Matrices

Esta compuesta de m filas y n columnas

$m \times n$

$$A = \begin{array}{c|cc} & a_{n1} & a_{n2} \\ \hline a_{1m} & 1 & 2 \\ a_{2m} & 4 & 5 \\ a_{3m} & 7 & 8 \end{array} \qquad 3 \times 2$$

a_{22} $\qquad$ $a_{31} = 7$

Matriz Cuadrada

$m = n$, 3×3, 2×2, 10×10 ...

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m = 2 \\ n = 2 \end{array}$$

Matriz Rectangular

$m \neq n$, 3×2, 2×3, 10×9

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m = 3 \\ n = 2 \end{array}$$

Matriz nula

$A = 0$, $m \times n$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Diagonal principal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{matriz identidad}$$

Matriz Triangular

Inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Transpuesta A^T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz Simetrica $A = A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Antisimetrica

La antisimetrica de $A = -A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot A = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz idempotente

A es idempotente Si $A^2 = A$

$$A \cdot A = A$$

Matriz involutivo

A es involutiva Si $A^2 = I$

Identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Suma y Resta, se ocupa que sean del mismo tamaño

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \pm 5 & 2 \pm 6 \\ 3 \pm 7 & 4 \pm 8 \end{bmatrix}$$

multiplicacion por 1 escalar

$$3 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 18 & 21 \end{bmatrix}$$

Multiplicacion entre matrices

Se ocupa si o si que el numero de columnas de A_1 sea igual al numero de filas A_2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ -1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Propiedades de matrices λ = escalar

1) $A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$ Cerrada
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ Asociatividad
3) $A+0 = 0+A = A$ Neutro Aditivo
4) $A+(-A) = -A+A = 0$ Opuesto
5) $A+B = B+A$ Conmutatividad
6) $A \cdot 0 = 0$
7) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ Distributividad
8) $(\lambda+\chi)A = \lambda A + \chi A$ Distributividad
9) $(\lambda \chi) \cdot A = \lambda(\chi A)$
10) $IA = AI = A$
11) $AB \neq BA$ NO es conmutativa
12) $(AB)C = A(BC)$
13) $(A+B)C = AC+BC$

Teoremas de matrices

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
3) $(A+B)^T = A^T + B^T$ $I^T = I$
4) $(A^{-1})^{-1} = A$
5) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
6) $(AB)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Tener en cuenta

$$\underline{A} + \underline{A}B = A(I+B)$$
$$AI + AB = A(I+B)$$

$$\underline{B} + A\underline{B} = (I+A)B$$

Sean A, B, C y X matrices tales que $(XA - B)^T - C = 2X^T$. Si se sabe que $A - 2I$ es una matriz que posee inversa, utilice propiedades de las matrices y álgebra matricial para obtener la matriz X en términos de las demás matrices.

$$A - 2I = (A - 2I)^{-1}$$

$$2^1 = 2$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$Ax = B$$

$$x = \frac{B}{A} \Leftrightarrow B \cdot \frac{1}{A}$$

$$x = B A^{-1}$$

Despejar x

$$(xA - B)^T - C = 2x^T$$

$$(xA)^T - B^T - C = 2x^T \qquad (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$A^T \cdot x^T - B^T - C = 2x^T \qquad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$A^T \cdot x^T - 2Ix^T = B^T + C$$

$$(A^T - 2I)x^T = B^T + C \qquad \underline{B} + A\underline{B} = (I + A)B$$

$$\{(A^T - 2I) \cdot x^T\}^T = \{B^T + C\}^T$$

$$A - 2I = (A - 2I)^{-1}$$

$$\{x^{\cancel{T}}\}^{\cancel{T}} \cdot \{A^T - 2I\}^T = \{B^{\cancel{T}}\}^{\cancel{T}} + C^T$$

$$I^T = I$$

$$x \cdot ((A^{\cancel{T}})^{\cancel{T}} - (2I)^{\cancel{T}}] = B + C^T \qquad (kI)^T = kI, k \text{ constante} \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot [A - 2I] = B + C^T$$

$$(A^T)^T = A$$

R/ $\boxed{x = (B + C^T) \cdot (A - 2I)^{-1}}$

Gauss Jordan

Sea A una matriz, hacer A aumentada con una I y hacer operaciones elementales

Pivotes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz A aumentada

Resultado

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$1 \cdot F1 + \widetilde{F2} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 1 \to 1 \\ -1 \to 0 \\ 0 \to 0 \end{array}$$

$$-2 \cdot F2 + \widetilde{F1} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2 \to 0 \\ 1 \to 1 \\ 0 \to 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \widetilde{F3} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -3 \to 0 \\ 2 \to 0 \\ 1 \to 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot F3 + \widetilde{F1} \\ -2 \cdot F3 + \widetilde{F2} \\ \frac{1}{3} \cdot \widetilde{F3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -3 \to 0 \\ 2 \to 0 \\ 1 \to 1 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ -5\cdot F1 + \widetilde{F2} \\ 4\cdot F1 + \widetilde{F3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \frac{1}{4}\cdot \widetilde{F2} \\ 3\cdot F2 + \widetilde{F3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2\cdot F3 + \widetilde{F1} \\ -\frac{9}{4}\cdot F3 + \widetilde{F2} \\ -4\cdot \widetilde{F3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -5y + 3z &= -4 \\ 3x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Ordenar y completar

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 0x - 5y + 3z &= -4 \\ 3x + y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\} \text{Aumento}$$

matriz

Escribir coeficientes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$-3 \cdot \overline{F1 + F3} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{5} \cdot \overline{F2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} -2\cdot F_2+\widetilde{F_1} \\ -\frac{1}{5}\cdot\widetilde{F_2} \\ 5\cdot F_2+\widetilde{F_3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}\cdot\widetilde{F_3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{5}\cdot F_3+\widetilde{F_1} \\ \frac{3}{5}\cdot F_3+\widetilde{F_2} \\ \frac{1}{2}\cdot\widetilde{F_3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

$$\boxed{S=\{x=2 \quad y=-1 \quad z=-3\}}$$