Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
MA-1103: Cálculo y Álgebra Lineal

Tiempo máximo: 2:15 horas
Puntaje máximo: 30 puntos
II Semestre 2019

Segundo Examen Parcial

Sábado 19 de octubre

Indicaciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

---

1. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^3+8=0$ y grafique las soluciones en un mismo sistema de coordenadas. (4 pts)

Solución:

$$z^3+8=0 \Rightarrow z^3=-8 \Rightarrow z=\sqrt[3]{-8}.$$

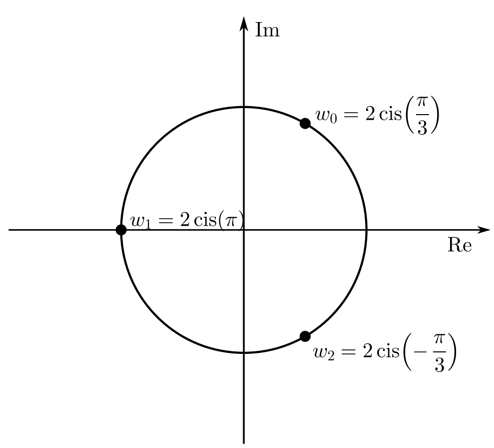
Para $k=0,1,2$ se cumple que las raíces cúbicas de -8 son de la forma:

$$w_k=\sqrt[3]{8}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right).$$

Luego, dichas raíces son las siguientes:

$$w_0=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),\quad w_1=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\operatorname{cis}(\pi),\quad w_2=2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

La representación gráfica de las raíces cúbicas es la siguiente:



2. Determine la forma rectangular $a+bi$ de $w=\dfrac{(-1+i)^8\cdot i^{31}}{\alpha-i}$, siendo α una constante real. (4 pts)

Solución:

$$z=-1+i\to\begin{cases}|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\\[2ex]\theta=\arctan\left(\dfrac{1}{-1}\right)+\pi=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

Entonces:

$$(-1+i)^8=\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^8=\left(\sqrt{2}\right)^8\operatorname{cis}(6\pi)=16.$$

$$i^{31}=i\cdot i^{30}=i\cdot\left(i^2\right)^{15}=i\cdot(-1)^{15}=-i.$$

Luego, se tiene que

$$w=\frac{(-1+i)^8\cdot i^{31}}{\alpha-i}=\frac{-16i}{\alpha-i}\cdot\frac{\alpha+i}{\alpha+i}=\frac{-16\alpha i+16}{\alpha^2+1}=\frac{16}{\alpha^2+1}-\frac{16\alpha i}{\alpha^2+1}.$$

3. Considere el polinomio $P(x)=kx^3+(2k+1)ix^2+(k+1)x$ con $k\in\mathbb{C}$ constante, siendo $x=\dfrac{i}{2}$ un cero de P.

   a) Determine el valor de k. (2 pts)

   Solución:

   Si $x=\dfrac{i}{2}$ es un cero de P entonces se cumple que $P\left(\frac{i}{2}\right)=0$, es decir

$$k\left(\frac{i}{2}\right)^3+(2k+1)\,i\left(\frac{i}{2}\right)^2+(k+1)\left(\frac{i}{2}\right)=0$$

$$k\cdot\frac{i^3}{8}+(2k+1)i\cdot\frac{i^2}{4}+(k+1)\frac{i}{2}=0$$
$$\frac{-ki}{8}+\frac{(2k+1)(-i)}{4}+\frac{(k+1)i}{2}=0$$

   Al resolver se obtiene

$$-ki-4ki-2i+4ki+4i=0\Rightarrow -ki=-2i\Rightarrow k=2.$$

b) Factorice en $\mathbb{C}$ completamente el polinomio P. (3 pts)

Solución:
Usando el valor de $k = 2$ se obtiene el polinomio

$$P(x) = 2x^3 + 5ix^2 + 3x.$$

Al factorizarlo se procede de la manera siguiente

$$2x^3 + 5ix^2 + 3x = x(2x^2 + 5ix + 3).$$

Para el polinomio cuadrático podemos usar la fórmula general, donde:

$$\Delta = (5i)^2 - 4(2)(3) = -25 - 24 = -49.$$

$$x = \frac{-5i + \sqrt{-49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5i \pm 7i}{4} = \begin{cases} \dfrac{i}{2} \\ -3i \end{cases}$$

Así, la factorización en completa $\mathbb{C}$ del polinomio P es

$$P(x) = 2x\left(x - \frac{i}{2}\right)(x + 3i) = x(2x - i)(x + 3i).$$

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: (5 pts)

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z + 13w = 27 \\ 2x - y + 4w = 10 \\ x - y + z + 6w = 10 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 2 & 13 & 27 \\ 2 & -1 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & 13 & 27 \end{array}\right)$$

$$\underset{-3f_1+f_3}{\xrightarrow{-2f_1+f_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right) \underset{-f_2+f_3}{\xrightarrow{f_2+f_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3+f_1}{\xrightarrow{2f_3+f_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Así,

$$\left\{\begin{array}{r} x+w=7 \\ y-2w=4 \\ z+3w=7 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x=7-w \\ y=4+2w \\ z=7-3w \end{array}\right.$$

Finalmente, el conjunto solución del sistema lo representa $S=\left\{\begin{pmatrix} 7-t \\ 4+2t \\ 7-3t \\ t \end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\}$

5. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, la cual es invertible. Determine usando el método de cofactores, únicamente la fila 1 de la matriz A^{-1}. (5 pts)

Solución:

Se sabe que de acuerdo al método de cofactores se cumple $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot \operatorname{adj}(A)$. Entonces

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-1.$$

Al calcular la columna 1 de la matriz de cofactores se tiene que

$$C(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & ... & ... \\ A_{21} & ... & ... \\ A_{31} & ... & ... \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{11} & ... & ... \\ -M_{21} & ... & ... \\ M_{31} & ... & ... \end{pmatrix},$$

donde:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1, \qquad -M_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5, \qquad M_{31}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1.$$

Así, la primera fila de la matriz $\operatorname{adj}(A)$ es

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la fila de la matriz A^{-1} es

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Considere las matrices M y N de dimensión 2×3, P una matriz de dimensión 3×2 y A una matriz de dimensión 2×2 invertible.

   a) Utilice propiedades de las operaciones con matrices para despejar la matriz P de la ecuación siguiente (3 pts)

$$A^{-1} \cdot (P^T + 2M) = N.$$

Solución:

$$A^{-1} \cdot (P^T + 2M) = N \Leftrightarrow P^T + 2M = AN \Leftrightarrow P^T = AN - 2M \Leftrightarrow P = (AN - 2M)^T.$$

$\lrcorner$

   b) Determine la matriz P de forma explícita, si (4 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
P &= (AN - 2M)^T \\
&= \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right]^T \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 0 & 12 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \right]^T \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & 14 & 2 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 14 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\lrcorner$

Marco Gutiérrez Montenegro.