

Práctica de probabilidades (primer examen parcial).

Curso: MA2404 Probabilidades.

Enunciados

- En el País de las Maravillas los gatos tienen una y solo una de las siguientes cualidades: vuelan, tienen bigotes o comen pescado. En un censo, Alicia ha determinado que el 25% de los gatos de este país vuelan y el 60% de los gatos no tienen bigotes. Además, en este estudio se determinó que el 80% de los gatos que vuelan están locos, al igual que el 70% de los gatos con bigotes y el 20% de los gatos que comen pescado.
 - ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas están locos?
 - Se elige un gato al azar de este país y resulta estar loco. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga bigotes?
 - ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas tienen bigotes o están locos?

Solución.

Considere siguientes los conjuntos: Ω es el conjunto de todos los gatos de el País de las Maravillas, V es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que vuelan, B es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que tienen bigotes, C es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que comen pescado y L es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que están locos.

Se sabe que $P[V] = 0.25$, $P[\overline{B}] = 0.6$. Por lo tanto, $P[B] = 0.4$ y $P[C] = 0.35$.

Por otro lado, se sabe que $P[L|V] = 0.8$, $P[L|B] = 0.7$ y $P[L|C] = 0.2$.

- Considerando que los conjuntos V , B y C forman una partición de Ω , se procede por medio de la probabilidad total:

$$P[L] = P[V] \cdot P[L|V] + P[B] \cdot P[L|B] + P[C] \cdot P[L|C]$$

$$\Rightarrow P[L] = 0.25 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.7 + 0.35 \cdot 0.2 = 0.55$$

Así, el 55% de los gatos del País de las Maravillas están locos.

- Como se solicita $P[B|L]$, se procede por medio del teorema de Bayes:

$$P[B|L] = \frac{P[B] \cdot P[L|B]}{P[L]}$$

$$\Rightarrow P[B|L] = \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.55} = \frac{28}{55} \approx 0.509091$$

Por lo tanto, si un gato del País de las Maravillas está loco, la probabilidad de que tenga bigotes es de, aproximadamente, 50.91%.

- Se solicita $P[B \cup L]$, entonces se procede por el principio de inclusión y exclusión:

$$P[B \cup L] = P[B] + P[L] - P[B \cap L]$$

$$\Rightarrow P[B \cup L] = P[B] + P[L] - P[B] \cdot P[L|B]$$

$$\Rightarrow P[B \cup L] = 0.4 + 0.55 - 0.4 \cdot 0.7 = 0.67$$

Por lo tanto, el porcentaje de los gatos del País de las Maravillas tienen bigotes o están locos es de 67%.

2. En una canasta se tienen 10 bolitas rojas y 1 bolita verde. Se comienzan a sacar bolitas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas.

- (a) **Regla 1:** si la bolita extraída es roja no se devuelve a la canasta y se agrega una bolita verde a la canasta.
- (b) **Regla 2:** si la bolita es verde no se devuelve a la canasta.

El proceso termina hasta obtener 2 bolitas verdes. ¿Cuál es la probabilidad de sacar en total 4 bolitas?

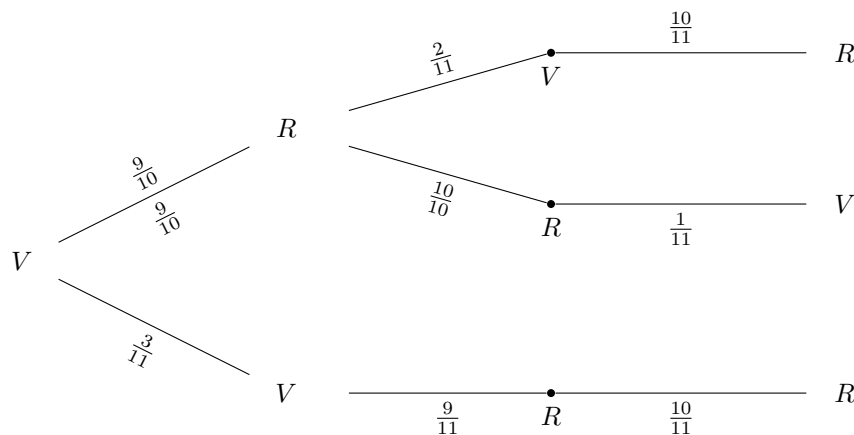
Solución.

Para este experimento, exponer el espacio muestral no es una tarea sencilla, por lo que se limitará a determinar la probabilidad solicitada.

Note que si se realizan 4 extracciones, como no dice que las bolitas verdes deben ser seguidas, se consideran las siguiente posibilidades:

$$R - V - R - V, V - R - R - V, R - R - V - V.$$

El siguiente diagrama expone todos los posibles resultados pero de manera inversa. Es decir, la primera letra corresponde a la cuarta extracción, y así sucesivamente. Los valores corresponden a la probabilidad de cada extracción. Note que solo hay tres columnas, pues falta analizar por aparte la probabilidad de la bolita final verde.



De acá, se puede concluir que:

- La probabilidad de $R - V - R - V$ es $\frac{10}{11} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{18}{605} \approx 0.029752$.
- La probabilidad de $V - R - R - V$ es $\frac{1}{11} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{1100} \approx 0.008181$.
- La probabilidad de $R - R - V - V$ es $\frac{10}{11} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{54}{1331} \approx 0.040570$.

Así, la probabilidad de sacar 4 bolitas para terminar el proceso es de, aproximadamente, 7.85%.

3. Sean A y B dos eventos no nulos tales que $P[A] = \frac{P[\overline{B}]}{3}$, y además $P[A \cup B] = \frac{1}{3}$. Prueba que:

- (a) $P[A \cap B] = \frac{2P[B]}{3}$
- (b) los eventos A y B son dependientes.

Solución.

- (a) Note que:

$$\begin{aligned}
 & P[A \cap B] \\
 &= P[A] + P[B] - P[A \cup B] \\
 &= \frac{P[\overline{B}]}{3} + P[B] - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1 - P[B]}{3} + P[B] - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2P[B]}{3}
 \end{aligned}$$

- (b) Suponga que los eventos A y B son eventos independientes. Esto significa que:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] .$$

Por lo tanto, por el punto anterior, se cumple que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2P[B]}{3} = P[A] \cdot P[B] \\
 & \Rightarrow \frac{2}{3} = P[A] \\
 & \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{P[\overline{B}]}{3} \\
 & \Rightarrow 2 = P[\overline{B}]
 \end{aligned}$$

Es decir, se acaba de demostrar que la probabilidad de un evento supera la unidad, lo que es claramente una contradicción. Por lo tanto, los eventos A y B son dependientes.

4. Se ha determinado que en Costa Rica el 20% de las familias son de clase baja; entre tanto el porcentaje de familias de clase media y alta deben determinarse. De las familias de clase alta, el 90% acostumbran a salir del país para fin de año, el 30% de las familias de clase media y el 5% de las de clase baja hacen lo mismo. La probabilidad de que una familia, elegida al azar, fuera de clase media, que resultó salir del país a finales del año pasado, fue de 0.4. Determine el porcentaje de familias de clase alta de Costa Rica.

Solución.

Considere Ω como el conjunto de familias costarricenses. Además, considere los eventos B : familias costarricenses de clase baja, M : familias costarricenses de clase media y A : familias costarricenses de clase alta. Note que los conjuntos B , M y A forman una partición.

Considere el evento V : familias costarricenses que salen fuera del país para fin de año.

Según el problema, $P[M] = 0.2$, $P[V|A] = 0.9$, $P[V|M] = 0.3$, $P[V|B] = 0.05$, $P[M|V] = 0.4$. Se solicita $P[A]$.

Para buscar el valor solicitado, se recurre a las siguientes ecuaciones:

$$(a) \quad P[A] + P[M] + P[B] = 1 \Rightarrow P[A] + P[B] = 0.8 \Rightarrow P[B] = 0.8 - P[A]$$

$$(b) \quad P[M|V] = \frac{P[M] \cdot P[V|M]}{P[V]} \Rightarrow P[V] = \frac{0.2 \cdot 0.3}{0.4} = 0.15$$

Por lo tanto:

$$P[V] = P[A] \cdot P[V|A] + P[M] \cdot P[V|M] + P[B] \cdot P[V|B]$$

$$\Rightarrow 0.15 = P[A] \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.3 + (0.8 - P[A]) \cdot 0.05$$

$$\Rightarrow 0.05 = P[A] \cdot 0.85$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{1}{17} \approx 0.058823$$

Así, el porcentaje de familias de clase alta en Costa Rica es de, aproximadamente, 5.9%.

5. Suponga que en Ω se definen los eventos A y B tales que $P[A] = \frac{1}{2} \cdot P[B]$ y $P[A|B] = \frac{1}{4}$. Si $P[A \cup B] = \frac{5}{6}$, determine $P[A]$.

Solución.

Considere los siguientes resultados:

$$(a) \quad P[A] = \frac{1}{2} \cdot P[B] \Rightarrow 2P[A] = P[B]$$

$$(b) \quad P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \Rightarrow P[A|B] \cdot P[B] = P[A \cap B]$$

$$(c) \quad P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cup B] - P[A] + P[A \cap B] = P[B]$$

Con esto:

$$P[A] = \frac{1}{2} \cdot P[B]$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{1}{2} \cdot \left(P[A \cup B] - P[A] + P[A \cap B] \right) \quad , \text{ por (c),}$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{1}{2} \cdot \left(P[A \cup B] - P[A] + P[A|B] \cdot P[B] \right) \quad , \text{ por (b),}$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} - P[A] + \frac{1}{4} \cdot 2P[A] \right) \quad , \text{ por (a),}$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot P[A] \right)$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \cdot P[A]$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} \cdot P[A] = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la probabilidad del evento A es de, aproximadamente, 33.3%.

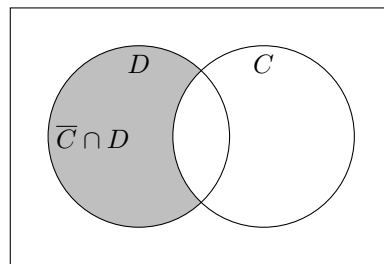
6. Suponga que en Ω se definen los eventos C y D tales que $P[C] = 0.5$, $P[D] = 0.4$ y $P[\overline{C} \cap D] = 0.2$. Determine si los eventos C y D son independientes o no lo son.

Solución.

Para resolver este ejercicio se tienen dos caminos: demostrar que $P[C|D] = P[C]$ y $P[D|C] = P[D]$, o demostrar que $P[C \cap D] = P[C] \cdot P[D]$. Debido a las premisas, se optará por la segunda demostración.

Es decir, se debe demostrar que $P[C \cap D] = P[C] \cdot P[D] = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$.

Note que, en cuestión de conjuntos:



Se puede concluir que:

$$P[C \cup D] = P[\overline{C} \cap D] + P[C] = 0.7.$$

Por otro lado:

$$P[C \cup D] = P[C] + P[D] - P[C \cap D]$$

$$\Rightarrow 0.7 = 0.5 + 0.4 - P[C \cap D]$$

$$\Rightarrow P[C \cap D] = 0.5 + 0.4 - 0.7$$

$$\Rightarrow P[C \cap D] = 0.2$$

Por lo tanto, los eventos C y D son independientes.

7. Un estudiante del curso de IA crea un sistema de alertas para detectar posibles clientes impuntuales en operaciones de crédito. Un banco hace pruebas intensivas del sistema con base en los registros de su cartera de clientes y determina que si la persona es impuntual, el sistema acierta en clasificarla como tal el 95% de las veces y que si la persona es puntual, el sistema falla al clasificarla como impuntual el 3% de las veces. Los registros del banco revelan que el 10% de los clientes incumplen, mientras que el 90% no. Si un cliente, seleccionado al azar, se clasifica como impuntual por el sistema, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?

Solución.

Suponga Ω está formado por todos los clientes del banco, y considere los eventos P : clientes que son puntuales, I : clientes que son impuntuales, A : el sistema califica a un cliente como impuntual.

Se sabe que $P[I] = 0.1$, $P[P] = 0.9$, $P[A|I] = 0.95$, $P[A|P] = 0.03$; se solicita $P[I|A]$.

Aplicando el teorema de Bayes:

$$P[I|A] = \frac{P[I] \cdot P[A|I]}{P[I] \cdot P[A|I] + P[P] \cdot P[A|P]}$$

$$\Rightarrow P[I|A] = \frac{0.1 \cdot 0.95}{0.1 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.03} = \frac{95}{122} \approx 0.778688$$

La probabilidad de que un cliente, seleccionado al azar, sea impuntual, donde el sistema lo clasifica como impuntual, es de, aproximadamente, 77.8%.

8. Sean A , B y C eventos tales que: A y B son independientes, A y C son independientes, y además B y C son eventos disjuntos. Pruebe que A y $B \cup C$ son eventos independientes.

Solución.

Los eventos A y $B \cup C$ son independientes.

9. En una clase, el 55% de los estudiantes tienen computadora en su casa y el resto no tiene. En el examen de Ciencias, aprobaron el 80% de los que tiene computadora en su casa y el 90% de los que no tienen. Se elige un estudiante al azar de la clase.

- (a) Hallar la probabilidad de que el estudiante elegido haya aprobado el examen de Ciencias.
- (b) Sabiendo que el estudiante reprobó el examen de Ciencias, ¿cuál es la probabilidad de que tenga computadora en su casa?

Solución.

- (a) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar haya aprobado el examen de Ciencias es de 84.5%.
 - (b) La probabilidad de que tenga computadora en su casa, sabiendo que el estudiante reprobó el examen de Ciencias, es de, aproximadamente, 29%.
10. En una bolsa se tienen 10 bolas blancas, 8 bolas verdes y 7 bolas rojas. Considere el experimento en que se extraen bolas al azar sucesivamente de la bolsa y en cada extracción la bola no se devuelve y antes de la siguiente extracción las bolas blancas se pintan verdes, las que eran verde se pintan rojas y las que eran rojas se pintan blancas. Si se extraen tres bolas, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Solución.

La probabilidad de que sean del mismo color es de, aproximadamente, 12.1%.

11. Sean A y B eventos independientes tales que $P[\bar{A}] = P[B \cap \bar{A}]$. Pruebe que A y $B \cup \bar{A}$ son eventos independientes.

Solución.

Para demostrar que los eventos A y $B \cup \bar{A}$ son independientes, basta con probar que:

$$P[A \cap (B \cup \bar{A})] = P[A] \cdot P[B \cup \bar{A}] .$$

Como A y B son independientes, entonces se sabe que $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$.

Por otro lado:

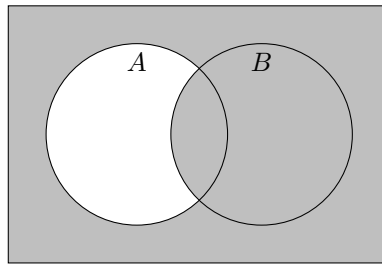
$$P[\bar{A}] = P[B \cap \bar{A}]$$

$$\Rightarrow P[\bar{A}] = P[B] + P[\bar{A}] - P[B \cup \bar{A}]$$

$$\Rightarrow P[B] = P[B \cup \bar{A}]$$

El ejercicio quedaría resuelto si se demuestra que $A \cap (B \cup \bar{A}) = A \cap B$.

Para esto, note que la siguiente región sombreada representa $B \cup \bar{A}$.



Si se busca lo que comparte con A , efectivamente se llegará al conjunto $A \cap B$.

Por lo tanto, A y $B \cup \bar{A}$ son eventos independientes.

12. Cuatro compañeros de residencia van a rifar la lavada de los platos. Se colocan tres fichas blancas y una negra en una bolsa de tela y cada uno saca una ficha. Al que le corresponda la ficha negra le tocará lavar todos los platos. Uno de los estudiantes se apresura a tomar la ficha de primero convencido de que sus probabilidades de sacarse la lavada de platos se reducen si toma la ficha de primero. ¿Está ese estudiante en lo cierto? Utilice principios probabilísticos para contestar dicha pregunta.

Solución.

Si se analiza dicha situación, la primera, segunda y tercera extracción tienen la probabilidad de no lavar los platos.

13. Si se lanzan tres dados distintos, determine la probabilidad de que el resultado de los tres dados sume 7.

Solución.

La probabilidad de que el resultado de sumar las caras sea 7 es de $\frac{15}{216} = \frac{5}{72} \approx 0.069$.

14. Un pequeño Kinder privado está formado por tres grupos de diez personas cada uno, como se muestra a continuación.

Grupo	Mujeres	Hombres
<i>A</i>	5	5
<i>B</i>	4	6
<i>C</i>	7	3

La directora debe elegir 10 estudiantes para que se encarguen del acto cívico del 15 de setiembre. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si

- (a) no hay restricciones?
- (b) debe elegir exactamente dos mujeres de cada grupo?
- (c) al menos una mujer de cada grupo?

Solución.

- (a) Como el grupo no necesita algún orden, entonces para escoger las personas que se encarguen del acto cívico se utiliza la fórmula: $\binom{30}{10}$.

Con esto, hay 30 045 015 posibilidades de formar dicho grupo.

- (b) En este punto, primero se hará la elección de las mujeres, y luego los espacios restantes se llenarán con hombre. Se debe tratar por etapas.

- *Etapas 1:* seleccionar a las mujeres del grupo *A*: $\binom{5}{2} = 10$.
- *Etapas 2:* seleccionar a las mujeres del grupo *B*: $\binom{4}{2} = 6$.
- *Etapas 3:* seleccionar a las mujeres del grupo *C*: $\binom{7}{2} = 21$.
- *Etapas 4:* seleccionar a los hombres: $\binom{14}{4} = 1001$.

Así, hay 1 261 260 maneras de seleccionar el grupo con la condición dada.

(c) Este ejercicio es engañoso, pues si se plantea similar a la parte (b) se produce recuento.

La forma correcta es utilizando el principio de inclusión exclusión.

Considere:

$\Omega = \{\text{Maneras de formar el grupo de 10 personas sin restricción}\}$

$X_1 = \{x \in \Omega : x \text{ es una posibilidad donde hay al menos una mujer del grupo } A\}$

$X_2 = \{x \in \Omega : x \text{ es una posibilidad donde hay al menos una mujer del grupo } B\}$

$X_3 = \{x \in \Omega : x \text{ es una posibilidad donde hay al menos una mujer del grupo } C\}$

Lo que se necesita es determinar $|X_1 \cap X_2 \cap X_3|$. Sin embargo, para facilitar los cálculos se utilizará:

$$|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = |\Omega| - |\overline{X_1 \cap X_2 \cap X_3}| = |\Omega| - |\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \overline{X_3}|.$$

Por esta razón, como:

$$|\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \overline{X_3}| = |\overline{X_1}| + |\overline{X_2}| + |\overline{X_3}| - |\overline{X_1} \cap \overline{X_2}| - |\overline{X_2} \cap \overline{X_3}| - |\overline{X_1} \cap \overline{X_3}| + |\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}|,$$

se calculará cada cardinalidad por separado.

- $|\overline{X_1}| = \binom{25}{10} = 3268760.$
- $|\overline{X_2}| = \binom{26}{10} = 5311735.$
- $|\overline{X_3}| = \binom{23}{10} = 1144066.$
- $|\overline{X_1} \cap \overline{X_2}| = \binom{21}{10} = 352716.$
- $|\overline{X_2} \cap \overline{X_3}| = \binom{19}{10} = 92378.$
- $|\overline{X_1} \cap \overline{X_3}| = \binom{18}{10} = 19448.$
- $|\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}| = \binom{14}{10} = 1001.$

Así, $|\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \overline{X_3}| = 9236710$, por lo que hay 20 808 305 posibilidades de formar el grupo con la condición dada.

15. Considere la palabra INICIACION. ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra si

- (a) no hay restricción?
- (b) las vocales deben ir juntas en cualquier orden?
- (c) la primer vocal debe ir después de la tercera posición?
- (d) hay al menos tres vocales I después del sexto lugar?

Solución.

- (a) Para considerar los anagramas, se busca la cantidad de letras (10) y se verifica si hay repeticiones (4 I, 2 N, 2 C), par aplicar la fórmula: $\frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$.

Por lo tanto, hay 37 800 anagramas sin restricción.

- (b) En este apartado, se tomarán las vocales como un solo caracter, se permutarán y luego se calcula la cantidad de anagramas con este nuevo “símbolo”. Se realiza por etapas.

- *Etapas 1:* permutar las vocales: $\frac{6!}{4!} = 30$.
- *Etapas 2:* permutar las consonantes y el caracter formado por las vocales:
 $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$.

Con esto, hay 900 anagramas con la condición dada.

- (c) Como la primer vocal debe ir después de la tercera posición, quiere decir que todas las vocales se encuentran a partir de la cuarta posición. Se procede por etapas.

- *Etapas 1:* escoger las posiciones para las vocales: $\binom{7}{6} = 7$
- *Etapas 2:* colocar las vocales en las casillas seleccionadas anteriormente:
 $\frac{6!}{4!} = 30$.
- *Etapas 3:* colocar las consonantes en los lugares restantes:
 $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

Con esto, hay 1 260 anagramas con la condición dada.

(d) En este apartado se tomarán dos casos:

i. **Caso I:** Exactamente tres vocales I después del sexto lugar.

- *Etapa 1:* escoger las posiciones para las 3 vocales I: $\binom{4}{3} = 4$.
- *Etapa 2:* colocar estas letras I: $\frac{3!}{3!} = 1$.
- *Etapa 3:* escoger el lugar para la letra I restante: $\binom{6}{1} = 6$.
- *Etapa 4:* colocar esta letra I: 1.
- *Etapa 5:* colocar las 6 letras restante: $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

Así, para este caso hay 4 320 anagramas.

ii. **Caso II:** Las cuatro vocales I después del sexto lugar.

- *Etapa 1:* escoger las posiciones para las 3 vocales I: $\binom{4}{4} = 1$.
- *Etapa 2:* colocar dichas vocales: 1.
- *Etapa 3:* colocar las letras restantes en los espacios disponibles: $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

Así, para este caso hay 180 anagramas.

Finalmente, como estos dos casos son excluyentes se tiene que hay 4 500 anagramas con la condición propuesta.

16. En el juego ANAGRAM se tienen 7 fichas que, colocadas en fila de cierta manera, forman la palabra INICIAR. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir estas fichas entre Fabiola, Rebeca y Víctor si

- (a) no hay restricciones?
- (b) a cada persona le corresponde una ficha con consonante?

Solución.

- (a) para realizar la repartición se deben considerar los objetos iguales y los diferentes por separado. Por esto, se realizarán etapas.

- *Etapas 1:* repartir las fichas iguales (las 3 con la letra I) entre las tres personas: $\binom{3+3-1}{3} = 10$.
- *Etapas 2:* repartir las fichas diferentes (las restantes 4 fichas) entre las tres personas: $3^4 = 81$.

Con esto, se concluye que hay 810 maneras de realizar la repartición de las fichas sin restricción.

- (b) Similar al anterior, se realizarán etapas.

- *Etapas 1:* repartir las consonantes (3 tres fichas) de manera que cada persona reciba una: $3! = 6$.
- *Etapas 2:* repartir las fichas iguales (las 3 con la letra I) entre las tres personas: $\binom{3+3-1}{3} = 10$.
- *Etapas 3:* repartir la ficha con la letra A entre las tres personas: $3^1 = 3$.

Con esto, se concluye que hay 180 maneras de realizar la repartición de las fichas con la condición dada.

17. Diez personas (6 hombre y 4 mujeres) se sientan en 10 sillas enumeradas del 1 al 10. ¿De cuántas maneras se pueden sentar las personas en las sillas si

- (a) no hay restricciones?
- (b) las mujeres deben ir en sillas impares?
- (c) al menos una mujer debe ir en silla impar?

Solución.

(a) Si no hay restricciones, hay $10! = 3\,628\,800$ maneras de sentar a las personas en las sillas.

(b) Este apartado se resolverá por etapas.

- *Etapas 1:* escoger de los 5 asientos impares dónde sentar a las 4 mujeres: $\binom{5}{4} = 5$.
- *Etapas 2:* sentar a las mujeres en dichos asientos: $4! = 24$.
- *Etapas 3:* sentar a los 6 hombres en las restantes 6 sillas: $6! = 720$.

Con esto, hay 86 400 maneras de sentar a las personas con la condición dada.

(c) Este ejercicio se hará por complemento. Es decir, se buscará la cantidad de maneras de sentar a las personas donde ninguna mujer se sienta en silla impar. También se usarán etapas.

- *Etapas 1:* escoger de los 5 asientos pares dónde sentar a las 4 mujeres: $\binom{5}{4} = 5$.
- *Etapas 2:* sentar a las mujeres en dichos asientos: $4! = 24$.
- *Etapas 3:* sentar a los 6 hombres en las restantes 6 sillas: $6! = 720$.

Así, 3 542 400 maneras de sentar a las personas con la condición dada.

18. La empresa ANTEL ha donado a la Universidad 12 computadoras idénticas y 5 impresoras distintas. Estas donaciones serán distribuidas entre 4 laboratorios. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las donaciones si

- (a) no hay restricciones?
- (b) al laboratorio LAIMA le corresponden exactamente 2 impresoras y a lo sumo 4 computadoras?

Solución.

- (a) Se realizará por etapas.

- *Etapa 1:* repartir las computadoras: $\binom{12+4-1}{12} = 455$.
- *Etapa 2:* repartir las impresoras: $4^5 = 1024$.

Con esto, hay 465 920 maneras de realizar la repartición.

- (b) Igual que el anterior, se realizará por etapas.

- *Etapa 1:* seleccionar las impresoras para el LAIMA: $\binom{5}{2} = 10$.
- *Etapa 2:* repartir las impresoras entre los restantes laboratorios: $3^3 = 27$.
- *Etapa 3:* para repartir las computadoras se harán casos.
 - *Caso I:* al LAIMA no le corresponden computadoras. Por lo tanto se reparten entre los otros 3 laboratorios: $\binom{12+3-1}{12} = 91$.
 - *Caso II:* al LAIMA le corresponde 1 computadora. Solo hay una posibilidad de darle la computadora, por lo tanto se reparten las restantes 11 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{11+3-1}{11} = 78$.
 - *Caso III:* al LAIMA le corresponden 2 computadoras. Solo hay una posibilidad de darle las computadoras, por lo tanto se reparten las restantes 10 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{10+3-1}{10} = 66$.
 - *Caso IV:* al LAIMA le corresponden 3 computadoras. Solo hay una posibilidad de darle las computadoras, por lo tanto se reparten las restantes 9 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{9+3-1}{9} = 55$.

- *Caso V*: al LAIMA le corresponden 4 computadoras. Solo hay una posibilidad de darle las computadoras, por lo tanto se reparten las restantes 8 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{8+3-1}{8} = 45$.

Por lo tanto, esta etapa tiene $91 + 78 + 66 + 55 + 45 = 335$ posibilidades.

Con esto, hay 80 400 maneras de realizar la repartición con la restricción propuesta.

19. El juego *BUSCA-PALABRAS* es para dos jugadores. Cada jugador recibe 8 fichas con una letra cada una. Ambos jugadores sin ver sus fichas colocan 4 al azar sobre la mesa. Luego, cada jugador por cada palabra con sentido que obtenga de las fichas en la mensa obtiene 1 punto. Posteriormente se retiran las fichas y a cada jugador se le reparten otras 4 fichas para la siguiente partida. Suponga que en cierta partida Karla tienen las fichas A, L, G, E, B, A, N, U , mientras que Jorge tiene P, A, K, E, I, R, O, M . ¿Cuántas maneras hay de obtener las 8 letras de la mesa con únicamente 2 A y 1 E ?

Solución.

Este ejercicio se resolverá por casos. Note que estas son las únicas posibilidades (excluyentes) de obtener únicamente 2 A y 1 E .

(a) **Caso I:** Ambas A son de Karla y la E también.

- *Etapa 1:* seleccionar las fichas con A de Karla: 1.
- *Etapa 2:* seleccionar la ficha con E de Karla: 1.
- *Etapa 3:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades L, G, B, N, U): $\binom{5}{1} = 5$.
- *Etapa 4:* seleccionar las fichas de Jorge (de las posibilidades P, K, I, R, O, M): $\binom{6}{4} = 15$.

Así, hay 75 posibilidades para este caso.

(b) **Caso II:** Ambas A son de Karla y la E es de Jorge.

- *Etapa 1:* seleccionar las fichas con A de Karla: 1.
- *Etapa 2:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades L, G, B, N, U): $\binom{5}{2} = 10$.
- *Etapa 3:* seleccionar la ficha E de Jorge: 1.
- *Etapa 4:* seleccionar las otras fichas de Jorge (de las posibilidades P, K, I, R, O, M): $\binom{6}{3} = 20$.

Así, hay 200 posibilidades para este caso.

(c) **Caso III:** Las letras A y E son de Karla y la otra A es de Jorge.

- *Etapa 1:* seleccionar la ficha con A de Karla: 1.
- *Etapa 2:* seleccionar la ficha con E de Karla: 1.
- *Etapa 3:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades L, G, B, N, U): $\binom{5}{2} = 10$.
- *Etapa 4:* seleccionar la ficha A de Jorge: 1.
- *Etapa 5:* seleccionar las otras fichas de Jorge (de las posibilidades P, K, I, R, O, M): $\binom{6}{3} = 20$.

Así, hay 200 posibilidades para este caso.

(d) **Caso IV:** Las letras A y E son de Jorge y la otra A es de Karla.

- *Etapa 1:* seleccionar la ficha con A de Karla: 1.
- *Etapa 2:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades L, G, B, N, U): $\binom{5}{3} = 10$.
- *Etapa 3:* seleccionar la ficha A de Jorge: 1.
- *Etapa 4:* seleccionar la ficha con E de Jorge: 1.
- *Etapa 5:* seleccionar las otras fichas de Jorge (de las posibilidades P, K, I, R, O, M): $\binom{6}{2} = 15$.

Así, hay 150 posibilidades para este caso.

Finalmente, con las condiciones dadas hay 625 posibilidades de obtener las 8 letras.

20. ¿Cuántos anagramas se pueden formar con las letras *HRIDAYANANDA* si

- (a) no hay restricciones?
- (b) las *D* no aparecen antes de la quinta posición?
- (c) deben aparecer las vocales juntas y las *N* separadas por al menos un espacio?

Solución.

- (a) Como hay 12 letras, repartidas en 1 H, 1 R, 1 I, 2 D, 4 A, 1 Y, 2 N, entonces hay $\frac{12!}{2! \cdot 4! \cdot 2!} = 4\,989\,600$ anagramas.
- (b) Se hará por etapas.

- *Etapas 1:* seleccionar las posiciones en las que se ubicarán las D: $\binom{8}{4} = 70$.
- *Etapas 2:* colocar las letras D: 1.
- *Etapas 3:* ordenar el resto de letras: $\frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$.

Así, hay 705 600 anagramas con la condición dada.

- (c) También se realizará por etapas, tomando en consideración que las vocales forman un carácter.
- *Etapas 1:* permutar las vocales: $\frac{5!}{4!} = 5$.
- *Etapas 2:* permutar las consonantes con el carácter formado por vocales sin que las N queden juntas. Esto se calculará por complemento. Primero es necesario permutar sin restricción: $\frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$.

Ahora se determinarán todos los anagramas con las letras N juntas: $\frac{7!}{2!} = 2520$.

Por lo que se puede afirmar que en esta etapa hay 7560 anagramas.

Con esto, hay 12 600 anagramas con la condición dada.

21. De todos los anagramas de tamaño fijo n que utilizan las letras a, b, c y d (se pueden repetir y no necesariamente deben aparecer todas), ¿en cuántos aparecen exactamente r letras a , con $r \leq n$?

Solución.

Para comprender mejor este ejemplo, primero se calcularán los anagramas sin restricción.

$$\underbrace{\quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad}_{n \text{ espacios}}$$

Cada espacio tiene 4 opciones, por lo que hay 4^n anagramas sin restricción.

Cuando se incorpora la condición de tener r letras a , se resolverá por etapas.

- *Etapas 1:* seleccionar los r espacios en los que se ubicarán las a : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$.
- *Etapas 2:* colocar dichas a : 1.
- *Etapas 3:* ubicar en los lugares restantes alguna de las letras b, c o d : 3^{n-r} .

Con esto, la cantidad de anagramas con la restricción propuesta es $\frac{n! \cdot 3^{n-r}}{r! \cdot (n-r)!}$.

22. Se tiene una baraja de naípe (52 cartas: 13 espadas negras, 13 corazones rojos, 13 tréboles negros y 13 diamantes rojos). Cada grupo de 13 cartas tiene la siguiente numeración: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. Se eligen 5 cartas al azar.

- (a) ¿De cuántas maneras se puede obtener “full” (tres cartas con igual número y las otras dos con igual número)?
- (b) ¿De cuántas maneras se puede obtener “color” (todas las cartas del mismo palo)?
- (c) ¿Qué es más probable: obtener “color” u obtener “cuadra” (cuatro cartas del mismo número)?

Solución.

- (a) Como se está hablando de la composición de la mano, el orden acá es irrelevante. El ejercicio se realizará por etapas.

- *Etapas 1:* escoger un número para el trío: $\binom{13}{1} = 13$.
- *Etapas 2:* escoger 3 de los 4 palos disponibles, equivalentes a los tres números iguales: $\binom{4}{3} = 4$.
- *Etapas 3:* escoger un número para el dúo: $\binom{12}{1} = 12$.
- *Etapas 4:* escoger 2 de los 4 palos disponibles, equivalentes a los dos números iguales: $\binom{4}{2} = 6$.

Con esto, hay 3 744 maneras de obtener “full”.

- (b) Similar al anterior, el orden no importa. El ejercicio se realizará por etapas.

- *Etapas 1:* escoger un palo de los cuatro disponibles: $\binom{4}{1} = 4$.
- *Etapas 2:* escoger 5 de los 13 números disponibles: $\binom{13}{5} = 1287$.

Con esto, hay 5 148 maneras de obtener “color”.

(c) Es conocido, por el ejercicio anterior, que “color” tienen 5 148 maneras de formarse. Basta con encontrar las maneras de formar “cuadra” y comparar. Para esto, se procede por etapas.

- *Etapas 1:* escoger un número para el cuarteto: $\binom{13}{1} = 13$.

- *Etapas 2:* escoger 4 de los 4 palos disponibles, equivalentes a los cuatro números iguales: $\binom{4}{4} = 1$.

- *Etapas 3:* escoger un número de las cartas restantes: $\binom{48}{1} = 48$.

Con esto, hay 624 maneras de obtener “cuadra”.

Finalmente como la probabilidad de obtener “color” es $\frac{5148}{\binom{52}{5}}$, y la probabilidad de obtener “cuadra” es $\frac{624}{\binom{52}{5}}$,

entonces es más probable obtener “color” en una mano de 5 cartas.

23. Se tienen 6 regalos idénticos que se van a entregar, de forma aleatoria, a Mario, Luis, Pedro, Lucía, Andrés, Ana, Beatriz y Miguel. ¿De cuántas maneras se pueden entregar los regalos si:

- (a) no hay restricciones?
- (b) Pedro o Miguel reciben al menos un regalo?
- (c) Lucía solo puede recibir un regalo?

Solución.

- (a) Hay 1 716 maneras distintas de hacer la repartición.
- (b) Hay 1254 maneras de repartir los regalos, si a Pedro o a Miguel le corresponde al menos un regalo.
- (c) Hay 462 maneras de repartir los regalos, donde a Lucía le corresponde exactamente un regalo.

24. En una clase hay 7 mujeres y 4 hombres. Si se quiere formar un grupo de tres personas, determine el total de formas de elegirlos si:

- (a) no hay restricciones.
- (b) debe haber al menos una mujer y al menos un hombre.
- (c) se sabe que hay una pareja de hermanos en la clase, y se deben escoger juntos o no se escoge ninguno.

Solución.

- (a) Hay 165 maneras distintas de formar un grupo de tres personas.
- (b) Hay 126 maneras de formar un grupo de tres personas con al menos una mujer y al menos un hombre.
- (c) Hay 93 maneras de formar un grupo de tres personas con las condiciones propuestas.

25. Se van a rifar 7 libros distintos entre 5 niños. ¿De cuántas formas se pueden entregar los libros si cada niño recibe al menos uno?

Solución.

Hay 29 400 maneras distintas de hacer la repartición, con las condiciones propuestas.

26. Suponga que se tienen 8 bloques etiquetados E_1, E_2, \dots, E_8 , y se colocan en una bolsa para extraerlos uno a uno, de forma aleatoria, y se ordenan. Determine:

- (a) el total de formas en las cuales los bloques etiquetados con un número par quedan en las posiciones impares.
- (b) la probabilidad del evento anterior.

Solución.

- (a) Hay 576 maneras de hacer el ordenamiento solicitado.

- (b) La probabilidad solicitada es $\frac{576}{40320} = \frac{1}{70} \approx 0.014$.

27. Una empresa está compuesta por 30 hombres y 20 mujeres. Si se debe elegir 5 personas al azar para que conformen una delegación que asistirá a una actividad, ¿de cuántas maneras se pueden conformar la delegación si deben haber
- (a) ninguna restricción?
 - (b) 3 mujeres?
 - (c) a lo sumo 4 mujeres?

Solución.

- (a) Hay 2 118 760 maneras distintas de formar la delegación.
 - (b) Hay 495 900 maneras de formar la delegación con exactamente 3 mujeres.
 - (c) Hay 2 103 256 formas distintas de formar la delegación donde hay a lo sumo 4 mujeres.
28. Se tiene una baraja de naipes (52 cartas: 13 espadas, 13 corazones, 13 tréboles, 13 diamantes, cada grupo tiene la siguiente numeración: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K). Se eligen cinco cartas, de cuántas maneras se pueden obtener
- (a) 3 ases.
 - (b) exactamente 2 corazones y 2 diamantes.
 - (c) al menos 3 corazones.
 - (d) exactamente 2 pares de cartas con igual número y una carta con número distinto a las demás.
 - (e) exactamente 2 nueves y al menos 3 tréboles.
 - (f) todas las cartas con número distinto.

Solución.

- (a) Hay 4 512 maneras distintas de sacar las 5 cartas, donde 3 son ases.
- (b) Hay 158 184 maneras distintas de sacar las 5 cartas, donde hay exactamente 2 corazones y 2 diamantes.
- (c) Hay 241 098 maneras distintas de sacar las 5 cartas, donde hay al menos 3 corazones.
- (d) Hay 247 728 maneras distintas de sacar las 5 cartas, donde hay exactamente 2 pares de cartas con igual número y una carta con número distinto a las demás.
- (e) Hay 29 208 maneras distintas de sacar las 5 cartas, donde hay exactamente 2 nueves y al menos 3 tréboles.
- (f) Hay 1 317 888 maneras distintas de sacar las 5 cartas, donde todas son de número distinto.

29. Considere la palabra “*ARQUITECTURA*”. ¿Cuántos anagramas de esta palabra existen si

- (a) no hay restricciones?
- (b) deben comenzar con *Q* o *C*, y las letras *I*, *A* aparecen juntas en cualquier orden?
- (c) las *T* no están juntas?
- (d) la primera *A* esta después de la quinta posición.

Solución.

- (a) Hay 29 937 600 anagramas.
- (b) Hay 814 400 anagramas con al condición impuesta.
- (c) Hay 9 525 600 anagramas con al condición impuesta.

30. Considere la palabra “*PRINCIPIO*”. ¿Cuántos anagramas de esta palabra existen si

- (a) no hay restricciones?
- (b) deben comenzar en *R* y además, las letras: *C*, *O*, *R* y *N* deben ir juntas en cualquier orden?

Solución.

- (a) Hay 30 240 anagramas.
- (b) Hay 60 anagramas.

31. Don Juan dejo como herencia a sus tres hijos: Jorge, Karla y Anthony, cinco quintas distintas y seis automóviles idénticos. Don Juan, en su testamento, dejó escrito que deseaba que Jorge, su hijo menor, recibiera 2 quintas y por lo menos dos automóviles, sin embargo, dichos bienes debían ser distribuidos al azar. ¿De cuantas maneras se pueden distribuir los bienes si

- (a) no hay restricciones?
- (b) se desea cumplir la voluntad de don Juan?
- (c) Jorge recibirá por lo menos 3 quintas?
- (d) cada uno recibirá al menos una quinta y al menos un automóvil?

Solución.

- (a) Hay 6 804 maneras de repartir la herencia.
- (b) Hay 1 200 maneras de repartir la herencia.
- (c) Hay 1 428 maneras de realizar la repartición.
- (d) Hay 5 400 maneras de repartir los bienes.

32. Se distribuyen 10 entradas generales a un concierto entre María, Ana y Melissa. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las entradas si a Melissa le corresponden a lo sumo 4 entradas?

Solución.

Hay 45 maneras de hacer la repartición.

33. En una fiesta hay 20 personas.

- (a) Se desea elegir a al menos tres personas para que realizar una actividad. ¿Cuántas maneras hay de elegir las personas?
- (b) ¿Cuántas maneras hay de elegir un número par de personas?

Solución.

- (a) Hay 1 048 365 maneras de elegir el grupo.
- (b) Hay 524 288 maneras de realizar los grupos.

34. Entre Ana, Juan y Melissa quieren comprar en Golfito 10 pares de tenis (de 10 marcas diferentes) y 12 tarros de frutas (todos iguales). ¿De cuántas maneras se pueden comprar los comestibles si a Ana le corresponden exactamente 5 tarros de frutas, a Juan 4 o 5 sardinas y a Melissa al menos 3 tarros de frutas?

Solución.

35. El colegio *X* tiene 10 secciones de décimo. De cada grupo se han pre-seleccionado los 10 mejores promedios. De los estudiantes pre-seleccionados, se elegirán al azar 35 estudiantes para que representen al colegio en un concurso intercolegial. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los estudiantes, si se quiere escoger todos los estudiantes pre-seleccionados de una misma sección, por lo menos?

Solución.

36. En el concurso *GANE PREMIOS* Rebeca, Fabiola y Victor son los ganadores de este mes. Entre estos ganadores se distribuirán 7 libros (todos distintos) y 10 entradas generales al próximo partido de la Selección Nacional. Suponga que los premios se distribuyen al azar.

- (a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a cada ganador le corresponde al menos 2 entradas y al menos dos libros?
- (b) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a Rebeca le correspondan al menos 2 libros y a lo sumo 5 entradas?

Solución.

37. El restaurante *Mc Fast* tiene 8 sucursales en la ciudad Alto, cada una con 12 empleados. Para motivar a sus empleados a decidido elegir 50 empleados al azar para regalarles una entrada a un concierto. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los empleados de forma que no se elijan a todos los empleados de una misma sucursal?

Solución.

38. Entre Karla, Juan y Viviana se compraron 12 lapiceros azules marca M y 6 pilot de diferentes colores. Suponga que los objetos se distribuyen al azar entre los tres.

- (a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir los objetos comprados si a Karla le corresponde exactamente 3 pilot y a lo sumo 7 lapiceros?
- (b) ¿Cuántas maneras hay de que cada uno recibirá al menos un lapicero y al menos un pilot, y a Juan le corresponda al menos 3 pilot?

Solución.

39. Un edificio tienen n pisos, y posee un ascensor. Suponga que:

- En el primer piso se suben $n + 1$ personas al ascensor.
- En el segundo piso se bajan 2 personas y no ingresan más personas al ascensor.
- En cada uno de los pisos siguientes se baja al menos una persona y no ingresan más personas al ascensor.
- En el último piso se bajan las personas que quedan en el ascensor.

¿De cuántas maneras se pueden bajar las personas del ascensor?

Solución.

Hay $\frac{(n+1)! \cdot (n-2)}{4}$ maneras en las que se pueden bajar las personas del ascensor.

40. Considere $m > 4$. Determine el total de maneras de distribuir $3m + 4$ objetos idénticos en 4 cajas distintas, con a lo sumo m objetos por caja.

Solución.

Hay $\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$ maneras de distribuir $3m + 4$ objetos idénticos en 4 cajas distintas, con a lo sumo m objetos por caja.