INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
MA1103 CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

I SEMESTRE, 2023
TIEMPO: 2 HORAS Y 20 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 24 pts

Segundo Examen Parcial

Extaordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **seis** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva cada pregunta en su cuaderno de examen e incluya todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas y veinte minutos** para resolver los problemas del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**3 puntos**] Determine todos los valores del parámetro c de tal forma que los vectores $v = (1-c, 1+c)$ y $w = (1+c, 1-c)$ sean linealmente dependientes.

   Solución: Basta solo calcular determinante sobre los vectores asociados y ver para qué valor o valores se cumple este es 0.

   $$\begin{vmatrix} 1-c & 1+c \\ 1+c & 1-c \end{vmatrix} = -4c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

   Por tanto para $c = 0$ se cumple v y w son linealmente dependientes.

2. [**5 puntos**] Considere los vectores $u = (1, 1, 1)$ y $v = (1, -1, 2)$. Determine todos los vectores $w, s \in \mathbb{R}^3$ que cumplen, simultáneamente, las siguientes condiciones:

   - $u = w + s$
   - $w \,||\, v$
   - $s \cdot v = 0$

Solución: Sean $w = (w_1, w_2, w_3)$ y $s = (s_1, s_2, s_3)$ los vectores que se desea determinar. De la condición a. se tiene $\begin{cases} w_1 + s_1 = 1 \\ w_2 + s_2 = 1 \\ w_3 + s_3 = 1 \end{cases}$ [1], de condición b. $\begin{cases} w_1 = k \\ w_2 = -k \\ w_3 = 2k \end{cases}$ [2] y por otro lado de condición c.se tiene $s_1 - s_2 + 2s_3 = 0$ [3], luego sustituyendo [2] en [1] $\begin{cases} s_1 = 1-k \\ s_2 = 1+k \\ s_3 = 1-2k \end{cases}$ [4], de donde sustituyendo [4] en [3] se obtiene $k = \dfrac{1}{3}$ y de esta forma al sustituir en [2] y [4] se llega a que los vectores por determinar serían $w = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ y $s = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

3. [**4 puntos**] Considere los planos π_1, π_2 y π_3, y la recta l_1 cuyas ecuaciones correspondientes se enuncian a continuación:

- $\pi_1 \colon x + y + z = 4$
- $\pi_2 \colon 3x + 2y + 2z = 10$
- $\pi_3 \colon x + y + z = 8$
- $l_1 \colon\ (x, y, z) = (1, 1, 2) + t\,(3, 4, -3)\,,\ t \in \mathbb{R}$

Halle ecuaciones simétricas de la recta l que cumple, simultáneamente, las dos condiciones siguientes:

- l es paralela a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.
- l contiene al punto de intersección de la recta l_1 con el plano π_3.

Primero debemos encontrar la recta que es intersecci'on de los planos π_1 con π_2, y para ello utilizamos Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right) \overset{-3F_1+F_2\to F_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right),$$

y luego

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{F_2+F_1\to F_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right),$$

de donde se concluye que $(x, y, z) = (2, -2, 0) + t(0, -1, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

En segundo lugar, debemos hallar el punto de intersección del plano π_3 con la recta $x = 1 + 3t; y = 1 + 4t; z = 2 - 3t$, lo cual es sencillamente realizar una sustitución:

$$1 + 3t + 1 + 4t + 2 - 3t = 8 \Longrightarrow 4 + 4t = 8 \Longrightarrow t = 1,$$

con lo cual el punto de intersección es dado por: $x = 4; y = 5; z = -1$.

En resumen, la ecuación de la recta $\mathfrak{l}$, en forma simétrica es dada por:

$$x = 2; \frac{y-5}{-1} = \frac{z+1}{1}.$$

4. [**5 puntos**] Halle dos vectores $v = (a, b, a)$ y $w = (c, d, d)$, donde a, b, c y d son números enteros, tales que cumplan, simultáneamente, las tres siguientes condiciones:

- $||v \times (1,0,1)\,|| = \sqrt{2}$
- $v + w = (0,1,0)$
- $||w|| = 2\sqrt{2}$

Observemos lo siguiente:

$$\vec{v} \times (1,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b, 0, -b),$$

luego se sigue que:

$$||\vec{v} \times (1,0,1)|| = ||(b,0,-b)|| = \sqrt{b^2 + 0^2 + (-b)^2} = \sqrt{2b^2} \Longrightarrow \sqrt{2b^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow b^2 = 1,$$

de donde se concluye que $b = \pm 1$, y así se tiene que $\vec{v} = (a, \pm 1, a)$.

Por otra parte se tiene, de la segunda hipótesis, que:

$$\vec{v} + \vec{w} = (0,1,0) \Longrightarrow (a + c, b + d, a + d) = (0,1,0),$$

con lo cual $a + c = 0, b + d = 1, a + d = 0$.

Como $b = \pm 1$, se deben considerar dos casos.

Caso $b = 1$, entonces, de las ecuaciones de arriba se sigue que, $d = 0; a = 0; c = 0$, con lo cual se tiene que $\vec{(v)} = (0,1,0); \vec{w} = (0,0,0)$, pero como $||\vec{w}|| = 2\sqrt{3}$, se concluye que este caso es imposible de darse.

Caso $b = -1$, entonces de las ecuaciones de arriba se sigue que $d = 2; a = -2; c = 2$, con lo cual se tiene que $\vec{v} = (-2,-1,-2); \vec{w} = (2,2,2)$.

5. [**4 puntos**] Considere las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones, respectivamente, se enuncian a continuación:

   - $L_1\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+4}{4}$
   - $L_2\colon \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-1}{3} = z$

   Verifique que el punto $(1,1,0)$ es el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2, y determine una ecuación cartesiana del plano que contenga, simultáneamente, a las rectas L_1 y L_2.

   Hay que recordar que un plano es determinado por tres puntos no colineales. Ya tenemos un punto en ambas rectas, luego debemos hallar otros dos viviendo cada uno en una de las dos rectas solamente.

   Es claro que en L_1 otro punto diferente al dado es $(-1,2,-4)$, y en L_2, lo mejor es reescribirla en forma paramétrica:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{3} = z = t \Longrightarrow x = 1 - 3t, y = 1 + 3t, z = t,$$

   de donde al poner $t = 1$ tenemos al punto $(-2,4,1)$, y por lo tanto tenemos tres puntos $A = (1,1,0); B = (-1,2,-4); C = (-2,4,1)$ que no son colineales.

Es claro que un vector normal a ellos es dado por:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (13, 14, -3).$$

Alternativamente, se pueden usar los vectores directores de cada recta y llegar a que:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-13, -14, 3).$$

Por lo tanto, se tiene que le plano buscado tiene la forma: $13x + 14y - 3z = d$, y para hallar a d evaluamos en cualesquiera de los tres puntos, por ejemplo en $(1, 1, 0)$, de donde $13 + 14 - 0 = d$, lo cual implica que $13x + 14y - 3z = 27$.

Falta ver que dicho plano contiene a las rectas, por ejemplo a L_2:

$$13(1 - 3t) + 14(1 + 3t) - 3t = 13 - 39t + 14 + 42t - 3t = 27 - 42t + 42t = 27.$$

6. [**5 puntos**] Considere las rectas l_1 y l_2 cuyas ecuaciones, respectivamente, se enuncian a continuación:

- $l_1\colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + 4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$
- $l_2\colon \begin{cases} x = 2 - m \\ y = 1 \\ z = 1 - 4m \end{cases}, \ m \in \mathbb{R}$

Determine una ecuación cartesiana del plano π que es paralelo a la recta l_1 y que contiene a la recta l_2.

Solución:

$$
\begin{aligned}
n &= (a,b,c) \text{ normal del plano} \\
& \quad \text{buscado} \\
& \quad n \text{ es ortogonal a } l_1 \text{ y a } l_2 \\
v_l \times n_{\pi_1} &= (3,-2,4) \times (-1,0,-4) \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 8e_1 + 8e_2 - 2e_3 \\
&= 2\,(4,4,-1) \\
4x + 4y - z &= (1,1,-3) \cdot (4,4,-1) \\
\text{R/ } 4x + 4y - z &= 11 \\
\text{Contiene a } l_1 &: 4\,(1+3t) + 4\,(1-2t) - (-3+4t) \\
&= 4 + 12t + 4 - 8t + 3 - 4t \\
&= 11 \\
\text{Contiene a } l_2 &: 4\,(2-t) + 4 - (1-4t) \\
&= 11
\end{aligned}
$$