

Ejemplo 2.3 Considera la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$, definida de manera recursiva:

$$a_0 = 5, \quad a_n = 2a_{n-1} + 3 \quad \text{para } n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

a) Determine a_3 .

b) Utilizando inducción, demuestre que $a_n = 2^{n+3} - 3$ para $n \geq 0$.

a) $a_0 = 5$

$$a_1 = 2(5) + 3 = 13$$

$$a_2 = 2(13) + 3 = 29$$

$$a_3 = 2(29) + 3 = 61$$

b) $t=0 \quad a_0 = 2^0 - 3$

$$5 = 5$$

$t=p \quad a_p = 2^{p+3} - 3$, Hi
R

$$t=p+1 \quad a_{p+1} = 2^{p+4} - 3, \text{ HQD}$$

De m0

$$a_n = 2a_{n-1} + 3$$

Def

Recursiva

$$a_{p+1} = 2 \cdot a_{p+1-1} + 3$$

$$= 2 \cdot a_p + 3$$

$$= 2(2^{p+3} - 3) + 3$$

$$2^{p+4} - 6 + 3$$

$$\boxed{2^{p+4} - 3}$$

4. Para cada sucesión recursiva dada, se proporciona una fórmula explícita. Se debe demostrar que la fórmula es correcta usando inducción matemática.

- a) Forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$
 Fórmula explícita: $a_n = 2^n - 1, \quad n \geq 1$

$$t=1 \quad a_1 = 2^1 - 1 \rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$t=p \quad a_p = 2^p - 1, \text{ Hi}$$

$$t=p+1 \quad a_{p+1} = 2^{p+1} - 1, \text{ HQD}$$

De m0

$$\text{Forma recursiva: } a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 2a_p + 1 \\
 &= 2(2^p - 1) + 1, \text{ H:} \\
 &= 2^{p+1} - 2 + 1 \\
 &\boxed{2^{p+1} - 1} //
 \end{aligned}$$

- b) ■ Forma recursiva: $b_n = b_{n-1} + 3$, $b_1 = 2$
 ■ Fórmula explícita: $b_n = 3n - 1$, $n \geq 1$

$$k=1 \quad b_1 = 3(1) - 1 \rightarrow 2 = 2 \checkmark$$

$$k=p \quad b_p = 3p - 1, \text{ H:}$$

$$k=p+1 \quad b_{p+1} = 3(p+1) - 1, \text{ H QD}$$

De modo Forma recursiva: $b_n = b_{n-1} + 3$,

$$b_{p+1} = b_{p+1-1} + 3$$

$$b_{p+1} = b_p - 1 + 3$$

$$3p - 1 + 3, \text{ H:}$$

$$\boxed{3p+2} //$$

- c) ■ Forma recursiva: $c_n = c_{n-1} + n$, $c_1 = 1$
 ■ Fórmula explícita: $c_n = \frac{n^2 + n}{2}$, $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 k=1 \quad c_1 &= \frac{1^2 + 1}{2} \rightarrow 1 = 1 \checkmark \\
 k=p \quad c_p &= \frac{p^2 + p}{2}, \text{ H:} \\
 k=p+1 \quad c_{p+1} &= \frac{(p+1)^2 + (p+1)}{2}, \text{ H QD} \quad \curvearrowleft \quad \frac{p^2 + 2p + 1 + p + 1}{2} \\
 &= \frac{p^2 + 3p + 2}{2}
 \end{aligned}$$

De modo Forma recursiva: $c_n = c_{n-1} + n$,

$$c_{p+1} = c_{p+1-1} + p+1$$

$$= c_p + p+1$$

$$= \frac{p^2 + p}{2} + p + 1, \text{ H:}$$

$$= \frac{p^2 + p + 2p + 2}{2}$$

$$= \frac{p^2 + 3p + 2}{2}$$

$$\boxed{\frac{(p+1)^2 + p+1}{2}} //$$

- d) ■ Forma recursiva: $d_n = n \cdot d_{n-1}$, $d_1 = 1$

- Fórmula explícita: $d_n = n!$, $n \geq 1$

$$k=1 \quad d_1 = 1! \rightarrow 1=1$$

$$k=p \quad d_p = p!, \text{ H:}$$

$$k=p+1 \quad d_{p+1} = (p+1)!$$

$\boxed{\text{D}_{\text{emo}}}$ Forma recursiva: $d_n = n \cdot d_{n-1}$,

$$d_{p+1} = (p+1) \cdot d_{p+1-1}$$

$$= (p+1) \cdot d_p$$

$$= (p+1) \cdot p!, \text{ H:}$$

$$\boxed{(p+1)!} //$$

- e) ■ Forma recursiva: $e_n = e_{n-1} + n!$, $e_1 = 1$

- Fórmula explícita: $e_n = \sum_{k=1}^n k!$, $n \geq 1$

$$k=1 \quad e_1 = 1! \rightarrow 1=1$$

$$k=p \quad e_p = \sum_{k=1}^p k!, \text{ H:}$$

$$k=p \quad e_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k! \quad (\text{H Q!}) \quad \sum_{k=1}^p k! + (p+1)!$$

$\boxed{\text{D}_{\text{emo}}}$ Forma recursiva: $e_n = e_{n-1} + n!$,

$$e_{p+1} = e_{p+1-1} + (p+1)!$$

$$= e_p + (p+1)!$$

$$\sum_{k=1}^p k! + (p+1)!$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p+1} k!} //$$

- f) ■ Forma recursiva: $f_n = \frac{f_{n-1}}{n+1}$, $f_0 = \int_0^1 dx$

- Fórmula explícita: $f_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$, $n \geq 0$

$$(n+1)!$$

$$k=0 \quad f_0 = \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\int_0^1 dx -> \int dx = x -> x \Big|_0^1 -> 1 - 0 = 1$$

$$1 = \frac{1}{(0+1)!} = 1 = 1 \checkmark$$

$$k=p \quad f_p = \frac{1}{(p+1)!} (, H)$$

$$k=p+1 \quad f_{p+1} = \frac{1}{(p+2)!}, H(0)$$

Demostrar Forma recursiva: $f_n = \frac{f_{n-1}}{n+1},$

$$f_{p+1} = \frac{f_{p+1-1}}{(p+1)+1}$$

$$= \frac{f_p}{p+2}$$

$$= \frac{\frac{1}{(p+1)!}}{\frac{(p+2)}{1}}$$

$$= \frac{1}{(p+2)(p+1)!}$$

$$= \boxed{\frac{1}{(p+2)!}} //$$

6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n = \frac{(-1)^n 3^n n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$

a) Calcule los términos a_3, a_5 y $a_{n+1}.$

b) Determine y simplifique $\frac{a_{n+1}}{a_n}.$

a) $a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot 3^3 \cdot 3!}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{27}{8}$

$$a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot 3^5 \cdot 5!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = -\frac{243}{32}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+2)}$$

Ejemplo 2.2 Considere la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, definida por $a_n = \frac{b_{n+1}}{6 \cdot b_n}$, con $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$. Calcule a_3 .

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = 5$$

$$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

y puede ser
que b_2 entonces
es b_2

$$a_n = \frac{b_{n+1}}{6 \cdot b_n}$$

$$a_3 = \frac{b_3}{6 \cdot b_3}$$

Reemplazando

$$= \frac{b_4}{6 \cdot b_3}$$

$$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

$$b_1 + b_2 = b_2 + b_3 \quad b_2 = 2$$

$$b_3 = b_1 + b_2 \quad b_4 = b_2 + b_3$$

$$= 2 + 5 = 7$$

$$= 5 + 7 = 12$$

$$\frac{b_4}{6 \cdot b_3}$$

$$= \frac{12}{6 \cdot 7} = \boxed{\frac{2}{7}}$$