INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — II SEMESTRE 2015
ESCUELA DE MATEMÁTICA — TIEMPO: 2 HORAS 10 MIN
CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL — VALOR 30 PTS

II PARCIAL

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular. Debe utilizar el método de Gauss-Jordan para resolver los sistemas de ecuaciones lineales que se presenten.

1. Determine todos los números complejos z y w que satisfagan, de manera simultánea, las tres condiciones siguientes: (4 puntos)

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 3 \\ z - w = 1 + 2i \\ z \cdot \overline{w} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sol: $z = 3 + ai, w = 2 + bi$

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ z \cdot \overline{w} = ab + 6 + (2a - 3b)\, i \in \mathbb{R} \Longrightarrow 2a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow [a = 6, b = 4]$$

2. Determine la factorización completa del polinomio

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 54x + 117$$

en $\mathbb{C}$, si se sabe que $3 - 2i$ es uno de sus ceros. (4 puntos)

$R/$ Por divisíón sintética

$$P(x) = \left(x^2 + 9\right)(x - (3 - 2i))(x - (3 + 2i)) :$$
$$P(x) = \left(x^2 - 9i^2\right)(x - (3 - 2i))(x - (3 + 2i))$$
$$P(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x - (3 - 2i))(x - (3 + 2i))$$

3. Calcule y represente en forma rectangular el resultado de $(-1)^{2+i}$. (4 puntos)

$$\begin{aligned} (-1)^{2+i} &= e^{(2+i)Ln(-1)} \\ Ln(-1) &= Ln(cis(\pi)) = \ln 1 + i\pi = i\pi \\ (2+i)\, Ln(-1) &= 2\pi i - \pi \\ e^{(2+i)Ln(-1)} &= e^{2\pi i - \pi} = e^{-\pi} e^{2\pi i} = e^{-\pi} cis(2\pi) = e^{-\pi} \end{aligned}$$

4. Demuestre que al resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $x^6 - 1 = 0$, la suma de sus soluciones es igual a cero. (4 puntos)

$$\begin{aligned}
\textit{Raices} \text{ sexta de } 1 &= cis\,(0) \\
w_n &= cis\left(\frac{0+2\pi k}{6}\right) = cis\left(\frac{\pi k}{3}\right) \\
w_0 &= cis\,(0) = 1, \quad w_1 = cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
w_2 &= cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad w_3 = cis\,(\pi) = -1 \\
w_4 &= cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad w_5 = cis\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

5. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Determine los valores positivos de a, b, c, d y e tales que $B^T B = A$. (4 puntos)

$$\begin{aligned}
B^T B &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ b & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2}a & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}a & a^2+c^2 & ab+cd \\ \sqrt{2}b & ab+cd & b^2+d^2+e^2 \end{pmatrix} \\
a &= \sqrt{2}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = 1, d = 1, e = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

6. Considere el sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ y + pz = 0 \end{cases}$$

donde x, y, z son incógnitas y p una constante. (5 puntos)

(a) Determine el o los valores de p tal que el sistema tenga solución única.

(b) Determine el o los valores de p tal que el sistema tenga infinitas soluciones.

$$R/ \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p &= 1 : \text{ infinitas soluciones} \\
p &\in \mathbb{R} - \{1\} : \text{ solución única}
\end{aligned}$$

7. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que A es invertible, determine explícitamente la matriz $C = A^{-1}(2B + A)$. (5 puntos)

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ 2A^{-1}B + I &= \begin{pmatrix} 2 & \frac{14}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{14}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$