# Enunciados

1. En el País de las Maravillas los gatos tienen una y solo una de las siguientes cualidades: vuelan, tienen bigotes o comen pescado. En un censo, Alicia ha determinado que el 25% de los gatos de este país vuelan y el 60% de los gatos no tienen bigotes. Además, en este estudio se determinó que el 80% de los gatos que vuelan están locos, al igual que el 70% de los gatos con bigotes y el 20% de los gatos que comen pescado.

   (a) ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas están locos?

   (b) Se elige un gato al azar de este país y resulta estar loco. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga bigotes?

   (c) ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas tienen bigotes o están locos?

   *Solución.*

   Considere siguientes los conjuntos: $\Omega$ es el conjunto de todos los gatos de el País de las Maravillas, $V$ es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que vuelan, $B$ es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que tienen bigotes, $C$ es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que comen pescado y $L$ es el conjunto de todos los gatos del País de las Maravillas que están locos.

   Se sabe que $P\left[V\right] = 0.25$, $P\left[\overline{B}\right] = 0.6$. Por lo tanto, $P\left[B\right] = 0.4$ y $P\left[C\right] = 0.35$.

   Por otro lado, se sabe que $P\left[L\,|V\right] = 0.8$, $P\left[L\,|B\right] = 0.7$ y $P\left[L\,|C\right] = 0.2$.

   (a) Considerando que los conjuntos $V$, $B$ y $C$ forman una partición de $\Omega$, se procede por medio de la probabilidad total:

   $$P\left[L\right] = P\left[V\right] \cdot P\left[L\,|V\right] + P\left[B\right] \cdot P\left[L\,|B\right] + P\left[C\right] \cdot P\left[L\,|C\right]$$

   $$\Rightarrow P\left[L\right] = 0.25 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.7 + 0.35 \cdot 0.2 = 0.55$$

   Así, el 55% de los gatos del País de las Maravillas están locos.

   (b) Como se solicita $P\left[B\,|L\right]$, se procede por medio del teorema de Bayes:

   $$P\left[B\,|L\right] = \frac{P\left[B\right] \cdot P\left[L\,|B\right]}{P\left[L\right]}$$

   $$\Rightarrow P\left[B\,|L\right] = \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.55} = \frac{28}{55} \approx 0.509091$$

   Por lo tanto, si un gato del País de las Maravillas está loco, la probabilidad de que tenga bigotes es de, aproximadamente, 50.91%.

   (c) Se solicita $P\left[B \cup L\right]$, entonces se procede por el principio de inclusión y exclusión:

   $$P\left[B \cup L\right] = P\left[B\right] + P\left[L\right] - P\left[B \cap L\right]$$

   $$\Rightarrow P\left[B \cup L\right] = P\left[B\right] + P\left[L\right] - P\left[B\right] \cdot P\left[L\,|B\right] = P\left[B\right] + P\left[L\right] - P\left[L\right] \cdot P\left[B\,|L\right]$$

   $$\Rightarrow P\left[B \cup L\right] = 0.4 + 0.55 - 0.4 \cdot 0.7 = 0.4 + 0.55 - 0.55 \cdot \frac{28}{55} = 0.67$$

   Por lo tanto, el porcentaje de los gatos del País de las Maravillas tienen bigotes o están locos es de 67%.

2. En una canasta se tienen 10 bolitas rojas y 1 bolita verde. Se comienzan a sacar bolitas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas.

   (a) **Regla 1**: si la bolita extraída es roja no se devuelve a la canasta y se agrega una bolita verde a la canasta.

   (b) **Regla 2**: si la bolita es verde no se devuelve a la canasta.

   El proceso termina hasta obtener 2 bolitas verdes. ¿Cuál es la probabilidad de sacar en total 4 bolitas?

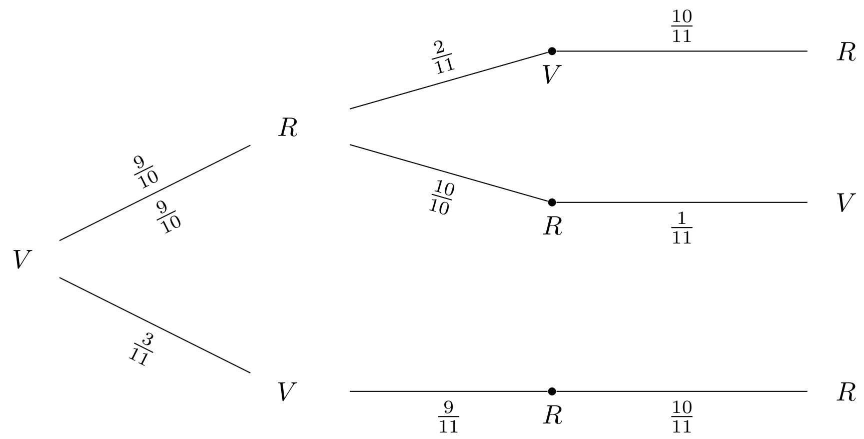
   *Solución.*

   Para este experimento, exponer el espacio muestral no es una tarea sencilla, por lo que se limitará a determinar la probabilidad solicitada.

   Note que si se realizan 4 extracciones, como no dice que las bolitas verdes deben ser seguidas, se consideran las siguiente posibilidades:

$$R - V - R - V \ , \ V - R - R - V \ , \ R - R - V - V \ .$$

   El siguiente diagrama expone todos los posibles resultados pero de manera inversa. Es decir, la primera letra corresponde a la cuarta extracción, y así sucesivamente. Los valores corresponden a la probabilidad de cada extracción. Note que solo hay tres columnas, pues falta analizar por aparte la probabilidad de la bolita final verde.




   De acá, se puede concluir que:

   - La probabilidad de $R - V - R - V$ es $\dfrac{10}{11} \cdot \dfrac{2}{11} \cdot \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{2}{10} = \dfrac{18}{605} \approx 0.029752.$
   - La probabilidad de $V - R - R - V$ es $\dfrac{1}{11} \cdot \dfrac{10}{10} \cdot \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{2}{10} = \dfrac{9}{550} \approx 0.016363.$
   - La probabilidad de $R - R - V - V$ es $\dfrac{10}{11} \cdot \dfrac{9}{11} \cdot \dfrac{3}{11} \cdot \dfrac{2}{10} = \dfrac{54}{1331} \approx 0.040570.$

   Así, la probabilidad de sacar 4 bolitas para terminar el proceso es de, aproximadamente, 8.66%.

3. Sean $A$ y $B$ dos eventos no nulos tales que $P[A] = \dfrac{P\left[\overline{B}\right]}{3}$, y además $P[A \cup B] = \dfrac{1}{3}$. Prueba que:

   (a) $P[A \cap B] = \dfrac{2P[B]}{3}$

   (b) los eventos $A$ y $B$ son dependientes.

   *Solución.*

   (a) Note que:

   $$\begin{aligned} & P[A \cap B] \\ &= P[A] + P[B] - P[A \cup B] \\ &= \frac{P\left[\overline{B}\right]}{3} + P[B] - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1 - P[B]}{3} + P[B] - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2P[B]}{3} \end{aligned}$$

   (b) Suponga que los eventos $A$ y $B$ son eventos independientes. Esto significa que:

   $$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] \ .$$

   Por lo tanto, por el punto anterior, se cumple que:

   $$\begin{aligned} & \frac{2P[B]}{3} = P[A] \cdot P[B] \\ \Rightarrow\ & \frac{2}{3} = P[A] \\ \Rightarrow\ & \frac{2}{3} = \frac{P\left[\overline{B}\right]}{3} \\ \Rightarrow\ & 2 = P\left[\overline{B}\right] \end{aligned}$$

   Es decir, se acaba de demostrar que la probabilidad de un evento supera la unidad, lo que es claramente una contradicción. Por lo tanto, los eventos $A$ y $B$ son dependientes.

4. Se ha determinado que en Costa Rica el 20% de las familias son de clase baja; entre tanto el porcentaje de familias de clase media y alta deben determinarse. De las familias de clase alta, el 90% acostumbran a salir del país para fin de año, el 30% de las familias de clase media y el 5% de las de clase baja hacen los mismo. La probabilidad de que una familia, elegida al azar, fuera de clase media, que resultó salir del país a finales del año pasado, fue de 0.4. Determine el porcentaje de familias de clase alta de Costa Rica.

*Solución.*

Considere $\Omega$ como el conjunto de familias costarricenses. Además, considere los eventos $B$: familias costarricenses de clase baja, $M$: familias costarricenses de clase media y $A$: familias costarricenses de clase alta. Note que los conjuntos $B$, $M$ y $A$ forman una partición.

Considere el evento $V$: familias costarricenses que salen fuera del país para fin de año.

Según el problema, $P[B] = 0.2$, $P[V|A] = 0.9$, $P[V|M] = 0.3$, $P[V|B] = 0.05$, $P[M|V] = 0.4$. Se solicita $P[A]$.

Para buscar el valor solicitado, se recurre a las siguientes ecuaciones:

(a) $P[A] + P[M] + P[B] = 1 \Rightarrow P[A] + P[M] = 0.8 \Rightarrow P[M] = 0.8 - P[A]$

(b) $P[M|V] = \dfrac{P[M] \cdot P[V|M]}{P[V]} \Rightarrow P[V] = \dfrac{P[M] \cdot 0.3}{0.4} = 0.75 \cdot \Big(0.8 - P[A]\Big)$

Por lo tanto:

$$P[V] = P[A] \cdot P[V|A] + P[M] \cdot P[V|M] + P[B] \cdot P[V|B]$$

$$\Rightarrow 0.75 \cdot \Big(0.8 - P[A]\Big) = P[A] \cdot 0.9 + \Big(0.8 - P[A]\Big) \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.05$$

$$\Rightarrow 0.35 = P[A] \cdot 1.35$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{7}{27} \approx 0.259259$$

Así, el porcentaje de familias de clase alta en Costa Rica es de, aproximadamente, 25.9%.

5. Suponga que en $\Omega$ se definen los eventos $A$ y $B$ tales que $P\left[A\right] = \frac{1}{2} \cdot P\left[B\right]$ y $P\left[A\,|B\right] = \frac{1}{4}$. Si $P\left[A \cup B\right] = \frac{5}{6}$, determine $P\left[A\right]$.

*Solución.*

Considere los siguientes resultados:

(a) $P\left[A\right] = \frac{1}{2} \cdot P\left[B\right] \;\Rightarrow\; 2P\left[A\right] = P\left[B\right]$

(b) $P\left[A\,|B\right] = \dfrac{P\left[A \cap B\right]}{P\left[B\right]} \;\Rightarrow\; P\left[A\,|B\right] \cdot P\left[B\right] = P\left[A \cap B\right]$

(c) $P\left[A \cup B\right] = P\left[A\right] + P\left[B\right] - P\left[A \cap B\right] \;\Rightarrow\; P\left[A \cup B\right] - P\left[A\right] + P\left[A \cap B\right] = P\left[B\right]$

Con esto:

$$P\left[A\right] = \frac{1}{2} \cdot P\left[B\right]$$

$$\Rightarrow P\left[A\right] = \frac{1}{2} \cdot \Big(P\left[A \cup B\right] - P\left[A\right] + P\left[A \cap B\right]\Big), \text{ por (c)},$$

$$\Rightarrow P\left[A\right] = \frac{1}{2} \cdot \Big(P\left[A \cup B\right] - P\left[A\right] + P\left[A\,|B\right] \cdot P\left[B\right]\Big), \text{ por (b)},$$

$$\Rightarrow P\left[A\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} - P\left[A\right] + \frac{1}{4} \cdot 2P\left[A\right]\right), \text{ por (a)},$$

$$\Rightarrow P\left[A\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot P\left[A\right]\right)$$

$$\Rightarrow P\left[A\right] = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \cdot P\left[A\right]$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} \cdot P\left[A\right] = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow P\left[A\right] = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la probabilidad del evento $A$ es de, aproximadamente, 33.3%.

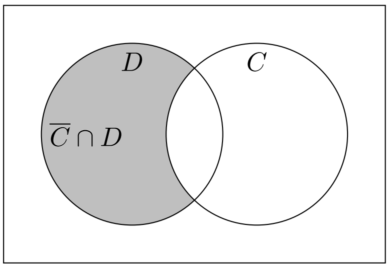
6. Suponga que en $\Omega$ se definen los eventos $C$ y $D$ tales que $P[C] = 0.5$, $P[D] = 0.4$ y $P\left[\overline{C} \cap D\right] = 0.2$. Determine si los eventos $C$ y $D$ son independientes o no lo son.

*Solución.*

Para resolver este ejercicio se tienen dos caminos: demostrar que $P[C\,|D] = P[C]$ y $P[D\,|C] = P[D]$, o demostrar que $P[C \cap D] = P[C] \cdot P[D]$. Debido a las premisas, se optará por la segunda demostración.

Es decir, se debe demostrar que $P[C \cap D] = P[C] \cdot P[D] = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$.

Note que, en cuestión de conjuntos:




Se puede concluir que:

$$P[C \cup D] = P\left[\overline{C} \cap D\right] + P[C] = 0.7\ .$$

Por otro lado:

$$P[C \cup D] = P[C] + P[D] - P[C \cap D]$$

$\Rightarrow 0.7 = 0.5 + 0.4 - P[C \cap D]$

$\Rightarrow P[C \cap D] = 0.5 + 0.4 - 0.7$

$\Rightarrow P[C \cap D] = 0.2$

Por lo tanto, los eventos $C$ y $D$ son independientes.

7. Un estudiante del curso de IA crea un sistema de alertas para detectar posibles clientes impuntuales en operaciones de crédito. Un banco hace pruebas intensivas del sistema con base en los registros de su cartera de clientes y determina que si la persona es impuntual, el sistema acierta en clasificarla como tal el 95% de las veces y que si la persona es puntual, el sistema falla al clasificarla como impuntual el 3% de las veces. Los registros del banco revelan que el 10% de los clientes incumplen, mientras que el 90% no. Si un cliente, seleccionado al azar, se clasifica como impuntual por el sistema, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?

   *Solución.*

   Suponga $\Omega$ está formado por todos los clientes del banco, y considere los eventos $P$: clientes que son puntuales, $I$: clientes que son impuntuales, $A$: el sistema califica a un cliente como impuntual.

   Se sabe que $P\left[I\right] = 0.1$, $P\left[P\right] = 0.9$, $P\left[A\,|I\right] = 0.95$, $P\left[A\,|P\right] = 0.03$; se solicita $P\left[I\,|A\right]$.

   Aplicando el teorema de Bayes:

$$P\left[I\,|A\right] = \frac{P\left[I\right]\cdot P\left[A\,|I\right]}{P\left[I\right]\cdot P\left[A\,|I\right] + P\left[P\right]\cdot P\left[A\,|P\right]}$$

$$\Rightarrow P\left[I\,|A\right] = \frac{0.1\cdot 0.95}{0.1\cdot 0.95 + 0.9\cdot 0.03} = \frac{95}{122} \approx 0.778688$$

   La probabilidad de que un cliente, seleccionado al azar, sea impuntual, donde el sistema lo clasifica como impuntual, es de, aproximadamente, 77.8%.

8. Sean $A$, $B$ y $C$ eventos tales que: $A$ y $B$ son independientes, $A$ y $C$ son independientes, y además $B$ y $C$ son eventos disjuntos. Pruebe que $A$ y $B \cup C$ son eventos independientes.

   *Solución.*

   Como $A$ y $B$ son independientes, se cumple que $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$. Por la misma razón, como $A$ y $C$ son independientes, se cumple que $P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C]$.

   Hay que probar que $P[A \cap (B \cup C)] = P[A] \cdot P[B \cup C]$. Por lo tanto, note que:

   $P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

   $\Rightarrow P[A \cap (B \cup C)] = P[A \cap B] + P[A \cap C] - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

   $\Rightarrow P[A \cap (B \cup C)] = P[A] \cdot P[B] + P[A] \cdot P[C] - P[A \cap B \cap C]$

   $\Rightarrow P[A \cap (B \cup C)] = P[A]\Big(P[B] + P[C]\Big) - 0$, pues $B$ y $C$ son eventos disjuntos,

   $\Rightarrow P[A \cap (B \cup C)] = P[A]\Big(P[B] + P[C] - P[B \cap C]\Big)$

   $\Rightarrow P[A \cap (B \cup C)] = P[A] \cdot P[B \cup C]$

   Por lo tanto, los eventos $A$ y $B \cup C$ son independientes.

9. En una clase, el 55% de los estudiantes tienen computadora en su casa y el resto no tiene. En el examen de Ciencias, aprobaron el 80% de los que tiene computadora en su casa y el 90% de los que no tienen. Se elige un estudiante al azar de la clase.

   (a) Hallar la probabilidad de que el estudiante elegido haya aprobado el examen de Ciencias.

   (b) Sabiendo que el estudiante reprobó el examen de Ciencias, ¿cuál es la probabilidad de que tenga computadora en su casa?

   *Solución.*

   Suponga que $\Omega$ es el conjunto de los estudiantes de la clase. Considere los eventos $A$: estudiantes que tienen computadora en la casa y $B$: estudiantes que no tienen computadora en la casa. Finalmente, el evento $C$: estudiantes que aprobaron el examen de Ciencias.

   Se sabe que $P[A] = 0.55$, $P[B] = 0.45$, $P[C\,|A] = 0.8$ y $P[C\,|B] = 0.9$.

   (a) Se solicita $P[C]$. Para esto, se utilizará la probabilidad total, sabiendo que $A$ y $B$ forman una partición para $\Omega$.

   $$P[C] = P[A] \cdot P[C\,|A] + P[B] \cdot P[C\,|B]$$

   $$\Rightarrow P[C] = 0.55 \cdot 0.8 + 0.45 \cdot 0.9$$

   $$\Rightarrow P[C] = 0.845$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar haya aprobado el examen de Ciencias es de 84.5%.

   (b) Se solicita $P[A\,|C]$. Para esto, se utilizará la regla de Bayes:

   $$P[A\,|C] = \frac{P[A] \cdot P[C\,|A]}{P[C]}$$

   $$\Rightarrow P[A\,|C] = \frac{0.55 \cdot 0.8}{0.845}$$

   $$\Rightarrow P[A\,|C] = \frac{0.55 \cdot 0.8}{0.845} = \frac{88}{169} \approx 0.520710$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que tenga computadora en su casa, sabiendo que el estudiante reprobó el examen de Ciencias, es de, aproximadamente, 52%.

10. En una bolsa se tienen 10 bolas blancas, 8 bolas verdes y 7 bolas rojas. Considere el experimento en que se extraen bolas al azar sucesivamente de la bolsa y en cada extracción la bola no se devuelve y antes de la siguiente extracción las bolas blancas se pintan verdes, las que eran verde se pintan rojas y las que eran rojas se pintan blancas. Si se extraen tres bolas, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

*Solución.*

Este ejercicio se realizará por casos.

(a) **Caso I:** las tres bolas son blancas. En este caso, se realizará el siguiente cuadro para exponer la situación.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Antes de primera extracción | 10 blancas | 8 verdes | 7 rojas | |
| Después de primera extracción | 9 blancas | 8 verdes | 7 rojas | Probabilidad: 10/25 |
| Antes de segunda extracción | 9 verdes | 8 rojas | 7 blancas | |
| Después de segunda extracción | 9 verdes | 8 rojas | 6 blancas | Probabilidad: 7/24 |
| Antes de tercera extracción | 9 rojas | 8 blancas | 6 verdes | |
| Después de tercera extracción | 9 rojas | 7 blancas | 6 verdes | Probabilidad: 8/23 |

Por lo tanto, la probabilidad de que las tres bolas sean blancas es de $\frac{10}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{8}{23} = \frac{14}{345} \approx 0.040579$.

(b) **Caso II:** las tres bolas son verdes. En este caso, se realizará el siguiente cuadro para exponer la situación.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Antes de primera extracción | 10 blancas | 8 verdes | 7 rojas | |
| Después de primera extracción | 10 blancas | 7 verdes | 7 rojas | Probabilidad: 8/25 |
| Antes de segunda extracción | 10 verdes | 7 rojas | 7 blancas | |
| Después de segunda extracción | 9 verdes | 7 rojas | 7 blancas | Probabilidad: 10/24 |
| Antes de tercera extracción | 9 rojas | 7 blancas | 7 verdes | |
| Después de tercera extracción | 9 rojas | 7 blancas | 6 verdes | Probabilidad: 7/23 |

Por lo tanto, la probabilidad de que las tres bolas sean blancas es de $\frac{8}{25} \cdot \frac{10}{24} \cdot \frac{7}{23} = \frac{14}{345} \approx 0.040579$.

(c) **Caso III:** las tres bolas son rojas. En este caso, se realizará el siguiente cuadro para exponer la situación.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Antes de primera extracción | 10 blancas | 8 verdes | 7 rojas | |
| Después de primera extracción | 10 blancas | 8 verdes | 6 rojas | Probabilidad: 7/25 |
| Antes de segunda extracción | 10 verdes | 8 rojas | 6 blancas | |
| Después de segunda extracción | 10 verdes | 7 rojas | 6 blancas | Probabilidad: 8/24 |
| Antes de tercera extracción | 10 rojas | 7 blancas | 6 verdes | |
| Después de tercera extracción | 9 rojas | 7 blancas | 6 verdes | Probabilidad: 10/23 |

Por lo tanto, la probabilidad de que las tres bolas sean blancas es de $\frac{7}{25} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{10}{23} = \frac{14}{345} \approx 0.040579$.

Así, al sumar las probabilidades en los casos, la probabilidad de que sean del mismo color es de, aproximadamente, 12.1%.

11. Sean $A$ y $B$ eventos independientes tales que $P\left[\overline{A}\right] = P\left[B \cap \overline{A}\right]$. Pruebe que $A$ y $B \cup \overline{A}$ son eventos independientes.

*Solución.*

Para demostrar que los eventos $A$ y $B \cup \overline{A}$ son independientes, basta con probar que:

$$P\left[A \cap \left(B \cup \overline{A}\right)\right] = P\left[A\right] \cdot P\left[B \cup \overline{A}\right] \ .$$

Como $A$ y $B$ son independientes, entonces se sabe que $P\left[A \cap B\right] = P\left[A\right] \cdot P\left[B\right]$.

Por otro lado:

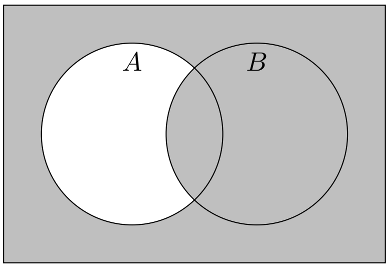
$P\left[\overline{A}\right] = P\left[B \cap \overline{A}\right]$

$\Rightarrow P\left[\overline{A}\right] = P\left[B\right] + P\left[\overline{A}\right] - P\left[B \cup \overline{A}\right]$

$\Rightarrow P\left[B\right] = P\left[B \cup \overline{A}\right]$

El ejercicio quedaría resuelto si se demuestra que $A \cap \left(B \cup \overline{A}\right) = A \cap B$.

Para esto, note que la siguiente región sombreada representa $B \cup \overline{A}$.




Si se busca lo que comparte son $A$, efectivamente se llegará al conjunto $A \cap B$.

Por lo tanto, $A$ y $B \cup \overline{A}$ son eventos independientes.

12. Cuatro compañeros de residencia van a rifar la lavada de los platos. Se colocan tres fichas blancas y una negra en una bolsa de tela y cada uno saca una ficha. Al que le corresponda la ficha negra le tocará lavar todos los platos. Uno de los estudiantes se apresura a tomar la ficha de primero convencido de que sus probabilidades de sacarse la lavada de platos se reducen si toma la ficha de primero. ¿Está ese estudiante en lo cierto? Utilice principios probabilísticos para contestar dicha pregunta.

*Solución.*

Este ejercicio se realizará por supuestos, y se compararán todas las probabilidades de que le toque la ficha negra.

- El primer estudiante que hace la extracción saca la ficha negra. Esta probabilidad se calcula con la regla de Laplace: $\frac{1}{4}$.
- El segundo estudiante que hace la extracción saca la ficha negra. Para esto, el primer estudiante en hacer la extracción tuvo que obtener una ficha blanca. Es decir, altera los resultados del segundo estudiante: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
- El tercer estudiante que hace la extracción saca la ficha negra. Para esto, el primer y segundo estudiante en hacer la extracción tuvieron que obtener fichas blancas. Es decir, alteran los resultados del tercer estudiante: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- El cuarto estudiante que hace la extracción saca la ficha negra. Para esto, el primer, segundo y tercer estudiante en hacer la extracción tuvieron que obtener fichas blancas. Es decir, alteran los resultados del cuarto estudiante: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$.

Así, al analizar dicha situación, si se toma en cuenta que las probabilidades involucran a los condicionales, entonces todas las personas tienen la misma probabilidad de lavar los platos.

13. Si se lanzan tres dados distintos, determine la probabilidad de que el resultado de los tres dados sume 7.

*Solución.*

Para este ejercicio no es viable utilizar una tabla con los posibles resultados, esto porque son $6^3 = 216$. No obstante, se puede comprimir en una tabla de frecuencias.

| Resultado, sin orden | Frecuencia (ordenado) | Resultado, sin orden | Frecuencia (ordenado) |
|---|---|---|---|
| $(1,1,1)$ | 1 | $(2,3,5)$ | 6 |
| $(1,1,2)$ | 3 | $(2,3,6)$ | 6 |
| $(1,1,3)$ | 3 | $(2,4,4)$ | 3 |
| $(1,1,4)$ | 3 | $(2,4,5)$ | 6 |
| $(1,1,5)$ | 3 | $(2,4,6)$ | 6 |
| $(1,1,6)$ | 3 | $(2,5,5)$ | 3 |
| $(1,2,2)$ | 3 | $(2,5,6)$ | 6 |
| $(1,2,3)$ | 6 | $(2,6,6)$ | 3 |
| $(1,2,4)$ | 6 | $(3,3,3)$ | 1 |
| $(1,2,5)$ | 6 | $(3,3,4)$ | 3 |
| $(1,2,6)$ | 6 | $(3,3,5)$ | 3 |
| $(1,3,3)$ | 3 | $(3,3,6)$ | 3 |
| $(1,3,4)$ | 6 | $(3,4,4)$ | 3 |
| $(1,3,5)$ | 6 | $(3,4,5)$ | 6 |
| $(1,3,6)$ | 6 | $(3,4,6)$ | 6 |
| $(1,4,4)$ | 3 | $(3,5,5)$ | 3 |
| $(1,4,5)$ | 6 | $(3,5,6)$ | 6 |
| $(1,4,6)$ | 6 | $(3,6,6)$ | 3 |
| $(1,5,5)$ | 3 | $(4,4,4)$ | 1 |
| $(1,5,6)$ | 6 | $(4,4,5)$ | 3 |
| $(1,6,6)$ | 3 | $(4,4,6)$ | 3 |
| $(2,2,2)$ | 1 | $(4,5,5)$ | 3 |
| $(2,2,3)$ | 3 | $(4,5,6)$ | 6 |
| $(2,2,4)$ | 3 | $(4,6,6)$ | 3 |
| $(2,2,5)$ | 3 | $(5,5,5)$ | 1 |
| $(2,2,6)$ | 3 | $(5,5,6)$ | 3 |
| $(2,3,3)$ | 3 | $(5,6,6)$ | 3 |
| $(2,3,4)$ | 6 | $(6,6,6)$ | 1 |

Note que las únicas combinaciones que dan como resultado 7 son: $(1,1,5)$, $(1,2,4)$, $(1,3,3)$ y $(2,2,3)$.

Al sumar las frecuencias, se obtiene que la probabilidad de que el resultado de sumar las caras sea 7 es de:

$$\frac{15}{216} = \frac{5}{72} \approx 0.069444\ .$$

.

14. Un pequeño Kinder privado está formado por tres grupos de diez personas cada uno, como se muestra a continuación.

| Grupo | Mujeres | Hombres |
|---|---|---|
| $A$ | 5 | 5 |
| $B$ | 4 | 6 |
| $C$ | 7 | 3 |

La directora debe elegir 10 estudiantes para que se encarguen del acto cívico del 15 de setiembre. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si

(a) no hay restricciones?

(b) debe elegir exactamente dos mujeres de cada grupo?

(c) al menos una mujer de cada grupo?

*Solución.*

(a) Como el grupo no necesita algún orden, entonces para escoger las personas que se encarguen del acto cívico se utiliza la fórmula: $\binom{30}{10}$.

Con esto, hay 30 045 015 posibilidades de formar dicho grupo.

(b) En este punto, primero se hará la elección de las mujeres, y luego los espacios restantes se llenarán con hombre. Se debe tratar por etapas.

- *Etapa 1:* seleccionar a las mujeres del grupo $A$: $\binom{5}{2} = 10$.
- *Etapa 2:* seleccionar a las mujeres del grupo $B$: $\binom{4}{2} = 6$.
- *Etapa 3:* seleccionar a las mujeres del grupo $C$: $\binom{7}{2} = 21$.
- *Etapa 4:* seleccionar a los hombres: $\binom{14}{4} = 1001$.

Así, hay 1 261 260 maneras de seleccionar el grupo con la condición dada.

(c) Este ejercicio es engañoso, pues si se plantea similar a la parte (b) se produce reconteo.

La forma correcta es utilizando el principio de inclusión exclusión.

Considere:

$\Omega = \{$Maneras de formar el grupo de 10 personas sin restricción$\}$

$X_1 = \{x \in \Omega : x$ es una posibilidad donde hay al menos una mujer del grupo $A\}$

$X_2 = \{x \in \Omega : x$ es una posibilidad donde hay al menos una mujer del grupo $B\}$

$X_3 = \{x \in \Omega : x$ es una posibilidad donde hay al menos una mujer del grupo $C\}$

Lo que se necesita es determinar $|X_1 \cap X_2 \cap X_3|$. Sin embargo, para facilitar los cálculos se utilizará:

$$|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = |\Omega| - \left|\overline{X_1 \cap X_2 \cap X_3}\right| = |\Omega| - \left|\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \overline{X_3}\right| \; .$$

Por esta razón, como:

$\left|\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \overline{X_3}\right| = \left|\overline{X_1}\right| + \left|\overline{X_2}\right| + \left|\overline{X_3}\right| - \left|\overline{X_1} \cap \overline{X_2}\right| - \left|\overline{X_2} \cap \overline{X_3}\right| - \left|\overline{X_1} \cap \overline{X_3}\right| + \left|\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}\right|,$

se calculará cada cardinalidad por separado.

- $\left|\overline{X_1}\right| = \binom{25}{10} = 3268760.$
- $\left|\overline{X_2}\right| = \binom{26}{10} = 5311735.$
- $\left|\overline{X_3}\right| = \binom{23}{10} = 1144066.$
- $\left|\overline{X_1} \cap \overline{X_2}\right| = \binom{21}{10} = 352716.$
- $\left|\overline{X_2} \cap \overline{X_3}\right| = \binom{19}{10} = 92378.$
- $\left|\overline{X_1} \cap \overline{X_3}\right| = \binom{18}{10} = 19448.$
- $\left|\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}\right| = \binom{14}{10} = 1001.$

Así, $\left|\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \overline{X_3}\right| = 9236710$, por lo que hay 20 808 305 posibilidades de formar el grupo con la condición dada.

15. Considere la palabra INICIACION. ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra si:

   (a) no hay restricción?
   (b) las vocales deben ir juntas en cualquier orden?
   (c) la primer vocal debe ir después de la tercera posición?
   (d) hay al menos tres vocales I después del sexto lugar?

   *Solución.*

   (a) Para considerar los anagramas, se busca la cantidad de letras (10) y se verifica si hay repeticiones (4 I, 2 N, 2 C), par aplicar la fórmula:
   $$\frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}\,.$$
   Por lo tanto, hay 37 800 anagramas sin restricción.

   (b) En este apartado, se tomarán las vocales como un solo caracter, se permutarán y luego se calcula la cantidad de anagramas con este nuevo "símbolo". Se realiza por etapas.

   - *Etapa 1:* permutar las vocales: $\frac{6!}{4!} = 30$.
   - *Etapa 2:* permutar las consonantes y el caracter formado por las vocales: $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$.

   Con esto, hay 900 anagramas con la condición dada.

   (c) Como la primer vocal debe ir después de la tercera posición, quiere decir que todas las vocales se encentran a partir de la cuarta posición. Se procede por etapas.

   - *Etapa 1:* escoger las posiciones para las vocales: $\binom{7}{6} = 7$
   - *Etapa 2:* colocar las vocales en las casillas seleccionadas anteriormente: $\frac{6!}{4!} = 30$.
   - *Etapa 3:* colocar las consonantes en los lugares restantes: $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

   Con esto, hay 1 260 anagramas con la condición dada.

(d) Se podría pensar que este ejercicio se resuelve de la siguiente manera: escoger tres lugares de los últimos 4 para colocar las **I**, y luego acomodar las letras restantes:

$$\binom{4}{3} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 5040 \ .$$

No obstante, esta solución tiene el problema del reconteo.

Para resolverlo de manera correcta, se tomarán dos casos:

i. **Caso I:** Exactamente tres vocales I después del sexto lugar.

- *Etapa 1:* escoger las posiciones para las 3 vocales I: $\binom{4}{3} = 4$.
- *Etapa 2:* colocar estas letras I: $\dfrac{3!}{3!} = 1$.
- *Etapa 3:* escoger el lugar para la letra I restante: $\binom{6}{1} = 6$.
- *Etapa 4:* colocar esta letra I: 1.
- *Etapa 5:* colocar las 6 letras restante: $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

Así, para este caso hay 4 320 anagramas.

ii. **Caso II:** Las cuatro vocales I después del sexto lugar.

- *Etapa 1:* escoger las posiciones para las 3 vocales I: $\binom{4}{4} = 1$.
- *Etapa 2:* colocar dichas vocales: 1.
- *Etapa 3:* colocar las letras restantes en los espacios disponibles: $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

Así, para este caso hay 180 anagramas.

Finalmente, como estos dos casos son excluyentes se tiene que hay 4 500 anagramas con la condición propuesta.

16. En el juego ANAGRAM se tienen 7 fichas que, colocadas en fila de cierta manera, forman la palabra INICIAR. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir estas fichas entre Fabiola, Rebeca y Víctor si

 (a) no hay restricciones?
 (b) a cada persona le corresponde una ficha con consonante?

 *Solución.*

 (a) para realizar la repartición se deben considerar los objetos iguales y los diferentes por separado. Por esto, se realizarán etapas.

  - *Etapa 1:* repartir las fichas iguales (las 3 con la letra I) entre las tres personas: $\binom{3+3-1}{3} = 10$.
  - *Etapa 2:* repartir las fichas diferentes (las restantes 4 fichas) entre las tres personas: $3^4 = 81$.

  Con esto, se concluye que hay 810 maneras de realizar la repartición de las fichas sin restricción.

 (b) Similar al anterior, se realizarán etapas.

  - *Etapa 1:* repartir las consonantes (3 tres fichas) de manera que cada persona reciba una: $3! = 6$.
  - *Etapa 2:* repartir las fichas iguales (las 3 con la letra I) entre las tres personas: $\binom{3+3-1}{3} = 10$.
  - *Etapa 3:* repartir la ficha con la letra A entre las tres personas: $3^1 = 3$.

  Con esto, se concluye que hay 180 maneras de realizar la repartición de las fichas con la condición dada.

17. Diez personas (6 hombre y 4 mujeres) se sientan en 10 sillas enumeradas del 1 al 10. ¿De cuántas maneras se pueden sentar las personas en las sillas si:

    (a) no hay restricciones?

    (b) las mujeres deben ir en sillas impares?

    (c) al menos una mujer debe ir en silla impar?

    *Solución.*

    (a) Si no hay restricciones, hay $10! = 3628800$ maneras de sentar a las personas en las sillas.

    (b) Este apartado se resolverá por etapas.

    - *Etapa 1:* escoger de los 5 asientos impares dónde sentar a las 4 mujeres: $\binom{5}{4} = 5$.
    - *Etapa 2:* sentar a las mujeres en dichos asientos: $4! = 24$.
    - *Etapa 3:* sentar a los 6 hombres en las restantes 6 sillas: $6! = 720$.

    Con esto, hay 86 400 maneras de sentar a las personas con la condición dada.

    (c) Este ejercicio se hará por complemento. Es decir, se buscará la cantidad de maneras de sentar a las personas donde ninguna mujer se sienta en silla impar. También se usarán etapas.

    - *Etapa 1:* escoger de los 5 asientos pares dónde sentar a las 4 mujeres: $\binom{5}{4} = 5$.
    - *Etapa 2:* sentar a las mujeres en dichos asientos: $4! = 24$.
    - *Etapa 3:* sentar a los 6 hombres en las restantes 6 sillas: $6! = 720$.

    Así, hay $10! - 86400 = 3542400$ maneras de sentar a las personas con la condición dada.

18. La empresa ANTEL ha donado a la Universidad 12 computadoras idénticas y 5 impresoras distintas. Estas donaciones serán distribuidas entre 4 laboratorios. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las donaciones si

    (a) no hay restricciones?

    (b) al laboratorio LAIMA le corresponden exactamente 2 impresoras y a lo sumo 4 computadoras?

    *Solución.*

    (a) Se realizará por etapas.

    - *Etapa 1:* repartir las computadoras: $\binom{12+4-1}{12} = 455$.
    - *Etapa 2:* repartir las impresoras: $4^5 = 1024$.

    Con esto, hay 465 920 maneras de realizar la repartición.

    (b) Igual que el anterior, se realizará por etapas.

    - *Etapa 1:* seleccionar las impresoras para el LAIMA: $\binom{5}{2} = 10$.
    - *Etapa 2:* repartir las impresoras entre los restantes laboratorios: $3^3 = 27$.
    - *Etapa 3:* para repartir las computadoras se harán casos.
      - *Caso I:* al LAIMA no le corresponden computadoras. Por lo tanto se reparten entre los otros 3 laboratorios: $\binom{12+3-1}{12} = 91$.
      - *Caso II:* al LAIMA le corresponde 1 computadora. Solo hay una posibilidad de darle la computadora, por lo tanto se reparten las restantes 11 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{11+3-1}{11} = 78$.
      - *Caso III:* al LAIMA le corresponden 2 computadoras. Solo hay una posibilidad de darle las computadoras, por lo tanto se reparten las restantes 10 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{10+3-1}{10} = 66$.
      - *Caso IV:* al LAIMA le corresponden 3 computadoras. Solo hay una posibilidad de darle las computadoras, por lo tanto se reparten las restantes 9 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{9+3-1}{9} = 55$.

- *Caso V:* al LAIMA le corresponden 4 computadoras. Solo hay una posibilidad de darle las computadoras, por lo tanto se reparten las restantes 8 entre los otros 3 laboratorios: $\binom{8+3-1}{8} = 45$.

Por lo tanto, esta etapa tiene $91 + 78 + 66 + 55 + 45 = 335$ posibilidades.

Con esto, hay 80 400 maneras de realizar la repartición con la restricción propuesta.

19. El juego *BUSCA-PALABRAS* es para dos jugadores. Cada jugador recibe 8 fichas con una letra cada una. Ambos jugadores sin ver sus fichas colocan 4 al azar sobre la mesa. Luego, cada jugador por cada palabra con sentido que obtenga de las fichas en la mensa obtiene 1 punto. Posteriormente se retiran las fichas y a cada jugador se le reparten otras 4 fichas para la siguiente partida. Suponga que en cierta partida Karla tienen las fichas $A$, $L$, $G$, $E$, $B$, $A$, $N$, $U$, mientras que Jorge tiene $P$, $A$, $K$, $E$, $I$, $R$, $O$, $M$. ¿Cuántas maneras hay de obtener las 8 letras de la mesa con únicamente 2 $A$ y 1 $E$?

   *Solución.*

   Este ejercicio se resolverá por casos. Note que estas son las únicas posibilidades (excluyentes) de obtener únicamente 2 $A$ y 1 $E$.

   (a) **Caso I:** Ambas $A$ son de Karla y la $E$ también.

   - *Etapa 1:* seleccionar las fichas con $A$ de Karla: 1.
   - *Etapa 2:* seleccionar la ficha con $E$ de Karla: 1.
   - *Etapa 3:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades $L$, $G$, $B$, $N$, $U$): $\binom{5}{1} = 5$.
   - *Etapa 4:* seleccionar las fichas de Jorge (de las posibilidades $P$, $K$, $I$, $R$, $O$, $M$): $\binom{6}{4} = 15$.

   Así, hay 75 posibilidades para este caso.

   (b) **Caso II:** Ambas $A$ son de Karla y la $E$ es de Jorge.

   - *Etapa 1:* seleccionar las fichas con $A$ de Karla: 1.
   - *Etapa 2:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades $L$, $G$, $B$, $N$, $U$): $\binom{5}{2} = 10$.
   - *Etapa 3:* seleccionar la ficha $E$ de Jorge: 1.
   - *Etapa 4:* seleccionar las otras fichas de Jorge (de las posibilidades $P$, $K$, $I$, $R$, $O$, $M$): $\binom{6}{3} = 20$.

   Así, hay 200 posibilidades para este caso.

(c) **Caso III:** Las letras $A$ y $E$ son de Karla y la otra $A$ es de Jorge.

- *Etapa 1:* seleccionar la ficha con $A$ de Karla: 1.
- *Etapa 2:* seleccionar la ficha con $E$ de Karla: 1.
- *Etapa 3:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades $L$, $G$, $B$, $N$, $U$): $\left(\begin{array}{c}5\\2\end{array}\right) = 10.$
- *Etapa 4:* seleccionar la ficha $A$ de Jorge: 1.
- *Etapa 5:* seleccionar las otras fichas de Jorge (de las posibilidades $P$, $K$, $I$, $R$, $O$, $M$): $\left(\begin{array}{c}6\\3\end{array}\right) = 20.$

Así, hay 200 posibilidades para este caso.

(d) **Caso IV:** Las letras $A$ y $E$ son de Jorge y la otra $A$ es de Karla.

- *Etapa 1:* seleccionar la ficha con $A$ de Karla: 1.
- *Etapa 2:* seleccionar las otras fichas de Karla (de las posibilidades $L$, $G$, $B$, $N$, $U$): $\left(\begin{array}{c}5\\3\end{array}\right) = 10.$
- *Etapa 3:* seleccionar la ficha $A$ de Jorge: 1.
- *Etapa 4:* seleccionar la ficha con $E$ de Jorge: 1.
- *Etapa 5:* seleccionar las otras fichas de Jorge (de las posibilidades $P$, $K$, $I$, $R$, $O$, $M$): $\left(\begin{array}{c}6\\2\end{array}\right) = 15.$

Así, hay 150 posibilidades para este caso.

Finalmente, con las condiciones dadas hay 625 posibilidades de obtener las 8 letras.

20. ¿Cuántos anagramas se pueden formar con las letras *HRIDAYANANDA* si

(a) no hay restricciones?

(b) las $D$ no aparecen antes de la quinta posición?

(c) deben aparecen las vocales juntas y las $N$ separadas por al menos un espacio?

*Solución.*

(a) Como hay 12 letras, repartidas en 1 H, 1 R, 1 I, 2 D, 4 A, 1 Y, 2 N, entonces hay $\dfrac{12!}{2! \cdot 4! \cdot 2!} = 4\,989\,600$ anagramas.

(b) Se hará por etapas.

- *Etapa 1:* seleccionar la posiciones en las que se ubicarán las D: $\dbinom{8}{4} = 70$.
- *Etapa 2:* colocar las letras D: 1.
- *Etapa 3:* ordenar el resto de letras: $\dfrac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$.

Así, hay 705 600 anagramas con la condición dada.

(c) También se realizará por etapas, tomando en consideración que las vocales forman un caracter.

- *Etapa 1:* permutar las vocales: $\dfrac{5!}{4!} = 5$.
- *Etapa 2:* permutar las consonantes con el caracter formado por vocales sin que las N queden juntas. Esto se calculará por complemento. Primero es necesario permutar sin restricción: $\dfrac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$.

  Ahora se determinarán todos los anagramas con las letras N juntas: $\dfrac{7!}{2!} = 2520$.

  Por lo que se puede afirmar que en esta etapa hay 7560 anagramas.

Con esto, hay 12 600 anagramas con la condición dada.

21. De todos los anagramas de tamaño fijo $n$ que utilizan las letras $a$, $b$, $c$ y $d$ (se pueden repetir y no necesariamente deben aparecer todas), ¿en cuántos aparecen exactamente $r$ letras $a$, con $r \leq n$?

    *Solución.*

    Para comprender mejor este ejemplo, primero se calcularán los anagramas sin restricción.

    $$\underbrace{\_\_ \quad \_\_ \quad \cdots \quad \_\_ \quad \_\_}_{n \text{ espacios}}$$

    Cada espacio tiene 4 opciones, por lo que hay $4^n$ anagramas sin restricción.

    Cuando se incorpora la condición de tener $r$ letras $a$, se resolverá por etapas.

    - *Etapa 1:* seleccionar los $r$ espacios en los que se ubicarán las $a$: $\displaystyle\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$.
    - *Etapa 2:* colocar dichas $a$: 1.
    - *Etapa 3:* ubicar en los lugares restantes alguna de las letras $b$, $c$ o $d$: $3^{n-r}$.

    Con esto, la cantidad de anagramas con la restricción propuesta es $\displaystyle\frac{n! \cdot 3^{n-r}}{r! \cdot (n-r)!}$.

22. Se tiene una baraja de naipe (52 cartas: 13 espadas negras, 13 corazones rojos, 13 tréboles negros y 13 diamantes rojos). Cada grupo de 13 cartas tiene la siguiente numeración: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. Se eligen 5 cartas al azar.

   (a) ¿De cuántas maneras se puede obtener "full" (tres cartas con igual número y las otras dos con igual número)?

   (b) ¿De cuántas maneras se puede obtener "color" (todas las cartas del mismo palo)?

   (c) ¿Qué es más probable: obtener "color" u obtener "cuadra" (cuatro cartas del mismo número)?

   *Solución.*

   (a) Como se está hablando de la composición de la mano, el orden acá es irrelevante. El ejercicio se realizará por etapas.

      - *Etapa 1:* escoger un número para el trío: $\binom{13}{1} = 13$.
      - *Etapa 2:* escoger 3 de los 4 palos disponibles, equivalentes a los tres números iguales: $\binom{4}{3} = 4$.
      - *Etapa 3:* escoger un número para el dúo: $\binom{12}{1} = 12$.
      - *Etapa 4:* escoger 2 de los 4 palos disponibles, equivalentes a los dos números iguales: $\binom{4}{2} = 6$.

      Con esto, hay 3 744 maneras de obtener "full".

   (b) Similar al anterior, el orden no importa. El ejercicio se realizará por etapas.

      - *Etapa 1:* escoger un palo de los cuatro disponibles: $\binom{4}{1} = 4$.
      - *Etapa 2:* escoger 5 de los 13 números disponibles: $\binom{13}{5} = 1287$.

      Con esto, hay 5 148 maneras de obtener "color".

   (c) Es conocido, por el ejercicio anterior, que "color" tienen 5 148 maneras de formarse. Basta con encontrar las maneras de formar "cuadra" y comparar. Para esto, se procede por etapas.

      - *Etapa 1:* escoger un número para el cuarteto: $\binom{13}{1} = 13$.
      - *Etapa 2:* escoger 4 de los 4 palos disponibles, equivalentes a los cuatro números iguales: $\binom{4}{4} = 1$.
      - *Etapa 3:* escoger un número de las cartas restantes: $\binom{48}{1} = 48$.

      Con esto, hay 624 maneras de obtener "cuadra".

      Finalmente como hay más maneras de obtener "color" que de obtener "cuadra", entonces es más probable obtener "color" en una mano de 5 cartas.

23. Se tienen 6 regalos idénticos que se van a entregar, de forma aleatoria, a Mario, Luis, Pedro, Lucía, Andrés, Ana, Beatriz y Miguel. ¿De cuántas maneras se pueden entregar los regalos si:

    (a) no hay restricciones?
    (b) Pedro o Miguel reciben al menos un regalo?
    (c) Lucía solo puede recibir un regalo?

    *Solución.*

    (a) Hay 1 716 maneras distintas de hacer la repartición.
    (b) Hay 1254 maneras de repartir los regalos, si a Pedro o a Miguel le corresponde al menos un regalo.
    (c) Hay 462 maneras de repartir los regalos, donde a Lucía le corresponde exactamente un regalo.

24. En una clase hay 7 mujeres y 4 hombres. Si se quiere formar un grupo de tres personas, determine el total de formas de elegirlas si:

    (a) no hay restricciones.
    (b) debe haber al menos una mujer y al menos un hombre.
    (c) se sabe que hay una pareja de hermanos en la clase, y se deben escoger juntos o no se escoge ninguno.

    *Solución.*

    (a) Hay 165 maneras distintas de formar un grupo de tres personas.
    (b) Hay 126 maneras de formar un grupo de tres personas con al menos una mujer y al menos un hombre.
    (c) Hay 93 maneras de formar un grupo de tres personas con las condiciones propuestas.

25. Se van a rifar 7 libros distintos entre 5 niños. ¿De cuántas formas se pueden entregar los libros si cada niño recibe al menos uno?

    *Solución.*

    Hay 29 400 maneras distintas de hacer la repartición, con las condiciones propuestas.

26. Suponga que se tienen 8 bloques etiquetados $E_1$, $E_2$, …, $E_8$, y se colocan en una bolsa para extraerlos uno a uno, de forma aleatoria, y se ordenan. Determine:

    (a) el total de formas en las cuales los bloques etiquetados con un número par quedan en las posiciones impares.
    (b) la probabilidad del evento anterior.

    *Solución.*

    (a) Hay 576 maneras de hacer el ordenamiento solicitado.
    (b) La probabilidad solicitada es $\dfrac{576}{40320} = \dfrac{1}{70} \approx 0.014$.

27. Una empresa está compuesta por 30 hombres y 20 mujeres. Si se debe elegir 5 personas al azar para que conformen una delegación que asistirá a una actividad, ¿de cuántas maneras se pueden conformar la delegación si deben haber

(a) ninguna restricción?

(b) 3 mujeres?

(c) a lo sumo 4 mujeres?

*Solución.*

(a) Note que en la delegación el orden no es importante. Además, como no hay restricciones, entonces hay

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{5!\,(50-5)!} = 2\,118\,760 \text{ maneras distintas de conformar la delegación.}$$

(b) En este caso, si hay 3 mujeres en la delegación, entonces hay 2 hombres. Por esto, hay

$$\binom{20}{3} \cdot \binom{30}{2} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} \cdot \frac{30!}{2!\,(30-2)!} = 495\,900 \text{ maneras distintas de conformar la delegación.}$$

(c) Acá hay dos maneras de realizar este ejercicio: por casos donde la delegación se forma por 0, 1, 2, 3 y 4 mujeres; o calculando todos los posibles casos (parte (a)) y restando los casos donde la delegación se forma por 5 mujeres.

Manera # 1:

$$\binom{30}{5} + \binom{30}{4} \cdot \binom{20}{1} + \binom{30}{3} \cdot \binom{20}{2} + \binom{30}{2} \cdot \binom{20}{3} + \binom{30}{1} \cdot \binom{20}{4}$$

$= 2\,103\,256$

Manera # 2:

$$\binom{50}{5} - \binom{20}{5} = 2\,103\,256$$

Por lo tanto, hay 2 103 256 maneras de formar la delegación.

28. Se tiene una baraja de naipe (52 cartas: 13 espadas,13 corazones, 13 tréboles, 13 diamantes, cada grupo tiene la siguiente numeración: As,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K). Se eligen cinco cartas, de cuántas maneras se pueden obtener

    (a) 3 ases.

    (b) exactamente 2 corazones y 2 diamantes.

    (c) al menos 3 corazones.

    (d) exactamente 2 pares de cartas con igual número y una carta con número distinto a las demás.

    (e) exactamente 2 nueves y al menos 3 tréboles.

    (f) todas las cartas con número distinto.

    *Solución.*

    (a) En este caso, como la baraja tiene 4 ases, entonces hay:

    $$\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} = 4\,512 \text{ maneras de sacar las 5 cartas.}$$

    (b) En este caso, como la baraja tiene 13 corazones y 13 diamantes, entonces hay:

    $$\binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{26}{1} = 158\,184 \text{ maneras de sacar las 5 cartas.}$$

    (c) En este caso, como la baraja tiene 13 corazones, entonces:

    Caso I: donde hay 3 corazones

    $$\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2} = 211\,926$$

    Caso II: donde hay 4 corazones

    $$\binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1} = 27\,885$$

    Caso III: donde hay 5 corazones

    $$\binom{13}{5} = 1\,287$$

    Con esto, hay $211\,926 + 27\,885 + 1\,287 = 241\,098$ maneras de sacar las 5 cartas.

(d) Este ejercicio se tomará por casos:

Caso I: los pares son iguales.

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{48}{1} = 624$$

Caso II: los pares son distintos.

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1} = 247\ 104$$

Por esto, hay 247 728 maneras de sacar las 5 cartas.

(e) Este ejercicio se tomará por casos:

Caso I: los nueves no incluyen al 9 de tréboles.

$$\binom{3}{2} \cdot \binom{12}{3} = 660$$

Caso II.1: un nueve es de tréboles y hay dos tréboles más.

$$\binom{12}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{36}{1} = 7\ 128$$

Caso II.2: un nueve es de tréboles y hay tres tréboles más.

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{3}{1} = 660$$

Entonces hay $660 + 7\ 128 + 660 = 8\ 448$ maneras de sacar las 5 cartas.

(f) En este caso hay:

$$\binom{13}{5} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 1\ 317\ 888$$

maneras de sacar las 5 cartas.

29. Considere la palabra *"ARQUITECTURA"*. ¿Cuántos anagramas de esta palabra existen si

   (a) no hay restricciones?

   (b) deben comenzar con $Q$ o $C$, y las letras $I$, $A$ aparecen juntas en cualquier orden?

   (c) las $T$ no están juntas?

   (d) la primera $A$ esta después de la quinta posición.

   *Solución.*

   (a) En este caso hay 12 letras distribuidas de la siguiente manera: 2 $A$, 2 $R$, 1 $Q$, 2 $U$, 1 $I$, 2 $T$, 1 $E$, 1 $C$.

   Por lo tanto hay:

   $$\frac{12!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 29\ 937\ 600$$

   anagramas.

   (b) Este ejercicio se resuelve por casos.

   Caso I: Empieza con $Q$. Como las letras $I$, $A$ deben aparecer juntas en cualquier orden, sólo hay 2 maneras de acomodarlas. Luego se toman ambas como un solo caracter. Por lo tanto hay 10 letras con 3 de ellas repetidas. Por lo tanto, hay

   $$2\cdot\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 907\ 200$$

   anagramas.

   Caso I: Empieza con $C$. Como las letras $I$, $A$ deben aparecer juntas en cualquier orden, sólo hay 2 maneras de acomodarlas. Luego se toman ambas como un solo caracter. Por lo tanto hay 10 letras con 3 de ellas repetidas. Por lo tanto, hay

   $$2\cdot\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 907\ 200$$

   anagramas.

   Finalmente, hay $907\ 200 + 907\ 200 = 1\ 814\ 400$ anagramas.

   (c) Este se resuelve de la siguiente manera: del total de anagramas se quitan los que involucran a las $T$ juntas. Como están juntas, cuentan como un carater distinto de las demás.

   $$\frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 4\ 989\ 600$$

   Por lo tanto, hay $29\ 937\ 600 - 4\ 989\ 600 = 24\ 948\ 000$ anagramas.

(d) Como la primera $A$ esta a partir de la sexta posición, primero se acomodan estas dos letras en las 7 casillas.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 21$$

Luego, se distribuye el resto.

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453\ 600$$

Con esto, hay $21 \cdot 453\ 600 = 9\ 525\ 600$ anagramas.

30. Considere la palabra *"PRINCIPIO"*. ¿Cuántos anagramas de esta palabra existen si

   (a) no hay restricciones?

   (b) deben comenzar en $R$ y además, las letras: $C$, $O$, $R$ y $N$ deben ir juntas en cualquier orden?

*Solución.*

(a) Como hay 2 $P$, 1 $R$, 3 $I$, 1 $N$, 1 $C$, 1 $O$, para un total de 9 letras, entonces hay

$\frac{9!}{2! \cdot 3!} = 30\ 240$ anagramas.

(b) AL iniciar con $R$ y las letras: $C$, $O$, $R$ y $N$ deben ir juntas en cualquier orden, entonces falta colocar, a la par de la $R$ las letras: $C$, $O$ y $N$.

$3! = 6$

Luego, se colocan el resto de letras.

$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Por lo tanto, hay $6 \cdot 10 = 60$ anagramas.

31. Don Juan dejó como herencia a sus tres hijos: Jorge, Karla y Anthony, cinco quintas distintas y seis automóviles idénticos. Dichos bienes debían ser distribuidos al azar. ¿De cuantas maneras se pueden distribuir los bienes si

 (a) no hay restricciones?
 (b) la voluntad de don Juan es que a Jorge, su hijo menor, reciba 2 quintas y por lo menos dos automóviles?
 (c) Karla recibirá por lo menos 3 quintas?
 (d) cada uno recibirá al menos una quinta y al menos un automóvil?

 *Solución.*

 (a) Este ejercicio se realizará por etapas.

 - *Etapa 1:* repartir las quintas: $3^5 = 243$.
 - *Etapa 2:* repartir los autos: $\binom{6+3-1}{6} = 28$.

 Con esto, hay $243 \cdot 28 = 6804$ maneras de repartir la herencia.

 (b) Este ejercicio se realizará por etapas.

 - *Etapa 1:* escoger las quintas para Karla y repartir el resto: $\binom{5}{2} \cdot 2^3 = 80$.
 - *Etapa 2:* para repartir los autos se tomarán dos autos, se le darán a Jorge, y luego se reparten el resto de autos entre los tres hermanos:
 $$\binom{4+3-1}{4} = 15 \;.$$

 Con esto, hay $80 \cdot 15 = 1200$ maneras de repartir la herencia.

 (c) Este ejercicio se realizará por etapas.

 - *Etapa 1:* para repartir las quintas se debe hacer por casos. Cuando le corresponden 3, cuando le corresponden 4 y cuando le corresponden todas las quintas a Jorge.
 $$\binom{5}{3} \cdot 2^2 + \binom{5}{4} \cdot 2^1 + \binom{5}{5} = 51 \;.$$
 - *Etapa 2:* repartir los autos: $\binom{6+3-1}{6} = 28$.

 Con esto, hay $51 \cdot 28 = 1428$ maneras de realizar la repartición.

 (d) Este ejercicio se realiza por etapas.

 - *Etapa 1:* para hacer la repartición de las quintas, se optará por proponer dos casos: donde un hermano recibe tres y el resto uno cada uno, y un hermano recibe una quinta y el resto dos quintas.
 $$\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 240 \;.$$
 - *Etapa 2:* para repartir los autos se tomarán tres autos, se dará uno por hermano, y luego se reparten el resto de autos entre los tres hermanos:
 $$\binom{3+3-1}{3} = 10 \;.$$

 Con esto, hay $240 \cdot 10 = 2400$ maneras de repartir los bienes.

32. Se distribuyen 10 entradas generales a un concierto entre María, Ana y Melissa. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las entradas si a Melissa le corresponden a lo sumo 4 entradas?

*Solución.*

Caso I: No le corresponden entradas a Melissa: $\begin{pmatrix} 2+10-1 \\ 10 \end{pmatrix} = 11$

Caso II: Le corresponde 1 entrada a Melissa: $\begin{pmatrix} 2+9-1 \\ 9 \end{pmatrix} = 10$

Caso III: Le corresponden 2 entradas a Melissa: $\begin{pmatrix} 2+8-1 \\ 8 \end{pmatrix} = 9$

Caso IV: Le corresponden 3 entradas a Melissa: $\begin{pmatrix} 2+7-1 \\ 7 \end{pmatrix} = 8$

Caso V: Le corresponden 4 entradas a Melissa: $\begin{pmatrix} 2+6-1 \\ 6 \end{pmatrix} = 7$

Así, hay $11+10+9+8+7=45$ maneras de hacer la repartición.

33. En una fiesta hay 20 personas.

    (a) Se desea elegir a al menos tres personas para que realizar una actividad. ¿Cuántas maneras hay de elegir las personas?

    (b) ¿Cuántas maneras hay de elegir un número par de personas?

*Solución.*

(a) Hay dos formas de resolver el ejercicio: sumando o por complemento.

Sumando, se tiene que el resultado es: $\displaystyle\sum_{i=3}^{20}\binom{20}{i} = 1048365.$

Por complemento se puede recurrir a la cantidad total de maneras de formar algún grupo. Es importante aclarar que este se calcula utilizando la fórmula del total de subconjuntos que se pueden formar con el conjunto inicial (es decir, la cardinalidad de partes de $\{1, 2, \ldots, 20\}$), y se calcula de la siguiente manera:

$$2^{20} = 1048576 \ .$$

Solo hay que tener en cuenta que el conjunto parte contiene al vacío:

$$2^{20} - \binom{20}{0} - \binom{20}{1} - \binom{20}{2} = 1048365 \ .$$

Así, hay 1048365 maneras de elegir el grupo.

(b) Se pueden hacer 10 casos: cantidad de maneras de formar un grupo con dos, con cuatro, con seis, ..., con 20 personas. Es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{10}\binom{20}{2i} = 524287 \ .$$

Entonces hay 524287 maneras de realizar los grupos.

34. Entre Ana, Juan y Melissa quieren comprar en Golfito 10 pares de tennis (de 10 marcas diferentes) y 12 tarros de frutas (todos iguales). ¿De cuántas maneras se pueden comprar los comestibles si a Ana le corresponden exactamente 5 tarros de frutas, a Juan 4 o 5 sardinas y a Melissa al menos 3 tarros de frutas?

    *Solución.*

35. El colegio $X$ tiene 10 secciones de décimo. De cada grupo se han pre-seleccionado los 10 mejores promedios. De los estudiantes pre-seleccionados, se elegirán al azar 35 estudiantes para que representen al colegio en un concurso intercolegial. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los estudiantes, si se quiere escoger todos los estudiantes pre-seleccionados de una misma sección, por lo menos?

    *Solución.*

36. En el concurso *GANE PREMIOS* Rebeca, Fabiola y Victor son los ganadores de este mes. Entre estos ganadores se distribuirán 7 libros (todos distintos) y 10 entradas generales al próximo partido de la Selección Nacional. Suponga que los premios se distribuyen al azar.

    (a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a cada ganador le corresponde al menos 2 entradas y al menos dos libros?

    (b) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a Rebeca le correspondan al menos 2 libros y a lo sumo 5 entradas?

    *Solución.*

37. El restaurante *Mc Fast* tiene 8 sucursales en la ciudad Alto, cada una con 12 empleados. Para motivar a sus empleados a decidido elegir 50 empleados al azar para regalarles una entrada a un concierto. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los empleados de forma que no se elijan a todos los empleados de una misma sucursal?

    *Solución.*

38. Entre Karla, Juan y Viviana se compraron 12 lapiceros azules marca M y 6 pilot de diferentes colores. Suponga que los objetos se distribuyen al azar entre los tres.

    (a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir los objetos comprados si a Karla le corresponde exactamente 3 pilot y a lo sumo 7 lapiceros?

    (b) ¿Cuántas maneras hay de que cada uno recibirá al menos un lapicero y al menos un pilot, y a Juan le corresponda al menos 3 pilot?

    *Solución.*

39. Un edificio tienen $n$ pisos, y posee un ascensor. Suponga que:

- En el primer piso se suben $n+1$ personas al ascensor.
- En el segundo piso se bajan 2 personas y no ingresan más personas al ascensor.
- En cada uno de los pisos siguientes se baja al menos una persona y no ingresan más personas al ascensor.
- En el último piso se bajan las personas que quedan en el ascensor.

¿De cuántas maneras se pueden bajar las personas del ascensor?

*Solución.*

Hay $\dfrac{(n+1)! \cdot (n-2)}{4}$ maneras en las que se pueden bajar las personas del ascensor.

40. Considere $m > 4$. Determine el total de maneras de distribuir $3m + 4$ objetos idénticos en 4 cajas distintas, con a lo sumo $m$ objetos por caja.

*Solución.*

Hay $\dfrac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$ maneras de distribuir $3m + 4$ objetos idénticos en 4 cajas distintas, con a lo sumo $m$ objetos por caja.