Independencia

H_0: Son inpendientes

H_1: No son inpendientes # ejercicio

Ejemplo 4:

Los empleados de una empresa trabajan una jornada de 8 horas distribuidas en dos tandas de horario: el primero corresponde al bloque de la “mañana” en horario 8:00-12:00, luego se da una hora para el almuerzo y posteriormente llega el bloque de la “tarde” en horario 13:00-17:00. Se valoró si su desempeño, en cada uno de los bloques (mañana o tarde), era bueno, regular o malo. Con un nivel de significancia del 5%, ¿se puede asegurar que el desempeño de los empleados en ambos bloques de horarios son independientes?

		TARDE			
		Bueno	Regular	Malo	TOTAL
MAÑANA	Bueno	56	71	12	139
	Regular	47	163	38	248
	Malo	14	42	85	141
	TOTAL	117	276	135	528

$n = 528$

$$e_{11} = \frac{139 \cdot 117}{528} = 30{,}80$$

$$e_{12} = \frac{139 \cdot 276}{528} = 72{,}66$$

$$e_{13} = \frac{139 \cdot 135}{528} = 35{,}54$$

$$e_{21} = \frac{248 \cdot 117}{528} = 54{,}95$$

$$e_{22} = \frac{248 \cdot 276}{528} = 129{,}64$$

$$e_{23} = \frac{248 \cdot 135}{528} = 63{,}41$$

$$e_{31} = \frac{141 \cdot 117}{528} = 31{,}25$$

$$e_{32} = \frac{141 \cdot 276}{528} = 73{,}71$$

$$e_{33} = \frac{141 \cdot 135}{528} = 36{,}05$$

		TARDE			
		Bueno	Regular	Malo	TOTAL
MAÑANA	Bueno	56	71	12	139
	Regular	47	163	38	248
	Malo	14	42	85	141
	TOTAL	117	276	135	528

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

	Bueno	Regular	Malo	Total
Bueno	30,80	72,66	35,54	139
Regular	54,95	129,64	63,41	248
malo	31,24	73,70	36,05	141
Total	117	276	135	528

$$\frac{(56-30{,}80)^2}{30{,}80} + \frac{(71-72{,}66)^2}{72{,}66} + \frac{(12-35{,}54)^2}{35{,}54} +$$

$$\frac{(47-54{,}95)^2}{54{,}95} + \frac{(163-129{,}64)^2}{129{,}64} + \frac{(38-63{,}41)^2}{63{,}41} +$$

$$\frac{(14-31{,}24)^2}{31{,}24} + \frac{(42-73{,}70)^2}{73{,}70} + \frac{(85-36{,}05)^2}{36{,}05}$$

$X^2_{obs} = 145{,}7812$ $\quad 3 \times 3 = V = 2 \times 2 = 4 \quad \alpha = 0{,}05$

$X^2_c = X^2_{0.05,\,4} = 9{,}48773$

R/ Como $X^2_{obs} = 145{,}7812 > X^2_c = 9{,}48773$ Se rechaza H_0, NO son independientes

Con valor p

$\chi^2_{obs} = 145,7832$ $\quad v = 2x2 = 4$ $\quad \alpha = 0,05$

$P(\chi^2 > 1,457832) = 0,00006$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Como } p = 0,00000 < \alpha = 0,05 \\ \text{Se rechaza Ho, NO son independientes}\end{array}}$$

Ejemplo 3:

En un estudio de una vacuna de hepatitis participan **1083 voluntarios**. De éstos, se eligen aleatoriamente **549 y son vacunados**. Los otros, **534, no son vacunados**. Después de un cierto tiempo, se observa que 70 de los 534 **no vacunados** han contraído la hepatitis, mientras que sólo **11 de los 549 vacunados** la han contraído.

¿Es el hecho de contraer hepatitis independiente de haber sido vacunado contra la dolencia?

V = Vacunados $\quad$ NV = NO Vacunados
H = Hepatitis $\quad$ NH = NO Hepatitis

	H	NH	Tx
V	11	538	549
NV	70	464	534
Ty	81	1002	1083

, n = 1083

$e_{11} = \dfrac{549 \cdot 81}{1083} = 41,06$ $\qquad e_{21} = \dfrac{534 \cdot 81}{1083} = 39,94$

$e_{12} = \dfrac{549 \cdot 1002}{1083} = 507,94$ $\qquad e_{22} = \dfrac{534 \cdot 1002}{1083} = 494,06$

	H	NH	Tx
V	11	538	549
NV	70	464	534
Ty	81	1002	1083

i

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$
con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

	H	NH	Tx
V	41,06	507,94	549
NV	39,94	494,06	534
Ty	81	1002	1083

j

$$\chi^2_{obs} = \frac{(11-41,06)^2}{41,06} + \frac{(538-507,94)^2}{507,94} + \frac{(70-39,94)^2}{39,94}$$

$$+ \frac{(464-494,06)^2}{494,06} = 48,2388$$

$\alpha = 0,05$

$2 \times 2 \to 1 \times 1 = 1$

$\chi^2_c = \chi^2_{0,05,1} = 3,84146$

$\boxed{\text{R/ Como } \chi^2_{obs} = 48,2388 > \chi^2_c = 3,84146, \text{ se rechaza } H_0, \text{ NO son independientes}}$

Con valor P

$P(\chi^2 > 48,2388) = 0,0000 \quad \alpha = 0,05$

$\boxed{P = 0,0000 < \alpha = 0,05, \text{ se rechaza } H_0 \text{ No son independientes}}$

Ejemplo

En una universidad se realiza un estudio para verificar si el tipo de trabajo (administrativo y docente) se relaciona con el grado de estrés (I, II y III) de los trabajadores. Para lo cual se elige una muestra aleatoria de 300 trabajadores y se clasifican en la tabla siguiente. **(5 puntos)**

	I	II	III
Administrativos	42	24	30
Docentes	54	78	72

Pruebe la hipótesis de que el tipo de trabajo afecta el grado de estrés del trabajador.

H_0: El trabajo y estres son independientes
H_1: El trabajo y estres no son independientes

	I	II	III	T_x
A	42	24	30	96
D	54	78	72	204
T_y	96	102	102	300

$\rightarrow n = 300$

$$e_{11} = \frac{96 \cdot 96}{300} = 30{,}72$$

$$e_{12} = \frac{96 \cdot 102}{300} = 32{,}64$$

$$e_{13} = \frac{96 \cdot 102}{300} = 32{,}64$$

$$e_{21} = \frac{204 \cdot 96}{300} = 65{,}28$$

$$e_{22} = \frac{204 \cdot 102}{300} = 69{,}36$$

$$e_{23} = \frac{204 \cdot 102}{300} = 69{,}36$$

	I	II	III	T_x
A	42	24	30	96
D	54	78	72	204
T_y	96	102	102	300

i

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$
con $\nu = (f - 1)(c - 1)$, si $\nu \geq 2$.

	I	II	III	T_x
A	30,72	32,64	32,64	96
D	65,28	69,36	69,36	204
T_y	96	102	102	300

j

$$\chi^2_{obs} = \frac{(42-30{,}72)^2}{30{,}72} + \frac{(24-32{,}64)^2}{32{,}64} + \frac{(30-32{,}64)^2}{32{,}64}$$

$$\frac{(54-65{,}28)^2}{65{,}28} + \frac{(78-69{,}36)^2}{69{,}36} + \frac{(72-69{,}36)^2}{69{,}36}$$

$\chi^2_{obs} = 9{,}7683$ $\qquad 2 \times 3 \to 1 \times 2 \to \nu = 2$

$\chi^2_c = \chi^2_{0{,}05,2} = 5{,}99146$

$$\boxed{\text{R/ Como } \chi^2_{obs} = 9{,}7683 > \chi^2_c = 5{,}99146 \text{ se rechaza } H_0\text{, NO son independientes}}$$

Con valor P

$P(\chi^2 > 9{,}7683) = 0{,}007566$ $\qquad \alpha = 0{,}05$

$$\boxed{\text{Como } P = 0{,}007566 < 0{,}05 \text{ se rechaza } H_0\text{, NO son independientes}}$$

Ejemplo 118. Se desea estudiar la dependencia entre el padecimiento de un determinado cáncer y los hábitos de fumado. Para ello se tomaron los datos de 360 individuos:

Fumador	No fumador	Fumador leve	Muy fumador
Con cáncer	58	67	45
Sin cáncer	74	60	56

A un nivel de significancia del 10 %, ¿existe evidencia de que la presencia o ausencia del cáncer es dependiente de los hábitos de fumar?

Fumador	No fumador	Fumador leve	Muy fumador	T_x
Con cáncer	58	67	45	170
Sin cáncer	74	60	56	190
T_y	132	127	101	360 $\rightarrow n$

$$e_{11} = \frac{170 \cdot 132}{360} = 62{,}34$$

$$e_{12} = \frac{170 \cdot 127}{360} = 59{,}97$$

$$e_{13} = \frac{170 \cdot 101}{360} = 47{,}69$$

$$e_{21} = \frac{190 \cdot 132}{360} = 69{,}66$$

$$e_{22} = \frac{190 \cdot 127}{360} = 67{,}03$$

$$e_{23} = \frac{190 \cdot 101}{360} = 53{,}31$$

Fumador	No fumador	Fumador leve	Muy fumador	T_x
Con cáncer	58	67	45	170
Sin cáncer	74	60	56	190
T_y	132	127	101	360

i

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$
con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

F	NF	FL	MF	T_x
C	62,34	59,97	47,69	170
NC	69,66	67,03	53,31	190
T_y	132	127	101	360

j

$\chi^2_{obs} = 2{,}421393659$ $\quad\alpha = 0{,}10$

$V = 2\cdot 3 \to 1\cdot 2 = 2$

$\chi^2_c = \chi^2_{0.10,2} = 4{,}60517$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{R/}\\ \text{Como } \chi^2_{obs} = 2{,}421393659 < \chi^2_c = 4{,}60517\\ \text{No se rechaza } H_0\text{, son independientes}\end{array}}$$

Con valor p

$\chi^2_{obs} = 2{,}421393659$ $\quad\alpha = 0{,}10$

$V = 2\cdot 3 \to 1\cdot 2 = 2$

$P(\chi^2 > 2{,}421393659) = 0{,}29799$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{R/ Como } p = 0{,}29799 > \alpha = 0{,}10\\ \text{No se rechaza } H_0\end{array}}$$

Ejercicio 47. En una encuesta sobre la soda comedor El Comelón, se les preguntó a 200 clientes su opinión sobre la variedad de los alimentos y su nivel de ingreso. Los resultados se resumen en la siguiente tabla de contingencia.

		Nivel de ingreso		
		Bajo	Medio	Alto
Variedad	Poco	3	10	27
	Regular	15	20	50
	Mucha	21	40	14

¿Existe evidencia de que la opinión que tiene un cliente sobre la variedad de los alimentos depende de su nivel de ingreso? *R/* Sí, valor $P < 0.05$

	B	M	A	Total x
B	3	10	27	40
M	15	20	50	85
A	21	40	14	75
Total y	39	70	91	$200 \to n$

$$\left.\begin{matrix}40\\85\\75\end{matrix}\right\} i$$

$e_{11} = 7{,}8$ $\quad e_{21} = 16{,}575$ $\quad e_{31} = 14{,}625$

$e_{12} = 14$ $\quad e_{22} = 29{,}75$ $\quad e_{32} = 26{,}25$

$e_{13} = 18{,}2$ $\quad e_{23} = 38{,}675$ $\quad e_{33} = 34{,}125$

	B	M	A	Total x
B	7,8	14	18,2	40
M	16,575	29,75	38,675	85
A	14,625	26,25	34,125	75
Total y	39	70	91	200

$$\left.\begin{matrix}40\\85\\75\end{matrix}\right\} j$$

$\chi^2_{obs} = 36{,}86$ $\quad v = 4$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c}\frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$
con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

$\chi^2_c = \chi^2_{0.05,4} = 9{,}48$

$\boxed{\text{R/ Como } \chi^2_{obs} = 36{,}86 > \chi^2_c = 9{,}48 \text{ se rechaza Ho, NO son independientes}}$

Con valor P $\qquad \alpha = 0{,}05$

$\chi^2_{obs} = 36{,}86 \qquad P(\chi^2 > 36{,}86) = 0{,}0000$

$\boxed{P = 0{,}0000 < \alpha = 0{,}05}$, se rechaza H_0
No son independientes

Ejercicio 48. Un supervisor desea determinar si el número de artículos fabricados con defectos depende del día de la semana en que son producidos. Él reunió la siguiente información:

Día de la semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Sin defectos	85	90	95	95	90
Defectuosos	15	10	5	5	10

¿Existe evidencia suficiente de que el número de artículos defectuosos es independiente del día de la semana en que se fabrican con $\alpha = 0.05$?

R/ Sí, $\chi^2_c = 9.4877$, $\chi^2_{obs} = 8.547$ y valor $P \in]0.05, 0.1[$.

i

	L	M	M	J	V	Total x
D	85	90	95	95	90	455
SD	15	10	5	5	10	45
Total y	100	100	100	100	100	500

J

	L	M	M	J	V	Total x
D	91	91	91	91	91	455
SD	9	9	9	9	9	45
Total y	100	100	100	100	100	500

$\chi^2_{obs} = 8{,}547 \qquad \nu = 4$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$
con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

$\chi^2_c = \chi^2_{0{,}05,\,4} = 9{,}48773$

R/
Como $\chi^2_{obs} = 8{,}547 < \chi^2_c = 9{,}48773$
No se rechaza H_0, son independientes

Con valor P $\alpha = 0,05$

$\chi^2_{obs} = 8,547$ $P(\chi^2 > 8,547) = 0,07398$

$\boxed{P = 0,07398 > \alpha = 0,05}$, No se rechaza H_0 son independientes

1. A continuación se presentan los datos obtenidos en una investigación realizada entre estudiantes universitarios, quienes evaluaron el desempeño de alguno de sus profesores. Cada estudiante seleccionó al profesor por evaluar. Se trata de un total de 780 estudiantes:

	~~Alumnos~~ A	~~Alumnas~~ A A
~~Profesores~~ P	269	275
~~Profesoras~~ PA	59	177

Con base en estos datos, ¿considera que el sexo del estudiante y el sexo del profesor evaluado son dependientes? $R/$ Valor $P < 0.01$, Si

	A	A A	Tx
P	269	275	544
PA	59	177	236
Ty	328	452	780

i

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

	A	A A	Tx
P	228,76	315,24	544
PA	99,24	136,76	236
Ty	328	452	780

j

$\chi^2_{obs} = 40,37$ $V = 2x2 \rightarrow v = 1x1 = 1$

$\chi^2_{0.05} = 3,84146$

R/
Como $\chi^2_{obs} = 40,37 > \chi^2_c = 3,84146$
se rechaza H_0, No son independientes

Con valor P $\alpha = 0{,}05$

$\chi^2_{obs} = 40{,}37$ $P(\chi^2 > 40{,}37) = 0{,}0000$

$\boxed{P = 0{,}0000 < \alpha = 0{,}05, \text{ se rechaza } H_0 \text{ No son independientes}}$

2. Se desea estudiar la dependencia entre el grado académico y la aceptación a una reforma tributaria en la ciudad C, para ello se tomaron los datos de 365 individuos, los cuales se resumen en la siguiente tabla:

	Primaria	Secundaria	Universidad
Aceptan la reforma	50	65	70
No aceptan la reforma	75	55	50

Puede concluirse con estos datos que la aceptación de la reforma es independiente del grado académico. *R/* Se rechaza H_0, hay evidencia en contra de la independencia.

	Primaria	Secundaria	Universidad	T_x
Aceptan la reforma	50	65	70	185
No aceptan la reforma	75	55	50	180
$T_y =$	125	120	120	365 → n

i

	Primaria	Secundaria	Universidad	T_x
Aceptan la reforma	63,36	60,82	60,82	185
No aceptan la reforma	61,64	59,18	59,18	180
$T_y =$	125	120	120	365 → n

J

$\chi^2_{obs} = 9{,}11$ $v = 2 \times 3 \to 1 \times 2 = 2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

$\chi^2_c = \chi^2_{0.05,2} = 5{,}99$

R/

Como $\chi^2_{obs} = 9{,}11 > \chi^2_c = 5{,}99$
se rechaza H_0, No son independientes

Con valor P $\alpha = 0,05$

$\chi^2_{obs} = 9,11$ $P(\chi^2 > 9,11) = 0,01$

$\boxed{P = 0,01 < \alpha = 0,05}$, se rechaza H_0
No son independientes

9. Seguidamente se presentan los datos obtenidos en una investigación realizada entre estudiantes universitarios, quienes indicaron cual de los dos sabores A y B de helados preferían. Cada estudiante seleccionó el sabor preferido y en total se obtuvo la opinión de 200 estudiantes:

	Alumnos	Alumnas	Tx
Sabor A	73	76	149
Sabor B	31	20	51
Ty	104	96	200

Con base en estos datos, ¿considera que el sexo del estudiante y el sabor de helado son dependientes? $R/$ $\chi^2_{obs} = 2,170940171$, valor $P \in]0.1, 0.2[$Se acepta que son independientes.

	Alumnos	Alumnas	Tx
Sabor A	77,48	71,52	149
Sabor B	26,52	24,48	51
Ty	104	96	200

$\chi^2_{obs} = 2,11634$ $v = 1$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

$\chi^2_c = \chi^2_{0.05,1} = 3,84146$

R/
Como $\chi^2_{obs} = 2,11634 < \chi^2_c = 3,84146$
No se rechaza H_0, son independientes

Con valor P $\alpha = 0,05$

$X^2_{0,05} = 2,33634$ $P(X^2 > 2,33634) = 0,34573$

$\boxed{P = 0,34573 > \alpha = 0,05}$, No se rechaza H_0
Son independientes

14. Se realiza una investigación para determinar si las incidencias de ciertos tipos de enfermedades varían de un distrito a otro, en una ciudad grande. Los enfermedades particulares de interés son alergias, asma y rinitis La siguiente tabla muestra el número de personas enfermas en tres distritos de la ciudad durante el año pasado:

Distrito	Alergias	Asma	Rinitis
A	150	120	20
B	300	200	25
C	258	190	11

Pruebe la hipóstesis, con un nivel de significancia del 5%, de que la ocurrencia de estos tipos de enfermedades es independiente del distrito.de la ciudad. R/(la ocurrencia de los tipos de enfermedades es dependiente del distrito

Distrito	Alergias	Asma	Rinitis	T_x
A	150	120	20	290
B	300	200	25	525
C	258	190	11	459
T_y	708	510	56	1274

Distrito	Alergias	Asma	Rinitis	T_x
A	161,16	116,09	12,75	290
B	291,76	210,16	23,08	525
C	255,08	183,74	20,18	459
T_y	708	510	56	1274

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$
con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

$X^2_{0,05} = 10,33$ $V = 2 \times 2 = 4$

$X^2_c = X^2_{0.05,4} = 9,48$

R/
Como $X^2_{0,05} = 10,33 > X^2_c = 9,48$
se rechaza H_0, No son independientes