Ph diferencia de medias

Ejemplo 5: diferencia de medias

Un gerente aplicó el mismo test de capacitación a 2 grupos. El primero de 50 empleados obtuvo una media de 65 pts con una desviación De 10 pts. El segundo grupo de 40 empleados arrojó una media de 62 pts con una desviación estándar de 8 pts.

¿Existe diferencia significativa entre las medias de los dos grupos a un nivel de significancia del 5%?

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Normal

$H_0: u_1 \neq u_2$ $\quad n_1 = 50 \quad n_2 = 40 \quad d_0 = 0$

$H_1: u_1 = u_2$ $\quad \bar{x}_1 = 65 \quad \bar{x}_2 = 62 \quad \alpha = 0{,}05$

$\sigma_1 = 10 \quad \sigma_2 = 8$

$$Z_{obs} = \frac{65 - 62}{\sqrt{\frac{10^2}{50} + \frac{8^2}{40}}} = 1{,}5811$$

$$Z_c = Z_{0,05} = \pm 1{,}95996$$

R/ Como

$Z_{c1} = -1{,}95996 < Z_{0,05} = 1{,}5811 < Z_{c2} = 1{,}95996$

No se rechaza H_0

Valor P

$$Z_{obs} = \frac{65 - 62}{\sqrt{\frac{10^2}{50} + \frac{8^2}{40}}} = 1{,}5811$$

$$2P(Z > 1{,}5811) = 0{,}11386$$

R/ Como $P = 0{,}11386 > \alpha = 0{,}05$

No se rechaza H_0

Un investigador desea comparar dos modelos de baterías de teléfonos celulares para determinar cuál de ellos tiene mayor duración de carga. Como desconoce la media y la varianza poblacional de los dos modelos, decide tomar una muestra de 26 baterías del modelo X y de 21 del modelo Z. En ambos casos, el tiempo de duración de la carga se distribuyó de forma normal, con una media muestral de 26 horas y una desviación muestral de 2,3 horas para el modelo X y con una media muestral de 24 horas y una desviación muestral de 1,7 horas para el modelo Z.

[1 punto] Calcule el número de grados de libertad de la distribución empleada para realizar una prueba de hipótesis sobre la diferencia de ambas muestras. (**Suponga que las varianzas son distintas**).

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

$n_1 = 26 \quad n_2 = 21$

$S_1 = 2{,}3 \quad S_2 = 1{,}7$

$$v = \frac{\left(\frac{2{,}3^2}{26} + \frac{1{,}7^2}{21}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2{,}3^2}{26}\right)^2}{26-1} + \frac{\left(\frac{1{,}7^2}{21}\right)^2}{21-1}} = 44{,}69$$

b) **[4 puntos]** Realice una prueba de hipótesis con un nivel de significancia del 4 % para determinar si la diferencia entre el tiempo de duración de carga de ambos modelos de batería es menor a 3 horas.(**Suponga que las varianzas son distintas**).

Normal

$H_0: \mu = 3 \ (\geq)$

$H_1: \mu < 3$

$n_1 = 26 \quad n_2 = 21 \quad d_0 = 3$

$\bar{x}_1 = 26 \quad \bar{x}_2 = 24 \quad v = 44{,}69$

$S_1 = 2{,}3 \quad S_2 = 1{,}7 \quad \alpha = 0{,}04$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$T_{obs} = \frac{26 - 24 - 3}{\sqrt{\frac{2{,}3^2}{26} + \frac{1{,}7^2}{21}}} = -1{,}71$$

$T_c = 0{,}04,\ 44{,}69 = -1{,}79$

$\boxed{\text{R/ Como } T_{obs} = -1{,}71 > T_c = -1{,}79 \text{ No se rechaza } H_0}$

Con valor P

$$T_{obs} = \frac{26-24-3}{\sqrt{\frac{23^2}{26}+\frac{17^2}{21}}} = -1{,}71$$

$v = 44{,}69$

$\alpha = 0{,}04$

$$P(T < -1{,}71) = 0{,}047$$

$\boxed{R/ \text{ Como } P = 0{,}047 > 0{,}04 \text{ No se rechaza } H_0}$

1. Suponga que las marcas de disco DVD para grabar con capacidad nominal de 4.7 gb son A y B. Los disco A son más baratos que los disco B, razón por la cuál un vendedor de accesorios para computadoras afirma que la capacidad promedio de los discos A es menor en por lo menos 70 mb a la capacidad promedio de los discos B. Se tomaron muestras de capacidades de ambos tipos de discos en mb, la información se resume en la siguiente tabla

$<$

Disco	tamaño de muestra	$\overline{x}$	s
tipo A	21	4698 mb	15 mb
tipo B	17	4752 mb	27 mb

(a) Un estudiante X del TEC, realizó la prueba de hipótesis para la afirmación del vendedor suponiendo que las desviaciones estándar de las capacidades, de ambos tipos de discos, son iguales. ¿Aceptó X la afirmación del vendedor? *R/* No se halló evidencia significativa a favor de la afirmación.

$T = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$

con $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

y $\nu = n_1 + n_2 - 2$

$H_0: u_1 = u_2 - 70$ $\quad n_1 = 21$ $\quad n_2 = 17$ $\quad V = 21+17-2 = 36$

$H_0: u_1 - u_2 = -70$ $\quad \bar{x}_1 = 4698$ $\quad \bar{x}_2 = 4752$ $\quad d_0 = 70$

$H_1: u_1 - u_2 < -70$ $\quad S_1 = 15$ $\quad S_2 = 27$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$$S_p^2 = \frac{(21-1)\cdot 15^2 + (17-1)\cdot 27^2}{21+17-2} = 449$$

$$T_{obs} = \frac{4698-4752--70}{\sqrt{\frac{449}{21}+\frac{449}{17}}} = 2{,}31$$

$T_c = t_{0.05,36} = -1{,}69$

$\boxed{R/ \ T_{obs} > T_c \text{ se rechaza } H_0}$

10. Considere las siguientes variables aleatorias independientes

X_1 : variable normal con una desviación estándar de $\sigma_1 = 5.2$
X_2 : variable normal con una desviación estándar de $\sigma_2 = 3.4$

De X_1 se toma una muestra aleatoria de tamaño $n_1 = 25$ y se observa una media de $\overline{x}_1 = 81$. De X_2 se toma una segunda muestra de tamaño $n_2 = 36$ y se observa una media de $\overline{x}_2 = 78$. Pruebe la hipótesis, a un nivel de significancia del 0.05, que $\mu_1 = \mu_2$ contra la alternativa $\mu_1 \neq \mu_2$. $R/$ $z_{obs} = 2.53301$, $z_{c1} = -1.96$, $z_{c2} = 1.96$, $Valor\ P = 0.011406$.Hay evidencia en contra de que las medias sean iguales

Normal

$H_0: u_1 = u_2$ $\quad n_1 = 25 \quad n_2 = 36 \quad d_0 = 0$

$H_1: u_1 \neq u_2$ $\quad \bar{x}_1 = 81 \quad \bar{x}_2 = 78 \quad \alpha = 0{,}05$

$\sigma_1 = 5{,}2 \quad \sigma_2 = 3{,}4$

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z_{obs} = \frac{81 - 78}{\sqrt{\frac{5{,}2^2}{25} + \frac{3{,}4^2}{36}}} = 2{,}53$$

$$Z_c = Z_{0.05} = \pm 1{,}96$$

$\boxed{R/ \text{ Como } Z_{c1} = -1{,}96 < Z_{obs} = 2{,}53 \not< Z_{c2} = 1{,}96 \text{ se rechaza } H_0}$

Con valor P

$$Z_{obs} = \frac{81 - 78}{\sqrt{\frac{5{,}2^2}{25} + \frac{3{,}4^2}{36}}} = 2{,}53$$

$$2P(Z > 2{,}53) = 0{,}01141$$

$\boxed{R/ \text{ Como } P = 0{,}01141 < \alpha = 0{,}05 \text{ se rechaza } H_0}$

Ejemplo 106. Se obtuvieron las estaturas de 20 mujeres y 30 hombres tomados aleatoriamente de la población de alumnos de cierta escuela. En la siguiente tabla se resumen los datos encontrados

	Número	Promedio	Desviación
Hombres (m):	30	69.8	1.92
Mujeres (f):	20	63.8	2.18

Suponga que las estaturas de las mujeres y las estaturas de los hombres se distribuyen normalmente y tienen desviaciones estándar similares.
¿Puede concluirse, con un nivel de significancia del 4 %, que el promedio de estaturas de los hombres de la escuela supera en más de 3 cm el promedio de las mujeres?

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

con $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

y $\nu = n_1 + n_2 - 2$

Normal

$H_0: u_1 - u_2 \leq 3$ $\quad n_1 = 30 \quad n_2 = 20 \quad d_0 = 3$

$H_1: u_1 - u_2 > 3$ $\quad \bar{x}_1 = 69{,}8 \quad \bar{x}_2 = 63{,}8 \quad V = 48$

$s_1 = 1{,}92 \quad s_2 = 2{,}18 \quad \alpha = 0{,}04$

$$S_p^2 = \frac{(30-1) \cdot 1{,}92^2 + (20-1) \cdot 2{,}18^2}{48} = 4{,}108$$

$$T_{obs} = \frac{69{,}8 - 63{,}8 - 3}{\sqrt{\frac{4{,}108}{30} + \frac{4{,}108}{20}}} = 5{,}127$$

$$T_c = t_{0{,}04,\, 48} = 1{,}788$$

$\boxed{\text{R/ Como } Z_{obs} = 5{,}127 > 1{,}788 \text{ Se rechaza } H_0}$

Valor P

$P(T > 5{,}127) = 0{,}00000$

$\boxed{\text{Como } P = 0{,}0000 < 0{,}04 \text{ Se rechaza } H_0}$

Ejercicio 39. Un profesor considera que el rendimiento promedio (nota promedio) de los estudiantes de Computación en el curso de Matemática Elemental es superior en al menos nueve puntos al rendimiento promedio de los estudiantes de otras carreras. Para analizar esto se tomó una muestra de estudiantes que cursaron el curso el año pasado, para obtener los siguientes datos:

Estudiantes	Tamaño de muestra	Rendimiento promedio observado ($\overline{x}$)	Desviación estándar (s)
De computación:	19	73 puntos	4.3 puntos
De otras carreras:	17	65 puntos	4.7 puntos

Se sabe que las notas en el curso de Matemática Elemental en Computación se distribuyen normalmente, también las notas en dicho curso para otras carreras. Si se supone que las variancias poblacionales son iguales, con un nivel de significancia del 5 %, ¿existe evidencia en contra de la afirmación del profesor? Justifique. Con mas decimales $R/\quad H_1 : u_1 - u_2 < 9, d_c = 6.46383, t_c = -1.69092, t_{obs} = -0.714291$. Se acepta H_0

$T = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$

con $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

y $\nu = n_1 + n_2 - 2$

Normal

$H_0: u_1 - u_2 = 9\ (\geq)$ $\quad n_1 = 19 \quad n_2 = 17 \quad \nu = 34$

$H_1: u_1 - u_2 < 9$ $\quad \bar{x}_1 = 73 \quad \bar{x}_2 = 65 \quad d_0 = 9$

$s_1 = 4{,}3 \quad s_2 = 4{,}7 \quad \alpha = 0{,}05$

$$S_p^2 = \frac{(19-1)\cdot 4{,}3^2 + (17-1)\cdot 4{,}7^2}{19+17-2} = 20{,}18$$

$$T_{obs} = \frac{73-65-9}{\sqrt{\frac{20{,}18}{19} + \frac{20{,}18}{17}}} = -0{,}667$$

$$T_c = t_{0{,}05,\,34} = -1{,}69092$$

R/ Como $T_{obs} = -0{,}667 > t_c = -1{,}6902$
Se acepta H_0

Con valor P

$v = 39$

$\alpha = 0{,}05$

$$T_{obs} = \frac{73 - 65 - 9}{\sqrt{\frac{2{,}18}{19} + \frac{2{,}18}{17}}} = -0{,}667$$

$$P(T < -0{,}667) = 0{,}25469$$

$\boxed{\text{R/ Como } P = 0{,}25469 > 0{,}05 \text{ No se rechaza } H_0}$

Ejercicio 40. Una muestra de ciudades de las áreas A y B reveló los siguientes resultados, donde n es el número de ciudades muestreadas de cada área, $\overline{x}$ el promedio de las esperanzas de vida en años y s la desviación estándar de las esperanzas de vida en años:

Países	n	$\overline{x}$	s
A	35	76.16	1.85
B	31	60.7	1.08

No dice nada entonces di asumir diferencia de s

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$\text{con } \nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

Pruebe la hipótesis de que la esperanza de vida en los países de A es superior, en promedio, a la de los países de B en más de 15 años.

$H_0: u_1 - u_2 = 15 \ (\leq)$

$H_1: u_1 - u_2 > 15$

$n_1 = 35$ $\quad n_2 = 31$ $\quad d_0 = 15$

$\bar{x}_1 = 76{,}16$ $\quad \bar{x}_2 = 60{,}7$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$S_1 = 1{,}85$ $\quad S_2 = 1{,}08$

$$T_{obs} = \frac{76{,}16 - 60{,}7 - 15}{\sqrt{\frac{1{,}85^2}{35-1} + \frac{1{,}08^2}{31-1}}} = 1{,}23$$

$$v = \frac{\left(\frac{1{,}85^2}{35} + \frac{1{,}08^2}{31}\right)^2}{\frac{\left(\frac{1{,}85^2}{35}\right)^2}{35-1} + \frac{\left(\frac{1{,}08^2}{31}\right)^2}{31-1}} = 55{,}83$$

$t_c = t_{0.05, 55.83}$

$t_c = 1{,}67$

$\boxed{\text{R/ Como } T_{obs} < t_c \text{ No se rechaza } H_0}$

Con valor P

$$\alpha = 0,05$$

$$V = 55,83$$

$$T_{obs} = \frac{76,16 - 60,7 - 15}{\sqrt{\frac{1,85^2}{35-1} + \frac{1,08^2}{31-1}}} = 1,23$$

$$P(T > 1,23) = 0,11$$

$$\boxed{\text{R/ Como } P = 0,11 > 0,05 \text{ No se rechaza } H_0}$$

2 proporciones

Ejemplo 6: Diferencia de proporciones

Cierta empresa, toma una muestra al azar de 200 clavos fabricados por la máquina A, de los cuales 19 resultaron con defectos. Igualmente se toma una muestra de 100 clavos fabricados por la máquina B y arrojó 5 clavos defectuosos. ¿El fabricante podrá afirmar que la máquina B produce clavos de mejor calidad a un nivel de significancia del 1%?

$\hat{P}_i = \dfrac{X_i}{\text{Totales}}$

$H_0: P_A = P_B \ (\leq)$

$H_1: P_A > P_B$

$n_1 = 200 \quad n_2 = 100$

$\hat{P}_1 = 0{,}095 \quad \hat{P}_2 = 0{,}05$

$x_1 = 19 \quad x_2 = 5 \quad \alpha = 0{,}01$

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$$\hat{P} = \frac{19+5}{200+100} = 0{,}08 \qquad \hat{q} = 0{,}92$$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}095 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{200} + \frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{100}}} = 1{,}35$$

$$Z_c = Z_{0{,}01} = 2{,}32$$

$\boxed{\text{R/ Como } Z_{obs} = 1{,}35 < Z_c = 2{,}32 \text{ No se rechaza } H_0}$

Con valor P

$$Z_{obs} = \frac{0{,}095 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{200} + \frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{100}}} = 1{,}35 \qquad \alpha = 0{,}01$$

$$P(Z > 1{,}35) = 0{,}08$$

$\boxed{\text{R/ Como } P = 0{,}08 > 0{,}01 \text{ No se rechaza } H_0}$

Un comentarista deportivo indica que los jugadores de la selección de futbol de Brasil, fallan (proporcionalmente) más penales que los jugadores de la selección de Argentina. Al consultar algunos registros históricos, se observa que los jugadores de la selección de Argentina fallaron 7 de los últimos 100 penales lanzados, mientras que los jugadores de Brasil fallaron 6 de los últimos 80 penales lanzados.

a) **[4 puntos]** Indique si se puede concluir con un nivel de significancia del 8 %, que los datos contradicen la afirmación del comentarista.

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$H_0: P_B = P_A \ (\leq)$ $\quad n_1 = 80 \quad n_2 = 100$

$H_1: P_B > P_A$ $\quad P_1 = 0{,}075 \quad P_2 = 0{,}07 \quad \alpha = 0{,}08$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 7$

$$\hat{P} = \frac{6+7}{80+100} = \frac{13}{180} \qquad \hat{q} = \frac{167}{180}$$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}075 - 0{,}07}{\sqrt{\frac{\frac{13}{180}\cdot\frac{167}{180}}{80} + \frac{\frac{13}{180}\cdot\frac{167}{180}}{100}}} = 0{,}12877$$

$$Z_c = Z_{0.08} = 1{,}40507$$

R/ Como $Z_{obs} = 0{,}12877 < Z_c = 1{,}40507$
NO se rechaza H_0

Con valor P

$$Z_{obs} = \frac{0{,}075 - 0{,}07}{\sqrt{\frac{\frac{13}{180}\cdot\frac{167}{180}}{80} + \frac{\frac{13}{180}\cdot\frac{167}{180}}{100}}} = 0{,}12877$$

$$P(Z > 1{,}2877) = 0{,}09$$

R/ Como $P = 0{,}09 > \alpha = 0{,}08$
NO se rechaza H_0

b) **[4 puntos]** Determine el tamaño de la muestra necesaria para realizar la prueba de hipótesis sobre la afirmación del comentarista, con un nivel de significancia de 0,05 y una potencia de 0,9 para el caso en que el porcentaje real de fallos de Argentina y Brasil es del 7 % y el 10 % , respectivamente.

$K = \#$ de colas

$H_0: P_B = P_A \ (\leq)$ $\quad p'_1 = 0{,}07 \quad p'_2 = 0{,}10 \quad \alpha = 0{,}05$

$H_1: P_B > P_A$ $\quad q'_1 = 0{,}93 \quad q'_2 = 0{,}90 \quad \beta = 0{,}9$

Tamaño de la muestra:

$$n \geq \frac{\left(|z_{\alpha/k}|\sqrt{\frac{1}{2}(p'_1+p'_2)(q'_1+q'_2)} + |z_\beta|\sqrt{p'_1q'_1+p'_2q'_2}\right)^2}{(p'_1-p'_2)^2}$$

$Z_{0{,}05} = 1{,}64485 \quad Z_{0{,}1} = 1{,}28155$

$$n \geq \frac{\left(1{,}64485 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(0{,}07+0{,}10)(0{,}93+0{,}90)} + 1{,}28155\sqrt{0{,}07 \cdot 0{,}93 + 0{,}10 \cdot 0{,}90}\right)^2}{(0{,}07-0{,}10)^2}$$

$n \geq 1281{,}098$

$\boxed{n \geq 1282}$

2. El pueblo C tiene problemas con el fumado en adolescentes. En una muestra de 60 hombres adolescentes se observó que 40 fuman, y en una muestra de 45 mujeres adolescentes se observó que 39 fuman. El sacerdote del pueblo afirma que en esto tiempos son más las mujeres adolescentes que fuman que hombres adolescentes. ¿Los datos apoyan la afirmación del sacerdote? $R/$ Si.

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$$

$H_0: P_M = P_H \ (\leq)$ $\quad n_1 = 45 \quad n_2 = 60$

$H_1: P_M > P_H$ $\quad \hat{p}_1 = \frac{39}{45} \quad \hat{p}_2 = \frac{2}{3}$

$X_1 = 39 \quad X_2 = 40 \quad \alpha = 0{,}05$

$\hat{p} = \frac{39+40}{45+60} = \frac{79}{105} \quad \hat{q} = \frac{26}{105}$

$$Z_{obs} = \frac{\frac{39}{45} - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{\frac{79}{105} \cdot \frac{26}{105}}{45} + \frac{\frac{79}{105} \cdot \frac{26}{105}}{60}}} = 2{,}35$$

$Z_c = Z_{0.05} = 1{,}65$

$\boxed{R/ \text{ Como } Z_{obs} = 2{,}35 > Z_c = 1{,}65 \text{ se rechaza } H_0}$

Con valor p

$$Z_{obs} = \frac{\frac{39}{45} - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{\frac{79}{105}\cdot\frac{26}{105}}{45} + \frac{\frac{79}{105}\cdot\frac{26}{105}}{60}}} = 2{,}35 \qquad \alpha = 0{,}05$$

$$P(Z > 2{,}35) = 0{,}009$$

$$\boxed{\text{R/ Como } p = 0{,}009 < 0{,}05 \text{ se rechaza } H_0}$$

3. Las carreras de Electrónica y Computación tiene gran demanda laboral, esto hace que muchos estudiantes ingresen al mundo laboral antes de graduarse. Sin embargo, un profesor afirma que, para estudiantes de último de carrera, es mayor la proporción de estudiantes de Computación que laboran que la de estudiantes de Electrónica. En una pequeña encuesta se obtuvo la siguiente información

Estudiantes de último año	# de encuestados	Laboran
Computación	20	12
Electrónica	30	14

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$H_0: P_C = P_E \ (\leq)$ $\qquad n_1 = 20 \qquad n_2 = 30 \qquad \alpha = 0{,}05$

$H_1: P_C > P_E$ $\qquad P_1 = 0{,}6 \qquad P_2 = \frac{14}{30}$

$x_1 = 12 \qquad x_2 = 14$

$$\hat{p} = \frac{12 + 14}{20 + 30} = 0{,}52 \qquad \hat{q} = 0{,}48$$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}6 - \frac{14}{30}}{\sqrt{\frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{20} + \frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{30}}} = 0{,}9245$$

$$Z_c = Z_{0{,}05} = 1{,}64485$$

$$\boxed{\text{R/ Como } Z_{obs} = 0{,}9245 < Z_c = 1{,}64485 \text{ No se rechaza } H_0}$$

Con valor P

$\alpha = 0{,}05$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}6 - \frac{14}{30}}{\sqrt{\frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{20} + \frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{30}}} = 0{,}9245$$

$P(Z > 0{,}9245) = 0{,}17761$

$\boxed{\text{R/ Como } P = 0{,}17761 > 0{,}05 \text{ No se rechaza } H_0}$

7. En una encuesta sobre práctica de deportes se encontró que, de 120 personas solteras encuestadas, 21 practican ciclismo al menos una vez por semana, y que de 80 personas casadas, 12 lo practican. ¿Hay evidencia significativa para creer que la proporción de personas que practican ciclismo varía entre los solteros y los casados? $R/\quad No,\ Valor\ P = 0.638356.$

$H_0: P_s = P_c$ $\quad n_1 = 120 \quad n_2 = 80$

$H_1: P_s \neq P_c$ $\quad P_1 = 0{,}175 \quad P_2 = 0{,}15$

$x_1 = 21 \quad x_2 = 12$

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$\alpha = 0{,}05$

$\hat{P} = \frac{21 + 12}{120 + 80} = 0{,}165 \quad \hat{q} = 0{,}835$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}175 - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}165 \; 0{,}835}{120} + \frac{0{,}165 \; 0{,}835}{80}}} = 0{,}4666$$

$Z_c = Z_{0{,}05} = \pm 1{,}64485$

R/ Como

$Z_{c1} = -1{,}64485 < Z_{obs} = 0{,}4666 < 1{,}64485$

No se rechaza H_0

Con valor p

$\alpha = 0{,}05$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}175 - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}165 \; 0{,}835}{120} + \frac{0{,}165 \; 0{,}835}{80}}} = 0{,}4666$$

$$2P(Z > 0{,}4666) = 0{,}64079$$

R/ Como $p = 0{,}64079 > 0{,}4666$
No se rechaza H_0

9. De una muestra de 100 acciones de la bolsa de valores A, 32 tuvieron ganancia el martes pasado. Una muestra de 100 acciones de la bolsa de valores B indica que 27 obtuvieron ganancia ese mismo día. Ante estos resultados, una persona afirma que hay una mayor proporción de acciones que obtuvieron ganancia en la bolsa A, con respecto a la otra bolsa, el martes pasado. Utilice $\alpha = 0.04$.

(a) ¿Hay evidencia que respalde la afirmación de esta persona? *R/* Valor $p = 0.223627$. No hay evidencia a favor de la afirmación

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$H_0: P_A = P_B \; (\leq)$ $\quad n_1 = 100 \quad n_2 = 100$

$H_1: P_A > P_B$ $\quad P_1 = 0{,}32 \quad P_2 = 0{,}27$

$X_1 = 32 \quad X_2 = 27 \quad \alpha = 0{,}04$

$$\hat{p} = \frac{32 + 27}{100 + 100} = 0{,}295 \qquad \hat{q} = 0{,}705$$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}32 - 0{,}27}{\sqrt{\frac{0{,}295 \cdot 0{,}705}{100} + \frac{0{,}295 \; 0{,}705}{100}}} = 0{,}7752$$

$$Z_c = Z_{0{,}04} = 1{,}75069$$

R/ Como $Z_{obs} = 0{,}7752 < Z_c = 1{,}75069$
No se rechaza H_0

Con valor P

$$\alpha = 0{,}04$$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}32 - 0{,}27}{\sqrt{\frac{0{,}295 \cdot 0{,}705}{100} + \frac{0{,}295 \cdot 0{,}705}{100}}} = 0{,}7752$$

$$P(Z > 0{,}7752) = 0{,}22$$

$$\boxed{\text{R/ Como } P = 0{,}22 < 0{,}04 \text{ No se rechaza } H_0}$$

(b) ¿De qué tamaño deberán haberse tomado las muestras si se desea hacer el contraste de hipótesis con un nivel de significancia de $\alpha = 0.04$ y una potencia de 80% cuando el 30% de las personas obtuvo ganancia de la bolsa A y el 25% en B? $R/\ \ n \geq$ ~~1068,85~~ 1071

$p'_1 = 0{,}30 \quad p'_2 = 0{,}25 \quad \alpha = 0{,}04$

$q'_1 = 0{,}70 \quad q'_2 = 0{,}75 \quad \beta = 0{,}20$

$$n \geq \frac{\left(|z_{\alpha/k}|\sqrt{\frac{1}{2}(p'_1 + p'_2)(q'_1 + q'_2)} + |z_\beta|\sqrt{p'_1 q'_1 + p'_2 q'_2}\right)^2}{(p'_1 - p'_2)^2}$$

donde k es el número de colas Cola derecha

$$Z_{0,04} = 1{,}75069 \quad Z_{0,20} = 0{,}84162$$

$$n \geq \frac{\left(1{,}75069 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (0{,}30 + 0{,}25)(0{,}70 + 0{,}75)} + 0{,}84162 \cdot \sqrt{0{,}30 \cdot 0{,}70 + 0{,}25 \cdot 0{,}75}\right)^2}{(0{,}30 - 0{,}25)^2}$$

$n \geq 1070{,}75 \rightarrow \boxed{n \geq 1071}$ Si no me cree verifique lo usted

```python
import math

# Datos
p1 = 0.30
p2 = 0.25
z_alpha = 1.75069    # z0.04
z_beta = 0.84162     # z0.20

# Proporción promedio
p_bar = (p1 + p2) / 2

# Numerador
num = (
    z_alpha * math.sqrt(2 * p_bar * (1 - p_bar)) +
    z_beta * math.sqrt(p1 * (1 - p1) + p2 * (1 - p2))
) ** 2

# Denominador
den = (p1 - p2) ** 2

# Tamaño de muestra
n = num / den

print(n) #1070.7598979728687
```

11. En la universidad A de 200 docentes se tiene que 131 toman al menos 3 tazas de café por día. En la universidad B de 300 docentes se tiene que 215 toman al menos 3 tazas de café por día. A un nivel de significancia del 5%, ¿existe evidencia de que la proporción de docentes que toman al menos 3 tazas de café por día en la Universidad A es menor la proporción de docentes que toman al menos 3 tazas de café por día en la Universidad B?. $R/$ Valor

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$H_0: P_A = P_B \ (\geq)$ $\quad n_1 = 200 \quad n_2 = 300$

$H_1: P_A < P_B$ $\quad P_1 = 0{,}655 \quad P_2 = \frac{43}{60}$

$x_1 = 131 \quad x_2 = 215 \quad \alpha = 0{,}05$

$$\hat{p} = \frac{131 + 215}{200 + 300} = 0{,}692 \qquad \hat{q} = 0{,}308$$

$$Z_{obs} = \frac{0{,}655 - \frac{43}{60}}{\sqrt{\frac{0{,}692 \cdot 0{,}308}{200} + \frac{0{,}692 \cdot 0{,}308}{300}}} = -1{,}46$$

$$Z_c = Z_{0{,}05} = -1{,}64485$$

$$\boxed{\text{R/ Como } Z_{obs} = -1{,}46 > Z_c = -1{,}64485 \text{ No se rechaza } H_0}$$

Con valor p

$$Z_{obs} = \frac{0{,}655 - \frac{43}{60}}{\sqrt{\frac{0{,}692 \cdot 0{,}308}{200} + \frac{0{,}692 \cdot 0{,}308}{300}}} = -1{,}46$$

$$P(Z < -1{,}46) = 0{,}07215$$

$$\boxed{\text{R/ Como } P = 0{,}07215 > \alpha = 0{,}05 \text{ No se rechaza } H_0}$$

14. Se desea comparar la proporción de personas mayores de edad que están a favor de un proyecto de ley entre dos ciudades A y B. En la ciudad A se encontró que 130 de 200 están a favor, mientras que en la ciudad B, 100 de 250 encuestados dijeron estar a favor.

(a) Con un nivel de significancia de 0.02, ¿hay evidencia para afirmar que en la ciudad A hay una mayor proporción de personas a favor del proyecto que en la ciudad B? R/ Sí hay evidencia.

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_1} + \frac{\hat{P}\hat{Q}}{n_2}}} \text{ con } \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$H_0: P_A = P_B \ (\leq)$

$H_1: P_A > P_B$

$n_1 = 200 \quad n_2 = 250$

$P_1 = 0,65 \quad P_2 = 0,4$

$X_1 = 130 \quad X_1 = 100 \quad \alpha = 0,02$

$$\hat{p} = \frac{130+100}{200+250} = \frac{23}{45} \qquad \hat{q} = \frac{22}{45}$$

$$Z_{obs} = \frac{0,65 - 0,4}{\sqrt{\frac{23}{45} \cdot \frac{22}{45} \cdot \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{250}\right)}} = 5,27$$

$Z_c = Z_{0.02} = 2,02$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{R/ Como } Z_{obs} = 5,27 > 2,02 \\ \text{Se rechaza } H_0 \end{array}}$$

Con valor P

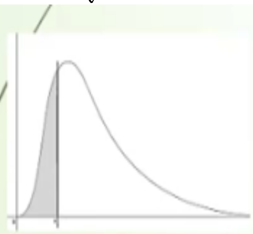
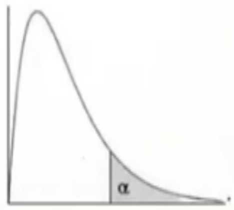
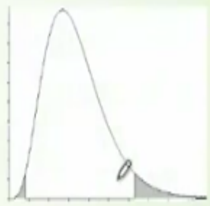
$$Z_{obs} = \frac{0,65 - 0,4}{\sqrt{\frac{23}{45} \cdot \frac{22}{45} \cdot \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{250}\right)}} = 5,27$$

$P(Z > 5,27) = 0,00000$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{R/ Como } P = 0,00000 < 0,02 \\ \text{se rechaza } H_0 \end{array}}$$

2 Varianzas

Ambas con $<$ en la acc

$<$ Izquierda	$>$ Derecha	Dos Colas
		
$f_c = f_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$	$f_c = f_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$	$f_{c1} = f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$, $f_{c2} = f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$. $\frac{\alpha}{2}-1$
$P(F < f_{obs})$	Valor P es $P(F > f_{obs})$.	$f_{obs} > 1$ $2P(F > f_{obs})$. $f_{obs} < 1$ $2P(F < f_{obs})$.
$r_0 = H_0$	$r_0 = H_0$	$r_0 = 1$

Ejemplo 10: comparación de varianzas

Se obtuvieron las estaturas de 21 mujeres y 31 hombres seleccionados aleatoriamente de una población de alumnos de cierta escuela. En la siguiente tabla se resumen los datos encontrados.

Sean σ_m^2 la varianza de las estaturas de las mujeres y σ_h^2 la varianza de las estaturas de los hombres. Asumiendo que las estaturas para ambos grupos se distribuyen de forma normal, determine, mediante una prueba de hipótesis y con nivel de significancia del 1%, si se debe suponer que $\sigma_m^2 = \sigma_h^2$

	Nº Alumnos	Media	Desv.Std
Mujeres	21	63,8	2,18
Hombres	31	69,8	1,92

Para probar $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = r_0$

$$H_0 : \frac{\sigma_m^2}{\sigma_H^2} = 1 \qquad n_1 = 21 \quad n_2 = 31 \qquad F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\cancel{r_0}\,1} \text{ con } \nu_i = n_i - 1$$

$$v_1 = 20 \quad v_1 = 30$$

$$S_1 = 2{,}18 \quad S_2 = 1{,}92 \qquad \alpha = 0{,}01$$

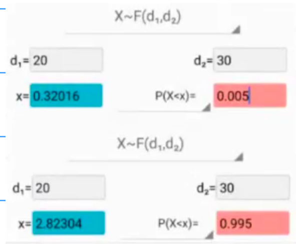
$$H_1 : \frac{\sigma_m^2}{\sigma_H^2} \neq 1 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$$

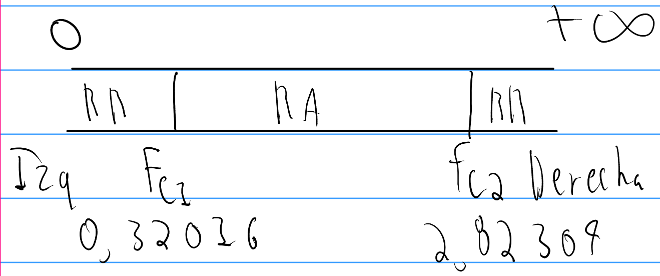
$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$$

$$F_{obs} = \frac{2{,}18^2}{1{,}92^2} = 1{,}2892$$

$f_{c1} = f_{0.005,\ 20,\ 30} = 0{,}32016$

$f_{c2} = f_{0.995,\ 20,\ 30} = 2{,}82304$





RR: $]0,\ 0.32016[\ \cup\ ]2.82304,\ +\infty[$

RA: $]0.32016,\ 2.82304[$

R/ Como
$f_{c1} = 0{,}32016 < f_{obs} = 1{,}2892 < f_{c2} = 2{,}82304$
No se rechaza H_0

Con valor P

$$f_{obs} = \frac{2{,}18^2}{1{,}92^2} = 1{,}2892 \qquad \alpha = 0{,}01$$

$v_1 = 20 \quad v_1 = 30$

$2P(F > 1{,}2892)$
$= 2 \cdot 0{,}25858$
$= 0{,}51716$

R/ Como $P = 0{,}51716 > 0{,}01$
No se rechaza H_0

Un investigador desea comparar dos modelos de baterías de teléfonos celulares para determinar cuál de ellos tiene mayor duración de carga. Como desconoce la media y la varianza poblacional de los dos modelos, decide tomar una muestra de 26 baterías del modelo X y de 21 del modelo Z. En ambos casos, el tiempo de duración de la carga se distribuyó de forma normal, con una media muestral de 26 horas y una desviación muestral de 2,3 horas para el modelo X y con una media muestral de 24 horas y una desviación muestral de 1,7 horas para el modelo Z.

[4 puntos] Determine mediante una prueba de hipótesis, con $\alpha = 5\,\%$, si es posible concluir que las varianzas, para el tiempo de duración de carga de ambos modelos de batería, son iguales. $r_0 = 1$

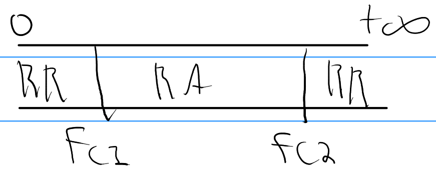
$H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ $\qquad n_1 = 26 \qquad n_2 = 21 \qquad \alpha = 0{,}05 \qquad F = \dfrac{S_1^2/S_2^2}{r_0}$ con $\nu_i = n_i - 1$

$\nu_1 = 25 \qquad \nu_2 = 20 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$S_1 = 2{,}3 \qquad S_2 = 1{,}7 \qquad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

$f_{obs} = \dfrac{2{,}3^2}{1{,}7^2} = 1{,}83$



$f_{c1} = f_{0.025,\,25,\,20} = 0{,}43470$

$f_{c2} = f_{0.975,\,25,\,20} = 2{,}39594$

RR: $]0,\ 0.43470[\ \cup\ ]2{,}39594,\ +\infty[$

RA: $]0.43470,\ 2.39594[$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{R/ Como} \\ \quad f_{c1} = 0{,}43470 < f_{obs} = 1{,}83 < f_{c2} = 2{,}39594 \\ \quad \text{No se rechaza } H_0\end{array}}$

Con valor p $\qquad \nu_1 = 25 \quad \nu_2 = 20 \quad \alpha = 0{,}05$

$f_{obs} = \dfrac{2{,}3^2}{1{,}7^2} = 1{,}83 \to 2P(f > 1{,}83)$

$= 2 \cdot 0{,}08575$

$= 0{,}1715$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{R/ } p = 0{,}175 > \alpha = 0{,}05 \\ \quad \text{No se rechaza } H_0\end{array}}$

4. Una muestra de jugadores de fútbol de la primera división actual dieron los siguientes resultados, donde n es el número jugadores, $\overline{x}$ el promedio de los años de experiencia y s la desviación estándar de los años de experiencia:

Equipos	n	$\overline{x}$	s
A	15	3.2	2.85
B	21	5.7	1.94

Suponga que los años de experiencia se distribuyen normalmente, tanto para los jugares del equipo A como para los jugadores del equipo B.

(a) Con un nivel de significancia de 5%, pruebe la hipótesis de que las varianzas entre los años de experiencia de ambos equipos son iguales $R/$ se puede suponer que las varianzas son iguales.

$r_0 = 1$

$H_0: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$ $\quad n_1 = 15 \quad n_2 = 21 \quad \alpha = 0{,}05$

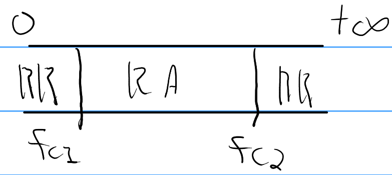
$v_1 = 14 \quad v_2 = 20 \quad \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$S_1 = 2{,}85 \quad S_2 = 1{,}94 \quad 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$H_1: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$

$$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{r_0} \text{ con } \nu_i = n_i - 1$$

$$f_{obs} = \frac{2{,}85^2}{1{,}94^2} = 2{,}158$$



$f_{c1} = f_{0{,}025,\,14,\,20} = 0{,}35166$

$f_{c2} = f_{0{,}975,\,14,\,20} = 2{,}60300$

$RR:]0,\ 0{,}35166[\cup]2{,}60300,\ +\infty[$

$RA:]0{,}35166,\ 2{,}60300[$

R/ Como

$f_{c1} = 0{,}35166 < f_{obs} = 2{,}158 < f_{c2} = 2{,}60300$

NO se rechaza H_0

Con valor P $\quad v_1 = 14 \quad v_2 = 20 \quad \alpha = 0{,}05$

$$f_{obs} = \frac{2{,}85^2}{1{,}94^2} = 2{,}158 \rightarrow 2P(F > 2{,}158)$$

$= 2 \cdot 0{,}94332$

$= 1{,}88$

R/ Como $P = 1{,}88 > \alpha = 0{,}05$

NO se rechaza H_0

8. Una gran empresa tiene dentro de sus instalaciones dos restaurantes: A y B, para sus empleados. El gerente de la empresa ha afirmado que la edad promedio de los empleados que utilizan el restaurante A es mayor en por lo menos 10 años a la edad promedio de los que utilizan el restaurante B. Para analizar esta afirmación se tomaron muestras de edades de los empleados que utilzan ambos restaurantes:

Restaurante	tamaño de muestra	$\overline{x}$	s
A	21	33.1	3.1
B	31	24.2	2.5

Sean X_1 : las edades de los empleados que utilizan el restaurante A, X_2 : las edades de los empleados que utilizan el restaurante B. Suponga que X_1 y X_2 se distribuyen normalmente.

(a) Utilizando regiones, a un nivel de significancia del 0.05, pruebe la hipótesis de que la varianzas de X_1 y X_2 son iguales. $R/\quad f_{0bs} = 1.5376 \in A$, se puede suponer variancias iguales.

$H_0: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$ $\quad n_1 = 21 \quad n = 31 \quad \alpha = 0{,}05$

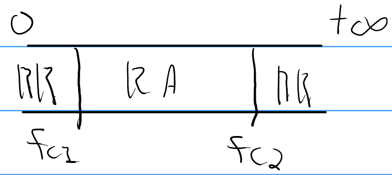
$v_1 = 20 \quad v_2 = 30 \quad \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$s_1 = 3{,}1 \quad s_2 = 2{,}5 \quad 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$H_1: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$

$$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{r_0} \text{ con } \nu_i = n_i - 1$$

$f_{obs} = \dfrac{3{,}1^2}{2{,}5^2} = 1{,}5376$



$f_{c1} = f_{0.025,\ 20,\ 30} = 0{,}42575$

$f_{c2} = f_{0.975,\ 20,\ 30} = 2{,}19516$

$RR:]0,\ 0.42575[\cup]2.19516,\ +\infty[$

$RA:]0.42575,\ 2.19516[$

R/ Como
$f_{c1} = 0{,}42575 < f_{obs} = 1{,}5376 < f_{c2} = 2{,}19516$
No se rechaza H_0

Con valor p $\quad v_1 = 20 \quad v_2 = 30 \quad \alpha = 0{,}05$

$f_{obs} = \dfrac{3{,}1^2}{2{,}5^2} = 1{,}5376 \rightarrow 2P(F > 1{,}5376)$

$= 2 \cdot 0{,}13970$

$= 0{,}2794$

R/ Como $p = 0{,}2794 > \alpha = 0{,}05$
No se rechaza H_0