Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	04
Fecha	Lunes 19 de agosto del 2024 (semana 05)
Contenidos	a) Criterio de comparación directa
	b) Criterio de comparación en el límite
	c) Criterio de la razón
	d) Criterio de la raíz
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Dominación de series

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos, se dice que $\{b_n\}$ domina a $\{a_n\}$ o que $\{a_n\}$ es dominado por $\{b_n\}$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Decir que $\{b_n\}$ domina a $\{a_n\}$ se denotará por $a_n \ll b_n$

Para la escogencia de las series que se compararán se puede hacer uso de lo siguiente:

Sea $p, a \in \mathbb{R}^+$, donde $a > 1$, entonces para un n suficientemente grande, se tiene que:

$$k \ll ln(n) \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Criterio de Comparación Directa (CCD)

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ series numéricas. Suponga que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que satisface que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \geq N$, entonces:

- Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
- En otro caso, el criterio no decide.

Nota: este criterio brinda información sobre el carácter de una serie, sin embargo, si la serie es convergente, no es posible conocer el valor exacto de su suma total, es decir, solamente permite determinar si la serie converge o diverge.

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n)}{5^n} \to a_n$ R/ Converge

Note que $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Rightarrow 3+-1 \leq 3+\cos(n) \leq 3+1$

$\Rightarrow 2 \leq 3+\cos(n) \leq 4$

$\Rightarrow \frac{2}{5^n} \leq \frac{3+\cos(n)}{5^n} \leq \frac{4}{5^n} \to b_n$

Ahora, note que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

esta serie converge por el CSG, pues $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, entonces por el CCD, la serie original converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\operatorname{sen}(n)}{\sqrt[3]{n^5}} \to a_n$ R/ Converge

Note que $-1 \leq \operatorname{Sen}(n) \leq 1 \Rightarrow 3+-1 \leq 3+\operatorname{Sen}(n) \leq 3+1$

$\Rightarrow 2 \leq 3+\operatorname{Sen}(n) \leq 4$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{n^5}} \leq \frac{3+\operatorname{Sen}(n)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq \frac{4}{\sqrt[3]{n^5}} \to b_n$

Ahora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^5}} \Rightarrow 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$, $5/3 > 1$, la cual es convergente por el criterio de las p-series y por ende, la serie original también converge por el CCD.

Criterio de Comparación en el Límite (CCL)

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos, es decir, $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$

- Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, con L finito positivo, entonces ambas series convergen o ambas series divergen (tienen el mismo comportamiento)
- Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- En otro caso, el criterio no decide.

Nota: este criterio brinda información sobre el carácter de una serie, sin embargo, si la serie es convergente, no es posible conocer el valor exacto de su suma total, es decir, solamente permite determinar si la serie converge o diverge.

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\sum_{m=4}^{\infty} \frac{4m+1}{2m^3-2m-1} \to a_m$ R/ Converge

$k \ll \ln(n) \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$

Note que $1 \ll 4m$, $1 \ll 2m$, $1 \ll 2m^3$, $2m \ll 2m^3$

$$\frac{4m+1}{2m^3-2m-1} \sim \frac{\cancel{4}m}{\cancel{2}m^3} = \boxed{\frac{2}{m^2}} \to b_m$$

Por esto, la serie a_m se comparará con b_m, entonces:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{a_m}{b_m} = \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{\frac{4m+1}{2m^3-2m-1}}{\frac{2}{m^2}} \right)$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \frac{m^2(4m+1)}{2(2m^3-2m-1)}$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \frac{4m^3+m^2}{4m^3-4m-2}$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \frac{4m^3}{4m^3}$$

$$= 1$$

Dado que el valor del límite es finito positivo, tanto la serie original como la nueva, tienen el mismo comportamiento, es decir

$\sum_{m=4}^{\infty} b_m = \sum_{m=4}^{\infty} \frac{2}{m^2} \Rightarrow \sum_{m=4}^{\infty} b_m = 2 \sum_{m=4}^{\infty} \frac{1}{m^2}$, la cual converge por el criterio de las p-Series.

Así, por el CCL, la serie original es convergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2+\log(n)+5^n} \rightarrow a_n$ R/ Converge

$k \ll ln(n) \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$

Note que $2^n \ll 3^n$, $n^2 \ll 5^n$, $\log(n) \ll n^2$, $\log(n) \ll 5^n$

$$\frac{2^n+3^n}{n^2+\log(n)+5^n} \sim \boxed{\frac{3^n}{5^n}} \rightarrow b_n$$

Ahora, comparando a_n y b_n, se tiene que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\left(\frac{2^n+3^n}{n^2+\log(n)+5^n}\right)}{\frac{3^n}{5^n}} \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n(2^n+3^n)}{3^n(n^2+\log(n)+5^n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n\left[3^n\left(\cancel{\frac{2^n}{3^n}}^{\to 0}+\frac{3^n}{3^n}\right)\right]}{3^n\left[5^n\left(\underbrace{\cancel{\frac{n^2}{5^n}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\log(n)}{5^n}}}_{0}+\frac{5^n}{5^n}\right)\right]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n[3^n(0+1)]}{3^n[5^n(0+0+1)]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n \cdot 3^n \cdot 1}{3^n \cdot 5^n \cdot 1}$$

$$= 1$$

Ahora, como el límite es finito positivo y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ es convergente por el CSG (pues $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$), entonces, por el CCL, la serie original es convergente.

Criterio de la Razón o Cociente (CC) o Criterio D'Alembert

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, entonces el criterio no decide.

Nota:

- Este criterio es útil cuando aparecen factoriales, potencias o productorias.
- Este criterio brinda información sobre el carácter de una serie, sin embargo, si la serie es convergente, no es posible conocer el valor exacto de su suma total, es decir, solamente permite determinar si la serie converge o diverge.

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3k+2)}$ R/ Diverge

$$\lim_{K\to+\infty}\left|\frac{a_{K+1}}{a_K}\right| = \lim_{K\to+\infty}\left|\frac{\left(\dfrac{(K+1+3)!\cdot 2^{2(K+1)+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3K+2)(3(K+1)+2)}\right)}{\dfrac{(K+3)!\cdot 2^{2K+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3K+2)}}\right|$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\frac{(K+4)!\cdot 2^{2K+3}\cdot \cancel{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3K+2)}}{\cancel{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3K+2)}(3K+5)\cdot(K+3)!\cdot 2^{2K+1}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\frac{(K+4)\cancel{(K+3)!}\cdot \cancel{2^{2K}}\cdot 2^3}{(3K+5)\cdot\cancel{(K+3)!}\cdot\cancel{2^{2K}}\cdot 2^1}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\frac{2^2(K+4)}{3K+5}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\frac{4K+16}{3K+5}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\frac{4\cancel{K}}{3\cancel{K}}$$

$$= \frac{4}{3} > 1$$

Como $\frac{4}{3} > 1$, por el CC, la serie diverge.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ R/ Diverge

Criterio de la Raíz (CR) o Criterio de Cauchy

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \pm\infty$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces el criterio no decide.

Nota:

- Este criterio es útil cuando la base y el exponente dependen de un contador.
- Este criterio brinda información sobre el carácter de una serie, sin embargo, si la serie es convergente, no es posible conocer el valor exacto de su suma total, es decir, solamente permite determinar si la serie converge o diverge.

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^5 \cdot (k^3+2)^{k+1}}{(2k+1)^{3k}}$$ R/ Converge

$$\lim_{K\to+\infty} \sqrt[K]{|a_K|} = \lim_{K\to+\infty} \sqrt[K]{\frac{K^5 \cdot (K^3+2)^{K+1}}{(2K+1)^{3K}}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \frac{\sqrt[K]{K^5} \cdot \sqrt[K]{(K^3+2)^{K+1}}}{\sqrt[K]{(2K+1)^{3K}}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \frac{K^{\cancel{5/K}\to 0} \cdot (K^3+2)^{\cancel{\frac{K+1}{K}}\to 1}}{(2K+1)^{\cancel{3K/K}\to 3}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \frac{K^0 \cdot (K^3+2)^1}{(2K+1)^3}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$= \lim_{K \to +\infty} \frac{K^3+2}{(\underbrace{2K}_{a}+\underbrace{1}_{b})^3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= \lim_{K \to +\infty} \frac{K^3+2}{(2K)^3 + 3\cdot(2K)^2\cdot 1 + 3\,(2K)^1\cdot 1^2 + 1^3}$$

$$= \lim_{K \to +\infty} \frac{K^3+2}{8K^3 + 12K^2 + 6K + 1}$$

$$= \lim_{K \to +\infty} \frac{\cancel{K^3}}{8\cancel{K^3}}$$

$$= \frac{1}{8} < 1$$

Como $\frac{1}{8} < 1$, por el CR, la serie converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ R/ Diverge

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}}{\sqrt[n]{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\cancel{2n/n} \to 2}}{e^{\cancel{n/n} \to 1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}}}_{\to 0}\right)^{2}}{e}$$

$$= \frac{2^2}{e} > 1$$

Como $\frac{4}{e} > 1$, por el CR, la serie diverge.

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{4-3\,\mathrm{sen}(p)}{p-1}$ R/ Diverge

b) $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty} \frac{2+\cos(q)}{q^2+1}$ R/ Converge

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$ R/ Converge

d) $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2+\sqrt{5m^3}}{3m^2-m+1}$ R/ Diverge

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ R/ Diverge

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{(2k)!}$ R/ Converge

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k-1}}{e^{2k}}$ R/ Converge

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n+1}\right)^n$ R/ Diverge