Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
II Semestre 2018

Tiempo máximo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje máximo: 34 puntos

I Examen Parcial Ordinario

MA-1103: Cálculo y álgebra lineal

08 de setiembre 2018
(Guía de solución)

Indicaciones: *Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.*

---

1. Considere la siguiente igualdad:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

a) Demuestre, usando inducción matemática que dicha igualdad es válida para toda $n \geq 1$. **(5 puntos)**

Solución:

i) Para $k = 1$:

$$5 = \frac{5 + 3 \cdot 5^2}{16} \Rightarrow 5 = 5 \qquad \checkmark$$

ii) Suponga que es verdadero para n, es decir:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

iii) Hay que demostrar la validez para $n+1$, esto implica demostrar:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + n \cdot 5^n + (n+1) \cdot 5^{n+1} = \frac{5 + (4n+3) \cdot 5^{n+2}}{16}$$

Ahora, por H.I.

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + n \cdot 5^n + (n+1) \cdot 5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16} + (n+1) \cdot 5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n-1) \cdot \ 5^{n+1} + 16 \cdot (n+1) \cdot 5^{(n+1)}}{16}$$

$$= \frac{5 + \ 5^{n+1} \left[4n - 1 + 16 \cdot (n+1)\right]}{16}$$

$$= \frac{5 + \ 5^{n+1} \left(20n + 15\right)}{16}$$

$$\frac{5 + \ 5^{n+1} \cdot 5 \left(4n + 3\right)}{16}$$

$$= \frac{5 + \ 5^{n+2} \left(4n + 3\right)}{16}, \text{ que es a lo que se quiere llegar.}$$

Luego, es verdadero que:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}, \quad \forall n \geq 1$$

b) Si $\{S_n\} = \left\{ \dfrac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16} \right\}$ corresponde a la sucesión de sumas parciales asociada a la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 5^k$, determine si dicha serie converge o diverge. **(2 puntos)**

Solución:

Si $\{S_n\} = \left\{ \dfrac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16} \right\}$ entonces se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 5^k = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

Esto implica que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5 + (4n-1) \cdot \ 5^{n+1}}{16} = \infty$$

$$\therefore \ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 5^k \quad \text{diverge.}$$

2. Determine todos los valores de b para que de la serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{n}{b^n}-\frac{n+1}{b^{n+1}}\right)$ converja y su suma sea igual a $\dfrac{5}{b^5}$. **(3 puntos)**

   Solución:

   La serie dada corresponde a una telescópica, por lo que:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S_k &= \frac{5}{b^5}-\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{b^{k+1}}\\ &= \frac{5}{b^5}-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln(b)\cdot b^{k+1}}\end{aligned}$$

   Para que el límite anterior exista es necesario que $b>1$, por lo que la serie converge a $\dfrac{5}{b^5}$ si $b\in]1,\infty[$.

3. Determine el intervalo de convergencia (NO incluya el análisis de los extremos) de la serie siguiente. **(4 puntos)**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot(n+2)!\cdot(x-3)^n}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$$

   Solución:

   Sea:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{4^{n+1}(n+3)!\,(x-3)^{n+1}}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots\cdot(3n+2)\,(3n+5)}}{\dfrac{4^n\,(n+2)!\,(x-3)^n}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots\cdot (3n+2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4\,(n+3)!\,(x-3)}{(n+2)!\,(3n+5)}=\frac{4\,(n+3)\,(x-3)}{(3n+5)}$$

   Por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4\,(n+3)\,(x-3)}{(3n+5)}\right|<1$$

$$\Rightarrow\left|\frac{4\,(x-3)}{3}\right|<1\Rightarrow -1<\frac{4\,(x-3)}{3}<1$$

$$\Rightarrow\frac{9}{4}<x<\frac{15}{4}$$

   $\therefore$ La serie converge absolutamente si $x\in\left]\dfrac{9}{4},\dfrac{15}{4}\right[$.

4. Determine si cada una de las siguientes series convergen o divergen. Debe indicar los criterios aplicados en cada caso.

a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\arctan k + 4}{(k-4)^2}$ **(4 puntos)**

Solución:

Por comparación directa:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\ k < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2}+4}{(k-4)^2} < \frac{\arctan\ k\ +\ 4}{(k-4)^2} < \frac{\frac{\pi}{2}+4}{(k-4)^2}$$

Sea:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}+4}{(k-4)^2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}+4\right)\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-4)^2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}+4\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Esta última es una p serie, $p > 1$, entonces converge, luego:

$$\left(\frac{\pi}{2}+4\right)\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-4)^2} \ \text{converge}$$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\arctan k + 4}{(k-4)^2}$ también converge por el criterio de comparación directa.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ **(4 puntos)**

Solución:

Por el criterio de la raíz se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{e} = \frac{4}{e} > 1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ es divergente.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{3n}\cdot n^2}{n^3+1}-\frac{1}{3^{-n+4}}\right]$ **(5 puntos)**

Solución:

Se analiza la serie separándola en dos, asumiendo que es válido.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}\cdot n^2}{n^3+1}$

- Probar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}=0 \qquad \checkmark$$

- Probar que: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ es decreciente sobre $[1,+\infty[$.

  $f'(x)=\dfrac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$ y se tiene que: $f'(x)<0, \forall x\in\ ]\sqrt[3]{2},\infty[$, es decir, $f(x)$ es decreciente sobre $[1,+\infty[$.

  Luego:

  La sucesión $\left\{\dfrac{n^2}{n^3+1}\right\}$ es decreciente $\forall n\geq 1$.

  Así, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}\cdot n^2}{n^3+1}$, converge.

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{-n+4}}$

Observe que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{-n+4}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^4}=\frac{1}{81}\sum_{n=1}^{\infty}3^n$$

Como $|r|=|3|>1$, la serie diverge.

$\therefore$ Por i) y ii) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{3n}\cdot n^2}{n^3+1}-\frac{1}{3^{-n+4}}\right]$ es divergente.

5. Si la función $f:[2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x\,(\ln x)^2}$ es continua, positiva y decreciente, determine si la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k\,(\ln k)^2}$ diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente. **(4 puntos)**

Solución:

Para probar si es absolutamente convergente:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k\,(\ln k)^2}\right|=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\,(\ln k)^2}$$

Utilizando el criterio de la integral, pues cumple con las condiciones, se tiene que:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ \ln^2(x)}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ \ln^2(x)}dx$$

Sea:

$$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1}{x\ \ln^2(x)}\,dx=\int\frac{1}{u^2}\,dx=-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{\ln\ x}\ +C$$

Entonces:

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ \ln^2(x)}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln\ b}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

La integral impropia converge, por lo tanto $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k\,(\ln k)^2}$ converge absolutamente.

6. Asuma que la serie $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 4^k}{(2k+1)\cdot(2k+1)\,!}$ es convergente. Determine el menor valor para n de manera que S_n aproxime a S con un error menor a 10^{-6}. **(3 puntos)**

Solución:

Se debe cumplir que: $a_{n+1}<10^{-6}$, es decir:

$$\frac{4^{n+1}}{(2n+3)\cdot(2n+3)\,!}<10^{-6}\Rightarrow 1\ 000\ 000<\frac{(2n+3)\cdot(2n+3)\,!}{4^{n+1}}$$

Al probar a partir de $n=1$, se llega que cuando $n=6$, se cumple que:

$$1\ 000\ 000<19\ 763\ 493{,}75$$

Por lo tanto, $S_6 = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^k \cdot 4^k}{(2k+1)\cdot(2k+1)\,!}$ cumple que $E < 10^{-6}$.