Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	16
Fecha	Lunes 11 de noviembre del 2024 (semana 17)
Contenidos	a) Relación entre rectas y planos
	b) Distancia de un punto a un plano y entre rectas y planos
	c) Valores y vectores propios
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Una recta L_1 está contenida en el plano Π_1 si al menos dos puntos de esta recta están en Π_1. En otro caso, la recta L_1 interseca al plano Π_1 en un punto o es paralela a Π_1 y ajena a él.

Dada una recta $L_1 : (x,y,z) = P + t\cdot v$, $t \in \mathbb{R}$, hay una infinidad de planos que la contienen: Si $Q \notin L_1$, un plano que contiene a L_1 es el plano Π_1 que pasa por Q y dos puntos P y R de L_1. También se puede tomar como un vector normal a este plano al vector $n_1 = v \times PQ$.

Dadas dos rectas diferentes $L_1 : (x,y,z) = P + t\cdot v$, $t \in \mathbb{R}$, y $L_2 : (x,y,z) = Q + t\cdot u$, $t \in \mathbb{R}$, siempre es posible encontrar dos planos paralelos Π_1 y Π_2, que contienen a L_1 y L_2, respectivamente. Un vector normal a estos dos planos es $u \times v$.

Paralelismo, perpendicularidad y ángulo entre recta y plano

Considere la recta $L_1 : (x,y,z) = P + t\cdot v$ y el plano $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, entonces, siendo n_1 un vector normal a Π_1, se tiene que:

- $L_1 \parallel \Pi_1$ si y solo si $n_1 \perp v$
- $L_1 \perp \Pi_1$ si y solo si $n_1 \parallel v$
- **Ángulo (agudo):** $\angle L, \Pi_1 = \dfrac{\pi}{2} - \angle n_1, v$

Intersección entre recta y plano

Para obtener la intersección entre una recta $L_1 : (x,y,z) = P + t\cdot v$ y el plano $\Pi_1 : ax + by + cz = d$, lo que se hace es pasar a una ecuación paramétrica de L_1 y se sustituye $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en la ecuación del plano: $ax(t) + by(t) + cz(t) = d$. Luego se resuelve para t; si la solución es única, con este valor de t se obtiene el punto de intersección sustituyendo en la ecuación de la recta.

$$ax(t) + by(t) + cz(t) = d \Longrightarrow a(p_1 + t\cdot v_1) + b(p_2 + t\cdot v_2) + c(p_3 + t\cdot v_3) = d$$

y resolviendo para t se tiene que:

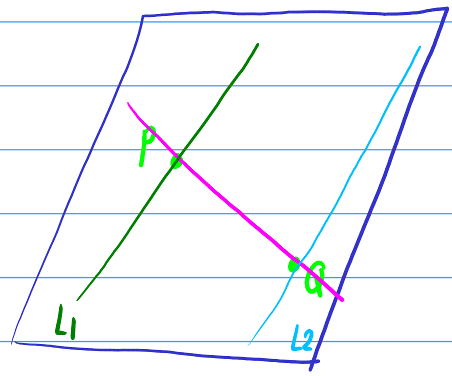
$$\begin{aligned} t &= \frac{-(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d)}{av_1 + bv_2 + cv_3} \\ \Longrightarrow \quad t &= -\frac{d + n\cdot P}{n\cdot v} \end{aligned}$$

Si una ecuación $a_1x(t) + b_1y(t) + c_1z(t) = d_1$ tiene infinitas soluciones significa que la recta está en el plano y si no hay solución significa que la recta es paralela al plano, pero es ajena a él.

Ejercicio #1: Determine la ecuación del plano π que contiene a las rectas

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-1}{3} \qquad L_2 : \frac{x}{4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+5}{6}$$

Un vector director de L_1 es $v_1 = (2,1,3)$
Un vector director de L_2 es $v_2 = (4,2,6)$



Así $L_1 \parallel L_2$

El punto $P = (1,-1,1) \in L_1$
El punto $Q = (0,-4,-5) \in L_2$

Luego
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= Q - P \\ &= (0,-4,-5) - (1,-1,1) \\ &= (-1,-3,-6) \end{aligned}$$

Ahora
$$n = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i}(-3\cdot 3 - 1\cdot -6) - \hat{j}(-1\cdot 3 - 2\cdot -6) + \hat{k}(-1\cdot 1 - 2\cdot -3) \\ &= \hat{i}(-3) - \hat{j}(9) + \hat{k}(5) \\ &= (-3,-9,5) \end{aligned}$$

Así
$$\begin{aligned} \pi &: [(x,y,z) - (1,-1,1)]\cdot(-3,-9,5) = 0 \\ &: (x-1, y+1, z-1)\cdot(-3,-9,5) = 0 \\ &: -3(x-1) - 9(y+1) + 5(z-1) = 0 \\ &: -3x + 3 - 9y - 9 + 5z - 5 = 0 \\ &: -3x - 9y + 5z - 11 = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio #2: Halle la ecuación de la recta L que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

(a) - Es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A=(3,4,2)$, $B=(-1,5,3)$ y $C=(2,1,4)$

(b) - Pasa por el punto de intersección del plano de ecuación $2x-y-z=1$ (π_1), con la recta de ecuación $\frac{x}{2}=y-1=-z-1$ $\quad L_1$

Condición (a) Un vector normal del plano π es:

$$n = \vec{AB} \times \vec{AC} \Rightarrow n = (B-A)\times(C-A)$$
$$\Rightarrow n = [(-1,5,3)-(3,4,2)] \times [(2,1,4)-(3,4,2)]$$
$$\Rightarrow n = (-4,1,1)\times(-1,-3,2)$$
$$\Rightarrow n = (5,7,13)$$

Como $L \perp \pi$, entonces $v \parallel n$, con v vector director de L, así
$(a,b,c) = t(5,7,13)$ (1)

Condición (b) El punto de intersección entre π_1 y L_1 viene dado por:

$$L_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = -t-1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Así $2x-y-z=1 \Rightarrow 2(2t)-(t+1)-(-t-1)=1$
$$\Rightarrow 4t - \cancel{t} - \cancel{1} + \cancel{t} + \cancel{1} = 1$$
$$\Rightarrow 4t = 1$$
$$\Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

Por tanto, la intersección entre L_1 y π_1 es:

$$L_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = -t-1 \end{cases} \Rightarrow L_1: \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 5/4 \\ z = -5/4 \end{cases} \qquad P = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}\right) \quad (2)$$

Así, la recta L viene dada por:

$$L: P + tv \Rightarrow L: \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}\right) + t(5,7,13),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{por (1) y (2)}$$

Ejercicio #3: Sean π el plano que contiene los puntos $A = (2,-1,1)$, $B = (3,2,-1)$ y $C = (-1,3,2)$ y L la recta de ecuación $(x,y,z) = (-1,13,1) + t(1,0,2)$, $t \in \mathbb{R}$

a) Determine la ecuación normal del plano π

b) Halle el punto P de intersección entre el plano π y la recta L.

c) Determine la ecuación de la recta T que es perpendicular a π y que contiene el punto P

$T: (-2, 13, -1) + t\,(11, 5, 13)\ ,\quad t \in \mathbb{R}$

Ejercicio #4: Halle una ecuación del plano que pasa por el punto $Q=(2,1,2)$ y que contiene a la recta con ecuación $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{3}$

Un punto de la recta es: $P=(-2,-1,-1)$

Un vector director de la recta es: $d=(-2,3,3)$

Como el plano pasa por Q y contiene a la recta, un vector normal del plano es:

$$
\begin{aligned}
n &= d \times \overrightarrow{QP} \\
&= (-2,3,3) \times [(-2,-1,-1)-(2,1,2)] \\
&= (-2,3,3) \times (-4,-2,-3) \\
&= (-3,-18,16)
\end{aligned}
$$

Ahora, el plano viene dado por:

$$
\begin{aligned}
\pi &: [(x,y,z)-(2,1,2)]\cdot(-3,-18,16)=0 \\
&: (x-2,y-1,z-2)\cdot(-3,-18,16)=0 \\
&: -3(x-2)-18(y-1)+16(z-2)=0 \\
&: -3x+6-18y+18+16z-32=0 \\
&: -3x-18y+16z-8=0 \\
&: -3x-18y+16z=8
\end{aligned}
$$

Ejercicio #5: Determine la ecuación de un plano que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones, que se definen por:

a) Pasa por $A(0,1,2)$

b) Es perpendicular a $2x-y+z=1$

c) Es paralelo a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z-3$

Sean $\pi: ax+by+cz=d$ $\quad \pi_1: 2x-y+z=1$ y $\quad L: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z-3$

Un vector normal de π es: $n=(a,b,c)$

Un vector normal de π_1 es: $n_1=(2,-1,1)$

Condición ⓐ Como π pasa por $A=(0,1,2)$, se tiene que:

$\pi: [(x,y,z)-(0,1,2)]\cdot(a,b,c)=0$

$: (x,y-1,z-2)\cdot(a,b,c)=0$

$: ax+b(y-1)+c(z-2)=0$

$: ax+by-b+cz-2c=0$

$: ax+by+cz=b+2c \quad (1)$

Condición ⓑ Como $\pi\perp\pi_1$, se tiene que $n\perp n_1$, así $n\cdot n_1=0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(2,-1,1)=0$

$\Rightarrow 2a-b+c=0 \quad (2)$

Condición ⓒ Un vector director de L es: $d=(2,3,1)$

Como $\pi \parallel L$, $n\perp d$, es decir, $n\cdot d=0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(2,3,1)=0$

$\Rightarrow 2a+3b+c=0 \quad (3)$

De (2) y (3) se tiene que: $\begin{cases} 2a-b+c=0 \\ 2a+3b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2a}+b-\cancel{c}=0 \\ \cancel{2a}+3b+\cancel{c}=0 \end{cases}$

$4b=0$

$\Rightarrow b=0$

Como $b=0$, sustituyendo en (1), se tiene que:

$$ax+by+cz=b+2c \Rightarrow ax+0y+cz=0+2c$$
$$\Rightarrow ax+cz=2c$$

Si $c=-2$ y $a=1$

$$1x-2z=2\cdot -2 \Rightarrow x-2z=-4$$

Distancia entre punto, recta y plano

En este caso, se presentan las categorías descritas seguidamente:

- **Distancia mínima de un punto a un plano:**

  Considere un plano Π de ecuación $ax + by + cz = d$. Sea $P \in \Pi$. Un vector normal al plano es $n = (a, b, c)$. La distancia mínima de un punto Q a este plano, es la longitud del segmento perpendicular al plano que va desde Q hasta el plano. Se puede usar proyecciones para calcular esta distancia (y también cálculo diferencial)

  La distancia de $Q = (x_1, y_1, z_1)$ a Π se denota $d(Q, \Pi)$, así:

$$
\begin{aligned}
d(Q,\Pi) &= ||\text{proy}_n^{PQ}|| \\
&= \left|\left|\frac{(Q-P)\cdot n}{||n||^2}\right|\right| \; ||n|| \\
&= \frac{|(x_1, y_1, z_1)\cdot n - P\cdot n|}{||n||} \\
&= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}
$$

- **Punto de un plano más cercano a un punto dado:**

  Suponga que se tiene un punto $Q = (x_1, y_1, z_1)$ y un plano Π de ecuación $ax + by + cz = d$.

  El punto más cercano, en el plano Π de ecuación $ax + by + cz = d$, al punto Q es

$$
Q' = Q + \lambda n, \text{ con } \lambda = \frac{d - n\cdot OQ}{n\cdot n}
$$

- **Distancia entre planos:**

  Si dos planos no son paralelos, entonces hay intersección y la distancia mínima entre ellos es cero. Si los planos Π_1 y Π_2 son paralelos, entonces, usando la fórmula anterior, la distancia mínima $d(\Pi_1, \Pi_2) = d(Q, \Pi_2)$ para cualquier $Q \in \Pi_1$.

- **Distancia de una recta a un plano:**

  Si la recta L_1 no es paralela al plano Π entonces, como hay intersección, la distancia mínima de la recta al plano es $d(L_1, \Pi) = 0$.

  Si la recta L_1 y el plano Π son paralelos, entonces la distancia mínima se puede obtener, usando la fórmula del punto de un plano más cercano a un punto dado, calculando la distancia de cualquier punto $P \in L_1$ al plano $d(L_1, \Pi) = d(P, \Pi)$.

- **Distancia entre rectas:**

  Dadas dos rectas diferentes $L_1 : (x, y, z) = P + t \cdot v$, $t \in \mathbb{R}$, y $L_2 : (x, y, z) = Q + t\dot{u}$, $t \in \mathbb{R}$, siempre es posible encontrar dos planos paralelos Π_1 y Π_2, que contienen a L_1 y L_2, respectivamente. Un vector normal a estos dos planos es $u \times v$, entonces, usando la fórmula del punto de un plano más cercano a un punto dado, $d(L_1, L_2) = d(P, \Pi_2)$, $P \in L_1 \subset \Pi_1$. Un vector normal para Π_2 es $n = u \times v$ y $Q \in \Pi_2$, entonces

$$\boxed{d(L_1, L_2) = d(P, \Pi_2) = \frac{|PQ \cdot (u \times v)|}{||u \times v||}}$$

Ejercicio: Calcule la distancia del punto $P(\overset{x}{1}, \overset{y}{2}, \overset{z}{-3})$ al plano $\pi : 3x - 2y + 2z + 1 = 0$

$$\underset{a}{3x} - \underset{b}{2y} + \underset{c}{2z} = \underset{d}{-1}$$

Note que $d(P, \pi) = \dfrac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$= \frac{|3 \cdot 1 + -2 \cdot 2 + 2 \cdot -3 - {}^-1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{|3 - 4 - 6 - {}^-1|}{\sqrt{17}}$$

$$= \frac{|-6|}{\sqrt{17}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{17}} \; (ul)$$

Valor propio

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se dice que λ es un autovalor o valor propio de A si existe un vector no nulo v tal que $Av = \lambda v$.

Nota:

- *Los valores propios son números reales por trabajar en espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$, pero podrían ser complejos cuando se consideran espacios vectoriales donde los escalares son también los números complejos.*
- *Los valores y vectores propios también se conocen como valores y vectores característicos o eigenvalores y eigenvectores.*

Polinomio característico

Sea A una matriz de orden n y $\lambda \in \mathbb{R}$, el polinomio característico se calcula de la siguiente manera:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Valores propios

Los valores propios se calculan de la siguiente manera:

$$P(\lambda) = 0$$

Vectores propios

Los vectores propios se obtienen al reemplazar λ en $A - \lambda I_n = 0$ y utilizar la estrategia de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones obtenido.

Ejercicio #1: Determine los valores y vectores característicos (propios) de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

ⓐ Polinomio característico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \Rightarrow P(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = (-2-\lambda)(1-\lambda) - (-5 \cdot -2)$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = -2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 10$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12$$

ⓑ Valores propios

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \quad \vee \quad \lambda = -4$$

ⓒ Vectores propios

⊛ Si $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{5}\tilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/5 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{5F_1 + \tilde{F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{2}{5}y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Un vector propio para $\lambda = 3$ es de la forma $\left(\overset{x}{\frac{2}{5}y}, \overset{y}{y}\right)$, $y \in \mathbb{R}$

⊛ Si $\lambda = -4$

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}\tilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{5F_1+\tilde{F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Un vector propio para $\lambda = -4$ es de la forma $\left(\overset{x}{y}, \overset{y}{y}\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio #2:

Determine los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y verifique que el producto de ellos es igual al determinante de la matriz.

ⓐ Polinomio característico

ⓑ Valores propios

Ejercicios Adicionales

Ejercicio #1: Determine la ecuación del plano Π que contiene a las rectas

R/ $5x+7y+z=24$

$$L_1 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{6} \qquad L_2 : \frac{x+3}{6} = \frac{y+4}{6} = \frac{z+3}{12}$$

Ejercicio #2: Halle la ecuación de la recta L que cumple simultáneamente las siguientes condiciones, definidas por:

R/ $\left(\frac{56}{5}, \frac{38}{5}, \frac{-33}{5}\right) + t(-61,-6,20)$

a) Es perpendicular al plano determinado por $A(2,5,1)$, $B(2,-5,4)$ y $C(4,2,8)$

b) Pasa por el punto de intersección del plano con ecuación $3x-5y-z=1$ con la recta de ecuación $\frac{x}{3} = y-4 = -z+3$

Ejercicio #3: Sea Π el plano que contiene los puntos $A(3,-1,-2)$, $B(3,2,-1)$ y $C(1,-3,-4)$ y L la recta de ecuación $(x,y,z) = (1,-7,2)+t(2,0,1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

a) Determine la ecuación normal del plano Π — R/ $2x-y-3z=13$

b) Halle el punto de intersección entre Π y L — R/ $(21,-7,12)$

c) Determine la ecuación de la recta M que es perpendicular al plano Π y que contiene al punto P — R/ $(21,-7,12)+t(-4,2,6)$

Ejercicio #4: Determine la ecuación del plano que pasa por $Q(3,2,-3)$ y que contiene a la recta de ecuaciones simétricas dada por

R/ $29x-35y+20z=-43$

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{-z+4}{2}$$

Ejercicio #5: Determine la ecuación de un plano que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones, que se definen por:

R/ $x+2z=-4$

a) Pasa por $A(2,1,-3)$

b) Es perpendicular a $3x+2y-z=2$

c) Es paralelo a la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = -z+3$

Ejercicio #6: Calcule la distancia del plano $\pi : 2x+3y-2z=5$ al origen.

R/ $\frac{5\sqrt{17}}{17}$

Ejercicio #7: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$. Halle los valores propios de la matriz A y un vector propio asociado a uno de los valores propios.

R/ $\lambda = -2$ y $\lambda = 4$