1. Demuestre utilizando el Principio de Inducción Matemática que $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$, para todo entero $n \geq 1$. (4 pts)

$n = 1 \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$n = p \qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2p+3}{2^p}$, Hi

$n = p+1 \qquad \sum_{k=1}^{p+1} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2p+5}{2^{p+1}}$, HQD

Demo

$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{2k-1}{2^k}$

$\sum_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2^k} + \frac{2p+1}{2^{p+1}}$

$3 - \frac{2p+3}{2^p} + \frac{2p+1}{2^{p+1}}$, Hi

$3 + \frac{2p+1}{2^{p+1}} - \frac{2p+3}{2^p}$

$3 + \frac{2p+1-4p-6}{2^{p+1}}$

$\boxed{3 - \frac{2p+5}{2^{p+1}}}$ //

2. Demuestre que $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ es convergente y determine su valor de convergencia. (4 pts)

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$1 = A(n+1) + B(n)$

$n = 0 \rightarrow 1 = A \rightarrow A = 1$

$n = -1 \rightarrow 1 = -B \rightarrow B = -1$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=5}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$$

$$\frac{1}{5}-\lim_{n\to+\infty}\cancel{\frac{1}{n+1}}=0$$

$$\frac{1}{5}$$

$\boxed{\text{Converge a } \frac{1}{5}}$

3. Para cada una de las series siguientes, determine si es convergente o si es divergente. Debe indicar, respectivamente, los criterios que utiliza para el estudio correspondiente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ (4 pts)

Por crit de cmp al lim

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}\sim\frac{2n^2}{n^{\frac{5}{2}}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\text{, p serie, } p<1$$

Diverge

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}\cdot n^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^{\frac{5}{2}}+3n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5+n^5}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cancel{n^{\frac{5}{2}}}}{\cancel{n^{\frac{5}{2}}}}=2$$

$\boxed{b_n \text{ diver } \wedge\ L\neq 0 \quad \text{Diverge}}$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2+1)+3}{3e^{2n}+n}$$

Por crit de comp direct

$$-1 \leq \operatorname{sen}(n^2+1) \leq 1$$

$$\frac{2}{3e^{2n}+n} \leq \frac{3+\operatorname{sen}(n^2+1)}{3e^{2n}+n} \leq \frac{4}{3e^{2n}+n}$$

$$\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}+n}$$

$$\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$$, Por dominancia

$$\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$$, $|r| < 1$

Converge

$$\boxed{\text{Converge}}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)]\cdot n!}{(2n+1)!}$$

Por crit de razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{[1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)]}(2n+1)]\cdot(n+1)\cdot\cancel{n!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{[1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)]}\cdot\cancel{n!}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+2n+n+1}{4n^2+4n+6n+6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2}n}{\cancel{4}n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\boxed{\text{Converge}}$$

4. Pruebe que $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ es absolutamente convergente y halle S_n que aproxime a S con error menor que 0,05 (el menor n posible de acuerdo con la teoría vista en clases). (5 pts)

$N \qquad N+1 \qquad a_{n+1}$

$4 \qquad 5 \qquad \frac{1}{5^2} < \frac{1}{20}\ (0{,}05)$

$$\sum_{x=1}^{4} \frac{(-1)^x}{x^2} = \boxed{-0{,}79}$$

5. Determine el interior del intervalo de convergencia (sin analizar extremos) de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n\,(x-1)^n}{3^{2n}\cdot n^n}$$

Por criterio de raiz

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+2)^n (x-1)^n}{9^n \cdot n^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[\cancel{n}]{(n+2)^{\cancel{n}}} \cdot \sqrt[\cancel{n}]{(x-1)^{\cancel{n}}}}{\sqrt[\cancel{n}]{9^{\cancel{n}}} \cdot \sqrt[\cancel{n}]{n^{\cancel{n}}}}$$

$$|x-1| \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{9n}$$

$$|x-1| \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{9\cancel{n}} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9}|x-1| < 1$$

$$|x-1| < 9$$

$$-9 < x-1 < 9$$

$$-8 < x < 10$$

$$\boxed{I = x \in]-8, 10[}$$