

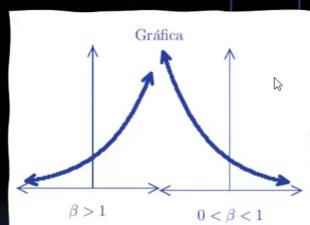
# Regresión NO lineal simple

## Modelos de regresión no lineales

- Muchas de las relaciones de las variables que se estudian a nivel estadístico, tienen comportamientos no lineales.
- Los modelos no lineales se determinan usualmente por dos métodos: mínimos cuadrados que ya se estudió para el caso lineal y el segundo, consiste en transformar las ecuaciones de los modelos no lineales a un modelo lineal, lo que llamaremos linealizar el modelo.

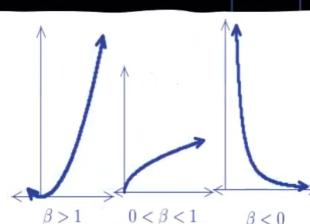
### Modelo exponencial

Modelo	Transformación
$y = \alpha \cdot \beta^x$	Aplicando logaritmo natural: $\ln(y) = \ln(\alpha) + x \cdot \ln(\beta)$
Condiciones:	Cambios de variable: $x_1 = x$ $y_1 = \ln(y); \beta_0 = \ln(\alpha); \beta_1 = \ln(\beta)$
$y \neq 0$	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1$
Asintota horizontal es el eje x	



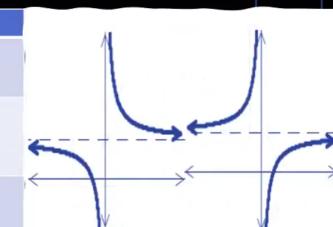
### Modelo potencial

Modelo	Transformación
$y = \alpha \cdot x^\beta$	Aplicando logaritmo natural: $\ln(y) = \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(x)$
Condiciones:	Cambios de variable: $y_1 = \ln(y); x_1 = \ln(x); \beta_0 = \ln(\alpha); \beta_1 = \beta$
Si $\beta > 0$ , el modelo pasa por (0,0)	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1$



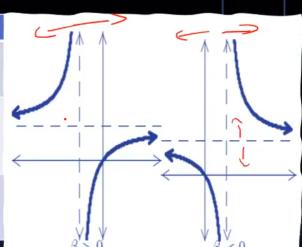
### Modelo recíproco

Modelo	Transformación
$y = \alpha + \frac{\beta}{x}$	$y = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$
Condiciones:	Cambios de variable: $y_1 = y; x_1 = \frac{1}{x}; \beta_0 = \alpha; \beta_1 = \beta$
Asintota horizontal $\neq$ eje x Asintota vertical eje y	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1$



### Modelo hiperbólico

Modelo	Transformación
$y = \frac{x}{\alpha x + \beta}$	$\frac{1}{y} = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$
Condiciones:	Cambios de variable: $y_1 = \frac{1}{y}; x_1 = \frac{1}{x}; \beta_0 = \alpha; \beta_1 = \beta$
Posee asíntotas verticales y horizontales que no necesariamente son los ejes	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1$



Aquí se puede sacar el  $a$  y  $b$  directo en la calculadora sin tener que calcularlo manual

$$b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{n} = \bar{y} - b\bar{x}$$

menu  $\rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow$  meter datos  $\rightarrow$

A ( $\rightarrow$  opt  $\rightarrow$  3)

**Ejemplo 97** Considere los datos en la siguiente tabla:

X varía poco  
Y varía mucho

x	18	19	19.5	19.7	19.9
Y	19	40	79	130	397

1. Escoja y justifique un modelo de regresión para  $Y$  como función de  $x$ , sabiendo que la variable  $x$  por su naturaleza toma valores menores que 20.

$y = \frac{x}{ax + b}$ , hiperbólico, suelen decir (usar  $a=a$   $b=b$ )

2. Encuentre los coeficientes de la ecuación de regresión para el modelo escogido.

$$y_1 = \frac{1}{x}, x_1 = \frac{1}{y}, y_1 = a + b \cdot x_1$$

X	Y	$x_1(\frac{1}{x})$	$y_1(\frac{1}{y})$
18	19	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{19}$
19	40	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{40}$
19.5	79	$\frac{1}{19.5}$	$\frac{1}{79}$
19.7	130	$\frac{1}{19.7}$	$\frac{1}{130}$
19.9	397	$\frac{1}{19.9}$	$\frac{1}{397}$

Estos a la calcu  
para encontrar  
 $y = a + bx$

$$y = -0,46977455 + 9,403241079 x$$

El modelo sería

$$y = \frac{x}{ax + b} = \frac{x}{-0,46977455x + 9,403241079}$$

3. Determine el valor esperado aproximado de  $Y$  cuando  $x = 17$ .

$$-0,96977455x + 9,903241079 \quad X$$

$$\begin{array}{rcl} 17 & & \approx 11,9959 \\ -0,96977455 \cdot 17 + 9,903241079 & & \end{array}$$

4. Encuentre un Intervalo de confianza del 95% para  $\alpha$  y  $\beta$  (los parámetros del modelo escogido en a).

Todos los datos es de la tabla nueva

$$\text{IC para } \alpha: a \pm t_{\delta/2, \nu} s \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n S_{xx}}} \text{ con } \nu = n - 2 \quad S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \quad S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

$$\text{IC para } \beta: b \pm t_{\delta/2, \nu} s \sqrt{\frac{1}{S_{xx}}} \text{ con } \nu = n - 2 \quad S_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} \quad s = \sqrt{\frac{S_{yy} - bS_{xy}}{n-2}}$$

$$y = -0,96977455x + 9,903241079 \quad n = 5 \quad \alpha = 0,05$$

el a y b salen de este (calcu)

$$a = -0,96977455 \quad b = 9,903241079$$

$$S_{xx} = 0,000001810206$$

$$S_{yy} = 0,00160073979$$

$$S_{xy} = 0,00017021809$$

$$S = 0,00021988282$$

$$t_{0,025,3} = \pm 3,18275$$

$x_i (\frac{1}{x})$	$y_i (\frac{1}{y})$
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{19}$
$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{1}{19,5}$	$\frac{1}{19}$
$\frac{1}{19,7}$	$\frac{1}{19,5}$
$\frac{1}{19,9}$	$\frac{1}{19,7}$

$$\sum x^2 = 0,01358826229$$

$$\text{Para } a \quad a \pm t_{\delta/2,\nu} s \sqrt{\frac{\sum x^2}{n S_{xx}}} \text{ con } \nu = n - 2$$

$$-0,96977955 - 3,18275 \cdot 0,00021988282, \begin{cases} 0,01358826229 \\ 5,00160073979 \end{cases}$$

$$= -0,9706655955$$

$$-0,96977955 + 3,18275 \cdot 0,00021988282, \begin{cases} 0,01358826229 \\ 5,00160073979 \end{cases}$$

$$= -0,9688835095$$

$$[R] -0,9706655955, -0,9688835095 [$$

$$\text{Para } b \quad b \pm t_{\delta/2,\nu} s \sqrt{\frac{1}{S_{xx}}} \text{ con } \nu = n - 2$$

$$9,403241079 - 3,18275 \cdot 0,00021988282, \begin{cases} I \\ 0,000001810206 \end{cases}$$

$$= 9,292145069$$

$$9,403241079 - 3,18275 \cdot 0,00021988282, \begin{cases} I \\ 0,000001810206 \end{cases}$$

$$= 9,564337089$$

$$[R] 9,292145069, 9,564337089 [$$

**Ejemplo 98** Seguidamente se muestra la distancia de frenado  $D$  (en pies) de un automóvil que viaja a la velocidad  $V$  (en millas por hora) a partir del instante en que se percibe el peligro.

X	Velocidad $V$ (mi / h)	20	30	40	50	60	70
Y	Distancia de frenado $D$ (pies)	54	90	138	206	292	396

1. Seleccione y justifique un modelo de regresión de la distancia de frenado dependiendo de la velocidad que lleva el automóvil.

$$y = a \cdot x^b, \text{ potencial} \rightarrow \ln(y) = \ln(a) + b \ln(x)$$

$$\ln(y) \quad a \quad b \quad \ln(x)$$

2. Encuentre la ecuación de regresión del modelo seleccionado en la parte (1).

$$\begin{array}{ll} \ln(20) & \ln(54) \\ \ln(30) & \ln(90) \\ \ln(40) & \ln(138) \\ \ln(50) & \ln(206) \\ \ln(60) & \ln(292) \\ \ln(70) & \ln(396) \end{array}$$

(a)  $\ln$

$$Y = -0,870228393 + 1,594556711 X$$

$$\ln(y) \quad a \quad b \quad \ln(x)$$

$$\ln(a) = a$$

$$\ln(a) = -0,870228393$$

$$\ln(a) = a$$

$$e^{\ln(a)} = e^a$$

$$a = e^a$$

$$a = e^{-0,870228393} = 0,91886$$

En este modo

hay que hacer

este despeje para  
el  $a$

$$b = b \rightarrow b = 1,594556711$$

El modelo sería  $y = a \cdot x^b, \text{ potencial}$

$$y = 0,91886 \cdot x^{1,594556711}$$

3. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para  $\alpha$  y  $\beta$

$$Y = -0.870228393 + [1.59455641] X$$

$X_1$	$Y_1$	
$\ln(20)$	$\ln(57)$	$a \pm t_{\delta/2,\nu}s\sqrt{\frac{\sum x^2}{nS_{xx}}}$ con $\nu = n - 2$
$\ln(30)$	$\ln(90)$	$S_{xx} = \sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n}$
$\ln(40)$	$\ln(138)$	$S_{yy} = \sum y_1^2 - \frac{(\sum y_1)^2}{n}$
$\ln(50)$	$\ln(206)$	$S_{xy} = \sum x_1 y_1 - \frac{(\sum x_1)(\sum y_1)}{n}$
$\ln(60)$	$\ln(292)$	$s = \sqrt{\frac{S_{yy} - bS_{xy}}{n-2}}$
$\ln(70)$	$\ln(396)$	

$$S_{xx} = 1.083910023$$

$$h = 6 \quad v = 9$$

$$S_{yy} = 2.779367722$$

$$a = -0.870228393$$

$$S_{xy} = 1.727558398$$

$$\varepsilon_x^2 = 87.26768032$$

$$S = 0.07053725723$$

$$\alpha = 0.10$$

$$a \pm t_{\delta/2,\nu}s\sqrt{\frac{\sum x^2}{nS_{xx}}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{0.05} = \pm 2.13185$$

$$-0.870228393 \pm 2.13185 \cdot 0.07053725723.$$

$$\begin{array}{r} 87.26768032 \\ \hline 6.1083910023 \end{array}$$

$$[-1.473052773, -0.2679039139]$$

Para el caso de alfa, al no ser este parámetro equivalente a  $B_0$ , se debe realizar la siguiente transformación para calcular su IC de 90% como sigue:

$$\alpha = e^\alpha, \text{ entonces}$$

$$[-1.473052773, -0.2679039139]$$

$$[0.229225, 0.765363]$$

$$b \pm t_{\delta/2, \nu} s \sqrt{\frac{1}{S_{xx}}} \text{ con } \nu = n - 2$$

$$b = 1,594556411$$

$$1,594556411 \pm 2,13185,0,07853725723.$$

1

$$1,083910023$$

$$\boxed{[1,37,93370091, 1,755911912]}$$

**Ejemplo 99** Considere los datos de la siguiente tabla:

$$\begin{array}{cccc} x: & 1 & 2 & 4 & 6 \\ Y: & 5 & 7 & 20 & 40 \end{array}$$

A partir de estos datos, estime el coeficiente  $\beta$  de la ecuación de regresión  $y = 3 + x^\beta$  trasformando el modelo a un modelo lineal y utilizando el método de mínimos cuadrados.

Linearizando el modelo

$$y = 3 + x^\beta$$

$$y - 3 = x^\beta$$

$$\ln(y - 3) = \beta \ln(x)$$

$y_1$        $\beta$        $x_1$

Hay que dejar  $\beta$  solo

para poder aplicar  $\ln$

y bajar  $\beta$

Aplicando mínimos cuadrados

$$y_1 = \beta x_1 \rightarrow y_1 - \beta x_1$$

$$f(\beta) = \sum (y_1 - \beta x_1)^2$$

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= \sum 2(y_1 - \beta x_1) \cdot -x_1 & x_1 && y_1 \\ &= -2 \sum x_1 y_1 - \beta \sum x_1^2 = 0 & \ln(2) && \ln(5-3) \\ &= \sum x_1 y_1 - \beta \sum x_1^2 = 0 & \ln(2) && \ln(7-3) \\ && & \ln(4) & \ln(20-3) \\ && & \ln(6) & \ln(40-3) \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\sum x_1 y_1}{\sum x_1^2} = \boxed{2,02372062}$$

$$\boxed{\therefore \text{El modelo es } y = 3 + x^{2,02372062}}$$