§1. Números complejos

§1.1. Forma rectangular

Definición 1.1 Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo. Entonces la **forma rectangular** de z está dada por $a + bi$, tal que $i^2 = -1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Así, $\mathrm{Re}(z) = a$ y $\mathrm{Im}(z) = b$.

Nota 1.1 $\mathrm{Im}(z)$ **no** incluye el valor de i.

$$Z = \underbrace{a}_{\text{Real}} + \underbrace{bi}_{\text{Imaginaria}} \qquad i^2 = -1 \qquad i = \sqrt{-1}$$

$\mathrm{Re}(z) = a$

Parte real de z, sin la imaginaria

$\mathrm{Im}(z) = b$

Parte imaginaria de z sin incluir la i

Ejemplo

Si $z = 4+3i$ entonces

$\mathrm{Re}(z) = 4$ (sin parte imaginaria)

Ejemplo

Si $z = 4+3i$ entonces

$\mathrm{Im}(z) = 3$

Parte de aritmetica

§1.2. Operaciones

- Sumar y restar
- Multiplicar
- Conjugado
- Racionalizar
- Dividir
- Factorizar

Suma y resta

1) Si $z = 2-i$ y $w = 3+2i$

Calcular $z - w$

$(2-i) - (3+2i)$

$2 - i - 3 - 2i$

$\boxed{-1 - 3i}$

2) $(a+bi) + (c+di)$

$a + c + bi + di$

$\boxed{a+c+i(b+d)}$

3) $(2-i)+(3+2i)$

$2-i+3+2i$

$\boxed{5+i}$

Multiplicacion

Se multiplica la

real con real, imaginaria con imaginaria

1) $(a+bi)(c+di)$ (Aca normal) $b.d.i^2$

$ac+adi+bci+bdi^2$ $i^2=-1$

$ac+adi+bci-bd$

$(ac-bd)+\underbrace{(ad+bc)i}_{\text{Factor comun de } i \text{ y agrupar}}$

2) $(2-i)(3+2i)$

$6+4i-3i-2i^2$ $i^2=-1$

$6+4i-3i+2$

$8+i$

Conjugado

$\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$ cambia el signo de la parte imaginaria

$\overline{2-i}=2+i$ $\quad\overline{3+2i}=3-2i$

$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ $\quad\overline{\overline{z}}=z$

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ $\quad\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$

Division

1) $\frac{2-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}$ se racionaliza el denominador Nume

Demo

$$= \frac{(2-i)(3-2i)}{9-4\underbrace{i^2}_{=-1}}$$

$$= \frac{6-4i-3i+2\underbrace{i^2}_{=-1}}{9+4}$$

$$= \frac{6-7i-2}{13}$$

$$\boxed{= \frac{4-7i}{13}}$$

Nota, separar en 2 fracciones

$$= \frac{4}{13} - \frac{7i}{13} = u$$

Re Img

$$\boxed{\begin{aligned} Re(u) &= \frac{4}{13} \quad \text{Real sin img} \\ Im(u) &= \frac{-7}{13} \quad \text{Img sin } i \end{aligned}}$$

2) $\frac{3+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}$

$$= \frac{(3+2i)(2+i)}{4-\underbrace{i^2}_{=-1}}$$

$$= \frac{6+3i+4i+2i^2}{4+1}$$

$$= \frac{6+7i-2}{5}$$

$$= \frac{4+7i}{5}$$

$$= \boxed{\frac{4}{5} + \frac{7i}{5}} = u$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re(u) = \frac{4}{5} \\ Im(u) = \frac{7}{5} \end{array}}$$

Ejercicios

1) Si z es cualquier número complejo, compruebe que $\dfrac{\overline{i+\overline{z}}}{i-z} = -1$.

$$\frac{\overline{i+\overline{z}}}{i-z}$$

$$= \frac{\overline{i}+z}{i-z}$$

$$= \frac{-i+z}{i-z}$$

$$= \frac{-\cancel{(i-z)}}{\cancel{(i-z)}} \quad \boxed{= -1}$$

2) Determine todos los números complejos x, expresados en su forma rectangular, que satisfacen:

$$(ix^2 + x)\left(\frac{i \cdot x}{1-4i} - 1\right) = 0$$

Rectangular
Polar
} Formas de respuesta

$$ix^2 + x = 0 \qquad\qquad \frac{i \cdot x}{1-4i} - 1 = 0$$

$$x(ix+1) = 0$$

$$x = 0 \qquad ix + 1 = 0 \qquad\qquad \frac{ix}{1-4i} = 1$$

$$ix = -1$$

$$x = \frac{-1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \qquad\qquad ix = 1-4i$$

$$x = \frac{i}{-i^2} \quad -i^2 = 1 \qquad\qquad x = \frac{1-4i}{i}$$

$x = \frac{i}{1}$ $\qquad$ $x = \frac{1-4i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$

$x = i$ $\qquad$ $x = \frac{-i+4i^2}{1}$

$\boxed{x = 0 \wedge x = i}$ $\qquad$ $x = \frac{-i-4}{1}$

$\boxed{x = -i-4}$

$\boxed{S = \{0, i, -4-i\}}$

5) Determine la forma rectangular de $z = \dfrac{-3+4i}{2-i} - i$.

$\frac{-3+4i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} - i$

siempre racionalizar Divisiones

$\frac{(-3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - i$

$\frac{-6+-3i+8i+4i^2}{4-i^2} - i$

$\frac{-6+5i-4}{4+1} - i$

$\frac{-10+5i}{5} - i$

$\frac{\cancel{5}(-2+i)}{\cancel{5}} - i$

$-2+i-i$

$\boxed{-2}$

$\boxed{\begin{array}{l} Re(z) = -2 \\ Im(z) = 0 \end{array}}$

$2 - 5ai$

3) Si se tiene que $w = \frac{2 - 5ai}{1+2i}$, determine todos los valores para el número real a, de tal forma que $\text{Im}(w) \neq 0$.

$$\frac{2-5ai}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{(2-5ai)(1-2i)}{1-4i^2}$$

$$= \frac{2-4i-5ai-10ai^2}{1+4}$$

$$= \frac{2-4i-5ai+10a}{5}$$

Factor comun y agrupar

$$= \frac{(2-10a)+i(-4+5a)}{5}$$

$$= \frac{2-10a}{5} + \frac{i(-4+5a)}{5}$$

$$\boxed{I(w) = \frac{-4+5a}{5} \qquad S = \mathbb{R} - \left\{\frac{-4}{5}\right\}}$$

4) Encuentre $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{43 + yi}{x - 5i} = 4 + 3i$.

$$\frac{43+yi}{x-5i} = 4+3i$$ Despejar $x \wedge y$

$$43+yi = (4+3i)(x-5i)$$

$$43+yi = 4x-20i+3xi-15i^2$$

$$43+yi = 4x+3xi-20i+15$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z = a+bi \\ a+bi = c+di \quad \text{Igualar} \\ a=c \wedge bi=di \quad \text{real con real} \\ \qquad b=d \quad \text{img con img} \end{array}}$$

$$\underbrace{43}_{\text{Real}}+\underbrace{yi}_{\text{Img}} = \underbrace{(4x+15)}_{\text{Real}} + \underbrace{(-20+3x)i}_{\text{Img}}$$

Se iguala

$$4x+15 = 43 \qquad \cancel{i}(-20+3x) = y\cancel{i}$$ parte real con real

$4x = 28$ $\quad -20 + 3x = y$ $\quad$ parte ing con ing

$\boxed{x = 7}$ $\quad -20 + 3(7) = y$

Se despeja x $\quad -20 + 21 = y$

y se usa en "y=" $\quad \boxed{y = 1}$

$$\boxed{R \quad x = 7 \ \wedge \ y = 1}$$

5) $a = 2 - im$, $b = 3 - in$, hallar $m, n \in \mathbb{R}$

para que su producto sea $8 + 4i$

$$(2 - im)(3 - in) = 8 + 4i$$

$$6 - 2in - 3im + i^2 nm = 8 + 4i$$

$$6 - 2in - 3im - nm = 8 + 4i$$

$$6 - (-2n - 3m)i - nm = 8 + 4i$$

$$\underbrace{(6 - nm)}_{R} + \underbrace{(-2n - 3m)i}_{Img} = \underbrace{8}_{R} + \underbrace{4i}_{img}$$

$6 - nm = 8$ $\quad (-2n - 3m)i = 4i$

$-nm = 2$ $\quad -2n - 3m = 4$

se puede despejar cualquiera ($n \vee m$) $\quad nm = -2$ $\quad -2\left(\frac{-2}{m}\right) - 3m = 4$

$n = \frac{-2}{m}$ $\quad \frac{4}{m} - 3m = 4$

$$\frac{4 - 3m^2}{m} = 4$$

$$4 - 3m^2 = 4m$$

$$-3m^2 - 4m + 4 = 0$$

$-3m \quad 2 = 2m$

$m \quad 2 = -6m$

$\quad -4m$

$$(-3m + 2)(m + 2) = 0$$

$\boxed{m = \frac{2}{3}}$ $\quad \boxed{m = -2}$

Buscando n

$m = \frac{2}{3}$ $\quad m = -2$

$n = \frac{-2}{m}$ $\quad n = \frac{-2}{-2}$

$n = \frac{-2}{2}$ $\quad \boxed{n = 1}$

$\frac{2}{3}$

$\boxed{n = -3}$

$$\boxed{\begin{array}{l} R/ \; m = \frac{2}{3} \wedge n = -3 \\ \quad m = -2 \wedge n = 1 \end{array}}$$