Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

II Semestre, 2023
Tiempo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje total: 34 pts

Primer Examen Parcial

Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **7** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene dos horas y treinta minutos para contestar los ítems del examen.
3. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
4. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**5 puntos**] Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + z = y \\ x + 5y + 5z - 14 = 0 \end{cases}$$

donde x, y, z son incógnitas. Utilice el método de Gauss-Jordan para determinar el conjunto solución del sistema.**(PREGUNTA PARA EVALUAR ATRIBUTO CI, NIVEL INICIAL)**

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2\to F_2;-F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3\to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1\to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Port tanto de esta forma, $S = \{(\frac{7}{3} - \frac{5}{3}t, \frac{7}{3} - \frac{2}{3}t, t) \ \ con \ \ t \in \mathbb{R}\}$.

2. [**4 puntos**] Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Determine la matriz B tal que $A^T \cdot B - C = D$.

Solución:

Para que los tamaños lo permitan, la matriz que se busca debe tener orden 2×2, sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Así

$$\begin{aligned}
A^T \cdot B + C = D &\implies \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&\implies \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\implies \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ -c & -d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\
&\implies \begin{cases} 3a+2c = 8 \\ 3b+2d = -2 \\ -c = -1 \\ -d = 1 \\ 2a+c = 5 \\ 2b+d = -1 \end{cases} \\
&\implies c = 1, d = -1, a = 2, b = 0.
\end{aligned}$$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a. [**3 puntos**] Calcule el determinante de cada una de las matrices A, B y C.

   a) [**3 puntos**] Determine el valor de $|\frac{1}{2} \cdot A^2| + |5C^T B^{-1}|$.

Solución:

Note que $|A| = 4$, $|B| = -4$ (matriz triangular), $C = 0$ (fila múltiplo de otra)
$|\frac{1}{2} \cdot A^2| + |5C^T B^{-1}| = |\dfrac{1}{2} \cdot A^2| + 125|C^T| \cdot |B^{-1}| = \dfrac{1}{4}|A|^2 + \dfrac{125|C|}{|B|} = 4 + 0 = 4$

4. [**5 puntos**] Sean A, B y C matrices cuadradas 3×3 invertibles. Si se sabe que $\dfrac{1}{2}A = B^{-1}C$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule C^{-1}.
Sugerencia: primero utilice propiedades matriciales para determinar C^{-1}.

Solución
Se tiene por propiedades matriciales que $\dfrac{1}{2}A = B^{-1}C = C^{-1} = 2A^{-1}B^{-1}$, de donde se debe

calcular B^{-1} y al calcularla se tiene $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Luego de esta forma

$$C^{-1} = 2A^{-1}B^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. [**5 puntos**] Determine $z \in \mathbb{C}$ que satisface simultaneámente las siguientes condiciones :

- $|\overline{z} + (1-i)| = 5$
- $Arg(z - (1+2i)) = \dfrac{3\pi}{4}$

Solución

Sea $z = a+bi$, luego $\overline{z} = a-bi$ y de esta forma $\overline{z}+(1-i) = (a+1)-(1+b)i$, así de la primera condición $|\overline{z}+(1-i)| = \sqrt{(a+1)^2+(1+b)^2} = 5$, es decir, $\mathbf{(a+1)^2 + (1+b)^2 = 25}(*)$, por otro lado de la segunda condición $Arg(z-(1+2i)) = Arg((a-1)+(b-2)i) = \dfrac{3\pi}{4}$, de donde debe cumplirse $a-1<0$ y $b-2>0$, además $\dfrac{b-2}{a-1} = -1 \Rightarrow \mathbf{b = 3 - a}$, ahora sustituyendo en $(*)$ se obtiene $2a^2-6a-8=0$ con soluciones $a=-1, a=4$, como $-1-1=-2<0$ solo tomamos $a=-1$ y así $b=4$ que satisface $4-2=2>0$, por lo que el número complejo que satisface ambas condiciones es $\mathbf{z = -1+4i}$.

6. [**4 puntos**] Factorice en $\mathbb{C}$ el polinomio $P(z) = z^4 - 90z + 35z^2 - 10z^3 + 234$ si se sabe que $z = 5-i$ es un cero de $P(z)$.

Solución

Aplicando división sintética al polinomio $P(z)$ y teorema de los ceros conjugados, se tiene :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -10 & 35 & -90 & 234 & \\
 & 5-i & -26 & 45-9i & -234 & 5-i \\
\hline
1 & -5-i & 9 & -45-9i & \boxed{0} & \\
 & 5+i & 0 & 45+9i & 5+i & \\
\hline
1 & 0 & 9 & \boxed{0} & & \\
 & 3i & -9 & 3i & & \\
\hline
1 & 3i & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

de esta forma $P(z) = (z-5+i)(z-5-i)(z-3i)(z+3i)$

7. [**5 puntos**] Calcule y exprese el número complejo $z=(1+i)^{-i}+(2\sqrt{3}-2i)^5$ en la forma rectangular.

Solución

Note
- $(1+i)^{-i}=e^{\mathrm{Ln}(1+i)^{-i}}=e^{-i\mathrm{Ln}(\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right))}=e^{-i\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}=e^{-i\ln\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}$

$=e^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos(-\ln\sqrt{2})+i\,\mathrm{sen}(-\ln\sqrt{2})\right)\approx 2,06-0,73i$

Por otro lado,
- $(2\sqrt{3}-2i)^5=\left(4\mathrm{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)^5=1024\mathrm{cis}\left(\frac{-5\pi}{6}\right)=\cdots\approx -886,81-512i$

De esta forma $z=(1+i)^{-i}+(2\sqrt{3}-2i)^5\approx -884,71-512,73i$