INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
MA1103 CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

II SEMESTRE, 2023
TIEMPO: 2 HORAS Y 30 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 32 pts

Primer Examen Parcial

Extraordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **6** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.

2. Tiene dos horas y treinta minutos para contestar los ítems del examen.

3. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.

4. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 2y = -z \\ 3x + 2z = y \\ y + pz = 0 \end{cases}$$

donde x, y, z son incógnitas y $p \in \mathbb{R}$. Utilice el método de Gauss-Jordan para:

a) [**4 puntos**] Determinar el o los valores de la constante p de tal forma que el sistema de ecuaciones tenga solución única.

b) [**2 puntos**] Determinar el o los valores de la constante p de tal forma que el sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & p & 0 \end{array}\right) \overset{-3F_1+\overline{F_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & p & 0 \end{array}\right) \overset{\cdots}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right) (*)$$

Caso: $p \neq 1$ se tiene al resolver en $(*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{p-1}F_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-F_3+\overline{F_1};\, -F_3+\overline{F_2}}{\Longrightarrow}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, de donde tendría solución única $x = y = z = 0$.

Caso: $p = 1$ se tiene al sustituir en $(*)$ $= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right) \overset{p=1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, de donde

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

y por tanto, para $p = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro.

2. [**3 puntos**] Si se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$ Calcule $\begin{vmatrix} a & x & 3p+x \\ b & y & 3q+y \\ c & z & 3r+z \end{vmatrix}$

   Solución

$$\begin{vmatrix} a & x & 3p+x \\ b & y & 3q+y \\ c & z & 3r+z \end{vmatrix} \overset{-C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a & x & 3p \\ b & y & 3q \\ c & z & 3r \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$$

3. Sean A y C dos matrices invertibles que cumplen la siguiente igualdad $(A^{-1} \cdot X)^T \cdot C - B = D$.

   a) [**3 puntos**] Utilizando propiedades matriciales exprese la matriz X en términos de las matrices A, B, C, D.

   b) [**2 puntos**] Si se sabe que $A \cdot (C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D^T + B^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, determine la matriz X.

   Solución:

$$\begin{aligned} (A^{-1} \cdot X)^T \cdot C - B = D &\Longrightarrow (A^{-1} \cdot X)^T \cdot C = D + B \\ &\Longrightarrow (A^{-1} \cdot X)^T = (D + B) \cdot C^{-1} \\ &\Longrightarrow A^{-1} \cdot X = ((D + B) \cdot C^{-1})^T \\ &\Longrightarrow X = A \cdot ((D + B) \cdot C^{-1})^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = A \cdot ((D + B) \cdot C^{-1})^T &\Longrightarrow X = A \cdot (C^{-1})^T \cdot (D + B)^T \\ &\Longrightarrow X = A \cdot (C^T)^{-1} \cdot (D^T + B^T) \\ &\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. [**5 puntos**] Sea k un número real diferente de 0. Calcule la inversa de la matriz
   $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Sugerencia: Puede ser útil aplicar primero la inversa de un producto.

Solución

$A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$ Ahora calculamos la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -k-1 & k \end{pmatrix}$.

5. [**4 puntos**] Calcule y exprese el número complejo $w = \dfrac{3e^{-\frac{\pi}{2}i}}{16+i^{2023}} + i^{-i}$ en la forma rectangular.

Solución:

$$w = \frac{3e^{-\frac{\pi}{2}i}}{16+i^{2023}} + i^{-i}$$
$$w = \frac{3\text{cis}(-\frac{\pi}{2})}{16+i\cdot(i^2)^{1011}} + e^{\text{Ln}\left(i^{-i}\right)}$$
$$w = \frac{-3i}{16-i} + e^{-i\text{Ln}(i)}$$
$$w = \frac{-3i}{16-i} + e^{-i\text{Ln}(\text{cis}(\pi/2))}$$
$$w = \frac{-3i}{16-i}\cdot\frac{16+i}{16+i} + e^{\frac{\pi}{2}}$$
$$w = \frac{-48i+3}{257} + e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4,8221 + \frac{-48i}{257}$$

6. [**5 puntos**] Resuelva la ecuación $z^3 + 2i = -2\sqrt{3}$ en $\mathbb{C}$ y represente gráficamente las soluciones en el plano complejo.

Solución:

Note resolver $z^3 + 2i = -2\sqrt{3}$ es equivalente a calcular las raíces cúbicas de $-2\sqrt{3} - 2i$, de ahí que se utilizará el teorema de De Moivre la raíz n-ésima de un número complejo. Antes se debe transformar dicho número complejo en su forma polar, de donde puede comprobarse que $-2\sqrt{3} - 2i = \cdots = 4cis(\frac{-5\pi}{6})$, luego de esta forma las ráices o soluciones de la ecuación dada son:

$$z_0 = 4^{\frac{1}{3}}cis\left(\frac{\dfrac{-5\pi}{6} + 2\pi\cdot 0}{3}\right) = 4^{\frac{1}{3}}cis\left(\tfrac{-5\pi}{18}\right) \approx$$

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}}cis\left(\frac{\dfrac{-5\pi}{6} + 2\pi\cdot 1}{3}\right) == 4^{\frac{1}{3}}cis\left(\tfrac{7\pi}{18}\right) \approx$$

$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}} cis \left(\frac{\frac{-5\pi}{6} + 2\pi \cdot 2}{3} \right) == 4^{\frac{1}{3}} cis \left(\frac{19\pi}{18} \right) \approx$$

7. Sea $N(x) = x^3 + kx^2 + 7x - 2k$. Si se sabe que $x = i$ es una raíz doble de $N(x)$.

   a) **[2 puntos]** Determine el valor de k.

   b) **[2 puntos]** Factorice en $\mathbb{C}$ completamente el polinomio $N(x)$.

Solución:

Note que i al ser raíz de $N(x)$ se cumple $N(i) = 0$, es decir, $-i - k + 7i - 2k = 0 \Rightarrow k = 2i$, luego $N(x) = x^3 + 2ix + 7x - 4i$ y realizando la división sintética se obtiene:

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 2i & 7 & -4i & i \\
 & i & -3 & 4i & \\
\hline
1 & 3i & 4 & \boxed{0} & \\
 & i & -4 & i & \\
\hline
1 & 4i & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$N(x) = (x - i)^2(x + 4i)$