

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA UNA PROPORCIÓN

Partimos del siguiente Teorema...

Sea p la proporción de determinados éxitos en una población. Dada la proporción muestral $\hat{P} = \frac{B}{n}$ para muestras de tamaño n (estadístico asociado a la proporción poblacional p) donde B es la variable que indica el número de éxitos en la muestra, se tiene que

1. B sigue una distribución binomial: $B \sim B(n, p)$
2. $E(\hat{P}) = p$, es decir, \hat{P} es insesgado
3. $Var(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$, donde $q = 1 - p$

Observación: Recuerde que $\hat{P} = \frac{B}{n}$ es un estimador para el porcentaje p de éxitos en una población, donde B es el número de éxitos en muestras aleatorias de tamaño n .

En una muestra de tamaño n encontramos que hay una probabilidad $1 - \alpha$ de que

$$p \in \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$$

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA UNA PROPORCIÓN CON MUESTRAS GRANDES

Sea \hat{p} es valor de \hat{P} para una muestra de tamaño n . Si $n\hat{p} \geq 5$ y $n\hat{q} \geq 5$ entonces un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)\%$ para p tiene extremos

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Teorema 2: Considere una proporción poblacional p . Si \hat{P} sigue una distribución normal para muestras de tamaño n , entonces para encontrar un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)\%$ para p con un radio menor o igual a r , el tamaño de la muestra debe ser

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{pq}}{r} \right)^2$$

Si **NO** se conoce tiene el valor de p , entonces es tamaño de la muestra estará dado por

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{0.25}}{r} \right)^2$$

Ejercicios:

1. Se tomó una muestra de 384 estudiantes de una universidad, de los cuales 120 manifestaron que estudian y trabajan. Construir un intervalo de confianza con 95% de seguridad.
R/]0.26613 , 0.35886 [
2. En una ciudad de 50 amas de casa, 18 no utilizan un determinado detergente X. Determine un intervalo de confianza del 95% para la verdadera proporción de mas de casa que no utilizan dicho detergente.
R/]0.22695 , 0.49305[
3. En una escuela se toma una muestra de 50 estudiantes. Los estudiantes se someten a un examen de conocimientos y de ellos, 40 aprueban el examen. ¿Cuál sería la estimación de un intervalo para la proporción poblacional con un nivel de confianza de 95%?
R/]0.6891 , 0.91087[
4. A continuación, se presenta una muestra de notas obtenidas en un examen de admisión:

72	87	28	55	92	75	83	70	30
60	53	91	90	70	70	70	55	85

Con base en los anteriores datos, el rector de la universidad determinó de manera correcta un intervalo de confianza para el porcentaje de estudiantes que aprobaron el examen (se aprueba con 70) obteniendo]0.448889 , 0.884444[.

a) Determine aproximadamente el nivel de confianza del IC que halló el rector.

R/95%

b) El intervalo que halló el rector es muy grande. ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea tener una confianza del 90% para estimar el porcentaje de estudiantes que aprobaron el examen con un error de estimación menor que 0.05?

R/241

c) Si no se conocieran los valores de p y q , ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra?

R/271

5. Una muestra aleatoria de 50 estudiantes del TEC da los siguientes resultados:

	Mujeres	Hombres
De San José	12	9
De otras provincias	10	19

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la proporción de estudiantes de otras provincias.

R/]0.44319 , 0.71681[

6. Se toma una muestra aleatoria de 50 cascos utilizados por los corredores de motocicleta y se someten a una prueba de impacto. Se observó que 18 de los cascos no resisten la prueba, pues presentan cierto daño.

a) Encuentre un IC del 95% para la verdadera proporción de cascos que no resisten la prueba de impacto.

R/]0.22695 , 0.40305[

b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea tener una confianza de al menos 95% de que el error sea menor que 0.02, al estimar la proporción sin importar el verdadero valor de p ?

R/ 2401

7. En una ciudad de 125 apartamentos observados, 102 de ellos no permiten que los inquilinos tengan mascotas. Determine un IC del 90% para la verdadera proporción de apartamentos de la ciudad que prohíben mascotas.

R/]0.75898 , 0.87301[

8. Los siguientes datos corresponde a una muestra aleatoria de tiempos de traslado, en horas desde Alajuela hasta San José, durante el mes de marzo.

0.5	1.1	0.9	0.75	1.5	1.8	1.5	0.8
1.2	0.79	0.9	1,75	2.1	1.5	1.45	

Un empresario de transportes indica que un tiempo superior a 1.3 horas en el traslado de Alajuela a Asan José, se considera infructuoso. Construya e interprete un intervalo de confianza de 90% para la proporción de traslados infructuosos en el mes de marzo.

R/]0.254789 , 0.678544[