§1. Variables aleatorias continuas

Definición 1.1 La función $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ se llama *función de densidad de probabilidad* (PDF por sus siglas en inglés) de la variable aleatoria X. Dicha función cumple que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1$$

Ejemplo 1.1 El porcentaje de memoria RAM utilizada por un servidor sigue una función de densidad dada por:

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{4k}{(u+1)^3} & \text{para} \quad 1 \leq u \leq 3 \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Determine el valor de la constante real k que hace que esta función sea una densidad de probabilidad válida.

Definición 1.2 La función $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ se conoce como la *función de distribución acumulada* (CDF por sus siglas en inglés) de la variable aleatoria X, y cumple que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\ du$$

Nota 1.1 Propiedades de F_X:

a) F_X es una función *no decreciente* , es decir, $F_X(x) \leq F_X(y)$ sii $x \leq y$.

b) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Para funciones continuas, $P(X = x) = 0$, por lo que $P(X \leq x) = P(X < x)$, y

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\ dx$$

Ejemplo 1.2 El tiempo X, en semanas, entre la ocurrencia y la notificación de un accidente ante una aseguradora tiene una distribución de probabilidad dada por:

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{8t - t^2}{72} & \text{para} \quad 0 < t < 6 \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

El tiempo Y, en semanas, entre la notificación de un accidente y el pago del seguro cumple que $Y = \dfrac{X + 12}{3}$. Determine la probabilidad de que el tiempo entre la notificación de un accidente y el pago del seguro sea menor a 5 semanas.

Ejemplo 1.3 Determine el valor de a, de forma que la distribución de probabilidad para la variable aleatoria continua X tenga criterio:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\left(ak^2+1\right)^2} & \text{si} \quad k \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.4 Considere la variable aleatoria continua Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{x^4} & \text{con} \quad x \geq k \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) Calcule $P\left[\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right]$.

Definición 1.3 Sea X una variable aleatoria con función de distribución f_X. La *media* o *esperanza* de X, denotada por μ_X o por $\mathrm{E}(X)$, está dada por:

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$

Teorema 1.1 Sea X una variable aleatoria, con función de distribución f_X. Si $Y = g(X)$, entonces la media de la v.a. Y está dada por:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

Definición 1.4 Sea X una v.a.d. con función de probabilidad f_X. Sea $\mu_X = \mathrm{E}(X)$ la media de X. La *varianza* de X, denotada por $\mathrm{Var}(X)$ o σ_X^2 se define como el número:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \; f_X(x)\, dx$$

Al número no-negativo $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ se le llama la *desviación estándar* de X.

Teorema 1.2

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2.$$

Ejemplo 1.5 Sea Y una variable aleatoria continua, con distribución de probabilidad asociada de criterio:

$$f_Y(x) = \begin{cases} kx^3 & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x < k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) Determine $\mathrm{Var}(Y)$.

Ejemplo 1.6 Considere la variable aleatoria continua Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{con} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Tomando μ_Z como la esperanza de Z y σ_Z^2 como la varianza de Z, calcule:

$$P[\mu_Z - \sigma_Z \leq Z \leq \mu_Z + \sigma_Z]$$

Definición 1.5 Función Generadora de Momentos

Considere $m_X(t) := \mathrm{E}(e^{Xt})$. Se define como la *función generadora de momentos* de la v.a. X, y satisface que $\dfrac{d^n}{dt^n} m_X(0) = \mathrm{E}(X^n)$, que corresponde al n-ésimo momento de X.

§1.1. **Ejercicios**

1) Sea k una constante. Determine, para una v.a.c. X con distribución de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{6} & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

   a) el valor de k;
   b) $F_X(k)$;
   c) la esperanza, la varianza y la desviación estándar;
   d) la función generadora de momentos de X;
   e) con $m_X(t)$, verifique los valores de $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(X^2)$.

2) Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{18} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x \leq k \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) Determine $F_X(k)$.

c) Determine la esperanza, la varianza y la desviación estándar.

d) Determine la función generadora de momentos de X.

e) Con $m_X(t)$, verifique los valores de $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(X^2)$.

3) Juan recibe un salario mensual base de 150 000 colones, además de un incentivo mensual, según las ventas que realice, dado por una v.a.c. X en miles de colones, cuya función generadora de momentos es

$$m_X(t) = \frac{1}{(1-30t)^2}$$

Determine el salario promedio mensual total que recibe Juan, y la desviación estándar de su salario mensual total.

4) Sea k una constante apropiada para una v.a.c. X con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{2x} & \text{si} \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) Determine $F_X(k)$.

c) Determine la esperanza, la varianza y la desviación estándar.

d) Determine la función generadora de momentos de X.

e) Con $m_X(t)$, verifique los valores de $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(X^2)$.

§2. Distribución uniforme continua

Definición 2.1 Distribución Uniforme Continua

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ \\ 0 & \quad\;\; \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo 2.1 En un sistema de procesamiento por lotes, el tiempo que tarda en ejecutarse un trabajo que ocupa la séptima posición en la cola sigue una distribución uniforme entre 20 y 35 segundos.

a) Calcule la probabilidad de que dicho trabajo tarde entre 22 y 28 segundos en ejecutarse.

b) Calcule la probabilidad de que el trabajo se complete en más de medio minuto.

Ejemplo 2.2 Un algoritmo de inteligencia artificial tarda entre 3 y 9 segundos en entrenar un modelo, siguiendo una distribución uniforme continua.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el entrenamiento tarde más de 5 segundos?

b) Determine la media y la desviación estándar del tiempo de entrenamiento.

Ejemplo 2.3 Se sabe que el tiempo de espera de un cliente para ser atendido en la caja de un supermercado, cuando está ubicado en la quinta posición de la fila, sigue una distribución uniforme donde los tiempos mínimo y máximo de espera son de 6 minutos y 18 minutos respectivamente.

a) Determine la probabilidad de que una persona ubicada en la quinta posición de la fila en la caja de dicho supermercado, deba esperar entre 8 y 11 minutos para ser atendida.

b) Calcule la esperanza y la desviación estándar del tiempo que pasará para que dicha persona sea atendida.

Ejemplo 2.4 El tiempo X que dura una calculadora para resolver una suma sigue una distribución uniforme continua entre 1 y 5 segundos. Determine:

a) el valor de $f_X(x)$ si $1 \leq x \leq 5$

b) la probabilidad de que dure más de 3.5 segundos

c) $E(X)$

§3. Distribución Exponencial

Definición 3.1 Se dice que X sigue una *distribución exponencial* con parámetro λ ($\lambda > 0$) si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad\text{en caso contrario} \end{cases}$$

Nota 3.1 $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ y $\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

$$F_X(x;\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$P(X \geq t + h \mid X \geq t) = P(X \geq h)$

Ejemplo 3.1 Un algoritmo de inteligencia artificial tarda entre 3 y 9 segundos en entrenar un modelo, siguiendo una distribución uniforme continua.

a) Calcule la probabilidad de que la corrección del error tarde más de 6 segundos, si el tiempo hasta su corrección sigue una distribución exponencial con media 4 segundos.

b) Si el proceso incluye entrenamiento seguido de corrección, determine la probabilidad de que el tiempo total exceda los 10 segundos.

Ejemplo 3.2 Si Y es una v.a.c. tal que $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, y $P(Y \geq 2) = 0.0821$; determine el valor de λ.

Definición 3.2 Sea X es una distribución de Poisson con parámetro λ_X por unidad de tiempo T. Sea Y el tiempo entre dos eventos de X. Entonces Y es una distribución exponencial con parámetro $\lambda_Y = \lambda_X / T$.

Ejemplo 3.3 El número de llamadas que se recibe en una oficina sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 7 llamadas cada dos horas.

a) ¿Cuál es el tiempo promedio entre llamadas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre llamadas exceda el tiempo esperado?

c) Determine el intervalo de tiempo tal que la probabilidad de que no se reciban llamadas en dicho intervalo sea de 0.8.

§3.1. **Ejercicios**

1) Una variable aleatoria X con media 2.5 sigue una distribución exponencial. Encuentre las siguientes probabilidades:

   a) $P(0.5 < X < 1.5)$

   b) $P(X \geq 3 \mid X > 0.5)$

   c) $P(X \leq 2 \mid X < 3)$

   d) $P(X > 2 \mid X < 3)$

2) Se sabe que la duración X de un bombillo sigue una distribución exponencial. Si se sabe que $P(X \leq h) = 0.0523$. Determine la probabilidad de que, dado que el bombilla duró 1000 horas, dure al menos h horas más.

3) El tiempo de vida de un componente puede ser representado por la distribución exponencial, con esperanza de vida igual a 2 años.

   a) ¿Cuál es la función de distribución acumulada?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el componente dure al menos año y medio?, ¿al menos dos años y medio?

   c) ¿Cuánto debe ser el período de garantía para asegurarse de que el componente deberá ser reemplazado con la garantía en no más del 5% de los casos?

   d) Si se toman al azar 5 componentes que ya tienen dos años de uso, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 3 estén dañados?

4) El tiempo de vida de un microprocesador sigue una distribución exponencial con esperanza de vida de 3000 horas.
   a) ¿Cuál es el porcentaje de microprocesadores que fallarán en las primeras 2000 horas
   b) ¿Qué porcentaje funcionará por más de 6000 horas?
   c) Si un procesador ya ha durado 3000 horas, ¿cuál es la probabilidad de que dure 2000 horas más?
   d) Si quisiera estar seguro de que en el 90% de los casos los microprocesadores van a durar más de x horas, ¿qué valor sugiere para x?

5) La magnitud de terremotos en cierta región puede ser modelada como una distribución exponencial con media 2.4 en la escala de Richter. De los siguientes 10 terremotos que sucedan, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno exceda los 5.0 en la escala de Richter?

§3.2. Distribución Normal

Definición 3.3 Una v.a.c. X se dice que tiene una **distribución normal** con parámetros μ y σ dado $R_X = \mathbb{R}$ y:

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

§3.2.1. **Distribución Normal Estándar**

Definición 3.4

$$f_Z(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$$

La función de distribución está dada por:

$$P(Z \leq z) = P(Z < z) = \Phi(z)$$

y además cumple que

$$P(Z \geq z) = P(Z \leq -z)$$
$$P(Z \leq z) = 1 - P(Z < -z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ejemplo 3.4 Determine las siguientes probabilidades:

a) $P(Z \leq 1.25)$;

b) $P(Z > 1.25)$;

c) $P(Z \leq -1.25)$;

d) $P(-0.38 \leq Z \leq 1.25)$.

Ejemplo 3.5 Determine los valores z tales que:

a) $P(Z > z) = 0.05$

b) $P(-z < Z < z) = 0.99$.

Teorema 3.1 Dada $X \sim N(\mu, \sigma)$, $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Eso quiere decir que:

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6 En el laboratorio de computación gráfica, se ha medido que el tiempo que tarda una GPU en procesar un fotograma complejo sigue una distribución normal con media de 16 milisegundos y desviación estándar de 2.5 milisegundos.

a) Calcule la probabilidad de que la GPU tarde más de 21 milisegundos en procesar un fotograma.

b) Determine el valor mínimo teórico C, en milisegundos, tal que el 5 % de los fotogramas tarden más de ese tiempo en procesarse; es decir, el tiempo umbral C que deja el 5 % superior de los tiempos de procesamiento.

Ejemplo 3.7 Suponga que el tiempo T que tarda una persona en resolver una práctica para examen sigue una distribución normal con media 50 minutos y desviación estándar desconocida.

a) Si se sabe que la probabilidad de que el tiempo para resolver la práctica supere los 80 minutos es del 5 %, determine el valor de la varianza de T.

b) Suponiendo que $\sigma_T = 18.5$, determine el valor de c para que:

$$P[50 - c \leq T \leq 50 + c] = 0.975$$

Ejemplo 3.8 Considere la variable aleatoria continua Y, la cual sigue una distribución normal, con media μ_Y desconocida y varianza $\sigma_Y^2 = 400$.

a) Si se sabe que $P[Y > 20] = 0.3$, determine μ_Y.

b) Suponiendo que $\mu_Y = 10$, determine un valor c tal que

$$P[\mu_X - c < X < \mu_x + c] = 0.1$$

Ejemplo 3.9 Cierto dispositivo electrónico, cuando está completamente cargado, presenta una duración de descarga completa, en horas, que sigue una distribución normal, cuya media es de 2.4 horas y desviación estándar desconocida.

a) Suponiendo que la probabilidad de que el tiempo de descarga mencionado sea superior a las 3 horas es de 20 %, determine el valor la varianza para dicho tiempo de descarga.

b) Suponiendo que la desviación estándar es de 0.8 horas, ¿cuál es la probabilidad que un dispositivo electrónico tenga una duración de descarga entre 1.3 y 2.7 horas?

Ejemplo 3.10 There are two machines for cutting corks. The first produces corks with diameters normally distributed with mean 3 cm and standard deviation 0.1 cm. The second produces corks with diameters normally distributed that have mean 3.04 cm and standard deviation 0.02 cm. Acceptable corks have diameters between 2.9 cm and 3.1 cm. Which machine is more likely to produce an acceptable cork?

Ejemplo 3.11 Las medidas de corriente en un cable siguen una distribución normal con media de 10 mA y $\sigma = 2$ mA. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) la medida exceda los 13 mA?

b) la medida esté entre 9 y 11 mA?

c) ¿Qué valor de corriente x es tal que $P(X \leq x) = 0.98$?

§3.2.2. **Aproximación de la binomial**

Definición 3.5 Si X es una v.a. discreta con distribución binomial y parámetros n y p. Entonces,

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

es aproximadamente una v.a. normal continua. Para aproximar una probabilidad binomial con una distribución normal, se aplica una **correción de continuidad** :

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \qquad P(X < x) \approx \Phi\left(\frac{x - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

La aproximación es buena si $np > 5$ y $n(1-p) > 5$.

Ejemplo 3.12 Suponga que el 25 % de los estudiantes de cierta universidad reciben ayuda económica. Sea X el número de estudiantes que reciben ayuda económica en una muestra de 50. Determine la probabilidad de que reciban ayuda económica:

a) a lo sumo 10 estudiantes;

b) entre 5 y 15 estudiantes (inclusive).

Ejemplo 3.13 El consumo anual per cápita de colas en Latinoamérica en el 2008 siguió una distribución normal estándar con media 43.6 litros, y desviación estándar 6.2 litros. Se sugiere no consumir más de 36.5 litros al año, para prevenir problemas de salud. De 1000 personas que se escogen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 500 ingieran más de la cantidad sugerida?

Ejemplo 3.14 En una canasta hay solo bolas rojas y blancas. Sea p la probabilidad de extraer una bola blanca de la canasta. De 100 extracciones con reposición se sabe que la probabilidad de obtener a lo sumo 30 bolas blancas es aproximadamente del 40 %. Determine el valor aproximado de p.

§3.2.3. **Suma y promedio de normales**

Teorema 3.2 Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una distribución normal, o sea $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\forall i = 1, \dots, n$, se cumple que:

a) El promedio de normales es normal. Si $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$, entonces $\overline{X}$ es normal tal que

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_i \mu_i \quad \text{y} \quad \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma_i^2 .$$

Teorema 3.3 Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una distribución normal, o sea $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \forall i = 1, \ldots, n$, se cumple que:

b) La suma de distribuciones normales es normal. Si $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, entonces S es normal tal que

$$\mu_S = \sum_i \mu_i \quad \text{y} \quad \sigma_S^2 = \sum_i \sigma_i^2$$

Ejemplo 3.15 El peso de las bolsas de arroz Blanco sigue una distribución normal con media de 2 kg y desviación estándar de 0.05 kg. Por otro lado, el peso de las bolsas de azúcar Blanco sigue una distribución normal con media 1.5 kg y una desviación estándar de 0.04 kg. En un supermercado se venden paquetes Blanco promocionales, cada uno contiene tres bolsas de arroz y dos de azúcar, elegidos al azar. Determine la probabilidad de que un paquete Blanco promocional pese menos de 8.7 kg.

Ejemplo 3.16 Jorge elaboró un software para resolver integrales indefinidas, el cual tarda en promedio 4 segundos resolviendo una integral no trivial, con una desviación estándar de 1.5 segundos, siguiendo una distribución normal.

a) Si el programa resolvió una lista de 30 integrales no triviales, ¿cuál es la probabilidad de que en promedio tarde menos de 3.5 segundos en resolver las integrales?

b) Si la probabilidad de que el programa resuelva una lista de 10 integrales no triviales en menos de un tiempo t es superior al 95%, determine el menor valor de t.

Ejemplo 3.17 Doña Sonia tiene una pequeña tienda de reparación de ropa cuya ganancia diaria sigue una distribución normal con un promedio de 50 mil colones y una desviación de 5 mil colones. Doña Sonia requiere de 800 mil colones para remodelar su tienda. Suponiendo que ahorrará toda la ganancia obtenida en la tienda para su remodelación, ¿cuántos días necesita para obtener por lo menos el dinero de la remodelación con una probabilidad superior al 90%.

Ejemplo 3.18 La estatura de cierto grupo de niños sigue una distribución normal con media 135 cm y desviación estándar 10 cm.

a) Si se considera que el 10 % son altos, determine la estatura mínima que debe tener un niño para ser considerado alto.

b) Determine la probabilidad de que al tomar 50 niños, la estatura promedio sea mayor a 138 cm.

Ejemplo 3.19 Una pieza recta se construye conectando tres secciones A, B y C, cada una de las cuales se construye en una máquina diferente. Las tres medidades, dadas en centímetros, siguen una distribución normal con medias 50, 35 y 65; y varianzas 0.25, 0.0625 y 0.305 respectivamente. Las tres secciones se unen, de manera que se traslapan 5 centímetros exactos en cada conexión. La pieza se utiliza para construir el ala de un avión solo si su longitud total se encuentra entre 139.35 cm y 140.75 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda utilizar la pieza?

Ejemplo 3.20 El peso de las bolsas de arroz «Blanco» sigue una distribución normal con media de 2 kilos y desviación estándar de 0.05 kilos. Por otro lado, el peso de las bolsas de azúcar «Blanco» sigue una distribución normal con media de 1.5 kilos y desviación estándar de 0.04 kilos. En un supermercado venden paquetes «Blanco» promocionales, cada paquete contiene 3 bolsas de arroz y 2 de azúcar. ¿Cuál es la probabilidad de que el paquete «Blanco» pese menos de 8.8 kilos?

Ejemplo 3.21 El peso de una bolsa de frilojes marca «Sabores» sigue una distribución normal de media y varianza desconocidas. El 10.56 % de las bolsas tienen un peso superior a 2.05 kg. Ante el reclamo sobre el poco peso de las bolsas, la Empresa «Sabores» decide adjuntar gratis una bolsita de azúcar «Sabores» junto a cada bolsa de frijoles que se encuentre en el 15 % de las bolsas con el menor peso. El peso máximo de una bolsa de frijoles para que se le adjunte una bolsita de azúcar, es de 1.59 kg. Determine el promedio y desviación estándar de los pesos de las bolsas de frijoles «Sabores».

§3.3. **Distribución Gamma**

Definición 3.6 Si X es una variable aleatoria continua, entonces X sigue una distribución Gamma con parámetros α y β, ambos mayores que cero, si

$$f_{X(x)} = f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & \text{para} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ dx$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \qquad\qquad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Teorema 3.4 Si X es una variable aleatoria Gamma con parámetros α, β, se cumple que:

- $\mathrm{E}(X) = \alpha\beta$
- $\mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2$ (en otras palabras, $\beta = \mathrm{Var}(X)\ /\ \mathrm{E}(X)$)
- $m_{X(t)} = \dfrac{1}{(1 - \beta \cdot t)^{\alpha}}$ si $t < 1/\beta$
- $P([X \leq x]) = F\left(\dfrac{x}{\beta}; \alpha\right)$, que es la distribución de *gamma incompleta*.

Ejemplo 3.22 Se sabe que el tiempo de espera al hacer fila para almorzar en el comedor de la universidad TECNO sigue una distribución Gamma, con $\alpha = 4$. La probabilidad de que una persona elegida al azar espere menos de 15 minutos es de 0.353. Determine el tiempo medio de espera al hacer fila para almorzar en esta universidad.

Ejemplo 3.23 Se ha determinado que el tiempo X, en horas, que semanalmente requiere un sitio web para actualizarse sigue una distribución gamma, con media de 12 horas y varianza de 48 horas^2. Determine la probabilidad de que, en una semana escogida al azar, el tiempo semanal de actualización del sitio sea inferior a 14 horas.

Ejemplo 3.24 El contenido de una pasta de dientes sigue una distribución Gamma, con media 100 ml y varianza 1250 ml^2.

a) Determine los parámetros α y β de la distribución.

b) Determine la probabilidad de que el contenido sea mayor a 150 ml.

Ejemplo 3.25 Cuando cierto medicamento es ingerido por una persona, el tiempo durante el cual hace efecto en el cuerpo sigue una distribución Gamma con un promedio de 5 horas y una varianza de 2.5 horas^2. Si una persona toma el medicamento a las 6 de la mañana, ¿cuál es la probabilidad de que a la 1:00 p. m. aún esté haciendo efecto en el cuerpo de la persona?

Ejemplo 3.26 En cierta ciudad, el consumo diario de gasolina (en miles de litros) sigue una distribución Gamma con media igual a 6 mil litros y varianza 18 mil litros^2.

a) Determine la probabilidad de que en un día se consuman más de 9 mil litros en esa ciudad.

b) Halle la probabilidad de que la semana entrante, iniciando lunes, se logre obtener por primera vez el viernes, un consumo diario de gasolina superior a 9 mil litros en esta ciudad.

Ejemplo 3.27 Se sabe que el tiempo de espera al hacer fila para almorzar en el comedor de la universidad CET sigue una distribución Gamma con $\alpha = 4$. La probabilidad de que una persona, elegida al azar, espere menos de 15 minutos es de 0.353. Determine el tiempo promedio de espera al hacer fila para almorzar en esta universidad.

Definición 3.7 Sea A un evento que sigue una distribución de Poisson de parámetro λ para **una unidad de tiempo**. Si T denota el tiempo que transcurre hasta que se den k ocurrrencias del evento A, entonces T es una variable aleatoria continua tal que:

$$T \sim \mathrm{Gamma}\left(k, \frac{1}{\lambda}\right)$$

Ejemplo 3.28 Los clientes llegan a una ventanilla de banco para pedir información sobre crédito siguiendo una distribución de probabilidad Poisson con promedio un cliente cada dos horas. Una persona decide esperarse el tiempo necesario hasta que llegue el quinto cliente. Determine la probablidad de que esa persona deba esperar por más de 4 horas.

§3.4. Teorema del Límite Central

§3.4.1. Desigualdad de Markov

Teorema 3.5 Si X es una variable aleatoria (discreta o continua), cuya esperanza es $\mathrm{E}(X)$, para la cual $P(X < 0) = 0$, se cumple la desigualdad

$$P(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{t}$$

§3.4.2. **Desigualdad de Chebyshev**

Teorema 3.6 Si X es una variable aleatoria con media μ_X y varianza σ_X^2, entonces,

$$P(|\, X - \mu_X| \geq t) \leq \frac{\sigma_X^2}{t^2}$$

$$P(|X - \mu_X| < t) \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{t^2}$$

Ejemplo 3.29 Haciendo uso de la desigualdad de Chebyshev:

$$P(|X-\mu|<k) \geq 1-\frac{\sigma^2}{k^2}$$

donde $\mathrm{E}(X)=\mu$ y $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$, encuentre una cota inferior para $P(35<X\leq 49)$ si se sabe que X es una v.a.c. tal que $\mathrm{E}(X)=42$ y $\mathrm{Var}(X)=15$.

Ejemplo 3.30 En cierto cantón, se ha determinado que solo el 20 % de los conductores utiliza el cinturón de seguridad. Si en un operativo de tránsito se revisaron a 200 conductores, y se quiere determinar la probabilidad de que al menos 31 pero menos de 49 usen cinturón de seguridad:

a) determine una cota inferior para dicha probabilidad, utilizando el teorema de Chebyshev.

b) estime la probabilidad utilizando la aproximación de la binomial mediante la distribución normal.

Ejemplo 3.31 En un supermercado se vende en promedio 100 litros de leche diarios con una desviación estándar de 10 litros. Utilice la desigualdad de Chebishev para aproximar la cantidad de litros de leche que debe haber en el supermercado al inicio del día para que la probabilidad de satisfacer la demanda del día sea superior al 90 %.

§3.4.3. Teorema del Límite Central

Teorema 3.7 Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes y todas siguiendo la misma distribución, tales que $\mathrm{E}(X_k) = \mu$ y $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2$. Entonces:

a) Si $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, $S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

b) Si $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

Ejemplo 3.32 La ganancia diaria que recibe una soda en el centro de Naranjo, en dólares, tiene una media de 300 dólares, con una desviación estándar de 21.2 dólares.

a) Determine, aproximadamente, la probabilidad de que la ganancia mensual (30 días) sea superior a los 9.1 miles de dólares.

b) Si se quiere que al menos el 95 % de la ganancia diaria promedio esté entre 299 dólares y 301 dólares, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Ejemplo 3.33 Considere las variables aleatorias continuas X_1, X_2, ..., X_{15}, mutuamente independientes, con:

$$X_i \sim N(10i, 2), \text{ para todo } \; i \in \{1, 2, ..., 15\}.$$

Calcule $P\left[\overline{X} < 79.5\right]$, donde $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_{15}}{15}$.

Ejemplo 3.34 Un servicio de entrega de comida rápida cumple los pedidos con una media de 35 minutos y una desviación estándar de 8 minutos.

a) Si esta semana se entregaron 200 pedidos, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de entrega promedio esté entre 32 y 36 minutos, inclusive ambos extremos?

b) A un repartidor le dan un bono la primera vez que supera las 120 horas en los servicios de entregas. ¿Cuál es la probabilidad de que le den dicho bono la semana que entregó los 200 pedidos?

Ejemplo 3.35 Una secretaria graduada en el Instituto de Mecanografía digita un promedio de 80.5 palabras por minuto con una desviación estándar de 7 palabras por minuto. Determine la probabilidad de que en una hora, una secretaria de dicho instituto digite más de 4850 palabras.

Ejemplo 3.36 En una fábrica de dispositivos médicos se empacan bolsas de suero con un peso promedio de 200 gramos y una desviación estándar de 20 gramos. Las bolsas se empacan en cajas que contienen 100 bolsas. Al elegir una caja al azar, ésta pasa el control de calidad si el promedio de peso de las bolsas que contiene está entre 198 y 202 gramos. Calcule la probabilidad de que:

a) una caja no pase el contro de calidad.

b) el peso total de la caja supere los 20 200 gramos (20.2 kilogramos)

Ejemplo 3.37 La probabilidad de vender un libro que se oferta por correo es de 0.01. Si se ofertan 5 000 libros en un día, determine la probabilidad de que se logren vender más de 60 libros.

Ejemplo 3.38 César, un estudiante de computación, diseñó un juego para el cual se puede ajustar la probabilidad de ganarlo. Para un turno, decide poner un local y llevar su computadora, cobrando cierta cantidad por jugar. ¿A qué valor debe César ajustar la probabilidad de ganar el juego, para que la probabilidad de que, de 100 jugadores, al menos 10 lo ganen, sea aproximadamente igual a 15 %?

Ejemplo 3.39 El doctor Adrian tiene un consultorio privado y ha estimado que en promedio cobra 15 000 colones por consulta con una desviación estándar de 7 000 colones. Hace poco un cliente se quejó de que el cobro de 18 000 colones por su consulta fue excesivo. Después de mucho discutir, el doctor establece que si en una muestra de 50 facturas por consultas se revela un costo promedio de consulta inferior al monto cobrado al cliente, le devolverá todo el dinero. ¿Considera que el arreglo del doctor lo favorece?

Ejemplo 3.40 La Agencia de Viajes Diversión ha lanzado a inicios de este mes la promoción «¡Vamos al mundial!», la cual ofrece un paquete a Alemania para ver los tres partidos de la primera eliminatoria de Costa Rica. Se ha logrado estimar que el 6 % de las personas que compraron un paquete no asistirán a los tres encuentros por diferentes motivos. ¿Cuál es el mínimo de paquetes que se deben vender para garantizar que al menos 1000 personas, que compraron el paquete, asistan a los tres partidos a apoyar a la Selección con una probabilidad de 98 %?

Ejemplo 3.41 La empresa de «Llantas Mundiales» distribuye llantas para taxi. Cada llanta tiene una duración promedio de 30 000 kilómetros con una desviación de 2500 kilómetros. Además las llantas se venden en paquetes de 40 llantas.

a) Determine la probabilidad de que un paquete tenga una duración promedio inferior a 29 500 kilómetros.

b) La empresa incluye la siguiente oferta: «Si en un paquete de llantas la duración promedio no supera un cierto valor c, la empresa hace un descuento en la siguiente compra.» Determine el valor c, de manera tal que el 95 % de los paquetes no califique para la oferta.