Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 1103 - Cálculo y Álgebra Lineal
Tutor: Marco Salazar Vega

Tiempo disponible: 2 horas y 30 minutos
Periodo: II Semestre 2024
Puntaje total: 30 puntos

Primer examen parcial

Ordinario **(Solución)**

Instrucciones:

1. El examen consta de **seis preguntas** de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas y 30 minutos** para contestar los ítems del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. **[1 punto]** Dada la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

Determine si la siguiente serie converge o diverge, en caso de converger indique a qué valor converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+4)$$

Dado que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$, para determinar si la serie converge o diverge, basta con realizar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+13)}{6} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2n^2+13n+2n+13)}{6} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+13n^2+2n^2+13n}{6} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+15n^2+13n}{6} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(k+4)$ es divergente. ♣

2. Sea $\{m_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, tal que $m_n = \dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)}$

   a) **[1 punto]** Calcule el término m_5

   Note que, al contar con dos productorias, el término m_5 viene dado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_5 &= \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} \\ &= \frac{7}{64} \end{aligned}$$

$\clubsuit$

   b) **[4 puntos]** Determine si $\{m_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no monótona.

   Suponga que m_n es una sucesión creciente:

$$\begin{aligned} \frac{m_{n+1}}{m_n} \geq 1 &\implies \frac{\dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)\cdot (n+1+2)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)\cdot [2(n+1)+2]}}{\dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)}} \geq 1 \\ &\implies \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)\cdot (n+3)\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)\cdot (2n+4)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)} \geq 1 \\ &\implies \frac{\cancel{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)}\cdot (n+3)\cdot \cancel{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)}}{\cancel{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)}\cdot (2n+4)\cdot \cancel{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)}} \geq 1 \\ &\implies \frac{n+3}{2n+4} \geq 1 \\ &\implies n+3 \geq 2n+4 \\ &\implies 0 \geq 2n+4-n-3 \\ &\implies 0 \geq n+1 \end{aligned}$$

   Como la desigualdad es falsa $\forall n \geq 1$, la suposición realizada es falsa, por lo cual, se concluye que m_n es decreciente en todo su dominio. $\clubsuit$

3. Determine si las siguientes series convergen o divergen. En caso de alguna ser convergente, determine su valor de convergencia.

   a) **[5 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3}+6}{5^n}$

   Note que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3}+6}{5^n} &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3}}{5^n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{5^n} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^n\cdot (-2)^3}{5^n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{5^n} \\ &= -8\cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^n} + 6\cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^n} \\ &= -8\cdot \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 6\cdot \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Note que $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^n$ y $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ son series geométricas convergentes, pues $\left|\frac{-2}{5}\right| < 1$ y $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, respectivamente y sus valores de convergencia vienen dados por:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^n = \frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^3}{1-\frac{-2}{3}} = \frac{-8}{175} \qquad \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{100}$$

Con esto, se tiene que:

$$-8\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^n + 6\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = -8\cdot\frac{-8}{175}+6\cdot\frac{1}{100} = \frac{149}{350}$$

Por tanto, por el Criterio de la Serie Geométrica, la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2)^{n+3}+6}{5^n}$ es convergente y su valor de convergencia es $\frac{149}{350}$ ♣

b) **[3 puntos]** $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(p)}{p+1}-\frac{\cos(p-1)}{p}$

Como se presenta la resta de términos consecutivos, se utilizará el Criterio de la Serie Telescópica, entonces note que:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(p)}{p+1}-\frac{\cos(p-1)}{p} = \sum_{p=1}^{\infty}-\left(\frac{\cos(p-1)}{p}-\frac{\cos(p)}{p+1}\right) = -\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(p-1)}{p}-\frac{\cos(p)}{p+1}$$

Así, tome $b_p = \frac{\cos(p-1)}{p}$ y $b_{p+1} = \frac{\cos(p)}{p+1}$

Aplicando el Criterio de la Serie Telescópica, se tiene que su valor de convergencia viene dado por:

$$b_1 - \lim_{p\to+\infty} b_{p+1} = \frac{\cos(1-1)}{1} - \lim_{p\to+\infty}\frac{\cos(p)}{p+1} = 1-0 = 1$$

Con esto, se tiene que $-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(p-1)}{p}-\frac{\cos(p)}{p+1} = -1$

Por tanto, por el Criterio de la Serie Telescópica, la serie $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(p)}{p+1}-\frac{\cos(p-1)}{p}$ es convergente y su valor de convergencia es -1. ♣

4. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

   a) **[3 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)+1}{7^n}$

   Note que:

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen}^2(n) \leq 1 \quad &\Longrightarrow -1+1 \leq 1 + \operatorname{sen}^2(n) \leq 1+1 \\ &\Longrightarrow 0 \leq 1 + \operatorname{sen}^2(n) \leq 2 \\ &\Longrightarrow \frac{0}{7^n} \leq \frac{1+\operatorname{sen}^2(n)}{7^n} \leq \frac{2}{7^n} \end{aligned}$$

   Así, se comparará $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)+1}{7^n}$ con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n}$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n} \quad &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n \end{aligned}$$

   la cual es convergente por el Criterio de la Serie Geométrica, pues $\left|\dfrac{1}{7}\right| < 1$

   Por tanto, al ser $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n}$ convergente, por el Criterio de Comparación Directa, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)+1}{7^n}$ también es convergente. ♣

b) **[4 puntos]** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$

Note que, tanto la base como el exponente dependen de un contador, entonces procedamos por el Criterio de la Raíz, así:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|} &= \lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left|\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}\right|}\\
&= \lim_{k\to+\infty}\left[\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}\right]^{\frac{1}{k}}\\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{\frac{3k}{k}}\\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3}\\
&= \left(\lim_{k\to+\infty}\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3}\\
&= \left(\lim_{k\to+\infty}\frac{3k^2}{5k^2}\right)^{3}\\
&= \left(\frac{3}{5}\right)^{3}\\
&= \frac{27}{125}
\end{aligned}$$

Como el valor del límite es $\dfrac{27}{125} < 1$, por el Criterio de la Raíz, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$ es convergente. ♣

5. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!}$

a) **[2 puntos]** Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente.

Dado que se pide determinar si la serie es absoluta o condicionalmente convergente, procedemos a resolver la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

Aplicando el Criterio de la Razón (debido a la presencia de factoriales), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{n+1}{[(n+1)+1]!}}{\dfrac{n}{(n+1)!}} \right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n+1}{(n+2)!}}{\dfrac{n}{(n+1)!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)!}{n\cdot(n+2)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)!}{n\cdot(n+2)(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot\cancel{(n+1)!}}{n\cdot(n+2)\cancel{(n+1)!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{n\cdot(n+2)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+2n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como el valor del límite es $0 < 1$, por el Criterio de la Razón, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ es convergente.

Finalmente, por definición de convergencia absoluta, como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ es convergente, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!}$ es absolutamente convergente. ♣

b) **[2 puntos]** Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001

Por definición de cota de error, se tiene que:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} < 0{,}0001$$

así, se tiene que:

$$a_{n+1} < 0{,}0001 \quad \Longrightarrow \frac{n+1}{(n+2)!} < 0{,}0001$$

donde esta desigualdad se cumple a partir de $n = 7$ ♣

c) **[1 punto]** Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b*

Dado que la cantidad mínima de términos determinada en el inciso anterior es 7, para aproximar la serie, basta con realizar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!} &\approx \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!} \\ &\approx \frac{-1\,331}{5\,040} \\ &\approx -0{,}2640873016\end{aligned}$$

♣

6. **[4 puntos]** Determine el intervalo de convergencia (no analice los extremos) para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^{n+4}}{(3n+6)\cdot 11^n}$$

Aplicando el Criterio de la Razón, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(5x)^{(n+1)+4}}{[3(n+1)+6]\cdot 11^{n+1}}}{\dfrac{(5x)^{n+4}}{(3n+6)\cdot 11^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(5x)^{n+5}}{(3n+9)\cdot 11^{n+1}}}{\dfrac{(5x)^{n+4}}{(3n+6)\cdot 11^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(5x)^{n+5}\cdot(3n+6)\cdot 11^n}{(3n+9)\cdot 11^{n+1}\cdot(5x)^{n+4}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(5x)^{n}\cdot(5x)^5\cdot(3n+6)\cdot 11^n}{(3n+9)\cdot 11^{n}\cdot 11^1\cdot(5x)^{n}\cdot(5x)^4}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{(5x)^{n}}\cdot(5x)^5\cdot(3n+6)\cdot \cancel{11^n}}{(3n+9)\cdot \cancel{11^{n}}\cdot 11^1\cdot\cancel{(5x)^{n}}\cdot(5x)^4}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(5x)\cdot(3n+6)}{(3n+9)\cdot 11}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}|5x|\cdot\left|\frac{3n+6}{33n+99}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}|5x|\cdot\left|\frac{3n}{33n}\right| \\
&= |5x|\cdot\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Ahora, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|5x|\cdot\frac{1}{11}<1 &\implies |5x|<11 \\
&\implies -11<5x<11 \\
&\implies \frac{-11}{5}<\frac{5x}{5}<\frac{11}{5} \\
&\implies \frac{-11}{5}<x<\frac{11}{5}
\end{aligned}$$

Así, el intervalo de convergencia de la serie sería $\left]\dfrac{-11}{5},\dfrac{11}{5}\right[$ ♣

Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico.

[Leonhard Euler]