1. Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $a_n = \dfrac{3^n\, n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}$$

$2(n+1)$

$2n+2$

a) Calcule los términos a_3 y a_4.

$$\frac{3^3\cdot 3!}{2\cdot 4\cdot 6} \leftarrow a_3 \qquad \frac{3^4\cdot 4!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$$

b) Determine si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no es monótona. **[3 pts]**

$f'(x)$

Asumir $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, si da falso es decreciente, verdadero, creciente

$$\frac{\dfrac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}(2n+2)}}{\dfrac{3^n\cdot n!}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}}} \geq 1$$

$$\frac{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{3^n}\cdot\cancel{n!}\,(2n+2)} \geq 1$$

$$\frac{3\,\cancel{(n+1)}}{2\,\cancel{(n+1)}} \geq 1$$

$$\frac{3}{2} \geq 1 \quad \checkmark$$

Creciente

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 3k}{2k^2+1} \approx \frac{3k}{2k^2+1} \approx \frac{3\cancel{k}}{2k^{\cancel{2}}} = \frac{3}{2k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1}$, é serie p, $p \leq 1$

$\therefore$ Diverge

$\lim_{k \to +\infty} \frac{3k}{2k^2+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3\cancel{k}}{2k^{\cancel{2}}} = \frac{3}{k} = 0$ ✓

$f(x) = \frac{3x}{2k^2+1}$

$\frac{3 \cdot (2x^2+1) - 3x \cdot 4x}{(2k^2+1)^2}$

$\frac{6x^2+3-12x^2}{(2k^2+1)^2}$

$\frac{-6x^2+3}{\cancel{(2x^2+1)^2}} = 0$

$-6x^2+3 = 0$

$3(-2x^2+1) = 0$

$-2x^2+1 = 0$

$-2x^2 = -1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

	$-\infty$ to $\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ to $+\infty$
$-6x^2+3$	+	−
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘

Decrece

$\boxed{\text{Conv. Condicionalmente}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(x-3)^n}$$

$$|x-3| \lim_{n\to+\infty} 1$$

condición de convergencia

$1 \cdot |x-3| < 1$

$-1 < x-3 < 1$ $\qquad |x| < k$

$2 < x < 4$ $\qquad -k < x < k$

$I =]2,4[\qquad R = \frac{4-2}{2} = 2$ ✓

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot (x-2)^n \qquad \sqrt[n]{P(x)} = 1$$

$$\sqrt[n]{n^e} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \overset{1}{\cancel{\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}}} \cdot \sqrt[n]{(x-2)^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}} = 1$$

$$|x-2| \lim_{n\to+\infty} 1 \to |x-2| < 1$$

$-1 < x-2 < 1$

$1 < x < 3$

$]1,3[\qquad \frac{3-1}{2} = 1$ ✓

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{(2x+4)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(2x+4)^n}{n!}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{(2x+4)^n} \cdot (2x+4)^1 \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{(2x+4)^n}}$$

$$|2x+4| \lim_{n \to +\infty} \cancel{\frac{1}{n+1}} \quad 0$$

$$0 \cdot |2x+4| < 1$$

$I = \mathbb{R}$, radio $= +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x-1)^n}{n^2}$$

$$\sqrt[n]{\pi} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n} \cdot \sqrt[n]{(x-1)^n}}{\cancel{\sqrt[n]{n^2}}}$$

$$\sqrt[n]{n^p} = 1$$

$$|x-1| \lim_{n \to +\infty} 3$$

$$3 \cdot |x-1| < 1$$
$$|x-1| < \frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3} < x-1 < \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$$

$$\frac{-1}{3} + 1 \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$I = \left] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right[$$

$$\frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2} = \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}} \right) = \frac{2}{6}$$

$$\text{radius} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [-7(3-2x)]^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \cancel{\sqrt[n]{(-21+14x)^{n}}}$$

$$-21 + 14x < 1$$

$-21 + 14x < 1$

$-1 < -21 + 14x < 1$

$20 < 14x < 22$

$\frac{10}{7} < x < \frac{11}{7}$

$I = \left] \frac{10}{7}, \frac{11}{7} \right[, \quad \frac{\frac{11}{7} - \frac{10}{7}}{2}$

$= \left(\frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{1}} \right) = \boxed{\frac{1}{14}}$ radio

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot (1-x)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n]{(1-x)^n}$$

$$|1-x| \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$+\infty \cdot |1-x| < 0$$

$I = 1 - x = 0$, radio $= 0$

$x = 1$,

7. Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{(n+1)\cancel{n!}\cancel{(x-1)^n}(x-1)}{\cancel{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}(2n+3)}}{\dfrac{\cancel{n!}\cancel{(x-1)^n}}{\cancel{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1 \cdot (x-1)}{2n+3}$$

$$|x-1| \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot |x-1| < 1$$

$$1 \cdot |x-1 < 2$$

$$-2 < x-1 < 2$$

$$-1 < x < 3$$

radio

$$I =]-1, 3[\qquad \frac{3 - -1}{2} = 2$$

1. Considere la siguiente igualdad:

$$1\cdot 5^1+2\cdot 5^2+3\cdot 5^3+\cdots+n\cdot 5^n=\frac{5+(4n-1)\cdot 5^{n+1}}{16}$$

a) Demuestre, usando inducción matemática que dicha igualdad es válida para toda $n \geq 1$.

$$1\cdot 5^1 = \frac{5+(4\cdot 1-1)\cdot 5^{1+1}}{16} \qquad \frac{5+3\cdot 25}{16}=\frac{80}{16}=5$$

$5=5$ ✓

$n=p \quad 1\cdot 5^1+2\cdot 5^2+\dots p\cdot 5^p=\frac{5+(4p-1)\cdot 5^{p+1}}{16}$, Hi

$n=p+1$

$1\cdot 5^1+2\cdot 5^2+\dots p\cdot 5^p+(p+1)\cdot 5^{p+1}=\frac{5+(4p+3)\cdot 5^{p+2}}{16}$, H q)

Demostración

$1\cdot 5^1+2\cdot 5^2+\dots p\cdot 5^p+(p+1)\cdot 5^{p+1}$ $\qquad \frac{2}{2}\,1+\frac{5}{2}=\frac{2}{2}+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

$$\frac{5+(4p-1)\cdot 5^{p+1}}{16}+(p+1)\cdot 5^{p+1}\cdot\frac{16}{16}$$

$$\frac{5+(4p-1)\cdot \boxed{5^{p+1}}+16\cdot(p+1)\cdot \boxed{5^{p+1}}}{16}$$

$$\frac{5+5^{p+1}(4p-1+16p+16)}{16}$$

$$\frac{5+5^{p+1}\cdot(20p+15)}{16}$$

$$\frac{5+5^{p+1}\cdot 5(4p+3)}{16}=\frac{5+5^{p+2}\cdot(4p+3)}{16}$$

b) Si $\{S_n\} = \left\{\dfrac{5+(4n-1)\cdot 5^{n+1}}{16}\right\}$ corresponde a la sucesión de sumas parciales asociada a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot 5^k$, determine si dicha serie converge o diverge. **(2 puntos)**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5+4(+\infty)-1)\cdot 5^{+\infty+1}}{16} = \frac{+\infty}{16} = +\infty$$

Diverge

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad f(x) > g(x)$$

2. Determine todos los valores de b para que de la serie $\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{n}{b^n}-\frac{n+1}{b^{n+1}}\right)$ converja y su suma

$$\frac{5}{b^5} - \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{b^{n+1}} \quad 0$$

$$n^p < a^n$$

$$\frac{\infty}{1^{+\infty}}$$

$$\frac{2n}{1^p} = +\infty \qquad \frac{5}{b^5}, \; b > 1 \qquad a^n, a > 1$$

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. Determine el intervalo de convergencia (NO incluya el análisis de los extremos) de la serie siguiente. **(4 puntos)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\cdot(n+2)!\cdot(x-3)^n}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{4^{n+1}\cdot(n+3)!\cdot(x-3)^{n+1}}{\cancel{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}(3n+5)}}{\dfrac{4^n\cdot(n+2)!\cdot(x-3)^n}{\cancel{5\cdot 8\cdot 11\cdot(3n+2)}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{4^n}\cdot 4\cdot(n+3)\cancel{(n+2)!}\cdot\cancel{(x-3)^n}(x-3)}{(3n+5)\cdot\cancel{4^n}\cdot\cancel{(n+2)!}\cdot\cancel{(x-3)^n}}$$

$$|x-3| \lim_{n\to+\infty} \frac{4n+\cancel{12}}{3n+5} = \frac{4}{3}$$

$|x-3| \lim_{k \to +\infty} \frac{4\cancel{k}+\cancel{12}}{3k+\cancel{5}} = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} \cdot |x-3| < 1$

$4|x-3| < 3 \qquad \frac{-3}{4}+3 = \frac{9}{4}$

$|x-3| < \frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4} < x-3 < \frac{3}{4}$

$\frac{9}{4} < x \quad < \frac{15}{4} \qquad \frac{-3+12}{4} = \frac{9}{4}$

$I =]\frac{9}{4}, \frac{15}{4}[\qquad \text{radio} = \frac{\frac{15}{4} - \frac{9}{4}}{2}$

$\text{radio} =$

$\frac{\frac{6}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

4. Determine si cada una de las siguientes series convergen o divergen. Debe indicar los criterios aplicados en cada caso.

a) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\arctan k + 4}{(k-4)^2}$ **(4 puntos)**

$-\frac{\pi}{2} < \arctan(k) < \frac{\pi}{2} \qquad \arctan = -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\frac{-\frac{\pi}{2}+4}{(k-4)^2} < \frac{\arctan(k)+4}{(k-4)^2} < \frac{\frac{\pi}{2}+4}{(k-4)^2} \qquad \arcsin = -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\arccos = -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}+4 \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-4)^2} \geq \frac{1}{k^2}, \quad k \geq 1$

Converge

Original Converge

6. Asuma que la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^k}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$ es convergente. Determine el menor valor para n de manera que S_n aproxime a S con un error menor a 10^{-6}. **(3 puntos)**

N (respuesta)   N+1 (solo probar) $a_n < 10^{-6}$

4   5 $\longrightarrow$ $\frac{4^5}{(2\cdot5+1)\cdot(2\cdot5+1)!} \not< 10^{-6}$

5   6 $\frac{4^6}{(2\cdot6+1)\cdot(2\cdot6+1)!}$

$\approx 5.59\cdot10^{-8}$

5

$$\sum_{x=1}^{5} \frac{(-1)^x \cdot 4^x}{(2x+1)\cdot(2x+1)!} \approx \boxed{-0,1972935}$$