Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Cálculo y álgebra lineal

Tiempo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje: 33 puntos
I Semestre de 2019
Sábado 11 de mayo

II Examen Parcial
(Guía de solución)

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

---

1. Considere en $\mathbb{R}^3$ a los vectores $\mathbf{u} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -2)$ y $\mathbf{w} = (\alpha, -14, 1 + 2\alpha)$.

   a) Determine α para que el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ sea un conjunto linealmente dependiente. **(3 pts)**

   Solución:
   Sea $a(2, -3, 1) + b(0, 1, -2) + c(\alpha, -14, 1 + \alpha)$, entonces

   $$\begin{cases} 2a + c\alpha = 0 \\ -3a + b - 14c = 0 \\ a - 2b + (1 + 2\alpha)\, c = 0 \end{cases}$$

   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha & \vdots & 0 \\ -3 & 1 & -14 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 1+2\alpha & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-17+22\alpha}{5} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-11+6\alpha}{5} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-54+9\alpha}{5} & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

   Para que $\{u, v, w\}$ sean l.d, debe cumplirse que $\dfrac{-54 + 9\alpha}{5} = 0 \Rightarrow \alpha = 6$

   b) Para el valor α encontrado en el inciso anterior, escriba al vector $\mathbf{w}$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. **(3 pts)**

   Solución:
   $w = au + bv = a(2, -3, 1) + b(0, 1, -2)$
   $\Rightarrow (6, -14, 13) = (2a, -3a + b, a - 2b)$
   $$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ -3a + b = 14 \\ a - 2b = 13 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \wedge b = -5$$
   $\therefore w = 3u - 5v$

2. Considere los puntos no colineales $A = (2, 4, 2)$, $B = (6, -2, 14)$ y $C = (14, 8, -4)$.

   a) Verifique que A, B y C son los vértices de un triángulo isósceles. **(2 pts)**

   Solución:
   $\|\vec{CA}\| = \|(2,4,2) - (14,8,-4)\| = \sqrt{(-8)^2 + (-10)^2 + 18^2} = \sqrt{196} = 14$
   $\|\vec{BA}\| = \|(2,4,2) - (6,-2,14)\| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-12)^2} = \sqrt{196} = 14$
   $||\vec{BC}|| = ||(14,8,-4) - (6,-2,14)|| = \sqrt{8^2 + 10^2 + (-18)^2} = 2\sqrt{122}$
   $\therefore$ El triángulo es isósceles.

   b) Para el $\triangle ABC$, calcule la medida del ángulo cuyo vértice es B. **(2 pts)**

   Solución:
   $$cos(\beta) = \frac{(8,10,-18)\cdot(-4,6,-12)}{\sqrt{488}\cdot\sqrt{196}}$$
   $\Rightarrow cos(\beta) \approx 0,789 \Rightarrow \beta \approx 0,6617 \Rightarrow \beta \approx 37,9°$

   c) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y C. **(3 pts)**

   Solución:
   $$\vec{CB} \times \vec{CA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -10 & 18 \\ -12 & -4 & 6 \end{vmatrix} = (12, -168, -88)$$
   Como $A = \frac{1}{2}\|\vec{CB} \times \vec{CA}\|$, entonces
   $$A = \frac{\sqrt{46112}}{2} \approx 95ul^2$$

3. Considere los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$ y $\mathbf{v} = (1, -2, 1)$. Determine todos los vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ para los que se cumplen, de manera simultánea, las condiciones siguientes: **(5 pts)**

   - $\mathbf{w} = \alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   - $\text{Proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \dfrac{-2}{13}\mathbf{w}$
   - $||\mathbf{w}|| = \sqrt{26}$

   Solución:
   $\mathbf{w} = (\alpha + \beta, \alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta)$
   $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v} = -\dfrac{2}{13}\mathbf{w}$
   $$\Rightarrow \quad \frac{\alpha + \beta - 2\alpha + 4\beta + 2\alpha + \beta}{26} = -\frac{2}{13}$$
   $\Rightarrow \quad \alpha + 6\beta = -4$
   $(-4 - 5\beta)^2 + (-4 - 8\beta)^2 + (-8 - 11\beta^2) = 26$
   $210\beta^2 + 280\beta + 70 = 0$
   $\beta = -1, \alpha = 2; \qquad \beta = -1/3, \alpha = -2$

Luego, $\mathbf{w}_1 = (1,4,3)$, $\mathbf{w}_2 = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{13}{3}\right)$.

4. Considere en $\mathbb{R}^3$ la recta L y el plano π de ecuaciones respectivas: **(5 pts)**

$$L : \frac{x}{2} = \frac{1-y}{3} = z+2 \qquad \pi : 5x + 11y - 7z = -35$$

Si P es el punto de intersección de la recta L con el plano π, y $Q = (1,3,-2)$, determine ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución:
$x = 2t, \quad y = 1-3t, \quad z = -2+t;$
$5(2t) + 11(1-3t) - 7(-2+t) = -35$
$\Rightarrow \quad t = 2; \quad P = (4,-5,0)$
$M : \frac{x-4}{-3} = \frac{y+5}{8} = \frac{z}{-2}.$

5. Considere en $\mathbb{R}^3$ los planos σ y ρ de ecuaciones respectivas: **(5 pts)**

$$\sigma : x + 2y - 5z = 4 \qquad \rho : y - 3z = 3$$

Si se tiene que $A = (-1,-2,0)$, halle una ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta de intersección entre los planos σ y ρ.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\bar{F}_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow m : \begin{cases} x = -2-t \\ y = 3+3t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow P = (-2,3,0)$ es un punto en la recta y $d = (-1,3,1)$ el vector director.

Como se tiene que los puntos $A = (-1,-2,0)$ y $P = (-2,3,0)$ están en la recta m, entonces otro vector en π es $\vec{AP} = (-2,3,0) - (-1,-2,0) \Rightarrow \vec{AP} = (-1,5,0)$

Así el vector normal de π es $N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow N = (-5,-1,-2)$

Entonces:
$\pi : [(x,y,z) - (-1,-2,0)] \cdot (-5,-1,-2) = 0$
$\pi : -5x - y - 2z - 7 = 0$

6. Se sabe que $\lambda = 1$ es un valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Determine los demás valores propios de A. **(2 pts)**

Solución:
Como la matriz es triangular se tiene que
$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) \Rightarrow \lambda = 1 \wedge \lambda = -2$

b) Halle dos vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = 1$. **(3 pts)**

Solución:
Si $\lambda = 1$ se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{1,2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{F_2}-3F_1]{\overline{F_3}-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ es la forma de todos los vectores propios de la matriz A asociados al valor propio $\lambda = 1$, considerando que x, y no sean cero de manera simultánea.