Números complejos en forma rectangular

Igualdad de números complejos

1. Considere los números complejos $z = (p+2) + (2-q)i$ y $w = (q-4p)i + 6q$. Determine los valores de $p, q \in \mathbb{R}$ para que $z = w$ R/ $p = \dfrac{-4}{11}$ y $q = \dfrac{3}{11}$

2. Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ si $(3-a) + (b+1)i = (4a-b)i - 3$ R/ $a = 6$ y $b = \dfrac{23}{2}$

3. Encuentre los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ si $(2x-y)i - (x+y) = 6 - 9i$ R/ $x = -5$ y $y = -1$

4. Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $2a + 1 - bi = b - (a+2)i$ R/ $a = 1$ y $b = 3$

5. Determine el valor de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación dada por el criterio $(3-4i)^2 - 2(x - yi) = x + i$. R/ $x = \dfrac{-7}{3}$, $y = \dfrac{25}{2}$

6. Encuentre dos números reales x, y que cumplan $(1-i)x + 2yi = 4 + 2i$ R/ $x = 4$, $y = 3$

7. Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $5a - 7i + 3bi = 8b - i - 1$ R/ $a = 3$ y $b = 2$

8. Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $bi - 10 = 2b + 3a - 5i$ R/ $a = 0$ y $b = -5$

9. Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $3a + 2 - 5bi = 10ai + 1 - 2b$ R/ $a = 1$ y $b = -2$

10. Encuentre los números reales x, y tales que $\dfrac{43 + yi}{x - 5i} = 4 + 3i$ R/ $x = 7$, $y = 1$

11. Encuentre los números complejos z tal que $z \cdot \overline{z} + 2iz = 12 + 6i$ R/ $z = 3 + 3i$ y $z = 3$

12. Sea $x = 4 - 3i$, determine un número $y \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{x} \cdot \overline{y} = 2i - 1$ R/ $y = \dfrac{2}{25} - \dfrac{11}{25}i$

13. Dado $z = 3 - 4i$, encuentre un $w \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{z} \cdot \overline{w} = 2i - 1$. R/ $w = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

14. Sea $w = (x - i)(x + 3 - 4i)$. Halle los valores reales de x para los cuales w es imaginario puro. R/ $x = -4 \vee x = 1$

15. Sean $z = -3 + ix^2y$ y $w = x^2 + y + 4i$. Halle los valores de x y y para que z y w sean números complejos conjugados. R/ $x = \pm 1$, $y = -4$

Operaciones con números complejos

Realice cada una de las siguientes operaciones con números complejos y exprese el resultado en forma rectangular.

1. $i^{57} + i^{98} - i^{75}$ R/ $-1 + 2i$
2. $(-7 + 2i)(-7 - 2i)$ R/ 53
3. $i(2 + i)(3 - 4i)$ R/ $5 + 10i$
4. $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ R/ $2i$
5. $4 - i^7(1 - i)^{-2}$ R/ $\dfrac{7}{2}$
6. $4 + i(i - 1)^{-1}$ R/ $\dfrac{9}{2} - \dfrac{i}{2}$
7. $3 - 7i + \dfrac{13i}{3 - 2i}$ R/ $1 - 4i$
8. $\dfrac{(2 + 3i) - (1 - i)}{1 + i}$ R/ $\dfrac{5}{2} + \dfrac{3i}{2}$
9. $\dfrac{1 + i^3}{(1 + i)^3}$ R/ $\dfrac{-1}{2}$
10. $\dfrac{3i^{-50} - 2i^{-37}}{4i^{-13} + 5i^{-19}}$ R/ $2 + 3i$
11. $\dfrac{5i(2 + 2i)}{(1 - i)(2 + i)(3 - i)}$ R/ $\dfrac{-7}{5} + \dfrac{i}{5}$
12. $\dfrac{25[(1 + 2i)^3 + (2 - i)^{-2}]}{2i}$ R/ $-23 + 136i$
13. $\left(\dfrac{52i}{1 - 5i}\right)^3 + 7i^3 + 2$ R/ $-878 + 585i$
14. $\dfrac{(3 - 2i)(-2 + i)}{\overline{(3 + 5i)}^2 - 2i^{27}}$ R/ $\dfrac{-33}{260} - \dfrac{14}{65}i$
15. $\dfrac{5 - i(5 + i)(5 - i)}{(3 + 6i)(-1 + i) - 5}$ R/ $\dfrac{8}{205} + \dfrac{379}{205}i$

Ecuaciones complejas

1. Resuelva en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

   a) $9x^2 + 4 = 0$

   b) $8z^2 + 18 = 0$

   c) $3t^2 + 12 = 0$

   d) $25z^2 + 12 = 0$

   e) $8x^2 - 4x + 1 = 0$

   f) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

   g) $t^2 - 4t + 5 = 0$

   h) $t^2 - 6t + 10 = 0$

   i) $2z^2 + 2z + 5 = 0$

   j) $5x^2 + 4 = 4x$

2. $2 + i^3x + (2 - i) = (1 - i)^2 x$ R/ $S = \{1 + 4i\}$

3. $\dfrac{z - 1}{1 + iz\sqrt{3}} = 3i\sqrt{3}$ R/ $S = \left\{ \dfrac{1}{10} + \dfrac{3\sqrt{3}}{10} i \right\}$

4. $\overline{(2 - i)^2 x} + 2i = \overline{3x} + 1$ R/ $S = \left\{ \dfrac{-1}{4} \right\}$

5. $(2x^2 + 5x + 2)\left(\dfrac{ix}{3 - 4i} - i\right) = 0$ R/ $S = \left\{ \dfrac{-1}{2}, -2, 3 - 4i \right\}$

6. $(ix^2 + x)\left(\dfrac{ix}{1 - 4i} - 1\right) = 0$

7. Demuestre que al resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $x^6 - 1 = 0$, la suma de sus soluciones es igual a cero.

Factorización

1. Factorice en $\mathbb{C}$ los siguientes polinomios:

   a) $F(m) = m^3 - 5m^2 + m - 5$

   b) $R(t) = 5t + 5t^2 + 2t^3 + 3$

   c) $P(x) = x^2 - x - x^3 + 2x^4 - 1$

   d) $P(m) = 5m^2 + 5m^3 + 2m^4 - 2$

   e) $Q(x) = 9x + 3x^2 + x^3 + x^4 - 54$

   f) $M(p) = p^4 - 1$

   g) $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 11x + 5$ sabiendo que $P(-i + 2) = 0$

   h) $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 22x - 60$ sabiendo que $P(1 + 3i) = 0$

   i) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 17x - 15$ sabiendo que $P(2 - i) = 0$

   j) $P(z) = 4z^4 + 16z^3 + 53z^2 + 4z + 13$ sabiendo que $P(2 - 3i) = 0$

   k) $P(z) = z^4 - 10z^3 + 35z^2 - 90z + 234$ sabiendo que $z = 5 + i$ es un cero de $P(z)$.

   l) $P(x) = x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x + 16$, sabiendo que $2i$ es un cero de $P(x)$

   m) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 50x + 50$ sabiendo que $2 + i$ es uno de sus ceros.

   n) $K(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$ sabiendo que $x = 3i$ es una de sus soluciones.

   ñ) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 54x + 117$ sabiendo que $3 - 2i$ es uno de sus ceros.

   o) $T(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2$ sabiendo que $i - 1$ es uno de sus ceros.

   p) $P(w) = 3w^4 - \frac{11}{2}w^3 + 13w^2 + \frac{9}{2}w - 5$ sabiendo que $1 - 2i$ es un cero.

   q) $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 16x + 6$ sabiendo que $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ es un cero de $P(x)$.

   r) $P(t) = 7t^2 - 18t + 2t^3 + t^4 + 26$ sabiendo que $-2 + 3i$ es una de sus soluciones.

   s) $P(y) = 2y^4 - 10y^3 + 9y^2 + 14y + 10$ sabiendo que $3 - i$ es una de sus soluciones.

   t) $M(x) = 4x + 5x^2 + x^3 + x^4 + 4$ sabiendo que $-2i$ es una de sus soluciones.

u) $P(v) = 2v^4 - 19v^2 - 2v^3 - 18v - 8$ sabiendo que $\dfrac{-1}{2} + \dfrac{i}{2}$ es una de sus soluciones.

v) $P(y) = 49y^2 - 108y - 12y^3 + 4y^4 + 117$ sabiendo que $\dfrac{3}{2} - i$ es una de sus soluciones.

w) $P(x) = -2x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 14x - 10$ sabiendo que $x - (1+i)$ es un factor de $P(x)$.

x) $P(x) = x^4 - 12x + 8x^2 - 4x^3 + 15$ sabiendo que $x - (2+i)$ es un factor del polinomio.

y) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 8$ sabiendo que $x - 2i$ es un factor del polinomio.

z) $P(x) = x^4 - ix^3 - (8+i)x^2 - (8-7i)x + 15 + 15i$ sabiendo que $1+i$ es un cero.

2. Considere el polinomio $P(x) = kx^3 + (2k+1)ix^2 + (k+1)x$, con $k \in \mathbb{C}$ constante, siendo $x = \dfrac{i}{2}$ un cero de $P(x)$

   a) Determine el valor de k R/ $k = 2$

   b) Factorice en $\mathbb{C}$ completamente el polinomio $P(x)$

3. Sea $N(x) = x^3 + kx^2 + 7x - 2k$. Si se sabe que $x = i$ es una raíz doble de $N(x)$

   a) Determine el valor de k R/ $k = 2i$

   b) Factorice en $\mathbb{C}$ completamente el polinomio $N(x)$

4. Considere el polinomio $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 2(k+i)^2x^2 - 6(k+i)^2x$, con $k \in \mathbb{C}$

   a) Factorice completamente $P(x)$ en $\mathbb{C}$, considerando que $x = 3$ es un cero del polinomio $P(x)$

   b) Determine todos los valores de k para que $P(x)$ solo tenga ceros reales.

5. Factorice en $\mathbb{C}$ el polinomio $P(x) = x^3 - (2+ki)x^2 + (2+2ki)x - 2ki$, donde k es una constante real, si se sabe que ki es un cero de dicho polinomio.

6. Determine un polinomio de grado tres con coeficientes reales, cuyos ceros incluyan a 2 y a $1 - i$. R/ $T(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

7. Halle un polinomio $P(x)$ de cuarto grado, con ceros i, $-i$, -2 y 2. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

8. Determine un polinomio de grado cuatro con coeficientes reales que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$ R/ $D(x) = x^4 + 10x^3 + 145x^2 + 160x + 464$

9. Sea $Q(x) = x^3 - ax^2 + x - a$. Si se sabe que i es la raíz doble del polinomio $Q(x)$, halle el valor de a. R/ $a = i$

10. Considere el polinomio $K(x) = bx^3 + 3x^2 + b^2x + 3b$, con $b \in \mathbb{R}$. Determine el valor de b para que $x = 2i$ sea un cero de $K(x)$.

Ejercicios con condiciones

1. Determine los números complejos z y w que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $z = 2 - i$ y $w = 1 + 2i$, $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - i$

   - $z + w = 3 + i$
   - $\text{Re}(z) = 2$
   - $\dfrac{z}{w}$ es imaginario puro.

2. Determine los números complejos z y w que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $z = 3 + 6i$ y $w = 2 + 4i$

   - $z - w = 1 + 2i$
   - $\text{Re}(z) = 3$
   - $z \cdot \overline{w} \in \mathbb{R}$

3. Sean a, $b \in \mathbb{R}$. Determine los valores de a y b para que se satisfagan simultáneamente las siguientes condiciones:

   - La expresión $\dfrac{3b - 2ai}{4 - 3i}$ es un número real.
   - El módulo de $\dfrac{3b - 2ai}{4 - 3i}$ es igual a 1.

4. Encuentre dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ cuya suma sea cuatro y su producto sea ocho. R/ $w = 2 + 2i$ y $z = 2 - 2i$, $w = 2 - 2i$ y $z = 2 + 2i$

5. ¿Cuál debe ser la relación entre los números reales x, y para que $(x + yi)(2 + 3i)$ sea un número real? R/ $y = \dfrac{-3x}{2}$

6. ¿Cuál debe ser la relación entre los números reales x, y para que $(2 + 5i)(x + yi)$ sea un número real? R/ $y = \dfrac{5x}{2}$

7. Sean $z = 2 + abi$ y $w = 2a - b + 3i$ ¿Cuál debe ser la relación entre los números reales a y b para que $\text{Re}(zw) = 0$? R/ $a = \dfrac{2b}{4 - 3b}$

8. Si se tiene que $w = \dfrac{2 - 5ai}{1 + 2i}$, determine todos los valores para el número real a, de tal forma que $\text{Im}(w) \neq 0$. R/ $a \neq \dfrac{-4}{5}$

9. Determine el valor de la constante k para que el número complejo $z = \dfrac{2 - ki}{k - 1}$ sea imaginario puro.

Ejercicios especiales

1. Demuestre que si z y $w \in \mathbb{C}$, se cumple que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. Demuestre que si z y $w \in \mathbb{C}$, se cumple que $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$
3. Demuestre que si z y $w \in \mathbb{C}$, se cumple que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
4. Demuestre que si z y $w \in \mathbb{C}$, se cumple que $\overline{z \div w} = \overline{z} \div \overline{w}$
5. Demuestre que si z es un número complejo arbitrario, se cumple que $\overline{\overline{z}} = z$
6. Si z es cualquier número complejo, compruebe que $\dfrac{\overline{i+\overline{z}}}{i-z} = -1$
7. Demuestre que si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}^+$
8. Verifique que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que: $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$
9. Si $z \in \mathbb{C}$, pruebe que $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
10. Pruebe que $z + \overline{z}$ es siempre un número real y $z - \overline{z}$ es siempre un número imaginario puro.