Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	11
Fecha	Lunes 07 de octubre del 2024 (semana 12)
Contenidos	a) Determinantes
	b) Regla de Cramer
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Determinante

Dado que cada matriz cuadrada está relacionada con un único número real, el determinante puede ser considerado como una función que tiene como dominio el conjunto de la matrices cuadradas y cuyo codominio es el conjunto de los números reales. Ahora bien, el determinante de la matriz A puede denotarse como $\det(A)$ o bien $|A|$.

Menor de una matriz

Se define como el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de una matriz A, con $i, j \in [1, 2, \ldots, n]$ y se representa como M_{ij}^A

Cofactor de una matriz

Se define como el número dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}^A$

Matriz de cofactores

Es la matriz de orden n que se forma con los cofactores de la matriz A y se denota como $\bar{A}$.
El determinante de una matriz de orden dos puede calcularse de la siguiente manera:

Sea A una matriz de orden 2, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, así: $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Ahora bien, si es una matriz de orden n, con $n \geq 2$, el determinante se calcula de la siguiente manera:

1. **Determinante recorriendo fila:** $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot M_{ij}$, con i fijo y $1 \leq i \leq n$
2. **Determinante recorriendo columna:** $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} \cdot M_{ij}$, con j fijo y $1 \leq j \leq n$
3. **Determinante de una matriz triangular:** si A es una matriz triangular (superior o inferior) entonces su determinante es el producto de su diagonal, es decir $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Consideraciones sobre determinantes

Sea A una matriz de orden n, entonces:

1. Si A posee alguna fila nula, entonces $\det(A) = 0$
2. Si A posee dos filas idénticas, o bien, una fila es múltiplo de la otra, entonces $\det(A) = 0$

Ejercicio #1:

Calcule el determinante de la matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ R/ -60

Por fila:

$$= 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2\cdot 1\cdot[4\cdot -3 - 0\cdot -2] + 3\cdot -1\cdot[4\cdot 3 - 0\cdot 1]$$

$$= 2[-12+0] - 3[12-0]$$

$$= -60$$

Por columna:

$$= 4\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot 1\cdot[2\cdot -3 - 3\cdot 3] + 0 + 0$$

$$= 4[-6-9]$$

$$= 4\cdot -15$$

$$= -60$$

Ejercicio #2:

Determine el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 3 & k & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ R/ $k = 0 \vee k = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + K \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} K & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0 = 0$

$\Rightarrow 3 \cdot -1 \cdot [1 \cdot 4 - 2 \cdot 2] + K \cdot -1 \cdot [K \cdot 4 - 5 \cdot 2] + 0 = 0$

$\Rightarrow -3\,[4-4] - K\,[4K-10] = 0$

$\Rightarrow -3 \cdot 0 - K\,[4K-10] = 0$

$\Rightarrow -K\,[4K-10] = 0$

$\Rightarrow -K = 0 \quad \vee \quad 4K - 10 = 0$

$\Rightarrow K = 0 \quad \vee \quad 4K = 10$

$\Rightarrow K = 0 \quad \vee \quad K = \frac{5}{2}$

Ejercicio #3:

Calcule el determinante de la matriz $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & b+a \end{pmatrix}$ R/ 0

Operaciones elementales y determinantes

En este caso, al realizar operaciones entre las filas de una matriz A, es posible realizar las siguientes operaciones:

1. **Multiplicar una fila por un escalar distinto de cero** $(k \cdot F_i)$**:** en este caso, el determinante de A se multiplica por el escalar k.
2. **Sumar un múltiplo de una fila a otra** $(k \cdot F_j + F_i)$**:** en este caso el determinante de A se mantiene igual, no sufre alteraciones.
3. **Intercambiar dos filas** $(F_i \longleftrightarrow F_j)$**:** en este caso el determinante de A cambia de signo.

Ejercicio #1: Si $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ m+1 & n+b & 3+c \\ 3a & 6 & 3p \end{vmatrix} = 27$, calcule el valor de $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & 2 & p \\ m & n & 3 \end{vmatrix}$ sin desarrollar el determinante.

R/ -9

Sea $|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & 2 & p \\ m & n & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & 2 & p \\ 1+m & b+n & c+3 \end{vmatrix}$ pues $\widetilde{F_1 + F_3}$

$\Rightarrow 3|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 3a & 6 & 3p \\ 1+m & b+n & c+3 \end{vmatrix}$ pues $\widetilde{3F_2}$

$\Rightarrow -3|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1+m & b+n & c+3 \\ 3a & 6 & 3p \end{vmatrix}$ pues $F_2 \leftrightarrow F_3$

$\Rightarrow -3|A| = 27$

$\Rightarrow |A| = \dfrac{27}{-3}$

$\Rightarrow |A| = -9$

Ejercicio #2: Determine el valor de θ para que se cumpla la igualdad: R/ -5

$$\theta\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -g & -h & -i \\ 2g+d & 2h+e & 2i+f \\ -5a & -5b & -5c \end{vmatrix}$$

Sea $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow 2|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$ pues $2\widetilde{F_3}$

$\Rightarrow 2|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2g+d & 2h+e & 2i+f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$ pues $F_3 + \widetilde{F_2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2g+d & 2h+e & 2i+f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ pues $-\frac{1}{2}\widetilde{F_3}$

$\Rightarrow -5 \cdot -|A| = \begin{vmatrix} -5a & -5b & -5c \\ 2g+d & 2h+e & 2i+f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ pues $-5\widetilde{F_1}$

$\Rightarrow -5|A| = \begin{vmatrix} -g & -h & -i \\ 2g+d & 2h+e & 2i+f \\ -5a & -5b & -5c \end{vmatrix}$ pues $F_1 \leftrightarrow F_3$

$\Rightarrow -5|A| = \theta |A|$

$\Rightarrow \frac{-5\cancel{|A|}}{\cancel{|A|}} = \theta$

$\Rightarrow -5 = \theta$

Propiedades de los determinantes

Sean A y B matrices de orden n y α constante, entonces:

1. $\det(A) = \det(B) + \alpha \cdot \det(C)$
2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. $\det(A^T) = \det(A)$
4. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, con $\alpha \neq 0$
5. $\det(\operatorname{Adj}(A)) = [\det(A)]^{n-1}$
6. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ siempre que A sea invertible.

Matriz adjunta

Sea A una matriz de orden n, así la matriz adjunta de A denotada como $\operatorname{Adj}(A)$ viene dada por $\operatorname{Adj}(A) = C^T$, donde C es la matriz de cofactores. Por otro lado, si A es una matriz de orden n, entonces $A \cdot \operatorname{Adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$

Inversa y determinante

Si A es una matriz cuadrada, con $\det(A) \neq 0$, entonces su inversa viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}(A)}{\det(A)}$$

Si $\det(A) = 0$ entonces A no es invertible.

Ejercicio #1: Sean $C, D \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, tales que $|CD| = 4$ y $|2D| = 64$. Calcule $\left|DC^2D^T(4C)^{-1}\right|$ R/ $\frac{1}{2}$

Note que $|DC^2D^T(4C)^{-1}| = |D|\cdot|C^2|\cdot|D^T|\cdot|(4C)^{-1}|$ pues $|AB| = |A|\cdot|B|$

$= |D|\cdot|C|\cdot|C|\cdot|D|\cdot\frac{1}{|4C|}$ pues $|A^T| = |A|$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$= |D|\cdot|C|\cdot\cancel{|C|}\cdot|D|\cdot\frac{1}{4^3\cancel{|C|}}$ pues $|\alpha A| = \alpha^n|A|$

$= |D|\cdot|C|\cdot|D|\cdot\frac{1}{64}$

$= |D|\cdot|CD|\cdot\frac{1}{64}$ pues $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

$= |D|\cdot 4\cdot\frac{1}{64}$ pues $|CD| = 4$

$= |D|\cdot\frac{1}{16}$

$= 8\cdot\frac{1}{16}$ pues $|D| = 8$

$= \frac{1}{2}$

Aparte:

$|2D| = 64 \Rightarrow 2^3|D| = 64$

$\Rightarrow |D| = \frac{64}{8}$

$\Rightarrow |D| = 8$

Ejercicio #2: Sean A, B y C matrices de tamaño 5×5. Si se sabe que $CA = I_5 - 2CB$ y $|2B + A| = \dfrac{-1}{16}$, calcule $\det(C^T \cdot (2A + 4B)^2)$ R/ -64

Ejercicio #3: Sean A, B, X matrices de orden tres. Calcule $\left|(6A-3B)^{-1}X^T\right|$ si se sabe que se cumple que $2AX = I_3 + BX$ y $|2A-B| = 2$

R/ $\dfrac{1}{108}$

Note que $|(6A-3B)^{-1} \cdot X^T| = |(6A-3B)^{-1}| \cdot |X^T|$ pues $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$= \dfrac{1}{|6A-3B|} \cdot |X|$ pues $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ y $|A^T| = |A|$

$= \dfrac{1}{|3(2A-B)|} \cdot |X|$

$= \dfrac{1}{3^3\,|2A-B|} \cdot |X|$ pues $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

$= \dfrac{1}{27 \cdot 2} \cdot |X|$ pues $|2A-B| = 2$

$= \dfrac{1}{54} \cdot |X|$

$= \dfrac{1}{54} \cdot \dfrac{1}{2}$ pues $|X| = \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{108}$

Aparte: $2AX = I_3 + BX \Rightarrow 2AX - BX = I_3$

$\Rightarrow (2A-B)X = I_3$

$\Rightarrow \det[(2A-B)X] = \det(I_3)$

$\Rightarrow \det(2A-B) \cdot \det(X) = 1$

$\Rightarrow 2 \cdot \det(X) = 1$ pues $\det(2A-B) = 2$

$\Rightarrow \det(X) = \dfrac{1}{2}$

Regla de Cramer

Esta regla puede utilizarse cuando el número de ecuaciones y la cantidad de incógnitas del sistema sea la misma.

Sea A una matriz de orden n la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y sea A_j el resultado de sustituir la columna j de A por los valores numéricos a los cuales está igualado el sistema, así:

1. Si $\det(A) \neq 0$, entonces $x_j = \dfrac{\det(M_j^A)}{\det(A)}$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$
2. Si $\det(A) = 0$ el sistema puede tener infinitas soluciones o no tener soluciones (ser inconsistente)
3. Si existe algún $|M_j^A| \neq 0$ el sistema no tiene solución.
4. Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones, entonces el sistema tiene solución única si y solamente si $\det(A) \neq 0$

Ejercicio: Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema R/ $(2, -1, 3)$

$$\begin{cases} -x + 4y + 2z = 0 \\ x + y + z = 4 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

Representación matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Sea } |A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 9$$

$$|M_i^A| = \begin{array}{c} x \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = 18 \qquad |M_i^B| = \begin{array}{c} y \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = -9 \qquad |M_i^C| = \begin{array}{c} z \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 27$$

Así

$$x = \frac{|M_i^A|}{|A|} = \frac{18}{9} = 2 \qquad y = \frac{|M_i^B|}{|A|} = \frac{-9}{9} = -1 \qquad z = \frac{|M_i^C|}{|A|} = \frac{27}{9} = 3$$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1:

Calcule el determinante de la matriz $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ R/ -84

Ejercicio #2:

a)

Si se sabe que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$, calcule $|A| = \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 6 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ R/ 30

b)

Suponga que $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{vmatrix} = 3$ Utilizando propiedades de los determinantes, calcule R/ -9

$$\begin{vmatrix} p+2q & q+2r & r+2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix}$$

c) Determine el valor de ω para que se cumpla la igualdad: R/ -90

$$\begin{vmatrix} -5a_1 & -5a_2 & -5a_3 \\ 6b_1+2c_1 & 6b_2+2c_2 & 6b_3+2c_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio #3:

a) Si A, B y C son tres matrices invertibles de tamaño 4×4, tales que $\det(A) = -2$ y $\det(B^T) = \frac{3}{5}$.

Calcule $\det\left(3B^{-1}C^T AC^{-1}\right)$ R/ -270

b) Sean A y B matrices cuadradas de orden cuatro. Calcule $\det\left((2A)^{-1} \cdot (3B)^T\right)$ si se sabe que $\det(A) = -3$ y $\det(B) = 8$ R/ $\frac{-27}{2}$

Ejercicio #4:

Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema R/ $(-1, -2, 0)$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y - 8z = 4 \\ -3x + z = 3 \end{cases}$$