Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

I Semestre, 2023
Tiempo: 3 horas
Puntaje total: 35 pts

Examen de Reposición

Instrucciones:

1. El examen consta de **siete** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva cada pregunta en su cuaderno de examen e incluya todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **tres horas** para resolver los problemas del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Determine, usando operaciones elementales sobre filas, A^{-1}. **[3 puntos]**

   b) Halle la matriz C tal que $C = B^t A^{-1}$ **[2 puntos]**

   Solución

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$C = B^t A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $z = 2 + 2i$. Halle todos los números complejos de la forma $w = a + bi$ de modo que $\overline{z} \cdot \overline{w} = -4$. **[4 puntos]**

   Solución

   $$\overline{z} \cdot \overline{w} = (2 - 2i) \cdot (a - bi) = 2a - 2bi - 2ai - 2b = 2a - 2b + (-2a - 2b)\, i = -4$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = -4 \\ -2a - 2b = 0 \end{cases}, \text{ de donde } a = -1, b = 1.$$

3. Considere la recta $l\colon \{(1-t, 2+t, 3-t)/\, t \in \mathbb{R}\}$ y el plano $\pi\colon 3x - 2y + 4z = 2$.

   a) Determine el punto P de intersección entre l y π. **[4 puntos]**

   Solución

   $3\,(1-t) - 2\,(2+t) + 4\,(3-t) = 2$
   $\Leftrightarrow t = 1$
   $P = (0, 3, 2)$.

   b) Calcule una ecuación vectorial de la recta que es ortogonal al plano π y contiene al punto P. **[2 puntos]**

   Solución

   Como la recta es ortogonal al plano, se puede tomar como vector director de la recta el vector normal del plano.
   $(x, y, z) = (0, 3, 2) + t\,(3, -2, 4)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Considere los puntos $A = (1, -2, 2)$, $B = (2, -1, 0)$ y $C = (1, 1, 2)$.

   a) Calcule $\mathrm{Proy}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$ **[2 puntos]**

   Solución

   $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, -2)$
   $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 3, 0)$
   $Proy_{\overrightarrow{AC}}^{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{(1,1,-2)\cdot(0,3,0)}{\|(0,3,0)\|^2}\,(0,3,0) = \dfrac{1}{3}\,(0,3,0) = (0,1,0)$.

   b) Determine una ecuación normal del plano que contiene los puntos A, B y C. **[4 puntos]**

   Solución:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{n} = &\quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\
&= (1, 1, -2) \times (0, 3, 0) \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 6e_1 - 0e_2 + 3e_3 \\
&= (6, 0, 3) \\
6x + 3z &= (1, -2, 2) \cdot (6, 0, 3)
\end{aligned}
$$

   Por tanto la ecuación normal del plano viene dada por: $-6x + 3z = 12$

Continúa en siguiente página

5. Justifique si $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)$ es convergente o divergente; en caso de ser convergente, calcule el valor de convergencia de la serie. **[4 puntos]**

Solución

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)$, telescópica convergente pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$, y converge a 1.

6. Usando criterios de comparación, determine y justifique si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{7^n+3^n}$ es convergente o divergente. **[5 puntos]**

Solución

Note al infinito $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{7^n+3^n}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n$, luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n+5^n}{3^n+7^n}}{\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)}{7^n\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)}}{\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}=1,$$ por el criterio de comparación en el límite, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n$ es convergente por ser geométrica con $|r|=\frac{5}{7}<1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+5^n}{3^n+7^n}\right)$ converge también.

7. Determine el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!\,(x-1)^n}{3\cdot5\cdots(2n+1)\cdot2^n}$; no es necesario analizar los extremos del intervalo. **[5 puntos]**

Solución

Utilizamos el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n!(x-1)^{n+1}}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+3)\cdot2^{n+1}}}{\dfrac{(n-1)!\,(x-1)^n}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)\cdot2^n}}\right|=\frac{|x-1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{|x-1|}{4},$$ luego debe darse $\dfrac{|x-1|}{4}<1$

$\Leftrightarrow |x-1|<4\Leftrightarrow -4<x-1<4\Leftrightarrow -3<x<5.$

De esta forma, el radio es 4 y el interior del intervalo es $]-3,5[$.