Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	05
Fecha	Lunes 26 de agosto del 2024 (semana 06)
Contenidos	a) Series alternadas y aproximación de la cota del error
	b) Convergencia absoluta y condicional
	c) Series de potencias
	d) Intervalo de convergencia
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Criterio de las Series Alternadas (CSA) o Criterio de Leibniz

Una serie alternada es aquella que tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$, donde todos los a_n tienen el mismo signo, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ una serie alternada. Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple simultáneamente las condiciones:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ es convergente.

Nota:

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, se dice que la serie diverge, debido al **criterio de la divergencia**.
- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, el criterio no aplica.
- Este criterio brinda información sobre el carácter de una serie, sin embargo, si la serie es convergente, no es posible conocer el valor exacto de su suma total, es decir, solamente permite determinar si la serie converge o diverge.

Ejercicio: Determine si $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{3k}{2k^2+1}$ converge o diverge.

Para que sea convergente, debe darse que:

ⓐ $\{a_K\}$ es decreciente

Sea $f(K) = \frac{3K}{2K^2+1} \Rightarrow f'(K) = \frac{(3K)'(2K^2+1) - 3K(2K^2+1)'}{(2K^2+1)^2}$

$= \frac{3(2K^2+1) - 3K \cdot 4K}{(2K^2+1)^2}$

$= \frac{6K^2+3-12K^2}{(2K^2+1)^2}$

$$= \frac{-6k^2+3}{(2k^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3(2k^2-1)}{(2k^2+1)^2}$$

$$\leq 0 \qquad \forall x \in [1, +\infty[$$

$\therefore$ Es decreciente.

(b) $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{3k}{2k^2+1} = \lim_{k \to +\infty} \frac{3k}{2k^2}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{3}{2k}$$

$$= 0$$

Dado que ambas condiciones se cumplen, por el CSA, la serie es convergente.

Cota del error

Suponga que se cumplen las mismas hipótesis del **criterio de las series alternadas**. Sea S la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ y S_k su *k-ésima* suma parcial, entonces $|S - S_k| \leq a_{k+1}$

Convergencia absoluta

Una serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Si una serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ es convergente.

Convergencia condicional

Una serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente si $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Ejercicio: Considere la serie dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)!}$

a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

Analicemos $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!} \rightarrow a_n$

Por el Criterio de la Razón, se tiene que:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\frac{3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{3^n}{(2n+1)!}} \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (2n+1)!}{(2(n+1)+1)! \cdot 3^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot \cancel{3^n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3\cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$= 0 < 1$$

$\therefore$ Por el Criterio de la Razón $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)!} \right|$ converge.

Finalmente, por definición de convergencia absoluta, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)!}$ converge absolutamente.

b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001

Note que $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)!}$ y $a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$, así, por definición de cota de error, se tiene que $a_{n+1} < 0.0001$

$$\Rightarrow \frac{3^{n+1}}{(2n+3)!} < 0.0001$$

Por calculadora, se nota que la desigualdad se cumple a partir de $n=4$, así, el menor número de términos es 3

c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ 0,5698

Una aproximación de la serie viene dada por:

$$S \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2553}{4480}$$

$$= 0.5698$$

Recomendaciones

- Si la sucesión no tiende a cero, se puede aplicar el **criterio de la divergencia (CD)**
- Si la serie es **geométrica** o **telescópica**, se aplica el criterio correspondiente.
- Si los términos de la serie son cocientes de polinomios o de potencias de la variable, se puede probar con el **criterio de comparación directa (CCD)** o el **criterio de comparación en el límite (CCL)**
- Si los términos incluyen senos o cosenos, pruebe con el **criterio de comparación directa (CCD)**
- SI los términos incluyen funciones exponenciales, factoriales o productorias, use el **criterio del cociente (CC)**
- Si los términos incluyen bases variables elevadas a exponentes variables, use el **criterio de la raíz (CR)**
- Si los términos incluyen funciones logarítmicas, trigonométricas inversas u otras no mencionadas, tome en cuenta el **criterio de la integral (CI)** o bien, el **criterio de comparación directa (CCD)** o el **criterio de comparación en el límite (CCL)**.
- Si puede evitar la utilización del **criterio de la integral (CI)**, hágalo, pues este criterio usualmente es muy extenso y mediante criterios de comparación usualmente es más sencillo saber si una serie es convergente o divergente.

Serie de potencias

Sea x una variable real y sea c una constante. La serie dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + a_3 (x-c)^3 + \dots$$

se le conoce como una serie de potencias en variable x y centrada en c, donde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión real y los a_n son llamados los coeficientes de la serie.

Intervalo de convergencia

Corresponde con el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que la serie converge.

Radio de convergencia

Corresponde con el radio del círculo de convergencia al cual la serie converge.

Intervalo de convergencia absoluta

Corresponde con el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que la serie converge absolutamente.

Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ existe el radio de convergencia, donde según su valor, se tienen los siguientes escenarios:

1. La serie converge absolutamente solo cuando $x = c$. En este caso, $r = 0$ y $I = \{c\}$.
2. La serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso, $r = \infty$ y $I = \mathbb{R}$.
3. La serie converge absolutamente para todo x tal que $|x-c| < r$ y diverge para todo x tal que $|x-c| > r$. En este caso, el radio de convergencia es la mitad de la longitud del intervalo de convergencia y $I = \,]c-r, c+r[$, donde los extremos del intervalo pueden ser abiertos o cerrados (según corresponda)

Notas:

- Cuando se tiene el intervalo de convergencia $I =]c-r, c+r[$ (sin analizar los extremos) se le conoce como **interior del intervalo de convergencia**.
- El intervalo de convergencia y el intervalo de convergencia absoluta coinciden en todos los puntos, excepto quizá en los extremos del intervalo, esto porque en los extremos puede darse el caso de que la serie diverja, converja absolutamente, o bien, converja condicionalmente.
- El intervalo de convergencia puede determinarse utilizando el **criterio de la raíz** (**CR**), **criterio de la razón o cociente** (**CC**), o bien, el **criterio de las series geométricas** (**CSG**).

Para visualizar esto de una forma más sencilla, se presenta el círculo de convergencia, el cual resume la información descrita previamente:

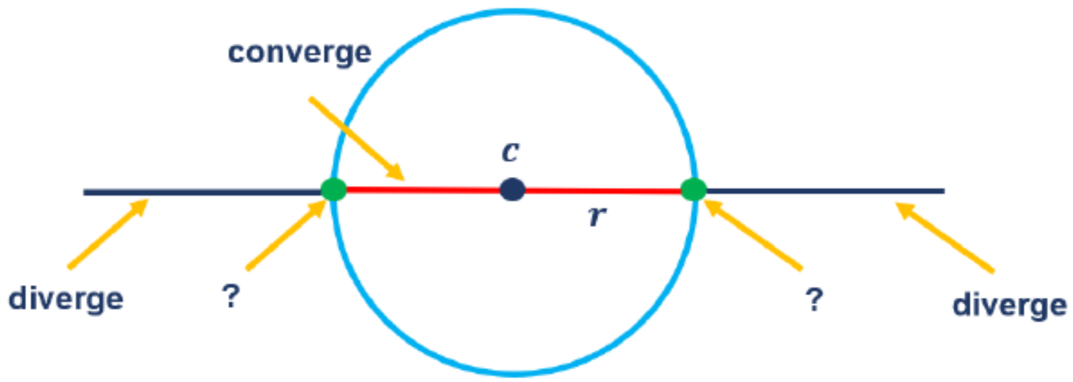

Figura 3.5.1: *Círculo de convergencia*

Ejercicio: Determine el intervalo de convergencia y el radio de convergencia para las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(x+3)^n}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$ $\quad r=+\infty, I=\mathbb{R}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{(n+1)(x+3)^{n+1}}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2(n+1)+1)}}{\dfrac{n(x+3)^n}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)(x+3)^{n+1}\cdot \cancel{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}}{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}(2n+3)\cdot n\cdot(x+3)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{(x+3)^n}\cdot(x+3)}{(2n+3)\cdot n\cancel{(x+3)^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)}{(2n+3)\cdot n} \right| \cdot |x+3|$$

$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(2n+3)\cdot n} \cdot |x+3|$$

$$= 0\cdot|x+3|$$

$\therefore$ La serie es absolutamente convergente para x, así $I=\mathbb{R}$ y $r=+\infty$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot (1-x)^n$ $\quad$ $r=0, I=\{1\}$

Por el Criterio de la Raíz se tiene que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n^n \cdot (1-x)^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n^n| \cdot |1-x|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n]{|1-x|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n^n)^{1/n} \cdot (|1-x|^n)^{1/n}$$

$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\cancel{n}/\cancel{n}} \cdot |1-x|^{\cancel{n}/\cancel{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot |1-x|$$

$1-x=0 \Rightarrow 1=x$

$$= +\infty \cdot |1-x|$$

$\therefore$ La serie es absolutamente convergente para $x=1$, así $I=\{1\}$ y $r=0$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1} \cdot (x-1)^n}{8^n}$ $r = \frac{8}{3}, I = \left]\frac{-5}{3}, \frac{4}{3}\right[$

Por el Criterio de la Raíz, se tiene que:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1} \cdot (x-1)^n}{8^n}\right|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n+1} \cdot |x-1|^n}{8^n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{8^n}} \cdot \sqrt[\cancel{n}]{|x-1|^{\cancel{n}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{8^n}\right)^{1/n} \cdot |x-1|$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(3^{n+1}\right)^{1/n}}{\left(8^n\right)^{1/n}} \cdot |x-1|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{\frac{n+1}{n}}}{8^{\cancel{n}/\cancel{n}}} \cdot |x-1|$$

$$= \frac{3}{8} \cdot |x-1|$$

Ahora $\frac{3}{8} \cdot |x-1| < 1 \Rightarrow |x-1| < \frac{8}{3}$

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{3} < x-1 < \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{3} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{8}{3} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{3} < x < \frac{11}{3}$$

$\therefore$ El intervalo de convergencia es $\left]\frac{-5}{3}, \frac{11}{3}\right[$ y $r = \frac{8}{3}$

El radio sería $r = \dfrac{11/3 - {-5/3}}{2}$

$$= \frac{8}{3}$$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Considere la serie dada por $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3+1}$

a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 9

c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ $-0{,}4148$

Ejercicio #2: Considere la serie dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)}}{5{,}7^n}$

a) Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente. R/ Absoluta

b) Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001 R/ 5

c) Aproxime la suma de la serie usando el inciso b R/ 1,2127

Ejercicio #3: Determine el intervalo de convergencia y el radio de convergencia para las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $\quad r = +\infty, I = \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x-1)^n}{n}$ $\quad r = \frac{1}{3}, I = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^{3n} \cdot \frac{n!}{2^n}$ $\quad r = 0, I = \{2\}$