Análisis de gráficas

Dominio

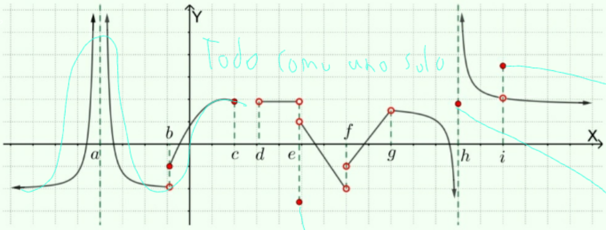
Para obtener el dominio de una función f, observando su gráfica, basta con obtener el conjunto numérico, en donde está dibujada la gráfica, con respecto al eje de las abscisas, para esto se debe leer la gráfica de izquierda a derecha.

Absisas son las x

Ejemplo 41

Considere la siguiente gráfica de una función g y determine el dominio de la función.

Asintota, no toca, tiene un limite



]1,4[Infinitos numeros

{1,4} Solo el 1 y el 4

Punto solo

Solución

Analizando el dominio por intervalos:

$$D_g =]-\infty, a[\cup]a, b[\cup [b, c] \cup]d, e[\cup]e, f[\cup \{e\} \cup]f, g[\cup]g, h[\cup \{h\} \cup]h, i[\cup \{i\} \cup]i, \infty[$$

o bien, realizando operaciones entre conjuntos se abrevia como:

$$D_g =]-\infty, c] \cup]d, \infty[- \{a, f, g\}$$

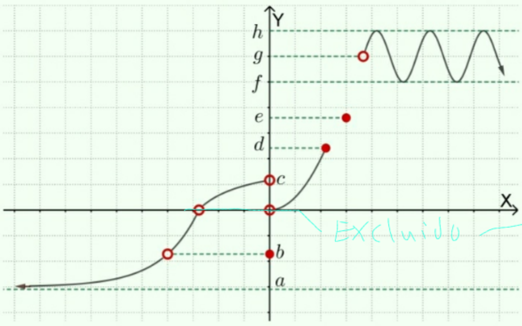
Ámbito

Para obtener el ámbito de una función h, observando su gráfica, basta con obtener el conjunto numérico, en donde está dibujada la gráfica, con respecto al eje de las ordenadas, para esto se debe leer la gráfica de abajo hacia arriba.

Ordenadas = y

Ejemplo 42

Considere la siguiente gráfica de una función h y determine el ámbito de la función.



0 ya que ninguno de los 2 puntos se toma en cuenta

Solución

Analizando el ámbito por intervalos:

$$A_h =]a, b[\cup \{b\} \cup]b, 0[\cup]0, c[\cup]0, d] \cup \{e\} \cup [f, h]$$

utilizando operaciones entre conjuntos también se puede escribir como:

$$A_h =]a, d] \cup [f, h] \cup \{e\} - \{0\}$$

Definición 17 Monotonía (Crecimiento y decrecimiento de funciones)
Sea f una función tal que si $x_1, x_2 \in D_f$ y $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es:

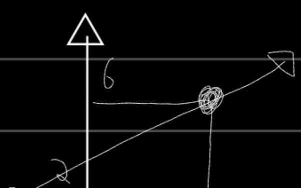
1. **estrictamente creciente** $(f \nearrow)$ *en* $]x_1, x_2[\in D_f$ *si* $f(x_1) < f(x_2)$.
2. **estrictamente decreciente** $(f \searrow)$ *en* $]x_1, x_2[\in D_f$ *si* $f(x_1) > f(x_2)$.
3. **constante** $(f \to)$ *en* $]x_1, x_2[\in D_f$ *si* $f(x_1) = f(x_2)$.

$\boxed{\text{Creciente } f(x_1) < f(x_2)}$

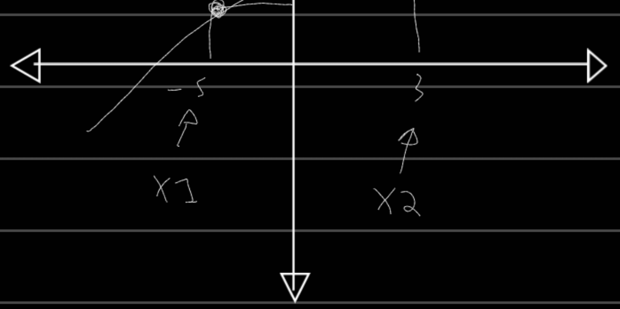
Ejemplo $y = x+3$

$f(x_1) = -1 \Rightarrow -1+3 = 2$

$f(x_2) = 3 \Rightarrow 3+3 = 6$



Recordar que por f(x) se entiende y osea en pocas palabras por ejemplo f(x1) > f(x2) dice que la x1 > x2

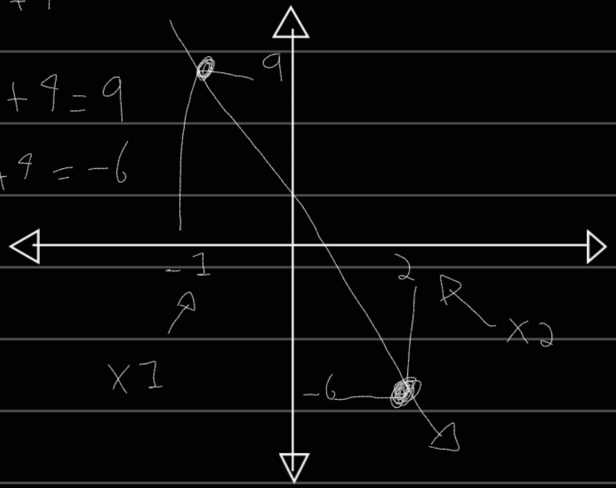


$\boxed{\text{Decreciente } f(x_1) > f(x_2)}$

Ejemplo $y = -5x + 4$

$f(x_1) = -1 \rightarrow -5(-1) + 4 = 9$

$f(x_2) = 2 \rightarrow -5(2) + 4 = -6$

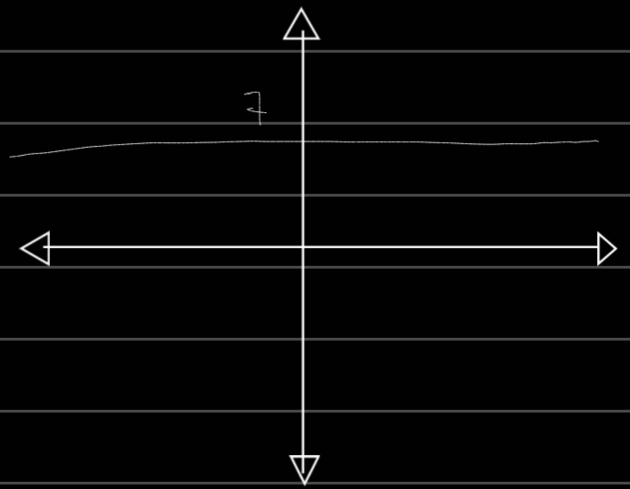


$\boxed{\text{Constante } f(x_1) = f(x_2)}$

Ejemplo $y = 7$

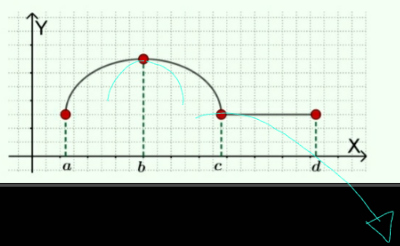
$f(x_1) = -1 \rightarrow 7$

$f(x_2) = 2 \rightarrow 7$



Ejemplo 43

Considere la siguiente gráfica de una función f y determine los subconjuntos, del dominio, donde la función es creciente, decreciente y constante.



$f \nearrow$ para $x \in [a, b[$ → No se sabe si crece o decrece, entonces se pone abierto

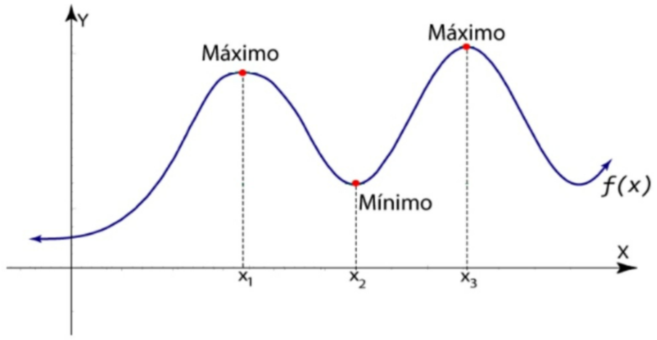
$f \searrow$ para $x \in]b, c[$ → lo mismo con el c

$f \rightarrow$ para $x \in]c, d]$

Puntos críticos y valores extremos

Definición 18 máximos y mínimos

1. *Se dice que una función f* **alcanza un máximo** *relativo (o local) en $x_0 \in]a,b[$ si $f(x_0) \geq f(x)$ en un entorno cercano alrededor de $x = x_0$.*
   En este caso, $f(x_0)$ recibe el nombre de **máximo relativo**.
2. *Se dice que una función f* **alcanza un mínimo** *relativo (o local) en $x_0 \in]a,b[$ si $f(x_0) \leq f(x)$ en un vecindario cercano alrededor de $x = x_0$.*
   En este caso, $f(x_0)$ recibe el nombre de **mínimo relativo**.



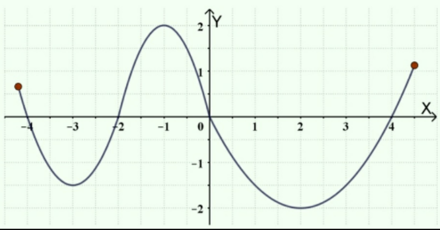
maximo relativo se refiere a que ese punto es mayor en relacion con los demas

Minimo relativo se refiere a que ese punto es menor en relacion con los demas

maximo y minimo absoluto son los mas altos

Ejemplo 44

Determine todos los puntos críticos que posee la función cuya gráfica se muestra a continuación



max: (-1,2)

min: (2,-2)

Definición 20 Signo

Se dice que una función f es:

1. **negativa** $(f(x) < 0)$ *en $]x_1, x_2[\in D_f$ si las imágenes, en este intervalos son negativas.*
2. **cero** $(f(x) = 0)$ *en $]x_1, x_2[\in D_f$ si las imágenes, en dicho intervalos son iguales a cero.*

Abajo de x

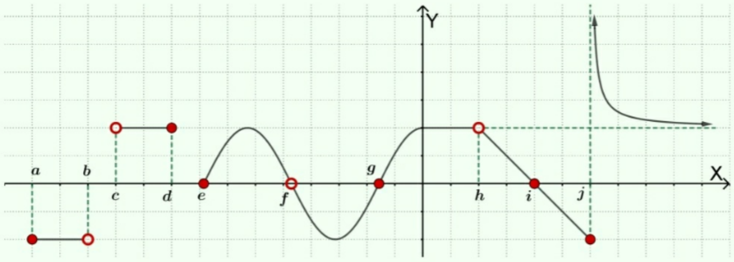
Igual a 0

3. **positiva** $(f(x) > 0)$ *en* $]x_1, x_2[\in D_f$ *si las imágenes, en este intervalos son positivas.*

Por encima de X

Ejemplo 45

Considere la siguiente gráfica de una función f y determine los subconjuntos, del dominio, donde la función es positiva, negativa o cero.



$f(x) > 0$: $]c,d]$, $]e,f[$, $]g,h[$, $]h,i[$, $]j,+\infty[$

$f(x) < 0$: $[a,b[$, $]f,g[$, $]i,j]$

$f(x) = 0$: $(e,0)$, $(g,0)$, $(i,0)$ → Pares ordenados

Intersecciones con los ejes coordenados

Definición 21 Intersección con el eje y
Es el punto donde la gráfica de la función se interseca con al eje de las ordenadas. Si este punto existe, corresponde a un par ordenado de la forma $(0, y_0)$.
Para encontrar la intersección de una función con el eje de las ordenadas (I_y), basta con encontrar cuando la primera coordenada es igual a cero, es decir:

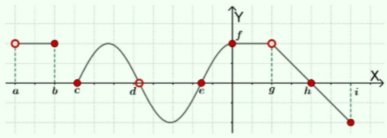
$$I_y \Rightarrow x = 0$$

Definición 22 Intersección con el eje x
Es el punto o los puntos en donde la gráfica de la función interseca al eje de las abscisas. Si este punto o puntos existen, corresponden a pares ordenados de la forma $(x_0, 0)$.
Para encontrar la intersección de una función con el eje de las abscisas I_x, basta con encontrar cuando la segunda coordenada es igual a cero, esto es:

$$I_x \Rightarrow y = 0$$

Ejemplo 46

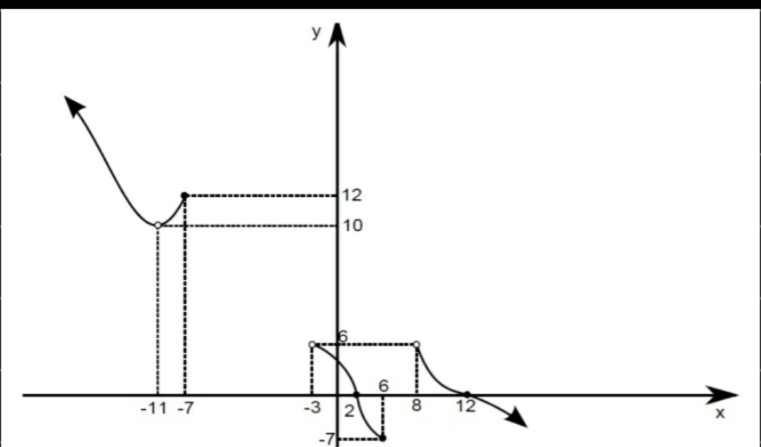
Considere la siguiente gráfica de la función k y encuentre todos los puntos de intersección con los ejes coordenados



Solución

Para la $I_x \Rightarrow y = 0$ *entonces se tiene*
I_x *son:* $(c,0)$, $(e,0)$ *y* $(h,0)$

Para la $I_y \Rightarrow x = 0$ *entonces se tiene*
$I_y : (0, f)$



- Dominio de la función
- Ámbito de la función
- Intervalos del dominio donde la función es positiva
- Intervalos del dominio donde la función es estrictamente decreciente, creciente.
- Puntos de intersección de la función con el eje x o eje y.

$Dom =]-\infty, -7] - \{-11\} \cup]-3, 6] \cup]8, +\infty[$

$Amb =]-\infty, 6[\cup]10, +\infty[$

monotonia

$f \nearrow$: $]-11, -7]$

$f \searrow$: $]-\infty, -11[$, $]-3, 6[$, $]8 + \infty[$

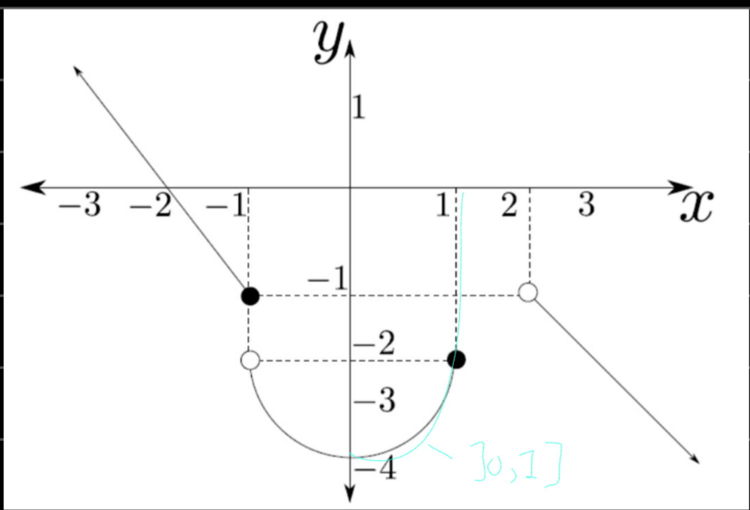
$f \rightarrow$: No hay

Signo

$f(x) > 0$: $]-\infty, -7] - \{-11\}$, $]-3, 2[$, $]8, 12[$

$f(x) < 0$: $]2, 6]$, $]12, +\infty[$

$f(x) = 0$: $(2,0), (12,0)$



Dom: $]-\infty,-1 \cup]2,+\infty[$

Amb: $]+\infty,-\infty[$

Monotonia

$f \nearrow$: $[0,1]$

$f \searrow$: $]-\infty,-1],]-1,0[,]2,+\infty[$

$f \to$ No hay

$f(x)>0$: $]-\infty,-2[$

$f(x)<0$: $]-2,-1],]-1,1],]2,+\infty[$

$f(x)=0$: $(-2,0)$