3. Las siguientes sucesiones están definidas de manera recursiva. Determine los primeros cinco términos en cada caso.

a) $a_1 = -1$, $a_n = 3a_{n-1}$, para $n \geq 2$.

$a_1 = -1$

$a_2 = 3(-1) = -3$

$a_3 = 3(-3) = -9$

$a_4 = 3(-9) = -27$

$a_5 = 3(-27) = -81$

b) $b_1 = b_2 = 1$, $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$, para $n \geq 2$.

$b_1 = 1$

$b_2 = 1$

$b_3 = 1 + 1 = 2$

$b_4 = 2 + 1 = 3$

$b_5 = 3 + 2 = 5$

c) $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{3}$, para $n \geq 4$.

$c_1 = 0$

$c_2 = 0$

$c_3 = 1$

$c_4 = \dfrac{1+0}{3} = \dfrac{1}{3}$

$c_5 = \dfrac{\frac{1}{3}+1}{3} = \dfrac{4}{9}$

d) $d_1 = 2, d_2 = \dfrac{1}{2}$, $d_{n+1} = \dfrac{1}{1+d_n}$, para $n \geq 2$.

$d_1 = 2$

$d_2 = \dfrac{1}{2}$

$d_3 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$d_4 = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$

$d_5 = \dfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{8}$

4. Para cada sucesión recursiva dada, se proporciona una fórmula explícita. Se debe demostrar que la fórmula es correcta usando inducción matemática.

a)
- Forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$
- Fórmula explícita: $a_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$

- Fórmula explícita: $a_n = 2^n - 1, \quad n \geq 1$

$n = 1 \quad 1 = 1$

$n = p \quad 2^p - 1$

$n = p+1 \quad 2^{p+1} - 1$

$a_{p+1} = 2(2^p - 1) + 1$

$2^{p+1} - 1$

b)
- Forma recursiva: $b_n = b_{n-1} + 3, \quad b_1 = 2$
- Fórmula explícita: $b_n = 3n - 1, \quad n \geq 1$

$n = p \quad 3p - 1$

$n = p+1 \quad 3p + 2$

$a_{p+1} \quad 3p - 1 + 3$

$3p + 2 \,//$

c)
- Forma recursiva: $c_n = c_{n-1} + n, \quad c_1 = 1$
- Fórmula explícita: $c_n = \dfrac{n^2+n}{2}, \quad n \geq 1$

$n = p \quad \dfrac{p^2+p}{2}$

$n = p+1 \quad \dfrac{(p+1)^2 + p + 1}{2} = \dfrac{p^2+2p+1+p+1}{2}$

$\dfrac{p^2+p}{2} + p + 1 \qquad \dfrac{p^2+3p+2}{2} \,//$

$$\frac{p^2+p+2p+2}{2}$$

$$\frac{p^2+3p+2}{2} \quad //$$

d)

- Forma recursiva: $d_n = n \cdot d_{n-1}, \quad d_1 = 1$
- Fórmula explícita: $d_n = n!\,, \quad n \geq 1$

$n=p \quad p!$

$n=p+1 \quad (p+1)!$

$(p+1)\cdot p!$

$(p+1)!$

e)

- Forma recursiva: $e_n = e_{n-1} + n!, \quad e_1 = 1$
- Fórmula explícita: $e_n = \sum_{k=1}^{n} k!\,, \quad n \geq 1$

$n=p+1 \quad \sum_{k=1}^{p} k! + (p+1)!$

$$\sum_{k=1}^{p+1} k!$$

f)
- Forma recursiva: $f_n = \dfrac{f_{n-1}}{n+1}, \quad f_0 = \int_0^1 dx$
- Fórmula explícita: $f_n = \dfrac{1}{(n+1)!}, \quad n \geq 0$

$n = p \quad \dfrac{1}{(p+1)!}$

$n = p+1 \quad \dfrac{1}{(p+2)!}$

$$\dfrac{\dfrac{1}{(p+1)!}}{(p+2)}$$

$$\dfrac{1}{(p+2)!} \; //$$

6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n = \dfrac{(-1)^n \, 3^n \, n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

   a) Calcule los términos a_3, a_5 y a_{n+1}.

   b) Determine y simplifique $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\dfrac{(-1)^3 \cdot 3^3 \cdot 3!}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \dfrac{-27}{8}$$

$$\frac{(-1)^5 \cdot 3^5 \cdot 5!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{-243}{32}$$

$$\frac{\dfrac{(-1)^{p+1} \cdot 3^{p+1} \cdot (p+1)!}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2p)}\,(2p+2)}}{\dfrac{(-1)^{p} \cdot 3^{p} \cdot p!}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2p)}}}$$

$$\frac{\cancel{(-1)^p} \cdot (-1) \cdot \cancel{3^p} \cdot 3 \cdot \cancel{(p+1)} \cdot \cancel{p!}}{\cancel{(-1)^p} \cdot \cancel{3^p} \cdot \cancel{p!} \cdot 2\cancel{(p+1)}} = -\frac{3}{2} \;//$$