1. **[5 puntos]** Para las variables aleatorias independientes X y Y se tiene que

$$X \sim B\left(15\theta, \frac{1}{3}\right) \quad , \quad Y \sim B\left(16\theta, \frac{1}{4}\right)$$

Además, considere los estimadores para θ determinados por

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X+Y}{9} \quad , \quad \hat{\theta}_2 = X - Y$$

¿Cuál de ellos es mejor estimador para el parámetro θ

$$X \sim B(\underbrace{15\theta}_{n}, \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{p}) \qquad Y \sim B(\underbrace{16\theta}_{n}, \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{p})$$

Insesgados? $\qquad E(X) \vee E(Y) = np$

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{E(X) + E(Y)}{9} \qquad E(X) = 15\theta \cdot \tfrac{1}{3} = 5\theta$$
$$E(Y) = 16\theta \cdot \tfrac{1}{4} = 4\theta$$

$$= \frac{5\theta + 4\theta}{9} = \frac{9\theta}{9} = \theta \quad \therefore \theta_1 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(X) - E(Y)$$
$$= 5\theta - 4\theta$$
$$= \theta \quad \therefore \theta_2 \text{ es insesgado}$$

Comparando θ_1 con θ_2

$$h = \frac{Var(\theta_1)}{Var(\theta_2)} \quad , \quad \begin{matrix} < 1 \to \theta_1 \text{ es mejor} \\ > 1 \to \theta_2 \text{ es mejor} \end{matrix}$$

$$= \frac{Var\left(\frac{X+Y}{9}\right)}{Var(X-Y)}$$

Continua abajo

$$\frac{Var\left(\frac{x+Y}{9}\right)}{Var(x-Y)}$$

$Var(ax) = a^2\,Var(x)$

Ej:

$Var(-x) = (-1)^2\,Var(x)$

$= Var(x)$

$$\frac{\frac{\cancel{Var(x)+Var(Y)}}{9^2}}{\frac{\cancel{Var(x)+Var(Y)}}{1}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{81} < 1 \quad \therefore\ \theta_1 \text{ es mejor estimador}}$$

2. El proveedor del cargador para celulares marca *Light* está realizando un estudio para estimar el tiempo medio de carga de su producto. En una muestra aleatoria de 49 cargadores se obtuvo una desviación estándar de 5 minutos.

a) [**4 puntos**] Si se concluyó, correctamente que el intervalo para el tiempo de carga medio de estos dispositivos es $]11.8383226, 15.27629571[$, determine el nivel de confianza utilizado.

$n = 49 \geq 30 \to Z$ $\qquad \sigma = 5$ $\qquad \bar{x} = \dfrac{a+b}{2}$

$$\bar{x} = \frac{11{,}8383226 + 15{,}27629571}{2}$$

$E = b - \bar{x}$

$$\bar{x} = 13{,}5573091 6$$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

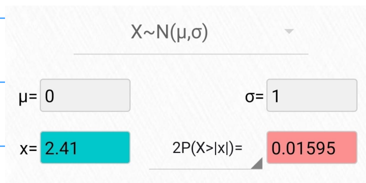
$$E = 15{,}27629571 - 13{,}55730916$$
$$= 1{,}71898655 5$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = E$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{49}} = 1{,}718986555$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1{,}718986555 \cdot \sqrt{49}}{5} \simeq 2{,}41$$

$$Z_{2{,}41} = 0{,}01595$$



$$1 - 0{,}01595 \simeq 0{,}98 = \boxed{98\%}$$

2. El proveedor del cargador para celulares marca *Light* está realizando un estudio para estimar el tiempo medio de carga de su producto. En una muestra aleatoria de 49 cargadores se obtuvo una desviación estándar de 5 minutos.

b) **[4 puntos]** El proveedor de este cargador afirma que el tiempo medio de carga es menor a 15 minutos. ¿Respaldan los datos obtenidos en la muestra esta afirmación, con una significancia de 4 %?

$n = 49 \geq 30 \to z \quad \sigma = 5$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$$

$$\bar{x} = \frac{11,8383226 + 15,2762957 1}{2}$$

$\bar{x} = 13,5573091 6$ (inciso a)

$H_0: \mu = 15\ (\geq)$

$H_1: \mu < 15$, cola izquierda

Estandartarizando

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{13,5573091 6 - 15}{\frac{5}{\sqrt{49}}} \approx -2,02$$

$P(\bar{x} < \mu_{obs})$

$= P(\bar{x} < -2,02) = 0,02169$

Como $p = 0,02169 < 0,04$ entonces se rechaza H_0

$\boxed{\text{R/ Si, los datos respaldan la afirmacion del proveedor}}$

3. [**5 puntos**] Para una variable aleatoria X con distribución $f_X(x|\lambda) = \frac{1+\lambda}{9}\left(\frac{x}{9}\right)^{\lambda}$ para $x \in [0,9]$, se tiene la muestra aleatoria $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 7$, $x_4 = 4$, $x_5 = 8$, $x_6 = 6$ y x_7. Si se sabe que la estimación de máxima verosimilitud para el parámetro λ es 2, determine el valor de x_7.

$$L(x|\lambda) = \left(\frac{1+\lambda}{9}\right)^7 \cdot \left(\frac{5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7}{9^7}\right)^{\lambda}$$

$$\ln(x|\lambda) = 7\ln\left(\frac{1+\lambda}{9}\right) + \lambda\ln\left(\frac{5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7}{9^7}\right)$$

$$= 7\ln(1+\lambda) - \cancel{7\ln(9)}^{\,0} + \lambda\ln\left(\frac{5\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot x_7}{9^7}\right)$$

$$\frac{L'(x|\lambda)}{L(x|\lambda)} = \frac{7}{1+\lambda} + \ln\left(\frac{53760\, x_7}{9^7}\right)$$

$$\frac{7}{1-1{,}67} + \ln\left(\frac{53760\cdot x_7}{9^7}\right) = 0 \qquad \lambda = -1{,}67 \text{ (enunciado)}$$

$$\ln\left(\frac{53760\cdot x_7}{9^7}\right) = \frac{700}{67}$$

$$e^{\ln\left(\frac{53760\cdot x_7}{9^7}\right)} = e^{\frac{700}{67}}$$

$$\frac{53760\, x_7}{9^7} = e^{\frac{700}{67}}$$

$$x_7 = \frac{e^{\frac{700}{67}}\, 9^7}{53760}$$

$$x_7 \approx 3066502.6253484854\,3.$$