INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA 3405 ESTADÍSTICA

TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS 15 MINUTOS
PUNTAJE MÁXIMO: 35 PUNTOS
I SEMESTRE 2023

II Examen Parcial

Instrucciones:
Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Puede hacer uso de las fórmulas oficiales de la cátedra únicamente. No se permite el uso de calculadora programable. Se permite el uso discrecional de dispositivos electrónicos para la consulta de la aplicación *Probability Distributions* según las disposiciones comunicadas con anterioridad por la coordinación de la cátedra. Considere, de ser necesario, que las poblaciones involucradas en esta prueba siguen una distribución **normal**.

---

1. [**5 puntos**] Una variable aleatoria X se define como la estatura en metros de los habitantes adultos de una ciudad costarricense. Para realizar un estudio en esta ciudad se desea determinar si se puede suponer que la variable X sigue una distribución normal con media 1.76 metros y desviación estándar 0.1 metros, por lo que realizó un muestreo y se obtuvieron los siguientes datos

Estatura	**Frecuencia**
$x < 1.45$	2
$1.45 \leq x < 1.55$	4
$1.55 \leq x < 1.65$	41
$1.65 \leq x < 1.75$	110
$1.75 \leq x < 1.85$	121
$1.85 \leq x < 1.95$	48
$1.95 \leq x$	9

¿Qué puede concluirse sobre la normalidad de la variable aleatoria X con significancia de $8\,\%$?

Solución

$H_0 : X \sim N(1.76, 0.1^2)$
$H_1 : X \nsim N(1.76, 0.1^2)$

Debe notarse que $n = 335$, con esto

X	o_i	e_i
$x < 1.45$	2	0.32428
$1.45 \leq x < 1.55$	4	5.66016
$1.55 \leq x < 1.65$	41	39.46367
$1.65 \leq x < 1.75$	110	108.71152
$1.75 \leq x < 1.85$	121	119.18228
$1.85 \leq x < 1.95$	48	52.039905
$1.95 \leq x$	9	9.620195

Luego de un pequeño ajuste se tiene

X	o_i	e_i
$x < 1.55$	6	5.98444
$1.55 \leq x < 1.65$	41	39.46367
$1.65 \leq x < 1.75$	110	108.71152
$1.75 \leq x < 1.85$	121	119.18228
$1.85 \leq x < 1.95$	48	52.039905
$1.95 \leq x$	9	9.620195

El valor crítico es $\chi_c^2 = \cancel{1.439}$ 9.836591 y como $\chi_{obs}^2 = 0.4564489476$, H_0 se tolera. Por tanto, puede suponerse que $X \sim N(1.76, 0.1^2)$ con una significancia de 8 %.

2. **[5 puntos]** En medios de comunicación masiva se ha argumentado que menos del 15 % de los costarricenses tienen una valoración positiva sobre el trabajo realizado por los diputados de la Asamblea Legislativa. En un programa en vivo se consultó a una muestra de 20 costarricenses de los cuales únicamente 2 catalogaron como positivo el accionar de los diputados. ¿Muestran estos datos evidencia a favor del argumento de los medios de comunicación?

Solución

$H_0 : p = 0.15$
$H_1 : p < 0.15$

Nótese que $np_0 = 20 \cdot 0.15 = 3 < 5$, por lo que debe usarse la distribución binomial.

$$P = P(P \leq 0.1 | p = 0.15) = P\left(nP \leq 2 | p = 0.15\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} \cdot 0.15^i \cdot 0.85^{20-i} \approx 0.404896$$

La hipótesis nula se tolera. Los datos no muestran evidencia significativa a favor del argumento de los medios de comunicación.

3. Los siguientes datos corresponden a los tiempos en minutos de una muestra aleatoria de nuevos dispositivos de las computadoras *Peach* sometidos a calentamiento extremo hasta que se destruyen: 19, 10, 7, 6, 6, 4, 16, 11, 10, 9, 6, 5, 8, 5, 7, 12, 18

   a) **[5 puntos]** La empresa fabricante afirma que el tiempo de resistencia media de sus dispositivos es de al menos 10 minutos. Para verificar esta información se realizó una prueba de hipótesis y se determinó que la zona de rechazo para el estadístico tiempo medio de resistencia ($\overline{X}$) es $]-\infty,\ 6.868914656[$. Determine la significancia utilizada.

   Solución
   $H_0 : \mu = 10\ (\geq)$
   $H_1 : \mu < 10$

   Se tiene que $n = 17$, $\overline{x} = 9.352941176$ y $s = 4.581773353$.

   $$t_{\alpha,16} = t_c = \frac{(6.868914656 - 10)\sqrt{17}}{4.581773353} = -2.817641686 \Rightarrow \alpha = 0.006191.$$

   Con esto, la significancia utilizada fue aproximadamente 0.62 %. $\rfloor\rfloor$

   b) **[5 puntos]** La empresa de computadoras *Peach* necesita tener certeza de que la resistencia de estos dispositivos es similar entre ellos. Se ha establecido como criterio que la desviación estándar de tiempos de resistencia (σ_X) debe ser a lo sumo 3.5 minutos. Según los datos de la muestra, ¿puede concluirse que los dispositivos tienen una resistencia similar?

   Solución
   $H_0 : \sigma_X = 3.5\ (\leq)$
   $H_1 : \sigma_X > 3.5$

   Como no se nos da significancia, procedemos por valor P

   $$P = P(\chi^2 > \chi^2_{obs}) = P\left(\chi^2 > \frac{16 \cdot 4.581773353^2}{3.5^2}\right), v = 16$$

   $$= P\left(\chi^2 > 27.41896759\right), v = 16$$

   $$\approx 0.037055$$

   La hipótesis nula se rechaza. En conclusión, los dispositivos no satisfacen el criterio de resistencia establecido. $\rfloor\rfloor$

4. En una expoAuto se argumentó que el modelo 2022 del automóvil *PRtric* tiene un rendimiento promedio mayor en por lo menos 45 Km que el modelo del año anterior. En la expoAuto 2023 se presentan los datos de algunos automóviles escogidos de manera aleatoria, como evidencias de la mejora en la autonomía del modelo *PRtric* 2022.

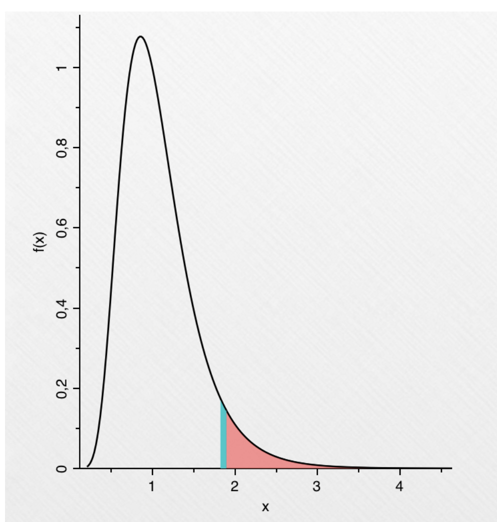
	n	$\overline{x}$ (km por carga)	s (km por carga)
2021	24	340	3.1
2022	28	380	2.6

a) [**5 puntos**] Mediante una prueba de hipótesis verifique que, con una significancia del 6 %, las varianzas poblacionales sobre el rendimiento de los automóviles modelos 2021 y 2022 pueden suponerse iguales. Justifique.

Solución

Llamaremos σ_1 y σ_2 a las desviaciones estándar de los kilómetros recorridos por carga del modelo 2021 y 2022, respectivamente.

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
$H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$



$f_c = f_{0.94,23,27} = 1.860681$

Luego, $f_{obs} = \dfrac{3.1^2}{2.6^2} = \dfrac{961}{676} \approx 1.421597633$

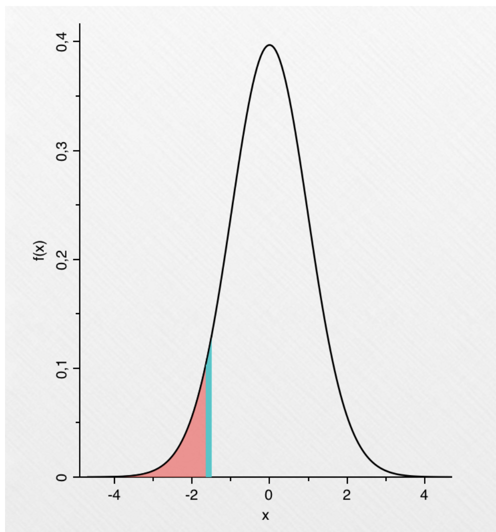
La hipótesis nula se tolera, es decir las varianzas poblacionales sobre el rendimiento de los automóviles modelos 2021 y 2022 pueden suponerse iguales.

b) **[5 puntos]** ¿Respaldan los datos la afirmación sobre el rendimiento medio de los modelos de *PRtric* con una significancia del 6 %?

Solución

Siguiendo la misma línea llamaremos μ_1 y μ_2 a los rendimientos promedio por carga del modelo 2021 y 2022, respectivamente.

$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 45 \ (\geq)$
$H_1 : \mu_2 - \mu_1 < 45$



$$t_c = t_{0.06,50} = -1.581805 \qquad sp^2 = \frac{23 \cdot 3.1^2 + 27 \cdot 2.6^2}{50} = \frac{8071}{1000}$$

$$t_{obs} = \frac{40 - 45}{\sqrt{\dfrac{8071}{24000} + \dfrac{8071}{28000}}} \approx -6.3268756$$

La hipótesis nula se rechaza. Con esto, los datos no respaldan la afirmación sobre el rendimiento medio de los automóviles.

5. Un estudio sobre preferencia de plataformas de streaming *Retflix* y *Bisney +* pretende determinar si existe relación con la edad de los consumidores. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos en una muestra aleatoria.

	Niños	**Jóvenes**	**Adultos**
Retflix	8	x	34
Bisney +	5	24	25

a) **[3 puntos]** Si en una prueba de independencia se determinó que el valor esperado correspondiente a x es 19.34545455, calcule el valor de x.

Solución

Con las condiciones dadas debe cumplirse que $19.34545455 = \dfrac{(x+24)(x+42)}{96+x}$, de donde se sigue que $x = 14$. $\rfloor\rfloor$

b) **[2 puntos]** Dado que $\chi^2_{obs} = 4.661945498$, determine el mínimo valor de significancia para el cual se puede concluir que la preferencia de plataformas de streaming *Retflix* y *Bisney +* depende de la edad de los consumidores.

Solución

H_0 : Las variables son independientes
H_1 : Las variables NO son independientes

Se tiene que $\chi^2_{obs} = 4.661945498$ y $v = 2$, por tanto $\alpha \geq 0.097201$. Es interesante anotar que este resultado está ligado a la interpretación del valor P de la prueba.. $\rfloor\rfloor$