Examen Parcial II
Extraordinario

22 de octubre 2018

Instrucciones:

- Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas.
- Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen.
- No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
- No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.
- El examen consta de **7 preguntas** con un total de **32 puntos**.
- Dispone de **2 horas y 30 minutos** para realizar el examen.

#1 Hallar $z \in \mathbb{C}$ y expresarlo en su forma rectangular, tal que z satisface la ecuación

(4 puntos)

$$\overline{\pi i z} = \text{Ln}\,(-e)$$

Solución

$\overline{\pi i z} = \ln(-e)$

$$\Rightarrow \quad -\pi i \bar{z} = \ln(e \cdot cis\pi)$$

$$\Rightarrow \quad -\pi i \bar{z} = \ln(e) + \ln(e^{\pi i})$$

$$\Rightarrow \quad \bar{z} = \frac{1 + \pi i}{-\pi i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{z} = \frac{i - \pi}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{-i - \pi}{\pi}$$

#2 Determine la forma polar de todos los números complejos w que cumplen, simultáneamente, las dos condiciones siguientes: ***(5 puntos)***

$$\begin{cases} \operatorname{Arg}(w) &= \operatorname{Arg}\left[\dfrac{(-1+i)^5}{\sqrt{3}-i}\right] \\ \\ |w| &= \left|\overline{(3-i)\cdot\overline{2i-1}}\right| \end{cases}$$

Solución

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}\left(\frac{(-1+i)^5}{\sqrt{3}-i}\right)$$

$$(-1+i)^5 = \left[\sqrt{2}cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^5 = (\sqrt{2})^5 cis\left(\frac{15\pi}{4}\right)$$

$$r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \pi + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sqrt{3}-i = 2cis(\tfrac{-\pi}{6})$$

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{6}$$

$$\frac{(\sqrt{2})^5 cis\left(\dfrac{15\pi}{4}\right)}{2cis\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{47\pi}{12}\right)$$

$$\operatorname{Arg}\left(2\sqrt{2}cis\left(\frac{47\pi}{12}\right)\right) = \frac{-\pi}{12}$$

$$|z| = \left|\overline{(3-i)\cdot\overline{(2i-1)}}\right| = |(3+i)(2i-1)| = |6i-3-2-i|$$

$$= |5i-5| = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$R/z = 5\sqrt{2}cis\left(\frac{-\pi}{12}\right)$$

#3 Resuelva el siguiente sistema, con incógnitas $z, w \in \mathbb{C}$: ***(5 puntos)***

$$\begin{cases} 5z+(3-2i)\,w &= \operatorname{Im}\left(2\,e^{\frac{-\pi}{2}i}\right) \\ \\ \overline{(\overline{zi}+3i)\cdot 5i} - iw &= 3i-17 \end{cases}$$

Solución

$$5z+(3-2i)w = \operatorname{Im}\left(2e^{\dfrac{-\pi}{2}i}\right)$$

Analicemos $\text{Im}\left(2e^{\frac{-\pi}{2}i}\right) = \text{Im}\left(2cis\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \text{Im}(-2i) = -2$

$\therefore 5z + (3-2i)w = -2$

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\overline{zi}+3i)\cdot 5i} - iw = 3i - 17\\
\Rightarrow\ &(zi-3i)\cdot -5i - iw = 3i-17\\
\Rightarrow\ &5z - 15 - iw = 3i - 17\\
\Rightarrow\ &5z = 3i - 2 + iw\\
\Rightarrow\ &z = \frac{3i-2+iw}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5z + (3-2i)w &= -2\\
3i - 2 + iw + (3-2i)w &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ &(3-i)w = -3i\\
\Rightarrow\ &w = \frac{-3i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}\\
\Rightarrow\ &w = \frac{-9i+3}{9+1} = \frac{-9i+3}{10}
\end{aligned}
$$

$$z = \frac{3i - 2 + i(\frac{-9i+3}{10})}{5}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ &z = \frac{3i - 2 + \frac{9}{10} + \frac{3}{10}i}{5}\\
\Rightarrow\ &z = \frac{\frac{33}{10}i - \frac{11}{10}}{5}\\
\Rightarrow\ &z = \frac{33}{50}i - \frac{11}{50}
\end{aligned}
$$

#4 Sean $a \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$. Si se sabe que $AX^T + A = (2B)^T + 2X^T$, determine en forma explícita la matriz X que satisface dicha ecuación (usando únicamente álgebra matricial y sin resolver sistema de ecuaciones alguno).

(5 puntos)

Solución

$$AX^T + A = (2B)^T + 2X^T$$
$$AX^T - 2X^T = 2B^T - A$$
$$(A-2I)X^T = 2B^T - A$$
$$X^T = (A-2I)^{-1}\left(2B^T - A\right)$$
$$X = \left[(A-2I)^{-1}(2B^T - A)\right]^T$$

Luego:

- $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $2B^T - A = \begin{pmatrix} 2a-3 & 0 & -a-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2a-2 \end{pmatrix}$
- $(A-2I)^{-1}(2B^T - A) = \begin{pmatrix} 2a-3 & 0 & a^2+2a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2a-2 \end{pmatrix}$

Por lo tanto $X = \begin{pmatrix} 2a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2+2a & a & 2a-2 \end{pmatrix}$.

#5 Usando el método de Gauss–Jordan, determine todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para que el sistema

$$\begin{cases} x - by = 0 \\ ax + by = b \end{cases}$$

tenga infinito número de soluciones, tenga solución única, o no tenga solución, respectivamente. Indique el conjunto solución en cada caso. ***(5 puntos)***

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ a & b & b \end{pmatrix} \xrightarrow{-af_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & ab+b & b \end{pmatrix}$$

Si $ab + b \neq 0$ entonces el sistema tiene única solución. En efecto

$$\xrightarrow{\frac{1}{ab+b}f_2} \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{bf_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a+1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

Si $b = 0$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el sistema tiene infinitas soluciones.

Si $a = -1$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

el sistema no tiene solución.

#6 Demuestre usando inducción matemática que ***(4 puntos)***

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1$$

Solución:

Sea $P(n) : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Paso 1: ¿Es $P(1)$ verdadera?

$$P(1) : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(1)$ es verdadera.

Paso 2:

- *Hipótesis de inducción:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Tesis:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por e principio de inducción $P(n)$ es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

#7 Se dice que una matriz A es *involutiva* si $A^2 = I$ y se dice que A es *idempotente* si $A^2 = A$. Si se tiene que B es alguna matriz idempotente, demuestre que C es involutiva, donde

$$C + I = 2B$$

(4 puntos)

Solución

Se debe probar que $C^2 = I$, entonces

$$\begin{aligned} C^2 &= (2B - I)^2 \\ &= 4B^2 - 4B + I \\ &= 4B - 4B + I \\ &= I \end{aligned}$$