

## I Examen Parcial

---

### Instrucciones

Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrible o que presenten algún tipo de alteración. Puede hacer uso de las fórmulas oficiales de la cátedra únicamente. No se permite el uso de calculadora programable. Se permite el uso discrecional de dispositivos electrónicos para la consulta de la aplicación *Probability Distributions* según las disposiciones comunicadas con anterioridad por la coordinación de la cátedra. Considere, de ser necesario, que las poblaciones involucradas en esta prueba siguen una **distribución normal**.

---

1. [5 puntos] Para las variables aleatorias independientes  $X$  y  $Y$  se tiene que

$$X \sim B\left(15\theta, \frac{1}{3}\right) \quad , \quad Y \sim B\left(16\theta, \frac{1}{4}\right)$$

Además, considere los estimadores para  $\theta$  determinados por

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X + Y}{9} \quad , \quad \hat{\theta}_2 = X - Y$$

¿Cuál de ellos es mejor estimador para el parámetro  $\theta$

### Solución

$$E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{X + Y}{9}\right) = \frac{5\theta + 4\theta}{9} = \theta.$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(X - Y) = 5\theta - 4\theta = \theta.$$

Con esto, ambos son estimadores insesgados.

Por otro lado,  $\eta = \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)} = \frac{(Var(X) + Var(Y))}{81(Var(X) + Var(Y))} = \frac{1}{81} < 1$ .

Finalmente,  $\hat{\theta}_1$  es el mejor estimador para el parámetro  $\theta$ .

$\times \wr \times$

2. El proveedor del cargador para celulares marca *Light* está realizando un estudio para estimar el tiempo medio de carga de su producto. En una muestra aleatoria de 49 cargadores se obtuvo una desviación estándar de 5 minutos.

- a) [4 puntos] Si se concluyó, correctamente que el intervalo para el tiempo de carga medio de estos dispositivos es  $[11.8383226, 15.27629571]$ , determine el nivel de confianza utilizado.

### Solución

Se tiene que  $s = 5$  y  $n = 49$

Con la información dada se sigue que  $\bar{x} = \frac{11.8383226 + 15.27629571}{2} = 13.55730916$ .

De esta manera  $11.8383226 = 13.55730916 + t_{\alpha/2,48} \cdot \frac{5}{7} \Rightarrow t_{\alpha/2,48} = -2.406581184$  y con eso  $\alpha/2 = 0.01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.98$ . También pudo usarse el otro extremo del intervalo.

Si se utiliza la distribución normal estándar, entonces

$$15.27629571 = 13.55730916 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{5}{7} \Rightarrow -z_{\alpha/2} = 2.40658117 \text{ y con eso } \alpha/2 = 0.008051 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.983898$$

$\times \wr \times$

- b) [4 puntos] El proveedor de este cargador afirma que el tiempo medio de carga es menor a 15 minutos. ¿Respaldan los datos obtenidos en la muestra esta afirmación, con una significancia de 4%?

### Solución

$H_0 : \mu = 15$  El tiempo medio de carga es de 15 minutos.

$H_1 : \mu < 15 \leftarrow$  El tiempo medio de carga es significativamente menor a 15 minutos

$$z_c = z_{0.04} = -1.750686 \text{ y } z_{obs} = \frac{7(13.55730916 - 15)}{5} = -2.019767176$$

Luego,  $H_0$  se rechaza y esto significa que la afirmación es válida con significancia del 4%.  
 $\times \wr \times$

- c) [4 puntos] A lo interno de la empresa se maneja que los tiempos de carga deben ser similares entre sí para poder concluir que el proceso de producción está bajo control. Según los datos de la muestra, ¿se puede concluir que el proceso de producción está bajo control?

### Solución

En este ejercicio se sugiere utilizar intervalos de confianza porque no hay un valor nulo para comparar la desviación estándar. Además, al no indicarse la confianza se utiliza

$$1 - \alpha = 0.95.$$

Primero note que  $n = 49$  y  $s^2 = 25$ .

Además,  $\chi^2_{0.975,48} = 30.754506$  y  $\chi^2_{0.025,48} = 69.022586$ .

$$\text{IC para } \sigma^2 \text{ es } \left[ \frac{48 \cdot 25}{69.022586}, \frac{48 \cdot 25}{30.754506} \right] = [17.38561346, 39.01867258].$$

IC para  $\sigma$  es  $[4.169605911, 6.246492822]$ . Las diferencias de las cargas respecto de la carga promedio pueden variar hasta superar los 6 minutos. En este contexto puede inferirse que los datos muestran que el proceso NO está bajo control con confianza del 95 %.

3. **[5 puntos]** Para una variable aleatoria  $X$  con distribución  $f_X(x|\lambda) = \frac{1+\lambda}{9} \left(\frac{x}{9}\right)^\lambda$ , se tiene la muestra aleatoria  $x_1 = 5, x_2 = 8, x_3 = 7, x_4 = 4, x_5 = 8, x_6 = 6$  y  $x_7$ . Si se sabe que la estimación de máxima verosimilitud para el parámetro  $\lambda$  es -1.67, determine el valor de  $x_7$ .

### Solución

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^7 \frac{1+\lambda}{9} \left(\frac{x_i}{9}\right)^\lambda = \left(\frac{1+\lambda}{9}\right)^7 \left(\frac{53760x_7}{9^7}\right)^\lambda$$

$$\Rightarrow \ln L(x, \lambda) = 7\ln(1+\lambda) - 7\ln 9 + \lambda \ln \left(\frac{53760x_7}{9^7}\right)$$

Derivando e igualando a cero,

$$\frac{L'(x, \lambda)}{L(x, \lambda)} = \frac{7}{1+\lambda} + \ln \left(\frac{53760x_7}{9^7}\right) = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{53760x_7}{9^7}\right) = \frac{700}{67}$$

$$\Rightarrow x_7 = \frac{9^7}{53760} e^{\frac{700}{67}} \approx 3066502.62534848543.$$

$\times \lambda \times$

4. Una empresa produce dispositivos muy costosos diseñados utilizarse en maquinaria que se calienta con facilidad.

- a) **[4 puntos]** Se ha establecido que el proceso de producción está bajo control si la desviación estándar de los tiempos de resistencia al calor no supera los 3 minutos. Si se realiza una prueba de hipótesis, calcule cual debería ser el valor de la desviación estándar en una muestra aleatoria de 20 dispositivos de modo que se pueda concluir que el proceso de producción está fuera de control con una significancia del 4 %.

### Solución

$H_0 : \sigma = 3$  ( $\leq$ ) El proceso de producción está bajo control.

$H_1 : \sigma > 3$  Hay evidencia significativa que muestra que el proceso NO está bajo control.

$$\chi^2_c = \chi^2_{0.96,19} = 31.036703 = \frac{19 \cdot s_c^2}{9} \Rightarrow s_c^2 = 14.70159616 \Rightarrow s_c = 3.834266052.$$

Luego, para que el proceso esté fuera de control en muestras de tamaño 20 la desviación estándar debe ser mayor a 3.83426605.  $\times \wr \times$

- b) [4 puntos] El gerente de la empresa asegura que la proporción de dispositivos atípicos (tiempos de resistencia muy altos o muy bajos) es menor al 12 %. Si se toma una muestra aleatoria de 45 dispositivos y se realiza una prueba de hipótesis sobre la afirmación del gerente con una significancia de 7 %, determine la potencia de la prueba si la proporción real de dispositivos atípicos es del 10 %.

### Solución

$H_0 : p = 0.12$  ( $\leq$ ) La proporción de dispositivos atípicos es de 0.1.

$H_1 : p < 0.12$  La proporción de dispositivos atípicos es significativamente mayor a 0.1.

Nótese que  $np_0 = 45 \cdot 0.12 = 5.4 > 5$ , por lo puede utilizarse la distribución normal para determinar el  $p_c$ .

$$z_c = z_{0.07} = -1.475791 = \frac{(p_c - 0.12)\sqrt{45}}{\sqrt{0.12 \cdot 0.88}} \Rightarrow p_c \approx 0.0485091337$$

Para el cálculo de  $\beta$  hay que considerar que  $np = 45 \cdot 0.1 = 4.5 < 5$

$\beta = P(H_0 | H'_1) = P(p > 0.0485091337 | p = 0.1) = P(B \geq 3 | p = 0.1) = 0.840957$ . Con esto la potencia de la prueba es 0.159043  $\times \wr \times$