§1. Distribuciones discretas

§1.1. Introducción

Teorema 1.1 : Sumas

- $\sum_{k} (a_k \pm c \cdot b_k) = \sum_{k} a_k \pm c \sum_{k} b_k$
- $\sum_{k=m}^{n} c = c(n - m + 1)$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Teorema 1.2 : Serie geométrica

$$\sum_{k=m}^{\infty} r^k = \frac{r^m}{1-r}$$

Teorema 1.3 : Serie exponencial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

§1.2. **Variables Aleatorias**

Definición 1.1 Una *variable aleatoria* X es una función cuyo dominio es un espacio muestral, y cuyo rango (denotado por R_X) es algún subconjunto de los números reales.

Definición 1.2 Sea un espacio muestral Ω, donde cada eventualidad $e \in \Omega$ tiene una probabilidad asignada. El evento de que X tenga el valor x es el subconjunto de Ω que contiene aquellos elementos e para los cuales $X(e) = x$, lo cual denotaremos por $X = x$. Es decir:

$$X = x : \{e \in \Omega \mid X(e) = x\}.$$

Si se denota por $f_X(x)$ la probabilidad de este evento, entonces:

$$f_X(x) = P(\{e \in \Omega \mid X(e) = x\}) = P(X = x).$$

Definición 1.3 La función $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ cuyo valor para cada número real x está dado por $P(X = x)$, se llama *función de probabilidad* de la variable aleatoria X. Dicha función cumple además que

$$\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1$$

Teorema 1.4 : Propiedades de la función de probabilidad

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in R_X$.
- $\displaystyle\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1$

Ejemplo 1.1 Determine el valor de k para la variable aleatoria discreta Z, cuya función de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{15 - x}{50} & \text{si } x \in \{1, 2, ..., k\} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Definición 1.4 La función $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ cuyo valor para cada número real x está dado por $P(X \leq x)$ se conoce como la *función de distribución (acumulada)* o *función de probabilidad acumulada* de la variable aleatoria X.

Teorema 1.5 Propiedades de F_X:

a) F_X es una función *no decreciente* , es decir, $F_X(x) \leq F_X(y)$ sii $x \leq y$.

b) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Observe que $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X < x) + P(X = x) = P(X < x) + f_X(x)$. Además:

a) $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$

b) $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

c) $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

d) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$

§1.3. **Esperanza y Varianza**

Definición 1.5 Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad f_X. La *media* o *esperanza* de X, denotada por $E(X)$ o μ_X, está dada por:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x f_X(x)$$

Teorema 1.6 Propiedades:

- $E(g(X)) = \displaystyle\sum_{X \in R_X} g(x) f_X(x)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

Ejemplo 1.2 En cierto juego, en cada turno, un jugador lanza un dado justo con 12 caras, numeradas del 1 al 12.

- Si se obtiene un número del 1 al 4, el jugador avanza 1 casilla.
- Si se obtiene un número del 5 al 8, el jugador avanza 2 casillas.
- Si se obtiene un número del 9 al 11, el jugador avanza 3 casillas.
- Si se obtiene un 12, el jugador avanza 4 casillas.

a) Determine la distribución de probabilidad para la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de casillas que un jugador avanza en un solo turno.

b) Terminando su tercer turno de un juego, ¿cuántas casillas avanza un jugador, en promedio?

Ejemplo 1.3 Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad asociada de criterio:

$$f_X(k) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k, \text{ con } \ k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

a) Verifique que f_X define una función de probabilidad válida.

b) Determine $E(e^{tX})$, donde t es una constante.

§1.4. **Varianza**

Definición 1.6 Sea X una v.a.d. con función de probabilidad f_X. Sea $\mu_X = \mathrm{E}(X)$ la media de X. La *varianza* de X, denotada por $\mathrm{Var}(X)$ o σ_X^2 se define como el número:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \ f_X(x).$$

Al número no-negativo $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ se le llama la *desviación estándar* de X.

Teorema 1.7

- $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
- $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$

Ejemplo 1.4 Para una empresa de servicio de entregas a domicilio, cada repartidor tiene un salario semanal base de 50 000 colones, más una cantidad X, en miles de colones, correspondiente a una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{kx+2}{5} & \text{si} \quad x \in \{1,2,3,4,5\} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) Determine la varianza para el salario semanal esperado por un repartidor de la empresa.

Ejemplo 1.5 Considere la variable aleatoria discreta Y, tal que $E(Y)$, $\operatorname{Var}(Y)$ y $E\Big((5Y-2\mu_Y)^2\Big)$ existen. Demuestre que:

$$E\Big((5Y-2\mu_Y)^2\Big) = 25\operatorname{Var}(Y) + 9\mu_Y^2.$$

Ejemplo 1.6 Considere la variable aleatoria discreta X, tal que $E(X) = 4$ y $\operatorname{Var}(X) = 1$. Considere las nuevas variables $Y = 3X^2 - 4X + 2$ y $Z = 4 - 3X$.

a) Determine $E(Y)$.

b) Determine $\operatorname{Var}(Z)$.

Ejemplo 1.7 Considere la variable aleatoria discreta X. Además, considere la nueva variable Y, tal que:

$$Y = 4 + 5X,\ \mathrm{E}(Y) = 16,\ \mathrm{E}(Y^2) = 300.$$

a) Determine $\mathrm{E}(X)$.

b) Determine $\mathrm{Var}(X)$.

§1.4.1. Función generadora de momentos

Teorema 1.8

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

$$E(X) = m'_X(0)$$

$$E(X^2) = m''_X(0)$$

Ejemplo 1.8 Considere la variable aleatoria discreta X, cuya distribución de probabilidad está dada de la siguiente manera:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5} & \text{si} \quad x = 0 \\[2ex] \dfrac{3}{5} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Determine la función generadora de momentos de la variable X, y úsela para calcular $\mathrm{Var}(X)$.

Ejemplo 1.9 Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Determine la función generadora de momentos $m_X(t)$ y úsela para calcular $\mathrm{Var}(X)$.

Ejemplo 1.10 Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por:

$$f_X(k) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Verifique que f_X define una distribución de probabilidad válida.

b) Determine la función generadora de momentos $m_X(t)$ asociada a la variable X.

c) Utilice la función generadora de momentos $m_X(t)$ para encontrar el valor esperado $E(X)$ y la varianza $\operatorname{Var}(X)$.

Ejemplo 1.11 Considere la variable aleatoria discreta Y, cuya distribución de probabilidad es:

$$f_Y(x) = k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}, \text{ para } \ x \in \{1, 2, ...\}.$$

a) Determine el valor de k.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable Y tome valores superiores a 4?

c) Determine la función generadora de momentos para la variable Y, y úsela para calcular $\mathrm{Var}(Y)$.

Ejemplo 1.12 Considere la variable aleatoria discreta Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = 216\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}, \text{ si } \ x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Determine la función generadora de momentos de Z y utilícela para calcular $E(Z)$ y $\mathrm{Var}(Z)$.

Ejemplo 1.13 Considere la variable aleatoria discreta X, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_X(x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!}, \text{ si } \ x \in \mathbb{N}$$

Determine el criterio y el dominio de la función generadora de momentos de X, y utilícela para calcular $E(X)$.

Ejemplo 1.14 Sea Y una variable aleatoria discreta, con distribución de probabilidad asociada de criterio:

$$f_Y(x) = k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x, \text{ con } \ x = 3, 4, 5, \ldots$$

a) Determine el valor de k.

b) Determine la función generadora de momentos de Y.

Ejemplo 1.15 En un sistema automático de detección de spam, la variable aleatoria discreta X representa el número de filtros activados antes de que un mensaje sea clasificado como sospechoso. Se modela mediante la función de probabilidad:

$$f_X(k) = C\left(\frac{2}{5}\right)^k, \text{ con } \ k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

a) Determine el valor de la constante C para que f_X defina una función de probabilidad válida.

b) Obtenga la función generadora de momentos $m_X(t)$.

c) Utilice $m_X(t)$ para calcular el valor esperado $E(X)$.

§1.5. **Experimento de Bernoulli**

Definición 1.7 Un experimento con sólo dos resultados posibles: **Éxito** o **Fracaso**, donde $P(E) = p$ y $P(F) = 1 - p$.

Sea X una variable aleatoria, donde se asigna 0 si se obtuvo un éxito y 1 si se obtuvo un fracaso. Entonces se tiene que:

x	0	1
$f_X(x)$	$1-p$	p

$E(X) = p$, y $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

§1.6. **Distribución Binomial**

Definición 1.8 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite n veces. Sea X el número de éxitos obtenidos. Entonces $R_X = \{0, 1, 2, ..., n\}$, y

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k};\ \ E(X) = n \cdot p$$

Teorema 1.9 Sea $X \sim$ Binom. $E(X) = np$.

Ejemplo 1.16 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas **con reemplazo**. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

Ejemplo 1.17 Manuel lanza un dado de seis caras sobre una mesa.

a) Determine la media y la varianza para el total de puntos que Manuel obtiene.

b) Determine la probabilidad de que, al lanzar el dado 50 veces, Manuel acumule más de 160 puntos.

c) Manuel quiere lanzar el dado 200 veces. Plantee la suma, y luego use alguna aproximación posible para calcular la probabilidad de obtener más de 30 veces una cara con 6 puntos.

Ejemplo 1.18 Una pieza de los motores producidos en una fábrica de automóviles tiene un porcentaje de fallo del 1.3 %. Para garantizar la calidad del producto, se toma un lote de 60 de esas piezas para inspeccionarlas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 piezas estén defectuosas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 57 piezas **NO** estén defectuosas?

§1.7. **Distribución Geométrica**

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, \ldots\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \ ; \ E(X) = \frac{1}{p}$$

Nota 1.1 : Piensa por qué!

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

Ejemplo 1.19 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente bolitas **con reemplazo** hasta que se obtiene la primera bolita roja. Calcula la probabilidad de que se necesiten 5 extracciones.

Ejemplo 1.20 En un concurso, nueve participantes deben seguir una rutina de ejercicios durante un mes para participar por premios.

a) En cada rutina se propone cierta cantidad de ejercicios para realizar. Cada ejercicios tiene una probabilidad de 0.4 de que se efectúe satisfactoriamente. Si el participante realiza más de 4 ejercicios en su rutina, entonces logrará terminar la rutina. ¿Cuál es la probabilidad de que un participante logre terminar la rutina?

b) Determine la probabilidad de que por lo menos 5 participantes terminen la rutina.

Ejemplo 1.21 Una fábrica de bombillos ha detectado que su máquina más nueva fabrica los bombillos con un porcentaje de 95 % de que no esté dañado.

a) Si se compraron 50 bombillos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 3 bombillos salgan dañados?

b) Rodolfo compró suficientes bombillos para abastecer el edificio de aulas. Empieza a colocarlos hasta encontrar uno dañado. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el dañado antes de poner el bombillo número 30?

Ejemplo 1.22 Para probar el nuevo sistema en una central telefónica de cierta empresa, se realiza una prueba diaria, la cual consiste en marcar un número específico tantas veces como sea necesario hasta obtener comunicación. El sistema se considera eficiente durante un día específico si al realizar dicha prueba telefónica se logra comunicación con a lo sumo 3 intentos. Además, se sabe que la probabilidad de que se responda una llamada es de 25 %.

a) Calcule la probabilidad de que un día se considere eficiente.

b) Determine la probabilidad de que al observar el sistema por 15 días hábiles, en al menos 8 de ellos el sistema sea hallado eficiente.

Ejemplo 1.23 Una empresa vende tarjetas de crédito mediante llamadas telefónicas. La probabilidad de que una persona a la que llaman para ofrecerle la tarjeta la acepte es de 0.01. Mario, empleado de esta empresa, recibe un salario que se calcula de la siguiente manera: una comisión de 2 000 colones por cada tarjeta vendida, y un monto fijo diario de 5 000 colones. Si Mario hace 500 llamadas diarias, ¿cuál es el salario esperado diario de Mario?

§1.8. **Distribución Hipergeométrica**

Definición 1.10 Se tienen N resultados en total, de los cuáles n son éxitos, y el resto, fracasos. Se extraen r resultados **sin reposición**. Sea X la variable aleatoria que corresponde al número de éxitos extraidos. Entonces $R_X = \{a, ..., b\}$ donde

$$\begin{aligned} a &= \max(0, r-(N-n)) \\ b &= \min(r, n) \end{aligned} \quad ; \qquad P(X=k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{r-k}}{\binom{N}{r}}$$

Nota 1.2 $N - n$ corresponde al número total de fracasos, y $r - k$ al número de fracasos que se van a extraer.

Teorema 1.10 La esperanza de la distribución hipergeométrica, es el número de intentos (sin reemplazo) multiplicado por la probabilidad inicial de éxitos:

$$E(X) = rp \quad \text{donde} \quad p = \frac{n}{N}$$

Ejemplo 1.24 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas **sin reemplazo**. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

Ejemplo 1.25 Para esta sede, suponga que el grupo de Probabilidades está formado por 40 estudiantes, y de estos, 22 viven actualmente fuera de la provincia. El profesor tomará una muestra aleatoria de 20 estudiantes.

a) Determine el rango y la distribución de probabilidad para la variable Z, correspondiente a la cantidad de estudiantes, de la muestra, que actualmente viven fuera de la provincia.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en dicha muestra, hayan entre 3 y 10 que actualmente viven fuera de la provincia?

Ejemplo 1.26 Luis lanza 10 dados idénticos de seis caras sobre una mesa. Si en más de 5 dados obtiene más de 4 puntos, entonces gana esa partida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar una partida?

b) Determine la probabilidad de que en las próximas 8 partidas, Luis gane 3 o más veces.

c) Si Luis decide jugar hasta ganar una partida, ¿cuál es la esperanza para el total de veces que Luis **no gana**?

Ejemplo 1.27 En su casa, la mamá de Sara tiene ocho lapiceros, de los cuales solo tres tienen tinta para escribir. Antes del examen, toma cinco lapiceros al azar, y los coloca en su cartuchera.

a) Determine el rango y la distribución de probabilidad para la variable X, correspondiente a la cantidad de lapiceros, en su cartuchera, que tienen tinta para escribir.

b) Determine la probabilidad de que a lo sumo cuatro lapiceros en su cartuchera **NO** tengan tinta para escribir.

c) Si al llegar a su casa, junta todos los lapiceros y los empieza a probar uno por uno hasta encontrar el primero que tenga tinta, ¿cuál es la probabilidad de que ese primero sea el tercero que prueba?

Ejemplo 1.28 Una partida de un juego consiste en sacar, sin reposición, 4 bolas de una urna que contiene: 4 bolas negras y 6 blancas. El juego se gana en el momento que se saquen más bolas negras que blancas. Si una persona decide repetir el juego hasta ganar la primera vez, determine la probabilidad de que juegue menos de 4 veces.

Ejemplo 1.29 Una empresa de servicios en la nube mantiene clústeres de 25 nodos de cómputo (servidores virtuales) que se despliegan para atender clientes empresariales. Cada nodo tiene una probabilidad de 0.0923 de experimentar fallos de conectividad crítica durante pruebas de verificación. Según la política de calidad de la empresa, si un clúster presenta más de 4 nodos con fallos, debe ser retirado del sistema y reemplazado por un nuevo despliegue.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un clúster deba ser reemplazado?

b) Para un lote de 150 clústeres, se sabe que el 40% ya fue reemplazado previamente por fallos críticos. Calcule el número esperado de clústeres sin ningún nodo fallido entre los no reemplazados.

Ejemplo 1.30 Doña Laura juega a los tiempos con mucha frecuencia. Este sorteo paga 70 por uno, es decir, si compra el número ganador, gana 70 colones por cada colón invertido. Cada vez que hay sorteo (en un sorteo solo hay un número ganador), doña Laura apuesta 200 colones a cada uno de 15 números distintos entre 100 posibles. Si ella jugó durante 20 sorteos consecutivos, determine la esperanza para el total de ganancias de doña Laura.

Ejemplo 1.31 Suponga que para jugar AZUL, se deben pagar 400 colones. Una jugada consiste en sacar aleatoriamente de manera sucesiva, y sin reemplazo, dos bolitas de una urna cerrada. En dicha urna hay siete bolitas blancas y tres bolitas azules. Por cada bolita azul que saca, el dueño del juego le da 300 colones.

a) Determine el criterio y el dominio de la distribución de probabilidad de la variable X correspondiente a la cantidad de bolitas azules en una jugada.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una jugada se saque al menos una bolita azul?

c) ¿Cuál es la ganancia esperada en una jugada?

Ejemplo 1.32 Un sistema de auditoría automatizada selecciona, sin reposición, 3 dispositivos al azar de una red que contiene 5 dispositivos comprometidos y 7 dispositivos seguros. Una auditoría se considera exitosa si se detectan más dispositivos comprometidos que seguros en la muestra. Si un analista configura el sistema para repetir la auditoría hasta tener éxito por primera vez, determine la probabilidad de que esto ocurra en menos de 5 intentos.

Ejemplo 1.33 Hay un sorteo semanal donde se elige un número ganador entre 200 posibles. Cada número cuesta 300 colones y puede comprar hasta 10 números por sorteo. Si acierta, gana 24 000 colones por número acertado. Además, cada participación en un sorteo tiene un costo fijo de 100 colones. Iván considera dos estrategias para un período de 5 semanas:

- Estrategia A: Compra 10 números distintos cada semana.
- Estrategia B: Apuesta al mismo número hasta ganar (máximo 5 semanas).

a) Para cada estrategia, calcule el valor esperado de las utilidades netas (premios − costos totales).

b) Compare los resultados y explique cuál estrategia es más conveniente para Iván considerando pérdidas esperadas y probabilidad de éxito.

§1.9. **Distribución binomial negativa**

Definición 1.11 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener r éxitos. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$ y

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r} \cdot p$$

Ejemplo 1.34 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente bolitas **con reemplazo** hasta obtener 3 bolas rojas. Calcula la probabilidad de que se necesiten 5 extracciones.

Ejemplo 1.35 Un experimento aleatorio se va a repetir hasta obtener un éxito y un fracaso consecutivos (sin importar el orden). Se sabe que la probabilidad de éxito es 0.2. Determine el rango y la distribución de probabilidad para la cantidad de repeticiones que se deben hacer hasta terminar dicho experimento.

§1.10. **Distribución de Poisson**

Definición 1.12

$$R_X = \{0, 1, 2, ..., \}; \; E(X) = \lambda; \; P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Nota 1.3 ¿Qué es lo importante? Si λ es el valor esperado para un tiempo t, el valor esperado para otro tiempo $\hat{t}$, sigue una regla de 3.

Ejemplo 1.36 Durante la explicación de un tema, la cantidad de veces que un profesor dice la expresión «¿verdad?» sigue una distribución de Poisson, con media de 5 veces por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que diga menos de 15 veces la expresión mencionada en 10 minutos de explicación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos expresiones «¿verdad?» seguidas, durante la explicación, se den en menos de 10 segundos?

Ejemplo 1.37 En cierta región del país un puente está en mal estado. La cantidad de reclamos formales que recibe la Municipalidad sigue una distribución de Poisson con media 5 reclamos por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que la Defensoría obtenga los próximos 10 reclamos en menos de 90 minutos?

Ejemplo 1.38 Una pequeña tienda de donas cerca de la universidad vende, en promedio, 15 donas por hora. Suponga que la cantidad de dondas vendidas por hora sigue una distribución de Poisson.

a) Determine la probabilidad de vender al menos 10 donas por hora.

b) Suponga que un día particular, la tienda pasa abierta durante 5 horas seguidas. ¿Cuál es la probabilidad de que vendan a lo sumo 50 donas en ese día?

Ejemplo 1.39 Las interrupciones no críticas en un sistema de transmisión siguen una distribución de Poisson, con promedio una interrupción por minuto.

a) Determine la probabilidad de que haya 6 interrupciones en un periodo de 5 minutos.

b) Determine la probabilidad de que haya que esperar 5 minutos para que se hayan acumulado 6 interrupciones.

Ejemplo 1.40 La sucursal de un banco en un centro comercial del país trabaja los siete días de la semana. El número de transacciones de más de cuatro millones de colones que se realizan, diariamente, en esa sucursal sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 3 transacciones por día.

a) Calcule la probabilidad de que el fin de semana (sábado y domingo) se reciban más de 4 transacciones mayores a cuatro millones de colones.

b) Calcule la probabilidad de que en esta semana se reciban de 13 a 14 transacciones de más de cuatro millones de colones.

c) Un día se considera poco rentable si se reciben menos de 2 transacciones superiores a cuatro millones de colones. Determine la probabilidad de que un día sea poco rentable.

Ejemplo 1.41 El número de personas que llaman, por hora, a una radio para participar en una rifa para ganar entradas para el próximo concierto de Timbiriche sigue una distribución de Poisson, con media 6 llamadas por hora.

a) Determine la probabilidad de que, en tres horas, se reciban menos de 16 llamadas.

b) Una hora se considera muy buena si se reciben más de 10 llamadas. En las próximas ocho horas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 se consideren muy buenas?

c) Determine la probabilidad de que el tiempo acumulado de las próximas tres llamadas sea inferior a 20 minutos.

Ejemplo 1.42 Durante un día de jornada laboral, se ha determinado que el número de estudiantes que asisten a horas de consulta con algún profesor de Matemática por hora sigue una distribución de Poisson, con media diez personas por hora. Además, la Escuela de Matemática se considera saturada si hay más de 15 estudiantes por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de haya entre 64 y 96 estudiantes en 8 horas?

b) Calcule la probabilidad de que la Escuela se considere saturada.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana (40 horas) hayan por lo menos 30 horas en las que la Escuela se considera saturada?

Ejemplo 1.43 Históricamente en nuestro país, se ha determinado que el número de fallecimientos por ahogamiento en Semana Santa (de lunes a domingo) sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 5 defunciones por día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de tener más de 18 defunciones en tres días de la Semana Santa?

b) Un día de Semana Santa se cataloga como lamentable por parte de la CNE si fallecen más de 10 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que en la Semana Santa se declaren menos de dos días como lamentables?

Ejemplo 1.44 El número de personas que llaman, por hora, a una radio para participar en una rifa para ganar entradas para el próximo concierto de Timbiriche sigue una distribución de Poisson, con media 6 llamadas por hora.

a) Una hora se considera muy buena si se reciben más de 10 llamadas. En las próximas ocho horas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 se consideren muy buenas?

b) Determine la probabilidad de que el tiempo acumulado de las próximas tres llamadas sea inferior a 20 minutos.

Ejemplo 1.45 Un servidor recibe solicitudes de lectura siguiendo un proceso de Poisson con una tasa promedio de 5 solicitudes por minuto.

a) Calcule la probabilidad de que el servidor reciba más de 8 solicitudes en un minuto.

b) Determine la probabilidad de que lleguen menos de 25 solicitudes en un intervalo de 5 minutos.

c) Siendo X el número de solicitudes por minuto y $Y = aX + b$, y sabiendo que $E(Y) = 22$ y $E(Y^2) = 504$, encuentre los valores de a y b.

Ejemplo 1.46 En un sistema informático, las peticiones a un servidor de almacenamiento llegan siguiendo un proceso de Poisson con una tasa promedio de 3 peticiones por segundo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban más de 5 peticiones en un intervalo de un segundo?

b) Suponiendo que el tiempo entre peticiones sigue una distribución exponencial, ¿cuál es la probabilidad de que se necesiten más de 2 segundos para recibir 4 peticiones?