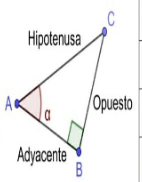
Trigonometría básica



	Razón	Razón inversa
$\frac{\text{Grados}}{180°} = \frac{\text{Radianes}}{\pi}$	$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}\right)$
	$\cos(\alpha) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\alpha = \arccos\left(\frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}\right)$
	$\tan(\alpha) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$	$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}\right)$
	$\csc(\alpha) = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}}$	$\alpha = \text{arccsc}\left(\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}}\right)$
	$\sec(\alpha) = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}}$	$\alpha = \text{arcsec}\left(\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}}\right)$
	$\cot(\alpha) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}}$	$\alpha = \text{arccot}\left(\frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}}\right)$

Algunos resultados importantes en Trigonometría

Ley de Senos:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

Ley de Cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Función par

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Función impar

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

Identidades trigonométricas básicas

Pitagóricas

1. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$
3. $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

Suma de ángulos

1. $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
3. $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

Ángulos dobles

1. $\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$
2. $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$
   $= 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$
   $= 2\cos^2\alpha - 1$

Diferencia de ángulos

1. $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha$
2. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
3. $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Funciones al cuadrado

1. $\text{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
2. $\cos^2 = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
3. $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

Sumas como producto

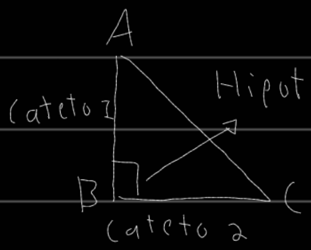
1. $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Diferencias como producto

1. $\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

El lado adyacente es el que no esta la hipotenusa

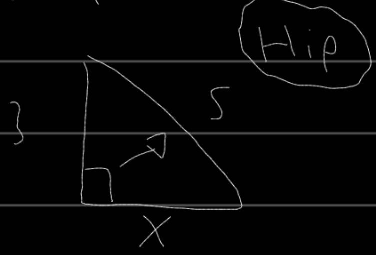
Δ Rectangulo $\rightarrow$ 1 angulo de $90°$

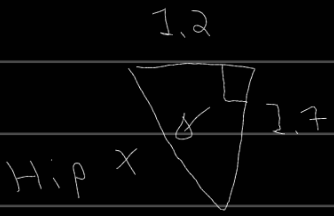


$$(\text{hip})^2 = (\text{Cat } 1)^2 + (\text{Cat})^2$$

Sirve para allar la longitud de los lados del triangulo Δ ABC conociendo los otros dos

Ejemplo





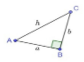
$$5^2 = 3^2 + x^2$$
$$25 = 9 + x^2$$
$$16 = x^2$$
$$\sqrt{16} = x$$
$$\boxed{4 = x}$$

$$x^2 = (1{,}2)^2 + (1{,}7)^2$$
$$\rightarrow x = \sqrt{4{,}33}$$
$$\boxed{x = 2{,}08}$$

Se omite valor Absoluto

Teorema de Pitágoras

Sea ΔABC un triángulo rectángulo, recto en B, como se muestra en la siguiente figura, entonces se cumple que $h^2 = a^2 + b^2$

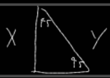


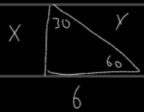
Triángulos especiales

2 de sus angulus iguales

-> es isoceles

Angulo agudo es el que tiene menos de 90 grados





$Y = 12$

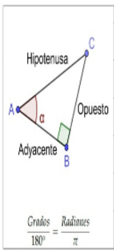
$X = 6\sqrt{3}$

$X = 4$

$Y = 4\sqrt{2}$

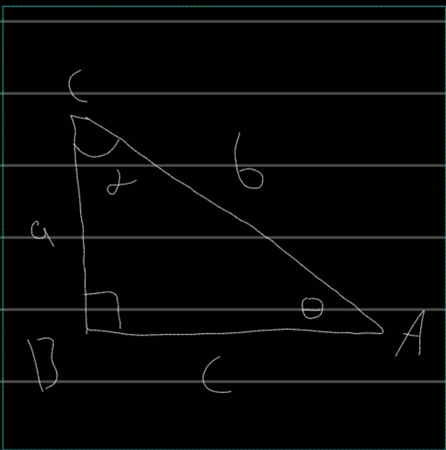
Solo para Δ rectangulo

Trigonometría básica



	Razón	Razón inversa
	$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}\right)$
	$\cos(\alpha) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\alpha = \arccos\left(\frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}\right)$
	$\tan(\alpha) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$	$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}\right)$
	$\csc(\alpha) = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}}$	$\alpha = \text{arccsc}\left(\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}}\right)$
	$\sec(\alpha) = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}}$	$\alpha = \text{arcsec}\left(\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}}\right)$
$\frac{\text{Grados}}{180^\circ} = \frac{\text{Radianes}}{\pi}$	$\cot(\alpha) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}}$	$\alpha = \text{arccot}\left(\frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}}\right)$

$\frac{Lo}{Hi} \quad \frac{La}{Hi} \quad \frac{Lo}{La}$



$\text{Sen } \alpha = \frac{Lo}{Hip} = \frac{c}{b}$

$\text{Cos } \alpha = \frac{LA}{Hip} = \frac{c}{b}$

$\text{Sen } \theta = \frac{Lo}{Hip} = \frac{a}{b}$

$\text{Cos } \theta = \frac{LA}{Hip} = \frac{c}{b}$

$\text{Csc } \alpha = \frac{Hip}{Lo} = \frac{b}{c}$

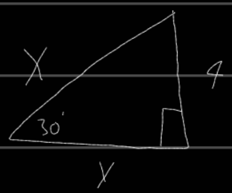
$\text{Sec } \alpha = \frac{Hip}{LA} = \frac{b}{a}$

$$\tan \alpha = \frac{LO}{LA} = \frac{c}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{LO}{LA} = \frac{a}{c}$$

$$\cot \alpha = \frac{LA}{LO} = \frac{a}{c}$$

Inversa



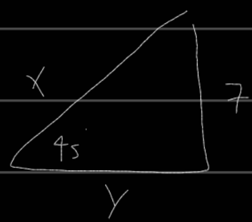
Se usa la razon mas conveniente

$$\operatorname{sen}(30°) = \frac{4}{x} \qquad \tan(30°) = \frac{4}{y}$$

$$x = \frac{4}{\operatorname{sen}(30)} \qquad y = \frac{4}{\tan(30)}$$

$$\boxed{x = 8} = \boxed{y = 4\sqrt{3}}$$

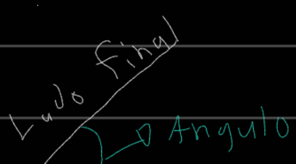
(es lo mismo)

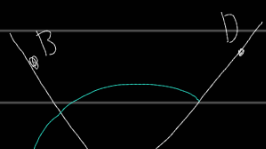


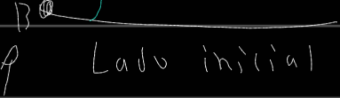
$$\operatorname{sen}(45°) = \frac{7}{x} \qquad \tan(45) = \frac{7}{y}$$

$$x = \frac{7}{\operatorname{sen}(45)} \qquad y = \frac{7}{\tan(45)}$$

$$\boxed{x = 7\sqrt{2}} \qquad \boxed{y = 7}$$







Lado inicial

Punto origen

∢ECD

La letra del centro es el origen

Ángulos en posición normal o estándar

Definición (Ángulo en posición estándar o posición normal)
Se define un ángulo en posición estándar o normal como el ángulo en el que su lado inicial coincide con la parte positiva del *eje x* y su vértice con el origen del sistema de ejes coordenados.

Ejemplos 3. Los siguientes son ángulos en posición estándar o normal.

figura 1 figura 2 figura 3 figura 4

Se dice que un ángulo en posición estándar o normal, posee medida positiva si su rotación es contraria a las manecillas del reloj; y negativa si su rotación tiene el mismo sentido.

Ejemplo 4. Observemos el **Ejemplo 3.** las figuras 1 y 2 consisten ángulos de medida positiva, mientras que las figuras 3 y 4 consisten ángulos de medida negativa.

Ángulos cuadrantales

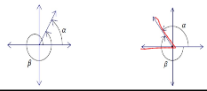
Definición (ángulos cuadrantales)
Dado un ángulo α en posición estándar, se dice que α es un ángulo cuadrantal, si su lado terminal coincide con alguno de los ejes coordenados. Los ángulos cuadrantales poseen la característica que su medida es múltiplo de $\frac{\pi}{2}$.
Observe los siguientes ángulos cuadrantales:

figura 1 figura 2 figura 3 figura 4 figura 5

Ángulos coterminales

Definición (ángulos coterminales)
Sean α y β dos ángulos en posición estándar o normal, se dice que el ángulo α y el ángulo β son coterminales si, y sólo si, poseen el mismo lado terminal.

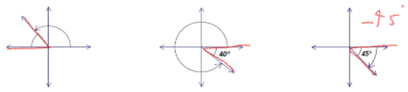
Ejemplo 5. Los siguientes son ángulos coterminales.



Ángulos de referencia

Definición (ángulo de referencia)
Sea α un ángulo en posición estándar o normal, tal que α no sea una ángulo cuadrantal. El **ángulo de referencia** asociado a α, es el ángulo agudo (de medida positiva) formado por el *eje x* y el lado terminal de α.

Ejemplo 6. Observe, en los siguientes casos el ángulo de referencia asociado a un ángulo no cuadrantal.



θ = 45
se da en positivo

β = 380°
a = 20°

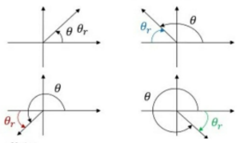
a = 120
β < 0

0 < Agudo < 90
Positivo

Formado por
El eje x y el lado terminal del ángulo en posicion standartd

Ángulos de referencia

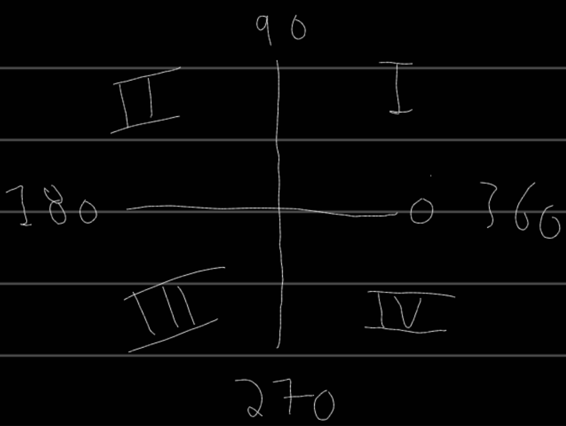
Un **ángulo de referencia** es la medida del ángulo agudo que se forma desde el lado más cercano del eje horizontal hasta el lado terminal del ángulo original.

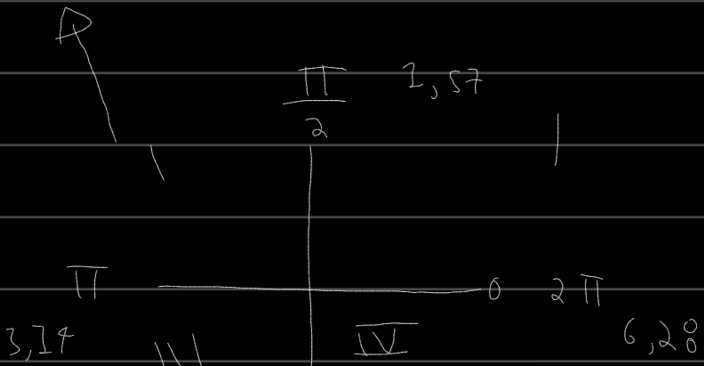


En el cuadrante I
$\theta_r = \theta$
En el cuadrante II
$\theta_r = \theta - 180°$
En el cuadrante III
$\theta_r = \theta - 180°$
En el cuadrante IV
$\theta_r = \theta - 360°$

Nota:
Los ángulos de referencias siempre son positivos porque representan una medida. Los signos que surgen de la formula se refieren a los ángulos medidos en dirección positiva o dirección negativa.

#	θ	Cuadrante	Fórmula	Áng. Ref θ_1
1	230°	III	$\theta_1 = \theta - 180°$ $\theta_1 = 230° - 180°$	$\theta_1 = 50°$
2	150°	II	θ = 180-150=30	30
3	60°	I	θ = 90 - 60	30
4	320°	IV	360-320	40
5	620°	IV	260-180	80
6	-222°			
7	$\frac{3}{4}\pi\, rad$	I		177,65

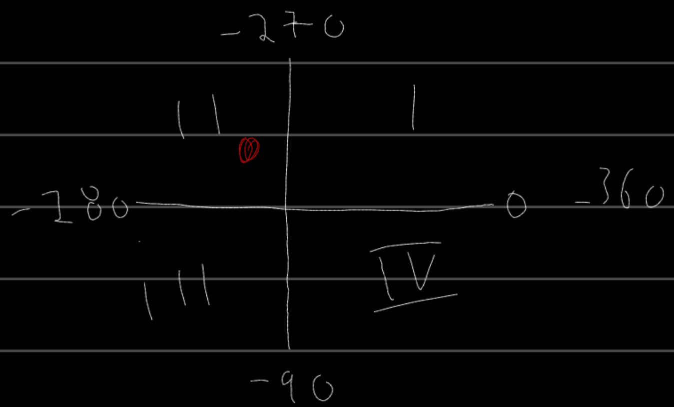




$\frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{4} = 2{,}35$

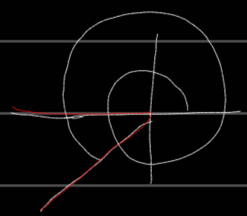
9.7

$$\theta = \pi - \frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$



$$\theta = 222 - 180$$
$$\boxed{42°}$$

5)



$620 - 360 = 260$

$260 - 180$

$= 80$

Se hace 2 veces

Equivalencias

➡ Ejemplos:

1.- Calcular la medida equivalente de los siguientes ángulos en radianes.

a) 60º $\qquad$ b) 450º $\qquad$ c) -75º

A) $\dfrac{60}{360} = \dfrac{x\,rad}{2\pi}$

B) $\dfrac{450}{360} = \dfrac{x}{2\pi}$

$\dfrac{60}{360} \cdot 2\pi = x\,rad$

$\dfrac{450}{360} \cdot 2\pi = x$

$\boxed{\dfrac{\pi}{3} = x\,rad}$

$\boxed{\dfrac{5\pi}{2} = x}$

Ignorar negativo

C) $\dfrac{75}{360} = \dfrac{x}{2\pi}$

$\dfrac{75}{30} \cdot 2\pi = x$

$\boxed{\dfrac{5\pi}{12} = x}$

2.- Calcular la medida equivalente de los siguientes ángulos en grados sexagesimales.

a) $\frac{11\pi}{6}\,rad$ b) $-\frac{1}{2}\pi$ rad c) $-2\,rad$

A) $\dfrac{\frac{11\pi}{6}}{2\pi} = \dfrac{x}{360}$

B) $\dfrac{\frac{-1\pi}{2}}{2\pi} = \dfrac{x}{360}$

$\dfrac{\frac{11\pi}{6}}{2\pi} \cdot 360 = x$

$\dfrac{\frac{-1\pi}{2}}{2\pi} \cdot 360 = x$

$\boxed{330 = x}$

$\boxed{-90 = x}$

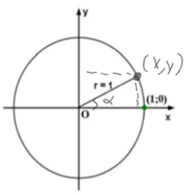
$$\frac{-2}{2\pi} = \frac{x}{360}$$

$$\frac{-2}{2\pi} \cdot 360 = x$$

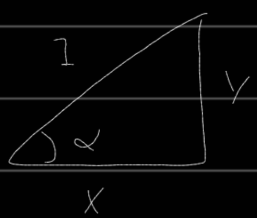
$$\boxed{x = -114,60}$$

Circunferencia trigonométrica

Definición:
Se llama circunferencia trigonométrica o goniométrica si y solo sí su centro es el punto origen del sistema de coordenadas cartesianas, su radio unitario, siendo el punto origen de los arcos el punto de intersección de esa circunferencia con el semieje positivo de las abscisas



radio siempre es 1



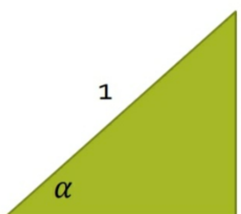
Ahora coseno y seno son los x y y

$-1 \leq x \leq 1$

$$\operatorname{Sen} \alpha = \frac{LO}{Hip} = \frac{y}{1} \qquad \operatorname{Cos} \alpha = \frac{LA}{Hip} = \frac{x}{1}$$

$$\boxed{\operatorname{Sen} \alpha = y} \qquad \boxed{\operatorname{Cos} \alpha = x}$$

- $sen\alpha = \frac{y}{1} \rightarrow sen\alpha = y$
- $cos\alpha = \frac{x}{1} \rightarrow cos\alpha = x$



- $tan\alpha = \frac{y}{x} \rightarrow tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$

X

Identidades fundamentales

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}$$

$$\frac{y}{x}$$

$$\boxed{\csc = \frac{HI}{LO}}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{Hip}{\cos \alpha}}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{LA}{LO}}$$

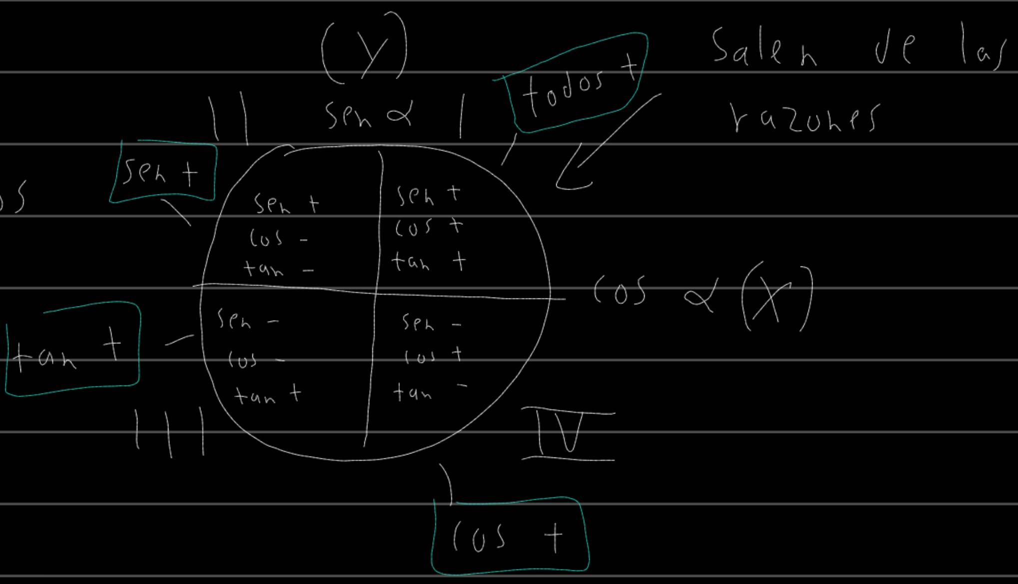
$$\frac{x}{y}$$

Pitaguras

$h^2 = c_1^2 + c_2^2$

$1 = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2$

Signos



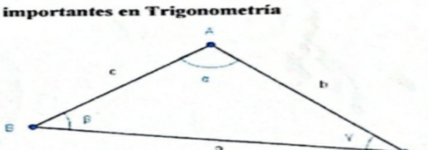
Prof.: Carlos Enrique Guillén Pérez | Matemática – Trigonometría

Algunos resultados importantes en Trigonometría

Ley de Senos:

$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\gamma}{c}$

Ley de Cosenos:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Función par

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Función impar

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

Identidades trigonométricas básicas

Pitagóricas

1. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$
3. $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

Suma de ángulos

1. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
3. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

Ángulos dobles

1. $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
2. $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

$= 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

Diferencia de ángulos

1. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
2. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
3. $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Funciones al cuadrado

1. $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
2. $\cos^2 = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
3. $\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

Sumas como producto

1. $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Diferencias como producto

1. $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$