\|$, mientras que si es un triángulo rectángulo, la medida de alguno de los ángulos equivale a 90° o bien $\frac{\pi}{2}$.

Área de un paralelogramo

Note que $\|u\|$, $\|w\|$ y $\|z\|$ representa la longitud de u , w y z , respectivamente. El área de un paralelogramo viene dada por:

$$A = \|u \times w\|$$

Ejercicio:

Considere los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$ y $C(7, 4, -2)$

a) Verifique que A, B, C son los vértices de un triángulo isósceles.

Note que los lados del triángulo son AB, AC, BC , así:

$$\|AB\| = \|B - A\|$$

$$= \|(3, -1, 7) - (1, 2, 1)\|$$

$$= \|(2, -3, 6)\|$$

$$= 7$$

$$\|AC\| = \|C - A\|$$

$$= \|(7, 4, -2) - (1, 2, 1)\|$$

$$= \|(6, 2, -3)\|$$

$$= 7$$

$$\|BC\| = \|C - B\|$$

$$= \|(7, 4, -2) - (3, -1, 7)\|$$

$$= \|(4, 5, -9)\|$$

$$= \sqrt{122}$$

Se verifica que $\triangle ABC$ es isósceles

b) Calcule la medida del ángulo cuyo vértice es B .

Se pide el ángulo cuyo vértice es B , es decir, el ángulo entre $\vec{AB} = (2, -3, 6)$ y $\vec{BC} = (4, 5, -9)$

$$\theta = \arccos \left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \right)$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{(2, -3, 6) \cdot (4, 5, -9)}{\|(2, -3, 6)\| \cdot \|(4, 5, -9)\|} \right) \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{-61}{7 \cdot \sqrt{122}} \right)$$

$$\Rightarrow \theta = 142.0809^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 180^\circ - 142.0879^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 37.9120^\circ$$

c) Calcule el área del triángulo de vértices A, B, C .

$$\begin{aligned} \text{El área de un triángulo es } \frac{\|AB \times BC\|}{2} &= \frac{\|(2, -3, 6) \times (4, 5, -9)\|}{2} \\ &= 23.75394704 \text{ (ml)}^2 \end{aligned}$$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1:

Sean los vectores u, v en \mathbb{R}^3 tales que $u \cdot v = 0$ y $\|u\| = \|v\| = 2$

a) Calcule el seno del ángulo entre los vectores u y v .

R/ 1

b) Determine el valor en grados del ángulo entre los vectores u y v .

R/ 90°

c) Calcule la norma del vector $u \times v$

R/ 4

d) Determine el valor que se obtiene al realizar

R/ -36

$$(u - 2(u \times v) + 3v) \cdot (2v + 3(u \times v) + 9u)$$

Ejercicio #2:

Sean $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$. Halle dos vectores w_1 y w_2 que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

$(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 0)$

a) $u = w_1 + w_2$

b) $v \cdot w_2 = 0$

c) $w_1 \parallel v$

Ejercicio #3:

Sea $u = (1, 2, -1)$, $v = (2, -1, -3) \in \mathbb{R}^3$. Halle los vectores w que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

$\mathbb{R} / \pm \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 1 \right)$

a) w es combinación lineal de u y v .

c) $\|w\|^2 = \|v\|^2 - 2\|u\|^2$

b) $w \cdot u = 0$

Ejercicio #4:

Considere los puntos $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$ vértices de un triángulo.

a) Determine la medida del ángulo interno correspondiente al vértice B .

R/ 45°

b) Calcule el área de dicho triángulo.

R/ 12.5

c) Justifique si es un triángulo equilátero.

R/ No