§1.5. **Experimento de Bernoulli**

Definición 1.7 Un experimento con sólo dos resultados posibles: **Éxito** o **Fracaso**, donde $P(E) = p$ y $P(F) = 1 - p$.

Sea X una variable aleatoria, donde se asigna 0 si se obtuvo un éxito y 1 si se obtuvo un fracaso. Entonces se tiene que:

x	0	1
$f_X(x)$	$1-p$	p

$E(X) = p$, y $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

§1.6. **Distribución Binomial**

Definición 1.8 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite n veces. Sea X el número de éxitos obtenidos. Entonces $R_X = \{0, 1, 2, ..., n\}$, y

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \quad E(X) = n \cdot p$$

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = n \cdot p$	$Var(X) = n \cdot p \cdot q$

con $q = 1 - p$

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por: n = cantidad de objetos, $\binom{n}{k} = C(n, k)$

q = Prueba de fracaso

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$ Para calcular Proba

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

p = prueba de exito

Ejemplo 1.16 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas **con reemplazo**. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

$n = 5 \qquad p = \frac{8}{20} \qquad q = \frac{3}{5}$

$$P(X = 3) = C(5, 3) \cdot \left(\frac{8}{20}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{5-3}$$

$$= \boxed{0{,}2304}$$

1. Distribución uniforme discreta

- Es una variable aleatoria que puede tomar **valores finitos o contables** con **igual probabilidad**.
- Ejemplo típico: lanzar un dado justo → posibles resultados: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Cada cara tiene probabilidad:

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Propiedades

- **Esperanza:**

$$E[X] = \frac{n+1}{2}.$$

(media aritmética de los valores posibles).

- **Varianza:**

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Ejemplo 1.17 Manuel lanza un dado de seis caras sobre una mesa.

a) Determine la media y la varianza para el total de puntos que Manuel obtiene.

media = $E(X)$

$n = 6 \qquad E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$

$\mathrm{Var}(X) = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}$

b) Determine la probabilidad de que, al lanzar el dado 50 veces, Manuel acumule más de 160 puntos.

$X = 1, 2, \dots, 50$

c) Manuel quiere lanzar el dado 200 veces. Plantee la suma, y luego use alguna aproximación posible para calcular la probabilidad de obtener más de 30 veces una cara con 6 puntos.

$n = 200 \qquad p = \frac{1}{6} \qquad q = \frac{5}{6}$

$P(30 < x \leq 200) = \sum_{k=31}^{200} c(200, k) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k}$

Ejemplo 1.18 Una pieza de los motores producidos en una fábrica de automóviles tiene un porcentaje de fallo del 1.3 %. Para garantizar la calidad del producto, se toma un lote de 60 de esas piezas para inspeccionarlas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 piezas estén defectuosas?

$n = 60 \quad p = 0{,}013 \quad q = 0{,}987$

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} c(60,k) \cdot (0{,}013)^{k} \cdot (0{,}987)^{60-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}9565}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 57 piezas **NO** estén defectuosas?

$n = 60 \quad p = 0{,}013 \quad q = 0{,}987$ pero como dicen NO defectuosas

Cambiamos p y q

$n = 60 \quad p = 0{,}987 \quad q = 0{,}013$

$$P(X \geq 57) = 1 - P(X < 57)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{56} c(60,k) \cdot (0{,}987)^{k} \cdot (0{,}013)^{60-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}9921}$$

3. $P(X > m) = 1 - F_X(k)$, para $m \in \mathbb{R}$ $\quad f_X(k) = P(X \leq m)$

Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta y f_X una ley de probabilidad para X. Se dice que $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función de distribución acumulada** o **función de masa** para X si:

$$F_X(m) = \sum_{\substack{k \in R_X \\ k \leq m}} f_X(k) = P(X \leq m)$$

$P(X \leq m) = F_X(m)$, $P(X < m) = F_X(a-1)$

entonces si piden $\boxed{P(X > m) = 1 - P(X \leq m) = 1 - F_X(m)}$

o si piden $\boxed{P(X \geq m) = 1 - P(X < m) = 1 - F_X(m-1)}$

§1.7. **Distribución Geométrica**

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, ...\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Nota 1.1 : Piensa por qué!

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

Distribución geométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de extracciones realizadas antes de (o hasta) obtener el primer éxito. Se dice que X sigue una distribución geométrica y se denota como: Importante

det proba antes o hasta el x intento

$$X \sim G(p)$$

con p parámetro.

- **Características**
  1. Se realizan extracciones con reposición.
  2. p es la probabilidad de éxito.

- **Función de distribución de probabilidad**

  Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

  $$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$ ← Importante

  con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

- **Función de distribución acumulada**

  Su función de distribución acumulada viene dada por:

  $$F_X(k) = 1 - q^{k+1}$$

  con $q = 1 - p$

n= Cantidad de objetos
p= prueba de exito
q= prueba de fracaso
k= valores de la suma

- **Función generadora de momentos**

  Su función generadora de momentos viene dada por:

  $$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t \cdot q}$$

  con $q = 1 - p$.

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = n \cdot p$	$Var(X) = n \cdot p \cdot q$

con $q = 1 - p$

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, ...\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Si X = Fallos antes del exito y Y intentos totales

$X = Y - 1$ $\quad$ $Y = X + 1$

Ejemplo 1.19 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente bolitas **con reemplazo** hasta que se obtiene la primera bolita roja. Calcula la probabilidad de que se necesiten 5 extracciones.

n = Cantidad de objetos
p = prueba de exito
q = prueba de fracaso
k = valores de la suma

$q \cdot p^{k-1}$ $\quad$ $p = \frac{8}{12}$ $\quad$ $q = \frac{1}{3}$

$$P(X=4) = \left(\frac{8}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \boxed{0{,}0082}$$

Ejemplo 1.20 En un concurso, nueve participantes deben seguir una rutina de ejercicios durante un mes para participar por premios.

a) En cada rutina se propone cierta cantidad de ejercicios para realizar. Cada ejercicios tiene una probabilidad de 0.4 de que se efectúe satisfactoriamente. Si el participante realiza más de 4 ejercicios en su rutina, entonces logrará terminar la rutina. ¿Cuál es la probabilidad de que un participante logre terminar la rutina?

b) Determine la probabilidad de que por lo menos 5 participantes terminen la rutina.

Falta n, es binomial

Ejemplo 1.21 Una fábrica de bombillos ha detectado que su máquina más nueva fabrica los bombillos con un porcentaje de 95 % de que no esté dañado.

a) Si se compraron 50 bombillos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 3 bombillos salgan dañados?

$n = 50 \quad p = 0{,}95 \quad q = 0{,}05$, pero piden que esten dañados

$n = 50 \quad p = 0{,}05 \quad q = 0{,}95$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{3} c(50, k) \cdot (0{,}05)^k \cdot (0{,}95)^{50-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}2396}$$

b) Rodolfo compró suficientes bombillos para abastecer el edificio de aulas. Empieza a colocarlos hasta encontrar uno dañado. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el dañado antes de poner el bombillo número 30?

Antes del 30 falla en encontrarlo

$n = 50 \quad p = 0{,}95 \quad q = 0{,}05$, pero piden que esten dañados

$n = 50 \quad p = 0{,}05 \quad q = 0{,}95$

$$P(X < 30) = \sum_{k=0}^{29} 0{,}05 \cdot (0{,}95)^k$$

$$= \boxed{0{,}7853}$$

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

Esta sí empieza en 0

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, \ldots\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Esta sí empieza en 1

📌 **Intentos hasta el primer éxito**

Usa $q^{k-1}p$ si el enunciado habla de:

- **"El éxito ocurre en el intento número k"**
  Ejemplo: *"La llamada se conecta en el 7° intento"* → aquí cuentas intentos → **usa $k - 1$**.

📌 **Ejemplo de la central telefónica**

Enunciado: *"el sistema se considera eficiente si logra comunicación con a lo sumo 3 intentos"*.

- Aquí la condición está en términos de **en qué intento ocurre el éxito**.
- Se modela como **número de intento en el que ocurre el éxito**.
- Por eso se usa la versión $q^{k-1}p$ (intentos).

📌 **Número de fallos antes del primer éxito**

Usa $q^k p$ si el enunciado habla de:

- **"Número de fallos antes del primer éxito"**
  Ejemplo: *"Falla 7 veces y a la 8ª lo logra"* → aquí cuentas fallos → **usa k**.

📌 **Ejemplo de los bombillos**

Enunciado: *"probabilidad de encontrar el dañado antes de poner el bombillo número 30"*.

- Aquí la condición es **fallar hasta el bombillo 29** y encontrar uno dañado en ese rango.
- Eso se modela naturalmente como **número de fallos antes del éxito**.
- Por eso la versión que se usa es la de $q^k p$ (fallos).

Ejemplo 1.22 Para probar el nuevo sistema en una central telefónica de cierta empresa, se realiza una prueba diaria, la cual consiste en marcar un número específico tantas veces como sea necesario hasta obtener comunicación. El sistema se considera eficiente durante un día específico si al realizar dicha prueba telefónica se logra comunicación con a lo sumo 3 intentos. Además, se sabe que la probabilidad de que se responda una llamada es de 25 %.

← Éxito ocurre en el 3

a) Calcule la probabilidad de que un día se considere eficiente.

$p = 0{,}25 \quad q = 0{,}75$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} 0{,}25 \cdot (0{,}75)^{k-1}$$

$$\approx \boxed{0{,}578125}$$

b) Determine la probabilidad de que al observar el sistema por 15 días hábiles, en al menos 8 de ellos el sistema sea hallado eficiente.

binomial

$n = 15 \quad p = 0{,}578125 \quad q = 0{,}421875$

$$P(8 \leq X \leq 15) = \sum_{k=8}^{15} C(15, k) \cdot (0{,}578125)^k \cdot (0{,}421875)^{15-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}73}$$

Ejemplo 1.23 Una empresa vende tarjetas de crédito mediante llamadas telefónicas. La probabilidad de que una persona a la que llaman para ofrecerle la tarjeta la acepte es de 0.01. Mario, empleado de esta empresa, recibe un salario que se calcula de la siguiente manera: una comisión de 2 000 colones por cada tarjeta vendida, y un monto fijo diario de 5 000 colones. Si Mario hace 500 llamadas diarias, ¿cuál es el salario esperado diario de Mario?

$E(X)$?

$n = 500 \quad p = 0{,}01$

$E(X) = 0{,}01 \cdot 500$

$= 5$ tarjetas por día en promedio

Salario $= 2000X + 5000$

$2000 \cdot 5 + 5000$

$\boxed{R/\ 15000}$

Distribución hipergeométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución hipergeométrica y se denota como:

$$X \sim H(n, N, b)$$

con n, N y b parámetros.

Con muestras
De 100 personas
se atienden 30

- **Características**
  1. Se realizan n extracciones sin reposición.
  2. Inicialmente la urna contiene b éxitos y r fracasos, donde $b + r = N$ y $n \leq N$

- **Función de distribución de probabilidad**

  Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

con $R_X = \{\text{máx}\{0, n-r\}, \text{mín}\{n, b\}\}$

N= Total de elementos de la poblacion
n = Cantidad de elementos de la muestra
b= Cantidad de elementos que cumplen
r= Cantida de elementos que no cumplen
K= valores de la suma

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = \frac{b \cdot n}{N}$	$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{b}{N}\right) \cdot \frac{b \cdot n}{N}$

Ejemplo 1.24 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas **sin reemplazo**. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

$N = 20 \quad n = 5 \quad b = 8$

$$P(X = 3) = \frac{C(8, 3) \cdot C(20-8, 5-3)}{C(20, 5)}$$

$$\approx \boxed{0,2384}$$

Ejemplo 1.25 Para esta sede, suponga que el grupo de Probabilidades está formado por 40 estudiantes, y de estos, 22 viven actualmente fuera de la provincia. El profesor tomará una muestra aleatoria de 20 estudiantes.

a) Determine el rango y la distribución de probabilidad para la variable Z, correspondiente a la cantidad de estudiantes, de la muestra, que actualmente viven fuera de la provincia.

$N = 40 \quad n = 20 \quad b = 22 \quad r = 18$

con $R_X = \{\text{máx}\{0, n-r\}, \text{mín}\{n, b\}\}$

$R_X = \{max(0, 20-18), min(20, 22)\}$
$= \{2, 20\}$

$\boxed{\begin{array}{l} N = \text{Total de elementos de la poblacion} \\ n = \text{Cantidad de elementos de la muestra} \\ b = \text{Cantidad de elementos que cumplen} \\ r = \text{Cantida de elementos que no cumplen} \\ K = \text{valores de la suma} \end{array}}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en dicha muestra, hayan entre 3 y 10 que actualmente viven fuera de la provincia?