Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	14
Fecha	Lunes 28 de octubre del 2024 (semana 15)
Contenidos	a) Ecuaciones de una recta en el espacio (paramétricas, simétricas, vectoriales)
	b) Paralelismo, perpendicularidad, ángulo e intersección entre rectas
	c) Distancia de un punto a una recta en el espacio.
	d) Intersección entre rectas en el espacio.
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Considere la recta L que pasa por P y por Q. Esta recta es paralela al vector $v = PQ$, por lo tanto, dado un punto $R = (x, y, z) \in L$, se debe cumplir que:

$$PR = tv \text{ o sea } R - P = tv, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

de donde $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = OP + tv\}$, entonces $L : (x, y, z) = P + t \cdot v$

Ecuaciones de recta

Si L es una recta que pasa por los puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y si $v = PQ$, entonces:

- **Ecuación vectorial:**

  La ecuación vectorial de L es $(x, y, z) = P + tv$, con $t \in \mathbb{R}$.

- **Ecuación paramétrica:**

  Despejando x, y y z se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = p_1 + t \cdot v_1 \\ y(t) = p_2 + t \cdot v_2 \\ z(t) = p_3 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

- **Ecuación simétrica:**

  Si para cada $v_i \neq 0$, con $i = 1, 2, 3$, despejando t se tienen las ecuaciones simétricas de L, entonces:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Ejercicio #1: Determine los tres tipos de ecuaciones de la recta L si se sabe que dicha recta contiene al punto $A(2,-3,-5)$ y tiene como vector director a $u=(-5,7,2)$

① Ecuación vectorial

$$L:(x,y,z)=A+tu \Rightarrow L:(x,y,z)=(2,-3,-5)+t(-5,7,2)$$

② Ecuación paramétrica (despejar x, y, z)

$$L:(x,y,z)=(2,-3,-5)+t(-5,7,2) \Leftrightarrow L:(x,y,z)=(2,-3,-5)+(-5t,7t,2t)$$

$$\Leftrightarrow L:(x,y,z)=(2-5t,-3+7t,-5+2t)$$

$$\Leftrightarrow L:\begin{cases} x=2-5t \\ y=-3+7t \\ z=-5+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

③ Ecuación simétrica (despejar t para cada ecuación paramétrica)

$$x=2-5t \Rightarrow x-2=-5t \Rightarrow \frac{x-2}{-5}=t$$

$$y=-3+7t \Rightarrow y+3=7t \Rightarrow \frac{y+3}{7}=t$$

$$z=-5+2t \Rightarrow z+5=2t \Rightarrow \frac{z+5}{2}=t$$

Así $$L:\frac{x-2}{-5}=\frac{y+3}{7}=\frac{z+5}{2}$$

Ejercicio #2: Dadas las rectas

$$L: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5t \\ z = 4 \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R} \qquad m: \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = z - 2$$

Halle para cada recta un vector director y dos puntos que le pertenecen.

* Para L

Vector Director: $(-3, -5, 0)$

Puntos:

* Si $t=0$: $(2, 0, 4)$
* Si $t=1$: $(-1, -5, 4)$

* Para m

Vector Director: $(2, 3, 1)$

Puntos:

* Si $t=0$: $(5, -1, 2)$
* Si $t=10$: $(25, 29, 12)$

$$\frac{x-5}{2} = 0 \qquad \frac{y+1}{3} = 0 \qquad z-2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 \qquad \Rightarrow y = -1 \qquad z = 2$$

$$\frac{x-5}{2} = 10 \qquad \frac{y+1}{3} = 10 \qquad z-2 = 10$$

$$\Rightarrow x = 25 \qquad \Rightarrow y = 29 \qquad \Rightarrow z = 12$$

Ángulo, Paralelismo y Perpendicularidad

Sean L_1 y L_2 dos rectas dadas por: $L_1 : (x,y,z) = P + t \cdot v \wedge L_2 : (x,y,z) = Q + s \cdot w$, con $s,t \in \mathbb{R}$

- L_1 y L_2 son paralelas si y solo si $v \parallel w$.
- L_1 y L_2 son perpendiculares si y solo si $v \perp w$.
- El ángulo entre L_1 y L_2 es el ángulo entre v y w.

Intersección de rectas

Dadas dos rectas L_1 y L_2, existen un par de planos paralelos Π_1 a Π_2 que contienen a cada una de estas rectas. La distancia entre dos rectas L_1 y L_2 es la distancia entre estos planos paralelos y se mide como la longitud de un segmento que va de la recta L_1 a L_2 y que es perpendicular a ambas, si esta distancia es nula, entonces las rectas se intersecan.

Una manera de calcular el punto de intersección entre estas rectas (si hubiera) es igualando la ecuación vectorial de L_1 y L_2, usando un parámetro distinto en cada recta. Sean $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ en $\mathbb{R}^3$. Considere las rectas $L_1 : (x,y,z) = P + t \cdot v$ y $L_2 : (x,y,z) = Q + s \cdot w$.

Para determinar si hay intersección entre las rectas L_1 y L_2, se igualan las ecuaciones:

$$P + t \cdot v = Q + s \cdot w = \begin{cases} t \cdot v_1 - s \cdot w_1 = q_1 - p_1 \\ t \cdot v_2 - s \cdot w_2 = q_2 - p_2 \\ t \cdot v_3 - s \cdot w_3 = q_3 - p_3 \end{cases}$$

Si este sistema tiene solución, entonces esta solución da el o los puntos de intersección entre L_1 y L_2. Como el sistema es lineal, se tienen los siguientes casos:

- **Solución única:** las rectas se intersecan en un solo punto.
- **Infinitas soluciones::** las rectas coinciden.
- **Sin solución:** las rectas no se intersecan.

Ejercicio #1: Determine el punto de intersección entre las rectas de ecuaciones: R/ $(-3,-1,5)$

$$L_1 : (x,y,z) = (-1,2,4) + t(2,3,-1), \text{ con } t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \frac{x-1}{4} = \frac{2-z}{3}; y = -1$$

$L_1: (x,y,z) = (-1,2,4) + t(2,3,-1)$
$: (x,y,z) = (-1,2,4) + (2t,3t,-t)$
$: (x,y,z) = (-1+2t,\ 2+3t,\ 4-t)$

$$L_2: \begin{cases} x-1 = 4\lambda \\ 2-z = 3\lambda \\ y = -1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow L_1: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ z = 2-3\lambda \\ y = -1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Como se pide la intersección entre L_1 y L_2, debe darse que $L_1 = L_2$,

$$\Rightarrow \begin{cases} -1+2t = 1+4\lambda \\ 2+3t = -1 \\ 4-t = 2-3\lambda \end{cases} \Rightarrow 3t = -3 \Rightarrow t = -1$$

Como $t = -1$, el punto de intersección viene dado por:

$$\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 4-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+2\cdot -1 \\ y = 2+3\cdot -1 \\ z = 4- -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$$

El punto de intersección es $(-3,-1,5)$

Ejercicio #2: Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P=(-1,2,-3)$, es perpendicular al vector $v=(6,-2,-3)$ y se corta con la recta $L_1 : \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{-5}$

$$L_1: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 5-5\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sea $A=(x,y,z) \in L_1$, entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= A-P \\ &= (x,y,z)-(-1,2,-3) \\ &= (x+1,\ y-2,\ z+3) \\ &= (1+3\lambda+1,\ -1+2\lambda-2,\ 5-5\lambda+3) \\ &= (2+3\lambda,\ -3+2\lambda,\ 8-5\lambda)\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{PA} \perp v$, entonces $(2+3\lambda, -3+2\lambda, 8-5\lambda)\cdot(6,-2,-3)=0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 6(2+3\lambda) + -2(-3+2\lambda) + -3(8-5\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow 12+18\lambda+6-4\lambda-24+15\lambda = 0 \\ &\Rightarrow -6+29\lambda = 0 \\ &\Rightarrow 29\lambda = 6 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{6}{29}\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \left(2+3\cdot\frac{6}{29},\ -3+2\cdot\frac{6}{29},\ 8-5\cdot\frac{6}{29}\right) \\ &= \left(\frac{76}{29},\ \frac{-75}{29},\ \frac{202}{29}\right)\end{aligned}$$

Por tanto, $L: \left(\frac{76}{29}, \frac{-75}{29}, \frac{202}{29}\right) + t(3,2,-5)\ ,\ t \in \mathbb{R}$

Ejercicio #3: Sean L_1 y L_2 rectas definidas por las ecuaciones

$$L_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = z-2 \qquad L_2 : (x,y,z) = (3,2,1) + t(2,1,-1), \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine las ecuaciones paramétricas de la recta L_3 que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

- ⓐ L_3 contiene el punto de intersección entre L_1 y L_2
- ⓑ L_3 es perpendicular a L_1 y L_2

Condición ⓐ

$$L_1 : \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 2+t \\ z = 1-t \end{cases}$$

Ahora
$$\begin{cases} 2+3\lambda = 3+2t \\ 1-\lambda = 2+t \\ 2+\lambda = 1-t \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1-t-2 \Rightarrow \lambda = -1-t$$

$$2+3(-1-t) = 3+2t \Rightarrow 2-3-3t = 3+2t$$
$$\Rightarrow 2-3-3 = 2t+3t$$
$$\Rightarrow -4 = 5t$$
$$\Rightarrow -\frac{4}{5} = t$$

Así, el punto de intersección entre L_1 y L_2 es:

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 2+t \\ z = 1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7/5 \\ y = 6/5 \\ z = 9/5 \end{cases} \qquad P = \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

Condición (b) Como $L_3 \perp L_1$ y $L_3 \perp L_2$, entonces $u_1 = (3, -1, 1)$ y $u_2 = (2, 1, -1)$, vectores directores de L_1 y L_2, respectivamente, se tiene que:

$$w = u_1 \times u_2 \Rightarrow w = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow w = \hat{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow w = \hat{i}\,(-1 \cdot -1 - 1 \cdot 1) - \hat{j}\,(3 \cdot -1 - 2 \cdot 1) + \hat{k}\,(3 \cdot 1 - 2 \cdot -1)$$

$$\Rightarrow w = \hat{i}\,(0) - \hat{j}\,(-5) + \hat{k}\,(5)$$

$$\Rightarrow w = (0, 5, 5)$$

Así

$$L_3 : (x, y, z) = \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5} \right) + t\,(0, 5, 5) \quad , \; t \in \mathbb{R}.$$

$$L_3 : \begin{cases} x = 7/5 \\ y = 6/5 + 5t \\ z = 9/5 + 5t \end{cases} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

Distancia de un punto a una recta

Sea L una recta, dada por $L : (x, y, z) = P + t \cdot u$. Así. se quiere calcular la distancia mínima de un punto Q a L y también, el punto $Q' \in L$ en el que se alcanza este mínimo, entonces, la distancia mínima es la longitud del segmento perpendicular que va desde Q a L.

La distancia mínima de Q a la recta L se puede calcular de varias formas, a saber:

- **Usando proyecciones:** la distancia mínima de Q a la recta es $||PQ - \text{proy}_u^{PQ}||$ y esta distancia mínima se alcanza en $Q' = P + \text{proy}_u^{PQ}$
- **Usando el área de un paralelogramo:** si $P, R \in L$, el área del paralelogramo determinado por estos tres puntos es:

$$\begin{aligned} & A &&= \text{base} \cdot \text{altura} \\ \Longrightarrow & A &&= ||PR|| \cdot h \\ \Longrightarrow & A &&= ||PQ \times PR|| \\ \Longrightarrow & d(Q, L) &&= h \\ \Longrightarrow & h &&= \frac{||PQ \times PR||}{||PR||} \end{aligned}$$

  Como se puede tomar $R \in L$ tal que $||PR|| = ||u||$, se tiene la fórmula: $d(Q, L) = \dfrac{||PQ \times u||}{||u||}$

- **Usando cálculo algebraico:** como $d(Q, L) = d(Q, Q')$, donde $Q' = P + t_m \cdot u$ y como $QQ' \perp u$, entonces:

$$\begin{aligned} & (Q - Q') \cdot u &&= 0 \\ \Longrightarrow & (Q - P - t_m \cdot u) \cdot u &&= 0 \\ \Longrightarrow & t_m &&= \frac{(Q - P) \cdot u}{u \cdot u} \end{aligned}$$

  De aquí, se tiene que:

$$d(Q, L) = d(Q, Q'), \text{ con } Q' = P + \frac{(Q - P) \cdot u}{||u||^2} u = P + \text{proy}_u^{PQ}$$

- **Usando cálculo diferencial:** se puede calcular la distancia $d(Q, L)$ resolviendo un problema de optimización, es decir, se debe minimizar $f(t) = ||Q - Q'||^2 = ||Q - P - t \cdot u||^2$, se deriva respecto a t y se obtiene que $t = t_m$.

Ejercicio: Calcule la distancia del punto $P = (1, -1, 1)$ a la recta con ecuación:

R/ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 2, 2), \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

El vector director de la recta dada es $u = (2,2,2)$ y un punto de la recta es $Q = (1,1,1)$

La distancia de P a la recta es: $\dfrac{\|\overrightarrow{PQ} \times u\|}{\|u\|}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= Q - P \\ &= (1,1,1) - (1,-1,1) \\ &= (0,2,0)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times u = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4, 0, -4)$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{PQ} \times u\| &= \|(4,0,-4)\| \\ &= \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|(2,2,2)\| \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalmente, $\dfrac{\|\overrightarrow{PQ} \times u\|}{\|u\|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ ul}$$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Determine los tres tipos de ecuaciones de la recta M si se sabe que dicha recta contiene al punto $T(-2,4,7)$ y tiene como vector director a $w=(2,-3,5)$

Ejercicio #2: Dadas las rectas

$$M:\begin{cases} x=5-4k \\ y=-2k+3 \quad , \text{con } k\in\mathbb{R} \\ z=2k \end{cases} \qquad L:\frac{x-1}{3}=y-2=\frac{z-1}{4}$$

Halle para cada recta un vector director y dos puntos que le pertenecen.

Ejercicio #3: Sean L_1 y L_2 rectas con ecuaciones respectivas:

$$L_1:(x,y,z)=(1,1,1)+t(1,-1,1), \text{con } t\in\mathbb{R} \qquad L_2:\begin{cases} x=3-s \\ y=-1+s \quad , \text{con } s\in\mathbb{R} \\ z=1+2s \end{cases}$$

Pruebe que L_1 y L_2 se intersecan perpendicularmente y determine el punto en el cual L_1 y L_2 se intersecan.

R/ $\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$

Ejercicio #4: Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-2,4)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $B(-5,7,0)$ y $C(6,-3,3)$

R/ $(11t+1,-10t-2,3t+4)$, con $t\in\mathbb{R}$

Ejercicio #5: Determine la distancia del punto $Q=(1,3,-2)$ a la recta con ecuación:

R/ $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

$$L:\frac{x}{2}=\frac{1-y}{3}=z+2$$