Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)

Si el tamaño inicial de una población es n_0 y el tiempo de duplicación es a, entonces el tamaño de la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 \cdot 2^{\frac{t}{a}}$$

Ejemplo 189

Considere una población inicial de 64 bacterias, si se sabe que para esta especie el tiempo de duplicación es de 3 días. Determine:

1. *¿Después de cuántos días la población total de bacterias es de 512?*
2. *¿En un mes (de 30 días) cuántas bacterias habrá?*

$n_0 = 64$

$a = 3$

$t = ?$

$n(t)$ = El tamaño de la poblacion

$$n(t) = 64 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

A) $n(t) = 512$

$$64 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 512$$

$$2^{\frac{t}{3}} = 8$$

$$2^{\frac{t}{3}} = 2^3$$

$$\frac{t}{3} = 3$$

$$\boxed{t = 9}$$

Cuando haya bases iguales se cancelan y se trabaja con los exponentes

R/ Despues de 9 dias se tendra 512 bacterias

B) $t = 30$

$$n(30) = 64 \cdot 2^{\frac{30}{3}}$$

$$= 65536$$

R/ Despues de 30 dias se tendra una

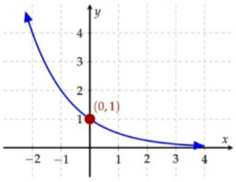
... Después de 30 días, se tendrá una
población de bacterias de 65536

Función exponencial

Considere la gráfica de la función $h(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ y complete las tablas que se le mostrarán luego.

Creciente

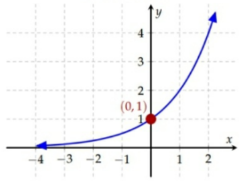
Caso: $0 < a < 1$



$f(x) = a^x$

$Df: \mathbb{R}$

Caso: $a > 1$



AH =
$y=0$

Bases:

I_x: No tiene

I_y: $(0,1)$

Monotonía:

AH: $y=0$

AH en ambas $y=0$

Bases:

I_x: No tiene

I_y: $(0,1)$

Monotonía:

AH: $y=0$

Propiedades de potencias

Propiedades
$a^0 = 1$, si $a \neq 0$
$a^1 = a$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, si $a \neq 0$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, si $b \neq 0$

Propiedades
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$, si $a \neq 0$, $b \neq 0$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Análisis de las funciones exponenciales

Definición 31 *Considere la función de la forma $f(x) = b \cdot a^{x-h} + k$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f es una función exponencial si y solo si $a \in]0,1[$ o bien $a \in]1,\infty[$.*

La base no puede ser negativa o cero ni 1

Ejemplo 190

Considere la función $g(x) = a^x$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ y observe que:

- *Si $a \in \mathbb{R}^-$, como por ejemplo $a = -2$ y $x = \frac{1}{2}$, entonces $g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.*
- *Si $a = 0$, entonces $g(x) = 0^x \Rightarrow g(x) = 0$ que es una función constante.*
- *Si $a = 1$, entonces $g(x) = 1^x \Rightarrow g(x) = 1$ que es otra función constante.*

Por lo que se deduce que necesariamente $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$

$x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \not< 0$

Ejemplo 191

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$ y encuentre:

1. *Las imágenes de -3 y 2*
2. *Las preimágenes de 1, $\frac{1}{81}$ y 729*

$-2^0 = -2$

$(-2)^0 = 1$

1) $3^{-3} = \frac{1}{9}$, $3^2 = 9$

2) $3^x = \frac{1}{81}$ $\quad 3^x = 729 \quad 3^x = 1$

$3^x = 3^{-4}$ $\quad$ $3^x = 3^6$ $\quad$ $3^x = 3^0$

$x = -4$ $\quad$ $x = 6$ $\quad$ $x = 0$

$0 < a < 1$ Decreciente

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$ $\quad$ pero si el expo es negativo

$a = \frac{1}{3}$ $\quad$ crece $\quad$ $\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 2}$

$0 < 1 < a$ cuando el valor de la base es mayor que uno y el exponente es positivo $\quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 2$

$3^x = 2$

$a = 2$ creciente

si el expo es negativo

$3^{-x} = 2$

Decreciente

Ejemplo 192

Analice la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} - 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x-5}$

$-3x-5=0$

$x = -\frac{5}{3}$

cuanto se mueve a la izq o der

$D_f = \mathbb{R}$

El que esta afuera

$AH = -2$

$A_{mb} =]-2, +\infty[$

I_x $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} - 2 = 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} = 2$

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{3-x} = 2$

$\cancel{2}^{-3+x} = \cancel{2}^1$

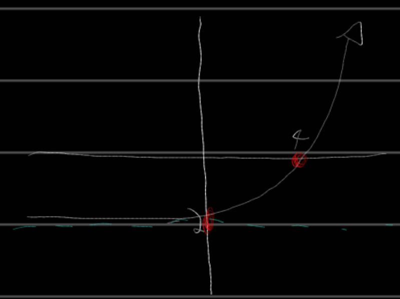
$-3+x = 1$

$\boxed{x = 4}$

$I_y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} - 2 = -\frac{15}{8}$

$\left(0, -\frac{15}{8}\right)$

Grafica



monotonia

crece

Ejercicio 30

Analice la función $f(x) = 2^{x-1} + 3$

$D_f = \mathbb{R}$

$AH = y = 3$

$Amb =]3, +\infty[$

$Iy = 2^{0-1} + 3$

$= 7$

$Ix =$ No tiene por que el +3 hace que no toque

Monotonia
Crece

$IX \quad 2x^{-1} + 3 = 0$

Algebraicamente $2x^{-1} = -3$

$\ln(2x^{-1}) = \ln(-3)$

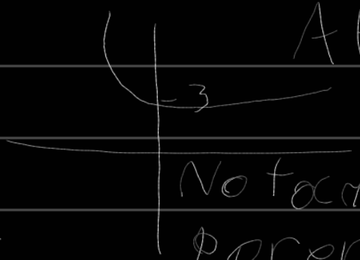
$(x-1) \cdot \ln(2) = \ln(-3)$

$\notin \mathbb{R}$

must be $x > 0$

Error

AH=3



No toca $x=0$
por ende
no tiene

Ejercicio 31

Analice la función $f(x) = 2^{-x+2} - 3$

$D = \mathbb{R}$

$AH: y = -3$

$Amb \;]-3, +\infty[$

$Iy = 2^{-0+2} - 3$

$= (0, 1)$

mono = Decreciente

$Ix = 2^{-x+2} - 3 = 0$

$2^{-x+2} = 3$

$\ln(2)^{-x+2} = \ln(3)$

$(-x+2)\ln(2) = \ln(3)$

$-x+2 = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$

$-x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2$

$x = -\frac{\ln(3)}{\ln(2)} + 2$

$\boxed{X = 0{,}42}$