Principios de conteo

Principio de la suma y producto

1. Juan tiene 3 camisas y 5 pantalones ¿Cuántas maneras tiene de vestirse? R/ 15

2. En el grupo hay 15 hombres y 10 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede escoger un hombre y una mujer para pasar a la pizarra? R/ 150

3. Se tienen cinco libros en español, seis libros en francés y ocho libros en ruso ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar dos libros que no estén en la misma lengua? R/ 118

4. Un médico tiene que viajar de San José a Liberia y desea detenerse en Puntarenas. Si el viaje de San José a Puntarenas lo puede hacer en carro, tren o avioneta y de Puntarenas a Liberia puede hacerlo en carro o avioneta ¿De cuántas maneras puede realizar el viaje? R/ 6

5. ¿De cuántas maneras se pueden escoger al azar dos cartas sucesivamente de una baraja de 52 cartas tales que la primera carta sea un A y la segunda no sea una Q? R/ 188

6. Considere el conjunto $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$. Sea X el conjunto de números de tres cifras formados con los elementos del conjunto A, de tal manera que ninguno se repita.

   a) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto X? R/ 120

   b) ¿Cuántos números del conjunto X son múltiplos de 5? R/ 20

   c) ¿Cuántos números del conjunto X son menores que 360?

   d) ¿Cuántos números del inciso anterior son pares?

7. ¿Cuántas permutaciones se pueden formar con los números $0, 1, 3, 5, 6, 9$ si el número 3 está después de la segunda posición? R/ 144

8. ¿Cuántos números telefónicos de 7 dígitos se pueden construir con los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ si?

   a) No hay restricciones R/ 10 000 000

   b) Los números deben ser de líneas residenciales, es decir, no pueden empezar con las cifras $0, 1, 3, 8$ R/ 6 000 000

   c) Los números no se pueden repetir, deben empezar con 1 o con 2 y deben terminar en número par (tomando el cero como par) R/ 60 480

9. Una pequeña asociación está formada por 15 personas, se desea formar la directiva de la asociación (un presidente, un vicepresidente y un secretario) ¿De cuántas maneras de pueden efectuar estos nombramientos? R/ 2 730

10. El colegio San Bartolomé tiene 5 grupos de quinto año, 9 grupos de cuarto año y 18 grupos de noveno año. Una empresa regalará una fiesta a un grupo de tercer ciclo de dicho colegio. Si el grupo se elige al azar ¿De cuántas maneras se puede seleccionar? R/ 32

11. Un grupo de una escuela está formado por 17 niñas y 13 niños ¿De cuántas maneras se puede elegir al estudiante que representará al grupo en el próximo acto cívico? R/ 30

12. En un concurso se tienen 5 hombres y 6 mujeres, los cuales deben tratar de conseguir sentarse en una banca de cinco personas, una vez terminada la música ¿De cuántas maneras, al finalizar la música, se pueden obtener cinco personas sentadas en la banca de forma intercalada (no hay dos hombres ni dos mujeres sentadas juntas)? R/ 4 200

13. Se tiene una baraja inglesa, la cual consiste en 52 cartas divididas cuatro palos: diamantes, corazones (ambos de color rojo), espadas y tréboles (ambos de color negro). Además, cada palo consiste en las cartas: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. Si se sacan 5 cartas al azar:

   a) Determine la cantidad de manos de cinco cartas en las cuales, se tienen 4 cartas del mismo número. R/ 432

   b) ¿De cuántas maneras se puede formar una mano de cinco cartas tomadas de una baraja de 52 cartas? R/ 2 598 960

14. 30 personas se van a colocar en 3 filas, cada fila con 10 personas. Marco y Mario son amigos y quieren quedar en la misma fila y juntos (uno a la par del otro). Determine el total de maneras en que ocurre esta situación. R/ $6 \cdot C(30,8) \cdot 8! \cdot C(20,10) \cdot (10!)^2$

15. El examen de admisión de cierta universidad consta de 80 preguntas de selección única, donde 50 son de razonamiento matemático y las otras 30 de razonamiento verbal. Además, cada pregunta tiene cinco opciones de respuesta. Determine el número de maneras distintas de contestar la prueba si:

    a) Se dejan en blanco 10 preguntas o 15 preguntas de todas las preguntas dispuestas en la prueba. R/ $C(80,10) \cdot 5^{70} + C(80,15) \cdot 5^{65}$

    b) Se dejan en blanco 8 preguntas de razonamiento matemático y 6 preguntas en blanco de razonamiento verbal R/ $C(50,8) \cdot 5^{42} \cdot C(30,6) \cdot 5^{24}$

16. Se tiene una baraja de naipe (52 cartas: 13 espadas, 13 corazones, 13 tréboles y 13 diamantes) Se eligen 5 cartas al azar

    a) ¿De cuántas maneras se puede obtener full (3 cartas con igual número y 2 con igual número)? R/ 3 744

    b) ¿De cuántas maneras se puede obtener color (5 cartas de un mismo palo)? R/ 5 148

    c) ¿Qué es más probable obtener en una mano de 5 cartas: color o cuadra (4 cartas con exactamente el mismo número)? R/ Color

17. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 3 números del 1 al 20, tal que su suma sea divisible por 3? R/ 384

18. Considere el conjunto $S_{25} = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. Recuerde que los múltiplos de 3 son: $0, 3, 6, \ldots$ Determine el número de subconjuntos de S_{25} de 6 elementos que tienen:

    a) Exactamente 2 múltiplos de 3 R/ 66 640

    b) Al menos un múltiplo de 3 R/ 164 724

    c) Exactamente 2 múltiplos de 5 y exactamente 2 múltiplos de 3 R/ 17 836

19. ¿Cuántos números múltiplos de 5 y de 4 cifras se pueden formar con los dígitos del 0 al 9, si no se pueden repetir cifras en cada uno de esos números? R/ 952

20. Determine la cantidad de números pares de 3 dígitos distintos que se pueden formar con 1, 3, 4 y 6. R/ 12

21. Se tienen diez bolas enumeradas del uno al diez, del uno al seis son verdes y el resto rojas

    a) ¿De cuántas maneras se pueden elegir cinco bolas con al menos tres verdes? R/ 186

    b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir cinco bolas con a lo sumo tres verdes? R/ 186

22. Se tiene una urna con 12 bolas enumeradas del 1 al 12. Una persona debe seleccionar 4 de ellas y colocarlas en fila en el orden en que las seleccionó ¿De cuántas maneras se pueden extraer las 4 bolas de forma que la tercera tenga un número múltiplo de 3? R/ 3 960

23. En la librería **ABC S.A.** tienen cuatro marcas de lapiceros azules X, Y, Z, W. Suponiendo que los lapiceros azules de una misma marca son idénticos ¿De cuántas maneras puede Jorge comprar 10 lapiceros? si:

    a) No hay restricciones. R/ 286

    b) Debe comprar exactamente dos lapiceros marca Z. R/ 45

    c) Debe comprar al menos 2 lapiceros de cada marca. R/ 10

    d) De la marca X hay solamente 3 lapiceros. R/ 202

24. En un grupo del **TEC** hay 10 mujeres y 10 hombres. Se deben seleccionar 12 personas para un comité ¿De cuántas maneras se puede realizar la selección? si:

    a) No hay restricciones. R/ 125 970

    b) María y Carlos deben estar en el comité. R/ 43 758

    c) Debe haber seis mujeres y seis hombres.

    d) Debe haber un número par de mujeres.

    e) Debe haber más mujeres que hombres. R/ 40 935

    f) Debe haber ocho hombres como mínimo.

25. El estudiante de primaria que desee ingresar al colegio **Bienestar Seguro** debe realizar una prueba de 20 ítems de selección única distribuidos en 5 ítems sobre cada una de las siguientes disciplinas: matemática, ciencias, español y estudios sociales. Cada ítem tiene 4 opciones de respuesta ¿De cuántas maneras se puede contestar esta prueba? si:

    a) No hay restricciones R/ 5^{20}

    b) Se deben dejar exactamente dos ítems sin contestar y estos deben ser de una misma disciplina. R/ $10 \cdot 4^{19}$

    c) Se debe dejar exactamente un ítem sin contestar para cada disciplina. R/ $5^4 \cdot 4^{16}$

    d) Se debe contestar al menos un ítem de cada disciplina. R/ $5^{20} - (4 \cdot 5^{15} - 6 \cdot 5^{10} + 4 \cdot 5^5 - 1)$

26. En una sala hay 54 personas y se va a votar por una propuesta. Al hacer el conteo se detecta que 43 personas votaron a favor, 8 en contra y 3 se abstuvieron. Determine el total de maneras en que se pueden distribuir las personas en esta votación. R/ $(54C43) \cdot (11C8)$

27. En una fiesta hay 20 personas.

    a) Se desea elegir al menos tres personas para que realizar una actividad. ¿Cuántas maneras hay de elegir las personas? R/ $\displaystyle\sum_{i=3}^{20} \binom{20}{i}$

    b) ¿Cuántas maneras hay de elegir un número par de personas? R/ $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} \binom{20}{2i}$

28. Hay 20 personas en una sala y se quiere elegir 11 personas para regalarles un cuaderno idéntico a cada uno ¿De cuántas maneras se pueden elegir las 11 personas? R/ 167 960

29. Suponga que la Asamblea Legislativa está conformada por 16 diputados demócratas, 26 republicanos y 11 minoritarios. Se debe hacer una comisión de 8 diputados ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión, de forma que haya 3 diputados demócratas, 4 diputados republicanos y un diputado minoritario? R/ 92 092 000

Principio de inclusión-exclusión

1. Una banca tiene 6 lugares enumerados desocupados ¿De cuántas maneras se puede sentar Karla, Anthony y Jorge en la banca? R/ 210
2. Se tiene una canasta con 50 bolas numeradas del 1 al 50. Las bolas del 1 al 30 son verdes y las demás rojas ¿De cuántas maneras se puede elegir una bola que sea verde, con número par o con número múltiplo de 3? R/ 43
3. Se tiene una canasta con 30 bolas numeradas del 1 al 30. Determine el número de maneras de elegir 5 bolas, de forma que:
   a) Exactamente tres bolas tengan múltiplos de tres. R/ 22 800
   b) Al menos una bola tenga un número múltiplo de cinco. R/ 100 002
   c) Al menos cuatro múltiplos de cinco y a lo sumo un múltiplo de tres. R/ 156
4. ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? si:
   a) No hay restricciones. R/ 2 401
   b) No se pueden repetir los números. R/ 840
   c) No se pueden repetir los números y el dígito de las centenas es impar R/ 480
5. Entre el 20 y el 50 ¿Cuántos números naturales hay que no son múltiplos de 6? R/ 26
6. ¿Cuántos números enteros, entre 1 y 100, no son divisibles por 2, por 3 y por 5? R/ 26
7. Del 1 al 500 ¿Cuántos números no son múltiplos de 6 ni de 11? R/ 379
8. Del 1 al 600 ¿Cuántos son los números naturales que no son múltiplos de 6, ni de 11 ni de 17? R/ 428
9. Del 1 al 100 ¿Cuántos son los números pares que no son múltiplos de tres o múltiplos de cinco? R/ 74

10. ¿Cuántos números naturales hay del 1 al 400 que son múltiplos de?:

   a) Siete R/ 57
   b) Once R/ 36
   c) Siete y Once R/ 5
   d) Siete o Once R/ 88
   e) Siete, Once o Trece R/ 112
   f) Seis o Tres R/ 133
   g) Seis y Tres R/ 66

11. ¿Cuántos números de nueve cifras tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7? R/ 200 038 110

12. Se tiene una partida de póker, en la cual María se encuentra jugando. Mientras avanza el juego, María observa su mano de póker y se hace la siguiente pregunta: ¿De cuántas maneras se me puede dar una mano de póker, de tal forma que al menos tenga una carta de cada palo? R/ 685 464

13. El alfabeto español consta de 27 letras diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las 27 letras del alfabeto, de manera que no se presenten las palabras **DOS**, **PAR**, **VEN**, **QUIZ**? R/ $27! - (3 \cdot 25! + 24!) + (3 \cdot 23! + 3 \cdot 22!) - (21! + 3 \cdot 20!) + 18!$

14. Se van a colocar 15 fichas numeradas del 1 al 15 en seis celdas identificadas del 1 al 6. Determine el total de maneras en que pueden colocarse si:

   a) Cada celda contiene al menos la ficha con su número.
   b) Ninguna celda contiene una ficha con número inferior a su número.
   c) Ninguna celda queda con menos de dos o con más de tres fichas.

15. Hay n ladrillos rojos y 3 ladrillos azules, todos indistinguibles (salvo por el color). Bryan los coloca en una hilera. Determine el total de formas de colocarlos si entre dos ladrillos azules siempre debe haber la misma cantidad de ladrillos rojos.

Principio del palomar

1. El **Estadio Nacional de Costa Rica** tiene capacidad aproximada de 35 000 aficionados. Demuestre que, si está en toda su capacidad, existe al menos un grupo de 96 personas o más que cumplen años el mismo día. R/ 96

2. ¿Cuál es la mínima cantidad de personas que debe asistir a un corto musical, si se quiere asegurar que al menos 9 personas tengan su primer apellido que comience con la misma letra? R/ 217

3. En **Pandalandia**, próximamente se realizarán elecciones para elegir un presidente, sin embargo, un candidato realiza un cambio en su estrategia política, con el propósito de reducir los casos de corrupción presentes en la zona. Para ello, se plantea regalar $1 000 a cada uno de los ciudadanos en su día de cumpleaños. Si en Pandalandia viven 6 543 personas, demuestre que al menos en un día, se pagarán $17 000.

4. En el **Teatro Nacional de México**, se tiene una capacidad de 800 personas. Si el teatro se encuentra en su máxima capacidad:

   a) ¿Se puede asegurar que ese día, habrá al menos 2 personas cuyo nombre inicia y termina con la misma letra (Aarón y Adrián, Emilio y Eduardo)? R/ Sí

   b) ¿Se puede asegurar que habrá al menos tres personas, de los asistentes al teatro, que cumplan años el mismo día? R/ Sí

Diagramas de Venn

1. En un colegio hay 300 estudiantes; de ellos, a 80 no les gusta la clase de deporte; a 95 no les gusta la clase de música, y a 25 no les gusta ninguna de las dos clases. ¿A cuántos estudiantes les gustan las clases de deporte y música? R/ 150

2. En la universidad Bienestar Seguro, en este año se matricularon 200 personas en la carrera de computación, de las cuales se tiene la siguiente información: hay 125 matrículas en el curso Matemática Discreta; 115 en una deportiva y 80 en el curso Programación I. Además, con respecto a la matrícula en estos tres cursos, se sabe que: 45 matricularon el curso Programación I y la deportiva; 15 solamente en el curso de programación; 50 matricularon solamente el curso de matemática y la deportiva, y 30 matricularon los tres cursos.

   a) ¿Cuántos estudiantes no matricularon ninguno de los tres cursos? R/ 25

   b) ¿Cuántos estudiantes matricularon solamente el curso Matemática discreta? R/ 25

3. En una escuela se tiene un total de 2 300 estudiantes de los cuales 200 practican fútbol, atletismo y natación; 550 practican fútbol y atletismo; 400 practican atletismo y ciclismo; 300 practican únicamente ciclismo; 1 000 practican atletismo y 1 400 practican fútbol. Además, se sabe que los que no practican ningún deporte son una tercera parte de los que únicamente practican fútbol y ciclismo. Determine:

   a) El número de estudiantes que practican únicamente fútbol.

   b) El número de estudiantes que practican ciclismo.

4. En un estudio de 270 estudiantes, se halló que 90 sobresalían en matemática, 90 sobresalían en artes y 90 en deportes. A su vez, se halló que 30 sobresalían en matemática y artes, 30 en deportes y artes, 10 en las tres disciplinas y 50 solamente en deportes. Justifique utilizando Diagramas de Venn lo siguiente:

   a) ¿Cuántos estudiantes sobresalen en matemática y deportes? R/ 20

   b) ¿Cuántos estudiantes no sobresalen en dichas disciplinas? R/ 70

5. De un total de 350 agricultores en cierta región, 260 cultivan remolachas; 100 cultivan ñames; 70 cultivan rábanos; 40 cultivan remolachas y rábanos; 40 cultivan ñames y rábanos y 30 cultivan remolachas y ñames. Determine el número de agricultores que cultivan simultáneamente remolacha, ñame y rábano. R/ 30

6. En un departamento de matemáticas de 40 profesores, existen cuatro organizaciones profesionales diferentes: NCTM (N), MAA (M), AMS (A) y SSMA (S). Sabemos que 21 son miembros de NCTM, 26 son miembros de MAA, 19 pertenecen a AMS y 17 son miembros de SSMA. Además, 15 están en NCTM y MAA, 6 están en NCTM y AMA, 9 están en NCTM y SSMA, 14 en MAA y AMS, 10 están en MAA y SSMA, y 11 están en AMS y SSMA. También, se sabe que 6 están en NCTM, MAA y AMS, 5 están en NCTM, MAA y SSMA, 4 están en NCTM, AMS y SSMA y 9 están en MAA, AMS y SSMA. Finalmente, 4 personas pertenecen a las cuatro organizaciones ¿Cuántos miembros de la facultad pertenecen a ninguna de estas organizaciones? R/ 2

7. Los tres eventos más populares para los compradores de un determinado modelo de automóvil nuevo son:

   - A: el comprador elige transmisión automática.
   - B: el comprador elige motor diésel.
   - C: el comprador elige sistema de navegación integrado.

   Sabiendo que $P(A) = 0{,}70$, $P(B) = 0{,}75$, $P(C) = 0{,}80$, $P(A \cup B) = 0{,}80$, $P(A \cup C) = 0{,}85$; $P(B \cup C]) = 0{,}90$ y $P(A \cup B \cup C) = 0{,}95$, calcule la probabilidad de:

   a) El comprador elige al menos una de las tres opciones. R/ 0,95

   b) El comprador no elige ninguna de las tres opciones. R/ 0,05

   c) El comprador elige solamente la opción de transmisión automática. R/ 0,15

   d) El comprador elige exactamente exclusivamente una de las tres opciones. R/ 0,30

Anagramas

1. Determine el número de anagramas de las siguientes palabras:

   a) **UBICAR** R/ 720

   b) **COMBINAR** R/ 40 320

   c) **HOLA** R/ 24

2. Considere la palabra **PREGUNTA** ¿Cuántos anagramas se obtienen de esta palabra si deben aparecer al menos un par de vocales en orden alfabético? R/ 33 600

3. Considere la palabra **JUPITER** ¿Cuántos anagramas se obtienen de esta palabra de modo que las vocales estén en orden alfabético?

4. Considere la palabra **ANAGRAMAS** ¿Cuántos anagramas se obtienen de esta palabra de modo que no queden dos vocales juntas? R/ 1 800

5. Considere la palabra **CUADRO**

   a) ¿Cuántos anagramas comienzan y terminan con una consonante?

   b) ¿Cuántos anagramas comienzan con la letra A y terminan con la letra D?

6. Considere la palabra **TEMPERATURA** ¿Cuántos anagramas se obtienen si?

   a) No hay restricciones R/ 2 494 800

   b) La letra M se encuentra después de la sétima posición y que las letras R, U, T, A aparecen juntas en cualquier orden R/ 241 920

7. Considere la palabra **TORTUGUERO** ¿Cuántos anagramas se pueden formar sí?

   a) Inicia con vocal y las letras OGO están juntas en cualquier orden R/ 6 930

   b) No debe haber vocales antes de la quinta posición R/ 5 400

8. Determine el número de anagramas de la palabra **CONFITE**, tal que:

   a) Inician con vocal y terminan con consonante. R/ 1 440

   b) Inician con c o con e y terminan con vocal. R/ 600

9. Considere la palabra **EDEPACIEMAC**

   a) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra? R/ 1 663 200

   b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las E estén ubicadas en el centro y se tengan al menos dos vocales antes de la E? R/ 5 040

10. Considere la palabra **ACONTECIMIENTO**

    a) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra?

    b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las vocales se encuentran en los primeros 10 lugares? R/ 397 296 900

    c) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra que inicien con consonante y no tengan dos o más vocales juntas? R/ 4 665 000

11. Considere la palabra **PRINCIPIO**

    a) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra? R/ 30 240

    b) Debe comenzar con la letra R y además, las letras C, O, R, N, deben ir juntas en cualquier orden. R/ 60

12. Considere la palabra **COMPUTADORA** ¿Cuántos anagramas se pueden crear sí?

    a) No hay restricciones R/ 9 979 200

    b) Inicia con la letra P o la letra T y las letras C, A, R, A aparecen juntas en cualquier orden R/ 60 480

    c) ¿Cuántos anagramas hay de manera que la letra R se encuentre después de la quinta posición y termine con la letra C? R/ 453 600

13. Considere la palabra **PROCESO** ¿Cuántos anagramas se pueden crear sí?

    a) No hay restricciones. R/ 2 520

    b) Las letras O, S, O aparecen juntas en cualquier orden. R/ 120

    c) La cantidad de anagramas de 5 letras que pueden formarse. R/ 1 320

14. Considere la palabra **ENAJENACION** ¿Cuántos anagramas se pueden formar a partir de las letras de esta palabra? en los cuales:

    a) No hay restricción. R/ 1 663 200

    b) Las vocales deben ir juntas en cualquier orden y las N también juntas. R/ 4 320

    c) Las N no están juntas. R/ 1 572 480

    d) Las vocales deben ir después de la tercera posición. R/ 100 800

15. Considere la palabra **PRESENTIMIENTO** ¿Cuántos anagramas se pueden formar a partir de las letras de esta palabra? en los cuales:

    a) No hay restricción. R/ 1 816 214 400

    b) Las vocales se encuentran en los primeros 9 lugares. R/ 50 803 200

    c) Al menos dos letras iguales en los primeros tres lugares (no necesariamente juntas) R/ 33 264 000

16. Considere la palabra **ESTUDIO** ¿Cuántos anagramas se obtienen si?

    a) No hay restricciones R/ 5 040

    b) Debe empezar con vocal R/ 2 880

    c) Inician en vocal y terminan en consonante R/ 1 440

    d) Inician en vocal o terminan en consonante R/ 3 600

    e) Tienen vocales en los primeros tres lugares R/ 576

17. Considere la palabra **INICIACION**. ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra? si

    a) No hay restricciones. R/ 37 800

    b) Las vocales deben ir juntas en cualquier orden. R/ 900

    c) La primer vocal debe ir después de la tercera posición. R/ 1 260

    d) Hay al menos tres vocales I después del sexto lugar. R/ 4 500

18. Considere la palabra **OTORRINOLARINGOLOGO** ¿Cuántos anagramas existen sí?

   a) No hay restricciones R/ 1 759 911 753 600

   b) Al menos se tiene 2 letras iguales en los primeros 3 lugares R/ 602 983 180 800

   c) Las letras L no se encuentren juntas R/ 1 574 657 884 800

   d) Se comienza con las letras R o G y las letras T, L, I, L, I deben ir juntas en cualquier orden R/ 756 756 000

   e) Se comienza con las letras T o A y las letras A, L, I, L, I deben ir juntas en cualquier orden R/ 181 621 440

19. Considere la palabra **PERMUTACION** ¿Cuántos anagramas se pueden construir sí?

   a) No hay restricción R/ 39 916 800

   b) Las vocales van juntas (en cualquier orden) R/ 604 800

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que las vocales estén juntas (en cualquier orden)? R/ $\frac{1}{66}$

   d) Las consonantes van juntas (en cualquier orden) R/ 518 400

   e) ¿Cuál es la probabilidad de que las consonantes de la palabra estén juntas (en cualquier orden)? R/ $\frac{1}{77}$

   f) Las vocales van juntas (en cualquier orden) y las consonantes van juntas (en cualquier orden) R/ 172 800

   g) ¿Cuál es la probabilidad de que las vocales estén juntas (en cualquier orden) y las consonantes estén juntas (en cualquier orden)? R/ $\frac{1}{231}$

   h) Las vocales van juntas (en cualquier orden) o las consonantes van juntas (en cualquier orden) R/ 950 400

   i) ¿Cuál es la probabilidad de que las vocales estén juntas (en cualquier orden) o las consonantes estén juntas (en cualquier orden)? R/ $\frac{1}{42}$

   j) Las vocales aparecen en orden alfabético. R/ 332 640

   k) Las vocales deben ir después de la segunda posición R/ 10 886 400

   l) Hay por lo menos 2 vocales después de la quinta posición R/ 2 678 400

20. ¿Cuántas permutaciones se pueden formar con los números 0, 1, 3, 5, 6, 9? si:

    a) Los números 1, 3 y 5 están juntos. R/ 144

    b) El número 3 está después de la segunda posición y el número 6 debe ir en cualquier lugar que esté posterior al lugar del número 3 R/ 144

    c) Los números 3 y 6 deben ir separados por al menos un lugar R/ 480

21. ¿Cuántos anagramas de tres letras se pueden formar con las letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ si?

    a) No hay restricciones R/ 729

    b) Las letras no se pueden repetir y los anagramas deben empezar con vocal R/ 168

    c) Las letras no se pueden repetir y los anagramas deben terminar en consonante R/ 336

    d) Las letras no se pueden repetir y los anagramas deben empezar con vocal y terminar en consonante R/ 126

22. ¿Cuántos anagramas de tres letras se pueden formar con las letras a, b, c, d, e, f, g, h, i si:

    a) No hay restricciones R/ 729

    b) Las letras no se pueden repetir y los anagramas deben empezar con vocal R/ 168

    c) Las letras no se pueden repetir y los anagramas deben terminar en consonante R/ 336

    d) Las letras no se pueden repetir y los anagramas deben empezar con vocal y terminar en consonante R/ 126

23. Un colegio tiene 16 grupos de sétimo, 11 grupos de octavo y 9 grupos de noveno. Se desea elegir 5 grupos de tercer ciclo para que asistan a una actividad ¿de cuántas manera se pueden elegir los 5 grupos si?

    a) No hay restricciones R/ 376 992

    b) Se deben elegir dos grupos de sétimo, dos de octavo y uno de noveno R/ 59 400

    c) Se deben elegir al menos tres grupos de sétimo R/ 147 168

    d) Se deben elegir a lo sumo dos grupos de octavo R/ 318 780

    e) Se debe elegir por lo menos un grupo de cada sección R/ 232 584

Distribuciones

1. Se desea distribuir 17 lapiceros idénticos y 5 lápices de color distintos en 5 cartucheras distintas. Determine el número de maneras de distribuir estos objetos en las cartucheras si:

   a) No hay restricciones R/ 18 703 125

   b) Cada cartuchera tendrá al menos un lapicero y al menos un lápiz de color R/ 218 400

   c) Al menos una cartuchera tiene más de 4 lapiceros R/ $5\,950 \cdot 5^5$

2. Una confitería desea premiar a sus mejores clientes: Juan, María y Lucía. Para ello, se propone distribuir entre ellos 5 frutinis (cada uno de sabor distinto) y 12 chupas (todas diferentes entre sí) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir estos confites sí?

   a) A Lucía le corresponde a lo sumo un frutini R/ 59 521 392

   b) A Juan le corresponden al menos 10 chupas R/ 70 227

3. En una fiesta de fin de año, se desea distribuir 15 regalos sorpresa distintos y 7 cajas de chocolate idénticas. Estos serán distribuidos a 9 personas. Determine el número de manera de distribuirlos si:

   a) No hay restricciones R/ $9^{15} \cdot C(15,7)$

   b) A la persona X le corresponde a lo sumo 5 regalos sorpresa y exactamente 3 cajas de chocolates R/ $C(11,4) \cdot [8^{15} \cdot C(15,0) + 8^{14} \cdot C(15,1) + \ldots + 8^{10} \cdot C(15,5)]$

   c) Cada persona debe tener al menos un regalo sorpresa y a la persona X le toca a lo sumo 2 cajas de chocolates R/ $9^{15} - [8^{15} \cdot C(9,1) - 7^{15} \cdot C(9,2) + \ldots + 0^{15} \cdot C(9,9)]$

4. En una fiesta se desea distribuir 10 regalos sorpresa distintos y 15 cajas de chocolates idénticas. Estos serán distribuidos a 9 personas. Determine el número de maneras de distribuirlos si:

   a) No hay restricciones R/ $9^{10} \cdot C(23, 15)$

   b) Cada persona debe tener al menos una caja de chocolates y a la persona X le toca a lo sumo 2 regalos sorpresa R/ $C(14, 6) \cdot (8^{10} \cdot C(10, 0) + 8^9 \cdot C(10, 1) + 8^8 \cdot C(10, 2))$

   c) A la persona X le corresponde más de 2 regalos sorpresa y exactamente 3 cajas de chocolates R/ $[9^{10} - (8^{10} \cdot C(10, 0) + 8^9 \cdot C(10, 1) + 8^8 \cdot C(10, 2)) \cdot C(19, 12)]$

5. En un concurso de oratoria en la escuela C, los 3 primeros lugares de la competencia: Jeremy, Valerie y Brittany han ganado 12 premios: 7 entradas al Museo de los Niños y 5 libros de literatura distintos, los cuales serán distribuidos aleatoriamente. Determine el número de maneras de distribuirlos si:

   a) No hay restricciones R/ 8 748

   b) A Valerie le toca por lo menos 2 entradas y exactamente 2 libros R/ 800

   c) A Brittany y Jeremy les toca al menos 2 entradas y exactamente 2 libros a ambas personas R/ 300

6. Se desea distribuir 10 pases generales al parque de diversiones y 9 celulares distintos entre los 4 ganadores de un concurso: Alex, Byron, Carlos, Daniel ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los obsequios si:

   a) A cada ganador le corresponde al menos un pase general al parque de diversiones y al menos 2 celulares R/ $360 \cdot C(9, 6) \cdot C(9, 3)$

   b) A Alex y Byron se le darán exactamente 4 celulares a cada uno y a Carlos a lo sumo 4 pases al parque R/ $230 \cdot C(9, 4) \cdot C(5, 4) \cdot C(2, 1)$

7. Se quiere repartir tres helados diferentes y cinco confites iguales entre siete niños ¿De cuántas maneras se puede hacer la distribución si se quiere que todos los niños reciban algo? R/ 1 596

8. Un maestro regala a 4 de sus estudiantes 5 libros distintos y 17 cuadernos iguales. El maestro quiere que nadie reciba más de 2 libros, además, que todos reciban al menos 2 cuadernos. Si la distribución se hace completamente al azar. Determine la probabilidad de que se cumpla el deseo del maestro. R/ 132 000

9. En la tienda **TELCOMPU** tienen existencia suficiente de memorias USB de 2 Gigas, 4 Gigas, 8 Gigas y 16 Gigas. Sin embargo, las memorias de 2 Gigas no están a la venta, pues por la compra de cada memoria USB de 8 Gigas, la tienda regala una de 2 Gigas. Suponiendo que entre las memorias de cada tipo son idénticas ¿De cuántas maneras se pueden obtener 20 memorias USB (compradas más regaladas), con la condición de que se deben comprar 6 memorias más de 16 Gigas que de 4 Gigas? R/ 8

10. La Federación Costarricense de Fútbol ha decidido promocionar desde ya el partido de Costa Rica contra México para las próximas eliminatorias al mundial, regalando entradas a siete personas. Las entradas pueden elegir una de las siguientes entradas: platea, sombra, sol, preferencial. ¿De cuántas maneras pueden elegir las personas las entradas de manera que cada entrada sea elegida por al menos una persona? R/ 8 400

11. La empresa **Mejor Obsequio** regalará 12 entradas generales al próximo concierto de Gilberto Santa Rosa y 5 camisetas distintas alusivas al cantante. Estos regalos serán distribuidos entre 4 personas al azar.

    a) ¿De cuántas maneras se podrán distribuir los obsequios entre las 4 personas? R/ 465 920

    b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los obsequios entre las 4 personas si a uno de los ganadores (ganador X) se le deben dar exactamente dos camisetas y a lo sumo 4 entradas? R/ 7 940

12. Se van a rifar 13 regalos distintos entre los empleados de varias sucursales de una empresa. En total hay 3 sucursales (A, B y D) y en ellas hay 5, 4 y 3 empleados, respectivamente. Determine el total de formas en que podrían quedar distribuidos los regalos para que se den los eventos:

    a) Todos los empleados reciben regalo. R/ 13

    b) En todas las sucursales queda al menos un regalo. R/ 1 716 000

13. Luis tiene cuatro libros idénticos de probabilidad, uno de álgebra, uno de combinatoria, uno de teoría de números, uno de estadística y otro de cálculo y quiere colocarlos en una sola fila en su librero. El quiere que sus libros de probabilidad no queden juntos. ¿De cuántas maneras puede colocar sus libros? R/ 1 800

14. Existen diversas variantes para el juego de billar. Una de estas variantes consiste en jugar a introducir 15 bolas rojas (indistinguibles) en las seis buchacas (agujeros) de la mesa de billar. El juego finaliza cuando se introduce la última bola roja en alguno de los agujeros. Si las buchacas están numeradas del 1 al 6, determine la cantidad de maneras en que pueden introducirse las bolas rojas en las buchacas, si:

    a) No hay restricciones. R/ 15 504

    b) Debe haber al menos una bola por buchaca. R/ 2 002

    c) Ninguna buchaca debe quedar con más de tres bolas. R/ 56

15. Se van a distribuir 15 computadoras idénticas y 10 escritorios distintos en cinco oficinas. Determine la cantidad de maneras de distribuir esto objetos en las oficionas si:

    a) No hay restricciones. R/ $C(19, 15) \cdot 5^{10}$

    b) Cada oficina debe tener al menos dos computadoras y al menos dos escritorios. R/ 14 288 400

16. Don Juan dejó como herencia a sus tres hijos: Jorge, Karla y Anthony cinco quintas distintas y seis automóviles idénticos. Don Juan, en su testamento dejó escrito que deseaba que Jorge, su hijo menor, recibiera dos quintas y por lo menos dos automóviles, sin embargo, dichos bienes debían ser distribuidos al azar ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los bienes? si:

    a) No hay restricciones. R/ 6 804

    b) Se desea cumplir a voluntad de don Juan. R/ 1 200

    c) Jorge recibirá por lo menos dos quintas. R/ 1 428

17. Se distribuyen 10 entradas generales a un concierto entre María, Ana y Melissa ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las entradas si a Melissa le corresponde a lo sumo cuatro entradas? R/ 45

Ejercicios especiales

1. Considere la ecuación $x + y + z = 15$ ¿Cuántas soluciones naturales (x, y, z) tiene esta ecuación si:

   a) No hay restricciones.

   b) Cada incógnita debe ser menor igual a 6 R/ 10

2. Considere la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ¿cuántas soluciones naturales tiene esta ecuación donde $x_1 \leq 5$ y $x_2 > 6$? R/ 440

3. De un segmento que mide 10 cm se eligen 6 puntos al azar. Demuestre que hay al menos dos puntos que se encuentran a una distancia menor o igual a 2 cm.

4. Explore algunos casos y descubra una fórmula para el total de diagonales (líneas entre dos vértices no adyacentes) de un polígono convexo de n lados. Luego use principios de conteo para demostrar su fórmula. R/ $\dfrac{n(n-3)}{2}$

5. Un polinomio entero de grado 8 tiene la forma $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{8} a_i x^i$, con $a_i \in \mathbb{Z}$. Determine la cantidad de polinomios enteros de grado 8 que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ 84

   - $a_i = 1 \vee a_i = -1$
   - $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} a_i = 3$