Estimación de máxima verosimilitud

Definición 23. (**Estimación puntual**) Considere el estadístico $\widehat{\Theta}$ asociado a un parámetro desconocido θ para muestras de tamaño n. Una estimación puntual de θ (o simplemente estimación de θ) es un valor $\widehat{\theta}$ generado por $\widehat{\Theta}$ en una muestra aleatoria específica de tamaño n.

En este tipo de estimaciones el problema es que no se puede medir el error de estimación; sin embargo, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, se espera que mejor sea la estimación.

De acuerdo con lo estudiado en el primer capítulo, dada una muestra observada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de una muestra aleatoria M se tienen las siguientes estimaciones puntuales de los respectivos parámetros:

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	$\overline{X}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
σ^2	S^2	$s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
σ	S	$s = \sqrt{s^2}$
p	$\widehat{P}$	$\widehat{p} = \dfrac{b}{n}$, b es el número de éxitos en la muestra

Empíricamente se maneja que $\overline{x}$ es una buena estimación de μ si el tamaño de muestra n es mayor o igual a 30; s es una buena estimación de σ si n es mayor o igual a 30, y $\widehat{p}$ es una buena estimación de p si $n\widehat{p} \geq 5 \wedge n(1-\widehat{p}) \geq 5$. Estos son resultados empíricos producto de la observación de varias simulaciones, no son teoremas; por lo tanto, según lo que se quiera estimar, puede suceder que las reglas anteriores sean muy exigentes.

Por otro lado, suponga que se tiene una variable X_1 asociada a una población 1 con media poblacional μ_1 y una variable X_2 asociada a una población 2 con media poblacional μ_2.

Estimación Puntual

Total $N = 20$ Tamaño muestra $n = 3$

$P = \frac{3}{20}$

$n_1 \rightarrow p_1 = \frac{1}{3}$

$n_2 \rightarrow P_2 = \frac{2}{3}$

$n_3 \rightarrow P_3 = 1 \quad \frac{3}{3}$

La función de verosimilitud es la probabilidad de que una muestra aleatoria observada ocurra en función del parámetro desconocido.

Geovani usa g en vez de L

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \to \text{Distribucion de probabilidad}$$

Parametro   valores muestrales

$\boxed{\text{Basicamente el producto de todas las evaluaciones muestrales}}$

Pasos

1- Derivar

2- Igualar a 0 y despejar

La estimación de máxima verosimilitud consiste en maximizar la función de verosimilitud.

Ejemplo

La distribución de densidad de la variable aleatoria X viene dada por

$f(x) = \frac{k}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{k-1}$ para $0 \leq x \leq 3$ y k constante.

Dadas las observaciones $x_1 = 0,3$ $x_2 = 0,1$ $x_3 = 0,9$ encuentre la estimación de máxima verosimilitud de k.

$$f(x) = \frac{k}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{k-1}$$

$$L(k|x) = \frac{k}{3} \cdot \left(\frac{0,3}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{k}{3} \cdot \left(\frac{0,1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{k}{3} \cdot \left(\frac{0,9}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{k^3}{3^3} \cdot \left(\frac{0,3}{3} \cdot \frac{0,1}{3} \cdot \frac{0,9}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{k^3}{27}\left(\frac{1}{1000}\right)^{k-1}$$ Como tiene expo, se usa log

$$\ln(L(k|x)) = \ln\left(\frac{k^3}{27} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^{k-1}\right)$$

Continua abajo

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(L(k|x)) = \ln\left(\frac{k^3}{27} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{k^3}{27}\right) + \ln\left(\frac{1}{1000}\right)^{k-1}$$

$$\ln(k^3) - \ln(27) + (k-1)\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$
$$3\ln(k) - \ln(27) + (k-1)\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

Ahora derivando

$$\ln(L(k|x)) = 3\ln(k) - \ln(27) + (k-1)\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$\frac{1}{L(k|x)} \cdot L'(k|x) = 3 \cdot \frac{1}{x} - 0 + 1 \cdot \ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$\frac{L'(k|x)}{L(k|x)} = \frac{3}{k} + \ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

Igualar a 0

$$\frac{3}{k} + \ln\left(\frac{1}{1000}\right) = 0$$

$$\frac{3}{k} = -\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$\boxed{k = -\frac{3}{\ln\left(\frac{1}{1000}\right)}}$$

Ejemplo

Considere una muestra aleatoria $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, donde X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x) = \frac{xe^{\frac{-x}{\omega}}}{\omega^2}$ con $x, \omega > 0$. Verifique que el estimador de máxima verosimilitud de ω es $\hat{\omega} = \frac{\overline{X}}{2}$. **(5 puntos)**

$$L(x,w) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i e^{\frac{-x_i}{w}}}{w}$$

El estimador es el que se deriva, lo demas es constante

Por ser $x_1, x_2 ... x_n$

Ojo, si tengo $\prod_{i=k}^{n} f_x(t)$ y aplico ln, pasa a ser una suma $\sum_{i=k}^{n} \ln(f_x(x))$

Entonces

$$\ln(L(x,w)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i e^{\frac{-x_i}{w}}}{w^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + \ln\left(e^{-\frac{x_i}{w}}\right) - \ln(w^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{x_i}{w} - 2\ln(w)$$

Continua abajo

$$\boxed{\sum f(x) \pm g(x) = \sum f(x) \pm \sum g(x)}$$

$$\boxed{\sum_{i=p}^{n} k = nk}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{x_i}{w} - \ln(w^2)$$

Este no tiene i entonces es una constante

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} 2\ln(w)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n\ln(w)$$

Derivando

$$\frac{L'(x,w)}{L(x,w)} =$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}^{0} - \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n\ln(w)$$

Como eso no tiene w, su derivada es 0

Se mantiene la constante y se deriva w

$$\frac{-1}{w} = \frac{1}{w^2}$$

$$-\frac{1}{w}\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n\ln(w)$$

se deriva normal

n constante

$$\frac{1}{w^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{2n}{w}$$

Finalmente, igualar a 0

$$\frac{1}{w^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{2n}{w} = 0$$

$$\frac{1}{w^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{2nw}{w \cdot w}$$

$$\frac{1}{w^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{2nw}{w^2}$$

$$\frac{1}{w^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 2nw\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - 2nw = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2nw$$

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	$\overline{X}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$$w = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n} = \boxed{\frac{\overline{x}}{2}}$$

Determine el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro λ de una variable aleatoria $X \sim P(\lambda)$ en una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$.

Utilice este resultado para encontrar el valor x_5 de modo que $\lambda = 4$, en la muestra $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ y x_5 . (8 puntos)

$\bar{x} = \lambda$ en poison

Entonces

Son 5 $x \longrightarrow 5$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 4$$

$$= \frac{1 + 2 + 1 + 3 + x_5}{5} = 4$$

$$= \frac{7 + x_5}{5} = 4$$

$$= 7 + x_5 = 20$$

$$= \boxed{x_5 = 13}$$

Se puede hacer por definicion

$$4 = \frac{7 + x_5}{5} \quad \Rightarrow x_5 = 13$$

$$L(x,\lambda) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} \cdot \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} \cdot \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} \cdot \frac{\lambda^{x_5} e^{-\lambda}}{x_5!} = \frac{\lambda^{7+x_5} e^{-5}}{12 x_5!}$$

$$\Rightarrow \ln(L(x,\lambda)) = (7 + x_5)\ln\lambda - 5\lambda - \ln(12 x_5!)$$

$$\Rightarrow \frac{L'(x,\lambda)}{L(x,\lambda)} = \frac{7 + x_5}{\lambda} - 5$$

$$L'(x,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \frac{7 + x_5}{4} = 5$$