Variables aleatorias discretas

Variables que se pueden contar 10√
10.2 X

Definición informal

Se dice que X es una variable aleatoria discreta si X es una variable aleatoria cuyo rango es finito o infinito numerable.

Definición formal

$\Omega = 1$

Se dice que X es una variable aleatoria discreta con espacio muestral Ω y sea P una probabilidad sobre Ω. La función $f_X : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_X(m) = P(X = m)$ es llamada la **función de distribución de probabilidad** o **función de densidad**.

Función de distribución

- **Condiciones de la función de distribución**

  Sea X una variable aleatoria discreta con función de distribución de probabilidad f_X, entonces, se cumple que:

  1. $f_X(m) \geq 0$, para todo $m \in R_X$
  2. $\sum_{m \in R_X} f_X(m) = 1$ ← Igualar a 1

  Nota: *cuando la variable aleatoria discreta tiene rango infinito, se procede a resolver una serie geométrica, telescópica o exponencial según corresponda, tomando en cuenta lo siguiente:*

- **Serie geométrica**

  Una serie geométrica con razón r es de la forma:

  $$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

  donde r un número real.
  Dicha serie converge a $\frac{r^p}{1-r}$ si y solo si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$

  Ahora bien, la función de distribución acumulada de la serie geométrica viene dada por:

  $$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

  donde r un número real.

- **Serie telescópica**

  Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es telescópica si existe una sucesión $\{b_n\}$ tal que $a_n = b_n - b_{n+1}$, es decir:

  $$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{n=p}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

  La serie converge a $b_p - \lim_{k \to +\infty} b_{k+1}$ si $\lim_{k \to +\infty} b_{k+1}$ existe y diverge si $\lim_{k \to +\infty} b_{k+1}$ no existe.

  Casi no se usa

- **Serie exponencial**

  Una serie exponencial es de la forma:

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  la cual converge a e^x.

Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta y f_X una ley de probabilidad para X. Se dice que $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función de distribución acumulada** o **función de masa** para X si:

$$F_X(m) = \sum_{\substack{k \in R_X \\ k \le m}} f_X(k) = P(X \le m)$$

Aqui no se iguala a 1

- **Características**

Sea X una variable aleatoria discreta y F_X la función de distribución acumulada de probabilidad de X, entonces se cumple que:

1. $F_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. F_X es creciente.
3. $P(X > m) = 1 - F_X(m)$, para $m \in \mathbb{R}$
4. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$
5. $f_X(x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$, $\forall x_n \in R_X$ que no sea el mínimo de R_X
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

Termina en ∞

Empieza en 0

Determine el valor de k para que f_X sea función de probabilidad. R/ $k = \frac{1}{e^2}$

Escribir como una suma e igualar a 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + k \, \frac{1}{2} \sum^{\infty} \frac{}{x!} \cdot \frac{2^x}{x!} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{1 - \frac{1}{2}} + k \cdot \frac{1}{2} \cdot e^2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{k \cdot e^2}{2} = 1$$

$$\frac{1 + k \cdot e^2}{2} = 1$$

$$1 + k \cdot e^2 = 2$$

$$k \cdot e^2 = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{e^2}}$$

Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = \frac{x}{6^{2k-1}}, \text{ con } k = 2, 3, 4, \ldots \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

a) Determine el valor de x — R/ $c = 210$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x}{6^{2k-1}} = 1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x}{36^k \cdot 6^{-1}} = 1$$

$$6x \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{36}\right)^k = 1$$

$$6x \cdot \frac{\left(\frac{1}{36}\right)^2}{1-\frac{1}{36}} = 1$$

$$6x \cdot \frac{1}{1260} = 1$$

$$6x = 1260$$

$$\boxed{x = 210}$$

$f_X(k) = \frac{x}{6^{2k-1}}$, con $k = 2, 3, 4, \dots$ y $x \in \mathbb{R}$

b) Sea $m \in \mathbb{N}^*$, determine la función acumulada evaluada en m $\boxed{R/\ 1 - 36\left(\frac{1}{36}\right)^m}$

nota
n = entero > 0

Aquí como empieza en n y no en 0, ocupan restarse desde $n-1$ hasta 0 para hacer que empiece en 0, esto se hace al final, al tener ya la forma geometrica

Ahora bien, la función de distribución acumulada de la serie geométrica viene dada por:

$$\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

donde r un número real.

Inciso pasado $x = 210$

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{210}{6^{2n-1}}$$

Esto al final, al tener ya la forma geometrica

Aquí ya

$$210 \cdot 6 \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{36}\right)^n$$

solo a esa parte

$$1260 \left[\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{36}\right)^n - \left(\frac{1}{36}\right)^1 - \left(\frac{1}{36}\right)^0 \right]$$

en m, no en n

$$1260 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{36}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{36}} - \frac{37}{36} \right]$$

$$1260 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{36}\right)^{m+1}}{\frac{35}{36}} - \frac{37}{36} \right]$$

$$1260 \left[\frac{36}{35} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{36}\right)^{m+1} \right) - \frac{37}{36} \right]$$

$$1260\left[\frac{36}{35}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{36}\right)^{m+1}\right)-\frac{37}{36}\right]$$

$$1260\left[\frac{36}{35}-\frac{36}{35}\left(\frac{1}{36}\right)^{m}\cdot\frac{1}{\cancel{36}}-\frac{37}{36}\right]$$

$$1296-36\left(\frac{1}{36}\right)^{m}-1295$$

$$\boxed{1-36\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^{m}}$$

c) Determine $P(X>3)$ R/ $\frac{1}{1\,296}$

3. $P(X>m)=1-F_X(m)$, para $m\in\mathbb{R}$ $f_X(k)=P(X\leq m)$

Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta y f_X una ley de probabilidad para X. Se dice que $F_X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una **función de distribución acumulada** o **función de masa** para X si:

$$F_X(m)=\sum_{\substack{k\in R_X\\k\leq m}} f_X(k)=P(X\leq m)$$

$P(X\leq m)=F_X(m)$, $P(X<m)=F_X(m-1)$

entonces si piden $\boxed{P(X>m)=1-P(X\leq m)=1-F_X(m)}$

o si piden $\boxed{P(X\geq m)=1-P(X<m)=1-F_X(m-1)}$

$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$

$1-F_X(3)\leftarrow$ Acumulada del ejercicio pasado

$$1-\left(1-36\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^{m}\right)$$

$$1-\left(1-36\left(\frac{1}{36}\right)^{3}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{1296}}$$