

Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden k como $E(X^k)$. Además, se define la función generadora de momentos para X por

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in R_X} e^{kt} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera:

■ Esperanza

Consiste en calcular la primera derivada de la función generadora de momentos y luego evaluarla en $t = 0$ así:

$$E(X) = m'_X(0)$$

■ Varianza

Consiste en calcular la segunda derivada de la función generadora de momentos, luego evaluarla en $t = 0$ y finalmente restarle la esperanza al cuadrado, así:

$$Var(X) = m''_X(0) - [m'_X(0)]^2$$

Sea Y una variable aleatoria discreta cuya función generadora de momentos tiene criterio:

$$m_Y(t) = \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine la esperanza y la varianza de Y

$$\text{R/ } E(Y) = \frac{11}{10} \text{ y } Var(Y) = \frac{69}{100}$$

$$m'_Y(t) = \left(\frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5} \right)^1$$

$$0 + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t} \cdot 2}{5}$$

$$\frac{3e^t}{10} + \frac{4e^{2t}}{5}$$

$$\text{Ahora evaluar en } t=0 \quad \frac{3 \cdot e^0}{10} + \frac{4 \cdot e^{2 \cdot 0}}{5}$$

$$E(Y) = \frac{11}{10}$$

$$m^{II}y(t) = \left(\frac{3e^t}{20} + \frac{4e^{2t}}{5} \right)^{-1}$$

$$\frac{3e^t}{20} + \frac{4 \cdot e^{2t} \cdot 2}{5}$$

$$\frac{3e^t}{20} + \frac{8 \cdot e^{2t}}{5}$$

Evaluuar $m^{II}y(t)$ en $t=0$ y restar $(m^Iy(0))^2$

$$\left(\frac{3 \cdot e^0}{20} + \frac{8 \cdot e^{2 \cdot 0}}{5} \right) - \left(\frac{11}{20} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{69}{200}}$$

Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = \frac{2^{x+1}}{4^x}, \text{ con } x = 2, 3, 4, \dots$$

a) Determine la función generadora de momentos de X

$$R / m_X(t) = \frac{e^{2t}}{2 - e^t}$$

$$M_X(t) = \infty$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{2^{x+1}}{4^x}$$

Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden k como $E(X^k)$. Además, se define la función generadora de momentos para X por

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in R_X} e^{kt} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera:

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{2^{x+1}}{4^x}$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{e^t + 2}{4} \right)^x$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{e^t}{2} \right)^x$$

valor de t ?

$$\frac{e^t}{2} (1 + e^t) + \ln(2)$$

$$\sum \left(\frac{\left(\frac{e^t}{2} \right)^2}{1 - \frac{e^t}{2}} \right) = \sum \left(\frac{\frac{e^{2t}}{4}}{\frac{2 - e^t}{2}} \right) = \frac{e^{2t}}{2(2 - e^t)}$$

$$m_X(t) = \frac{e^{2t}}{2(2 - e^t)} + C \ln(2)$$

Esperanza ?

Varianza ?