

### III Examen Parcial (Extraordinario)

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones en que se utilizó corrector no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Si  $X$  es una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Determine el valor de  $k$ . (5 pts)

2. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x+25} & \text{si } x \geq 5 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Determine la función generadora de momentos de  $X$ . (5 pts)

3. Las ganancias diarias que recibe la soda EL COMELON está dado por una *v.a.c.*  $X$ , en miles de colones, donde  $E(X) = 30$  y  $Var(X) = 450$ . Determine, aproximadamente, la probabilidad de que la ganancia mensual (en 30 días) sea superior a un millón de colones. (5 pts)
4. En el país C, el año pasado se inauguró la esperada Autopista de las Brumas. Sin embargo, desde su inauguración varios vehículos han sufrido accidentes de diferentes tipos, pero la probabilidad  $\mathbf{p}$  de que un vehículo sufra un accidente en la autopista se desconoce. Ante esta situación un estudiante ha estimado que, de 1000 vehículos, la probabilidad de que al menos 50 sufran algún accidente en la autopista es de 20%. Con base en esta estimación, halle aproximadamente la probabilidad  $\mathbf{p}$  de que un vehículo sufra un accidente en esta autopista. (7 pts)
5. Se ha determinado que el tiempo en horas ( $X$ ) que semanalmente requiere una sitio WEB para actualizarse sigue una distribución gamma con media de 12 horas y desviación estándar de  $\sqrt{48}$  horas.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que en alguna semana el tiempo de actualización del sitio sea mayor a 14 horas? (3 pts)
- b) Si el costo de actualización semanal, en dólares, esta dado por  $C = 30X + X^2$ , halle el costo semanal esperado por la actualización del sitio. (3 pts)
- c) Determine aproximadamente la probabilidad de que en un año (52 semanas), el tiempo promedio semanal de actualización del sitio sea inferior a 15 horas. (5 pts)

6. Doña Sonia tiene un pequeña tienda de reparación de ropa cuya ganancia diaria sigue una distribución normal con un promedio de 50 mil colones y una desviación de 5 mil colones. Doña Sonia requiere de 800 mil colones para remodelar su tienda. Suponiendo que ahorrará toda la ganancia obtenida en la tienda para su remodelación, ¿cuántos días necesita para obtener por lo menos el dinero de la remodelación con una probabilidad superior al 90 %? (7 pts)
7. Sea  $X$  una v.a.c. con media  $\mu$ , varianza  $\sigma^2$ , y función generadora de momentos  $m_X(t)$ . Sea  $Y$  otra v.a.c. tal que  $Y = aX + b$ , y función generadora de momentos  $m_Y(t) = e^{bt}m_X(at)$ . Utilice  $m_Y(t)$  para encontrar la media y la varianza de  $Y$ . (5 pts)
8. Sea  $X$  una v.a.c. tal que  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Muestre que: (5 pts)

$$P(X \geq t + h | X \geq t) = P(X \geq h).$$