Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 1103 - Cálculo y Álgebra Lineal
Tutor: Marco Salazar Vega

Tiempo disponible: 2 horas y 30 minutos
Periodo: II Semestre 2024
Puntaje total: 30 puntos

Primer examen parcial

Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **seis preguntas** de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas y 30 minutos** para contestar los ítems del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. **[1 punto]** Dada la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

Determine si la siguiente serie converge o diverge, en caso de converger indique a qué valor converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+4)$$

2. Sea $\{m_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, tal que $m_n = \dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+2)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2n+2)}$

   a) **[1 punto]** Calcule el término m_5

   b) **[4 puntos]** Determine si $\{m_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no monótona.

3. Determine si las siguientes series convergen o divergen. En caso de alguna ser convergente, determine su valor de convergencia.

   a) **[5 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3}+6}{5^n}$

   b) **[3 puntos]** $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(p)}{p+1} - \frac{\cos(p-1)}{p}$

4. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

   a) **[3 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)+1}{7^n}$

   b) **[4 puntos]** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$

5. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!}$

   a) **[2 puntos]** Determine si la serie es condicional o absolutamente convergente.

   b) **[2 puntos]** Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001

   c) **[1 punto]** Aproxime la suma de la serie usando el inciso *b*

6. **[4 puntos]** Determine el intervalo de convergencia (no analice los extremos) para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^{n+4}}{(3n+6)\cdot 11^n}$$

Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico.

[Leonhard Euler]