1) Sea X una variable aleatoria con $E(X) = 4$ y $E(X^2) = 20$. Si $Y = 3X - 2$, calcula $E(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$.

$$Y = 3x - 2$$
$$E(Y) = 3E(x) - 2$$
$$= 3 \cdot 4 - 2$$
$$= 12 - 2$$
$$\boxed{E(Y) = 10}$$

$$Y = 3x - 2$$
$$Var(Y) = 3^2 Var(x) - 0$$
$$= 9 \; Var(x)$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$20 - 4^2$$
$$20 - 16$$
$$4$$

$$Var(Y) = 9 \; Var(x)$$
$$= 9 \cdot 4$$
$$\boxed{Var(Y) = 36}$$

2) Se sabe que para una variable X, $\mathrm{Var}(X) = 9$ y $E(X) = 5$. Sea $Z = -2X + 7$. Halla $E(Z)$, $E(Z^2)$ y $\mathrm{Var}(Z)$.

$$Z = -2x + 7$$
$$E(Z) = -2E(x) + 7$$
$$= -2 \cdot 5 + 7$$
$$= -10 + 7$$
$$\boxed{E(Z) = -3}$$

$$Z = -2x + 7$$
$$Var(Z) = (-2)^2 Var(x) + 0$$
$$= 4 \; Var(x)$$
$$= 4 \cdot 9$$
$$\boxed{Var(Z) = 36}$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$
$$E(Z^2) = Var(Z) + [E(Z)]^2$$
$$36 + (-3)^2$$
$$36 + 9$$
$$\boxed{E(Z^2) = 45}$$

3) Dada una variable aleatoria X tal que $E(X) = -1$ y $\mathrm{Var}(X) = 4$, sea $Y = aX + b$. Si se sabe que $E(Y) = 3$ y $\mathrm{Var}(Y) = 16$, encuentra los valores de a y b.

$Y = ax + b$

$\mathrm{Var}(Y) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + 0$

$16 = a^2 \cdot 4$

$a^2 = \frac{16}{4}$

$a^2 = 4$

$a = \pm 2$

$a = -2,\ a = 2$

$Y = ax + b$

$E(Y) = a\,E(X) + b$

$3 = a \cdot -1 + b$

$3 = -a + b$

$b = 3 + a \qquad b = 3 + a$

$b = 3 + 2 \qquad b = 3 - 2$

$b = 5 \qquad b = 1$

$$\boxed{(a = 2 \wedge b = 5) \vee (a = -2 \wedge b = 1)}$$

4) Sea X una variable con $E(X) = 2$, y se sabe que $\mathrm{Var}(2X + 1) = 36$. Calcula $E(X^2)$.

$\mathrm{Var}(2x + 1) = 36$

$2^2\,\mathrm{Var}(x) = 36$

$4\,\mathrm{Var}(x) = 36$

$\mathrm{Var}(x) = 9$

$\mathrm{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \mathrm{Var}(x) + [E(x)]^2$

$= 9 + (2)^2$

$= 9 + 4$

$$\boxed{E(x^2) = 13}$$

5) Si $Y = 5 - 4X$, y se conoce que $E(Y) = 13$ y $E(Y^2) = 185$, determina $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

$Y = 5 - 4x$

$E(Y) = 5 - 4E(x)$

$13 = 5 - 4E(x)$

$8 = -4E(x)$

$$\boxed{E(x) = -2}$$

$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$= 185 - (13)^2$

$\mathrm{Var}(Y) = 16$

$Y = 5 - 4x$

$\mathrm{Var}(Y) = (-4)^2\,\mathrm{Var}(x)$

$16 = 16\,\mathrm{Var}(x)$

$$\boxed{\mathrm{Var}(x) = 1}$$

6) En una ciudad, el número de accidentes de tránsito por día sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 3$. Cada accidente tiene una probabilidad del 20% de involucrar un vehículo escolar, independientemente de los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día donde se hayan dado 3 accidentes, alguno de ellos haya involucrado un vehículo escolar?

$p = 0{,}20 \quad q = 0{,}80 \quad n = 3$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$1 - C(3,0) \cdot 0{,}20^{0} \cdot 0{,}80^{3-0} = \boxed{0{,}488}$

7) En un videojuego, un jugador debe derrotar a 4 jefes para completar una misión. Cada intento contra un jefe tiene una probabilidad de éxito del 60%, independiente de los demás. Sea Y el número total de intentos necesarios para vencer al cuarto jefe. ¿Cuál es la probabilidad de que $Y > 7$?

$p = 0{,}60 \quad q = 0{,}40 \quad r = 4$

$C(k-1, r-1) \cdot p^{r} \cdot q^{k-r} \quad , \quad R_X = \{4, 5, 6 \ldots\}$

$P(Y > 7) = 1 - P(X \leq 7)$

$1 - \sum_{k=4}^{7} C(k-1, 3) \cdot 0{,}60^{4} \cdot 0{,}40^{k-4} = \boxed{0{,}289792}$

8) Una fábrica produce piezas industriales. Cada pieza fabricada tiene un costo de producción de \$80. Al finalizar la producción, cada pieza se clasifica en una de tres categorías:

- Perfecta (con probabilidad 0.7): lista para venderse sin costo adicional.
- Reparable (con probabilidad 0.2): requiere un proceso de reparación que cuesta \$30 adicionales.
- Desechable (con probabilidad 0.1): no se puede reparar y se pierde toda la inversión inicial (\$80).

La fábrica desea obtener una ganancia promedio de \$25 por pieza producida (incluyendo las desechadas y las reparables).

a) Define una variable aleatoria G que represente la ganancia neta por pieza producida, en función del precio de venta p .

Perfecta: $G = p - 80$

Reparable: $G = p - 110$

Desechable: $G = -80$

$$G = \begin{cases} p - 80 & \text{, probabilidad de } 0{,}7 \\ p - 110 & \text{, probabilidad de } 0{,}2 \\ -80 & \text{, probabilidad de } 0{,}1 \end{cases}$$

$G = 0{,}9p - 86$

b) Calcula el precio de venta sugerido p que garantice la ganancia promedio deseada.

Esperanza $= 25$

$E(G) = 0{,}7(p-80) + 0{,}2(p-110) + 0{,}1(-80)$

$= 0{,}7p - 56 + 0{,}2p - 22 - 8$

$25 = 0{,}9p - 86$

$0{,}9p = 111$

$\boxed{p = 123{,}33}$