

Tercer prueba de cátedra (Extraordinario)

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Escriba las respuesta con lapicero azul o negro, saque fotos y envíe un único archivo pdf al profesor.

1. Se lanza un dado justo n veces. Sea X el número de veces que cayó un 6.
 - a) Determine el rango de X . (1 pt)
 - b) Determine la función de densidad de probabilidad f_X . (3 pts)
 - c) Se piensa en un juego, el cual se gana si al realizar los n lanzamientos se obtiene exactamente un 6, y se pierde si no se obtiene ningún 6 (en el resto de casos no se gana ni se pierde). Determine n de manera que la probabilidad de ganar sea igual a la probabilidad de perder. (3 pts)
2. En un recipiente hay 8 bolas, de las cuales 3 son blancas y el resto negras. Un juego, el cual cuesta 2000 colones, consiste en sacar primero, y sin reemplazo, tres bolas de manera aleatoria. Luego, de las que quedan, se extrae también de manera aleatoria un número de bolas igual al número de bolas negras obtenidas en la primera extracción. Del total de bolas extraídas, se gana 1000 colones por cada bola blanca. Si X representa el número de bolas blancas extraídas, la función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria discreta X está dada por:
$$f_X(n) = \begin{cases} -\frac{13}{28}n^2 + \frac{51}{28}n - \frac{8}{7} & n \in R_X \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
 - a) Justifique por qué $R_X = \{1, 2, 3\}$. (2 pts)
 - b) Determine la función de distribución F_X . (3 pts)
 - c) Determine la esperanza de X . (3 pts)
 - d) Determine la cantidad que se espera se gane en cada juego. (2 pts)
3. Cada vez que juegan en contra, el número de goles que anotan el equipo A y el equipo B sigue una distribución de Poisson con medias 3 y 2 respectivamente. Determine la probabilidad de que A pierda el partido, dado que B anote dos goles. (4 pts)
4. Muestre que $E([X - a]^2) = Var(X) + [E(X) - a]^2$. (3 pts)

5. En un banco, cada año escogen a 20 de los mejores concursantes, de los cuales 7 son mujeres y el resto hombres. De ellos se seleccionan al azar 8 para trabajar en San José, y el resto se reparte en otras sucursales. Una auditoría externa ha comenzado un estudio de equidad de género en las oficinas de la capital, y considera que existe una política injusta si de los funcionarios nuevos, a lo sumo la cuarta parte son mujeres; y si ello ocurre durante 3 años consecutivos, realiza una denuncia formal.
- a) Determine la probabilidad de que en un año el banco seleccione más de 2 mujeres, de las 8 personas seleccionadas para trabajar en San José. (3 pts)
- b) Determine la probabilidad de que el banco pueda ser denunciado. (3 pts)
6. Un profesor ha determinado que la probabilidad de que un estudiante responda cierta pregunta es de 0,3, lo cual se lo hizo saber a los estudiantes. Dicha pregunta se coloca en un examen a un grupo de 10 estudiantes, y ofrece anularla en caso de que menos de 3 estudiantes la hayan respondido de manera correcta. Regina puede contestar la pregunta de manera correcta, pero 2 de sus compañeros le han hecho señas de que no la saben hacer, así que le piden que la conteste mal. Del resto no sabe nada. Quiere ayudar a sus compañeros, pero tiene miedo de que al menos 3 de los otros compañeros respondan la pregunta de manera correcta.
- a) Si ella responde la pregunta de manera correcta, determine la probabilidad de que la pregunta se anule. (3 pts)
- b) Si ella responde la pregunta de manera incorrecta, determine la probabilidad de que la pregunta no se anule. (3 pts)
- c) ¿Qué haría usted en el caso de Regina? Justifique. (1 pt)