Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 1103 - Cálculo y Álgebra Lineal
Tutor: Marco Salazar Vega

Tiempo disponible: 2 horas y 30 minutos
Periodo: II Semestre 2024
Puntaje total: 29 puntos

Segundo examen parcial

Ordinario (Solución)

Instrucciones:

1. El examen consta de **siete preguntas** de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas y 30 minutos** para contestar los ítems del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**3 puntos**] Factorice en $\mathbb{C}$ el polinomio $K(p) = p^4 - 5p^3 + 3p^2 + 19p - 30$ si se sabe que $p = 2 + i$ es un cero de K.

Utilizando división sintética, se tiene que:

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & -5 & 3 & 19 & -30 & 2+i \\
\downarrow & 2+i & -7-i & -7-6i & 30 & \\
\hline
1 & -3+i & -4-i & 12-6i & 0 &
\end{array} \to [x-(2+i)]$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -3+i & -4-i & 12-6i & 2-i \\
\downarrow & 2-i & -2+i & -12+6i & \\
\hline
1 & -1 & -6 & 0 &
\end{array} \to [x-(2-i)]$$

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & -6 & 3 \\
\downarrow & 3 & 6 & \\
\hline
1 & 2 & 0 &
\end{array} \to [x-3]$$

$$\begin{array}{cc|c}
1 & 2 & -2 \\
\downarrow & -2 & \\
\hline
1 & 0 &
\end{array} \to [x--2]$$

Así $K(p) = (x-2-i)(x-2+i)(x-3)(x+2)$

2. [**4 puntos**] Determine $z \in \mathbb{C}$ que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |\overline{z} - i| = \sqrt{29} \\ \arg(z - 6i) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Sea $z = a + bi$

Note que $|\overline{z} - i| = \sqrt{29} \Rightarrow |a - bi - i| = \sqrt{29}$

$$\Rightarrow |a + (-b-1)i| = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + (-b-1)^2} = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow a^2 + (b+1)^2 = 29 \qquad (1)$$

Ahora $\operatorname{Arg}(z - 6i) = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{Arg}(a + bi - 6i) = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(a + (b-6)i) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{b-6}{a} = \operatorname{Tan}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{b-6}{a} = -1$$

$$\Rightarrow b - 6 = -a$$

$$\Rightarrow b = -a + 6 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que:

$a^2 + (b+1)^2 = 29 \Rightarrow a^2 + (-a + 6 + 1)^2 = 29$

$$\Rightarrow a^2 + (7 - a)^2 = 29$$

$$\Rightarrow a^2 + 49 - 14a + a^2 = 29$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 14a + 20 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0$$

$$\Rightarrow a = 5 \lor a = 2 \qquad (3)$$

Ahora, usando (3) en (2) se tiene que:

⊛ Si $a=5$

$b=-a+6 \Rightarrow b=-5+6$
$\Rightarrow b=1$

⊛ Si $a=2$

$b=-a+6 \Rightarrow b=-2+6$
$\Rightarrow b=4$

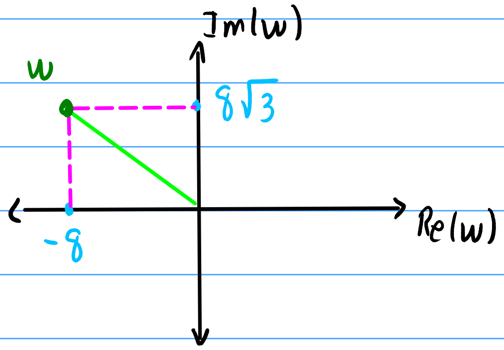
Así, los posibles valores de z son: $z=5+i$ y $z=2+4i$

3. [**4 puntos**] Determine las tres raíces cúbicas de $z = -8 + 8i\sqrt{3}$ y exprese su resultado en forma polar.

Sea $z = (-8+8i\sqrt{3})^{1/3}$ y sea $w = -8+8i\sqrt{3}$

Calculando $|w|$ se tiene que:

$$|w| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{64 + 192}$$
$$= \sqrt{256}$$
$$= 16$$



Luego $\theta = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right)$

$$\Rightarrow \theta = \arctan(-\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3} + \pi$$ pues w está en segundo cuadrante
$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Ahora $w = 16\,\mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow z^{1/3} = \left(16\,\mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)^{1/3}$

$$= 16^{1/3} \cdot \mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

Así, $z_0 = 16^{1/3} \cdot \mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\cdot 0\pi}{3}\right) \Rightarrow z_0 = 2\sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi}{9}\right)$

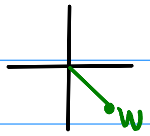
$$z_1 = 16^{1/3} \cdot \mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\cdot 1\pi}{3}\right) \Rightarrow z_1 = 2\sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{Cis}\left(\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$z_2 = 16^{1/3} \cdot \mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\cdot 2\pi}{3}\right) \Rightarrow z_2 = 2\sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{Cis}\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

4. [**5 puntos**] Calcule y exprese el número $z = (\sqrt{3} - i)^{2i} \cdot (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6$ en forma polar.

Sean $w = \sqrt{3} - i$, $x = 2i$ y $y = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$$w^x = e^{x \cdot \ln(w)} \Rightarrow w^x = e^{2i \cdot \ln(\sqrt{3} - i)}$$



Sea $w = \sqrt{3} - i$

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \qquad \theta = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{6} \qquad \text{Así } w = 2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

Así $\ln(w) = \ln\left(2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow \ln(w) = \ln(2) - \frac{\pi}{6} i$

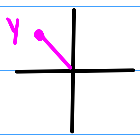
Retomando se tiene que:

$$w^x = e^{2i \cdot \ln(\sqrt{3} - i)} \Rightarrow w^x = e^{2i\left[\ln(2) - \frac{\pi}{6} i\right]}$$

$$= e^{2i\ln(2) + \frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{\frac{\pi}{3}} \cdot e^{2\ln(2) i}$$

$$= e^{\frac{\pi}{3}} \cdot \mathrm{Cis}(2\ln(2))$$



Sea $y = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$$|y| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2 \qquad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{Así } y = 2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Ahora $y^6 = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6 \Rightarrow y^6 = \left[2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^6$

$$= 2^6\,\mathrm{Cis}\left(6\cdot\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 64\,\mathrm{Cis}\left(\frac{9\pi}{2}\right)$$

Finalmente,

$$(\sqrt{3}-i)^{2i}\cdot(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6 = e^{\frac{\pi}{3}}\cdot \mathrm{Cis}(2\ln(2))\cdot 64\,\mathrm{Cis}\left(\frac{9\pi}{2}\right)$$

$$= 64\cdot e^{\frac{\pi}{3}}\cdot \mathrm{Cis}\left(2\ln(2)+\frac{9\pi}{2}\right)$$

5. **[3 puntos]** Determine los valores de a y d tales que $AA^T = B$, sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -1 & d \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$$

Note que $AA^T = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 3 & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2+9 & -a+3d \\ -a+3d & 1+d^2 \end{pmatrix}$$

Ahora $AA^T = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+9 & -a+3d \\ -a+3d & 1+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$ y con esto,

se tiene que:

$$\begin{cases} a^2+9=13 \\ -a+3d=-7 \\ -a+3d=-7 \\ 1+d^2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ -a+3d=-7 \\ d^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 2 \\ \\ d=\pm 3 \end{cases}$$

Dado que $-a+3d=-7$, se analizan los siguientes casos:

⊛ Si $a=2$ y $d=3$

$-a+3d=-7 \Rightarrow -2+3\cdot 3 \stackrel{?}{=} -7$

$\Rightarrow 7=-7$ ⊗

⊛ Si $a=-2$ y $d=3$

$-a+3d=-7 \Rightarrow -{-2}+3\cdot 3 \stackrel{?}{=} -7$

$\Rightarrow 11=-7$ ⊗

⊛ Si $a=-2$ y $d=-3$

$-a+3d=-7 \Rightarrow -{-2}+3\cdot{-3} \stackrel{?}{=} -7$

$\Rightarrow -7=-7$ ✓

⊛ Si $a=2$ y $d=-3$

$-a+3d=-7 \Rightarrow -2+3\cdot{-3} \stackrel{?}{=} -7$

$\Rightarrow -11=-7$ ⊗

$\therefore$ Los valores buscados son $a=-2$ y $d=-3$

6. **[5 puntos]** Sean A, B y C matrices cuadradas de orden tres invertibles. Si se sabe que $C = AB^{-1}$, donde $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, determine $(C^{-1})^T$

Note que $C = AB^{-1} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahora C^{-1} viene dado por:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -2F_1 + \tilde{F_2} \\ \sim \\ -5F_1 + \tilde{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 19 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{-1 \cdot \tilde{F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 19 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{2F_2 + \tilde{F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{5}\tilde{F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 4F_3 + \tilde{F_1} \\ \sim \\ 7F_3 + \tilde{F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/5 & -8/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 7/5 & -19/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & -1/5 \end{array}\right)$$

Así $C^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -8/5 & 1/5 \\ 7/5 & -19/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

Finalmente $(C^{-1})^T = \begin{pmatrix} 4/5 & 7/5 & 1/5 \\ -8/5 & -19/5 & -2/5 \\ 1/5 & 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

7. **[5 puntos]** Utilizando el método de Gauss-Jordan, determine el conjunto solución de:

$$\begin{cases} x + 2y + z - w = 2 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 2x + y + 2z + 2w = 4 \end{cases}$$

Representando el sistema de ecuaciones como matriz aumentada, se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -F_1+\overline{F_2} \\ \sim \\ -2F_1+\overline{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -F_2+\overline{F_3} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -\frac{\overline{F_2}}{3} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -2F_2+\overline{F_1} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 5/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Representando como sistema de ecuaciones, se tiene que:

$$\begin{cases} x + z + \frac{5w}{3} = 2 \\ y - \frac{4w}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - z - \frac{5w}{3} \\ y = \frac{4w}{3} \end{cases} \quad \text{con } z, w \in \mathbb{R}$$

$$\therefore S = \left\{ (x, y, z, w) = \left(2 - z - \frac{5w}{3}, \frac{4w}{3}, z, w\right), \text{ con } z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Llevo obteniendo resultados desde hace tiempo, pero aún no sé cómo llegué a ellos.

[Carl Friedrich Gauss]