Analisis de funciones

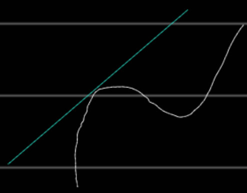
Creciente
$+ \rightarrow f \nearrow$

f'

$- \rightarrow f \searrow$
Decreciente

} Monotonia
(crece, decrece, constante)

Sentido de variación



Concava hacia arriba
$+ \rightarrow f : \cup$

f''

$- \rightarrow f : \cap$
Concava hacia abajo

En resumen, la $f'(x)$ para analizar crecimiento
la $f''(x)$ para analizar concavidad

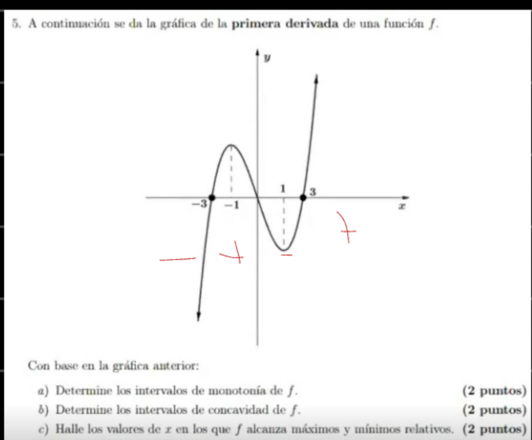
$f'(x)$ es la primera derivada de $f(x)$
$f''(x)$ es la primera derivada de $f'(x)$

Asi, la primera derivada le da info de crecimiento a la segunda

$+ \rightarrow f' : \nearrow \rightarrow f : \cup$

f''

$- \rightarrow f' : \searrow \rightarrow f : \cap$



5. A continuación se da la gráfica de la **primera derivada** de una función f.

Con base en la gráfica anterior:

a) Determine los intervalos de monotonía de f. **(2 puntos)**
b) Determine los intervalos de concavidad de f. **(2 puntos)**
c) Halle los valores de x en los que f alcanza máximos y mínimos relativos. **(2 puntos)**

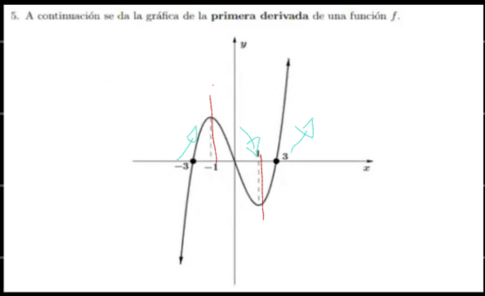
a) Crecimiento y decrecimiento

$f \nearrow :]-3,0[,]3,+\infty[$

$f \searrow :]-\infty,-3[,]0,3[$

$f\searrow:]-\infty,-3[\,,\ ]0,3[$

b) Ocupamos info de f''



$f: \cup :]-\infty,-1[\,,\ ]1,+\infty[$

$f: \cap :]-1,1[$

c) $f'=0$ en: $-3, 0, 3$

Se usa la concavidad

$f: \cup :]-\infty,-1[\,,\ ]1\ +\infty[$ $\qquad$ $f: \cap :]-1,1[$

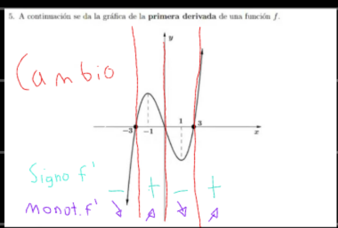
-3 min

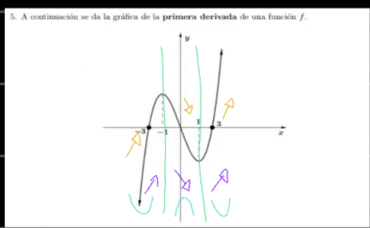
0 max

3 min

R/ Mínimos relativos

Máximos relativos





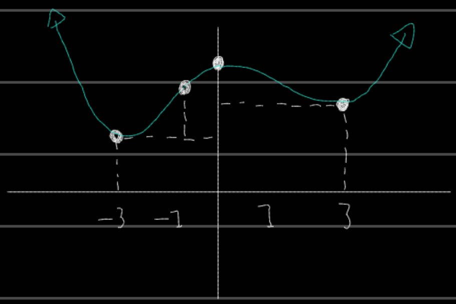
Son los números del plano nada más

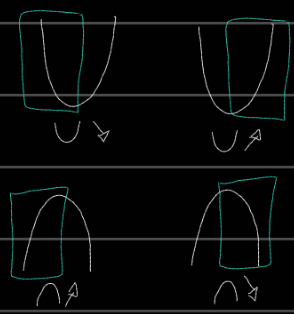
		$-\infty$ a -3	-3 a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
f'	Signo monot.	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	Signo concav.	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
f	Concav	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$
	Mon	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f: \cup :]-\infty,-1[\,,\ ]1,+\infty[\ +$
$f: \cap :]-1,1[\ -$
$f\nearrow :]-3,0[\,,\ ]3,+\infty[\ +$
$f\searrow :]-\infty,-3[\,,\ ]0,3[\ -$

Se tiene que en $x=-3 \wedge x=3$ se alcanzan mínimos y que en $x=0$ se alcanzan máximos

Dibujando la grafica con la tabla





2) Analize $f(x) = \frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

A) Dom e intersec

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$I_x: \frac{x^2-3x}{(x+3)^2} = 0$

$x(x-3) = 0$

$x=0 \quad x=3$

$I_x: (0,0), (3,0) \qquad I_y = (0,0)$

b) Sentido de variacion f'

$f'(x) = \frac{9(x-1)}{(x+3)^3}$

$\frac{9(x-1)}{(x+3)^3} = 0 \qquad f' \nexists$

$x = 1 \qquad\qquad x = -3$

	$-\infty$ a -3	-3 a 1	1 a $+\infty$
9	+	+	+
$(x-1)$	−	−	+
$(x+3)^3$	−	+	+
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

Candidatos $x=1$

$f(1) = \frac{-1}{8}$, minimo

c) Concavidad

$$f'' = \frac{18(3-x)}{(x+3)^4}$$

$$\frac{18(3-x)}{(x+3)^4} = 0 \qquad f'' \nexists$$

$$x = 3 \qquad x = -3$$

	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
18	$+$	$+$	$+$	
$(x+3)^4$	$+$	$+$	$+$	
$3-x$	$+$	$+$	$-$	
f''	$+$	$+$	$-$	
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$	

0

$f(3) = 0$, punto inflexivo

AV)

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2-3x}{(x+3)^2} = \frac{18}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{{}^2-3x}{(x+3)^2} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

tome $x=-4$ $\qquad$ tome $x=-4$

$(-4+3)^2) 0$ $\qquad$ $(-2+3)^2) 0$

$\boxed{x = -3 \text{ es AV}}$

AH $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{(x+3)^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{x^2+6x+9} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^2+6x+9}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$y = 1$ es AH

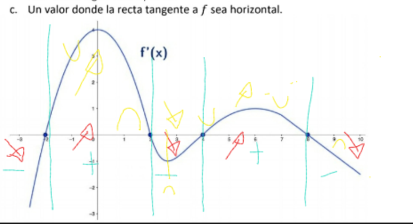
Cuadro $-3, 0, 1, 3$

	$-\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$
f'	+	−	−	+	+	
f''	+	+	+	+	−	
f	↗	↘	↘	↗	↗	
	∪	∪	∪	∪	∩	

$y=1$ $\quad +\infty \quad +\infty \quad 0 \quad -\frac{7}{8} \quad 3 \quad y=1$

Practica de examen

1. La siguiente figura muestra el esbozo de la gráfica de una función $f'(x)$.
   a. Indique el o los intervalos donde f es decreciente y creciente
   b. Los valores de x donde f alcanza un máximo o un mínimo. Debe clasificar cada valor según corresponda.
   c. Un valor donde la recta tangente a f sea horizontal.



a)

	$-\infty$	-2	2	4	8	$+\infty$
f'	−	+	−	+	−	
f	↘	↗	↘	↗	↘	
	∪	∩	∪	∩		

$f \nearrow \;]-2,2[, \;]4,8[$

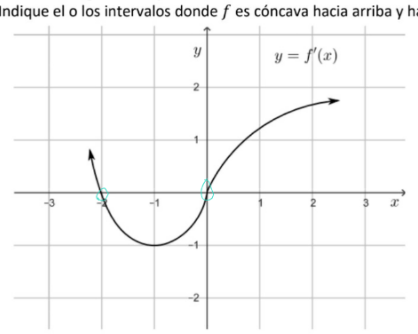
$f \searrow \;]-\infty,-2[, \;]2,4[, \;]8,+\infty[$

b) $-2 \to$ min $\quad 4 \to$ min

$2 \to$ max $\quad 8 \to$ max

c) 4

2. Considere la siguiente gráfica de una función $f'(x)$.
   a. Indique el o los intervalos donde f es decreciente y creciente
   b. Los valores de x donde f alcanza un máximo o un mínimo. Debe clasificar cada valor según corresponda.
   c. Indique el o los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y hacia abajo



a)

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\cap \quad \cup$

$f \nearrow \ ]-\infty,2[\ ,\ ]0,+\infty[$

$f \searrow \ ]-2,0[$

b) $-2 \to$ max

$0 \to$ min

c)

	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f''		$\searrow$		$\nearrow$	
f		$\cap$		$\cup$	

$f \cap \ ]-\infty,-1[$

$f \cup \ ]-1,+\infty[$

3. Construya el cuadro de variación y bosqueje la gráfica de la función $f(x) = x - \frac{4x}{x+1}$, sabiendo que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ y $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$

1) $f(x) = x - \frac{4x}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$I_x \quad x - \frac{4x}{x+1} = 0 \qquad I_y = f(0) = 0$

$-\frac{4x}{x+1} = -x$

$\frac{4x}{x+1} = x$

$4x = x^2 + x$

$x^2 + x - 4x = 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0 \quad x = 3$

$I_x = (0,0), (3,0)$

$I_y = (0,0)$

2) Sentido de variacion

$$f' = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} = 0 \qquad f \nexists \; x = -1$$

$(x-1)(x+3) = 0$

$x = 1 \quad x = -3$

	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$(x+3)$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	
f'	$+$	$-$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$-9 \qquad -1$

$f \nearrow \;]-\infty, -3[\, , \;]1, +\infty[$

$f \searrow \;]-3, -1[\, , \;]-1, 1[$

$$f(1) = 1 - \frac{4(1)}{1+1} = -1 \text{ max}$$

$$f(-3) = 3 - \frac{4(-3)}{-3+1} = -9 \text{ max}$$

3) Concavidad

$$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3} \qquad f'' \nexists \; x = -1$$

$$\frac{8}{(x+1)^3} = 0$$

$(x+1)^3$

$8 = 0$ X

No values

	$-\infty$	-1	$+\infty$
8	$+$		$+$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

$f \cup \ ]-1, +\infty[$

$f \cap \ ]-\infty, 1[$

4) AV) $\lim_{x \to -1^-} x - \frac{4x}{x+1} = 1 - \frac{4(1)}{0^-}$ $= -\infty$

tome $x = -1{,}01$

$-1{,}01 + 1 < 0$

$\lim_{x \to -1^+} x - \frac{4x}{x+1} = 1 - \frac{4(1)}{0^-}$ $= +\infty$

tome $x = -0{,}99$

$-0{,}99 + 1 > 0$

$\boxed{x = -1 \text{ es AV}}$

AH) $\lim_{x \to \pm\infty} x - \frac{4x}{x+1} = \pm\infty$

No

AO) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \frac{4x}{x+1}}{x}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + x - 4x}{x+1}}{x}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \to mx = x$$

$(mx+b)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cancel{x} - \frac{4x}{x+1} \cancel{-x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x}{x+1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x}{x} = -4 \to (mx-4)$$

$\therefore\ y = x-4$ es AO

$0, 3, -1, 1, -3$

	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
f''	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

$y=x-4$ $\quad -9 \quad\quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad y=x-4$

$-\infty \mid +\infty$

4. Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = xe^x$. Determine los intervalos donde f es cóncava hacia arriba e indique (si existen), los puntos de inflexión

$f(x) = xe^x$

$f'(x) = e^x + xe^x$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x$

$2e^x + xe^x$

$e^x(2+x)$

$e^x(2+x)=0$ $\qquad$ $e^x(2+x)\ \nexists$

$e^x=0$ ✗ $\qquad$ $2+x=0$ $\qquad$ Nullptr

$x=-2$

	$-\infty$	-2	$+\infty$
e^x	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

$f \cup \ ]-2,+\infty[$

$f \cap \ ]-\infty,-2[$

5. Trace la gráfica de una función $\boldsymbol{f}$ que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
   - $D_f=\mathbb{R}$
   - $f(2)=-1$
   - $f'(x)<0:]-\infty,2[\ \ y\ \ f'(x)>0:]2,+\infty[$
   - $f''(x)<0:]-\infty,1[\ \ y\ \ f''(x)>0:]1,+\infty[$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

Sentido de variación

	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Concavidad

	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

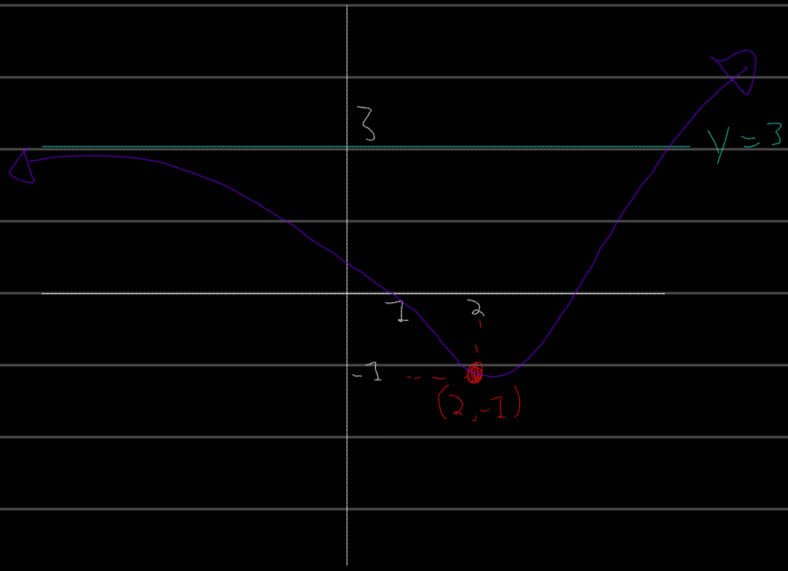
$f(2)=-1$

$(2,-1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3 \to y=3$ es AH

Cuadro de variación

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$+$	
f''	$-$	$+$	$+$	
f	$\cap$ $\searrow$	$\cup$ $\searrow$	$\cup$ $\nearrow$	



6. Considere la función $h:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ con $h(x) = \frac{x^2+\ln(x)}{x}$. Determine la ecuación de la asíntota oblicua.

$$f(x) = \frac{x^2+\ln(x)}{x}$$

A) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+\ln(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}, \text{ L'hôpital}$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{1}{x} = +\infty$$

B) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+\ln(x)}{x}}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{\text{l'hôpital}}$$

$$1 + \lim \frac{\frac{1}{x}}{}$$

$x \to +\infty \quad 2x$

$$1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^3}$$

$$1 + \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$mx = x$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln(x)}{x} - x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + \ln(x) \cancel{- x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \text{, l'hôpital}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$b = 0$

$y = x$

7. Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5$. Determine los intervalos donde f es creciente y clasifique (si existen), los extremos relativos en máximos o mínimo

$f'(x) = 6x^2 + 12x$

$6x^2 + 12x = 0 \qquad f' \nexists$ X

$6x(x+2) = 0$

$6x = 0 \qquad x + 2 = 0$

$X=0 \qquad X=-2$

	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$X+2$	$-$	0 $+$	$+$	
$6X$	$-$	$-$	0 $+$	
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$-2 \to$ max

$0 \to$ min

8. Determine los extremos absolutos de la función $f(x) = 8\ln(x) - x^2$, en el intervalo $[1,4]$

$f(X) = 8\ln(x) - x^2$

$f'(x) = \frac{8}{x} - 2x$

$\frac{8-2x^2}{X}$

Ptos Criticos

$\frac{8-2x^2}{X} = 0$

$f' \nexists$

0 pero $0 \notin [1,4]$

$8 - 2x^2 = 0$

$2(4-x^2) = 0$

$2=0$ ✗ $\qquad 4 - x^2 = 0$

$-x^2 = -4$

$X = \pm\sqrt{4}$

$= \pm 2$

$-2 \notin [1,4]$

$= 2$

$f(1) = -1$

$f(2) = 1{,}54 \to$ max abs

$f(4) = -4{,}90 \to$ min abs

Ejercicios

1)