

Una Varianza

Para el buen funcionamiento de una empresa tamalera, sus productos terminados deben tener un peso similar. En la tamalera **Ta' bien** se tomó una muestra para determinar si la producción se encuentra bajo control (tamales con pesos similares).

Los pesos (en gramos) obtenidos son 125, 123, 122, 124, 127, 126, 127, 130, 128, 122, 134, 129, 124, 122, 129. Con un nivel de confianza de 90%, ¿puede sostenerse que los tamales producidos en **Ta' bien** tienen pesos similares? (8 puntos)

$\Rightarrow [2.677, 5.0825]$

$$n = 15 \quad s^2 = 12,1238 \quad \alpha = 0,10$$

$$v = 14 \quad \frac{\alpha}{2} = 0,05$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$$

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, \nu}}} < \sigma^2 < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2, \nu}}}$$

con $\nu = n - 1$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, \nu} = \chi^2_{0,95, 14} = 23,68479$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, \nu} = \chi^2_{0,05, 14} = 6,57063$$

$$a = \sqrt{\frac{14 \cdot 12,1238}{23,68479}} = 2,677$$

$$b = \sqrt{\frac{14 \cdot 12,1238}{6,57063}} = 5,0825$$

R/ El IC para 90%, corresponde a $[2,677, 5,0825]$ y dado que este IC indica una variabilidad baja, si se puede concluir que son similares

[3 puntos] Se utiliza una muestra de 26 datos, en la que se obtuvo $s^2 = 36$, para calcular un intervalo de confianza del $(1 - \alpha)100\%$ para la varianza de una variable aleatoria normal X . Mediante un procedimiento correcto se obtuvo que el extremo superior del intervalo es 68.599. ¿Cual es el valor del centro del intervalo de confianza hallado?

≈ 45.37057237285 .

Primero hayamos la confianza utilizada

$$n = 26 \quad s^2 = 36$$

$$V = 25$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, \nu}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2, \nu}}$$

con $\nu = n - 1$

$$(n-1) \cdot s^2 = 68.599$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, \nu}$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, \nu} = \frac{(n-1) \cdot s^2}{68.599}$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, 25} = \frac{25 \cdot 36}{68.599}$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, 25} = 13.199 \rightarrow P(\chi^2 < 13.199) \approx 0.025$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\alpha = 0.05$$

Ahora con eso se calcula el limite inferior

$$n = 26 \quad s^2 = 36 \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, \nu}}$$

$$\chi^2_{0.975, 25} = 10.67677 \quad V = 25 \quad \alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$L_i = \frac{25 \cdot 36}{10.67677} = 22.192$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$Centro = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{68.599 + 22.192}{2} = \boxed{45.3705}$$

[4 puntos] Una máquina corta y enrolla cintas adhesivas. Al analizar una muestra de 20 rollos se observa que la longitud de la cinta en cada uno de ellos sigue una distribución normal con una desviación estándar de 5 pulgadas. Indique si ese dato puede tomarse como evidencia significativa (con un nivel de significancia del 10%) de que la desviación en la longitud de las cintas es menor a 8 pulgadas.

Usando χ^2_c

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \text{ con } \nu = n - 1$$

$$H_0: \sigma = 8 (\geq)$$

$$n = 20 \quad S = 5 \quad \alpha = 0,10$$

$$H_1: \sigma < 8$$

$$\nu = 19 \quad \sigma_0 = 8$$

$$\chi^2_{0,05} = \frac{19 \cdot 5^2}{8^2} = 7,921875$$

$$\chi^2_c = \chi^2_{0,10,19} = 11,65091$$

R/ Como $\chi^2_{0,05} = 7,921875 < \chi^2_c = 11,65091$
se rechaza H_0 , por lo tanto sí hay
evidencia de que la desviación de
las cintas sean menor a 8 pulgadas

Con valor P

$$\nu = 19$$

$$\chi^2_{0,05} = \frac{19 \cdot 5^2}{8^2} = 7,921875$$

$$\alpha = 0,10$$

$$P(\chi^2 < 7,921875) = 0,00890$$

R/ Como $P = 0,00890 < \alpha = 0,10$
se rechaza H_0 , por lo tanto sí hay
evidencia de que la desviación de
las cintas sean menor a 8 pulgadas

Suponga que se ha utilizado una muestra de tamaño 26 de una población normal y un nivel de significancia de 4% para contrastar: $H_0 : \sigma^2 = 16$ contra $H_1 : \sigma^2 > 16$. ¿Para qué valores de la varianza muestral S^2 no se rechaza la hipótesis nula?

$$H_0: \sigma^2 = 16 (\leq) \quad n=26 \quad \sigma_0^2 = 16 \quad \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \text{ con } \nu = n-1$$

$$H_1: \sigma^2 > 16 \quad \nu = 25 \quad \alpha = 0,04$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

$$\chi^2 = \chi^2_{0,04, 25} = 38,69165$$

$$s_c^2 = \frac{\chi^2 \cdot \sigma_0^2}{n-1} \quad \sigma_0^2 = 16 \quad n-1 = 25$$

$$s_c^2 = \frac{38,69165 \cdot 16}{25} = 24,73$$

// No se rechaza H_0
para $s^2 \leq 24,73$

$$\begin{array}{c|c} RA & RR \\ \hline & s_c^2 \end{array}$$

Los siguientes datos corresponden a los tiempos en minutos de una muestra aleatoria de nuevos dispositivos de las computadoras *Peach* sometidos a calentamiento extremo hasta que se destruyen: 19, 10, 7, 6, 6, 4, 16, 11, 10, 9, 6, 5, 8, 5, 7, 12, 18

- b) [5 puntos] La empresa de computadoras *Peach* necesita tener certeza de que la resistencia de estos dispositivos es similar entre ellos. Se ha establecido como criterio que la desviación estándar de tiempos de resistencia (σ_X) debe ser a lo sumo 3.5 minutos. Según los datos de la muestra, ¿puede concluirse que los dispositivos tienen una resistencia similar?

$$H_0: \sigma = 3.5 (\leq) \quad n = 17 \quad s^2 = 20.99 \quad \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \text{ con } \nu = n - 1$$
$$H_1: \sigma > 3.5 \quad \nu = 16 \quad \sigma_0 = 3.5$$
$$\alpha = 0.05$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{16 \cdot 20.99}{3.5^2} = 27.9155$$

$$\chi^2_c = \chi^2_{0.05, 16} = 26.29623$$

R/ Como $\chi^2_{obs} = 27.9155 > \chi^2_c = 26.29623$
se rechaza H_0 y por lo tanto no
tienen resistencia similar

La empresa de llantas Mundiales ha sacado un nuevo modelo de llantas para automóviles al mercado asegurando que su duración tiene una desviación estándar menor a 5000 km. Suponga que la duración de las llantas se distribuye normalmente. Se quiere contrastar la afirmación a un nivel de significancia del 10% con una muestra aleatoria de 25 llantas del nuevo modelo.

¿Acote la probabilidad del error tipo II de la prueba si duración de las llantas del nuevo modelo tiene una desviación estándar de 4700 km?

$$H_0: \sigma = 5000 (\geq) \quad n = 25 \quad S = ? \quad \alpha = 0.10 \quad \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \text{ con } \nu = n - 1$$

$$H_1: \sigma < 5000 \quad \nu = 24 \quad \sigma = 5000$$

Primero busquemos S $\chi^2 = \chi^2_{0.10, 24} = 15.65868$

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0} \rightarrow S^2 = \frac{\chi^2 \cdot \sigma_0}{n-1} \rightarrow S = \sqrt{\frac{15.65868 \cdot 5000}{24}}$$

$$S = 7038.70$$

Ahora usemos H'_1

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} \text{ con } \nu = n - 1$$

$$H'_1: \sigma = 9700 \quad \sigma_1 = 9700$$

$$\chi^2 = \frac{24 \cdot 9038.70}{9700^2} = 17.72$$

$$P(\chi^2 > 17.72) = 0.81638$$

↖
Contrario a <

Una proporción

Un profesor asegura que el promedio de calificación de los estudiantes en el primer parcial del curso de Estadística es 85 y presenta los siguientes datos (tomados de una muestra aleatoria de 16 estudiantes).

Calificaciones			
87	90	88	76
74	70	100	95
65	92	78	87
82	50	89	89

9

[3 puntos] Determine un intervalo de confianza del 98% para la proporción poblacional de los estudiantes del curso que obtuvieron una nota superior a 85.

$$n = 16 \quad p = \frac{9}{16} = 0,5625 \quad \alpha = 0,02 \quad \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$
$$q = 0,4375 \quad \frac{\alpha}{2} = 0,01$$
$$z_{0,01} = \pm 2,32635$$

$$a = 0,5625 - 2,32635 \cdot \sqrt{\frac{0,5625 \cdot 0,4375}{16}} = 0,273987$$

$$b = 0,5625 + 2,32635 \cdot \sqrt{\frac{0,5625 \cdot 0,4375}{16}} = 0,851012$$

R/ El IC para 98% corresponde a $]0,273987, 0,851012[$

[4 puntos] El gerente de un banco dice que al menos el 78% de las transacciones que se realizan en su sucursal se hacen en colones. Para verificar su aseveración consulta los registros de las últimas 40 transacciones y observa que 28 de ellas se hicieron en colones.

Haga una prueba de hipótesis con un nivel de significancia del 2,5% para juzgar la validez de la aseveración del gerente.

$$H_0: p = 0,78 (\geq) \quad n = 40 \quad p_0 = 0,78 \quad \alpha = 0,025 \quad Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}$$
$$H_1: p < 0,78 \quad \hat{p} = 0,7 \quad q_0 = 0,22$$

$$Z_{obs} = \frac{0,7 - 0,78}{\sqrt{\frac{0,78 \cdot 0,22}{40}}} = -1,22$$
$$Z_c = Z_{0,025} = -1,95$$

R/ Como $Z_{obs} = -1,22 > z_c = -1,95$
No se rechaza H_0

Con valor p

$$Z_{obs} = \frac{0,7 - 0,78}{\sqrt{\frac{0,78 \cdot 0,22}{40}}} = -1,22$$

$$P(Z < -1,22) = 0,1$$

II/ Como $0,1 > 0,025$
No se rechaza H_0

En una fábrica de tornillos, se estima que al menos 98% de las unidades producidas son satisfactorias. En una muestra de 50 unidades se encuentran dos defectuosas. ¿Es esta evidencia en contra de la estimación?

$$H_0: p = 0.98 (\geq) \quad n = 50 \quad p_0 = 0.98 \quad \alpha = 0.05 \quad Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}$$
$$H_1: p < 0.98 \quad \hat{P} = 0.96 \quad q_0 = 0.02$$

$$Z_{obs} = \frac{0.96 - 0.98}{\sqrt{\frac{0.98 \cdot 0.02}{50}}} = -1.07$$
$$Z_c = Z_{0.05} = -1.645$$

R/ Como $Z_{obs} = -1.07 > Z_c = -1.645$
No se rechaza H_0

Una media

Si $]30, 46[$ es el intervalo de confianza del 95% para la media de una variable aleatoria normalmente distribuida con variancia desconocida, basado en una muestra de tamaño 16, halle el valor de la variancia muestral. (8 puntos)

$$n=16 \quad \alpha=0,05 \quad E=8$$

$$v=15 \quad \frac{\alpha}{2}=0,025$$

$$\cancel{t_{\alpha/2, v}} \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ con } v = n - 1$$

$$t_{0,025,15} = 2,13175$$

$$E = \frac{46-30}{2} = 8$$

$$2,13175 \cdot \frac{s}{\sqrt{16}} = 8$$

Este es de
1 media

$$s = \frac{8 \cdot \sqrt{16}}{2,13175}$$

$$s^2 = \left(\frac{8 \cdot \sqrt{16}}{2,13175} \right)^2 = \boxed{225,3977923}$$