

1) Sea X una variable aleatoria con $E(X) = 4$ y $E(X^2) = 20$. Si $Y = 3X - 2$, calcula $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.

$$Y = 3X - 2$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 3E(X) - 2 \\ &= 3 \cdot 4 - 2 \\ &= 12 - 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = 10}$$

$$Y = 3X - 2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= 3^2 \text{Var}(X) - 0 \\ &= 9 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 20 - 4^2 \\ &= 20 - 16 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= 9 \text{Var}(X) \\ &= 9 \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(Y) = 36}$$

2) Se sabe que para una variable X , $\text{Var}(X) = 9$ y $E(X) = 5$. Sea $Z = -2X + 7$. Halla $E(Z)$, $E(Z^2)$ y $\text{Var}(Z)$.

$$Z = -2X + 7$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= -2E(X) + 7 \\ &= -2 \cdot 5 + 7 \\ &= -10 + 7 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z) = -3}$$

$$Z = -2X + 7$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= (-2)^2 \text{Var}(X) + 0 \\ &= 4 \text{Var}(X) \\ &= 4 \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(Z) = 36}$$

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \text{Var}(Z) + [E(Z)]^2 \\ &= 36 + (-3)^2 \\ &= 36 + 9 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z^2) = 45}$$

- 3) Dada una variable aleatoria X tal que $E(X) = -1$ y $\text{Var}(X) = 4$, sea $Y = aX + b$. Si se sabe que $E(Y) = 3$ y $\text{Var}(Y) = 16$, encuentra los valores de a y b .

$$Y = aX + b$$

$$Y = aX + b$$

$$\text{Var}(Y) = a^2 \text{Var}(X) + 0$$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$16 = a^2 \cdot 4$$

$$3 = a \cdot (-1) + b$$

$$a^2 = \frac{16}{4}$$

$$3 = -a + b$$

$$a^2 = 4$$

$$b = 3 + a$$

$$b = 3 + a$$

$$a = \pm 2$$

$$b = 3 + 2$$

$$b = 3 - 2$$

$$a = -2, a = 2$$

$$b = 5$$

$$b = 1$$

$$(a=2 \wedge b=5) \vee (a=-2 \wedge b=1)$$

- 4) Sea X una variable con $E(X) = 2$, y se sabe que $\text{Var}(2X + 1) = 36$. Calcula $E(X^2)$.

$$\text{Var}(2X + 1) = 36$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$2^2 \text{Var}(X) = 36$$

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + [E(X)]^2$$

$$4 \text{Var}(X) = 36$$

$$= 9 + (2)^2$$

$$\text{Var}(X) = 9$$

$$= 9 + 4$$

$$E(X^2) = 13$$

- 5) Si $Y = 5 - 4X$, y se conoce que $E(Y) = 13$ y $E(Y^2) = 185$, determina $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.

$$Y = 5 - 4X$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y) = 5 - 4E(X)$$

$$= 185 - (13)^2$$

$$13 = 5 - 4E(X)$$

$$\text{Var}(Y) = 16$$

$$8 = -4E(X)$$

$$E(X) = -2$$

$$Y = 5 - 4X$$

$$\text{Var}(Y) = (-4)^2 \text{Var}(X)$$

$$16 = 16 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X) = 1$$

- 6) En una ciudad, el número de accidentes de tránsito por día sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 3$. Cada accidente tiene una probabilidad del 20% de involucrar un vehículo escolar, independientemente de los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día donde se hayan dado 3 accidentes, alguno de ellos haya involucrado un vehículo escolar?

$$p = 0,20 \quad q = 0,80 \quad n = 3$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$1 - C(3,0) \cdot 0,20^0 \cdot 0,80^{3-0} = \boxed{0,488}$$

- 7) En un videojuego, un jugador debe derrotar a 4 jefes para completar una misión. Cada intento contra un jefe tiene una probabilidad de éxito del 60%, independiente de los demás. Sea Y el número total de intentos necesarios para vencer al cuarto jefe. ¿Cuál es la probabilidad de que $Y > 7$?

$$p = 0,60 \quad q = 0,40 \quad r = 4$$

$$C(k-1, r-1) \cdot p^r \cdot q^{k-r}, \quad R_X = \{4, 5, 6, \dots\}$$

$$P(Y > 7) = 1 - P(X \leq 7)$$

$$1 - \sum_{k=4}^7 C(k-1, 3) \cdot 0,60^4 \cdot 0,40^{k-4} = \boxed{0,289792}$$

8) Una fábrica produce piezas industriales. Cada pieza fabricada tiene un costo de producción de \$80. Al finalizar la producción, cada pieza se clasifica en una de tres categorías:

- Perfecta (con probabilidad 0.7): lista para venderse sin costo adicional.
- Reparable (con probabilidad 0.2): requiere un proceso de reparación que cuesta \$30 adicionales.
- Desechable (con probabilidad 0.1): no se puede reparar y se pierde toda la inversión inicial (\$80).

La fábrica desea obtener una ganancia promedio de \$25 por pieza producida (incluyendo las desechadas y las reparables).

a) Define una variable aleatoria G que represente la ganancia neta por pieza producida, en función del precio de venta p .

$$\text{Perfecta: } G = p - 80$$

$$\text{Reparable: } G = p - 110$$

$$\text{Desechable: } G = -80$$

$$G = \begin{cases} p - 80 & , \text{probabilidad de } 0,7 \\ p - 110 & , \text{probabilidad de } 0,2 \\ -80 & , \text{probabilidad de } 0,1 \end{cases}$$

$$G = 0,9p - 86$$

b) Calcula el precio de venta sugerido p que garantice la ganancia promedio deseada.

$$\text{Esperanza} = 25$$

$$E(G) = 0,7(p - 80) + 0,2(p - 110) + 0,1(-80)$$

$$= 0,7p - 56 + 0,2p - 22 - 8$$

$$25 = 0,9p - 86$$

$$0,9p = 111$$

$$p = 123,33$$