Función exponencial inversa (logaritmo)

Los logaritmos son las funciones inversas de las funciones exponenciales, así la expresión $f(x)=\log_a(x)$ es la inversa de $g(x)=a^x$, por lo tanto se tiene que $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ ya que $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, además, se tiene que:

a : recibe el nombre de base.

x : se denomina argumento.

y : es llamado logaritmo.

Nota 3

Bases especiales

Nombre	Base	Notación	Útil para
logaritmo común*	10	$\log_{10}(x)=\log(x)$	Establecer escalas en las ciencias
logaritmo natural	$e\approx 2.718281\ldots$	$\log_e(x)=\ln(x)$	Describir fenómenos naturales
logaritmo binario	2	$\log_2(x)=\lg(x)$	Análisis de algoritmos e informática

* *También es llamado logaritmo decimal*

Se puede definir al logaritmo como la inversa de la función exponencial de la siguiente manera:

- *Si la base es a, entonces se cumple que* $\boxed{y=\log_a(x)\Leftrightarrow a^y=x}$.
- *Si la base es 10, entonces se cumple que* $\boxed{y=\log(x)\Leftrightarrow 10^y=x}$.
- *Si la base es e, entonces se cumple que* $\boxed{y=\ln(x)\Leftrightarrow e^y=x}$.

1) Halle intersección con eje x

$f(x)=\log_2(x+2)-3$

$\log_2(x+2)-3=0$

$\log_2(x+2)=3$

$2^3=x+2$

$8=x+2$

$x=6$

$\boxed{R/\ (6,0)}$

2) Inversa de $\log_3(x-3)+5$

$\log_3(x-3)+5=y$

$\log_3(x-3)=y-5$

$3^{y-5}=x-3$

$3^{y-5}+3=y$

$\boxed{R/\ f^{-1}(x)=3^{x-5}+3}$

3) Halle el conjunto solución de $\log_2(x+5)=1$

$\log_2(x+5)=1$

$2^1=x+5$

$-3=x$

$S=\{-3\}$

Ejemplo 194

Considere la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ $f(x)=\log_2 x$ y calcule:

1. *Las imágenes de 1, 2 y $\frac{1}{4}$*
2. *Las preimágenes de 0 y 4*

1) $\log_2(1)=0\to(1,0)$

$\log_2(2)=1\to(1,1)$

$\log_2(\frac{1}{4})=-2\to(\frac{1}{4},-2)$

$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$ $\log_2(2^{-2})=-2\cdot\log_2(2)=-2$

$\boxed{n\cdot\log_a(x)=\log_a(x)^n}$

2) $\log_2(x)=0$

$2^0=x$

$x=1$

$(1,0)$

$\log_2(x)=4$

$2^4=x$

$x=16$

$(16,4)$

Ejemplo 195

Encuentre la función inversa de $h(x) = 3^{-6-2x} - 1$, *con* $h : \mathbb{R} \to [-1, \infty[$

Por la base 3 de la exponencial

$$3^{-6-2x} - 1 = y$$

$$3^{-6-2x} = y + 1$$

$$\log_3\left(3^{-6-2x}\right) = \log_3(y+1)$$

$$-6-2x \cdot \log_3(3) = \log_3(y+1)$$

$$-6-2x \cdot 1 = \log_3(y+1)$$

$$-2x = \log_3(y+1) + 6$$

$$x = \frac{-\log_3(y+1)+6}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-\log_3(x+1)+6}{2}$$

Inversa de $f(x) = 2^{-3x+2} - 5$

$$2^{-3x+2} - 5 = y$$

$$2^{-3x+2} = y + 5$$

$$\log_2\left(2^{-3x+2}\right) = \log_2(y+5)$$

$$-3x+2 \cdot \log_2(2) = \log_2(y+5)$$

$$-3x + 2 = \log_2(y+5)$$

$$-3x = \log_2(y+5) - 2$$

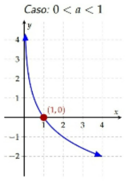
$$x = \frac{2 - \log_2(y+5)}{3}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{2 - \log_2(x+5)}{3}}$$

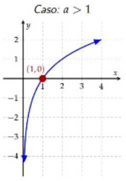
Función logarítmica

Considere las gráficas de la función $f(x) = \log_a x$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *y complete las tablas que se le muestran a continuación:*

Caso: $0 < a < 1$



Caso: $a > 1$



Bases:

I_x: 1, 0

I_y: NO

Bases:

I_x: (1, 0)

I_y: NO

Monotonía: Decreciente
AV: $X=0$

Monotonía:
AV: $X=0$

Ejemplo 199

Encuentre la función inversa de $f(x)=\log_3(x-1)+2$, *con* $h:[1,\infty[\to\mathbb{R}$

$$\log_3(x-1)+2=y$$
$$\log_3(x-1)=y-2$$
$$3^{y-2}=x-1$$
$$3^{y-2}+1=x$$
$$x=3^{y-2}+1$$
$$\boxed{f^{-1}(x)=3^{x-2}+1}$$

Ejemplo 200

Analice la función $f(x)=\log_2(3-2x)+\frac{2}{5}$

AV $3-2x=0$ Tomar argumento

$-2x=-3$ y igualar a 0

$\boxed{x=\frac{3}{2}}$

Iy $\log_2(3-2\cdot(0))+\frac{2}{5}$

Remplazar $\log_2(3)+\frac{2}{5}$

0 en y $\boxed{=1{,}98}$

Ix $\log_2(3-2x)+\frac{2}{5}=0$

$\log_2(3-2x)=-\frac{2}{5}$

$2^{-\frac{2}{5}}=3-2x$

$2^{-\frac{2}{5}}-3=-2x$

$\dfrac{2^{-\frac{2}{5}}-3}{-2}=x$

$x=1{,}12$

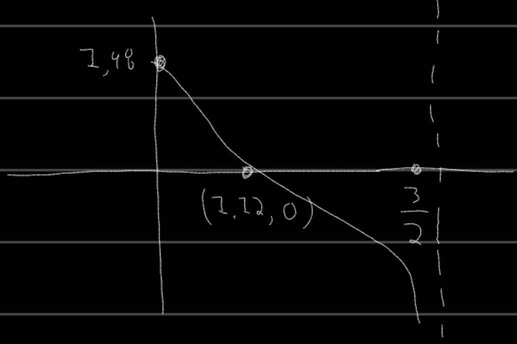
$\boxed{(1{,}12,0)}$

Monotonia

$a=2$, $a>1$

parece creciente pero la variable del argumento $3\ \boxed{-2x}$ hace que sea decreciente

Grafica



Dominio máximo
Si $g(x) = \log_a f(x)$, *entonces* $D_g = \{x \mid f(x) > 0\}$

Ejemplo 201

Determine el dominio máximo de $f(x) = 2 - \ln(x - 3)$

$x - 3 > 0$

$x > 3$

$D_f \;]3, +\infty[$

Dm de $\log_2(-3x+7) - 5\log_2(4x+5) - 2$

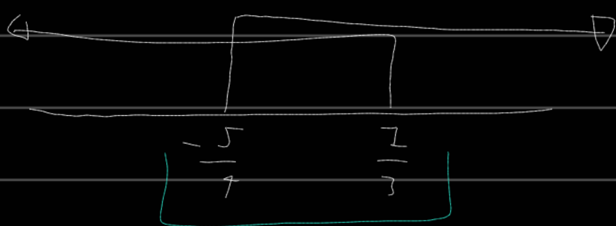
$-3x + 7 > 0 \qquad 4x + 5 > 0$

$-3x > -7 \qquad 4x > -5$

$x < \frac{7}{3} \qquad x < -\frac{5}{4}$

$]-\infty, \frac{7}{3}[\qquad]-\frac{5}{4}, +\infty[$

Como son 2, se busca la interseccion de ambas



$$\boxed{D_f =]-\frac{5}{4}, \frac{7}{3}[}$$

Asíntotas
La función $f(x) = b \cdot \log_a P(x) + k$ *posee asíntotas verticales cuando* $P(x) = 0$.
Si $P(x) = mx + b$, *entonces la forma general de la asíntota es* $x = -\frac{b}{m}$

Intersección con el eje de las ordenadas (eje vertical)
Sea $f(x) = \log_a P(x) + k$, *la intersección* f *con el eje y es de la forma* $Iy : (0, f(0))$.

Intersección con el eje de las abscisas (eje horizontal)

Sea $f(x)=\log_a P(x)+k$, para obtener las intersecciones f con el eje x se debe resolver $f(x)=0$ y son de la forma $I_x : (\#,0)$

Propiedades
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
$\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)},\ \forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ $\ln(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(e)},\ \forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$
$\log_a(1)=0$ $\ln(1)=0$

Cambio de base

Propiedades
$\log_a(x\cdot y)=\log_a(x)+\log_a(y)$ $\ln(x\cdot y)=\ln(x)+\ln(y)$
$\log_a(x^n)=n\cdot\log_a(x)$ $\ln(x^n)=n\cdot\ln(x)$
$\log_a(a)=1$ $\ln(e)=1$

Identidades logarítmicas

Ejemplo 202

Simplifique al máximo

$$\log_3 5\cdot\log_2 3\cdot\log_5 6\cdot\log_2 6$$

Hay un 10
siempre $\log_{10}(x)$

$$\frac{\cancel{\log(5)}}{\cancel{\log(3)}}\cdot\frac{\cancel{\log(3)}}{\log(2)}\cdot\frac{\log(6)}{\cancel{\log(5)}}\cdot\frac{\log(6)}{\log(2)}$$

$$\frac{\log(6)\cdot\log(6)}{\log(2)\cdot\log(2)}$$

$$\frac{[\log(6)]^2}{[\log(2)]^2}$$

$$\left(\frac{\log(6)}{\log(2)}\right)^2$$

$$(\log_2(6))^2$$

$$\log_2^2(6)$$

$\boxed{\text{Acá NO}}$

$\boxed{2\log(x)}$

$$\log^2(x)\neq\log(x)^2$$

$$\log^2(x)=\log(x)\cdot\log(x)$$

$$\log(x^2)=\log(x\cdot x)$$