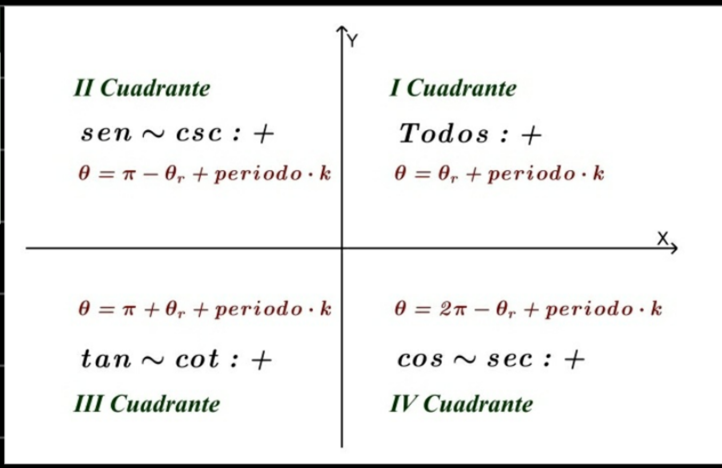
Ejemplo 233

Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación trigonométrica

Se puede usar calcu

arcos $\to$ $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

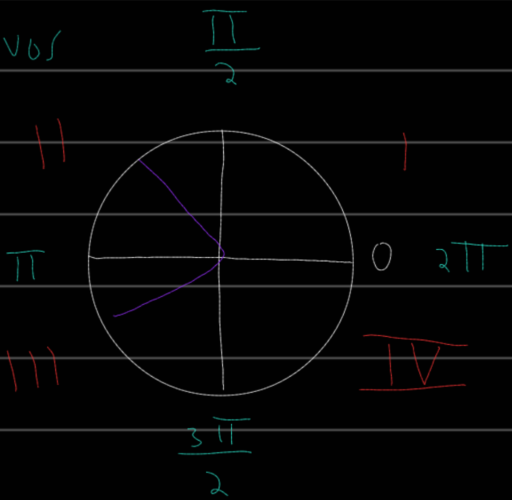


$\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Ya que es negativo, se usan sus cuadrantes negativos (II ∧ III)

$\cos\left(\frac{1}{2}\right) = 60$

$\frac{60}{360} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$



II Cuadrante: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

III Cuadrante: $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

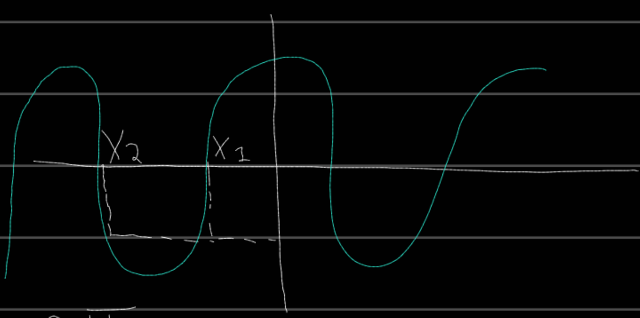
Periodos

Sen y cos = 2π

Tan y cot = π

Sec y csc = 2π

$$\boxed{S = \left\{ x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$



$2\pi \to$ periodo

Ejemplo 2 Hay que usar inversas

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \theta$$

$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to$ Jo en I y II

$x_1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{4}$

$x^2 = \frac{3\pi}{4}$

$$\boxed{S = \left\{ x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

$\tan(x) = 3, \quad x = \alpha$ $\qquad$ I y III

$\arctan(3) = 1{,}24$ $\qquad \pi + 1{,}24 = 4{,}38$

$x_1 = 1{,}24$ $\qquad x_2 = 4{,}38$

$$\boxed{S = \left\{ x_1 = 1{,}24 + \pi k,\ x_2 = 4{,}38 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Ejemplo 236

Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación trigonométrica

$$\tan^2(\beta) + \tan(\beta) = 12$$

$\tan^2(x) + \tan(x) = 12, \quad x = \beta$

$u = \tan(x)$

$u^2 + u - 12 = 0$

$u \quad 4 = 4u$

$u \quad -3 = -3u$

$\qquad\qquad u$

$(u+4)(u-3) = 0$

$u+4=0 \qquad u-3=0$

$u=-4 \qquad u=3$

$\tan(-4)$: $\arctan(-4)$ $\qquad$ $\tan(3) = \arctan(3)$

$X_1 = -1{,}32$ $\qquad$ $X_1 = 1{,}24$

$X_2 = \pi + 1{,}32$ $\qquad$ $X_2 = \pi + 1{,}24$

$X_2 = 4{,}46$ $\qquad$ $X_2 = 4{,}39$

$\boxed{S_1 = \{X = -1{,}32 + \pi k,\ X_2 = 4{,}46 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

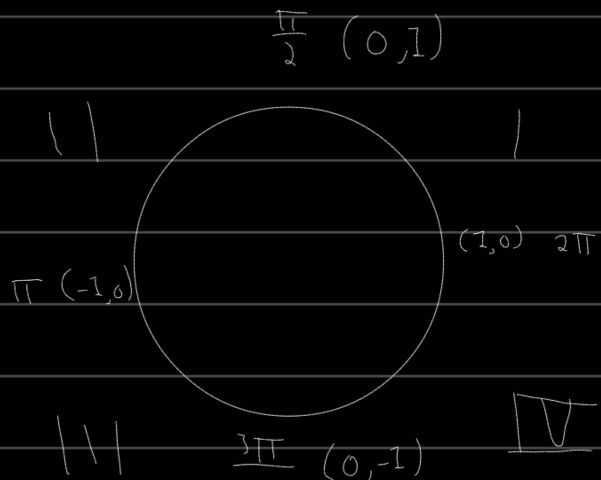
$\boxed{S_1 = X_1 = 1{,}24 + \pi k,\ X_2 = 4{,}39 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

Resolve in $\mathbb{R}$

$\operatorname{sen}(2x) - \cos(x) = 0$

$2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) - \cos(x) = 0$

$\cos(x)(2\operatorname{sen}(x) - 1) = 0$



$\cos(x) = 0$ $\qquad$ $2\operatorname{sen}(x) - 1 = 0$

I y

IV

$2\operatorname{sen}(x) = 1$

$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{arcosen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{IV} = 2\pi - \frac{\pi}{2} \qquad \text{II} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3\pi}{2} \qquad = \frac{5\pi}{6}$$

$$S_1 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

S_2 ?

Ejemplo 234

Resuelva en $[0, 2\pi]$ *la siguiente ecuación trigonométrica*

$$\left(\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\theta) - 1\right)(4\cos(\theta) + 5) = 0$$

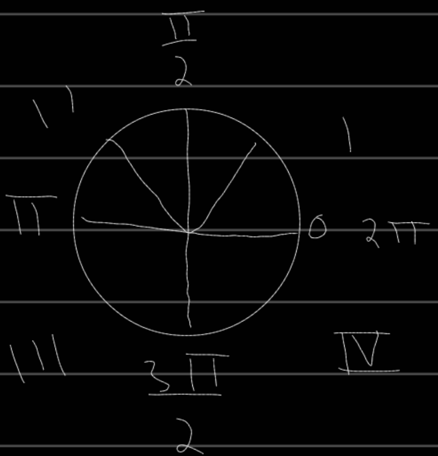
$x = \theta$

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2x) - 1 = 0 \qquad 4\cos(x) + 5 = 0$$

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2x) = 1$$

$$\mathrm{sen}(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$u = 2x \qquad \mathrm{sen}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\mathrm{sen} > 0 \to \text{I} \wedge \text{II}$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = u$$

$u_1 = \pi \qquad u_2 = \pi - \pi$

$4 \qquad\qquad 4$

$u_2 = \frac{3\pi}{4}$

$2x = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{x_2 = \frac{\pi}{8}}$

$2x = \frac{3\pi}{4}$

$\boxed{x_1 = \frac{3\pi}{8}}$

$S = \{ \ldots \}$

Si fuera en $\mathbb{R}$

$S_1 = \left\{ x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{2\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Por que es angulo $2x$

$S_1 = \left\{ x_1 = \frac{\pi}{8} + \pi k,\ x_2 = \frac{3\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$S = \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right\}$

Formas $f(x) = \cos(b \cdot x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(b \cdot x)$

Considerando que las funciones $g(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ tienen periodo 2π, la función $f(x) = \cos(b \cdot x)$ o $g(x) = \operatorname{sen}(b \cdot x)$ completan un periodo cuando $|b|x$ varía entre 0 y 2π, por lo que se deduce que el periodo de una función f es $\frac{2\pi}{|b|}$

Formas $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + h) + k$ y $g(x) = a \cdot \operatorname{sen}(b \cdot x + h) + k$

Tomando en cuenta las transformaciones anteriores, se deduce que:

$$f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + h) + k \qquad\qquad f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(b \cdot x + h) + k$$

$$\Rightarrow\ f(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left[x + \frac{h}{b}\right]\right) + k \qquad\qquad \Rightarrow\ f(x) = a \cdot \operatorname{sen}\left(b \cdot \left[x + \frac{h}{b}\right]\right) + k$$

- **Ámbito:** $[-|a| + k, |a| + k]$
- **Periodo:** $\frac{2\pi}{|b|}$
- **Amplitud:** $|a|$
- **Corrimiento de fase:** $\left|\frac{h}{b}\right|$

1. *Si $\frac{h}{b} > 0$ hay traslación horizontal de $\left|\frac{h}{b}\right|$ hacia la izquierda.*
2. *Si $\frac{h}{b} < 0$ hay traslación horizontal de $\left|\frac{h}{b}\right|$ hacia la derecha.*

Ambas $D = \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ / $Amb = [-1, 1]$

$g(x) = \cos(x)$

$g(x) = \cos(x)$ Periodo $= 2\pi$

Amplitud $= 1$

Transformacion

X = Angulo

a, b, h = const reales

$h(x) = a \operatorname{sen}(bx + h) + k$

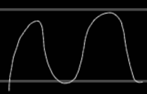
$\rightarrow D = \mathbb{R}$

$m(x) = a \cos(bx + h) + k$

Periodo $= \dfrac{2\pi}{|b|}$

Amplitud $= |a|$

$2\cos(x)$



Amplitud $= 2$

Ambito depende de k

$\rightarrow$ Amb $= [-|a|, a]$

Desplazamiento (left or right)

$3\cos(x)$

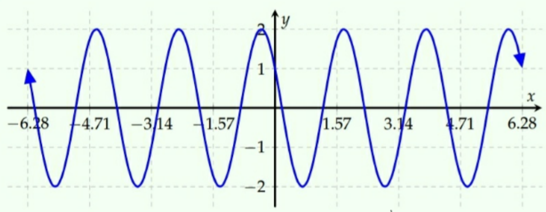
Amplitud $= 3$

$\left|\dfrac{h}{b}\right|$ if $\dfrac{h}{b} > 0 \rightarrow$ Desplaza izquierda

else $\dfrac{h}{b} < 0 \rightarrow$ Desplaza derecha

Ejemplo 221

Considere la siguiente gráfica de la función $f(x) = -2\operatorname{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ *y complete lo que se le solicita.*



1. **Ámbito:** $[-2, 2]$

$\dfrac{h}{b} < 0 \rightarrow$ derecha moved

2. **Amplitud:** $|-2| = 2$

3. **Periodo:** $\dfrac{2\pi}{|3|} = \dfrac{2\pi}{3}$

4. **Corrimiento de fase:** $\left|\dfrac{h}{b}\right| = \dfrac{\pi}{18}$

5. **Intersección con el eje y:** Sustuir por 0

$-2\operatorname{sen}\left(3 \cdot 0 - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$= -1 \rightarrow (0, 1)$

6. **Una intersección con el eje y:**

con y se iguala a 0

y se despeja

7. **Un intervalo donde f es creciente:**

$$-2\,\text{sen}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\text{sen}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)=0$$

$$\text{sen}\ u = 3x-\frac{\pi}{8}$$

$$u=\pi \qquad\qquad u=0 \qquad\qquad 3x-\frac{\pi}{8}=2\pi$$

$$3x-\frac{\pi}{8}=\pi \qquad\qquad 3x-\frac{\pi}{8}=0$$

$$3x=\pi+\frac{\pi}{8} \qquad\qquad x=\frac{\pi}{18}$$

$$x=3\pi$$