Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	07
Fecha	Lunes 09 de setiembre del 2024 (semana 08)
Contenidos	a) Teorema Fundamental del Álgebra
	b) Operaciones con números complejos en forma polar
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)

Cualquier polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes reales o complejos, tiene al menos un cero complejo. Dicho de otra forma, todo polinomio de grado n con $n \geq 1$ y con coeficientes complejos, tiene tantas raíces como indica su grado, contando las raíces con sus multiplicidades.

Corolario del Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)

Si P es un polinomio de grado n, entonces $P(x)$ se factoriza completamente como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son los ceros de P y a es el coeficiente de x^n en $P(x)$.

Multiplicidad

Cuando un factor $(x - c)$ aparece k veces en la factorización de $P(x)$, se dice que $(x - c)$ es un factor con multiplicidad k y que c es un cero con multiplicidad k. Los factores o ceros no repetidos $(k = 1)$ se llaman **simples** y los repetidos $(k > 1)$ se llaman **múltiples**.

Teorema de los ceros conjugados

Si P es un polinomio con todos sus coeficientes reales y $z = a + bi$ es un cero de P, entonces su conjugado $\overline{z} = a - bi$ también es un cero de P.

Nota: este resultado solamente es válido para polinomios que tengan todos sus coeficientes reales y en caso de no cumplirse, este resultado no puede aplicarse.

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

Ejercicio #1: Factorice en $\mathbb{C}$ los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 22x - 60$ sabiendo que $P(1+3i) = 0$

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-1	2	22	-60	$1+3i$
↓	$1+3i$	$3i-9$	$-16-18i$	60	
1	$3i$	$-7+3i$	$6-18i$	0	

$x-(1+3i)$

$$3i(1+3i) = 3i + 9i^2 = 3i + 9\cdot -1 = 3i - 9$$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	$3i$	$-7+3i$	$6-18i$	$1-3i$
↓	$1-3i$	$1-3i$	$-6+18i$	
1	1	-6	0	

$x-(1-3i)$

$$(-7+3i)(1+3i) = -7-21i+3i+9i^2 = -7-18i-9 = -16-18i$$

x^2	x^1	x^0	
1	1	-6	2
↓	2	6	
1	3	0	

$x-2$

$$(6-18i)(1+3i) = 6+\cancel{18i}-\cancel{18i}-54i^2 = 6+54 = 60$$

x^1	x^0	
1	3	-3
↓	-3	
1	0	

$x - -3$

$$\therefore P(x) = [x-(1+3i)][x-(1-3i)][x-2][x+3]$$

b) $P(x) = x^4 - ix^3 - (8+i)x^2 - (8-7i)x + 15 + 15i$ sabiendo que $1+i$ es un cero.

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	$-i$	$-8-i$	$-8+7i$	$15+15i$	$1+i$
$\downarrow$	$1+i$	$1+i$	$-7-7i$	$-15-15i$	
1	1	-7	-15	0	

$\rightarrow x-(1+i)$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	1	-7	-15	3
$\downarrow$	3	12	15	
1	4	5	0	
x^2	x^1	x^0		

$\rightarrow x-3$

$1x^2 + 4x + 5$

a b c

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$
$= 16 - 20$
$= -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} \qquad x = \frac{-4 - \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 + i \cdot 2}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4}{2} + \frac{2i}{2}$$

$\Rightarrow x = -2 + i \rightarrow x = -2 - i$ por el Teorema de los Ceros conjugados

$\downarrow$ $\downarrow$

$x-(-2+i)$ $x-(-2-i)$

$$P(x) = [x-(1+i)][x-3][x-(-2+i)][x-(-2-i)]$$

Ejercicio #2: Determine un polinomio de grado cuatro con coeficientes reales que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$ R/ $D(x) = x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464$

Por el Teorema de los Ceros Conjugados $4i$ y $-5-2i$ también son raíces del polinomio buscado.

$$P(x) = [x - -4i][x - 4i][x - (-5+2i)][x - (-5-2i)]$$

$$= (x+4i)(x-4i)(x+5-2i)(x+5+2i)$$

$$= (x+4i)(x-4i)[(x+5)-2i][(x+5)+2i]$$

$$= [x^2 - (4i)^2][(x+5)^2 - (2i)^2]$$

$$= [x^2 - 16i^2][x^2 + 2x \cdot 5 + 5^2 - 4i^2]$$

$$= [x^2+16][x^2+10x+25+4]$$

$$= (x^2+16)(x^2+10x+29)$$

$$= x^4 + 10x^3 + 29x^2 + 16x^2 + 160x + 464$$

$$= x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464$$

Forma polar de un número complejo

Un punto cualquiera P en el plano complejo puede ser localizado si se tiene conocimiento de sus coordenadas en el eje real y en el eje imaginario, las cuales se estudiaron previamente y se denotaron como **coordenadas rectangulares**, sin embargo, dicho punto puede ser identificado si se sabe la distancia r del punto P al origen O, y el ángulo θ formado por el rayo $\overrightarrow{OP}$ y el eje real positivo.

Gráficamente, esto puede representarse como:

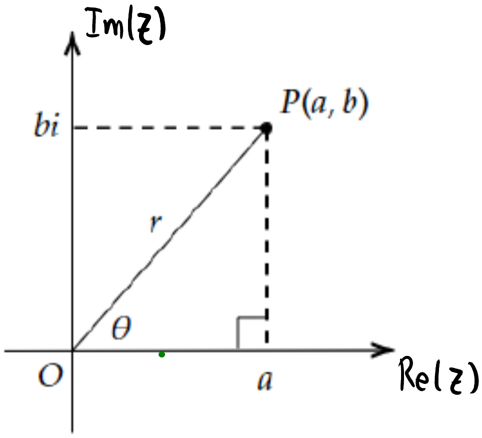


Figura 1.5.1: *Relación de coordenadas de un número complejo*

Al par ordenado (r, θ) se le conoce como las coordenadas polares del número complejo representado por el punto P.

Módulo de un número complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea P el punto que representa a z en el plano complejo, entonces se define el **módulo o valor absoluto** de z y se denota $|z|$ como la distancia entre el punto P y el origen del plano complejo.

Ahora bien, para calcular el módulo de un número complejo dado por $z = a + bi$, se tiene que:

$$r^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

de donde se tiene que:

$$z = a + bi \Longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento principal de un número complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea P el punto que representa a z en el plano complejo, entonces se define el **argumento principal** de z y se denota $\arg(z)$ y se tiene que de todos los posibles argumentos de un número complejo z, el argumento principal es aquel que se encuentre en el intervalo $]-\pi,\pi]$ Ahora bien, para calcular el argumento principal de un número complejo dado por $z = a + bi$, se tiene que:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} \Longrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Número complejo en I o IV cuadrante

Si el número complejo se encuentra en el primer o cuarto cuadrante $a > 0$, entonces el argumento principal θ se calcula de la siguiente manera:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Número complejo en II cuadrante

Si el número complejo se encuentra en el segundo cuadrante $(a < 0 \wedge b > 0)$, entonces el argumento principal θ se calcula de la siguiente manera:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$$

Número complejo en III cuadrante

Si el número complejo se encuentra en el tercer cuadrante $(a < 0 \wedge b < 0)$, entonces el argumento principal θ se calcula de la siguiente manera:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$$

Argumento es ángulo cuadrantal

Si el argumento, es un ángulo cuadrantal, se puede determinar fácilmente tomando en cuenta la siguiente figura:

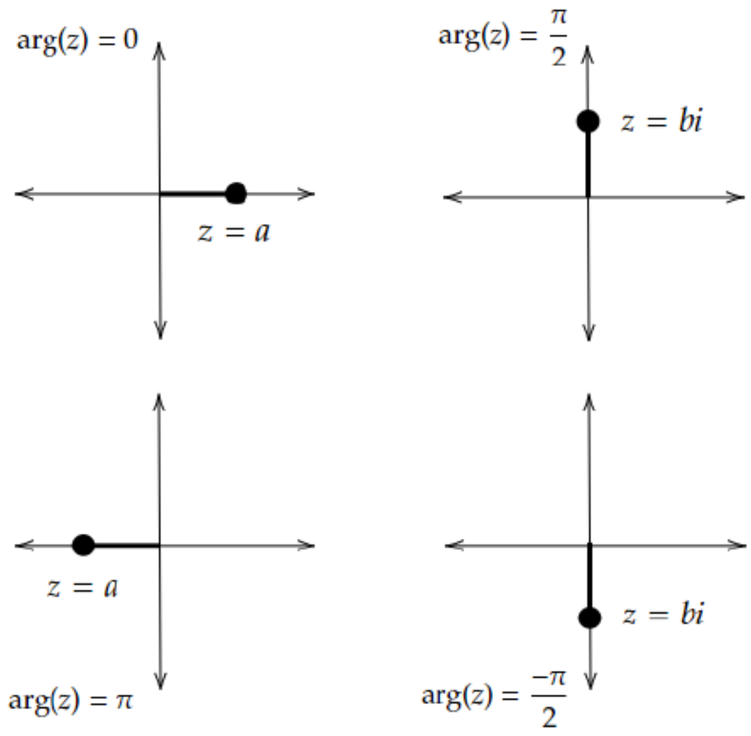


Figura 1.6.2: *Ángulos cuadrantales*

Paso de forma rectangular a polar de un número complejo

Para pasar un número complejo de la forma rectangular a la forma polar, es necesario calcular, el módulo y el argumento del número, conociendo únicamente sus coordenadas rectangulares.

Paso de forma polar a rectangular de un número complejo

A partir de las relaciones indicadas, es posible pasar las coordenadas polares a coordenadas rectangulares de una forma más sencilla. Si (r,θ) son las coordenadas polares de un número complejo z, entonces dicho número se puede expresar en forma rectangular de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
z = a + bi &\Longrightarrow r\cdot\cos(\theta) + i\cdot r\cdot \operatorname{sen}(\theta)\\
&\Longrightarrow r\left[\cos(\theta) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta)\right]\\
&\Longrightarrow r\cdot\operatorname{cis}(\theta)
\end{aligned}
$$

donde $\operatorname{cis}(\theta)$ es una función definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Ejercicio #1: Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |w-2| = \dfrac{5}{2} \\ \arg(\overline{w+3i}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

R/ $\nexists$

Sea $w = a+bi$. Note que $|w-2| = \frac{5}{2} \Rightarrow |a+bi-2| = \frac{5}{2}$

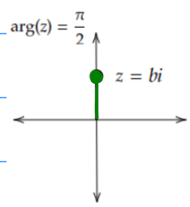
$$\Rightarrow |(a-2)+bi| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+b^2} = \frac{5}{2}$$ definición de módulo

$$\Rightarrow (a-2)^2+b^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (a-2)^2+b^2 = \frac{25}{4}$$

Ahora $\operatorname{Arg}(\overline{w+3i}) = \frac{\pi}{2}$, entonces $\overline{w+3i}$ es imaginario puro, así



$$\begin{aligned} \overline{w+3i} &= \overline{w} + \overline{3i} \\ &= \overline{a+bi} - 3i \\ &= a-bi-3i \\ &= a+(-bi-3i) \\ &= a+(-b-3)i \end{aligned}$$

Por esto, se tiene que $a=0$ y que $-b-3$ es positivo. (1)

Retomando se tiene que: $(a-2)^2+b^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow (0-2)^2+b^2 = \frac{25}{4}$

$$\Rightarrow 4+b^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{25}{4} - 4$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\Rightarrow b = \pm\frac{3}{2}$$

Recuerde que $-b-3$ es positivo, entonces:

⊛ Si $b = -\frac{3}{2}$

$$-\,-\frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

⊗ pues debe ser positivo

⊛ Si $b = \frac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2} - 3 = -\frac{9}{2}$$

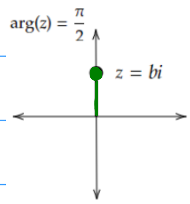
⊗ pues debe ser positivo

$\therefore$ No existe w que satisfaga las condiciones.

Ejercicio #2: Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

R/ $w = 1 + (3 - \sqrt{15})i$

$$\begin{cases} |z - 3i| = 4 \\ \arg(2 - 2z) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Factorice en $\mathbb{C}$ los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 11x + 5$ sabiendo que $P(-i+2) = 0$ — R/ $(3x+1)(2 \pm i)$

b) $M(x) = 4x + 5x^2 + x^3 + x^4 + 4$ sabiendo que $-2i$ es una de sus soluciones. — R/ $(x \pm 2i)\left(x - \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)$

Ejercicio #2: Halle un polinomio $P(x)$ de cuarto grado, con ceros i, $-i$, -2 y 2. — $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

Ejercicio #3: Encuentre el o los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |w-3| = \dfrac{13}{2} \\ \arg(w+3) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

R/ $w = -3 - \frac{5}{2}i$

Ejercicio #4: Encuentre el o los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z+2i| = \sqrt{5} \\ \arg(\overline{z}+3) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

R/ $z = -2 - i$, $z = 1 - 4i$