§1.4.1. **Función generadora de momentos**

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$
$$E(X) = m'_X(0)$$
$$E(X^2) = m''_X(0)$$

Ejemplo 1.8 Considere la variable aleatoria discreta X, cuya distribución de probabilidad está dada de la siguiente manera:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{3}{5} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Determine la función generadora de momentos de la variable X, y úsela para calcular $\mathrm{Var}(X)$.

$$m_X(t) = e^{tx} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{2 \cdot e^{tx}}{5} + \frac{3 \cdot e^{tx}}{5}$$

- **Esperanza**

  Consiste en calcular la primera derivada de la función generadora de momentos y luego evaluarla en $t = 0$ así:

  $$E(X) = m'_X(0)$$

$$\frac{2 \cdot e^{t0}}{5} + \frac{3 \cdot e^{t1}}{5}$$

- **Varianza**

  Consiste en calcular la segunda derivada de la función generadora de momentos, luego evaluarla en $t = 0$ y finalmente restarle la esperanza al cuadrado, así:

  $$Var(X) = m''_X(0) - [m'_X(0)]^2$$

$$m_X(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot e^t \qquad Var(x) = m''(0) - [m'(0)]^2$$

$$E(x)' = \left[\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot e^t\right]' \qquad E''(x) = \left[\frac{3}{5} e^t\right]'$$

$$E'(x) = \frac{3}{5} e^t \qquad E''(x) = \frac{3}{5} e^t$$

$$E''(0) = \frac{3}{5}$$

$$E'(0) = \frac{3}{5}$$

$$Var(x) = E''(0) - [E'(0)]^2$$
$$\frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{6}{25}}$$

Ejemplo 1.9 Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Determine la función generadora de momentos $m_X(t)$ y úsela para calcular $\mathrm{Var}(X)$.

$$m_X t = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{e^t}{3}\right)^x \rightarrow \frac{e^t}{2} < 1, \quad e^t < 2, \quad t < \ln(2)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left[\frac{\left(\frac{e^t}{3}\right)^0}{1 - \frac{e^t}{3}}\right]$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{\frac{3-e^t}{3}}\right]$$

$$\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{3-e^t} = \boxed{m_X(t) = \frac{2}{3-e^t}, \quad t < \ln(2)}$$

$$E'(x) = \left[\frac{2}{3-e^t}\right]'$$

$$= \frac{0 \cdot 3 - e^t - 2 \cdot [0 - e^t]}{(3-e^t)^2}$$

$$= \frac{2e^t}{(3-e^t)^2}$$

$$E'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow E''(x) = \frac{2e^t(3-e^t)^2 - 2e^t \cdot 2(3-e^t) \cdot -e^t}{(3-e^t)^4}$$

$$= \frac{2e^t(3-e^t)^2 + 4e^{t^2} \cdot (3-e^t)}{(3-e^t)^4}$$

$$E''(0) = 1$$

$$\mathrm{Var}(x) = m''(0) - [m'(0)]^2$$

$$\mathrm{Var}(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Ejemplo 1.10 Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por:

$$f_X(k) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Verifique que f_X define una distribución de probabilidad válida.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = 1$$

$$\frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 1$$

$$\frac{4}{5} \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^0}{1 - \frac{1}{5}}\right) = 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

b) Determine la función generadora de momentos $m_X(t)$ asociada a la variable X.

$$m_X(t) = e^{xt} \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$\frac{4}{5} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{e^t}{5}\right)^x$$

$$\frac{4}{5} \cdot \left[\frac{\left(\frac{e^t}{5}\right)^0}{1 - \frac{e^t}{5}}\right]$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{5-e^t}{5}}$$

$$\frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{5-e^t}$$

$$\boxed{m_X(t) = \frac{4}{5-e^t}}$$

c) Utilice la función generadora de momentos $m_X(t)$ para encontrar el valor esperado $E(X)$ y la varianza $\mathrm{Var}(X)$.

$$m_X(t) = \frac{4}{5-e^t}$$

$$E(x)' = \frac{0 - 4(0-e^t)}{(5-e^t)^2}$$

$$= \frac{4e^t}{(5-e^t)^2} \rightarrow E'(0) = \boxed{\frac{1}{4}}$$ Esperanza

$$E''(x) = \frac{4e^t(5-e^t)^2 - 4e^t\,2(5-e^t)\cdot -e^t}{(5-e^t)^4}$$

$$E'' = \frac{4e^t(5-e^t)^2 + 8e^{t2}(5-e^t)}{(5-e^t)^4}$$

$$E''(0) = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\mathrm{Var}(x) = \boxed{\frac{5}{16}}$$

Ejemplo 1.11 Considere la variable aleatoria discreta Y, cuya distribución de probabilidad es:

$$f_Y(x) = k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}, \text{ para } x \in \{1, 2, \ldots\}.$$

a) Determine el valor de k.

$$\sum_{x=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} 5k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 1$$

$$5k \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 1$$

$$5k \left[\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{1}}{1-\frac{1}{5}}\right] = 1$$

$$\frac{5k}{4} = 1$$

$$\boxed{k = \frac{4}{5}}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable Y tome valores superiores a 4?

$$P(Y > 4) = 1 - P(Y \leq 4)$$

$$1 - \sum_{x=1}^{4} k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$$

$$1 - \sum_{x=1}^{4} \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \boxed{\frac{1}{625}}$$

c) Determine la función generadora de momentos para la variable Y, y úsela para calcular $\operatorname{Var}(Y)$.

$$f_Y(x) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$$

$$4 \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{5}\right)^{x}$$

$$4\left[\frac{\left(\frac{e^t}{5}\right)^1}{1-\frac{e^t}{5}}\right]$$

$$4\left[\frac{\frac{e^t}{\cancel{5}}}{\frac{5-e^t}{\cancel{5}}}\right]$$

$$\boxed{m_Y(t) = \frac{4e^t}{5-e^t}}$$

$$m'_Y(t) = \frac{4e^t(5-e^t) - 4e^t(0-e^t)}{(5-e^t)^2}$$

$$= \frac{4e^t(5-e^t) + 4e^{t^2}}{(5-e^t)^2}$$

$$= \frac{20e^t - \cancel{4e^{t^2}} + \cancel{4e^{t^2}}}{(5-e^t)^2}$$

$$= \frac{20e^t}{(5-e^t)^2}$$

$$\boxed{m'_Y(0) = \frac{5}{4}}$$

$$m''_Y(t) = \frac{20e^t(5-e^t)^2 - 20e^t \cdot 2(5-e^t) \cdot -e^t}{(5-e^t)^4}$$

$$m''_Y(t) = \frac{20e^t(5-e^t)^2 + 40e^{t^2}(5-e^t)}{(5-e^t)^4}$$

$$\boxed{m''_Y(0) = \frac{15}{8}}$$

$$\boxed{\operatorname{Var}(Y) = \frac{15}{8} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}}$$

Ejemplo 1.12 Considere la variable aleatoria discreta Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = 216\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}, \text{ si } x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Determine la función generadora de momentos de Z y utilícela para calcular $E(Z)$ y $\mathrm{Var}(Z)$.

$$m_z(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt}\, 216 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$8 \sum_{x=1}^{\infty} \cdot \left(\frac{e^t}{9}\right)^x \rightarrow 8 \, \frac{\frac{e^t}{9}}{\frac{9-e^t}{9}}$$

$$8 \cdot \left[\frac{\left(\frac{e^t}{9}\right)^1}{1-\frac{e^t}{9}}\right]$$

$$\boxed{m_z(t) = \frac{8e^t}{9-e^t}}$$

$$= E(z)$$

$$= \frac{8 \cdot e^t \cdot (9-e^t) - 8e^t \cdot (0-e^t)}{(9-e^t)^2} \rightarrow \frac{72e^t \cancel{-8e^{t^2}} \cancel{+8e^{t^2}}}{(9-e^t)^2}$$

$$= \frac{8e^t(9-e^t) + 8e^{t^2}}{(9-e^t)^2} \qquad m'_z(t) = \frac{72e^t}{(9-e^t)^2}$$

$$\rightarrow m''_z(t) = \frac{72e^t(9-e^t)^2 - 72e^t \cdot 2(9-e^t) \cdot -e^t}{(9-e^t)^4} \qquad m'_z(0) = \frac{9}{8}$$

$$\boxed{E(z) = \frac{9}{8}}$$

$$m''_z(t) = \frac{72e^t(9-e^t)^2 + 144e^{t^2}(9-e^t)}{(9-e^t)^4} \rightarrow m''_z(0) = \boxed{\frac{45}{32}}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(z) = \frac{45}{32} - \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}}$$

Ejemplo 1.13 Considere la variable aleatoria discreta X, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_X(x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!}, \text{ si } x \in \mathbb{N}$$

Determine el criterio y el dominio de la función generadora de momentos de X, y utilícela para calcular $E(X)$.

Teorema 1.3 : Serie exponencial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

$$m_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{xt} \cdot 4^x \cdot e^{-4}}{x!}$$

$$\boxed{D_{m} =]-\infty, +\infty[}$$

$$= e^{-4} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot 4)^x}{x!}$$

$$e^{-4} \cdot e^{4e^t}$$

$$\boxed{m_X(x) = e^{-4+4e^t}} \qquad \boxed{D_{m} =]-\infty, +\infty[}$$

$$m_X'(x) = e^{-4+4e^t} \cdot 4e^t$$

$$m_X'(0) = e^{-4+4} \cdot 4$$

$$= 4$$

$$\therefore \boxed{E(X) = 4}$$

Ejemplo 1.14 Sea Y una variable aleatoria discreta, con distribución de probabilidad asociada de criterio:

$$f_Y(x) = k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad \text{con} \quad x = 3, 4, 5, \ldots$$

a) Determine el valor de k.

$$\sum_{x=3}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$k \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \longrightarrow \frac{8}{9} k = 1$$

$$\boxed{k = \frac{9}{8}}$$

b) Determine la función generadora de momentos de Y.

$$m_Y(x) = \sum_{x=3}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{9}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\frac{9}{8} \sum_{x=3}^{\infty} \left(\frac{2e^t}{3}\right)^x$$

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{\left(\frac{2e^t}{3}\right)^3}{1 - \frac{2e^t}{3}}$$

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{\frac{8e^{3t}}{\cancel{27}}}{\frac{3 - 2e^t}{\cancel{3}}} \longrightarrow \frac{\cancel{9}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8} \cdot e^{3t}}{\cancel{9}(3 - 2e^t)}$$

$$\boxed{m_Y(x) = \frac{e^{3t}}{3 - 2e^t}}$$

Ejemplo 1.15 En un sistema automático de detección de spam, la variable aleatoria discreta X representa el número de filtros activados antes de que un mensaje sea clasificado como sospechoso. Se modela mediante la función de probabilidad:

$$f_X(k) = C\left(\frac{2}{5}\right)^k, \text{ con } k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

a) Determine el valor de la constante C para que f_X defina una función de probabilidad válida.

$$\sum_{k=0}^{\infty} C\left(\frac{2}{5}\right)^k = 1$$

$$C \cdot \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^0}{1-\frac{2}{5}} = 1$$

$$\frac{5}{3} C = 1$$

$$\boxed{C = \frac{3}{5}}$$

b) Obtenga la función generadora de momentos $m_X(t)$.

$$\frac{3}{5} \sum_{k=0}^{\infty} e^{xt} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

$$\frac{3}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2e^t}{5}\right)^x$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{\left(\frac{2e^t}{5}\right)^0}{1-\frac{2e^t}{5}}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\frac{5-2e^t}{5}}$$

$$\frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{5-2e^t}$$

$$\boxed{m_X(t) = \frac{3}{5-2e^t}}$$

c) Utilice $m_X(t)$ para calcular el valor esperado $E(X)$.

$$m_X'(t) = \frac{3}{5-2e^t}$$

$$3\left(5-2e^t\right)^{-1} = 3 \cdot -1 \left(5-2e^t\right) \cdot -2e^t$$

$$= \frac{0 - 3 \cdot -2e^t}{(5-2e^t)^2}$$

$$= \frac{6e^t}{(5-2e^t)^2}$$

$$\boxed{m'_X(0) = \frac{2}{3}}$$