1. Estudie el ejemplo 2 y luego realice los ejercicios 3-7a, 8a, 9a, 11a, 12 y 13 a correspondientes a la **Sección 1. Estimación puntual y verosimilitud** del folleto de ejercicios.

Ejemplo 2 *La variable aleatoria X tiene densidad de probabilidad dada por*

$$f(x) = \frac{x}{a^2 e^{x/a}}, \quad para\ x \geq 0$$

Tres observaciones de X son $x_1 = 12; x_2 = 16$ y $x_3 = 15$. Encuentre la estimación de máxima verosimilitud del parámetro a.

$$L(a|x) = \frac{12}{a^2 \cdot e^{\frac{12}{a}}} \cdot \frac{16}{a^2 \cdot e^{\frac{16}{a}}} \cdot \frac{15}{a^2 \cdot e^{\frac{15}{a}}}$$

$$L(a|x) = \frac{2880}{a^6 e^{\frac{43}{a}}}$$

$$\ln(L(a|x)) = \ln(2880) - 6\ln(a) - \frac{43}{a}$$

$$\frac{L'(a|x)}{L(a|x)} = 0 - \frac{6}{a} + \frac{43}{a^2}$$

$$= \frac{-6}{a} \cdot \frac{a}{a} + \frac{43}{a^2} = 0$$

$$\frac{-6a+43}{a^2} = 0$$

$$-6a+43 = 0$$

$$\boxed{a = \frac{43}{6}}$$

3. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad $f(x) = \dfrac{\lambda^2 (x-5)}{e^{\lambda(x-5)}}$ para $x \geq 5$, con λ un parámetro. Dadas las observaciones $x_1 = 6$, $x_2 = 8$ y $x_3 = 11$, encuentre las estimaciones de máxima verosimilitud de λ. $R/\ \frac{3}{5}$

$$L(\lambda|x) = \frac{\lambda^2 \cdot (6-5)}{e^{\lambda(6-5)}} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot (8-5)}{e^{\lambda(8-5)}} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot (11-5)}{e^{\lambda(11-5)}}$$

$$= \frac{\lambda^2}{e^{\lambda}} \cdot \frac{3\lambda^2}{e^{3\lambda}} \cdot \frac{6\lambda^2}{e^{6\lambda}}$$

$$L(\lambda|x) = \frac{18\lambda^6}{e^{10\lambda}}$$

$$\ln(L(\lambda|x)) = \ln(18) + 6\ln(\lambda) - 10\lambda$$

$$\frac{L'(\lambda|x)}{L(\lambda|x)} = \frac{6}{\lambda} - 10 = 0$$

$$\frac{6}{\lambda} = 10 \to \lambda = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

4. Una variable aleatoria X tiene una distribución geométrica de parámetro p (la densidad es $f(x) = p\,(1-p)^x$ para $x = 0, 1, 2, ...$). Dadas las observaciones $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = 8$ y $x_4 = 9$, encuentre las estimaciones de máxima verosimilitud de p. $R/ \quad \frac{4}{35}$

$$L(p|x) =$$

$$[(1-p)^6 \cdot p][(1-p)^8 \cdot p][(1-p)^8 \cdot p][(1-p)^9 \cdot p]$$

$$L(p|x) = (1-p)^{31} \cdot p^4$$

$$\ln(L(p|x)) = 31\ln(1-p) + 4\ln(p)$$

$$\frac{L'(p|x)}{L(p|x)} = \frac{31}{1-p} \cdot -1 + \frac{4}{p}$$

$$= \frac{-31}{1-p} + \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{-31p + 4 - 4p}{1-p} = 0$$

$$-35p + 4 = 0$$

$$\boxed{p = \frac{4}{35}}$$

5. El tiempo que un estudiante tarda en cierto examen es una variable aleatoria T con función de densidad $f(t) = (\theta + 1)\, t^{\theta}$ para $0 \leq t \leq 1$ con $\theta > -1$. Cuatro estudiantes seleccionados al azar tardan $t_1 = 0.79$, $t_2 = 0.65$, $t_3 = 0.47$ y $t_4 = 0.97$. Encuentre la estimación de máxima verosimilitud de θ. $R/\quad 1.75485$

Sea $x = \theta$, $y = t$ $\qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$L(y|x) =$

$[(x+1)\cdot 0{,}79^y]\cdot[(x+1)\cdot 0{,}65^y]\cdot[(x+1)\cdot 0{,}47^y]$
$\cdot[(x+1)\cdot 0{,}97^y]$

$$L(y|x) = (x+1)^4\,(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97)^y$$

$$\ln(L(y|x)) = 4\ln(x+1) + y\ln(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97)$$

$$\frac{L'(y|x)}{L(y|x)} = \frac{4}{x+1} + \ln(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97)$$

$$= \frac{4}{x+1} + \ln(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97) = 0$$

$$= 4 + \ln(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97)(x+1) = 0$$

$$= \ln(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97)(x+1) = -4$$

$$x+1 = \frac{-4}{\ln(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97)}$$

$$x = \frac{-4}{\ln(0{,}79\cdot 0{,}65\cdot 0{,}47\cdot 0{,}97)} - 1$$

$$\boxed{\approx 1{,}754885}$$

6. Una variable aleatoria X tiene una distribución Gamma$(2, \beta)$ con β un parámetro (la densidad es $f(x) = \dfrac{xe^{-x/\beta}}{\beta^2}$ para $x > 0$). Dadas las observaciones $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y $x_3 = 7$, encuentre la estimación de máxima verosimilitud de β. $R/ \quad \beta = \frac{5}{3}$

$$L(\beta|x) = \frac{1 \cdot e^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta^2} \cdot \frac{2 \cdot e^{-\frac{2}{\beta}}}{\beta^2} \cdot \frac{7 \cdot e^{-\frac{7}{\beta}}}{\beta^2}$$

$$L(\beta|x) = \frac{14 \cdot e^{-\frac{10}{\beta}}}{\beta^6}$$

$$\ln(L(\beta|x)) = \ln(14) - \frac{10}{\beta} - 6\ln(\beta)$$

$$\frac{L'(\beta|x)}{L(\beta|x)} = 0 + \frac{10}{\beta^2} - \frac{6}{\beta}$$

$$= 10 - 6\beta = 0$$

$$\boxed{\beta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}}$$

7. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad $f(x) = \frac{k}{7}\left(\frac{x}{7}\right)^{k-1}$ para $0 \leq x \leq 7$, con k constante.

(a) Dadas las observaciones $x_1 = 2.8$, $x_2 = 3.5$ y $x_3 = 1.4$, encuentre la estimación de máxima verosimilitud de k. $R/\quad 0.932\,002$

$$L(k|x) = \frac{k}{7}\cdot\left(\frac{2{,}8}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{k}{7}\cdot\left(\frac{3{,}5}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{k}{7}\cdot\left(\frac{1{,}4}{7}\right)^{k-1}$$

$$L(k|x) = \left(\frac{k}{7}\right)^3\left(\frac{2{,}8}{7}\cdot\frac{3{,}5}{7}\cdot\frac{1{,}4}{7}\right)^{k-1}$$

$$L(k|x) = \left(\frac{k}{7}\right)^3\left(\frac{1}{25}\right)^{k-1}$$

$$\ln(L(k|x)) = 3\ln(k) - \ln(343) + (k-1)\ln\left(\tfrac{1}{25}\right)$$

$$\frac{L'(k|x)}{L(k|x)} = \frac{3}{k} + \ln\left(\frac{1}{25}\right) = 0$$

$$k = -\frac{3}{\ln\left(\frac{1}{25}\right)}$$

$$\boxed{k = 0{,}932002}$$

8. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim Exp(\lambda)$, donde λ es un parámetro desconocido. Es decir

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Dada una muestra aleatoria de $X : (X_1, X_2, ..., X_n)$, determine el estadístico $\widehat{\lambda}$ que brinda el método de máxima verosimilitud para estimar λ. $R/ \quad \widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$

$$L(\lambda \mid x_1 \ldots x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \qquad \prod_{i=1}^{n} x = x^n$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda x} \qquad \sum_{i=1}^{n} k^x = k^{\sum_{i=1}^{n} x}$$

$$\lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x}$$

$$\ln(L(\lambda \mid x_1 \ldots x_n)) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x$$

$$\frac{L'(\lambda \mid x_1 \ldots x_n)}{L(\lambda \mid x_1 \ldots x_n)} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\overline{x}}}$$

2. Realizar los ejercicios 2, 4-8, 10-15a, 16a, 18a y 19 de la sección II.3.3 del libro (pág. 79-83)

3.3 Ejercicios

2. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para$x \geq 0$, con λ una constante positiva. Dadas las observaciones $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y x_3, se obtuvo que la estimación de máxima verosimilitud de λ es $\frac{1}{3}$. Determine el valor de x_3. $R/ \quad x_3 = 4$

$$L(\lambda|x) = \lambda \cdot e^{-3\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-2\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x_3}$$

$$= \lambda^3 \cdot e^{-5\lambda - \lambda x_3}$$

$$\ln(L(\lambda|x)) = 3\ln(\lambda) - 5\lambda - \lambda x_3$$

$$\frac{L'(\lambda|x)}{L(\lambda|x)} = \frac{3}{\lambda} - 5 - x_3 = 0 \quad , \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{3}} = 5 + x_3$$

$$9 = 5 + x_3$$

$$\boxed{x_3 = 4}$$

4. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad dada por $f(x) = \frac{k}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{k-1}$ para $0 \leq x \leq 3$, con k constante. Con base en las observaciones $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.1$ y $x_3 = 0.9$, encuentre la estimación de máxima verosimilitud de k. $R/\quad k \approx 0.43429$

$$L(k|x) = \frac{k}{3}\left(\frac{0,3}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{k}{3}\left(\frac{0,1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{k}{3}\left(\frac{0,9}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{k^3}{27}\left(\frac{0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,9}{3^3}\right)^{k-1}$$

$$\ln(L(k|x)) = 3\ln(k) - \ln(27) + (k-1)\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$\frac{L'(k|x)}{L(k|x)} = \frac{3}{k} - 0 + \ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$= \frac{3}{k} + \ln\left(\frac{1}{1000}\right) = 0$$

$$= k = \frac{-3}{\ln\left(\frac{1}{1000}\right)}$$

$$\boxed{k \approx 0,43429}$$

5. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad dada por $f(x) = (p + 1)x^{p}$ para $0 \leq x \leq 1$, con α constante. Con base en las observaciones $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.1$ y $x_3 = 0.5$, encuentre la estimación de máxima verosimilitud de p. $R/\ \ p \approx -0.348558$

$$L(p|x) = (p+1)\cdot 0{,}2^{p} \cdot (p+1)\cdot 0{,}1^{p} \cdot (p+1)\cdot 0{,}5^{p}$$

$$L(p|x) = (p+1)^{3}\,(0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5)^{p}$$

$$L(p|x) = (p+1)^{3}\left(\frac{1}{100}\right)^{p}$$

$$\ln(p|x) = 3\ln(p+1) + p\ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\frac{L'(p|x)}{L(p|x)} = \frac{3}{p+1} + \ln\left(\frac{1}{100}\right) = 0$$

$$p+1 = -\frac{3}{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}$$

$$p = -\frac{3}{\ln\left(\frac{1}{100}\right)} - 1$$

$$\boxed{p = -0{,}348558}$$

6. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad dada por $f(x) = \frac{k}{5}\left(\frac{x}{5}\right)^{k-1}$ para $0 \leq x \leq 5$, con k constante. Con base en las observaciones $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0.1$ y $x_3 = 5$, encuentre la estimación de máxima verosimilitud de k. $R/\quad k \approx 0.651442$

$$L(k|x) = \frac{k^3}{5^3}\left(\frac{2,5 \cdot 0,1 \cdot 5}{}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{k^3}{125} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{k-1}$$

$$\ln(L(k|x)) = 3\ln(k) - \underbrace{\cancel{\ln(125)}}_{}^{0} + (k-1)\ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\frac{L'(k|x)}{L'(k|x)} = \frac{3}{k} + \ln\left(\frac{1}{100}\right) = 0$$

$$k = \frac{-3}{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}$$

$$\boxed{k = 0,6514417229}$$

7. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad dada por $f(x) = \frac{k^2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{k^2-1}$ para $0 \leq x \leq 3$, con k constante. Con base en las observaciones $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.1$ y $x_3 = 0.9$, encuentre las estimaciones de máxima verosimilitud de k. $R/ \quad k \approx \pm 0.65901$

$$L(x|k) = \frac{k^6}{3^3}\left(\frac{0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}{3^3}\right)^{k^2-1}$$

$$L(x|k) = \frac{k^6}{27}\left(\frac{1}{1000}\right)^{k^2-1}$$

$$\ln(L(x|k)) = 6\ln(k) - \cancel{\ln(27)} + (k^2-1)\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$\frac{L'(x|k)}{L(x|k)} = \frac{6}{k} + 2k \cdot \ln\left(\frac{1}{1000}\right) = 0$$

$$\frac{6}{k} + 2k\ln\left(\frac{1}{1000}\right)\frac{k}{k} = 0$$

$$\frac{6 + 2k^2\ln\left(\frac{1}{1000}\right)}{k} = 0$$

$$6 + 2k^2\ln\left(\frac{1}{1000}\right) = 0$$

$$2k^2\ln\left(\frac{1}{1000}\right) = -6$$

$$k^2 = \frac{-6}{2\ln\left(\frac{1}{1000}\right)}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{-6}{2\ln\left(\frac{1}{1000}\right)}}$$

$$\boxed{k = \pm 0{,}65901}$$