Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Cálculo y álgebra lineal

Tiempo: 2,5 horas
Puntaje: 30 puntos
I Semestre de 2019
Sábado 30 de marzo

I Examen Parcial – Solución

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

---

1. Determine todos los valores $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 = i - 1$, y represéntelos gráficamente. **(4 pts)**

Solución

$|z| = \sqrt{2}$ y $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{3\pi}{4}$

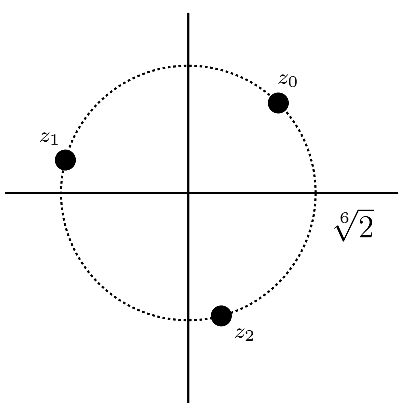
Luego, $z = \left(\sqrt{2}e^{\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)i}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)i}$

Así, todos los valores z que cumplen lo indicado son:

$z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{\pi}{4}\, i}$

$z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{11\pi}{12}\, i}$

$z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{19\pi}{12}\, i}$



2. Sea $p(x) = x^3 - ax^2 + x - a$. Si se sabe que i es raíz doble de $p(x)$ (es decir, i es raíz de multiplicidad dos), halle el valor de a. **(3 pts)**

Solución

Al realizar la división del polinomio entre $x - i$ se obtiene que $p(x) = x^3 - ax^2 + x - a = (x - i)\left(x^2 + (i - a)\, x - ai\right)$

Como i es raíz doble, i es cero de $x^2 + (i - a)\, x - ai$. De esta manera, $-2 - 2ai + 0 \Rightarrow a = i$.

3. Sean $z = 2 + abi$ y $w = 2a - b + 3i$. ¿Cuál debe ser la relación entre los números reales a y b para que $\operatorname{Re}(zw) = 0$? **(3 pts)**

Solución

$zw = 4a - 2b - 3ab + (6 + 2a^2b - ab^2)\, i$

$\operatorname{Re}(zw) = 0 \Rightarrow 4a - 2b - 3ab = 0 \Rightarrow a = \dfrac{2b}{4-3b}$

4. Si $w \in \mathbb{C}$, obtenga la forma rectangular de w, donde $w + e^i = 2\operatorname{Ln}(1-i)$. **(4 pts)**

Solución

$\operatorname{Ln}(1-i) = \operatorname{Ln}\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{-\pi}{4}i}\right) = \ln\left(\sqrt{2}\right) - \dfrac{\pi}{4}i$

Así, $z = 2\operatorname{Ln}(1-i) - e^i = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{2}i - e^i = \ln 2 - \dfrac{\pi}{2}i - \cos 1 + i \operatorname{sen} 1$

Por lo tanto, $z = \ln 2 - \cos 1 + \left(\operatorname{sen} 1 - \frac{\pi}{2}\right) i$

5. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determine $(AB)^T + 5C^{-1}$ si se tiene que: **(4 pts)**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\dfrac{3}{a} \\ & & \\ 1 & -3 & -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución

$$(AB)^T + 5C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ \frac{3}{a} & \frac{-9}{a} & \frac{-4}{a} \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a & 8 & 1 \\ -2-5a & -5 & 4 \\ \frac{3}{a}+5 & \frac{-9}{a} & \frac{-4}{a} \end{pmatrix}$$

6. Considere el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$. Si con base en el método de Gauss–Jordan la matriz $(A|B)$ es reducida a la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, determine el conjunto solución de $AX = B$ y dos soluciones particulares. **(4 pts)**

   Solución

   Si se tiene que $X = (x \;\; y \;\; z)^T$, entonces de la matriz del enunciado se concluye $\begin{cases} x = 2 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

   Por lo tanto, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$

   Con $z = 0$ y $z = 1$ se tienen las dos soluciones particulares $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Sean w y x constantes reales. Sin calcular A^{-1}, determine todos los valores de w para que A^{-1} exista, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & w & -1 \\ -w & 1 & w \\ 2 & 2x & -1 \end{pmatrix}$. **(4 pts)**

   Solución

   $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & w & -1 \\ -w & 1 & w \\ 2 & 2x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & w & -1 \\ 0 & 1 & w \\ 1 & 2x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & -1 \\ 1 & w \end{vmatrix} = w^2 + 1 \neq 0, \forall w \in \mathbb{R}$$

   Por lo que A posee inversa para todo valor de w (y para todo valor de x).

8. Sean A, B y R matrices de tamaños 3×3, tales que $|A| = 3$, $|B| = 5$ y $R = B^{-1}A^{-1}B$. Calcule $\left|-5R^T\right|$. **(4 pts)**

   Solución

   $$\left|-5R^T\right| = (-5)^3 |R| = -125 \left|B^{-1}A^{-1}B\right| = -125 \left|B^{-1}\right| \left|A^{-1}\right| |B| = -125 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{-125}{3}$$