

1. Considere la siguiente igualdad:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n - 1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

a) Demuestre, usando inducción matemática que dicha igualdad es válida para toda $n \geq 1$.

$$h=1 \quad S = S \checkmark$$

$$h=p \quad 1 \cdot 5^1 \cdot 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + p \cdot 5^p = \frac{S + (4p-1) \cdot 5^{p+1}}{16}, \text{ Hi}$$

$$h=p \quad 1 \cdot 5^1 \cdot 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + p \cdot 5^p + (p+1) \cdot 5^{p+1} = \frac{S + (4p+3) \cdot 5^{p+2}}{16}, \text{ HQD}$$

De modo

$$1 \cdot 5^1 \cdot 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + p \cdot 5^p + (p+1) \cdot 5^{p+1}$$

$$\frac{S + (4p-1) \cdot 5^{p+1}}{16} + (p+1) \cdot 5^{p+1}, \text{ Hi}$$

$$S + (4p-1) \cdot 5^{p+1} + 16(p+1) \cdot 5^{p+1}$$

16

$$S + 5^{p+1} (4p-1 + 16p + 16)$$

16

$$S + 5^{p+1} (20p + 15)$$

16

$$S + 5^{p+1} (5(4p + 3))$$

16

$$\boxed{S + 5^{p+1} (5(4p + 3))}$$

16

b) Si $\{S_n\} = \left\{ \frac{5 + (4n - 1) \cdot 5^{n+1}}{16} \right\}$ corresponde a la sucesión de sumas parciales asociada

a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 5^k$, determine si dicha serie converge o diverge.

(2 puntos)

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} S + (4h-1) \cdot 5^{h+1} = +\infty$$

$\rightarrow +\infty$

16

Número

2. Determine todos los valores de b para que de la serie $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{n}{b^n} - \frac{n+1}{b^{n+1}} \right)$ converja y su suma

Sea S

b^5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{b^{n+1}} = 0$$

$$\frac{S}{b^5} > 1$$

3. Determine el intervalo de convergencia (NO incluya el análisis de los extremos) de la serie siguiente. (4 puntos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (n+2)! \cdot (x-3)^n}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}$$

Por criterio de Raabe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \cdot (n+2)(n+1) \cdots (x-3)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)(3n+5)} = \frac{4^n \cdot (n+2) \cdots (x-3)}{3}$$

$$|x-3| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^{n+1}}{3^{n+5}}$$

$$|x-3| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{3^n} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} |x-3| \leq 1$$

$$|x-3| \leq \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4} \leq x-3 \leq \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{4} \leq x \leq \frac{15}{4}$$

$$I = x \in \left[\frac{9}{4}, \frac{15}{4} \right]$$

4. Determine si cada una de las siguientes series convergen o divergen. Debe indicar los criterios aplicados en cada caso.

a) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\arctan k + 4}{(k-4)^2}$ (4 puntos)

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \arctan(k) \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} + 4 &\leq \arctan(k) + 4 \leq \frac{\pi}{2} + 4 \\ \frac{1}{(k-4)^2} &\leq \frac{1}{(k-4)^2} + 4 \leq \frac{1}{(k-4)^2} + \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} + 4 \leq \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-4)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} + 4 \leq \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \text{ por criterio } p = 2 > 1$$

∴ Converge

Original converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ (4 puntos)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|2 + \frac{1}{n}\right|^n} = \sqrt[e]{2^e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{n}} = e^2 > 1$$

∴ Diverge

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^3 + 1} - \frac{1}{3^{-n+4}} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^3 + 1}$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h^2}{h^3 + 1} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \sum_{h=1}^{\infty} h \\ \hline h=1 \end{array} \right. \quad \text{diverge}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

$$F(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - x^2(3x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x - x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$

Converge

Original | Diverge

5. Si la función $f : [2, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ es continua, positiva y decreciente, determine si la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k(\ln k)^2}$ diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente. (4 puntos)

Por criterio de integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x)} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right.$$

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$$

$$= \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x(x)| = |x|$$

$$\frac{1}{|x|}$$

Converge absolutamente

6. Asuma que la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^k}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$ es convergente. Determine el menor valor para n de manera que S_n aproxime a S con un error menor a 10^{-6} . (3 puntos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} \right| < 10^{-6}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x \cdot 4^x}{(2x+1) \cdot (2x+1)!} = [-0,1472935]$$