Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	08
Fecha	Lunes 16 de setiembre del 2024 (semana 09)
Contenidos	a) Teorema de DeMoivre (potencias y raíces)
	b) Exponentes y logaritmos complejos
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Operaciones con números complejos en forma polar

Si α y β son dos ángulos cualquiera, entonces son válidas las siguientes identidades:

1. **Multiplicación:** $\operatorname{cis}(\alpha)\cdot\operatorname{cis}(\beta)=\operatorname{cis}(\alpha+\beta)$
2. **División:** $\dfrac{\operatorname{cis}(\alpha)}{\operatorname{cis}(\beta)}=\operatorname{cis}(\alpha-\beta)$

Propiedades de un número complejo en forma polar

Considere los números complejos z y w dados en forma polar por: $z=r_1\cdot\operatorname{cis}(\theta_1)$ y $w=r_2\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)$, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $z\cdot w=[r_1\cdot\operatorname{cis}(\theta_1)]\cdot[r_2\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)]=r_1\cdot r_2[\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)]$
2. $z\div w=\dfrac{r_1\cdot\operatorname{cis}(\theta_1)}{r_2\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)]$

Potencias enteras de un número complejo

Las potencias de base compleja y exponente entero es una de las operaciones que son más complicadas si se utiliza la forma rectangular, sin embargo, usando la forma polar se realiza con mucha facilidad. El siguiente teorema brinda una fórmula simple que permitirá elevar cualquier número complejo no nulo a una potencia entera.

Teorema de DeMoivre

Sea $z=r\cdot\operatorname{cis}(\theta)$ un número complejo cualquiera no nulo y sea $n\in\mathbb{Z}$, entonces se cumple que:

$$\boxed{z^n=r^n\cdot\operatorname{cis}(n\cdot\theta)}$$

$$z = r\,\operatorname{cis}(\theta)$$

$$\Rightarrow z^n = (r\,\operatorname{cis}(\theta))^n$$

$$\Rightarrow z^n = r^n\cdot[\operatorname{cis}(\theta)]^n$$

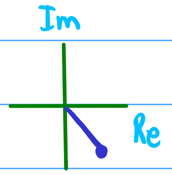
$$\Rightarrow z^n = r^n\cdot\operatorname{cis}(n\cdot\theta)$$

Ejercicio: Calcule y represente en forma rectangular el resultado de las siguientes operaciones:

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \_\_$$

a) $i^3(1-i)^{-4}$ R/ $\frac{i}{4}$



Sea $z = 1 - i$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Así $z = \sqrt{2}\,\text{Cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Ahora $i^3 \cdot \dfrac{1}{(1-i)^4}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Aparte:

$$(1-i)^4 = \left[\sqrt{2}\,\text{Cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$$

$$= (\sqrt{2})^4 \cdot \left[\text{Cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$$

$$= 4 \cdot \text{Cis}\left(4 \cdot -\frac{\pi}{4}\right)$$

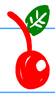
$$= 4\,\text{Cis}(-\pi)$$

$$= 4\left[\cancelto{-1}{\text{Cos}(-\pi)} + i\,\cancelto{0}{\text{Sen}(-\pi)}\right]$$

$$= 4[-1 + i \cdot 0]$$

$$= -4$$

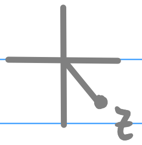
$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i$$
$$= -i$$
$$i^4 = 1$$

Retomando  se tiene que:

$$i^3 \cdot \frac{1}{(1-i)^4} = -i \cdot \frac{1}{-4}$$

$$= \frac{1}{4} i$$

b) $\dfrac{(1-i)^6 \cdot (1-i\sqrt{3})^3}{(2i-2\sqrt{3})^7}$



Sea $z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{2}$

Sea $w = 1 - i\sqrt{3}$

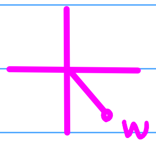
$|w| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$

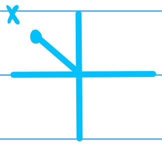
$= 2$

Sea $x = 2i - 2\sqrt{3}$

$|x| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2}$

$= 4$





$\operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\dfrac{-1}{1}\right)$

$= -\dfrac{\pi}{4}$

$\operatorname{Arg}(w) = \arctan\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\right)$

$= -\dfrac{\pi}{3}$

$\operatorname{Arg}(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{-2\sqrt{3}}\right) + \pi$

$= \dfrac{5\pi}{6}$

$z = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$w = 2 \operatorname{Cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x = 4 \operatorname{Cis}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Luego $\dfrac{(1-i)^6(1-i\sqrt{3})^3}{(2i-2\sqrt{3})^7} = \dfrac{\left[\sqrt{2} \cdot \operatorname{Cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^6 \cdot \left[2 \operatorname{Cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^3}{\left[4 \operatorname{Cis}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]^7}$

$$= \frac{(\sqrt{2})^6 \operatorname{Cis}\left(6 \cdot -\dfrac{\pi}{4}\right) \cdot 2^3 \cdot \operatorname{Cis}\left(\cancel{3} \cdot -\dfrac{\pi}{\cancel{3}}\right)}{4^7 \cdot \operatorname{Cis}\left(7 \cdot \dfrac{5\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{8 \operatorname{Cis}\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right) \cdot 8 \operatorname{Cis}(-\pi)}{16384 \cdot \operatorname{Cis}\left(\dfrac{35\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{64 \ \text{Cis}\left(\frac{-3\pi}{2} + -\pi\right)}{16384 \cdot \text{Cis}\left(\frac{35\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{64}{16384} \ \text{Cis}\left(\frac{-3\pi}{2} + -\pi - \frac{35\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{256} \ \text{Cis}\left(\frac{-25\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{256}\left[\text{Cos}\overset{\frac{1}{2}}{\left(\frac{-25\pi}{3}\right)} + i \ \text{Sen}\overset{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{-25\pi}{3}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{256}\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{512} - \frac{\sqrt{3}\,i}{512}$$

Raíces de un número complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$. Se dice que w es una raíz $n-$ésima de z, si y solo si, se cumple que $w^n = z$. Dicho de otra, se dice que w es una raíz $n-$ésima de z si y solo si, w es un cero del polinomio $P(x) = x^n - z$ o bien $x^n - z = 0$, donde cada una de las soluciones es una raíz $n-$ésima de z.

Generalización del teorema de DeMoivre

Sea $z = r \cdot \text{cis}(\theta)$ un número complejo arbitrario, entonces $w = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$ es una raíz $n-$ésima de z. En el caso particular de que $\theta = \arg(z)$ entonces a w se le llama **raíz principal** de z.

Fórmula para calcular raíces $n-$ésimas

Sea $z = r \cdot \text{cis}(\theta)$ un número complejo en forma polar, entonces todas las raíces $n-$ésimas de z vienen dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \text{Cis}\left(\frac{1}{n}\left(\theta + 2k\pi\right)\right)$$

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

para θ en radianes.

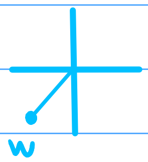
Nota: sea z un número complejo y sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, entonces las raíces $n-$ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen de coordenadas.

Ejercicio #1: Determine la forma rectangular de las raíces cúbicas de $z = -4 - 4i\sqrt{3}$

Como se piden las raíces cúbicas de z, entonces:

$$z = \left(-4 - 4i\sqrt{3}\right)^{1/3}$$

Sea $w = -4 - 4i\sqrt{3}$



$$|w| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} \qquad \operatorname{Arg}(w) = \arctan\left(\frac{-4\sqrt{3}}{-4}\right) - \pi$$

$$= 8 \qquad\qquad = \frac{-2\pi}{3}$$

Ahora $z_K = \sqrt[3]{8} \cdot \operatorname{Cis}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2K\pi\right)\right]$

Para $K=0$

$$z_0 = \sqrt[3]{8} \cdot \operatorname{Cis}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 0\pi\right)\right] \Rightarrow z_0 = 2\operatorname{Cis}\left(\frac{-2\pi}{9}\right)$$

$$\Rightarrow z_0 = 2\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{-2\pi}{9}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{-2\pi}{9}\right)\right]$$

Para $K=1$

$$z_1 = \sqrt[3]{8} \cdot \operatorname{Cis}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 1\pi\right)\right] \Rightarrow z_1 = 2\operatorname{Cis}\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$\Rightarrow z_1 = 2\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right]$$

Para $K=2$

$$z_2 = \sqrt[3]{8} \cdot \operatorname{Cis}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 2\pi\right)\right] \Rightarrow z_2 = 2\operatorname{Cis}\left(\frac{10\pi}{9}\right)$$

$$\Rightarrow z_2 = 2\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right)\right]$$

Ejercicio #2:

Encuentre las raíces cuartas de $z = -128 + 128i\sqrt{3}$.

R/ $z_k = 4\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)$

Forma exponencial de un número complejo en forma rectangular

Sea $z \in \mathbb{C}$, si $z = a + bi$ entonces:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{a+bi} \\ &= e^a \cdot e^{bi} \\ &= e^a \cdot \operatorname{cis}(b) \end{aligned}$$

Forma exponencial de un número complejo en forma polar

Sea $z = r \cdot \operatorname{cis}(\theta)$ un número complejo dado en forma polar tal que $\theta \in \mathbb{R}$ (en radianes), entonces se define la forma exponencial de z como:

$$z = r \cdot e^{\theta \cdot i}$$

Forma logarítmica de un número complejo

Para esto debe darse el concepto de logaritmo principal, el cual viene dado por:

Si $\theta \in]-\pi, \pi]$, entonces se define el logaritmo principal y se denota Ln como la función que cumple que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}[\operatorname{cis}(\theta)] &= \operatorname{Ln}\left(e^{\theta \cdot i}\right) \\ &= \theta \cdot i \end{aligned}$$

Ahora bien, el cálculo del logaritmo principal de un número complejo $z = a + bi$ viene dado por:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z) &= \operatorname{Ln}\left(|z| \cdot \operatorname{cis}[\arg(z)]\right) \\ &= \ln(|z|) + i \cdot \arg(z) \end{aligned}$$

con ln el logaritmo natural usual en $\mathbb{R}$.

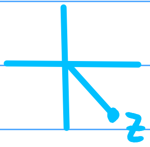
Potencias de un número complejo

Sean z y w dos números complejos arbitrarios con $w \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} w^z &= e^{\operatorname{Ln}(w^z)} \\ &= e^{z \cdot \operatorname{Ln}(w)} \end{aligned}$$

Ejercicio #1: Calcule y exprese en su forma rectangular el número complejo $\text{Ln}(1-\sqrt{3}i) - \frac{\pi}{3}e^{\frac{-\pi}{2}i}$

Sea $z = 1-\sqrt{3}i$



$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \qquad \text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{-\pi}{3} \qquad \text{Así } z = 2\,\text{Cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

Ahora $\text{Ln}(z) = \text{Ln}\left[2\,\text{Cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow \text{Ln}(z) = \text{Ln}(2) + \text{Ln}\left(\text{Cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$

$$= \text{Ln}(2) + \frac{-\pi}{3}\cdot i$$

Sea $w = \frac{-\pi}{2}i \Rightarrow e^w = e^{\frac{-\pi}{2}i}$

$$\Rightarrow e^w = \text{Cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^w = \underbrace{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{0} + i\,\overbrace{\text{Sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right)}^{-1}$$

$$\Rightarrow e^w = -i$$

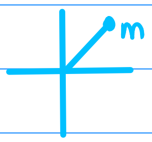
Finalmente $\text{Ln}(1-\sqrt{3}i) - \frac{\pi}{3}\cdot e^{\frac{-\pi}{2}i} = \text{Ln}(2) + \frac{-\pi}{3}\cdot i - \frac{\pi}{3}\cdot -i$

$$= \text{Ln}(2) - \cancel{\frac{\pi}{3}i} + \cancel{\frac{\pi}{3}i}$$

$$= \text{Ln}(2)$$

Ejercicio #2: Determine la forma rectangular del número complejo e^z, donde

$$z = \text{Ln}(1+i) - \text{Ln}(1-i) + 3e^{\pi i}$$

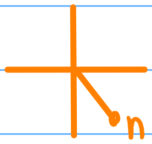


Sea $m = 1+i$

$|m| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\text{Arg}(m) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

Así $m = \sqrt{2}\,\text{Cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$



Sea $n = 1-i$

$|n| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\text{Arg}(n) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Así $n = \sqrt{2}\,\text{Cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$e^{\pi i} = \text{Cis}(\pi) \Rightarrow e^{\pi i} = \cancelto{-1}{\text{Cos}(\pi)} + i\,\cancelto{0}{\text{Sen}(\pi)}$

$= -1$

Finalmente

$$z = \text{Ln}(1+i) - \text{Ln}(1-i) + 3e^{\pi i}$$

$$= \text{Ln}\left(\sqrt{2}\,\text{Cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \text{Ln}\left(\sqrt{2}\,\text{Cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) + 3\cdot -1$$

$$= \text{Ln}(\sqrt{2}) + \text{Ln}\left(\text{Cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left[\text{Ln}(\sqrt{2}) + \text{Ln}\left(\text{Cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right] - 3$$

$$= \cancel{\text{Ln}(\sqrt{2})} + \frac{\pi}{4}i - \cancel{\text{Ln}(\sqrt{2})} - \frac{-\pi}{4}i - 3$$

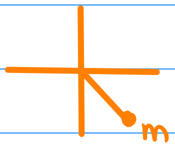
$$= \frac{\pi}{2}i - 3$$

Ejercicio #3: Dados $z = 4 - 4i$ y $w = -\sqrt{3} + 2i$, determine el valor de z^w en forma rectangular.

$$z^w = (4-4i)^{-\sqrt{3}+2i} \Rightarrow z^w = e^{\operatorname{Ln}(4-4i)^{-\sqrt{3}+2i}}$$

$$= e^{(-\sqrt{3}+2i)\cdot \operatorname{Ln}(4-4i)}$$

Sea $m = 4-4i$



$$|m| = \sqrt{4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(m) = \arctan\left(\frac{-4}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Así $m = 4\sqrt{2}\operatorname{Cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Ahora $\operatorname{Ln}(4-4i) = \operatorname{Ln}\left(4\sqrt{2}\operatorname{Cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= \operatorname{Ln}(4\sqrt{2}) + -\frac{\pi}{4}i$$

Retomando se tiene que:

$$e^{(-\sqrt{3}+2i)\cdot\operatorname{Ln}(4-4i)} = e^{(-\sqrt{3}+2i)\cdot\left(\operatorname{Ln}(4\sqrt{2}) + -\frac{\pi}{4}i\right)}$$

$$= e^{-\sqrt{3}\cdot\operatorname{Ln}(4\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{4}i + 2\operatorname{Ln}(4\sqrt{2})i - \frac{\pi}{2}i^2}$$

$$= e^{-\sqrt{3}\cdot\operatorname{Ln}(4\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{4}i + 2\operatorname{Ln}(4\sqrt{2})i + \frac{\pi}{2}}$$

$$= e^{\left(-\sqrt{3}\cdot\operatorname{Ln}(4\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4} + 2\operatorname{Ln}(4\sqrt{2})\right)i}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$= e^{-1,430619 + 4,826085i}$$

$$= e^{-1,430619} \cdot e^{4,826085i}$$

$$= e^{-1,430619} \cdot Cis(4,826085)$$

$$= e^{-1,430619} \cdot [Cos(4,826085) + i\,Sen(4,826085)]$$

$$= e^{-1,430619} \cdot Cos(4,826085) + e^{-1,430619} \cdot i \cdot Sen(4,826085)$$

$$= 0,027133 - 0,237616i$$

Ejercicio #4: Calcule $(1-i)^{2+3i}$ y exprese su resultado en forma rectangular. R/ $2{,}6293 - 1{,}5443i$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Calcule y represente en forma rectangular el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{(2i-1)^4}{(1-i)^6}$ R/ $3+\dfrac{7}{8}i$

b) $\dfrac{(1-i)^{15}}{(2+2i)^5}+\dfrac{(1+3i)^2}{1-i^{459}}$ R/ $-2+7i$

Ejercicio #2: Encuentre las raíces cúbicas de $w=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$. R/ $w_k=\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)$, con $k=0,1,2$

Ejercicio #3:

Si $w\in\mathbb{C}$, obtenga la forma rectangular de w, donde $w+e^i=2\operatorname{Ln}(1-i)$ R/ $[\operatorname{Ln}(2)-\operatorname{cis}(1)]-\dfrac{\pi}{2}i$

Ejercicio #4:

Calcule $(2-i\sqrt{3})^{1-i}$ y exprese su resultado en forma rectangular. R/ $-0{,}149840845-1{,}287240995i$