1. Verifique que la sucesión $\{n\,2^{-n}\}_{n\geq 1}$ es decreciente. [2 pts]

Sea $f(x) = x \cdot 2^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot 2^{-x} + x \cdot 2^{-x} \cdot \ln(2) \cdot -1$

$\Rightarrow f'(x) = 2^{-x} - x \cdot 2^{-x} \cdot \ln(2)$

$\Rightarrow f'(x) = 2^{-x}[1 - x\ln(2)]$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 - x\ln(2)}{2^{x}}$

Tabla de signos

	$-\infty$	$1/\ln(2)$	$+\infty$
$1 - x\ln(2)$	+		−
2^{x}	+		+
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore$ Se verifica que la sucesión es decreciente.

2. Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ con suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$. Determine si la serie converge, y en caso de ser convergente determine el valor de convergencia. [2 pts]

Basta con realizar lo siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{2+n}{2^n} = 2 - \lim_{n\to+\infty} \frac{2+n}{2^n}$$

$$= 2 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n \ln(2)} \quad \text{por L'Hôpital}$$

$$= 2 - 0$$

$$= 2$$

$\therefore$ La serie converge a 2.

3. Calcule la suma de la serie $B = \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+1} \right]$. [3 pts]

Note que $\frac{1}{2K-3}$ y $\frac{1}{2K+1}$ no son términos consecutivos, por lo cual, se reescribe la serie como: $\sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2K-3} - \frac{1}{2K+1} + \frac{1}{2K-1} - \frac{1}{2K-1}$

$$= \sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2K-3} - \frac{1}{2K-1} + \sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2K-1} - \frac{1}{2K+1}$$

ambas series son telescópicas, se procede a resolverlas:

$$\sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2K-3} - \frac{1}{2K-1} = \frac{1}{2\cdot 3-3} - \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{2K-1}$$

$$= \frac{1}{3} - 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2K-1} - \frac{1}{2K+1} = \frac{1}{2\cdot 3-1} - \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{2K+1}$$

$$= \frac{1}{5} - 0$$

$$= \frac{1}{5}$$

Así $\sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2K-3} - \frac{1}{2K-1} + \sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2K-1} - \frac{1}{2K+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

$$= \frac{8}{15}$$

4. Utilice el criterio de la integral para determinar si la serie $\sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ converge o diverge.

[4 pts]

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2(x)}$. Por el Criterio de la Integral, debe darse que:

a) Monotonía

Note que $f'(x) = \dfrac{-\left[\ln^2(x) + \cancel{x} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right]}{(x \ln^2(x))^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-[\ln^2(x) + 2\ln(x)]}{(x \cdot \ln^2(x))^2}$

Así $f(x)$ es decreciente.

b) Convergencia o Divergencia

$$\int_6^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_6^{A} \frac{1}{x \ln^2(x)}\, dx$$

Sea $u = \ln(x)$

$\Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

Aparte:

$$\int \frac{1}{x \ln^2(x)}\, dx = \int \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= \int u^{-2}\, du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{u} + c$$

$$= \frac{-1}{\ln(x)} + c$$

Retomando  se tiene que:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_6^A \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{-1}{\ln(x)}\right|_6^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{-1}{\ln(A)} - \frac{-1}{\ln(6)}$$

$$= \frac{-1}{+\infty} + \frac{1}{\ln(6)}$$

$$= 0 + \frac{1}{\ln(6)}$$

$$= \frac{1}{\ln(6)}$$

Dado que la integral impropia converge, por el Criterio de la Integral, la serie converge.

5. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

[4 pts c/u]

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{6+7k^2}$

Aplicando el Criterio de la Divergencia, se tiene que:

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{4K^2}{6+7K^2} = \lim_{K\to+\infty} \frac{4\cancel{K^2}}{7\cancel{K^2}}$$

$$= \frac{4}{7}$$

Dado que la sucesión no converge a cero, por el Criterio de la Divergencia, la serie diverge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)+2}{\sqrt{n}} \to a_n$

Note que $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Rightarrow -1+2 \leq \cos(n)+2 \leq 1+2$

$$\Rightarrow 1 \leq \cos(n)+2 \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(n)+2}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{n}} \to b_n$$

Ahora, se comparará con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

la cual diverge, por el Criterio de las p- Series.

Así, por el Criterio de Comparación Directa, la serie original diverge.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)+2^k}{3^k+k^2} \to a_k$

Note que $\dfrac{\ln(K)+2^K}{3^K+K^2} \sim \boxed{\dfrac{2^K}{3^K}}\ b_K$

Así, la serie original se comparará con $\displaystyle\sum_{K=1}^{\infty} \frac{2^K}{3^K} = \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^K$,

la cual es convergente por el Criterio de la Serie Geométrica.

Por tanto, por el Criterio de Comparación Directa, la serie original es convergente.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n+5}{2n+9} \right)^{2n+1}$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{-n+5}{2n+9} \right)^{2n+1} \right|} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{-n+5}{2n+9} \right)^{2n+1} \right]^{1/n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{-n+5}{2n+9} \right)^{\cancel{\frac{2n+1}{n}} \to 2}$$

$$= \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{-n+5}{2n+9} \right)^2$$

$$= \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} \right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} < 1 \qquad \text{Converge}$$

Así, por el Criterio de la Raíz, la serie converge.

6. Considere la serie alternada $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$.

a) Pruebe que esta serie S es convergente. [2 pts]

Utilizando el Criterio de las Series Alternadas, debe darse que:

a) $\{a_n\}$ es decreciente

Sea $a_n = \frac{1}{n^3}$ y sea $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Ahora $f'(x) = -3x^{-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^4}$, la cual es decreciente, así

a_n también es decreciente.

b) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

Por tanto, por el Criterio de las Series Alternadas, la serie S es convergente.

b) Determine el menor valor para N de manera que la suma parcial S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error E_N menor que 10^{-3}. [2 pts]

Por definición de cota de error, $|S - S_N| \leq a_{n+1} < 0.001$,

así $\dfrac{1}{(n+1)^3} < 0.001$, lo cual se cumple a partir de $n = 10$

Ahora

$$S \approx \sum_{n=1}^{10} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^3}$$

$$\approx 0.9011164764$$

7. Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{3n}.$$

Determine el intervalo de convergencia de esta serie (no estudie los extremos del intervalo).

[3 pts]

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{3(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-1)^n \cdot x^{3n}} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x^{3n+3} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^{3n}} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\cancel{x^{3n}} \cdot x^3 \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!} \cdot \cancel{x^{3n}}} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot |x|^3$$

$$= 0 \cdot |x|^3$$

Así, la serie es absolutamente para x, así $I = \mathbb{R}$