1. Considere la sucesión $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\right\}_{n\geq 1}$, determine si es una sucesión creciente, decreciente o no es monótona. **[4 puntos]**

Supongamos que es creciente

$$\frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\,(2n+1)}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}\geq 1$$

$$\frac{(2n+1)\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot(n+1)\cdot\cancel{n!}}\geq 1$$

$$2n+1\geq 2n+2$$

La desigualdad es falsa

$$\boxed{\therefore\ \text{decrece}}$$

2. Si se sabe que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{i^2+2i}\right)=\ln 2+\ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right)$, determine el valor de convergencia de $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{i^2+2i}\right)$. **[2 puntos]**

$$\ln(2)+\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\ln(2)+\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n}{n}\right)=\ln(1)$$

$$=\ln(2)$$

$$\boxed{\text{Converge a } \ln(2)}$$

3. Considere la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(5p)^n}{2^{n+1}}$

a) Determine para qué valores de $p\in\mathbb{R}$, la serie es convergente.

$$\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(5p)^n}{2n}$$

$\frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{5p}{2}\right)^n$, serie geométrica con $|r| = \left|\frac{5p}{2}\right|$ el cual debe ser < 1 para converger

Tenemos

$$\left|\frac{5p}{2}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{5p}{2} < 1$$

$$-2 < 5p < 2$$

$$\frac{-2}{5} < p < \frac{2}{5}$$

$\boxed{\therefore \text{ la serie converge para } p \in \left]\frac{-2}{5}, \frac{2}{5}\right[}$

b) Para los valores de p donde la serie converge, determine el valor de la suma infinita en términos de p. **[3 puntos]**

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\left(\frac{5p}{2}\right)^3}{1 - \frac{5p}{2}} \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\frac{125p^3}{\cancel{8}}}{\frac{2-5p}{\cancel{2}}} \right]$$

$$\boxed{\frac{125p^3}{16-40p}}$$

4. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3n^2}{n^2+1} \right]$ **[3 puntos]**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^2+1}$$

geo, $|r| = \frac{2}{3} < 1$

conver

Por crit de diver

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 3 \neq 0$$

diverge

$\boxed{\text{original diverge}}$

$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n-1)}{n^3+1}$

$$0 < \cos^2(n-1) < 1$$

$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1+\cos^2(n-1)}{n^3+1} < \frac{2}{n^3+1}$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad p \text{ serie, } p=3>1$$

$\therefore$ converge por el crit de las p series

$\boxed{\therefore \text{ original converge}}$

5. Considere la siguiente serie numérica $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k^3-1}$.

a) Utilice el criterio de series alternadas para verificar que la serie S es convergente.

$$f(x) = \frac{1}{2x^3-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(2x^3-1)^2} \cdot 3x^2$$

$$= \frac{-3x^2}{(2x^3-1)^2}$$

$\boxed{\therefore \text{ Es decreciente}}$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\cancel{2x^3}-1}{=0} = 0$$

$\boxed{\therefore \text{ converge}}$

b) Determine el menor valor para N de manera que S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error E_N tal que $E_N < 0{,}001$. **[3 puntos]**

N	$N+1$	a_{n+1}
7	8	$9{,}77 \cdot 10^{-4} < 1 \cdot 10^{-3}$

$$\sum_{x=1}^{7} \frac{(-1)^{x+1}}{2 \cdot x^3 - 1} = 0{,}947$$

6. Determine el intervalo y radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n3^n}$. No debe analizar extremos del intervalo. **[4 puntos]**

Por crit de raiz

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^{n+1} (x-5)^n}{n \cdot 3^n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt[n]{|-1|^n}} \cdot \cancel{\sqrt[n]{|-1|}} \cdot \sqrt[n]{|x-5|^n}}{\cancel{\sqrt[n]{n}} \cdot \sqrt[n]{3^n}}$$

$$|x-5| \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot |x-5| < 1$$

$$|x-5 < 3$$

$$-3 < x-5 < 3$$

$$2 < x < 8 \qquad \frac{8-2}{2}$$

$$\boxed{I =]2,8[\qquad rad = 3}$$