Series, Sumas de sucesiones

$$\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \dots$$

Sumas Parciales

$$\sum_{i=0}^{n} i = 1+2+3+\dots n = \frac{n(n+1)}{2}$$ Formula explicita

$$\sum_{i=0}^{60} i = 1+2+3+\dots n = \frac{60(60+1)}{2} = 1830$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^n$, $\underline{S_5}$?

Quinta suma parcial

$$1st = \sum_{n=1}^{1} 1\cdot 2^1 = 2$$

$$5th = \sum_{n=1}^{5} 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + 4\cdot 2^4 + 5\cdot 2^5$$

Cuando no empieza en 1, el primero sera el que esta definido

$\sum_{n=3}^{\infty} n\cdot 2^n$, S_5?

$$\sum_{N=100}^{\infty} N,$$

1st = 100

$$S_1 = \sum_{n=3}^{3} 3\cdot 2^3 = 24$$

Suma total (limite a $+\infty$ de la formula explicita)

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \lim_{m\to+\infty} S_m \begin{cases} \lim_{m\to+\infty} S_m = L, \text{ Converge a } L \\ \lim_{m\to+\infty} S_m = \pm\infty \lor \nexists, \text{ Diverge} \end{cases}$$

2) $\sum \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0, \text{ conver a } 0$$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} k = \frac{n(n+1)}{2}$, ¿conver o diver?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(x+1)}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} k = \frac{n(n+1)}{2}$ diverge

Convergencia

$$\underbrace{\sum_{k=A}^{\infty} x_k}\text{ converge} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=B}^{\infty} x_k}\text{ converge}$$

La convergencia de una serie
NO depende del valor inicial,
sino del $+\infty$

Otras consideraciones

Sea $\sum x_n$, $\sum y_n$ convergente

entonces $\sum (a \cdot x_n + b y_n)$

$$= a \sum x_n + b \sum y_n$$

tambien converge, donde $a, b \in \mathbb{R}$

Otro ejemplo

$$\left.\begin{array}{ll}\sum x_n & \text{conver} \\ \sum y_n & \text{diver}\end{array}\right\} \sum (x_n + y_n) \text{ diver}$$

Criterio de la divergencia (Para descartar convergencias)

Si $\sum a_n$ es convergente entonces:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \quad (a_n \to 0)$$

Pero si $a_n \not\to 0$, diverge

Si $A \to B \iff \neg B \to \neg A$, Contrapositiva

$$\text{Serie} \begin{cases} \text{Convergente} \to \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 \quad (a_n \to 0) \\ \\ \text{Divergente} \to \lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0 \quad (a_n \not\to 0) \end{cases}$$

De la diver podemos tener 2 opciones

Si $\sum a_n$, serie, no se sabe si conver o diver

y cumple $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, NO se puede concluir su conver

§3.1. **Series como sucesión de sumas**

Ejemplo 3.1 Sea $S = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i$.

a) Calcule las tres primeras sumas parciales de S.

b) Demuestre por inducción que, para todo entero $n \geq 1$, $S_n = 2^{n+1} - 2$.

c) Determine si la serie converge o diverge.

1) $S = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

$S_n = 2^{n+1} - 2$

a) $\sum_{n=1}^{1} 2^n = 2^1$

$\sum_{n=1}^{2} 2^n = 2^1 + 2^2 = 6$

$\sum_{n=1}^{3} 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$

b) a $\quad {}^{n+1} \quad 2$

b) $h = 2 \quad -2$

$h=1 \qquad 2^1 = 2^{1+1}-2, \; 2=2$

$h=p \qquad \sum_{i=1}^{p} 2i = 2^{p+1}-2$, Hi

$h=p+1 \qquad \sum_{i=1}^{p+1} 2i = 2^{p+2}-2$, HQP

Demo

$$\sum_{i=1}^{p+1} 2i$$

$$\sum_{i=1}^{p} 2^i + 2^{p+1}$$

$$2^{p+1}-2+2^{p+1}$$

$$2^{p+1}+2^{p+1}-2$$

$$2(2^{p+1})-2$$

$$\boxed{2^{p+2}-2}$$

c) $\sum_{h=1}^{\infty} 2^h \qquad 2>1$

∴ Diverge

Tarea Jonathan Sancho

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(h+1)!}$$

$$h=1 \quad \frac{1}{(1+1)!} = 1-\frac{1}{(1+2)!}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\overset{p}{\infty}} \frac{k}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(p+1)!}, \text{ Hi}$$

$$\sum_{k=1}^{\overset{p+1}{\infty}} \frac{k}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(p+2)!}$$

Demo

$p+1$

∞

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{(p+1)}{(p+2)!}$$

$$1-\frac{1}{(p+1)!}+\frac{p+1}{(p+2)!}, \text{ HI}$$

$$1+\frac{(p+1)}{(p+2)(p+1)!}-\frac{(p+2)}{(p+2)(p+1)!}$$

$$1+\frac{\cancel{p+1}-\cancel{p}-2}{(p+2)(p+1)!}$$

$$1-\frac{1}{(p+2)!}$$

Ejemplo 3.2 Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}$

a) Demuestre, utilizando inducción, que $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$

b) Determine, en caso de converger, el valor al cual converge la serie.

Pero nos dan un term a_n → Sucesion

$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

b) $\lim_{x \to +\infty} 3 - \cancel{\frac{2x+3}{2^x}} = 3$

$\therefore \boxed{\text{Converge a 3}}$

CADENA DE TÉRMINOS DOMINANTES

Sean $k \in \mathbb{R}, a, p \in \mathbb{R}^+, a > 1$ entonces para n suficientemente grande se tiene que:

$$k \ll \ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty \qquad f(x) > g(x)$$

Arriba > abajo → $+\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n} = 0 \qquad f(x) < g(x)$$

Abajo > arriba → 0

Ejemplo 3.3 Dada la sucesión $\{s_n\}$, donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log_3\left(\frac{2k-1}{2k+1}\right)$

a) Muestre, utilizando el método de inducción, que $s_n = -\log_3(2n+1)$.

b) Justifique si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log_3\left(\frac{2k-1}{2k+1}\right)$ converge o diverge.

Dan sucesion

$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

b) $\lim \; -\log(2n+1) = -\infty$

$x \to +\infty$

$\therefore \boxed{\text{Diverge}}$

$\to$ serie telescópica

$\log_3(2x-1) - \log_3(2x+1)$

$\log_3(1) - \lim_{x\to+\infty} 2x+1$

$-\infty$

Ejemplo 3.4 Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ y sea S_k su k-ésima suma parcial.

a) Demuestre, utilizando inducción, que $S_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$.

b) Utilice la igualdad dada en la parte (a) para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ es convergente o divergente. En caso de converger indique a qué valor converge.

b) $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{(x+1)!} = 1$ $\boxed{\text{Converge a } 1}$

Si a_n conver $\to \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ conver $\neq 0$ diver

Crit de diver

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \to \neq 0 \therefore \boxed{\text{Diverge}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \to \neq 0 \therefore \boxed{\text{Diverge}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ $\lim_{x\to+\infty} (-1)^{x+1} \xrightarrow{\text{Alter}} -1, 1 \to \neq 0 \therefore \boxed{\text{Diverge}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2} \to \neq 0 \therefore$ Diverge

e) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt[3]{k^2-1}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3}} = \infty \neq 0$ Diverge

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{k}\right)^k$ $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

$= e^{-2} \neq 0 \therefore$ Diverge

Ejemplo 3.8 Considere la serie convergente
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$
$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

Utilice el criterio de la divergencia para verificar que la siguiente serie diverge:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n}{4n+b_n}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n}{4n+b_n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3n}{4n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} \to \neq 0$

$\therefore$ Diverge

Ejemplo 3.9 Considere la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)}$.

a) Usando inducción matemática, demuestre que el término n-ésimo de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ asociada a la serie S, es $S_n = \frac{n}{3(2n+3)}$.

b) Determine si la serie dada es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n+6) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \right]$$

b) Calculando $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)}$

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k+3}$$

$$1 = A(2k+3) + B(2k+1)$$

$$k = \frac{-1}{2} \to 1 = 2A \to A = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{-3}{2} \to 1 = -2B \to B = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{2k+1} - \frac{\frac{1}{2}}{2k+3}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(1)+1} - \cancel{\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2k+3}} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{6}}$$

Ahora la otra suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n+6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{2}(2n+3)}{\cancel{6}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3} + 1$$

$$\frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Ambas Divergen

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \left[4k+6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \right]$$

Diverge