Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

I Semestre, 2023
Tiempo: 3 horas y 15 minutos
Puntaje total: 28 pts

# EXAMEN DE SUFICIENCIA

---

**Instrucciones:**

1. El examen consta de **9** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene dos horas y treinta minutos para contestar los ítems del examen.
3. No debe desgrapar este documento ni tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

Resuelva en su cuaderno de examen cada uno de los siguientes ejercicios y recuerde debe incluir todo procedimiento que utilizó para dar respuesta.

1. [**3 puntos**] Al resolver un sistema de ecuaciones lineal con el parámetro $a \in \mathbb{R}$ y aplicar varios pasos del método de Gauss-Jordan se obtuvo la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & a^2-4 \end{array}\right)$$

Determine los posibles valores de $a$ para que el sistema posea:

*a*) Solución única.

*b*) Infinitas soluciones.

*c*) No posee solución.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & a^2-4 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{a}F_2 \\ \frac{1}{a-2}F_3}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_1-F_3 \\ F_2-\frac{a}{2}F_3}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a^2}{2}-a \\ 0 & 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Con $a = 0$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
- Con $a = 2$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Por lo que el sistema posee infinitas soluciones ($x = 2 - t$, $y = -t$, $z = t$).

Por lo tanto, el sistema posee solución única si $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$, no posee solución si $a = 0$ y posee infinitas soluciones si $a = 2$.

2. [**2 puntos**] Determine $|3 \cdot A^{-1} \cdot B^T|$, donde $A$ es una matriz invertible de orden 3 que cumple que $|A| = 2$ y $|B| = 5$.

Solución:
$|3 \cdot A^{-1} \cdot B^T| = 3^3 \cdot \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| = 27 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 5 = \dfrac{135}{2}$

3. [**3 puntos**] Calcule el valor de convergencia de la serie numérica dada por $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

**Solución:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \big(\ln(n^2-1) - \ln(n^2)\big)$$

4. [**3 puntos**] Determine si la siguiente serie numérica es convergente ó divergente. Justifique su respuesta.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

**Solución:** Usando criterio de la razón obtenemos:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}}{(n!)^2 \cdot 2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(n+1)^2 \cdot 2^{n^2}}{(n!)^2 \cdot 2^{(n+1)^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2^{n^2-(n+1)^2}(n+1) = \lim_{n\to\infty} 2^{(n-n-1)(n+n+1)}(n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0$$
Y como es menor a 1 entonces la serie es convergente.

5. [**3 puntos**]Determine la serie de potencias de la función dada por $u(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt$ en centro $x = 0$.

**Solución**
Desarrollando la expresión se obtiene: $(7a+2bi)i = (4+3i)(a-2i)$

$$7ai - 2b = 4a - 8i + 3ai + 6$$

$$-2b + 7ai = (4a+6) + (-8+3a)i$$

Ahora, comparando al parte real y la parte imaginaria se tiene que:

$$\begin{cases} -2b &= 4a+6 \\ 7a &= -8+3a \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $7a = -8+3a$ se obtiene que $a = -2$ y sustituyendo en la primera ecuación, $-2b = 4 \cdot -2 + 6$ entonces $b = 1$.

6. **[3 puntos]** Determine el número complejo $z$ tal que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |2z-5| &= 13 \\ \\ Arg(\bar{z}+i)) &= -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

**Solución**

Sea $z = a+bi$ el número complejo buscado. Analizando cada una de las condiciones se tiene que:

- De la primara ecuación
$$|2z-5| = 13$$
$$|2(a+bi)-5| = 13$$
$$|(2a-5)+2bi| = 13$$
$$(2a-5)^2 + 4b^2 = 169$$
- De la segunda ecuación, dado que $Arg(\bar{z}+i)) = -\dfrac{\pi}{4}$ se tiene que
$$Arg(a-bi+i)) = Arg(a+(1-b)i) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-b}{a}$$
$$-1 = \frac{1-b}{a}$$
$$a = b-1$$

- Sustituyendo en la primera ecuación

$$(2(b-1)-5)^2+4b^2=169$$

$$(2b-7)^2+4b^2=169$$

$$4b^2-28b+49+4b^2=169$$

$$8b^2-28b-120=0$$

Por lo tanto $b=6 \vee b=\dfrac{-5}{2}$ con lo cual $a=5 \vee b=\dfrac{-7}{2}$

Analizando las posibles soluciones:

*a*) Si $z_1=5+6i$ tenemos que $2z-5=2(5+6i)-5=5+12i$ y se tiene que $|2z-5|=13$ además $\bar{z}+i=5-6i+i=5-5i$ con lo cual $Arg(\bar{z}+i))=-\dfrac{\pi}{4}$.

*b*) Si $z_2=\dfrac{-7-5i}{2}$ entonces $2z-5=2\left(\dfrac{-7-5i}{2}\right)-5=-12-5i$ y se tiene que $|2z-5|=13$,

sin embargo $\bar{z}+i=\dfrac{-7+5i}{2}+i=\dfrac{-7+7i}{2}$ por lo tanto $Arg(\bar{z}+i))=\dfrac{3\pi}{4}$.

- Por lo tanto la solución es $z=5+6i$.

7. [**3 puntos**] Calcule el valor de las expresión $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3-3i}$.

8. [**4 puntos**] Considere el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, sobre el campo $\mathbb{R}$ y los puntos $A=(2,1,1)$, $B=(-1,-2,2)$, $C=(-1,3,-5)$ y $D=(4,-1,3)$; y las rectas $l:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=z-2$ $m:(x,y,z)=(3,2,1)+t\,(2,1,-1)$, con $t\in\mathbb{R}$. Responda cada una de las siguientes preguntas:

   *a*) Encuentra la ecuación paramétrica de la recta $n$ que es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y que pasa por $C$.

   **Solución:**

   Vector director: $\overrightarrow{\mathbf{BA}}=(2,1,1)-(-1,-2,2)=(3,3,-1)$

   $$n:\begin{cases} x &= -1+3t \\ y &= \phantom{-}3+3t \\ z &= -5-t \end{cases}, \text{ con } t\in\mathbb{R}$$

   *b*) Encuentre la ecuación del plano $\pi$ que contiene al punto $D$ y a la recta $n$.

   **Solución:**

   Como $n$ está en $\pi$, entonces los puntos $A$,$B$ y $D$ están en $\pi$, además se tiene que $\overrightarrow{\mathbf{BA}}=(3,3,-1)$ y $\overrightarrow{\mathbf{BD}}=(4,-1,3)-(-1,2,2)=(3,3,-1)$, así

$$n_\pi = \overrightarrow{\mathbf{BA}} \times \overrightarrow{\mathbf{BD}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi : \quad & [(x,y,z) - (-1,-2,2)] \cdot (-4,8,12) = 0 \\ & -4\,(x+1) + 8\,(y+2) + 12\,(z-2) = 0 \\ & -4x + 8y + 12z - 12 = 0 \\ & 4\,(-x + 2y + 3z - 3) = 0 \\ & -x + 2y + 3z = 3 \end{aligned}$$

9. **[4 puntos]** Considere a los vectores $\overrightarrow{\mathbf{p}} = (-1,2,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{q}} = (1,3,-1)$, $\overrightarrow{\mathbf{r}} = (-3,2,1)$ y $\overrightarrow{\mathbf{s}} = (-2,-2,4)$ en $\mathbb{R}^3$. Responda las siguientes preguntas:

   *a*) Verifique que los vectores $\overrightarrow{\mathbf{q}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ son linealmente independientes.
   **Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

   $\therefore$ Los vectores dados son l.i.

   **Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

   $\therefore$ Los vectores dados son l.i.

   *b*) Exprese el vector $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{q}}$, $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{s}}$.
   **Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

   $\therefore$ Los vectores dados son l.i.

   *c*) Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}}\, \overrightarrow{\mathbf{s}}$.

   **Solución:**

$$
\begin{aligned}
\operatorname{proy}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}} \overrightarrow{\mathbf{s}} &= \frac{(-1,2,1)\cdot(-2,-2,4)}{(-1)^2+(2)^2+(1)^2}(-1,2,1) \\
&= \frac{2}{6}(-1,2,1) \\
&= \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

*d*) Determine el ángulo formado por $\overrightarrow{\mathbf{q}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{r}}$.

**Solución:**

$$
\theta = \arccos\left(\frac{(1,3,-1)\cdot(-3,2,1)}{\sqrt{(1)^2+(3)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(2)^2+(1)^2}}\right) \approx 1{,}408925769
$$