Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	03
Fecha	Lunes 12 de agosto del 2024 (semana 04)
Contenidos	a) Serie telescópica
	b) Criterio de la integral
	c) Criterio de las p-series
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2}-2\cdot 5^{k-1}}{7^{k+1}} \qquad R/\ \frac{61}{196}$$

$$\sum_{K=2}^{\infty} \frac{3^{K+2}}{7^{K+1}} - \frac{2\cdot 5^{K-1}}{7^{K+1}} = \sum_{K=2}^{\infty} \frac{3^{K+2}}{7^{K+1}} - \sum_{K=2}^{\infty} \frac{2\cdot 5^{K-1}}{7^{K+1}}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$= \sum_{K=2}^{\infty} \frac{3^K\cdot 3^2}{7^K\cdot 7^1} - \sum_{K=2}^{\infty} \frac{2\cdot 5^K \cdot 5^{-1}}{7^K\cdot 7^1}$$

$$= \frac{9}{7}\sum_{K=2}^{\infty} \frac{3^K}{7^K} - \frac{2\cdot 5^{-1}}{7}\sum_{K=2}^{\infty} \frac{5^K}{7^K}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$= \frac{9}{7}\sum_{\underbrace{K=2}_{p}}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{3}{7}}_{r}\Bigg)^K - \frac{2}{35}\sum_{\underbrace{K=2}_{p}}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{5}{7}}_{r}\Bigg)^K$$

Note que $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$ y $\left|\frac{5}{7}\right| < 1$, entonces por el CSG, la serie converge y converge a:

$$\frac{r^p}{1-r}$$

⊛ Para $\displaystyle\sum_{\underbrace{K=2}_{p}}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{3}{7}}_{r}\Bigg)^K$ ⊛ Para $\displaystyle\sum_{\underbrace{K=2}_{p}}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{5}{7}}_{r}\Bigg)^K$

Converge a $\dfrac{(3/7)^2}{1-3/7} = \dfrac{9}{28}$ Converge a $\dfrac{(5/7)^2}{1-5/7} = \dfrac{25}{14}$

Retomando  se tiene que:

$$\frac{9}{7}\sum_{\underbrace{K=2}_{p}}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)}_{r}^{K}-\frac{2}{35}\sum_{\underbrace{K=2}_{p}}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)}_{r}^{K}=\frac{9}{7}\cdot\frac{9}{28}-\frac{2}{35}\cdot\frac{25}{14}$$

$$=\frac{61}{196}$$

Criterio de la Serie Telescópica (CST)

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es telescópica si existe una sucesión $\{b_n\}$ tal que $a_n = b_n - b_{n+1}$, es decir:

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{n=p}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

La serie converge a $b_p - \lim\limits_{k\to+\infty} b_{k+1}$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} b_{k+1}$ existe y diverge si $\lim\limits_{k\to+\infty} b_{k+1}$ no existe.

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+5)}$ R/ $\dfrac{4}{15}$

Aplicando fracciones parciales, se tiene que:

$$\frac{2}{\underbrace{(2n+1)}_{-1/2}\underbrace{(2n+5)}_{-5/2}} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+5} \Rightarrow 2 = \frac{A\cancel{(2n+1)}(2n+5)}{\cancel{2n+1}} + \frac{B(2n+1)\cancel{(2n+5)}}{\cancel{2n+5}}$$

$$\Rightarrow 2 = A(2n+5) + B(2n+1)$$

* Para $n = -\frac{1}{2}$

$$2 = A\left(2\cdot -\frac{1}{2} + 5\right) + B\left(2\cdot -\frac{1}{2} + 1\right)$$

$\Rightarrow 2 = 4A + 0B$

$\Rightarrow 2 = 4A$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = A$

* Para $n = -\frac{5}{2}$

$$2 = A\left(2\cdot \frac{-5}{2} + 5\right) + B\left(2\cdot \frac{-5}{2} + 1\right)$$

$\Rightarrow 2 = 0A - 4B$

$\Rightarrow 2 = -4B$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} = B$

Así, retomando se tiene que $\displaystyle\frac{2}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1/2}{2n+1} + \frac{-1/2}{2n+5}$

$$\Rightarrow \frac{2}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+5)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

Ahora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+5)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\right)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}$$

Borrador

⊛ Para $n=1$

$$\frac{1}{2\cdot1+1} - \frac{1}{2\cdot1+5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7}$$

⊛ Para $n=2$

$$\frac{1}{2\cdot2+1} - \frac{1}{2\cdot2+5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

⊛ Para $\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ \shortparallel\\ p}}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{b_n} - \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{b_{n+1}}$

$$b_p - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$$

$$= b_1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cancel{2n+3}} \nearrow 0$$

$$= \frac{1}{2\cdot 1+1} - 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

⊛ Para $\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ \shortparallel\\ p}}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{b_n} - \underbrace{\frac{1}{2n+5}}_{b_{n+1}}$

$$b_p - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$$

$$= b_1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cancel{2n+5}} \nearrow 0$$

$$= \frac{1}{2\cdot 1+3} - 0$$

$$= \frac{1}{5}$$

Retomando se tiene que:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{4}{15}$$

La serie converge a $\frac{4}{15}$ por el CST.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ R/ $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \ln((n-1)(n+1)) - \ln(n^2)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \ln(n-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \ln(n+1) - 2\sum_{n=2}^{\infty} \ln(n)$$

$= \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ldots + \ln(3) + \ln(4) + \ldots - 2[\ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ldots +]$

$= \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ldots + \ln(3) + \ln(4) + \ldots - 2\ln(2) - 2\ln(3) - 2\ln(4) + \ldots$

$= \ln(1) + \ln(2) - 2\ln(2)$

$= \ln(1) - \ln(2)$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Criterio de la Integral (CI) o Maclaurin-Cauchy

Si f es monótona en el intervalo $[a,+\infty[$ para algún $a \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\boxed{\sum_{n=a}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}}$$

La contrapositiva también es cierta, es decir:

$$\boxed{\sum_{n=a}^{\infty} a_n \text{ diverge} \iff \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ diverge}}$$

Nota: este criterio brinda información sobre el carácter de una serie, sin embargo, si la serie es convergente, no es posible conocer el valor exacto de su suma total, es decir, solamente permite determinar si la serie converge o diverge.

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}$ R/ Converge

Sea $a_n = \dfrac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2} \Rightarrow f(n) = \dfrac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}$

* Monotonía

Sí, pues $f(n)$ es decreciente en todo su dominio.

* Convergencia o divergencia

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}\,dn = \lim_{B \to +\infty} \int_1^{B} \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}\,dn$$

Aparte:

$$\int \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}\,dn = \int \frac{e^u+6}{\cancel{1+n^2}} \cdot \cancel{(1+n^2)}\,du$$

Sea $u = \arctan(n)$

$\Rightarrow du = \dfrac{1}{1+n^2}\,dn$

$\Rightarrow (1+n^2)\,du = dn$

$$= \int e^u + 6\,du$$

$$= \int e^u\,du + \int 6\,du$$

$$= e^u + 6u$$

$$= e^{\arctan(n)} + 6\arctan(n)$$

Retomando se tiene que:

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}\,dn = \lim_{B\to+\infty} e^{\arctan(n)} + 6\arctan(n)\Big|_1^B$$

$$= \lim_{B\to+\infty} e^{\arctan(B)} + 6\arctan(B) - [e^{\arctan(1)} + 6\arctan(1)]$$

$$= e^{\arctan(+\infty)} + 6\arctan(+\infty) - e^{\pi/4} - 6\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= e^{\pi/2} + 6\frac{\pi}{2} - e^{\pi/4} - 6\frac{\pi}{4}$$

= Convergente

Finalmente como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}\,dn$ es convergente y $f(n)$ es monótona, entonces por el CI $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(n)}+6}{1+n^2}$ es convergente.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-k^2}$ R/ Converge

Serie p o Serie Hiperarmónica

La serie definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

con $p \in \mathbb{R}$ converge si y solo si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$

Nota:

Este criterio brinda información sobre el carácter de una serie, sin embargo, si la serie es convergente, no es posible conocer el valor exacto de su suma total, es decir, solamente permite determinar si la serie converge o diverge.

Serie Armónica

La serie definida por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, pues es una p-serie donde $p = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{2}}$ converge, pues $2 > 1$

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1}}$ diverge, pues $1 \leq 1$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

a) $\sum_{p=3}^{\infty} \frac{p}{p-1} - \frac{p+2}{p+1}$ R/ $\frac{5}{6}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$ R/ $\frac{5}{3}$

Ejercicio #2: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot e^{-n}$ R/ Converge

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ R/ Diverge