

## §4. Combinaciones

**Teorema 4.1** Escoger  $r$  de  $n$  objetos distintos se puede hacer de:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

**Nota 4.1** Escoger objetos usando combinaciones **NO** genera orden. Además se cumple que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n - r}$$

## §4.1. Conteo

**Ejemplo 4.1** Cuatro mujeres y seis hombres se sientan en 10 sillas enumeradas del 1 al 10. ¿De cuántas maneras se pueden sentar si:

- a) no hay restricciones?
- b) las mujeres deben ir en sillas impares?
- c) hay al menos una mujer en una silla impar?

**Ejemplo 4.2** Un estudiante debe responder exactamente 7 de 10 preguntas de un examen. Determine el número de formas posibles si:

- a) no hay restricciones?
- b) debe contestar las dos primeras preguntas?
- c) debe responder 3 de las primeras 5 y 4 de las 5 restantes?
- d) debe responder al menos 3 de las primeras 5?
- e) debe responder al menos cuatro de las primeras seis preguntas?

**Ejemplo 4.3** Hay 7 mujeres y 4 hombres en una clase. Se eligen al azar 3 personas. Resuelva los problemas siguientes:

- a) Determine el total de formas de elegir las tres personas si no hay restricciones.
- b) Determine el total de formas en que hay personas de ambos sexos.
- c) Entre esas personas hay un matrimonio. Si se debe cumplir la regla de que si se elige una persona de este matrimonio entonces se deben elegir ambos, entonces, ¿de cuántas formas puede hacerse la elección de las tres personas?

**Ejemplo 4.4** Se va a realizar una prueba de diagnóstico de los estudiantes de Probabilidades. Esta consta de 15 preguntas: 5 de Matemática General, 5 de Cálculo Diferencial e Integral y 5 de Cálculo y Álgebra Lineal. Todas las preguntas son de selección única, con 4 opciones de respuesta cada una. Mario decide responder la prueba de la siguiente forma: no contesta exactamente dos preguntas de un curso, y el resto lo llena de forma aleatoria. ¿De cuántas maneras distintas puede contestar Mario la prueba?

**Ejemplo 4.5** En un salón de 20 estudiantes, 12 son hombres y 8 son mujeres. Determine el total de maneras en que se puede escoger:

- a) un comité de 12 representantes que incluya al menos un hombre;
- b) un comité de 12 representantes donde al menos la mitad sean mujeres.

**Ejemplo 4.6** Un comité de 12 personas será elegido entre 10 hombres y 10 mujeres. ¿De cuántas formas se puede hacer la selección si:

- a) no hay restricciones?
- b) debe haber seis hombres y seis mujeres?
- c) debe haber un número par de mujeres?
- d) debe haber más mujeres que hombres?
- e) debe haber al menos 8 hombres?

**Ejemplo 4.7** Se tiene los 20 mejores promedios de Tercer Ciclo (4 de sétimo, 6 de octavo y 10 de noveno) de cierto colegio. De estos 20 estudiantes se desean elegir 6 para que asistan a una actividad. ¿De cuántas maneras se pueden elegir si:

- a) no hay restricciones?
- b) deben elegirse dos estudiantes de cada nivel?
- c) deben elegirse al menos un estudiante de cada nivel?



**Ejemplo 4.8** Se tienen dos equipos, el equipo A formado por 4 mujeres y 6 hombres, y el equipo B formado por 7 mujeres y 3 hombres. La próxima actividad está formada por 10 personas, cinco de cada equipo. ¿Cuántas maneras hay de elegir las personas para la próxima actividad si:

- a) no hay restricciones adicionales?
- b) de cada equipo se elijen 2 mujeres?
- c) en total hay 4 mujeres en la actividad?

**Ejemplo 4.9** Un estudiante debe realizar una prueba de 20 preguntas de las cuáles 5 preguntas son de matemática, 5 de ciencias, 5 de español y 5 de de estudios sociales. ¿De cuántas maneras se puede contestar esta prueba si:

- a) no hay restricciones (se puede dejar las preguntas que uno quiera sin contestar)?
- b) no se responden 2 preguntas de una de las disciplinas? \* \* \*
- c) no se responde 1 pregunta de cada disciplina?
- d) se contesta al menos una pregunta de cada disciplina?

**Ejemplo 4.10** Se tienen 7 personas: 2 con camisa roja, 2 con camisa verde, 2 con camisa azul y una con camisa negra. Estas van al teatro y se sientan en una fila de 10 asientos. ¿De cuántas maneras se pueden sentar las personas en los lugares si:

- a) pueden haber asientos vacíos entre ellas y las personas con camisa de igual color van juntas?
- b) no existen asientos vacíos entre ellas y las personas de camisa verde van separadas?

**Ejemplo 4.11** En el concurso TV-PARTIDO se tienen dos equipos, el equipo  $A$  formado por 4 mujeres y 6 hombres, y el equipo  $B$  formado por 7 mujeres y 3 hombres. La próxima actividad está formada por 10 personas, cinco de cada equipo. ¿Cuántas maneras hay de elegir las personas para la próxima actividad de manera que:

- a) de cada equipo se elijan 2 mujeres?
- b) en total estén 4 mujeres en la actividad?

**Ejemplo 4.12** El juego BUSCA-PALABRAS es para 2 jugadores, cada jugador tiene 8 fichas con una letra en cada ficha. Ambos jugadores sin ver sus fichas colocan 4 fichas al azar sobre la mesa. Luego, cada jugador por cada palabra con sentido que obtenga de las fichas en la mesa obtiene un punto, posteriormente se retiran las fichas de la mesa y a cada jugador se le completa sus fichas con 8 fichas para la siguiente partida. Suponga que en una partida Karla tiene las fichas  $A, L, G, E, B, A, N, U$  y Jorge tiene las fichas  $P, A, K, E, I, R, O, M$ , y cada uno coloca 4 letras al azar sobre la mesa. ¿Cuántas maneras hay de obtener 8 letras en la mesa con solamente dos A y una E?

## §4.2. Anagramas

### Nota 4.2

- Para asegurar que dos letras queden separadas, se puede hacer complemento.
- Para asegurar que más de dos letras queden separadas, tomamos las “otras” letras, las ordenamos, y utilizamos los extremos y los espacios en el medio para colocar las letras que deben quedar separadas.

**Ejemplo 4.13** Determine la cantidad de anagramas de la palabra «casino» en los que alguna de sus sílabas quedan juntas.

**Ejemplo 4.14** ¿Cuántas disposiciones de las letras de la palabra “tallahassee” existen si:

- a) no hay restricciones?
- b) no deben tener A's adyacentes?

**Ejemplo 4.15** Considere la palabra **ACONTECIMIENTO**. ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra:

- a) si no hay restricciones?
- b) en los cuales las vocales se encuentran en los primeros 10 lugares?
- c) que inicien con consonante y no tengan dos o más vocales juntas?



**Ejemplo 4.16** Considere la palabra **PRESENTIMIENTO**. Determine el número de anagramas posibles si:

- a) no hay restricciones.
- b) las vocales están entre los primeros 9 lugares.
- c) tienen al menos dos letras iguales en los primeros tres lugares.

**Ejemplo 4.17** Considere la palabra «INDEPENDENCIA».

- a) ¿Cuántos anagramas (permutaciones de las letras) existen de esta palabra?
- b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas, con las vocales «E» separadas por al menos una vocal?
- c) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las letras E, E, E, P, A van antes de la novena posición (no necesariamente juntas)?

**Ejemplo 4.18** Considere la palabra «SEMANASANTA».

- a) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra?
- b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas y las consonantes también?
- c) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales la «E» esté ubicada en el centro (6° posición) y se tengan al menos dos «A» antes de la «E».

**Ejemplo 4.19** Considere la palabra «OLOROSITO». ¿Cuántos anagramas se pueden formar a partir de esa palabra si:

- a) no hay restricciones?
- b) todas las vocales deben ir separadas por al menos una consonante?
- c) las letras «RIST» deben ir siempre juntas en cualquier orden y los anagramas deben empezar con consonante?
- d) todas las consonantes deben ir separadas por al menos una vocal?

## §4.3. Repartir objetos distintos

**Nota 4.3** Tanto «al menos» como «a lo sumo» se debe hacer por casos y/o por complemento.

**Ejemplo 4.20** Se van a rifar 7 libros distintos entre 5 niños. ¿De cuántas formas se pueden entregar los libros si:

- a) no hay restricciones?
- b) Juan recibe a lo sumo dos libros?
- c) Juan recibe exactamente dos libros?
- d) Juan recibe al menos dos libros?
- e) cada niño recibe al menos un libro?

**Ejemplo 4.21** Se quiere repartir 3 helados diferentes entre 7 niños. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden hacer la distribución si:

- a) no hay restricciones?
- b) ningún niño recibe más de un helado?

**Ejemplo 4.22** La empresa Macroduro ha decidido regalar 5 licencias institucionales de distintos programas a las universidades UA, UB, UC y UD. ¿De cuántas formas se puede hacer la repartición si:

- a) no hay restricciones?
- b) todas deben recibir al menos 1 una licencia?
- c) exactamente una de las cuatro universidades no recibe ninguna licencia?



**Ejemplo 4.23** En un sistema distribuido, hay 7 procesos distintos que deben asignarse a 3 núcleos de CPU. Cada núcleo debe ejecutar al menos un proceso, y dos procesos críticos (identificados como P1 y P2) no pueden asignarse al mismo núcleo debido a restricciones de prioridad. ¿Cuántas asignaciones válidas diferentes existen bajo estas condiciones?

## §4.4. Repartir objetos iguales

**Teorema 4.2** Para repartir  $n$  objetos iguales entre  $r$  personas, entonces consideramos el problema de tener  $n$  letras iguales (digamos  $x$ ) y  $r - 1$  separadores (iguales), por lo que se puede hacer de:

$$\frac{(n + r - 1)!}{n!(r - 1)!} = \binom{n + r - 1}{n}$$

#### Nota 4.4

- «al menos»: se da la cantidad mínima (no se cuenta) y se reparte el resto.
- «a lo sumo»: se hace por complemento.

**Ejemplo 4.24** ¿De cuántas maneras se pueden repartir 15 confites iguales entre 5 niños si:

- a) no hay restricciones?
- b) todos deben recibir al menos 2 confites?
- c) nadie recibe más de 5 confites?

**Ejemplo 4.25** Se tienen 6 regalos idénticos que se van a entregar a Mario, Luis, Pedro, Lucía, Andres, Ana, Beatriz y Miguel. Resuelva los problemas siguientes:

- a) Si la entrega se hace sin restricción, ¿de cuántas maneras se pueden entregar los regalos?
- b) Si Pedro o Miguel reciben al menos un regalo, ¿de cuántas formas se pueden entregar los regalos?
- c) Si Lucía solo puede recibir un regalo, ¿de cuántas maneras se pueden entregar los regalos?

**Ejemplo 4.26** La empresa ANTEL ha donado a la Universidad Bienestar Seguro 12 computadores idénticos. Estas donaciones serán distribuidas entre los 4 laboratorios que posee la universidad.

- a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las donaciones en los 4 laboratorios?
- b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las donaciones en los 4 laboratorios si en el Laboratorio LAIMA deben poner a lo sumo 4 computadores?

**Ejemplo 4.27** La empresa Mejor Obsequio regalará 12 entradas generales al próximo concierto de Vicente Fernández. Estos regalos serán distribuidos entre 4 personas al azar.

- a) ¿De cuántas maneras se podrán distribuir los obsequios entre las 4 personas?
- b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los obsequios entre las 4 personas si a uno de los ganadores  $X$  se le deben dar a lo sumo 4 entradas?

**Ejemplo 4.28** Se quiere repartir 5 confites iguales entre 7 niños. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden hacer la distribución si se quiere que ningún niño reciba más de un confite?



**Ejemplo 4.29** Se van a rifar 10 regalos iguales entre los empleados de tres sucursales de una empresa. Las sucursales tienen nombre clave A, B y C, y en ellas hay 5, 2 y 3 empleados, respectivamente. Determine la cantidad total de formas en las que pueden quedar distribuidos los regalos para que en todas las sucursales quede al menos un regalo.

## §4.5. Repartir objetos iguales y objetos distintos

**Ejemplo 4.30** Rebeca, Carlos y Cindy juntaron su dinero para comprar 7 libros distintos y 10 lapiceros idénticos.

- a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir todos los objetos si a Rebeca, que puso más dinero, le corresponden exactamente 3 libros y por lo menos 4 lapiceros?
- b) Determine la cantidad de reparticiones que se pueden hacer si a Carlos le corresponden a lo sumo 2 libros.

**Ejemplo 4.31** Cierta día, las personas que ingresan a una atracción de la feria obtienen un boleto para sortear 6 camisetas, todas distintas, y 4 llaveros de colección, todos iguales. Ese día solo se registraron 6 participantes. Determine el total de formas en que puede quedar la distribución si cada persona recibe una camiseta, y los llaveros se reparten sin ninguna restricción.

**Ejemplo 4.32** Se van a repartir 10 entradas generales al estadio (todas iguales) y 8 camisetas distintas entre tres amigas: Ana, Melissa y Raquel. ¿De cuántas maneras se puede realizar la repartición si:

- a) no hay restricciones?
- b) a Melissa le corresponden a lo sumo cuatro entradas?
- c) a las tres les corresponde al menos una camiseta?

**Ejemplo 4.33** Hay cinco oficinas en un mismo edificio. Se quieren repartir 15 sillas idénticas y 12 escritorios distintos. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los objetos si a cada oficina le corresponden al menos 2 sillas y al menos 2 escritorios?

**Ejemplo 4.34** En un concurso de desarrollo de software, los participantes Carlos, Ana y Diego han ganado 15 premios: 9 licencias anuales de GitHub Copilot (idénticas) y 6 tarjetas de regalo de Amazon de distintos valores (50, 100, 150, 200, 250 y 300). Los premios serán distribuidos aleatoriamente entre los tres ganadores.

Determine de cuántas maneras pueden distribuirse los premios si:

- a) no existen restricciones en la distribución.
- b) Carlos debe recibir al menos 3 licencias y exactamente 2 tarjetas de regalo.

### §4.5.1. Ejercicios

- 1) Una maestra cuenta con 10 manzanas idénticas y 8 galletas de distinto sabor que debe distribuir entre sus estudiantes durante el recreo. Determine la cantidad de maneras de:
  - a) distribuir los bocadillos (entre manzanas y galletas) entre 5 estudiantes si no hay restricciones.
  - b) distribuir los bocadillos (entre manzanas y galletas) entre 5 estudiantes si cada uno debe recibir al menos una manzana y al menos una galleta.
  - c) seleccionar 8 bocadillos (entre manzanas y galletas) tal que haya al menos 5 manzanas.

## §4.6. Inclusión-exclusión

**Ejemplo 4.35** El programa TV GANADORES el día domingo eligió a 15 finalistas (7 son del área metropolitana), de éstos, 5 serán los ganadores de un viaje a CANCUN. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los ganadores de manera que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana.



**Ejemplo 4.36** Se suben 10 personas a un autobús directo a San José. En San José el bus realiza 8 paradas fijas, para bajar personas. Asumiendo que las personas son distinguibles, de cuántas maneras se pueden bajar las personas del bus si:

- a) no hay restricciones.
- b) En cada parada se baja por lo menos una persona.

**Ejemplo 4.37** Una agencia de turismo ha decidido promocionar el turismo local obsequiando paquetes vacacionales a 10 personas ya escogidas. Las personas pueden elegir uno de los siguientes paquetes:

Paquete 1: viaje a a Isla San Lucas

Paquete 2: viaje a Monteverde

Paquete 3: viaje al Volcán Turrialba

Paquete 4: viaje al Chirripo

¿De cuántas maneras pueden elegir las personas el paquete vacacional de manera que cada paquete sea elegido por al menos una persona?

**Ejemplo 4.38** Este fin de semana Luis pasará en la casa por lo que decide alquilar 9 películas para ver. Estas las escogerá de una lista de 25 películas, 5 de cada uno de los siguientes géneros: terror, comedia, drama, aventura y romance. ¿De cuántas maneras puede elegir las 9 películas si:

- a) no hay restricciones?
- b) debe tomar al menos una película de cada género?

### §4.6.1. Ejercicios

- 1) En una noche de este mes, 4 fantasmas de Tibás salen a asustar por la noche a San José. En su trabajo se encuentran con dos amigos fantasmas provenientes de Guanacaste. Por lo emocionante de su labor los sorprende el amanecer y se meten a las 4 cuevas de los fantasmas de Tibás ocupándolas de manera aleatoria.
  - a) ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los fantasmas en las 4 cuevas?
  - b) ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los fantasmas en las 4 cuevas, si ninguna cueva queda desocupada?