Solución Examen de Reposición I Semestre 2023.

1. **[3 puntos]** En cierta región del país un puente está en mal estado. La cantidad de reclamos formales que reciben al correo electrónico de la Municipalidad sigue una distribución de Poisson, con media 5 reclamos por hora. La Defensoría ha concluido que si debe esperar menos de 90 minutos para obtener los próximos 10 reclamos, entonces harán un proceso judicial. ¿Cuál es la probabilidad de que inicien dicho proceso?

Sea X la cantidad de reclamos formales que recibe la Municipalidad.

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow X \sim P(5)$$

$$P(X=10) = \frac{5^{10} \cdot e^{-5}}{10!}$$

$$= 0.0181$$

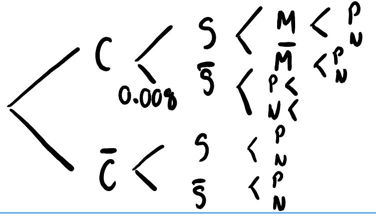
Sea Y la cantidad de minutos para obtener un reclamo.

$$Y \sim B(89, 5e^{-5})$$

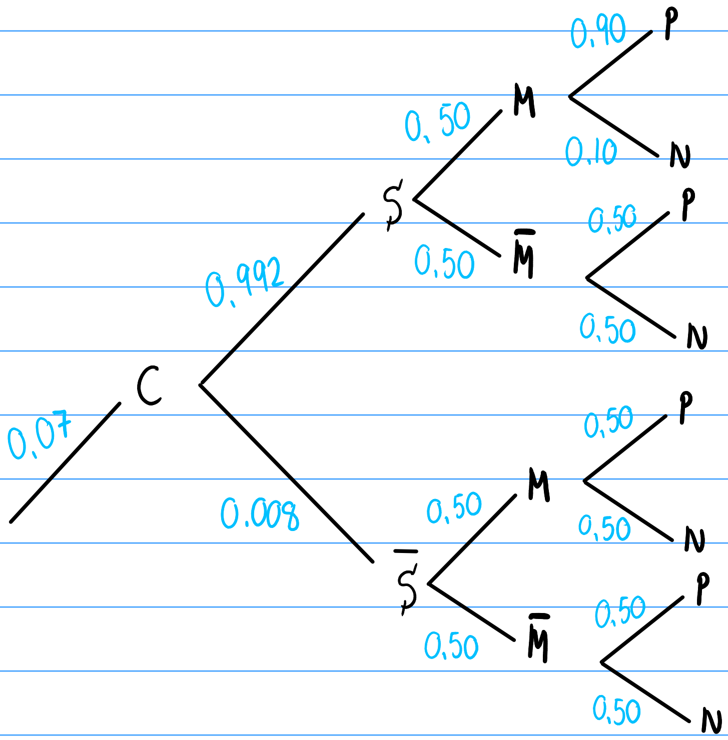
$$P(Y < 90) = \sum_{K=0}^{89} \binom{89}{K} \cdot (0.0181)^{K} \cdot (1-0.0181)^{89-K}$$

$$= 1$$

$\therefore$ La probabilidad de iniciar el proceso judicial es del 100%.



2. [**4 puntos**] Suponga que la probabilidad de que una mujer costarricense de cierta edad tenga cáncer de mama sin haber presentado síntomas es de 0.8 %. Si tiene cáncer y se realiza la mamografía, la probabilidad de salir positiva es del 90 %, pero el 7 % de las mujeres sanas dan positivo en este examen. Suponga que una mujer decide hacerse la mamografía y el resultado es positivo, entonces ¿cuál es la probabilidad de que la mujer tenga cáncer?



Por Bayes: $\dfrac{P(C)}{P(C)\cdot P(S)\cdot P(M)\cdot P(P) + P(C)\cdot P(\bar{S})\cdot P(M)\cdot P(P) + \ldots}$

$$= \frac{0.07}{0.07\cdot 0.992\cdot 0.5\cdot 0.9 + 0.07\cdot 0.008\cdot 0.5\cdot 0.5 + \ldots}$$

3. **[4 puntos]** Considere una baraja americana de cartas: 52 cartas en total, 13 espadas, 13 corazones, 13 tréboles y 13 diamantes. Cada uno de los cuatro "palos" de 13 cartas tiene la siguiente numeración: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. Si se toman 5 cartas al azar, ¿de cuántas maneras diferentes se puede obtener tres cartas con igual número y las otras dos también con igual número? El orden de las cartas es irrelevante.

Etapa 1: Seleccionar el número o letra de tres cartas $C(13,1)$

Etapa 2: Seleccionar las tres cartas $C(4,3)$

Etapa 3: Seleccionar el número o letra de dos cartas $C(12,1)$

Etapa 4: Seleccionar las dos cartas $C(4,2)$

TOTAL: $C(13,1)\cdot C(4,3)\cdot C(12,1)\cdot C(4,2) = 3744$ maneras

4. **[5 puntos]** Un pequeño agricultor se dedica a la producción de cierto tipo de sandías. Estas frutas tienen un peso medio de 850 gramos y una desviación estándar de 100 gramos. El agricultor empaca las sandías en cajones de 40 sandías para llevarlas a la Feria de Agricultor, donde las vende a 1000 colones el kilogramo. ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga un ingreso superior a los 35000 colones por la venta de todas las sandías de un cajón?

Sea S_{40} el ingreso por la venta de todas las sandías de un cajón.

Por el TLC, $S_{40} \underset{aprox}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow S_{40} \underset{aprox}{\sim} N(\underbrace{40\cdot 850}_{\mu}, \underbrace{40\cdot 100^2}_{\sigma^2})$

$$P(S_{40} > 35000) = 1 - P(S_{40} \leq 35000)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{35000 - 40\cdot 850}{\sqrt{40\cdot 100^2}}\right)$$

$$P(X < a) = P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}5811)$$

$$= 1 - \varphi(1{,}58)$$

$$= 1 - 0{,}9429$$

$$= 0{,}0571$$

$\therefore$ La probabilidad de tener ingresos superiores a ₡35000 por la venta de todas las sandías de un cajón es de 0,0571.

5. En un salón de clase hay 16 mujeres y 4 hombres. Se va a formar un grupo, de manera aleatoria y sin orden, compuesto por 10 personas del salón.

   a) **[2 puntos]** Determine el rango y la distribución de probabilidad para la variable cantidad de hombres en el grupo.

Sea X la cantidad de hombres en el grupo.

$$R_X = \{\max(0, n-(N-b)), \min(n,b)\}$$

$N = 20 \qquad n = 10 \qquad b = 4$

$$R_X = \{\max(0, 10-(20-4)), \min(10,4)\}$$
$$= \{\max(0, -6), \min(10,4)\}$$
$$= \{0, 4\}$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\binom{4}{k}\binom{20-4}{10-k}}{\binom{20}{10}}$$

$$= \frac{\binom{4}{k}\binom{16}{10-k}}{\binom{20}{10}} \quad \checkmark \qquad \frac{\binom{6}{k}\binom{14}{10-k}}{\binom{20}{10}}$$

b) **[2 puntos]** Determine la probabilidad de que haya más de 6 mujeres en dicho grupo.

Sea Y la cantidad de mujeres en el grupo.

$$P(Y>6) = 1 - P(Y \leq 6)$$

$$= 1 - \frac{\binom{6}{6}\binom{14}{10-6}}{\binom{20}{10}}$$

$$= \frac{1285}{1292}$$

$$= 0{,}994582$$

$\therefore$ La probabilidad de que haya más de 6 mujeres en el grupo es de 0,9945.

6. Tres amigos participaron en un concurso y ganaron 10 entradas para el siguiente Clásico y 9 celulares distintos. ¿De cuántas maneras pueden repartir los premios si a cada amigo le corresponde al menos

a) **[2 puntos]** dos entradas?

Etapa ①: Repartir dos entradas a cada amigo. 1 manera

Etapa ②: Repartir las demás entradas $C(3+4-1, 4) = C(6,4) = 15$ maneras

TOTAL: $1 \cdot C(6,4) = 15$ maneras.

b) **[3 puntos]** un celular?

Caso ①: un celular a cada amigo.

Etapa ①: un celular para amigo 1 $C(9,1) = 9$ maneras

Etapa ②: un celular para amigo 2 $C(8,1) = 8$ maneras

Etapa ③: un celular para amigo 3 $C(7,1) = 7$ maneras

Etapa ④: repartir el resto de celulares $3^6 = 729$ maneras

TOTAL: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 729 = 367\,416$ maneras

Caso ②: dos celulares a cada amigo.

Etapa ①: dos celulares para amigo 1 $C(9,2) = 36$ maneras

Etapa ②: dos celulares para amigo 2 $C(7,2) = 21$ maneras

Etapa ③: dos celulares para amigo 3 $C(5,2) = 10$ maneras

Etapa ④: repartir el resto de celulares $3^3 = 27$ maneras

TOTAL: $36 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 27 = 204\,120$ maneras

Caso ③: tres celulares a cada amigo.

Etapa ①: tres celulares para amigo 1 $C(9,3) = 84$ maneras

Etapa ②: tres celulares para amigo 2 $C(6,3) = 20$ maneras

Etapa ③: tres celulares para amigo 3 $C(3,3) = 1$ maneras

Etapa ④: repartir el resto de celulares $3^0 = 1$ manera

TOTAL: $84 \cdot 20 \cdot 1 \cdot 1 = 1680$ maneras

TOTAL $= 367\,416 + 204\,120 + 1680 = 573\,216$ maneras

7. La nota del examen final de un curso tiene como media 75 y varianza 64. Suponga que dichas calificaciones siguen una distribución normal.

   a) [**2 puntos**] Si un estudiante se escoge al azar, ¿cuál es la probabilidad de que saque una nota mayor o igual que 70?

Sea X la nota del examen final de un curso.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X \sim N(75, 64)$$

$$P(X \geq 70) = 1 - P(X < 70)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{70-75}{\sqrt{64}}\right)$$

$$= 1 - \varphi(-0.625)$$

$$= 1 - \varphi(-0.63)$$

$$= 1 - 0.2643$$

$$= 0.7357$$

$\therefore$ La probabilidad de obtener más de 70 en la nota es 0.7357.

b) **[4 puntos]** ¿Cuántos estudiantes debe tener un grupo para que la probabilidad de tener una nota promedio entre 70 y 80 sea 95 %?

Sea $\bar{X}$ la nota promedio del grupo.

$$\bar{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \bar{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(\overset{\mu}{75}, \overset{\sigma^2}{\frac{64}{n}}\right)$$

$$P(70 \leq \bar{X} \leq 80) = 0{,}95 \Rightarrow F_{\bar{x}}(80) - F_{\bar{x}}(70) = z_{0.95} \quad (\text{GP})$$

Aparte:

⊛ Para $F_{\bar{x}}(80)$

$$\frac{80-75}{\sqrt{\frac{64}{n}}} = \frac{5}{\frac{8}{\sqrt{n}}}$$

⊛ Para $F_{\bar{x}}(70)$

$$\frac{70-75}{\sqrt{\frac{64}{n}}} = \frac{-5}{\frac{8}{\sqrt{n}}}$$

Retomando (GP) se tiene que:

$$F_{\bar{x}}(80) - F_{\bar{x}}(70) = z_{0.95} \Rightarrow \frac{5}{\frac{8}{\sqrt{n}}} - \frac{-5}{\frac{8}{\sqrt{n}}} = z_{0.95}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{10}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right) = z_{0.95}$$

$$\Rightarrow \frac{10\sqrt{n}}{8} = 1.645$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{n} = 13.16$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 1.316$$

$$\Rightarrow n = \pm 1{,}731856$$

$$\Rightarrow n \approx 2$$

$\therefore$ La cantidad de estudiantes en el grupo es 2.

8. [**4 puntos**] Considere la variable aleatoria discreta X, cuya distribución de probabilidad tiene criterio:

$$f_X(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad , \ x \in \{0, 1, 2, \ldots\} \ .$$

Determine el criterio de la función generadora de momentos, y utilícela para calcular $Var(X)$.

$$m_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow m_X(t) = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{e^t}{3}\right)^x$$

Aparte:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{e^t}{3}\right)^x = \frac{\left(\frac{e^t}{3}\right)^0}{1 - \frac{e^t}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3-e^t}{3}}$$

$$= \frac{3}{3-e^t} \qquad \text{con } t < \ln(3)$$

Retomando  se tiene que:

$$\frac{2}{3}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{e^t}{3}\right)^x = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{3-e^t}$$

$$= \frac{2}{3-e^t} \quad , \quad \text{con } t < \ln(3)$$

Como se pide Var(x), entonces:

$$E(x) = m'_x(0) \Rightarrow E(x) = \left.\frac{(2)'(3-e^t) - 2(3-e^t)'}{(3-e^t)^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{\cancel{-}2\cdot\cancel{-}e^t}{(3-e^t)^2}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$Var(x) = m''_x(0) - [E(x)]^2$$

$$= \left(\frac{2e^t}{(3-e^t)^2}\right)' - \frac{1}{4}$$

$$= \left.\frac{(2e^t)'(3-e^t)^2 - 2e^t[(3-e^t)^2]'}{(3-e^t)^4}\right|_{t=0} - \frac{1}{4}$$

$$= \left.\frac{2e^t(3-e^t)^2 - 2e^t[2(3-e^t)\cdot -e^t]}{(3-e^t)^4}\right|_{t=0} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 - 2[2 \cdot 2 \cdot -1]}{16} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{8 + 8}{16} - \frac{1}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$\therefore$ $Var(X) = \frac{3}{4}$ y $m_X(t) = \frac{2}{3 - e^t}$, con $t < \ln(3)$