

Ejercicio # 1

Objetivo; Simplex 2 Fases \rightarrow min

$$\min z = 8x + 2y$$

Sujeto a:

$$6x + 2y = 6$$

$$8x + 6y \geq 12$$

$$2x + 4y \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

Fase I

$$\min r = A_1 + A_2 \rightarrow r - A_1 - A_2 = 0$$

Sujeto a:

$$6x + 2y + A_1 = 0$$

$$8x + 6y - E_2 + A_2 = 12$$

$$2x + 4y + H_3 = 8$$

$$x, y \geq 0$$

Tabla inicial

Base	VD		Variables			VS
	x	y	A1	A2	H3	
x	6	2	1	0	0	0
A2	8	6	0	1	0	-1
H3	2	4	0	0	1	0
r	0	0	-1	-1	0	0

La tabla inicial es inconsistente porque
 A_1 y A_2 están en la base y no son 0

Penalización

Base	VD		Variables				VS
	X	y	A1	A2	H3	E2	
A1	6	2	1	0	0	0	6
A2	8	6	0	1	0	-1	12
H3	2	4	0	0	1	0	8
r	14	8	0	0	0	-1	18

$$\underline{VE = X} \quad \underline{RM} \quad \frac{6}{6} = 1 \quad \frac{12}{8} = 1.5 \quad \frac{8}{2} = 4$$

$$\underline{VS = A1}$$

Pivote Dividiendo todo entre 6

Base	VD		Variables				VS
	X	y	A1	A2	H3	E2	
A1 → X	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	1

A2	H3	r
$X = 8 - (8 \cdot 1) = 0$	$X = 2 - (2 \cdot 1) = 0$	$X = 14 - (14 \cdot 1) = 0$
$Y = 6 - (8 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$	$Y = 4 - (2 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$	$Y = 8 - (14 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$
$A1 = 0 - (8 \cdot \frac{1}{6}) = -\frac{4}{3}$	$A1 = 0 - (2 \cdot \frac{1}{6}) = -\frac{1}{3}$	$A1 = 0 - (14 \cdot \frac{1}{6}) = -\frac{7}{3}$
$A2 = 1 - (8 \cdot 0) = 1$	$A2 = 0 - (2 \cdot 0) = 0$	$A2 = 0 - (14 \cdot 0) = 0$
$H3 = 0 - (8 \cdot 0) = 0$	$H3 = 1 - (2 \cdot 0) = 1$	$H3 = 0 - (14 \cdot 0) = 0$
$E2 = -1 - (8 \cdot 0) = -1$	$E2 = 0 - (2 \cdot 0) = 0$	$E2 = -1 - (14 \cdot 0) = -1$
$VS = 12 - (8 \cdot 1) = 4$	$VS = 8 - (2 \cdot 1) = 6$	$VS = 18 - (14 \cdot 1) = 4$

Tabla despues de los calculos

Base	VD	Variables				VS	
	X	y	A1	A2	H3	E2	
A1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	1
A2	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	-1	9
H3	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	6
r	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	0	-1	4

$$\underline{VE = r} \quad \underline{RM} \quad \underline{\frac{1}{3} = 3} \quad \underline{\frac{4}{\frac{10}{3}} = 12} \quad \underline{\frac{6}{\frac{10}{3}} = 18}$$

VS = A2

Pivote Multiplicando todo por $\frac{3}{10}$

Base	VD	Variables				VS	
	X	y	A1	A2	H3	E2	
$A2 \rightarrow r$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$

X	H3	r
$x = 1 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 1$	$x = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$	$x = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$
$y = \frac{2}{3} - (\frac{1}{3} \cdot 1) = 0$	$y = \frac{2}{3} - (\frac{1}{3} \cdot 1) = 0$	$y = \frac{2}{3} - (\frac{1}{3} \cdot 1) = 0$
$A1 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{5}) = \frac{3}{10}$	$A1 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{5}) = 1$	$A1 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{5}) = -1$
$A2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}) = -\frac{1}{10}$	$A2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}) = -1$	$A2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}) = -1$
$H3 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$	$H3 = 1 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 1$	$H3 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot 0) = 0$
$E2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{10}) = \frac{1}{10}$	$E2 = 0 - (\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{10}) = 1$	$E2 = -1 - (\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{10}) = 0$
$VS = 1 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}) = \frac{3}{5}$	$VS = 6 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}) = 2$	$VS = 4 - (\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}) = 0$

Tabla despues de los calculos

Base	VD			Variables			VS
	X	y	A1	A2	H3	E2	
X	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
y	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
H3	0	0	1	-1	1	1	2
r	0	0	-1	-1	0	0	0

Antes de pasar a fase 2

Existen artificiales en la base? NO

VS en r=0? Si

Entonces podemos pasar a fase 2

Fase 2

$$\min z = 8x + 2y \rightarrow z - 8x - 2y = 0$$

Eliminando las variables artificiales

Base	VD			Variables		VS
	X	y	H3	E2		
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	
y	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$	
H3	0	0	1	1	2	
z	-8	-2	0	0	0	

Cambio del F0

Paso 1: Convertir x a cero en z \rightarrow fila 1(x).8 + z

Base	VD	Varrables	VS		
	x	y	H3	E2	
X.8	8	0	0	$\frac{8}{10}$	$\frac{24}{5}$
Z	-8	-2	0	0	0
nuevo Z	0	-2	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{5}$

Tabla modificada despues del paso 1

Base	VD	Varrables	VS		
	x	y	H3	E2	
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
Y	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
H3	0	0	1	1	2
Z	0	-2	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{5}$

Paso 2: Convertir y a cero en z \rightarrow fila 2(y).2 + z

Base	VD	Varrables	VS		
	x	y	H3	E2	
Y.2	0	2	0	$-\frac{6}{10}$	$\frac{72}{5}$
Z	0	-2	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{5}$
nuevo Z	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$

Tabla modificada despues del paso 2

Base	VD		Variables		VS
	X	y	H3	E2	
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
y	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
H3	0	0	1	1	2
Z	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$

$$\underline{VE = E2} \quad \underline{RM} \quad \underline{\frac{3}{5}} = 6 \quad \text{Las negativas} \\ \underline{\frac{1}{10}} \quad \text{se ignoran}$$

$$\underline{VS = H3}$$

Pivote Multiplicando todo por $\frac{3}{10}$

Base	VD		Variables		VS
	X	y	H3	E2	
$H3 \rightarrow E2$	0	0	1	1	2

Haciendo Gauss Jordan

$$\text{Fila } X \rightarrow X - \frac{1}{10} \cdot E2$$

Base	VD		Variables		VS
	X	y	H3	E2	
$\frac{1}{10} \cdot E2$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
X	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
nuevo X	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$

Haciendo Gauss Jordan

$$\text{Fila } Y \rightarrow Y + \frac{3}{10}E_2$$

Base	VD		Variables		VS
	X	Y	H3	E2	
$\frac{3}{10} \cdot E_2$	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
X	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$
nuevo X	0	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{9}{5}$

Haciendo Gauss Jordan

$$\text{Fila } Z \rightarrow Z - \frac{1}{5} \cdot E_2$$

Base	VD		Variables		VS
	X	Y	H3	E2	
$\frac{1}{5} \cdot E_2$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
X	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
nuevo X	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{39}{5}$

Tabla final

Base	VD		Variables		VS
	X	Y	H3	E2	
X	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$
Y	0	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{9}{5}$
E2	0	0	1	1	2
Z	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{39}{5}$

$$X = \frac{2}{5}$$

$$Y = \frac{9}{5}$$

$$\min Z = 8 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{39}{5}$$

Tipo de caso: Solución Única

Ejercicio #2

Sea $w = r$ (para no enredarse)

Objetivo: Simplex para $M \rightarrow \max$

Max $z = 24x + 16y + 16w$
Sujeto a:

$$\begin{aligned} 12x + 24y + 8w &\leq 80 \\ 8x + 4y + 8w &= 60 \\ x, y, w &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max z = 24x + 16y + 16w$$

Sujeto a:

$$12x + 24y + 8w \leq 80$$

$$8x + 4y + 8w = 60$$

$$x, y, w \geq 0$$

Forma estandar para gran M

$$\max z = 24x + 16y + 16w \rightarrow z - 24x - 16y - 16w + MA_2 = 0$$

Sujeto a:

$$12x + 24y + 8w + H_1 = 80$$

$$8x + 4y + 8w + A_2 = 60$$

$$x, y, w \geq 0$$

Tabla Inicial

Base	VD			Variables		VS
	x	y	w	H ₁	A ₂	
H ₁	12	24	8	1	0	80
A ₂	8	4	8	0	1	60
z	-24	-16	-16	0	M	0

Penalización; Viejo z - m. Fila A₂

Base	VD			Variables		VS
	x	y	w	H ₁	A ₂	
H ₁	12	24	8	1	0	80
A ₂	8	4	8	0	1	60
z	-24-8M	-16-4M	-16-8M	0	0	-60M

$$\underline{VE = X} \quad RMi \quad \frac{80}{72} \approx \underline{6667} \quad \frac{60}{8} = 7,5$$

$$\underline{VS = HI}$$

Pivote; multiplicando todo por $\frac{1}{72}$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	HI	A2	
HI $\rightarrow X$	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{72}$	0	$\frac{20}{3}$

Haciendo Gauss Jordan (iteración 1)

Fila A2 $\rightarrow A2 - 8 \cdot X$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	HI	A2	
$8 \cdot X$	8	16	$\frac{16}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{160}{3}$
A2	8	9	8	0	1	60
Nuevo A2	0	-32	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{20}{3}$

Haciendo Gauss Jordan (iteración 1)

Fila Z $\rightarrow Z + (29+8M)X$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	HI	A2	
$(29+8M)X$	$29+8M$	$48+16M$	$16+\frac{16M}{3}$	$2+\frac{2M}{3}$	0	$160+\frac{160M}{3}$
Z	$-29-8M$	$-36-8M$	$-16-8M$	0	0	$-60M$
Nuevo Z	0	$32+12M$	$-\frac{8M}{3}$	$2+\frac{2M}{3}$	0	$160-\frac{20M}{3}$

Tabla después Gauss-Jordan (Iteración 1)

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
X	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{20}{3}$
A2	0	-3	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{20}{3}$
2	0	$3x + 12y$	$-\frac{8}{3}M$	$x + \frac{2}{3}M$	0	$160 - \frac{20M}{3}$

$$\underline{VE = W} \quad \underline{RM} \quad \frac{\frac{20}{3}}{\frac{2}{3}} = 10 \quad \frac{\frac{20}{3}}{\frac{8}{3}} = 2,5$$

$$\underline{VS = A2}$$

Pivote: Multiplicando todo por $\frac{3}{8}$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
A2 $\rightarrow w$	0	$-\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{2}$

Haciendo Gauss Jordan (Iteración 2)

Fila X $\rightarrow X - \frac{2}{3}w$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
$\frac{2}{3}w$	0	-3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{3}$
X	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{20}{3}$
Nuevo X	1	5	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	S

Haciendo Gauss Jordan (iteración 2)

Fila → $Z + \frac{8M}{3} \cdot W$

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
$\frac{8M}{3} \cdot W$	0	-12M	$\frac{8M}{3}$	$-\frac{2M}{3}$	M	$\frac{20M}{3}$
Z	0	$32 + 12M$	$-\frac{8M}{3}$	$2 + \frac{2M}{3}$	0	$160 - \frac{20M}{3}$
Nuevo Z	0	32	0	2	M	160

Tabla final

Base	VD			Variables		VS
	X	y	w	H1	A2	
X	1	5	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	5
W	0	$-\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{2}$
Z	0	32	0	2	M	160

$$x = 5$$

$$y = 0$$

$$\begin{aligned} \max Z &= 29 \cdot 5 + 16 \cdot 0 + 16 \cdot \frac{5}{2} \\ &= 160 \end{aligned}$$

Tipo de caso: Solución Unica

* Ejercicio #3

Objetivo: Simplex 2 fases \rightarrow Max

Sujeto a:

$$\text{Max } Z = 2x + 4y + 3w$$

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2w &\leq 10 \\ x - 2y + 3w &\geq 6 \\ 2x + 3y - w &\leq 9 \\ x + y + 2w &= 7 \\ x, y, w &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(1) 3x + 4y + 2w + H1 = 10$$

$$\Rightarrow (2) x - 2y + 3w - E1 + A1 = 6$$

$$(3) 2x + 3y - w + H2 = 9$$

$$(4) x + y + 2w + A2 = 7$$

Fase 1:

$$\min r = A1 + A2 \rightarrow r - A1 - A2 = 0$$

Tabla Inicial:

Base	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	3	1	2	1	0	0	0
A1	1	-2	3	0	0	1	0
H2	2	3	-1	0	1	0	0
A2	1	1	2	0	0	0	1
r	0	0	0	0	0	-1	-1

Se penaliza la fila r con el objetivo de deshacernos de las variables artificiales en FO

Penalización:

	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	3	1	2	1	0	0	0
A1	1	-2	3	0	0	1	0
H2	2	3	-1	0	1	0	0
A2	1	1	2	0	0	0	1
r	2	-1	5	0	0	0	0

→ Iteración 1

$$VE = w \quad RM = \frac{10}{2} = 5 \quad \left(\frac{6}{3} = 2 \right) \quad \frac{7}{2} = 3.5 \quad VS = A1$$

Pivot = 3

	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	7/3	7/3	0	1	0	-2/3	0
w	1/3	-2/3	1	0	0	1/3	0
H2	7/3	7/3	0	0	1	1/3	0
A2	1/3	7/3	0	0	0	-2/3	1
r	1/3	7/3	0	0	0	-5/3	0

→ Iteración 2

$$VE = y \quad RM = \frac{6}{7/3} = 18/7 \quad \frac{3}{7/3} = 9/7 \quad VS = A2$$

Pivot = 7/3

	x	y	w	H1	H2	A1	A2
H1	2	0	0	1	0	0	-1
w	3/7	0	1	0	0	1/7	2/7
H2	2	0	0	0	1	1	-1
y	1/7	1	0	0	0	-2/7	3/7
r	0	0	0	0	0	-1	-1

✓ r=0 y no hay variables artificiales, el problema es factible. Ahora saltamos a la siguiente fase

Fase 2:

$$FO \text{ original} = z - 2x - y - 3w = 0$$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
H1	2	0	0	1	0	0	3
w	$\frac{3}{7}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{20}{7}$
H2	2	0	0	0	1	-1	8
y	$\frac{1}{7}$	1	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$
z	-2	-1	-3	0	0	0	0

Ajustamos con Gauss-Jordan

- Fila Z $\rightarrow Z + 3y$
- ~~Fila Z $\rightarrow Z + 3w$~~

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
Z	$\frac{-13}{7}$	0	-3	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$

- Fila Z $\rightarrow Z + 3w$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
Z	$\frac{-4}{7}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{69}{7}$

→ Iteración 1

$$VE = x \quad RM = \frac{3}{2} = 1.5 \quad VS = H1 \quad Pivote = 2$$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
x	1	0	0	1/2	0	0	3/2
w	0	0	1	-3/14	0	-1/7	31/14
H2	0	0	0	-1	1	-1	5
y	0	1	0	-1/14	0	2/7	15/14
z	0	0	0	2/7	0	-1/7	75/7

→ Iteración 2

$$VE = EI \quad VS = y \quad Pivote = 2/7$$

	x	y	w	H1	H2	EI	VS
x	1	0	0	1/2	0	0	3/2
w	0	1/2	1	-1/4	0	0	11/4
H2	0	7/2	0	-8/4	1	0	35/4
EI	0	7/2	0	-1/4	0	1	15/4
z	0	1/2	0	1/4	0	0	45/4

$$x = 3/2, y = 0, w = 11/4 \quad Z_{\max} = 45/4 \approx 11.25$$

Tipo de caso: Solución óptima única

* Ejercicio #4

Objetivo: Simplex Gran M → Min

$$\min z = 3x + 4y$$

Sujeto a:

$3x + 4y \geq 3$	Estandar	(1) $3x + 4y - S_1 + A_1 = 3$
$x + 4y \leq 5$	\Rightarrow	(2) $x + 4y + S_2 = 5$
$x \geq 2$		(3) $-x + S_3 = 2$
$y \leq 10$		(4) $y + S_4 = 10$
$x, y \geq 0$		

$$\min z = 3x + 4y - MA_1 \rightarrow z - 3x - 4y + MA_1 = 0$$

Tabla inicial

	x	y	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	A ₁	VS
A ₁	3	1	-1	0	0	0	1	3
s ₂	1	1	0	1	0	0	0	5
s ₃	-1	0	0	0	1	0	0	2
s ₄	0	1	0	0	0	1	0	10
z	-3	-4	0	0	0	0	M	0

Penalización

Eliminaremos A₁ de z

$$\text{Nuevo } z = z - M(A_1)$$

	x	y	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	A ₁	VS
Nuevo z	w ₁ w ₂ w ₃	y ₁ y ₂ y ₃	M	0	0	0	0	-3M

→ Iteración 1

$$VE = X$$

$$RM: \frac{3}{3} = 1 \quad S = 5 \quad \text{Pivot} = 3$$

$$VS = A_1$$

	X	y	S1	S2	S3	S4	A1	VS
X	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1
S2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	4
S3	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	3
S4	0	1	0	0	0	1	0	10
Z	0	-3	-1	0	0	0	$M+1$	3

→ Iteración 2

$$VE = y \quad RM: \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{VS}} = 3 \quad \frac{4}{2/3} = 6 \quad \frac{3}{1/3} = 9 \quad \frac{10}{1} = 10 \quad \text{Pivot} = \frac{1}{3}$$

	X	y	S1	S2	S3	S4	A1	VS
y	3	1	-1	0	0	0	1	3
S2	-2	0	1	1	0	0	-1	2
S3	-1	0	0	0	1	0	0	2
S4	-3	0	-1	0	0	1	-1	7
Z	9	0	-4	0	0	0	$M+4$	12

→ Iteración #3

$$VE = S1 \quad RM: \underbrace{\frac{2}{1}}_1 = 2 \quad \underbrace{\frac{7}{1}}_1 = 7 \quad Pivote = 1$$
$$VS = S2$$

	x	y	S1	S2	S3	S4	A1
y	1	1	0	1	0	0	0
S1	-2	0	1	1	0	0	-1
S2	0						
S3	-1	0	0	0	1	0	0
S4	-1	0	0	-1	0	1	0
Z	1	0	0	4	0	0	M

→ Solución óptima única

$$\cancel{Z = 1(0) + 4(0)} \quad * = 0, Y = 5$$

$$\min Z = 3x + 4y \quad Z = 3(0) + 4(5) = 20$$

$$Z = 20 //$$