Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Cálculo y álgebra lineal

Tiempo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje: 32 puntos
I Semestre de 2019
Martes 11 de junio

III Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

---

1. Demuestre utilizando el Principio de Inducción Matemática que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$, para todo entero $n \geq 1$. (4 pts)

★ **Solución:** Primero se define la proposición $P_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$

- Pruebe que dicha proposición es válida para $n = 1$. Note que:

$$P_1 \equiv \sum_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2+3}{2^1} \equiv \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \equiv V$$

  Por lo tanto: $P_1 \equiv V$.

- Ahora se debe probar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Esto es probar para $n \geq 1$ y arbitrario que:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}}_{P_n:\text{HI}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}}_{P_{n+1}:\text{HQD}}$$

  Suponga verdadera HI.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} \overset{HI}{=} 3 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 3 - \left(\frac{2n+3}{2^n} - \frac{2n+1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 3 - \frac{4n+6-2n-1}{2^{n+1}} = 3 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

  Por lo tanto, se tiene $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Finalmente, por el principio de inducción matemática se tiene que la proposición es verdadera.

★

2. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)}$ es convergente y determine su valor de convergencia. (4 pts)

★ **Solución:** Considere la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{k\,(k+1)}$.

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \Rightarrow 1 = A\,(k+1) + Bk$$

Para $k=0$ se tendrá que $A=1$ y para $k=-1$ se obtiene $B=-1$. Así:

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=5}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

Esta última es una serie telescópica convergente. De esta forma se tiene que:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \frac{1}{5} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto, la serie converge a $\dfrac{1}{5}$ por el criterio de las series telecópicas.

★

3. Para cada una de las series siguientes, determine si es convergente o si es divergente. Debe indicar, respectivamente, los criterios que utiliza para el estudio correspondiente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ (4 pts)

   ★ **Solución:** Dado que la serie es de términos positivos, se procederá por el criterio de comparación paso al límite. Note que:

$$\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} \sim \frac{2n^2}{\sqrt{n^2}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

   Ahora se calculará el límite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}\,(2+3n^{-1})}{n^{\frac{5}{2}}\,(5n^{-5}+1)^{\frac{1}{2}}} = 2$$

Como $2 > 0$ y $2 < \infty$, entonces las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ tiene la misma naturaleza. Y como esta última serie diverge por criterio de las $p-$ series, pues $p = \dfrac{1}{2} < 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ también diverge por criterio de comparación paso al límite.

★

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2+1)+3}{3e^{2n}+n}$ (5 pts)

★ **Solución:** Dado que la serie es de términos positivos, se procederá por criterio de comparación directa. Note que:

$$\begin{aligned}
-1 \leq \operatorname{sen}\left(n^2+1\right) \leq 1 \quad &\iff \quad 2 \leq \operatorname{sen}\left(n^2+1\right)+3 \leq 4 \\
&\iff \quad 0 \leq \frac{2}{3e^{2n}+n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n^2+1)+3}{3e^{2n}+n} \leq \frac{4}{3e^{2n}+n} \leq \frac{4}{3e^{2n}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que: $0 \leq \dfrac{\operatorname{sen}(n^2+1)+3}{3e^{2n}+n} \leq \dfrac{4}{3e^{2n}}$

Note que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3e^{2n}} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n$, donde esta última es una serie geométrica convergente pues $\left|\dfrac{1}{e^2}\right| < 1$, por lo tanto la serie original $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2+1)+3}{3e^{2n}+n}$ también converge por criterio de comparación directa.

★

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)\right]\cdot n!}{(2n+1)!}$ (5 pts)

★ **Solución:** Se procederá por el criterio de la razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)(n+1)!(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)n!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n-2)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+\frac{1}{2})(n+1)}{4(n+\frac{3}{2})(n-1)}\right| = \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que la serie original converge por criterio de la razón.

$\bigstar$

4. Pruebe que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ es absolutamente convergente y halle S_n que aproxime a S con error menor que 0,05 (el menor n posible de acuerdo con la teoría vista en clases). (5 pts)

   $\bigstar$ **Solución:** Se analizará la convergencia absoluta. Considere la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

   la cual es una $p-$ serie convergente. Por lo tanto la serie original es absolutamente convergente.

   Ahora note que la serie original converge por el criterio de las series alternadas, pues la sucesión $\{\frac{1}{k^2}\}$ es convergente a cero y decreciente, pues $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$. Por esta razón se puede emplear el teorema de la cota del error.

   Por teorema se tiene que: $|S_n - S| \leq b_{n+1}$ y por otro lado se quiere que: $|S_n - S| \leq 0{,}05$, por lo que basta tomar n conveniente para que $b_{n+1} = \dfrac{1}{(k+1)^2} \leq 0{,}05$. Dicha desigualdad es válida a partir de $n = 4$, por lo tanto: $S_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k}{k^2} = -0{,}798\overline{1}$ aproxima el valor de S con un error absoluto menor que 0,05.

$\bigstar$

5. Determine el interior del intervalo de convergencia (sin analizar extremos) de: (5 pts)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n (x-1)^n}{3^{2n} \cdot n^n}$$

   $\bigstar$ **Solución:** Aplicando el criterio de la raíz, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(n+2)^n (x-1)^n}{3^{2n} \cdot n^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)|x-1|}{3^2 \cdot n} = \frac{|x-1|}{9}$$

   Para que la serie converja absolutamente debe ocurrir que $\dfrac{|x-1|}{9} < 1$, lo cual implica que:

$$-9 < x - 1 < 9 \iff -8 < x < 10$$

   Por lo que el interior del intervalo de convergencia corresponde a: $]-8, 10[$.

$\bigstar$

Pregunta opcional

La nota máxima incluyendo los puntos en esta pregunta será 100

- Si se sabe que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo x real, escriba la integral $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ como una serie alternada. (4 pts)

  ★ **Solución:** Primero note que:

$$
\begin{aligned}
& e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ & e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ & e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{n!}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ & \int_{-1}^{0} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & \int_{-1}^{0} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-1}^{0} x^{2n}\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & \int_{-1}^{0} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_{-1}^{0} \\
\Rightarrow\ & \int_{-1}^{0} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{0^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right) \\
\Rightarrow\ & \int_{-1}^{0} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^n(-1)^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+1)}
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto, se tiene que:

$$
\int_{-1}^{0} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+1)}
$$

★