Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

I Semestre, 2023
Tiempo: 2 horas y 20 minutos
Puntaje total: 37 pts

Tercer Examen Parcial

Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **seis** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva cada pregunta en su cuaderno de examen e incluya todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas y veinte minutos** para resolver los problemas del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Si se sabe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{N}{2N+1}$, determine el valor de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **[2 puntos]**

   Solución

   El valor de convergencia corresponde a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{2N+1} = \frac{1}{2}$

2. Determine si $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{9\cdot 5^{-2n}}{(-3)^{2-n}}$ es convergente o divergente. En caso de ser convergente, determine el valor de convergencia. **[5 puntos]**

   Solución

   Note $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{9\cdot 5^{-2n}}{(-3)^{2-n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-3}{25}\right)^{n}$, serie geométrica con $r = \frac{-3}{25}$ de donde $\mid \frac{-3}{25} \mid < 1$, por tanto es convergente y converge a

$$L = \frac{\left(\frac{-3}{25}\right)^3}{1+\frac{3}{25}} =$$

3. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2+\cos^2(n)}{\sqrt[3]{n^5-2n}}$ **[5 puntos]**

Solución

Dado que $0 \leqslant \cos^2(n) \leqslant 1$, se cumple que $\dfrac{2}{\sqrt[3]{n^5-2n}} \leqslant \dfrac{2+\cos^2(n)}{\sqrt[3]{n^5-2n}} \leqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{n^5-2n}}$, luego considerando $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^5-2n}} \sim \sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^5}}$, esta última es una p serie convergente pues $p = \frac{5}{3} > 1$ y al tener misma naturaleza con $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^5-2n}}$, por criterio de comparación directa se cumple que $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2+\cos^2(n)}{\sqrt[3]{n^5-2n}}$ es convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^4+5^n}{2n+n!}$ **[5 puntos]**

Solución

Se considera, para posterior comparación en el límite, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

La naturaleza de esta serie se puede estudiar con el criterio del cociente.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{5^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$. Con base en el criterio del cociente, se concluye que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ es convergente.

Ahora, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+5^n}{2n+n!} \frac{n!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\,n!}{5^n\,n!} = 1$ por lo que ambas series son de la misma naturaleza. De esta manera, se cumple $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^4+5^n}{2n+n!}$ converge.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3n)^n}{(5n-1)^n}$ **[5 puntos]**

Solución

Se utilizará el criterio de la raíz n-ésima para el estudio

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-3n)^n}{(5n-1)^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{5n-1} = \frac{3}{5} < 1$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3n)^n}{(5n-1)^n}$ es convergente.

Continúa en la página siguiente

4. Determine el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}{(n+1)!}(x-3)^n$. No debe analizar extremos del intervalo. **[5 puntos]**

Solución

La idea básica es considerar $a_n = \dfrac{2\cdot 4\cdots 2n\cdot(2n+2)}{(n+1)!}(x-3)^n$, y luego realizar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2\cdot 4\cdots(2n+2)\cdot(2n+4)}{(n+2)!}(x-3)^{n+1}\cdot\frac{(n+1)!\cdot}{2\cdot 4\cdots 2n\cdot(2n+2)(x-3)^n}\right| \\
&= \left|\frac{(2n+4)(x-3)}{n+2}\right| \\
&= \frac{2n+4}{n+2}\cdot|x-3|
\end{aligned}$$

de donde se sigue que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+4}{n+2}\cdot|x-3| = 2|x-3|.$$

Para que exista convergencia, necesitamos que el valor del límite sea menor que uno, es decir:

$$2|x-3|<1 \Longrightarrow |x-3|<\frac{1}{2} \Longrightarrow 3-\frac{1}{2}<x<3+\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}.$$

De esta manera, el intervalo de convergecia según lo solicitado corresponde a $\left]\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\right[$.

5. Si se sabe que $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, determine la serie de Maclaurin que corresponde con la función f, donde $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{2}$. **[5 puntos]**

Solución

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \forall x\in\mathbb{R} \\
&\Rightarrow\ e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!},\ \forall x\in\mathbb{R} \\
&\Rightarrow\ e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n x^n}{n!},\ \forall x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^n x^n}{n!}, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - e^{-2x} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^n x^n}{n!}, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - e^{-2x} = 1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^n x^n}{n!}, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - e^{-2x}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{n-1} x^n}{n!}, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, la serie correspondiente es $f(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\, 2^{n-1} x^n}{n!}, \; \forall x \in \mathbb{R}$.

6. Si se sabe que $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+2)}$, verifique que la serie alternada es convergente y aproxime el valor de la integral de modo que el error que se comete en la aproximación sea menor que 0,0001. **[5 puntos]**

Solución

Note en $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+2)}$ se trata de una serie alternada con $b_n = \dfrac{1}{(n-1)!\,(n+2)}$, ahora se debe comprobar :

a) b_n es decreciente para $x \geq 1$.

$$b_n = \frac{1}{(n-1)!\,(n+2)} \text{ es decreciente } \Leftrightarrow \frac{1}{(n-1)!\,(n+2)} \geq \frac{1}{n!\,(n+3)}$$
$$\Leftrightarrow n!\,(n+3) \geq (n-1)!\,(n+2)$$
$$\Leftrightarrow n\,(n+3) \geq n+2 (\text{Verdadero})$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!\,(n+2)} = 0.$

Límite directo. De esta forma se comprueba la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+2)}$ es convergente.

Por otra parte, utilizando teorema de cota sobre error de series alternadas

$|S - S_n| < b_{n+1} = \dfrac{1}{n!\,(n+3)} < 0{,}0001$, es decir,$\Rightarrow 10000 < n!\,(n+3)$, lo anterior se cumple a partir de $n = 7$. De esta manera

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+2)} = 0{,}1606$$