Series

Criterios para determinar el valor de convergencia de una serie

- **Criterio de la Divergencia (CD)**:

  Determine el carácter de las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ R/ Diverge
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ R/ No decide
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n}$ R/ No decide
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ R/ No decide
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ R/ No decide
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)$ R/ Diverge
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ R/ Diverge
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ R/ Diverge
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n}{1+n}$ R/ Diverge
10. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{8+m^2}$ R/ No decide
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{k^5+243}$ R/ No decide
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k+2^k}$ R/ Diverge
13. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p+4}}$ R/ No decide
14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ R/ Diverge
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ R/ Diverge
16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ R/ Diverge
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ R/ Diverge
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3n^2}{4n^2-1}$ R/ Diverge
19. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{1+3^j}{j+e^j}$ R/ No decide
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$ R/ Diverge
21. $\displaystyle\sum_{k=7}^{\infty} \frac{5-3k^2}{7k+5k^2} + \frac{2^k}{k}$ R/ Diverge

- **Criterio de la Serie Geométrica (CSG):**

Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{5 \cdot 2^{-i}}$ R/ Diverge
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4^{k+1}}{5^{k}}$ R/ $\frac{256}{25}$
3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k+2} \cdot 3^{k-1}}{63 \cdot 7^{k-3}}$ R/ 32
4. $\displaystyle\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{5 - 2^{k+1}}{3^{2k}}$ R/ $\frac{2187}{56}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n} + 3^{n-1}}{4^{2n}}$ R/ $\frac{94}{39}$
6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{n} - 1}{4^{2n+1}}$ R/ $\frac{83}{6\,720}$
7. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^{k} - 2^{k+1}}{5^{k-3}}$ R/ $\frac{245}{6}$
8. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - 2 \cdot 5^{k-1}}{7^{k+1}}$ R/ $\frac{61}{196}$
9. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} 3^{j} \left(\frac{8 - 5 \cdot 2^{j}}{11^{j}}\right)$ R/ $\frac{-27}{11}$
10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-2)^{n-2} \cdot 3^{-2n+1}$ R/ $\frac{1}{33}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} - 2^{k}}{5^{k+1}}$ R/ $\frac{-1}{2}$
12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n} + 3^{n-1}}{6^{n-2}}$ R/ $\frac{48}{7}$
13. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n} + 3^{n-2}}{5^{n+3}}$ R/ $\frac{4}{9\,375}$
14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{k-3} + 1}{3^{k}}$ R/ $\frac{11}{20}$
15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n} + 3^{n-2}}{6^{n}}$ R/ $\frac{5}{36}$
16. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3} + 6}{5^{n}}$ R/ $\frac{149}{350}$
17. $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3i} + 4^{i}}{7^{i+3}}$ R/ Diverge
18. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2)^{k+2}}{3^{k-2}}$ R/ $\frac{-32}{5}$
19. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{-3n-1}}{3^{n-2}}$ R/ $\frac{-3}{400}$
20. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1} - 4^{2-k}}{6^{k}}$ R/ $\frac{-3502}{207}$
21. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1 - (-3)^{n+2}}{2^{2n-1}}$ R/ $\frac{821}{336}$
22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{9 \cdot 5^{-2n}}{(-3)^{2-n}}$ R/ $\frac{-27}{17\,500}$

- **Criterio de la Serie Telescópica (CST):**

Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ R/ $\frac{7}{24}$
2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)}$
3. $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ R/ $\frac{1}{5}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$ R/ $\frac{5}{3}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+5)}$ R/ $\frac{4}{15}$
6. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)(2k+5)}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$ R/ $\frac{1}{12}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ R/ $\frac{1}{4}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ R/ $\frac{1}{4}$
10. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{4k^2-1}$ R/ 1
11. $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \frac{9}{4j^2-1}$
12. $\displaystyle\sum_{j=5}^{\infty} \frac{6}{9j^2-3j-2}$ R/ $\frac{2}{13}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2+3n+2}$ R/ $\frac{-1}{2}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+24n+7}$ R/ $\frac{11}{28}$
15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ R/ $\frac{1}{2}$
16. $\displaystyle\sum_{p=3}^{\infty} \frac{p}{p-1} - \frac{p+2}{p+1}$ R/ $\frac{5}{6}$
17. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^{k+1}}$ R/ $\frac{4}{27}$
18. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(p)}{p+1} - \frac{\cos(p-1)}{p}$ R/ -1
19. $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}}$ R/ Diverge
20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ R/ Diverge
21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ R/ $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$ R/ $\ln(3)$
23. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{j^2+j+1}\right)$ R/ $\frac{\pi}{4}$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2^n-2^{n-1}}{1+2^{2n-1}}\right)$ R/ $\frac{\pi}{4}$

- **Ejercicios combinados:**

  Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

  1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n^2-n) \cdot 3^n + 5^n}{5^n \cdot (n^2-n)}$
  2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{2^{1-2n}}{3^{n-1}}$
  3. $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}$
  4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - 5^{3-n}$
  5. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \cos\left(\frac{3\pi}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{n+2}\right) - 2^{3-n}$
  6. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{9 \cdot 5^{-k}}{(-3)^{2-k}} - \frac{2}{k^2-1}$ R/ $\dfrac{-1\,081}{600}$

- **Ejercicios especiales:**

  1. Considere la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Utilice el criterio de la divergencia para verificar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n}{4n+b_n}$ diverge.
  2. Determine todos los valores de b para que la serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{b^n} - \frac{n+1}{b^{n+1}}$ converja y su suma sea igual a $\dfrac{5}{b^5}$ R/ $b > 1$
  3. Considere la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(5p)^n}{2^{n+1}}$
     a) Determine para qué valores de $p \in \mathbb{R}$, la serie es convergente. R/ $\left]\dfrac{-2}{5}, \dfrac{2}{5}\right[$
     b) Para los valores de p donde la serie converge, determine el valor de la suma infinita, en términos de p. R/ $\dfrac{125p^3}{16-40p}$
  4. Considere la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^{n+1}}{(3p)^{n-1}}$, donde p es constante y $p \neq 0$
     a) Determine para qué valores de $p \in \mathbb{R}$, la serie es convergente. R/ $p \in \left]\dfrac{-3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$
     b) Para los valores de p donde la serie converge, determine el valor de la suma infinita, en términos de p. R/ $\dfrac{12p^4}{3-2p}$

5. Calcule el valor de la suma de la serie $N = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right) \dots \left(1+\frac{n}{2}\right)}$, si se sabe que $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{2}{2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{2}\right) = \dfrac{(n+2)!}{2^{n+1}}$ es válida para todo $n \geq 1$ R/ 2

Criterios para determinar el carácter de una serie

- **Criterio de la Integral (CI) o Maclaurin-Cauchy**

Determine si las siguientes series convergen o divergen.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot e^{-n}$ R/ Converge
2. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ R/ Converge
3. $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{1-n^2}$ R/ Converge
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n^3}$ R/ Converge
5. $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-k^2}$ R/ Converge
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ R/ Converge
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+n^2}$ R/ Converge
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ R/ Diverge
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$ R/ Converge
10. $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j \cdot \ln^2(j)}$ R/ Converge
11. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln(k)}$
12. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^3(k)}$ R/ Converge
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ R/ Diverge
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ R/ Converge
15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ R/ Diverge
16. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ R/ Diverge
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(n)]^2}$ R/ Converge
18. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln(k)} \cdot k}$ R/ Converge
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{2+\ln(n)}}$ R/ Diverge
20. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{e^{4n^2-1}}$ R/ Converge
21. $\sum_{p=3}^{\infty} \frac{-1}{(2p-1) \cdot \ln^2(2p-1)}$ R/ Converge
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}$ R/ Converge
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}$ R/ Converge

- **Criterio de las $p-$Series**

Determine si las siguientes series convergen o divergen.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ R/ Converge
2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{3}{p^3}$ R/ Converge
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k^{9/2}}$ R/ Converge
4. $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} 5\, m^{1/3}$ R/ Diverge
5. $\displaystyle\sum_{t=2}^{\infty} \frac{2}{t^{4/3}}$ R/ Converge
6. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{k^{91/4}}$ R/ Converge
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3}$ R/ Converge
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3}{k^4}$ R/ Diverge
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12\, k^3}{k^5}$ R/ Converge
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^{2/3}}$ R/ Diverge
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2}}{k}$ R/ Diverge
12. $\displaystyle\sum_{p=5}^{\infty} \frac{p^{5/4}}{p^4}$ R/ Converge
13. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^{1/2}}{p^{3/2}}$ R/ Diverge
14. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \sqrt[3]{k^4}$ R/ Diverge
15. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^6}}{\sqrt[5]{k^{25}}}$ R/ Converge
16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt[3]{k^9}}$ R/ Converge
17. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^{k+3}\cdot k^2}{5^{k+4}}$ R/ Diverge
18. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{3^p}{3^{p+1}\cdot p}$ R/ Diverge
19. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{k^{15}}} + \frac{k^2}{k^3}$ R/ Diverge
20. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[4]{k^8}} + \frac{3^k}{3^{k+2}\cdot k^2}$ R/ Converge
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n\sqrt{n}}$ R/ Converge

- **Criterio de Comparación Directa (CCD)**

Determine si las siguientes series convergen o divergen.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{1-n^2}$ R/ Converge
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{5j-2}$ R/ Diverge
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ R/ Converge
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}$ R/ Diverge
5. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1+\sqrt{j}}{j}$ R/ Diverge
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k+k}{2^k-1}$ R/ Diverge
7. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt[3]{k^2-1}}$ R/ Diverge
8. $\displaystyle\sum_{h=2}^{\infty} \frac{\ln(h)}{h^5}$ R/ Converge
9. $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{4-3\,\mathrm{sen}(p)}{p-1}$ R/ Diverge
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\cos(n)}{3n+5}$ R/ Diverge
11. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2}$ R/ Converge
12. $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty} \frac{2+\cos(q)}{q^2+1}$ R/ Converge
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n)}{3n^2+1}$ R/ Converge
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n)}{5^n}$ R/ Converge
15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+\arctan(n)}{2^n}$ R/ Converge
16. $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{4+\arctan(k)}{(k-4)^2}$ R/ Converge
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\mathrm{sen}(n)}{\sqrt[3]{n^5}}$ R/ Converge
18. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2\arctan(n)+3\pi}{2\sqrt[4]{n^3}}$ R/ Diverge
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(n^2)+1}{7^n}$ R/ Converge
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(n^2+1)+3}{e^n+n}$ R/ Converge
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(n^2+1)+3}{3e^{2n}+n}$ R/ Converge
22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3-\mathrm{sen}^2\left(\frac{4\pi}{n}\right)}{4n-2}$ R/ Diverge
23. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2+\cos^2(k)}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$ R/ Diverge
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n-1)}{n^3+1}$ R/ Converge
25. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2+\cos^2(n)}{\sqrt[3]{n^5-2n}}$ R/ Converge

- **Criterio de Comparación en el Límite (CCL)**

Determine si las siguientes series convergen o divergen.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ R/ Diverge
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3+k^2+5}$ R/ Converge
3. $\displaystyle\sum_{m=4}^{\infty} \frac{4m+1}{2m^3-2m-1}$ R/ Converge
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$ R/ Converge
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-1}$ R/ Converge
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-4}$ R/ Converge
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}$ R/ Diverge
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5\sqrt{n}-12}$ R/ Diverge
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{n^2+2}}$ R/ Converge
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ R/ Diverge
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$ R/ Diverge
12. $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2+\sqrt{5m^3}}{3m^2-m+1}$ R/ Diverge
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+1}}{n^3+n+1}$ R/ Converge
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}$ R/ Converge
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{4n^3+1}$ R/ Diverge
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{4n^3+3n}$ R/ Diverge
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1/n}-1$ R/ Diverge
18. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j+3^{1-j}}{5^j\cdot(j+7)}$ R/ Converge
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ R/ Converge
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln(n)}$ R/ Diverge
21. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j+\ln(j)}{j^2+1}$ R/ Diverge
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2+\log(n)+5^n}$ R/ Converge
23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^4+5^n}{2n+n!}$ R/ Converge

- **Criterio de la Razón o Cociente (CC) o Criterio D'Alembert**

Determine si las siguientes series convergen o divergen.

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3n+5)!}{20n-7}$ R/ Diverge

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n!}$ R/ Converge

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}-n^4}{n!+3^n}$ R/ Converge

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n\cdot n!}$ R/ Converge

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k\cdot k!}{k^k}$ R/ Diverge

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2k)!}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}{n!}$ R/ Diverge

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{(2k)!}$ R/ Converge

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)]\, n!}{(2n+1)!}$ R/ Converge

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(2n+2)!}$ R/ Converge

12. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3i+1)}{2^{i+1}(i+1)!}$ R/ Diverge

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n^2}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot (3n+2)}$ R/ Converge

14. $\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2t)}$ R/ Converge

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ R/ Diverge

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k\cdot (k-1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}$ R/ Diverge

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot 3^n}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}$ R/ Diverge

18. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3k+2)}$ R/ Diverge

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ R/ Converge

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(2)\cdot \ln(3)\cdot \ldots \cdot \ln(n)}{n!}$ R/ Converge

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ R/ Diverge

22. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ R/ Diverge

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)}$ R/ Converge

- **Criterio de la Raíz (CR) o Criterio de Cauchy**

Determine si las siguientes series convergen o divergen.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2+1)^k}{4k^2+9}$ R/ Converge

2. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5}{(5-m)^m}$ R/ Converge

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(n)}{n^n}$ R/ Converge

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3n)^n}{(5n-1)^n}$ R/ Converge

5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^5\cdot(k^3+2)^{k+1}}{(2k+1)^{3k}}$ R/ Converge

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$ R/ Converge

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^n}$ R/ Converge

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ R/ Converge

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n+1}\right)^n$ R/ Diverge

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$ R/ Converge

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2-n+1}\right)^{5n}$ R/ Converge

12. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{2m-3}$ R/ Converge

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+1}\right)^{4n+3}$ R/ Converge

14. $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{3k}{k+2}\right)^{-k+1}$ R/ Converge

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3n^2-1}\right)^{n\cdot\ln(n)}$ R/ Converge

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^{\frac{-5n}{3}}$ R/ Converge

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 3^{2n+1}}{n^{2n}}$ R/ Converge

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ R/ Converge

19. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{j}\right)^{2j-1}}{e^{2j}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ R/ Diverge

21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k-1}}{e^{2k}}$ R/ Converge

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n-3}}{e^n}$ R/ Diverge

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sqrt[n]{n}+3\right)^n$ R/ Diverge

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+5n^2}{(1+2n)^n}$ R/ Converge

- **Ejercicios combinados**

Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n} \cdot n^2}{n^3+1} - \frac{1}{3^{-n+4}}$ R/ Diverge
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3n^2}{n^2+1}$ R/ Diverge

- **Ejercicios especiales**

1. Si $a \in \mathbb{R}$, con $a > 1$, determine las condiciones para a de tal manera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(1+a^n)}$ sea convergente.
2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n\dot{3}^n}$. Determine los valores de x para los cuales el criterio de la raíz garantiza que la serie dada es convergente.

Criterio de las Series Alternadas (CSA) o Criterio de Leibniz

1. Determine si $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{3k}{2k^2+1}$ converge o diverge.

2. Verifique que la serie dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n^2+1}$ es condicionalmente convergente.

3. Verifique que la serie dada por $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \left(\frac{3j-1}{5j+3}\right)^{2j+1}$ es absolutamente convergente.

4. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2n+1}}{(2n+1)!}$ es absolutamente convergente. R/ Sí

5. Determine si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+1}$ es condicionalmente convergente.

6. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{2n^2+1}$ converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

7. Determine si $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot k \cdot e^{-k^2}$ converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

8. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$ converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

9. Determine si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}$ converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge. R/ Condicional

10. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n \cdot n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}$ converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

11. Considere la serie dada por $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+7}$. Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Condicional

12. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{n^2 - 2}$. Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Condicional

13. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n} \cdot n^2}{n^3 + 1}$. Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Condicional

14. Encuentre para cuáles valores de x es condicionalmente convergente, absolutamente convergente o divergente la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln(k) \cdot \left(\frac{x+2}{4}\right)^k$

15. Si la función $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln^2(x)}$ es continua, positiva y decreciente, determine si la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k \cdot \ln^2(k)}$ diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente. R/ Absoluta

16. Si la función $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot [1 + \ln^2(x)]}$ es continua, positiva y decreciente, determine si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot [1 + \ln^2(k)]}$ es convergente o divergente. R/ Convergente

17. Sabiendo que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$ converge a un valor S, determine el menor valor de k, para el cual la suma parcial $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} (-1)^n \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$ aproxima a S con un error menor que 0,1

18. Asuma que la serie $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^k}{(2k+1)(2k+1)!}$ es convergente. Determine el menor valor para n de manera que S_n aproxime a S con un error menor a 10^{-6} R/ $n = 6$

19. Aproxime el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} + \ldots$, utilizando el menor número de términos que garanticen que el error de la aproximación sea menor a 10^{-3}.

20. Considere la serie dada por: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$. Si se sabe que es una serie alternada convergente a S:

    a) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,00001 R/ 6

    b) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ $\dfrac{2\,329}{3\,840}$

21. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$.

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Condicional

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor a 0,001

22. Considere la serie dada por $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k^3-1}$.

    a) Utilice el criterio de series alternadas para verificar que la serie S es convergente.

    b) Determine el menor valor para N de manera que S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error E_N tal que $E_N < 0,001$. R/ $N = 7$

23. Considere la serie dada por $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln(n)}{n}$

    a) Pruebe que la serie S es convergente.

    b) Determine el menor valor de N de manera que la suma parcial S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error tal, que $E_n \leq 10^{-1}$ R/ $N = 35$

24. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3+1}$

 a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

 b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 9

 c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ $-0{,}4148$

25. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

 a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

 b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 7

 c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ 0,3678

26. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!}$

 a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

 b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 10

 c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ $-0{,}8646$

27. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

 a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

 b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 3

 c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ 0,5403

28. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)!}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ 0,5698

29. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-3)^m}{(m+2)^m}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 7

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ $-0{,}6030$

30. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{4^k}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 8

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ $-0{,}16$

31. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^{10}}{n!}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 18

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ 151,9342

32. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \sqrt{k}}{k^2-2}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 464

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ $-0{,}1610$

33. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)}}{5{,}7^n}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 5

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ 1,2127

34. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 7

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ $-0{,}2642$

35. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

    a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

    b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 49

    c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ 0,9159

36. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n!}{(n+1)^n}$

   a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

   b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 13

   c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ 0,3441

37. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}$

   a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

   b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 8

   c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ $\dfrac{-2}{5}$

38. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{3k-9} - \frac{1}{3k} \right)$

   a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

   b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 101

   c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ $-0{,}1843$

39. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n^2-n) \cdot 3^n + 5^n}{5^n \cdot (n^2-n)}$

   a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

   b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 100

   c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b* R/ $\dfrac{49}{40}$

40. Considere la serie dada por $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{\ln(\ln(k+2))}$.

   a) Utilice el criterio de series alternadas para verificar que la serie S es convergente.

   b) Determine el menor valor para n de manera que S_n aproxime el valor de la suma de la serie S con un error E_n tal que $E_n < 0,01$. R/ $n = e^{e^{100}} - 3$

   c) Analice si S es absoluta o condicionalmente convergente. R/ Condicional

41. Considere la serie dada por $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

   a) Pruebe que S es absolutamente convergente.

   b) Determine el menor valor para n de manera que S_n aproxime a S con un error menor que 0,05 R/ $n = 4$

   c) Aproxime la suma de la serie usando el valor de n obtenido anteriormente. R/ $-0{,}7981$

42. Considere la serie dada por $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$

   a) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)!} = 0$, verifique que la serie es convergente.

   b) Determine el menor valor para k de manera que S_k aproxime a S con un error menor que 10^{-3} R/ 9

   c) Aproxime la suma de la serie usando el valor de k obtenido anteriormente. R/ $\dfrac{243}{492\,800}$