Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

II Semestre, 2023
Tiempo: 2 horas y 20 minutos
Puntaje total: 33 pts

Tercer Examen Parcial Extraordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **7** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.

2. Tiene **dos horas y veinte minutos** para contestar las preguntas del examen.

3. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.

4. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Determine el valor de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{-3n-1}}{3^{n-2}}$. **[3 puntos]**

   Solución:

   $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{-3n-1}}{3^{n-2}} = \cdots = \frac{-9}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{24}\right)^n$. Luego como $\mid \frac{-1}{24} \mid < 1$ por criterio de serie geométrica dicha serie es convergente.

   Por otro lado, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{-3n-1}}{3^{n-2}} = \frac{-9}{2} \cdot \frac{\left(\frac{-1}{24}\right)^2}{1+\frac{1}{24}} =$

2. Cálcule el valor de la suma de la serie $N = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{2}\right)}$. Si se sabe que $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{2}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{(n+2)!}{2^{n+1}}$ es válida para todo $n \geq 1$. **[4 puntos]**

   Solución:

   Note $N = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$. Dicha serie es telescópica y como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0$, se tiene que por criterio de serie telescópica es convergente y converge a 2.

3. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ **[4 puntos]**

   Solución:

   Sea $f(x) = x^2 e^{-x^3}$ con $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, de donde $f'(x) = \dfrac{2x - 3x^3}{e^{x^3}}$ y cumple ser monótona (decreciente) para todo $x > 1$. Por otro lado note que $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx = \frac{-1}{3e}$ y de esta manera por el criterio de la integral se tiene dicha serie es convergente.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n\sqrt{n}}$ **[4 puntos]**

   Solución:

   Observe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$, ambas son p-series con $p = 3 > 1$ y $p = \frac{3}{2} > 1$ respectivamente, y de esta manera por criterio de $p-$serie serían ambas convergentes y por tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n\sqrt{n}}$ es convergente.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n + 5}{4n^3 + 3n}$ **[4 puntos]**

   Solución:

   Note $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n + 5}{4n^3 + 3n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2}$. Ahora calculando $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n2^n+5}{4n^3+3n}}{\frac{2^n}{4n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 2^n + 4n^2}{4n^3 2^n + 2^n 3n} = \cdots = 1 > 0$. Luego por criterio comparación al límite la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2}$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n + 5}{4n^3 + 3n}$ tienen ambas la misma naturaleza y como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2}$ es una serie divergente por criterio de divergencia o criterio de la raíz se tiene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n + 5}{4n^3 + 3n}$ es divergente

4. Determine y justifique si la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}$ converge absolutamente o condicionalmente.

   . **[5 puntos]**

   Solución:

   Convergencia condicional

Considere $a_k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}$. Sea $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x \in [0, \infty[$.

$f'(x) = \dfrac{-1}{3}(x+1)^{\frac{-4}{3}} < 0$, para $x \geq 0$, por lo que f es decreciente y por ende $a_k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ también lo es.

Por otro lado, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = 0$, por lo que, por el crieterio de series alternadas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}$$

es convergente de esta forma converge condicionalmente.

Convergencia absoluta

Note que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}} \right\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$, la cual por criterio de la $p-$serie es divergente y por tanto $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}$ es divergente y de esta manera nuestra serie no converge absolutamente.

5. Si se sabe que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ es una serie alternada convergente a S, aproxime el valor de dicha serie con un error E_N tal que $E_N < 0{,}00001$. **[3 puntos]**

Solución:

$|S - S_N| \leq a_{N+0} = \dfrac{1}{2^N N!} < 0,00001 \Leftrightarrow 100000 < 2^N N!$. Dicha desigualdad es válida apartir de $N = 6$ y de esta manera el valor de la suma S se aproxima a $\displaystyle\sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{2^n n!} =$

6. Determine el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(2x-1)^n}{4^n}$. **[3 puntos]**

Solución:

Para la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(2x-1)^n}{4^n}$ se tiene que $a_n = \dfrac{n}{4^n}$, luego $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{\frac{n}{4^n}}{\frac{n+1}{4^{n+1}}} \right\| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{n+1} = 4$

7. Si se sabe que $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $\forall x \in]-1, 1[$. Determine la serie de Maclaurin que corresponde con la función f, donde $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$ con su respectivo intervalo de convergencia (debe analizar extremos de intervalo). **[3 puntos]**

Solución:

$\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+3x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n x^n$. Para intervalo de convergencia $-1 < 3x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$. Luego analizando los extremos del intervalo se tiene:

- $x = \dfrac{-1}{3}$: $\sum_{n=0}^{\infty} 1$, la cual diverge por criterio de divergencia.
- $x = \dfrac{1}{3}$: $\sum_{n=0}^{\infty} -1$, la cual diverge por criterio de divergencia.

Por tanto intervalo de convergencia es $\left]\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\right[$