

Consideraciones sobre la notación

Todos sumados
↓
Cantidad total

\bar{x}_1 : Media muestral población 1.

\bar{x}_2 : Media muestral población 2.

\hat{p}_1 } Proportiones
 \hat{p}_2 } muestrales

calcu todo

σ_1 : Desviación estándar poblacional población 1

σ_2 : Desviación estándar poblacional población 2.

s_1 : Desviación estándar muestral población 1.

s_2 : Desviación estándar muestral población 2.

IC dos poblaciones: Diferencia de promedios

o medias

CASO 1:

Radio

Z

Fórmula	Uso	¿Cuándo?
<u>Centro</u> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	IC: $\mu_1 - \mu_2$	\bar{x}_1, \bar{x}_2 se distribuye normalmente, $n_1, n_2 \geq 30$. σ_1, σ_2 se conocen. $0 \leq s_1 \leq S_1$ $0 \leq s_2 \leq S_2$
$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{r^2}$	Tamaño de la muestra.	\bar{x}_1, \bar{x}_2 se distribuye normalmente. σ_1, σ_2 se conocen.

Nota: si $n_1, n_2 \geq 30$ y σ_1, σ_2 NO se conocen, se puede asumir $\sigma_1^2 = s_1^2$ y $\sigma_2^2 = s_2^2$

Varianzas Poblacionales

IC dos poblaciones: Diferencia de promedios

CASO 2:

t-student

Fórmula	Uso	¿Cuándo?
$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2, v} \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}$	IC: $\mu_1 - \mu_2$ $\sigma_1 = \sigma_2$	Poblaciones normales, $n_1 < 30$ o $n_2 < 30$. σ_1 y σ_2 no se conocen, pero se asume

Con: $v = n_1 + n_2 - 2$ gl

Varianza muestral promedio $\rightarrow s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

IC dos poblaciones: Diferencia de promedios

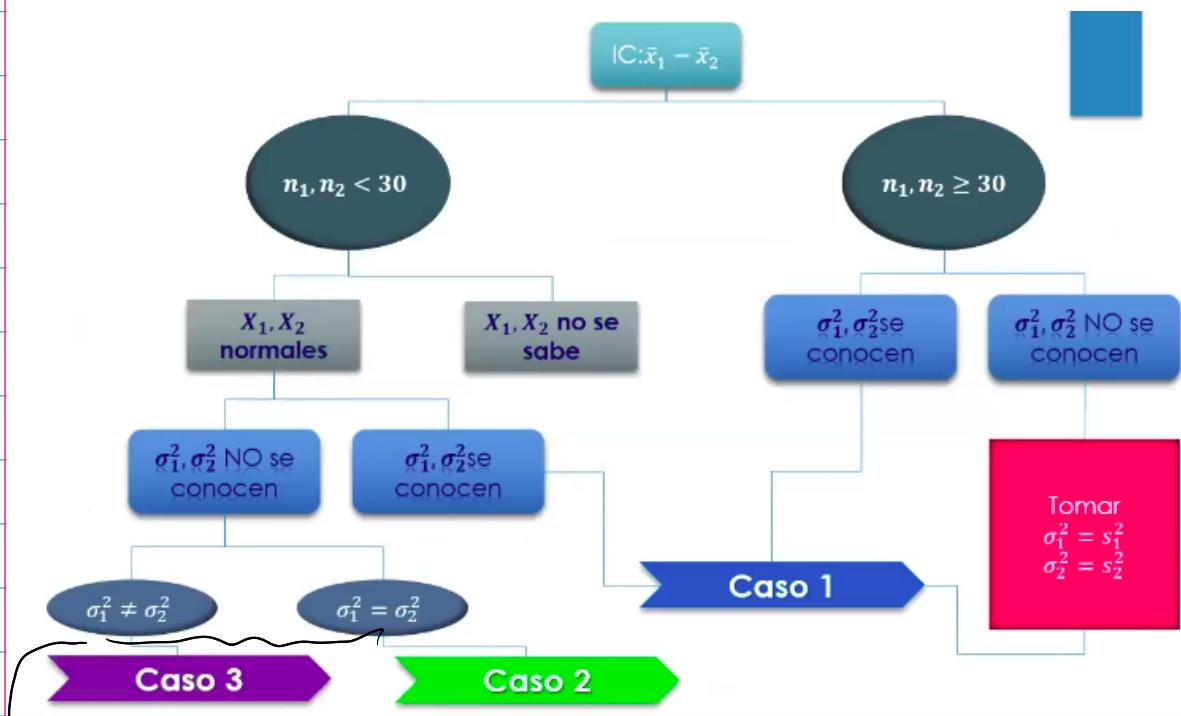
CASO 3: t -student

Se usa varianza muestra en vez de var. mues. promedio S_p

Fórmula	Uso	¿Cuándo?
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2} v \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$ Donde: $v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2)}{n_1-1} + \frac{(s_2^2)}{n_2-1}}$	$\text{IC: } \mu_1 - \mu_2$	Poblaciones normales, $n_1 < 30$ o $n_2 < 30$, σ_1 y σ_2 NO se conocen y se asume $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Esto cambia con respecto a la anterior

→ Aquí los g_i se calculan así en vez de $n-1$



Normalmente el ejercicio dile "Asuma igualdad" o "Asuma diferencia" de varianzas

Si Todo el IC So, A>B] 0.82, 30 {

Si Todo el IC Co, A<B] -3.5, -9 {

Si hay So AlCo , Nb se sube] 0, -2 {

IC para la diferencia de dos proporciones

Fórmula	Uso	¿Cuándo?
$\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{p}_1 \widehat{q}_1}{n_1} + \frac{\widehat{p}_2 \widehat{q}_2}{n_2}}$ $n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 (\widehat{p}_1 \widehat{q}_1 + \widehat{p}_2 \widehat{q}_2)}{r^2}$	IC: $p_1 - p_2$ Tamaño de la muestra para IC y radio dado.	La muestra es grande. $n_i p_i > 5 \wedge n_i q_i > 5, i = 1, 2$
$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2}{2r^2}$	Tamaño de la muestra para IC y radio dado.	Se cuenta con estimadores $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2$
		Cuando no se conoce $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2$, se asume que $\widehat{p}_1 \widehat{q}_1 = 0.25 = \widehat{p}_2 \widehat{q}_2$

IC para el cociente de dos varianzas

$F \rightarrow P(X(x))$ Siempre

Fórmula	Uso	¿Cuándo?
$\frac{s_2^2 f_{\alpha/2, v_1, v_2}}{s_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < \frac{s_2^2}{s_1^2 f_{\alpha/2, v_2, v_1}}$	IC: $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	$v_1 = n_1 - 1$ gl $v_2 = n_2 - 1$ gl
$\frac{s_1^2 f_{\alpha/2, v_2, v_1}}{s_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2 f_{\alpha/2, v_1, v_2}}$	IC: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	Poblaciones X_1, X_2 normales.

Se asumen varianzas iguales

Si $l \in IC$, diferentes si $l \notin IC$

Iguales $\rightarrow IC: [0.73, 1.73]$

Diferentes $\rightarrow IC: [0.50, 0.70]$

Varianzas iguales: Homocedasticidad, homogeneidad

Diferencia de medias

Un mismo examen se aplica a varios grupos de un curso. Para investigar la diferencia de rendimiento entre los grupos matutinos y los nocturnos se seleccionan al azar 45 estudiantes que reciben el curso en la mañana, y 38 que lo reciben en la noche. Entre los estudiantes de la mañana la nota promedio es 71.3 con una desviación estándar de 4.1, y entre los de la noche el promedio es 68.2 con una desviación estándar de 5.8. Llamemos población M al grupo de la mañana, y población N al de la noche. Como las muestras son suficientemente grandes, suponemos que las distribuciones de \bar{X}_M y \bar{X}_N son normales, y que $\sigma_M = 4.1$ y $\sigma_N = 5.8$. Determine IC de 95% para la diferencia de promedios. $R/10.9, 5.3$

$$n_1 = 45 \geq 30 \quad n_2 = 38 \geq 30$$
$$\bar{x}_1 = 71.3 \quad \bar{x}_2 = 68.2$$
$$\sigma_1 = 4.1 \quad \sigma_2 = 5.8$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow Z_{0.025} = \pm 1.95996$$

$$71.3 - 68.2 - 1.95996 \cdot \sqrt{\frac{(4.1)^2}{45} + \frac{(5.8)^2}{38}} \approx 0.901$$

$$71.3 - 68.2 + 1.95996 \cdot \sqrt{\frac{(4.1)^2}{45} + \frac{(5.8)^2}{38}} \approx 5.299$$

∴ El IC para 95% corresponde a $[0.901, 5.299]$

¿Será válido asumir que los promedios de ambos grupos son iguales?

En este caso NO se puede asumir que los promedios sean iguales, para que esto tenga sentido o validez el valor del cero debe estar dentro del IC

¿Qué podemos concluir en este caso?

Al ser ambos extremos del IC positivos, se intuye que el grupo de la mañana tiene mejor rendimiento promedio que el grupo de la noche.

Sí todo el IC es > 0, el A es más grande que el B

Diferencia de medias

En el ejemplo 10, ¿de qué tamaño deben ser las muestras para que el IC de 95% tenga radio no mayor que 2? 49 estudiantes de la mañana y 49 estudiantes de la noche

$$n_1 = 45 \geq 30 \quad \bar{x}_1 = 71,3 \quad \sigma_1 = 9,1$$
$$n_2 = 38 \geq 30 \quad \bar{x}_2 = 68,2 \quad \sigma_2 = 5,8$$

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{r^2}$$

$$\alpha = 0,05 \rightarrow z = 1,95996 \quad r = 2$$

$$n \geq \frac{(1,95996)^2 \cdot [(9,1)^2 + (5,8)^2]}{2^2}$$

$$n \geq 78,4520$$

$$n \geq 79$$

$$\boxed{n_m \geq 79 \quad \wedge \quad n_N \geq 79}$$

Se sabe que el peso de los sacos de cemento de dos marcas A y B siguen distribuciones normales con medias desconocidas y desviaciones estándar poblacionales $\sigma_A = 4\text{kg}$. y $\sigma_B = 5\text{kg}$. respectivamente. Pese a que ambas marcas reportan en sus sacos el mismo peso, un investigador piensa que los de la marca A tienen mayor peso que los de la marca B , por lo que hace un estudio tomando muestras aleatorias de ambos tipos de sacos. Según su estudio, en una muestra de 50 sacos de cemento de la marca A , se obtuvo un peso promedio de 49,8 kg; mientras que en una muestra de 40 sacos de la marca B el peso promedio fue de 47,5 kg.

a) [3 puntos] Determine un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre el peso medio de los sacos de cemento de la marca A y los de la marca B .

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$n_1 = 50 \quad n_2 = 40$$

$$\bar{x}_1 = 49,8 \quad \bar{x}_2 = 47,5 \quad z = 1,96$$

$$\sigma_1 = 4 \quad \sigma_2 = 5 \quad \frac{4^2}{50} + \frac{5^2}{40} \rightarrow 2,025 \rightarrow 2,025 = 1,95996$$

$$a = 49,8 - 47,5 - 1,95996. \sqrt{\frac{4^2}{50} + \frac{5^2}{40}} \approx 0,3947$$

$$b = 49,8 - 47,5 + 1,95996. \sqrt{\frac{4^2}{50} + \frac{5^2}{40}} \approx 7,2054$$

El IC para 95% corresponde a $[0,3947, 7,2054]$

b) [1 punto] ¿Considera usted que la evidencia respalda (con un nivel de confianza del 95%) lo que pensaba el investigador? Justifique su respuesta.

Como el IC > 0, el A pesa mas que el B, entonces, si se respalda la información del investigador

Un profesor considera que el rendimiento promedio (nota promedio) de los estudiantes de Computación en el curso de Matemática Elemental es superior en al menos 9 puntos al rendimiento promedio de los estudiantes de otras carreras. Para analizar esto se tomó una muestra de estudiantes que cursaron el curso el año pasado, obteniendo los siguientes datos:

Estudiantes	tamaño de muestra	Redimiento promedio observado (\bar{x})	Desviación estándar (s)	Poblacional
De computación:	19	78 puntos	4.3 puntos	
De otras carreras:	17	65 puntos	4.7 puntos	

Suponga que el redimiento promedio en el curso de Matemática Elemental, tanto en Computación como en otras carreras, se distribuye normalmente.

Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre los promedios de las notas de ambos tipos de estudiantes. Asuma varianzas poblacionales iguales. (5 puntos)

$$\begin{array}{lll} h_1 = 19 & h_2 = 17 & \alpha = 0.05 \\ \bar{x}_1 = 78 & \bar{x}_2 = 65 & \frac{\alpha}{2} = 0.025 \\ s_1 = 4.3 & s_2 = 4.7 & \end{array} \quad \begin{array}{l} s \rightarrow t \\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2, v} \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} \\ s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \end{array}$$

$$s_p^2 = ((19-1) \cdot (4.3)^2 + (17-1) \cdot (4.7)^2) / (19+17-2) \quad v = n_1 + n_2 - 2 = 34$$

$$s_p^2 \approx 20.1881$$

$$V = 19+17-2 = 34 \quad t_{0.025, 34} = \pm 2.03228$$

$$a = 78 - 65 - 2.03228 \cdot \sqrt{\frac{20.1881 + 20.1881}{19}} \approx 9.9579$$

$$b = 78 - 65 + 2.03228 \cdot \sqrt{\frac{20.1881 + 20.1881}{17}} \approx 16.0481$$

1/ El IC para 95% corresponde a

$$[9.9579, 16.0481]$$

Diferencia de proporciones

Para un modelo de tostadores se encontró que 31 de 126 unidades vendidas fueron devueltas durante el primer mes de uso por encontrarse defectuosas. Para otro modelo la proporción fue 17 unidades devueltas de 138 vendidas.

Encontrar un IC de 90% para la diferencia de proporciones. R/]0.04473 , 0.20095[

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \frac{31}{126} & \hat{p}_2 &= \frac{17}{138} & \gamma &= 0,10 \\ \hat{q}_1 &= \frac{95}{126} & \hat{q}_2 &= \frac{121}{138} & \alpha &= 0,05 \end{aligned}$$

$$n_1 = 126 \quad n_2 = 138 \quad Z_{0,05} = \pm 1,69985$$

$$\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{p}_1 \widehat{q}_1}{n_1} + \frac{\widehat{p}_2 \widehat{q}_2}{n_2}}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} 126 \cdot (0,246) &\geq 5 & \checkmark \\ 126 \cdot (0,754) &\geq 5 & \checkmark \\ 138 \cdot (0,1232) &\geq 5 & \checkmark \\ 138 \cdot (0,8768) &\geq 5 & \checkmark \end{aligned}$$

$$\frac{31}{126} - \frac{17}{138} - 1,69985, \sqrt{\frac{\frac{31}{126} \frac{95}{126}}{126} + \frac{\frac{17}{138} \frac{121}{138}}{138}} \approx 0,09973$$

$$\frac{31}{126} - \frac{17}{138} + 1,69985, \sqrt{\frac{\frac{31}{126} \frac{95}{126}}{126} + \frac{\frac{17}{138} \frac{121}{138}}{138}} \approx 0,20095$$

[3] El IC para 90% corresponde a]0,09973 , 0,20095[

¿Se puede asumir que las proporciones de tostadores defectuosos son iguales en ambas poblaciones?

NO se puede asumir igualdad de proporciones, puesto que el valor cero NO está en el IC.

En este caso al ser ambos extremos del IC positivos, se puede inferir que el primer grupo tiene una proporción de tostadores defectuosos mayor que el segundo grupo.

95%

Si se desea encontrar un IC de 95% para la diferencia de proporciones de tostadores devueltos entre los dos modelos, con radio no mayor que 0.05. Determine el tamaño de la muestra. R/

$$\hat{p}_1 = \frac{31}{126}$$

$$\hat{q}_1 = \frac{95}{126}$$

$$n_1 = 126$$

$$\hat{p}_2 = \frac{17}{138}$$

$$\hat{q}_2 = \frac{121}{138}$$

$$n_2 = 138$$

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 (\hat{p}_1 \hat{q}_1 + \hat{p}_2 \hat{q}_2)}{r^2}$$

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2}{2r^2}$$

Tamaño de la muestra para IC y radio dado.

Tamaño de la muestra para IC y radio dado.

Se cuenta con estimadores \hat{p}_1, \hat{p}_2

Cuando no se conoce \hat{p}_1, \hat{p}_2 , se asume que $\hat{p}_1 \hat{q}_1 = 0.25 = \hat{p}_2 \hat{q}_2$

→ Ahorí fa si

$$\alpha = 0,05 \quad r = 0,025 \quad Z_{0,025} = \pm 1,95996 \quad r = 0,05$$

$$n \geq \frac{(1,95996)^2 \cdot \left(\frac{31}{126} \cdot \frac{95}{126} + \frac{17}{138} \cdot \frac{121}{138} \right)}{(0,05)^2}$$

$$n \geq 450,9793 \rightarrow n \geq 451$$

Para abordar ambos casos

$$n \geq \frac{(1,95996)^2}{2 \cdot (0,05)^2}$$

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2}{2r^2}$$

$$n \geq 768,2886 \rightarrow n \geq 769$$

IC para el cociente de dos varianzas

$F \rightarrow P(X(x))$ Siempre comparar σ_1^2 con σ_2^2

Fórmula	Uso	¿Cuándo?
$\frac{s_1^2 f_{\alpha/2, v_1, v_2}}{s_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_2^2}{s_1^2}$	IC: $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	$v_1 = n_1 - 1$ gl $v_2 = n_2 - 1$ gl
$\frac{s_1^2 f_{\alpha/2, v_2, v_1}}{s_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}$	IC: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	Poblaciones X_1 normales. X_2

Se asumen varianzas iguales comparar σ_1^2 con σ_2^2
si $I \in IC$, diferentes si $I \notin IC$

Un mismo examen se aplica a varios grupos de un curso. Para investigar la diferencia de rendimiento entre los grupos matutinos y los nocturnos se seleccionan al azar 45 estudiantes que reciben el curso en la mañana, y 38 que lo reciben en la noche. Entre los estudiantes de la mañana la nota promedio es 71.3 con una desviación estándar de 4.1, y entre los de la noche el promedio es 68.2 con una desviación estándar de 5.8. Llamemos población M al grupo de la mañana, y población N al de la noche. Como las muestras son suficientemente grandes, suponemos que las distribuciones de \bar{X}_M y \bar{X}_N son normales, y que $\sigma_M = 4.1$ y $\sigma_N = 5.8$. Determine IC de 95% para la diferencia de promedios. $R[1.09, 5.3]$

En el ejemplo 10, ¿Cuál es un IC de 95% para el cociente de las variancias en los dos grupos? ¿Puede afirmarse que la variación en la noche es mayor que en la mañana?

$R[1.0780, 3.7798]$

Según enunciado, comparar σ_2^2 con σ_1^2

$$n_1 = 45$$

$$n_2 = 38$$

$$v_1 = 44$$

$$v_2 = 37$$

$$\sigma_1 = 4.1$$

$$\sigma_2 = 5.8$$

$$s_1 = 4.1$$

$$s_2 = 5.8$$

$$F_{0.025, 37, 44} = 0.52954$$

$$\frac{s_1^2 f_{\alpha/2, v_2, v_1}}{s_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

$$\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$F_{0.025, 44, 37} = 0.53870$$

$$a = \frac{(4.1)^2 \cdot (0.52954)^2}{(5.8)^2} \approx 0.2696$$

$$b = \frac{(4.1)^2}{(5.8)^2 \cdot (0.52954)^2} \approx 0.9276$$

El IC para 95% corresponde a $[0.2696, 0.9276]$

Análogamente, si se desea calcular el IC para

$$\frac{\sigma_N^2}{\sigma_M^2}$$

Izquierda: $f_{0.025, V_M, V_N} = f_{0.025, 44, 37} = 0.5387$

Derecha: $f_{0.025, V_N, V_M} = f_{0.025, 37, 44} = 0.52954$

$$\left[\frac{5.8^2}{4.1^2} \cdot (0.5387), \frac{5.8^2}{4.1^2} \cdot \frac{1}{0.52954} \right]$$
$$= [1.078, 3.7791]$$

