1. Estudie el ejemplo 1 y luego realice los ejercicios 2, 8b, 9b, 10,11b, 13 y 16 correspondientes a la sección 1 folleto de ejercicios.

Ejemplo 1 *Sea X y Y dos variables aleatorias independientes tales que*

$$X \sim B\left(10\theta, \frac{1}{2}\right), \quad Y \sim B\left(20\theta, \frac{1}{5}\right)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro $\theta > 0$ de una determina población:

$$\widehat{\theta}_1 = X - Y, \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{X+Y}{9}$$

¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ? Justifique su respuesta.

$$X \sim B(\underset{n}{10\theta}, \underset{p}{\tfrac{1}{2}}), \quad Y \sim B(\underset{n}{20\theta}, \underset{p}{\tfrac{1}{5}})$$

$$u = np \qquad \sigma^2 = npq \qquad \sigma = \sqrt{npq} \qquad q = 1 - p$$

Insesgados?

$$E(\hat{\theta}_1) = E(X) - E(Y)$$
$$= 10\theta \cdot \tfrac{1}{2} - 20\theta \cdot \tfrac{1}{5}$$
$$= 5\theta - 4\theta$$
$$= \theta, \therefore \hat{\theta}_1 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{E(X) + E(Y)}{9}$$
$$= \frac{10\theta \cdot \frac{1}{2} + 20\theta \cdot \frac{1}{5}}{9}$$
$$= \frac{5\theta + 4\theta}{9} = \frac{9\theta}{9} = \theta, \therefore \hat{\theta}_2 \text{ es insesgado}$$

Comparando $\hat{\theta}_1$ con $\hat{\theta}_2$

$$\eta = \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$$

Comparando $\hat{\theta}_1$ con $\hat{\theta}_2$

$$\eta = \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$$

$$\widehat{\theta}_1 = X - Y, \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{X+Y}{9}$$

$$X \sim B\left(10\theta, \frac{1}{2}\right), \quad Y \sim B\left(20\theta, \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{Var(X)+Var(Y)}{\frac{Var(X)+Var(Y)}{9}}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{\sigma^2+\sigma^2}}{1}}{\frac{\cancel{\sigma^2+\sigma^2}}{81}} = 81 > 1$$

$$\boxed{\therefore \hat{\theta}_2 \text{ es mejor estimador}}$$

Ejemplo 2 *La variable aleatoria X tiene densidad de probabilidad dada por*

$$f(x) = \frac{x}{a^2 e^{x/a}}, \text{ para } x \geq 0$$

Tres observaciones de X son $x_1 = 12; x_2 = 16$ y $x_3 = 15$. Encuentre la estimación de máxima verosimilitud del parámetro a.

$$f(x) = \frac{x}{a^2 e^{\frac{x}{a}}}$$

$$L(a|x) = \frac{12}{a^2 e^{\frac{12}{a}}} \cdot \frac{16}{a^2 e^{\frac{16}{a}}} \cdot \frac{15}{a^2 e^{\frac{15}{a}}}$$

$$= \frac{2880}{a^6 \cdot e^{\frac{43}{a}}} \quad \frac{12}{a} + \frac{16}{a} + \frac{15}{a}$$

$$\ln(L(a|x)) = \ln(2880) - \left(6\ln(a) + \frac{43}{a}\right)$$

$$= \ln(2880) - 6\ln(a) - \frac{43}{a}$$

Derivando

$$\ln(L(a|x)) = \ln(2880) - 6\ln(a) - \frac{43}{a}$$

$$\frac{L'(a|x)}{L(a|x)} = 0 - 6 \cdot \frac{1}{a} - 43 \cdot -\frac{1}{a^2}$$

$$= -\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2}$$

Igualar a 0

$$-\frac{6}{a}\frac{a}{a} + \frac{43}{a^2} = 0$$

$$\frac{-6a + 43}{a^2} = 0$$

$$-6a + 43 = 0 \longrightarrow \boxed{a = \frac{43}{6}}$$

8. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim Exp(\lambda)$, donde λ es un parámetro desconocido. Es decir

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) Pruebe que $\frac{1}{\overline{\lambda}}$ es un estimador insesgado de $\frac{1}{\lambda}$.Sugerencia: recuerde que si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \mu \rightarrow \overline{X}$$

En este tipo de estimaciones el problema es que no se puede medir el error de estimación; sin embargo, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, se espera que mejor sea la estimación.

De acuerdo con lo estudiado en el primer capítulo, dada una muestra observada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de una muestra aleatoria M se tienen las siguientes estimaciones puntuales de los respectivos parámetros:

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	$\overline{X}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
σ^2	S^2	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
σ	S	$s = \sqrt{s^2}$
p	$\widehat{P}$	$\widehat{p} = \frac{b}{n}$, b es el número de éxitos en la muestra

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \cancel{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} K = nK$$

$$\boxed{= \frac{1}{\lambda} \quad \therefore \text{Queda demostrado}}$$

9. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim G(p)$, donde p es un parámetro desconocido. Es decir

$$f_X(k) = (1-p)^k p, \text{ para } k = 0, 1, \ldots$$

(b) Pruebe que $\frac{1}{\widehat{P_1}}$ es un estimador insesgado de $\frac{1}{p}$. Sugerencia: recuerde que si $Y \sim G(p)$ entonces $E(Y) = \frac{1-p}{p}$

$$L(p|x) = (1-p)^k p$$

$$\ln(L(p|x)) = x\ln(1-p) + \ln(p)$$

$$\frac{L'(p|x)}{L(p|x)} = x\frac{1}{1-p}\cdot -1 + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{-x}{1-p} + \frac{1}{p} = 0$$

$$= \frac{1}{p} = \frac{x}{1-p}$$

$$= 1-p = xp$$

$$1 = xp + p$$

$$1 = p(x+1)$$

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{\hat{p}_1} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1$$

$$E(x) = E(x) + 1$$

$$\frac{1-p}{p} + 1 = \boxed{\frac{1}{p}}$$

10. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim U\left[0,a\right]$, donde a es un parámetro desconocido. Es decir

$$f_X\left(k\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & si \quad x \in [0,a] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dada una muestra aleatoria de X : $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, demuestre que $A = 2\overline{X}$ es un estimador insesgado de a.

Se busca probar $E(A) = a$

$X \sim U(0,a) \qquad E(x) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+a}{2} = \dfrac{a}{2}$

$u = \dfrac{a}{2} \rightarrow \overline{X}$

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	$\overline{X}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}$

$$E(\overline{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cancel{n}$$

$$= \boxed{\frac{a}{2}}$$

11. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim Gamma\,(3,\beta)$ es decir

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x/\beta}}{2\beta^3} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde β es un parámetro desconocido.

(b) Pruebe que $\widehat{\beta}$ es un estimador insesgado de β. Sugerencia: recuerde que si $X \sim Gamma\,(\alpha,\beta)$ entonces $E(X) = \alpha\beta$.

$X \sim Gamma(3, \beta)$

$E(x) = \alpha\beta = 3\beta$

$$L(\beta|x) = \frac{x^2 \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{2\beta^3}$$

$$\ln(L(\beta|x)) = \ln\left(\frac{x^2 \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{2\beta^3}\right)$$

$$= 2\ln(x) - \frac{x}{\beta} - \ln(2) - 3\ln(\beta)$$

$$\frac{L'(\beta|x)}{L(\beta|x)} = \frac{x}{\beta^2} - \frac{3}{\beta} = 0$$

$$x - 3\beta = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{x}{3}$$

$$E(\hat{\beta}) = \frac{1}{3}E(x) \qquad E(x) = \alpha\beta = 3\beta$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{3}\beta$$

$$= \beta$$

$\boxed{\therefore \text{ Queda demostrado}}$

16. Considere $\widehat{P}$ y $\widehat{Q}$ dos estimadores insesgados independientes de un cierto parámetro θ con varianzas $a\sigma^2$ y $b\sigma^2$, con a y b constantes reales positivas, respectivamente. Considere el estimador $\widehat{R} = t\,\widehat{P} + (1-t)\,\widehat{Q}$,con $t \in [0,1]$.

(b) Calcule el valor de t de modo que $\widehat{R}$ tenga la menor varianza.

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{R}) &= Var(t\hat{P} + (1-t)\hat{Q}) \\
&= t^2 Var(\hat{P}) + (1-t)^2 Var(\hat{Q}) \\
&= t^2 a \sigma^2 + (1-t)^2 b \sigma^2 \\
&= \sigma^2 (a t^2 + b(1-t)^2
\end{aligned}
$$

$$f(t) = a t^2 + b(1-t)^2$$

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 2at + 2b(1-t) \cdot -1 \\
&= 2at - 2b(1-t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2at - 2b(1-t) &= 0 \\
2(at - b(1-t) &= 0 \\
at - b(1-t) &= 0 \\
at - b - bt &= 0 \\
t(a-b) &= b
\end{aligned}
$$

$$\boxed{t = \frac{b}{a-b}}$$

Pagina 4 de este pdf

Pagina 6 de este PDF

2. Realizar los ejercicios 1, 3, 9, 15b, 16b, 17, 18b de la sección II.3.3 del libro (pág. 79-83)

Pagina 5 de este PDF

Pagina 7 de este PDF

3.3 Ejercicios

1. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(5\theta + 5, 9), \quad Y \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro θ de una determinada población:

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{X - Y}{5}, \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{5}$$

¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ? Justifique.

$R/$ Es mejor $\widehat{\theta}_1$.

Insesgados?

$$X \sim N(\underbrace{5\theta+5}_{\mu}, \underbrace{9}_{\sigma^2})$$

$$Y \sim B(\underbrace{20}_{n}, \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{p})$$

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{E(x) - E(Y)}{5}$$

$$= \frac{5\theta + 5 - 20 \cdot \frac{1}{4}}{5} = \frac{5\theta}{\cancel{5}} = \theta \quad \therefore \text{Es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{E(x) - E(Y)}{5}$$

$$= \frac{5\theta + 5 + 20 \cdot \frac{1}{4}}{5} = \frac{5\theta + 10}{5} = \frac{\cancel{5}(\theta + 2)}{\cancel{5}}$$

$$= \theta + 2$$

$\therefore$ Es sesgado

$R/$ $\hat{\theta}_1$ es mejor

3. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N\left(5\theta, \overset{\sim\,\sigma^2}{9}\right), \quad Y \sim N\left(6\theta, \overset{\sim\,\sigma^2}{9.2}\right)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro θ de una determinada población:

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{X}{5}, \qquad \widehat{\theta}_2 = Y - X, \qquad \widehat{\theta}_3 = \frac{X+Y}{10}$$

(a) Determine si cada uno de estos estimadores es insesgado o no.

$R/$ $\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ son insesgados

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{E(x)}{5} = \frac{5\theta}{5} = \theta \quad \therefore \ \hat{\theta}_1 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(Y) - E(x) = 6\theta - 5\theta = \theta \quad \therefore \ \hat{\theta}_1 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_3) = \frac{E(x) + E(Y)}{5} = \frac{5\theta - 6\theta}{5} = \frac{11}{5}\theta$$

$\therefore$ $\hat{\theta}_3$ es sesgado

$$\boxed{R/ \ \hat{\theta}_1 \ y \ \hat{\theta}_2 \ \text{son insesgados}}$$

(b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ? Justifique su respuesta.

$R/$ Es mejor $\widehat{\theta}_1$

$$\eta = \frac{Var(\theta_1)}{Var(\theta_2)}$$

$$= \frac{Var(\frac{x}{5})}{Var(Y - x)}$$

$$= \frac{\frac{9}{25}}{9.2 + 9} = \frac{9}{455} < 1$$

$\therefore$ $\boxed{\hat{\theta}_1 \text{ tiene menor varianza que } \hat{\theta}_2\text{, entonces es mejor}}$

9. Considere la variable aleatoria X con media poblacional μ y variancia σ^2. Dada una muestra aleatoria de esta población de tamaño $n > 1$: $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$, considere los siguientes estadísticos de σ^2:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} \quad y \quad S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}$$

(a) Exprese S_2^2 en términos de S_1^2 y de n.

$$R/ \quad S_2^2 = \frac{n-1}{n} S_1^2$$

En este tipo de estimaciones el problema es que no se puede medir el error de estimación; sin embargo, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, se espera que mejor sea la estimación.

De acuerdo con lo estudiado en el primer capítulo, dada una muestra observada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de una muestra aleatoria M se tienen las siguientes estimaciones puntuales de los respectivos parámetros:

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	$\overline{X}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
σ^2	S^2	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
σ	S	$s = \sqrt{s^2}$
p	$\widehat{P}$	$\widehat{p} = \frac{b}{n}$, b es el número de éxitos en la muestra

Tienen en comun el numerador

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$, despejando

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = S_1^2 (n-1)$$

Sustituyendo en S_2^2

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\boxed{S_2^2 = \frac{n-1}{n} S_1^2}$$