II SEMESTRE, 2023
TIEMPO: 2 HORAS Y 10 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 27 pts

Segundo Examen Parcial

Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **6** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene dos horas y diez minutos para contestar las preguntas del examen.
3. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
4. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**4 puntos**] Sea $\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Determine si el conjunto $\{u + 2v - w, -u + v + w, 2u + v - 2w\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

   Solución:

$$
\begin{aligned}
& \alpha(u + 2v - w) + \beta(-u + v + w) + \gamma(2u + v - 2w) = 0 \\
\Longrightarrow\ & (\alpha - \beta + 2\gamma)u + (2\alpha + \beta + \gamma)v + (-\alpha + \beta - 2\gamma)w = 0 \\
\Longrightarrow\ & \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{Pues } \{u, v, w\} \text{ es li.}
\end{aligned}
$$

   Que tiene infinitas soluciones pues

$$
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0
$$

   Por lo tanto el conjunto $\{u + 2v - w, -u + v + w, 2u + v - 2w\}$ es linealmente dependiente.

2. [**5 puntos**] Sean u y w vectores en $\mathbb{R}^3$. Si $u = (a, 2a, 1)$ con $a \in \mathbb{R}$, determine los vectores u que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

- u y w forman un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$
- $\text{Proy}_w u = 2w$
- $||w|| = \sqrt{3}$

Solución:

- $\cos(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{u \cdot w}{||u|| \cdot ||w||}$
  $\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{u \cdot w}{||u|| \cdot \sqrt{3}}$
  $\rightarrow ||u|| = \dfrac{2u \cdot w}{3}$

- $\text{Proy}_w u = 2w$
  $\rightarrow \dfrac{u \cdot w}{||w||^2} w = 2w$
  $\rightarrow \dfrac{u \cdot w}{||w||^2} = 2$
  $\rightarrow \dfrac{u \cdot w}{3} = 2$
  $\rightarrow u \cdot w = 6$

- Se tiene que: $||u|| = \dfrac{2u \cdot w}{3}$ y $u \cdot w = 6$, entonces $||u|| = 4$. Ahora:
  $||u|| = 4 \rightarrow \sqrt{a^2 + 4a^2 + 1} = 4 \rightarrow \sqrt{5a^2 + 1} = 4 \rightarrow 5a^2 + 1 = 16 \rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

Por lo tanto, $u = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1)$ o $u = (-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1)$.

3. [**5 puntos**] Considere el punto $P = (1, -1, 1)$ y la recta $L : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Determine una ecuación vectorial de la recta R, que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

   - Interseca perpendicularmente a la recta L.
   - Contiene el punto P

   Solución:

   Sea la recta por determinar $R : (x, y, z) = (1, -1, 1) + V_R.s$ con $s \in \mathbb{R}$ y tome $Q = (x_0, y_0, z_0)$ el punto de intersección de la recta R con recta L. De esta forma entonces se cumple que

$$\begin{cases} x_0 = 1 - t \\ y_0 = -1 - 2t \\ z_0 = 2 + t \end{cases}$$

   pues (x_0, y_0, z_0) está en la recta L. Un vector director (V_R) de la recta R buscada puede ser $v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_0 - 1, y_0 + 1, z_0 - 1) = (1 - t - 1, -1 - 2t + 1, 2 + t - 1) = (-t, -2t, 1 + t)$

Además, como R interseca perpendicularmente a l, entonces el vector director de L y de R son ortogonales, es decir,

$$(-t, -2t, 1+t) \cdot (-1, -2, 1) = 0,$$

de donde

$$\begin{array}{rcl} t + 4t + 1 + t & = & 0 \\ & \Rightarrow & t = -\dfrac{1}{6} \end{array}$$

Por lo tanto, $\left\{ \begin{array}{c} x_0 = 1 - -\dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{6} \\ y_0 = -1 - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{2}{3} \\ z_0 = 2 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{6} \end{array} \right.$ y el vector director es

$$v = (-t, -2t, 1+t) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

Respuesta: EL punto de intersección es $\left(\dfrac{7}{6}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{11}{6}\right)$ y una ecuación vectorial de la recta R viene dada por:

$$(x, y, z) = ((1, -1, 1)) + s\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

4. [**5 puntos**] Determine una ecuación normal del plano π que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

   - Es perpendicular al plano $\beta : -2x + y - z - 1 = 0$.
   - Es paralelo a la recta $L : 1 - x = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$.
   - Contiene el punto $P(2, -3, 1)$.

   Solución:

   De condición a) se tiene vector normal del plano π es perpendicular al vector normal del plano β,es decir, $n_\pi \perp n_\beta$, por otro lado de la condición b), el vector normal del plano π es perpendicular al vector director de recta L, es decir, $n_\pi \perp v_L$. Por tanto, vector normal del plano π viene dado por

$$n_\pi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5e_1 + 7e_2 - 3e_3 = (5, 7, -3)$$

   Y dada que punto $P = (2, -3, 1) \in \pi$, se tendría que una ecuación normal del plano π corresponde a

$$\pi \colon 5x + 7y - 3z = -14$$

5. [**5 puntos**] Determine las ecuaciones parmétricas de recta L que cumple, simultáneamente las siguientes condiciones:

- Es paralela a la recta R que contiene los puntos $A = (2, 0, 1)$ y $B = (-1, 3, 1)$.
- Contiene el punto de intersección entre el plano $\pi : 2x - y + z = -5$ y la recta $L_1 : x = \dfrac{2-y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Solución:

Dado que rectas $L \parallel R$ y puntos $A = (2, 0, 1),\ B = (-1, 3, 1) \in R$, se cumple la siguiente relación entre los vectores directores de las rectas L y R, es decir, $v_R = \overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0) = v_L$.

Sea P punto de interscción entre plano π y la recta L_1, al escribir la recta L_1 en su forma paramétrica y luego sustituir en la ecuación dle plano π se tendría parámetro asociado es $t = \dfrac{-2}{3}$, por lo que $P = \left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. De esta forma la ecuación simétrica de la recta L, viene dada por

$$L\colon \begin{cases} x = \dfrac{-2}{3} - 3s \\[2ex] y = \dfrac{10}{3} + 3s \quad , s \in \mathbb{R} \\[2ex] z = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

.

6. [**3 puntos**] Considere la recta $L\colon \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 5 - t \end{cases}$ y el plano $\pi\colon 3x - 2y + 4z = 5$.

Sin hacer uso de la fórmula directa que calcula la distancia de una recta a un plano, es decir, $d(L, \pi) = \dfrac{\mid ax + by + cz - d \mid}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, plantee y determine la distancia entre la recta L y el plano π.

Solución:

Note producto punto entre vector normal del plano π y el vector director de recta L es igual a 0, lo que indica $n_{\perp} v_L$, de donde entonces plano π y recta L cumplen ser paralelos entre sí, luego si tomamos $P = (3, -1, 5) \in L$, se tendría que $d(L, \pi) = d(P, \pi)$.
Sea $x = 1, y = 0$, donde al sustituir en plano π se tiene $z = \dfrac{1}{2}$, así de esta manera un punto del plano π viene dado por $A = (1, 0, \frac{1}{2})$, por tanto $d(P, \pi) = || \; Proy_{n_\pi} \overrightarrow{AP} \; || =$
$|| \; \dfrac{(2, -1, \frac{9}{2})(3, -2, 4)}{9 + 4 + 16}(3, -2, 4) \; || = || \left(\dfrac{78}{29}, \dfrac{-52}{29}, \dfrac{104}{29}\right) || \cdots \approx 4,82ul$