Distribuciones para variables aleatorias discretas

Prueba de Bernoulli

Es el experimento asociado a la extracción de una bola de una urna. Si se realizan varias pruebas de Bernoulli estas pueden ser:

- **Pruebas independientes:** las extracciones se realizan con reposición.
- **Pruebas dependientes:** las extracciones se realizan sin reposición.

Distribución binomial

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución binomial y se denota como:

$$X \sim B(n, p)$$

con n, p parámetros.

En 15 jugados cual es la proba de que pase x cosa?

- **Características**
  1. Se realizan n extracciones con reposición.
  2. Existe una probabilidad de éxito fija por cada extracción.

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$n =$ Cantidad de objetos, $\binom{n}{k} = C(n, k)$

q = Prueba de fracaso

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$

Para calcular Proba

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

$p =$ prueba de exito

- **Función generadora de momentos**

Su función generadora de momentos viene dada por:

$$m_X(t) = (p \cdot e^t + q)^n$$

con $q = 1 - p$

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = n \cdot p$	$Var(X) = n \cdot p \cdot q$
Promedio	

con $q = 1 - p$

$n =$ Cantidad de objetos
$p =$ prueba de exito
$q =$ prueba de fracaso
$K =$ valores de la suma

Se lanzan 15 dados idénticos. El juego consiste en ganar si se obtiene en 6 o más veces una cara mayor a 4, la persona repite el juego 15 veces. Determine la probabilidad que en 15 jugadas se gane 6 o más veces. binomial **R/ 0,3816**

Definir variable aleatoria

Sea X la cantidad de veces que se gana

n = Cantidad de objetos
p = prueba de exito
q = prueba de fracaso
K = valores de la suma

Apuntar datos

$n = 15 \qquad p = \frac{2}{6} \qquad q = 1 - p \qquad q = \frac{2}{3}$

Piden Proba de que gane 6 o mas, entonces

$P(X \geq 6)$, como dice $\geq$ es mejor hacer complemento

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$$

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

$$1 - \sum_{k=0}^{5} c(n,k) \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Esto en la calcu

$$1 - \sum_{k=0}^{5} c(15,k) \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{15-k}$$

$$\approx \boxed{0,3816}$$

Un equipo de natación tiene un 0,65 de probabilidad de ganar cada vez que hay una competencia. Si hay 10 competencias:

a) Calcule la probabilidad de ganar más de la mitad de las competencias R/ 0,7514

$n = 10 \quad p = 0{,}65 \quad q = 0{,}35 \leftarrow 1-p$

mas de la mitad ≥ 6

n = Cantidad de objetos
p = prueba de exito
q = prueba de fracaso
k = valores de la suma

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{5} C(10,k) \cdot (0{,}65)^k \cdot (0{,}35)^{10-k}$$

$$\boxed{\approx 0{,}7514}$$

b) Calcule el número esperado de ganar las 10 competencias R/ 6,5

$n = 10 \quad p = 0{,}65$

$E(X) = 10 \cdot 0{,}65$

$\boxed{6{,}5}$

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = n \cdot p$	$Var(X) = n \cdot p \cdot q$

con $q = 1 - p$

Distribución geométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de extracciones realizadas antes de (o hasta) obtener el primer éxito. Se dice que X sigue una distribución geométrica y se denota como: Importante

det proba antes o hasta el x intento

$$X \sim G(p)$$

con p parámetro.

- **Características**

1. Se realizan extracciones con reposición.
2. p es la probabilidad de éxito.

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, \ldots\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Empieza en 1

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$ ← Importante

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$ Empieza en 0

n= Cantidad de objetos
p= prueba de exito
q= prueba de fracaso
K= valores de la suma

- **Función de distribución acumulada**

Su función de distribución acumulada viene dada por:

$$F_X(k) = 1 - q^{k+1}$$

con $q = 1 - p$

- **Función generadora de momentos**

Su función generadora de momentos viene dada por:

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t \cdot q}$$

con $q = 1 - p$.

Medidas de tendencia central

Esperanza	Varianza
$E(X) = \frac{q}{p}$	$Var(X) = \frac{q}{p^2}$

con $q = 1 - p$

Digamos que Azul

En una caja hay 15 bolas de colores, de las cuales 6 son de un color distinto de rojo y las demás rojas. El color favorito de un niño es el rojo, por lo que saca una bola de la caja y si no es de color rojo la devuelve y así sucesivamente hasta obtener una roja ¿Cuál es la probabilidad de que el niño obtenga la primera bola roja después de la décima extracción inclusive? R/ 0,0001

6 Azules, 9 rojas, 15 en total

$p = \frac{9}{15}$ $\quad q = \frac{2}{5}$ ← $1-p$

n = Cantidad de objetos
p = prueba de exito
q = prueba de fracaso
K = valores de la suma

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{9}{15} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k$$

$$\approx \boxed{0,0001}$$

- **Función de distribución de probabilidad**

  Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

  $$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$

  con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

- **Función de distribución acumulada**

  Su función de distribución acumulada viene dada por:

  $$F_X(k) = 1 - q^{k+1}$$

  con $q = 1 - p$

Se puede usar cualquiera

Una central telefónica está permanentemente ocupada. Si la probabilidad de lograr hacer una llamada en los momentos de mayor congestión es del 6%, calcule la probabilidad de hacer entre 7 y 10 intentos (inclusive) para lograr comunicarse. R/ 0,1421

(7 hasta 10) hasta lograr comunicarse

$p = 0,06$ $\quad q = 0,94$

Cuando hay rangos es mejor no hacer complemento

$$P(7 \leq x \leq 10) = \sum_{k=7}^{10} 0,06 \cdot (0,94)^k$$

$$\approx \boxed{0,1421}$$

Distribución hipergeométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución hipergeométrica y se denota como:

$$X \sim H(n, N, b)$$

con n, N y b parámetros.

Con muestras
De 300 personas
se atienden 30 y

- **Características**

1. Se realizan n extracciones sin reposición.
2. Inicialmente la urna contiene b éxitos y r fracasos, donde $b + r = N$ y $n \leq N$

N = Total de elementos de la poblacion 300
n = Cantidad de elementos de la muestra 30
b = Cantidad de elementos que cumplen
r = Cantida de elementos que no cumplen
K = valores de la suma

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

con $R_X = \{\max\{0, n - r\}, \min\{n, b\}\}$ ← Rango

$$\frac{C(b,k) \cdot C(N-b, n-k)}{C(N, n)}$$

- **Función generadora de momentos**

La función generadora de momentos de esta distribución viene dada por:

$$m_X(t) = \frac{\binom{N-k}{n} {}_2F_1(-n; -k; N-k-n+1; e^t)}{\binom{N}{n}}$$

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = \frac{b \cdot n}{N}$	$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{b}{N}\right) \cdot \frac{b \cdot n}{N}$

A un centro hospitalario llegan 100 personas con síntomas de influenza porcina. Por limitaciones de espacio y médicos, solamente se pueden evaluar a 30 de ellos al azar. Si en total 25 de los 100 pacientes tiene en realidad influenza:

a) Determine el rango de la variable aleatoria X R/ $R_X = \{0, 25\}$

Sea X la cantidad de personas con influenza

$n = 30$
$N = 100$
$b = 25$

N= Total de elementos de la poblacion
n = Cantidad de elementos de la muestra
b= Cantidad de elementos que cumplen
r= Cantida de elementos que no cumplen
K= valores de la suma

$$R_X = \{\max(0, n-N+b), \min(n,b)\}$$
$$\{\max(0, 30-100+25), \min(30, 25)\}$$
$$\{\max(0,-45), \min(30, 25\}$$
$$\boxed{\{0, 25\}} //$$

b) Determine la probabilidad de que en dicho día se detecten más de doce casos con influenza porcina R/ 0,0068

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

con $k = \{\text{máx}\{0, n-r\}, \text{mín}\{n, b\}\}$

$n = 30$ $N = 100$ $b = 25$

$$P(\underbrace{X > 12}_{K}) = 1 - P(X \leq 12)$$ ← Sino sería hasta ∞

13, 14, ... +∞

$$1 - \sum_{k=0}^{12} \frac{c(25, k) \cdot c(100-25, 25-k)}{c(100, 30)}$$

$$\approx \boxed{0,0068}$$

David tiene en un recipiente 10 canicas, de las cuales 4 son coquitos (canicas blancas) Él ha decidido regalarle a Hernán n canicas extraídas al azar del recipiente. Se sabe que la probabilidad que Hernán reciba 2 coquitos como regalo de David es de $\frac{3}{7}$ ¿Cuántas canicas le regaló David a Hernán?

R/ $n = 4 \vee n = 6$

$n = ?$ $N = 10$ $b = 4$

N = Total de elementos de la poblacion
n = Cantidad de elementos de la muestra
b = Cantidad de elementos que cumplen
r = Cantida de elementos que no cumplen
K = valores de la suma

$$P(\underbrace{x=2}_{K}) = \frac{3}{7}$$

$$\frac{C(4,2) \cdot C(10-4, n-2)}{C(10,n)} = \frac{3}{7} \qquad C(a,b) = \frac{a!}{b!\,(a-b)!}$$

$$\frac{\frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{(10-4)!}{(n-2)!\,(10-4-(n-2))!}}{\frac{10!}{n!(10-n)!}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{\frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{6!}{(n-2)!\,(8-n)!}}{\frac{10!}{n!(10-n)!}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{6 \cdot \frac{6!}{(n-2)!\,(8-n)!}}{\frac{10!}{n!(10-n)!}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{6 \cdot 6! \cdot n! \cdot (10-n)!}{(n-2)! \cdot (8-n)! \cdot 10!}$$

$$\frac{6\cdot 6!\cdot n!\cdot(10-n)!}{(n-2)!\cdot(8-n)!\cdot 10!}$$

$$\frac{6\cdot 6!\cdot n(n-1)\cancel{(n-2)!}\cdot(10-n)(9-n)\cancel{(8-n)!}}{\cancel{(n-2)!}\,\cancel{(8-n)!}\,(10)!} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{6\cdot 6!\cdot(n^2-n)(90-10n-9n+n^2)}{10!} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{(n^2-n)(n^2-19n+90)}{840} = \frac{3}{7}$$

$$7(n^4-19n^3+90n^2-n^3+19n^2-90n) = 2520$$
$$7(n^4-20n^3+109n^2-90n) = 2520$$
$$n^4-20n^3+109n^2-90n = 360$$
$$n^4-20n^3+109n^2-90n-360 = 0$$

$n_1 = 5-2\sqrt{10}$ $\quad n_2 = 5+2\sqrt{10}$, $n_3 = 6$, $n_4 = 4$

$$\boxed{R/\ \ n=6 \ \vee\ n=4}$$

Distribución de Poisson

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de resultados que se obtienen en una unidad o intervalo, para experimentos aleatorios. Se dice que X sigue una distribución Poisson y se denota como:

$$X \sim P(\lambda)$$

λ es el promedio (Esperanza)

con λ parámetro.

- **Características**

Siempre dicen que es de Poisson

1. Se necesita fijar una unidad t (longitud, tiempo, entre otros)
2. Se debe establecer el número promedio de resultados λ por unidad t.

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$

$E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$

Se ha publicado que la razón de personas que se infectan de influenza porcina en el mundo sigue aproximadamente una distribución de Poisson, con un promedio de 45 personas infectadas por día.

a) Determine la probabilidad que menos de 35 personas sean infectadas mañana a nivel mundial R/ 0,0540

Sea X la cantidad de personas infectadas

$\lambda = 45$ infectadas por día

$$P(X < 35) = \sum_{k=0}^{34} \frac{45^k \cdot e^{-45}}{k!}$$

$$\boxed{\approx 0,540}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten más de 50 personas infectadas por influenza en el siguiente fin de semana (sábado y domingo)? R/ 0,9999

Sea X el rango de días (2)

$\lambda = 45 \cdot x$

$\lambda_x = 45 \cdot 2 = 90$

$P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50)$

$$1 - \sum_{k=0}^{50} \frac{90^k \cdot e^{-90}}{k!}$$

$$\approx \boxed{0,9999}$$

La probabilidad que una persona tenga una mala reacción a una vacuna es de 0,001. Si se tiene una población de 2000 personas. Determine:

a) La probabilidad que 3 personas tengan una mala reacción R/ 0,1804

Se puede con Binomial o Poisson

$n = 2000 \quad p = 0,001 \quad q = 0,999$

- Función de distribución de probabilidad

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

$P(\underbrace{X = 3}_{k}) = c(2000, 3) \cdot (0,001)^3 \cdot (0,999)^{2000-3}$

$\approx 0,1805$

$n =$ Cantidad de objetos
$p =$ prueba de exito
$q =$ prueba de fracaso
$k =$ valores de la suma

aproximación de la distribución Binomial por la distribución de Poisson.

Aunque como n es grande y p pequeño, se puede usar la aproximacion de Poisson para encontrar λ

Esperanza
$E(X) = n \cdot p$
Promedio

$\lambda = n \cdot p$

$\lambda = 2000 \cdot 0,001$

$\lambda = 2$

Entonces si $\lambda = 2$

$$\frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0,18044$$

$$\boxed{0,1805}$$

$b)$ La probabilidad que más de 2 personas tengan una mala reacción

$n = 2000 \quad p = 0{,}001 \quad q = 0{,}999$

$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2)$

$$1 - \sum_{k=0}^{2} c(2000, k) \cdot (0{,}001)^k \cdot (0{,}999)^{2000-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}3233}$$

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2)$

$$1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{2^k \cdot e^{-2}}{k!}$$

$$\approx \boxed{3233}$$

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$