# Variables aleatorias discretas

## Medidas de tendencia central

1. Dada la siguiente tabla:

| $X$ | 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(X_i)$ | 0,40 | 0,10 | 0,20 | 0,30 |

a) Calcule $E(X)$

$$E(x) = 1 \cdot 0{,}40 + 3 \cdot 0{,}10 + 4 \cdot 0{,}20 + 5 \cdot 0{,}30 = \boxed{3}$$

b) Calcule $Var(X)$

$$E(x^2) = 1^2 \cdot 0{,}40 + 3^2 \cdot 0{,}10 + 4^2 \cdot 0{,}20 + 5^2 \cdot 0{,}30 = 12$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$12 - 3^2$$

$$\boxed{3}$$

c) Calcule $\sigma_X$ $\sqrt{3}$

2. Sea $X$ una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad $f_X$ está dada por la siguiente tabla:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_X(x)$ | $\frac{7}{17}$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{2}{17}$ | $\frac{3}{17}$ | $\frac{4}{17}$ |

a) Calcule $E(X)$

$$E(x) = 0 \cdot \frac{7}{17} + 1 \cdot \frac{1}{17} + 2 \cdot \frac{2}{17} + 3 \cdot \frac{3}{17} + 4 \cdot \frac{4}{17} = \boxed{\frac{30}{17}}$$

b) Calcule $Var(X)$

$$E(x^2) = 0^2 \cdot \frac{7}{17} + 1^2 \cdot \frac{1}{17} + 2^2 \cdot \frac{2}{17} + 3^2 \cdot \frac{3}{17} + 4^2 \cdot \frac{4}{17} = \frac{100}{17}$$

$$\frac{100}{17} - \left(\frac{30}{17}\right)^2 = \boxed{\frac{800}{289}}$$

c) Calcule $\sigma_X$

$$\sqrt{\frac{800}{289}} = \boxed{\frac{20\sqrt{2}}{17}}$$

3. Sea $X$ una variable aleatoria discreta, para la cual se sabe que su rango es $\{1, 2, 3, 4\}$ y se tiene que $f_X(1) = 0{,}13$, $f_X(2) = 0{,}0169$, $f_X(3) = 0{,}002197$ y se desconoce el valor de $f_X(4)$

*a*) Determine el valor de $f_X(4)$

$$0{,}13 + 0{,}0169 + 0{,}002197 + f_X(4) = 1$$

$$0{,}149097 + f_X(4) = 1$$

$$\boxed{f_X(4) = 0{,}850903}$$

*b*) Calcule $E(X)$

$$1 \cdot 0{,}13 + 2 \cdot 0{,}0169 + 3 \cdot 0{,}002197 + 4 \cdot 0{,}850903$$

$$\boxed{3{,}574003}$$

*c*) Calcule $Var(X)$

$$1^2 \cdot 0{,}13 + 2^2 \cdot 0{,}0169 + 3^2 \cdot 0{,}002197 + 4^2 \cdot 0{,}850903$$

$$\boxed{1{,}0583}$$

*d*) Calcule $\sigma_X$ $\sqrt{1{,}0583} = \boxed{1{,}02873709}$

4. Dada la siguiente tabla:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0,10 | 0,15 | 0,25 | $k$ | 0,20 |

*a*) Determine el valor de $k$.

$$0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}25 + k + 0{,}20 = 1$$

$$\boxed{k = 0{,}30}$$

*b*) Encuentre la función acumulada de $X$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 0{,}10 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0{,}15 + 0{,}10 & , \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}10 & , \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}10 & , \quad 4 \leq x \leq 5 \\ 1 & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

c) Calcule $E(X)$

$1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}30 + 5 \cdot 0{,}20 = \boxed{\frac{67}{20}}$

d) Calcule $Var(X)$

$1^2 \cdot 0{,}10 + 2^2 \cdot 0{,}15 + 3^2 \cdot 0{,}25 + 4^2 \cdot 0{,}30 + 5^2 \cdot 0{,}20 = \frac{51}{4}$

$$\frac{51}{4} - \left(\frac{67}{20}\right)^2 = \boxed{\frac{611}{400}}$$

e) Calcule $\sigma_X$ $\sqrt{\frac{611}{400}} = \boxed{\frac{\sqrt{611}}{20}}$

5. La tienda Zapatiño se ha percatado que en su sucursal más nueva reciben máximo 8 clientes por hora. Si $X$ es una variable aleatoria discreta, correspondiente a la cantidad de clientes en la tienda, por hora, entonces considere la siguiente tabla:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(X)$ | 0,05 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,20 | 0,25 | 0,10 | 0,05 | 0,05 |

a) Demuestre que $f$ es una distribución de probabilidad para $X$.

$0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}05$

$\boxed{= 1 \checkmark}$

b) Calcule $E(X)$ R/ 4

c) Calcule $Var(X)$ R/ $\frac{41}{10}$

6. Determine la varianza de la variable $Y = \frac{X}{4} - 7$ si $E(Y) = -6$ y $E(X^2) = 17$

$$E(Y) = \frac{1}{4} E(x) - 7$$
$$-6 = \frac{1}{4} E(x) - 7$$
$$\frac{1}{4} E(X) = 1$$
$$E(x) = 4$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$Var(x) = 17 - 4^2$$
$$Var(x) = 1$$

$$Var(Y) = \frac{1}{16} Var(x) - 0$$
$$\frac{1}{16} \cdot 1$$
$$\boxed{\frac{1}{16}}$$

7. Determine la varianza de $Y = \frac{X}{18} - 2$ si $E(Y) = 23$ y $E(X^2) = 250\,000$

$$E(Y) = \frac{1}{18} \cdot E(x)$$
$$23 = \frac{1}{18} E(x) - 2$$
$$\frac{1}{18} E(x) = 25$$
$$E(x) = 450$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$Var(x) = 250000 - [450]^2$$
$$Var(x) = 47500$$

$$Var(Y) = \frac{1}{324} \cdot Var(x)$$
$$\frac{1}{324} \cdot 47500$$
$$\boxed{\frac{11875}{81}}$$

8. Sean $X, Y$ dos variables aleatorias discretas tales que $Var(3X+7) = 10$, $E(4X+2) = 9$.

Calcule $E(X^2)$

$$Var(3x+7) = 10$$
$$9 Var(x) = 10$$
$$Var(x) = \frac{10}{9}$$

$$E(4x+2) = 9$$
$$4E(x) + 2 = 9$$
$$E(x) = \frac{7}{4}$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$E(x^2) = Var(x) + [E(x)]^2$$
$$\frac{10}{9} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{601}{144}}$$

9. Considere la variable aleatoria $X$ con las condiciones $Y = 3X+5$, $E(Y) = 14$, $E(Y^2) = 250$.

a) Determine $E(X)$

$E(Y) = E(3x+5)$

$14 = 3E(x)+5$

$3E(x) = 9$

$\boxed{E(x) = 3}$

b) Determine $Var(X)$

$Var(Y) = Var(3x+5)$

$Var(Y) = 9\,Var(x)$

$Var(x) = \frac{1}{9}\,Var(Y)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$250 - (14)^2$

$54$

$Var(x) = \frac{1}{9}\,Var(Y)$

$= \frac{1}{9} \cdot 54$

$= \boxed{6}$

c) Determine $\sigma_X$ $\boxed{\sqrt{6}}$

10. Considere la variable aleatoria $Z$ tal que $E(Z) = 2$ y $Var(Z) = 6$. Determine $E(W)$, donde $W = 3Z^2 - 2Z + 5$ R/ $E(W) = 31$

$E(W) = E(3z^2 - 2z + 5)$

$E(W) = 3E(z^2) - 2E(z) + 5$

$E(W) = 3E(z^2) - 2 \cdot 2 + 5$

$E(W) = 3E(z^2) + 1$

$Var(z) = E(z^2) - \{E(z)\}^2$

$E(z^2) = Var(z) + \{E(z)\}^2$

$6 + 2^2$

$= 10$

$E(W) = 3E(z^2) + 1$

$3 \cdot 10 + 1$

$\boxed{31}$

# Función de distribución

1. Sea $X$ una variable aleatoria discreta. Pruebe que $f_X(x) = \dfrac{2}{3^{x+1}}$ es función de distribución, con $x = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{2}{3^{x+1}}$$

$$\frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{0}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \boxed{1 \checkmark}$$

2. Sea $X$ una variable aleatoria discreta. Determine el valor de $k$ para que su función de distribución sea $f_X(x) = \dfrac{k}{7^x}$, con $x = 0, 1, 2, \ldots$ R/ $k = \dfrac{6}{7}$

$$k \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{x} = 1$$

$$k \cdot \frac{7}{6} = 1$$

$$\boxed{k = \frac{6}{7}}$$

3. Sea $X$ una variable aleatoria discreta. Determine el valor de $k$ para que su función de distribución sea R/ $k = \frac{35}{6}$

$$f_X(x) = \frac{k}{6^{2x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{k}{6} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{36}\right)^{0} = 1$$

$$\frac{k}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{36}}{35} = 1$$

$$\boxed{k = \frac{35}{6}}$$

4. Sea $X$ una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Determine el valor de $k$ R/ $k = 18$

$$\frac{1k}{27} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 1$$

$$\frac{1k}{27} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{k}{18} = 1$$

$$\boxed{k = 18}$$

5. Sea $X$ una variable aleatoria discreta. Determine el valor de $k$ para que su función de distribución sea R/ $k = 5$

$$f_X(x) = \frac{k^x \cdot e^{-5x}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$e^{-5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^x}{x!} = 1$$

$$e^{-5} \cdot e^{k} = 1$$

$$e^{-5+k} = 1$$

$$\ln(e^{-5+k}) = \ln(1)$$

$$-5 + k = 0$$

$$\boxed{k = 5}$$

6. Sea $X$ una variable aleatoria discreta con función generadora de momentos $m_X(t) = \dfrac{e^{kt}}{2 - e^t}$ y $E(X) = 3$. Determine el valor de $k$. R/ $k = 11$

$$E(x) = m'_x(0)$$

$$m'_x(t) = \frac{e^{kt}}{2 - e^t}$$

$$\frac{\cancel{e^{kt}}^{1} \cdot k \cdot (2 - \cancel{e^t}^{1}) - \cancel{e^{kt}}^{1} \cdot -\cancel{e^t}^{1}}{\cancel{(2 - e^t)^2}^{1}}$$

$$m'_x(0) = k + 1$$

$$E(x) = k + 1$$

$$3 = k + 1$$

$$\boxed{k = 2}$$

7. Una variable aleatoria $X$ toma valores $1, 2, 3, \ldots, 25$ con probabilidades

$$f_X(i) = k \cdot (0{,}16)^{\frac{i}{2}}$$

*a*) Encuentre el valor de $k$.

$$k \sum_{i=1}^{25} (0{,}16)^{\frac{i}{2}} = 1$$

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{25} (0{,}16)^{\frac{i}{2}}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

*b*) Determine la probabilidad de que esta variable sea superior a 5.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$$

$$1 - \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{5}(0{,}16)^{\frac{i}{2}}$$

$$\boxed{0{,}868032}$$

8. Sea $X$ una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - k & \text{si} \quad x = -1 \\ \frac{1}{6} + k^2 & \text{si} \quad x = 0 \\ 2k & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

con $R_X = \{-1, 0, 1\}$

*a*) Encuentre el valor de $k$.

$$\frac{1}{2} - k + \frac{1}{6} + k^2 + 2k = 1$$

$$k^2 + k + \frac{2}{3} = 1$$

$$k^2 + k - \frac{1}{3} = 0$$

$$\boxed{k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}} \qquad k = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$$

✓ x

9. Sea $X$ una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Determine el valor de $k$ para que $f_X$ sea función de probabilidad.

$$\left[ k \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} \right] = 1$$

$$\frac{k}{2} + \frac{e^2}{2} = 1$$

$$k + e^2 = 2$$

$$\boxed{k = 2 - e^2}$$

10. Sea $X$ una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Determine el valor de $k$ para que $f_X$ sea función de probabilidad. R/ $k = \frac{1}{e^2}$

$$\frac{1}{4} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} k \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{e^2 k}{2} = 1$$

$$1 + e^2 k = 2$$

$$e^2 k = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{e^2}}$$

11. Sea $X$ una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{2, 4, 6, 8\}$ y función de distribución acumulada

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 2 \\ 0{,}2 & \text{si} \quad 2 \leq k < 4 \\ 0{,}6 & \text{si} \quad 4 \leq k < 6 \\ 0{,}8 & \text{si} \quad 6 \leq k < 8 \\ 1 & \text{si} \quad k \geq 8 \end{cases}$$

*a*) Determine la función de distribución de probabilidad de $X$.

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

**1.** $x = 2$

$$f_X(2) = F_X(2) - F_X(k < 2) = 0.2 - 0 = \boxed{0.2}$$

**2.** $x = 4$

$$f_X(4) = F_X(4) - F_X(k < 4) = 0.6 - 0.2 = \boxed{0.4}$$

**3.** $x = 6$

$$f_X(6) = F_X(6) - F_X(k < 6) = 0.8 - 0.6 = \boxed{0.2}$$

**4.** $x = 8$

$$f_X(8) = F_X(8) - F_X(k < 8) = 1.0 - 0.8 = \boxed{0.2}$$

15. Sea $Y$ una variable aleatoria discreta cuya función generadora de momentos tiene criterio:

$$m_Y(t) = \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine la esperanza y la varianza de $Y$

R/ $E(Y) = \frac{11}{10}$ y $Var(Y) = \frac{69}{100}$

$$E(Y) = 0 + \frac{3e^t}{10} + \frac{4e^{2t}}{5}$$

$$m'_Y(0) = \boxed{\frac{11}{10}}$$

$$Var(Y) = m''_Y(0) - m'_Y(0)$$

$$m''_Y(t) = \frac{3e^t}{10} + \frac{4e^{2t}}{5}$$

$$m''_Y(t) = \frac{3e^t}{10} + \frac{8e^{2t}}{5}$$

$$m''_Y(0) = \frac{19}{10}$$

$$Var(Y) = m''_Y(0) - m'_Y(0)$$

$$\frac{19}{10} - \left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{69}{100}}$$

17. Sean $X$ y $Y$ variables aleatorias tales que $m_X(t) = \dfrac{5}{(5-t)^2}$ y $Y = X^2 + 3X - 9$

*a*) Determine la esperanza de la variable $X$

$$m'_X(t) = \frac{5}{(5-t)^2}$$

$$= \frac{0 - 5 \cdot 2(5-t) \cdot (0-1)}{(5-2)^4}$$

$$= \frac{10\cancel{(5-t)}}{\cancel{(5-t)^4}}$$

$$= \frac{10}{(5-t)^3}$$

$$m'_X(0) = \boxed{\frac{2}{25}} \leftarrow E(x)$$

*b*) Determine la esperanza de la variable $Y$

$$E(Y) = E(x^2 + 3x - 9)$$
$$= E(x^2) + 3E(x) - 9$$

$$m''_X(t) = \frac{10}{(5-t)^3} \quad \frac{0 - 10 \cdot 3\cancel{(5-t)^2} \cdot (0-1)}{\cancel{(5-t)^6}} = \frac{30}{(5-t)^4}$$

$$E(x^2) + 3E(x) - 9$$

$$\frac{6}{125} + 3 \cdot \frac{2}{25} - 9$$

$$m''_X(0) = \frac{6}{125}$$

$E(x^2)$

$$\boxed{\frac{-1089}{125}}$$

18. Sea $X$ una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = \frac{3}{4^{x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

*a*) Compruebe que $f_X(x)$ satisface las condiciones necesarias para ser una función de probabilidad.

$$\frac{3}{4} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 1$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} = 1 \quad , \quad \boxed{1 = 1} \checkmark$$

*b*) Determine la función generadora de momentos de $X$

$$\frac{3}{4} \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$\frac{3}{4} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{e^t}{4}\right)^x$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{\left(\frac{e^t}{4}\right)^0}{1 - \frac{e^t}{4}}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\frac{4-e^t}{4}}$$

$$\frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{4-e^t}$$

$$\boxed{\frac{3}{4-e^t}}$$