Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-1103: Cálculo y Álgebra Lineal

Tiempo máximo: 3 horas
Puntaje máximo: 50 puntos
II Semestre 2019

Examen por suficiencia

Lunes 12 de agosto

Indicaciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

---

1. Usando el Principio de Inducción Matemática, demuestre la igualdad **(5 pts)**

$$\sum_{j=1}^{k} (2j-1)\cdot 3^j = 3 + (k-1)\cdot 3^{k+1}, \text{ para todo entero } k \geq 1.$$

Solución:

Se define la proposición $P(k) : \sum_{j=1}^{k} (2j-1)\cdot 3^j = 3 + (k-1)\cdot 3^{k+1}$.

- Pruebe que se cumple $P(1) \equiv V$. En efecto,

$$(2\cdot 1 - 1)\cdot 3^1 = 3 + (1-1)\cdot 3^{1+1} \Rightarrow 3 = 3.$$

- Hipótesis de inducción (HI):

$$\sum_{j=1}^{k} (2j-1)\cdot 3^j = 3 + (k-1)\cdot 3^{k+1}.$$

- Se debe probar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$, donde

$$P(k+1) : \sum_{j=1}^{k+1} (2j-1)\cdot 3^j = 3 + k\cdot 3^{k+2},$$

asumiendo verdadera HI.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1)\cdot 3^j &= \left(\sum_{j=1}^{k} (2j-1)\cdot 3^j\right) + (2k+1)\cdot 3^{k+1} \\
&\overset{\text{HI}}{=} 3 + (k-1)\cdot 3^{k+1} + (2k+1)\cdot 3^{k+1} \\
&= 3 + k\cdot 3^{k+2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Determine el valor al que converge la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\cdot \frac{1}{2^k}$. **(4 pts)**

Solución:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k\cdot 2^{k-1}} - \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k}\right].$$

Claramente, esta última serie es telescópica convergente, ya que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k} = 0.$$

La suma S de la serie es $S = \left(\dfrac{1}{2\cdot 2^{2-1}} - \displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Por lo tanto, el valor al que converge la serie es $\dfrac{1}{4}$.

3. Determine, si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot [\,2+(-1)^n\,]^n}{5^{n+1}}$, converge o diverge. Debe justificar indicando el o los criterios empleados. **(5 pts)**
(Sugerencia: note que $1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Solución:

Observe que:

$$1 \leq 2+(-1)^n \leq 3 \Longrightarrow 1 \leq [2+(-1)^n]^n \leq 3^n \Longrightarrow n \leq n\cdot [2+(-1)^n]^n \leq n\cdot 3^n.$$

Se deduce que

$$\frac{n}{5^{n+1}} \leq \frac{n\cdot [2+(-1)^n]^n}{5^{n+1}} \leq \frac{n\cdot 3^n}{5^{n+1}} = \frac{n}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Por el criterio de la raíz:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{5}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} < 1.$$

De acuerdo a este criterio (de la raíz) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$ es convergente.

Luego, por el criterio de comparación directa, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot [\,2 + (-1)^n\,]^n}{5^{n+1}}$ converge.

$\lrcorner$

4. Si se sabe que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-2x}}{2x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{(k+1)\cdot(k+1)!}$, aproxime el valor de dicha integral con la serie alternada, usando el menor número de términos que garanticen un error menor que 5×10^{-2}. Puede usar (sin demostrarlo) el hecho que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n+1)\cdot(n+1)!} = 0$.

(6 pts)

Solución:

Primero se demuestra que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{(k+1)\cdot(k+1)!}$ es convergente.

- $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{(k+1)\cdot(k+1)!} = 0$
- La sucesión $\displaystyle\left\{\frac{2^k}{(k+1)\cdot(k+1)!}\right\}$ es decreciente. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{2^{k+1}}{(k+2)\cdot(k+2)!} \leq \frac{2^k}{(k+1)\cdot(k+1)!} \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{k+1}(k+1)(k+1)! \leq 2^k(k+2)(k+2)! \\
&\Leftrightarrow \quad 2(k+1) \leq (k+2)(k+2) \\
&\Leftrightarrow \quad 2k+2 \leq k^2+4k+4 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq k^2+2k+2.
\end{aligned}$$

Se concluye que la serie es convergente $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{(k+1)\cdot(k+1)!}$, de acuerdo al criterio de las series alternadas.

Dado que se cumplen los requisitos del teorema, para encontrar una aproximación con error menor que 5×10^{-2} se necesita la $k-$ésima suma parcial dada, donde k es algún entero tal que $a_{k+1} \leq 0.05$, tomando $a_k = \dfrac{2^k}{(k+1)(k+1)!}$.

k	$a_{k+1} = \dfrac{2^{k+1}}{(k+2)(k+2)!} \leq 0.05$
0	$\dfrac{2}{2 \cdot 2!} = 0.5 > 0.05$
1	$\dfrac{4}{3 \cdot 3!} = 0.\overline{2} > 0.05$
2	$\dfrac{2^3}{4 \cdot 4!} = 0.08\overline{3} > 0.05$
3	$\dfrac{2^4}{5 \cdot 5!} = 0.02\overline{6} < 0.05$

Entonces S_2 aproxima la serie, y por lo tanto la integral, con un error menor que 0.05:

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-2x}}{2x} \, \mathrm{d}x \approx S_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k 2^k}{(k+1)(k+1)!} = 1 - 0.5 + 0.\overline{2} = 0.7\overline{2}.$$

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Determine en forma explícita la matriz X tal que satisfaga la ecuación **(5 pts)**

$$C \cdot X^T - A \cdot B^T = 2 \cdot X^T$$

Solución:

Supongamos que la matriz $C - 2I$ es invertible, entonces despejando la matriz X

$$\begin{aligned} C \cdot X^T - A \cdot B^T = 2 \cdot X^T \quad &\Leftrightarrow \quad C \cdot X^T - 2 \cdot X^T = A \cdot B^T \\ &\Leftrightarrow \quad (C - 2I) \cdot X^T = A \cdot B^T \\ &\Leftrightarrow \quad X^T = (C - 2I)^{-1} \cdot A \cdot B^T \\ &\Leftrightarrow \quad X = \left[(C - 2I)^{-1} \cdot A \cdot B^T \right]^T . \end{aligned}$$

Realizando las operaciones indicadas en el despeje de la matriz X

- $C - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$
- $(C - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
- $(C - 2I)^{-1} \cdot A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 106 & -36 \\ 77 & -29 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 106 & -36 \\ 77 & -29 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 106 & 77 \\ -36 & -29 \end{pmatrix}$.

6. Se sabe que $\lambda = 1$ es un valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   a) Determine los demás valores propios de la matriz A. **(2 pts)**

   b) Halle dos vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = 1$. **(3 pts)**

Solución: *a*)

La matriz A es triangular, entonces $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) \Rightarrow \lambda = 1 \wedge \lambda = -2$.

Solución: *b*)

Si $\lambda = 1$ se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{1,2}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{F_2}-3F_1]{\overline{F_3}-3F_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ es la forma de todos los vectores propios de la matriz A asociados al valor propio $\lambda = 1$, considerando que x, y no sean cero de manera simultánea.

7. Determine el o los números complejos z que satisfagan, de manera simultánea, las condiciones siguientes **(5 pts)**

   a) $|z - 2| = 3$

   b) $\operatorname{Arg}(z + 1) = \dfrac{3\pi}{4}$

Solución:

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = a + ib$. Por las condiciones que debe cumplir z, se tiene

- $|z - 2| = 3 \Rightarrow |(a - 2) + ib| = 3 \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = 3 \Rightarrow (a-2)^2 + b^2 = 9$.
- $\operatorname{Arg}(z + 1) = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{Arg}((a + 1) + ib) = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{b}{a + 1} = -1 \Rightarrow b = -(a + 1)$.

Reemplazando en la primera ecuación obtenida

$$(a-2)^2 + b^2 = 9 \Rightarrow (a-2)^2 + [-(a+1)]^2 = 9 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0.$$

Las soluciones de dicha ecuación son $a = -1$ y $a = 2$. Luego,

$$\begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = -1 \\ \\ a = 2 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow z = 2 - 3i \end{cases}$$

Note que si $z = -1$, entonces

$$\begin{cases} |z-2| = |-1-2| = |-3| = 3 \\ \\ \operatorname{Arg}(-1+1) = \operatorname{Arg}(0) = 0 \quad \text{(no satisface la condición)} \end{cases}$$

Para el número $z = 2 - 3i$, se tiene

$$\begin{cases} |z-2| = |2-3i-2| = |-3i| = 3 \\ \\ \operatorname{Arg}(2-3i+1) = \operatorname{Arg}(3-3i) = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} \quad \text{(no satisface la condición)} \end{cases}$$

Así, no existe $z \in \mathbb{C}$ que satisfaga simultáneamente las condiciones.

8. Represente en forma rectangular al número complejo $w = z^{\overline{z}}$ si $z = \dfrac{3-i}{i^6}$. **(5 pts)**

Solución:

$$z = \frac{3-i}{i^6} = \frac{3-i}{(i^2)^3} = \frac{3-i}{-1} = -3 + i.$$

Aplicando la potencia de un complejo, se tiene

$$w = e^{\overline{z}\cdot \operatorname{Ln}(z)} = e^{(-3-i)\cdot \operatorname{Ln}(-3+i)}.$$

Calculando el logaritmo complejo

$$\operatorname{Ln}(-3+i) = \ln\sqrt{10} + i\left(\arctan(-1/3) + \pi\right) \approx 1,15129 + 2,81984i.$$

Si se realiza el producto en el exponente

$$(-3-i)\cdot \operatorname{Ln}(-3+i) = (-3-i)(1,15129 + 2,81984i) = -0,63403 - 9,61081i$$

Así, $w = e^{-0,63403 - 9,61081i} = e^{-0,63403} \cdot e^{-9,61081i} = 0,53045 \cdot \operatorname{cis}(-9,61081)$.

Finalmente,

$$w = 0,53045 \cdot (\cos(-9,61081) + i\operatorname{sen}(-9,61081)) = -0,521297 + 0,009811i$$

9. Si $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$, determine las componentes de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que cumplan, de manera simultánea, las condiciones siguientes

(5 pts)

- $\mathbf{r}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$
- $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \parallel \mathbf{r}$

Solución:

Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las condiciones indicadas. Entonces

- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a + 2b - 2c = 0.$
- $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + x = 2 \\ b + y = -1 \\ c + z = 2 \end{cases}.$
- $\mathbf{u} = t \cdot \mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Sustituyendo en el segundo sistema de ecuaciones obtenemos las siguientes relaciones

$$a = 2 - t, \qquad b = -1 - 2t, \qquad c = 2 + 2t.$$

Por último, se reemplaza en la primera ecuación

$$a + 2b - 2c = 0 \Rightarrow 2 - t - 2 - 4t - 4 - 4t = 0 \Rightarrow -4 - 9t = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{9}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{22}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$, son los vectores que satisfacen las condiciones.

$\lrcorner$

10. Considere en $\mathbb{R}^3$ la recta L y los planos σ, φ y π de ecuaciones respectivas: **(5 pts)**

$$L : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-3} \qquad \sigma : x+y+z = 8$$

$$\varphi : 2x+3y+3z = 4 \qquad \pi : x+2y+3z = 6$$

Determine ecuaciones simétricas de la recta que cumple, de manera simultánea, las dos condiciones siguientes

- Es paralela a la intersección de σ con φ.
- Contiene la intersección de L con π.

Solución:

Se obtiene la intersección entre los planos σ y φ aplicando Gauss-Jordan al sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=8 \\ 2x+3y+3z=4 \end{array}\right.$.

Resolviendo, se obtiene $\left\{\begin{array}{l} x = 20 \\ y = -12-t \\ z = t \end{array}\right.$ con $t \in \mathbb{R}$.

Así, un vector director de la recta que se busca es $\mathbf{v} = (0, -1, 1)$.

Luego, el punto de intersección entre la recta L y el plano π se determina resolviendo

$$x+2y+3z = 6 \Rightarrow 1+3s+2(1+4s)+3(2-3s) = 6 \Rightarrow s = -\frac{3}{2}.$$

El punto de intersección que se busca es $P = \left(-\frac{7}{2}, -5, \frac{13}{2}\right)$.

Por lo tanto, ecuaciones simétricas de la recta que cumple las condiciones indicadas son

$$\frac{y+5}{-1} = \frac{z-\frac{13}{2}}{1}; x = -\frac{7}{2}.$$