Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

I Semestre, 2023
Tiempo: 2 horas y 15 minutos
Puntaje total: 25 puntos

Solucionario: Segundo Examen Parcial

Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **5** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo.
2. Resuelva cada pregunta en su cuaderno de examen e incluya todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
3. Tiene **dos horas y quince minutos** para resolver el examen.
4. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
5. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
6. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Sean $u = (2, -1, 1)$, $v = (1, -6, 2)$ y $z = (1, 16, -4)$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

   a) [**2 puntos**] Escriba a z como combinación lineal de los vectores u y v.

   Solución: Para vector z sea C.L de u y v debe darse que para constantes α y β:

   $$(1, 16, -4) = \alpha(2, -1, 1) + \beta(1, -6, 2)$$

   es decir, $\begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ -6 = -\alpha - 6\beta \\ 2 = \alpha + 2\beta \end{cases}$. Al resolver dicho sistema se tiene que $\alpha = 2$ y $\beta = -3$ y de esta manera $z = 2u - 3v$.

   b) [**2 puntos**] Determine todos los valores de k para que el vector $w = (4, k, -1)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores u y v.

   Solución: Para vector w sea C.L de u y v debe darse que para constantes α y β:

   $$(4, k, -1) = \alpha(2, -1, 1) + \beta(1, -6, 2)$$

   es decir, $\begin{cases} 4 = 2\alpha + \beta \\ k = -\alpha - 6\beta \\ -1 = \alpha + 2\beta \end{cases}$. Al resolver dicho sistema se tiene que $\alpha = \dfrac{15 + k}{8}$ y $\beta = \dfrac{1 - k}{4}$ y de esta manera al sustituir en la ecuación dos del sistema se obtine que $k = 9$.

2. **[5 puntos]** Considere los vectores $u = (2, 1, 0)$ y $v = (-1, 1, 0)$. Determine todos los vectores $w \in \mathbb{R}^3$ que satisfagan, simultáneamente, las tres condiciones siguientes:

- $w \perp u$
- $\text{Proy}_v w = -3v$
- $w \times (u + v) = (-10, 5, 8)$

Solución: Sea $w = (a, b, c)$
$w \times (u + v) = (-10, 5, 8) \Rightarrow (a, b, c) \times ((2, 1, 0) + (-1, 1, 0)) = (-10, 5, 8)$
$\Rightarrow (a, b, c) \times (1, 2, 0) = (-10, 5, 8) \Rightarrow (-2c, c, 2a - b) = (-10, 5, 8) \Rightarrow c = 5$ y $2a - b = 8$
Así, $c = 5$ y $b = 2a - 8$.
$\text{Proy}_v w = -3v \Rightarrow \dfrac{w \cdot v}{||v||^2} \cdot v = -3v \Rightarrow \dfrac{(a, 2a - 8, 5) \cdot (-1, 1, 0)}{||(-1, 1, 0)||^2} = -3 \Rightarrow -a + 2a - 8 = -3 \cdot 2$
$\Rightarrow a - 8 = -6 \Rightarrow a = 2$ y, además, $b = 2a - 8 = 2 \cdot 2 - 8 = -4$
Por lo anterior, se tiene que el vector w está dado por $w = (2, -4, 5)$; solo hace falta verificar que cumple, efectivamente, la otra condición enunciada.
$w \cdot u = (2, -4, 5) \cdot (2, 1, 0) = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 4 - 4 = 0$
Por lo tanto, $w = (2, -4, 5)$.

3. Considere las rectas $\mathfrak{l}_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ y $\mathfrak{l}_2 : \begin{cases} x = -3 - s \\ y = 5 + 2s \\ z = 6 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

   a) **[3 puntos]** Encuentre el punto, P, de intersección de las rectas $\mathfrak{l}_1$, y $\mathfrak{l}_2$.

   Solución: se empieza con el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2 - t = -3 - s \\ -2 + t = 5 + 2s \\ 1 + t = 6 + s \end{cases}$$

   El sistema anterior se puede resolver mediante lo aprendido en el primer parcial, es decir con el método de Gauss-Jordan, pero también se puede observando que si sumamos las dos primeras ecuaciones se obtiene lo siguiente: $0 = 2 + s$, de donde $s = -2$, y con ello se sigue fácilmente que $t = 3$, para así concluir que $P = (-1, 1, 4)$.

   b) **[3 puntos]** Determine las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por P y perpendicular simultáneamente a las rectas $\mathfrak{l}_1$, y $\mathfrak{l}_2$.

   Solución: Primero debemos encontrar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas $\mathfrak{l}_1$, y $\mathfrak{l}_2$
   Lo que debemos hacer primero es calcular un vector director para la recta que nos solicitan, y en este caso tenemos que:

$$\vec{v} = (-1, 1, 1) \times (-1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, -1),$$

con lo cual la recta solicitada posee ecuación paramétrica $(x, y, z) = (-1, 1, 4) + \lambda(-1, 0, -1) = (-1 - \lambda, 1, 4 - \lambda)$, y por lo cual se sigue que las ecuaciones simétricas de la recta pedida son:

$$x + 1 = z - 4; y = 1.$$

4. Considere l la recta dada por $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+11}{4} = \dfrac{z-4}{-2}$, y el plano π dado por $4x + 3y + 8z = -5$.

   a) **[3 puntos]** Halle el punto, P, de intersección de π con l.

   Solución: Se tiene que reescribir a la recta L de la siguiente forma:

   $$x = -1 + 2t; y = -11 + 4t; z = 4 - 2t,$$

   luego se debe sustituir en la ecuación del plano π:

   $4(-1+2t)+3(-11+4t)+8(4-2t) = -9 \Longrightarrow -4-33+32+8t+12t-16t \Longrightarrow -5+4t = -5 \Longrightarrow t = 0,$

   luego el punto, P, buscado es $x = -1; y = -11; z = 4$.

   b) **[2 puntos]** Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y es perpendicular a π.

   Solución: Dado que $P = (-1, -11, 4)$ y como la recta buscada es perpendicular al plano, se tiene que su vector director y el vector normal son paralelos, luego $\vec{v} = (4, 3, 8)$, y entonces se sigue que la ecuación de la línea recta solicitada es dada por

   $$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -11 + 3t \\ z = 4 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

5. Considere los puntos $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, 0, 3)$ y $C = (3, 1, 0)$ en $\in \mathbb{R}^3$.

   a) **[3 puntos]** Determine una ecuación normal del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

   Solución:

   $$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\ = & (1, -1, 4) \times (2, 0, 1) \\ = & \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = & 7e_2 - e_1 + 2e_3 \\ = & (7, -1, 2) \\ 7x - y + 2z = & (1, 1, -1) \cdot (7, -1, 2) \\ R/\ 7x - y + 2z = & 4 \end{aligned}$$

b) **[2 puntos]** Determine el área del triángulo de vértices A, B y C.
Solución:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|}{2} \\
&= \frac{\|(7,-1,2)\|}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{6}}{2} ul^2
\end{aligned}$$