Primer Examen Parcial

EXTRAORDINARIO

Instrucciones:

1. El examen consta de **6** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada ítem e incluya todo el procedimiento que utilizó para llegar sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.

2. Tiene dos horas y veite minutos para contestar los ítems del examen.

3. No debe desgrapar este documento ni tener hojas sueltas durante la realización del examen.

4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.

5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**4 puntos**] Considere las matrices A, B y C tales que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   $B^T C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule $\left(2C^T B\right)^T A$.

   Solución

$$\begin{aligned} \left(2C^T B\right)^T A &= 2B^T C A = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 11 & -2 & 7 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -4 & 14 \\ 14 & -8 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + 5y - 10z &= 2 \\ x + y - 2z &= 2 \\ 3y - 2z &= 0. \end{cases}$$

a) **[4 puntos]** Halle la solución general del sistema por el método de Gauss-Jordan.

b) **[1 punto]** Entre las soluciones, (x, y, z), que encontró en la parte anterior indique una que satisfaga la relación $(z-x)^2 + 2y - 4 = 1$.

Solución

Como es usual se considera la matriz ampliada y se procede a realizar operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -10 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{-F_1+F_2\to F_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{4F_3+F_2\to F_2;-5F_3+F_1\to F_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Por último, intercambiamos la fila dos con la fila tres y obtenemos la llamada matriz escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de donde se sigue hay dos pivotes y una variable arbitraria, que es z, y por lo tanto la solución del sistema es dado por el vector columna:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2z \\ z \end{pmatrix},$$

donde z genera todas las soluciones, es decir el parámetro.

La parte final se obtiene al ver que $x = 2; y = 2z, z$ debe cumplir que:

$$(z-x)^2 + 2y - 4 = -1 \Longrightarrow (z-2)^2 + 4z - 4 = -1 \Longrightarrow z^2 + 2z + 1 = 0$$

, de donde $z = 1$, y la solución buscada es $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. **[4 puntos]** Sean A y B matrices de tamaño 3×3 tales que $\det(A) = 6$, $(I_3 - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule el valor de $\det(A - AB)$.

Solución

Observe lo siguiente:

$$\det(A - AB) = \det(A(I_3 - B)) = \det(A)\det(I_3 - B) = \frac{\det(A)}{\det(I_3 - B)^{-1}}.$$

Se debe calcular el determinante de la matriz $(I_3 - B)^{-1}$ por algún método visto en clase y se verifica es -4.

De esta manera $\det(A - AB) = \dfrac{6}{-4} = \dfrac{-3}{2}$

4. [**5 puntos**] Considere $z = 1+i$, $w = 3-i$ números complejos. Resuelva $\dfrac{i^{10}z^8}{w}$, represente su resultado en forma rectangular y realice una representación gráfica de dicho número complejo obtenido.

Solución

Note $i^{10} = (i^2)^5 = -1$, además $z^8 = (1+i)^8 = (\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}))^8 = 16cis(2\pi) = 16$, y por otro lado $w = 3 - i = \sqrt{10}cis(-0,321751) = 3$

De esta manera, $\dfrac{i^{10}z^8}{w} = \dfrac{-16}{3-i} = \cdots = \dfrac{-48-16i}{10}$

5. [**5 puntos**] Resuelva en el conjunto de los números complejos la siguiente ecuación

$$(w^3 - i)(w^2 + w + 1) = 0$$

Solución

Note que se debe resolver donde $w^3 - i = 0$, $w^2 + w + 1 = 0$, es decir,

I) $w^3 = i$ (raíces cúbicas de i), sea $z = i = cis(\frac{\pi}{2})$, de donde sus raíces vienen dadas por:

$w_0 = cis(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $w_1 = cis(\frac{5\pi}{6}) = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $w_1 = cis(\frac{3\pi}{2}) = -1$

II) $w^2 + w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Por tanto, soluciones en conjunto de los números complejos de dicha ecuación vienen dadas por:

$w_0 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $w_1 = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $w_3 = -1$, $w_4\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w_5\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

6. [**4 puntos**] Verifique la siguiente igualdad

$$4e^{\dfrac{-\pi}{6}}\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{i-1} = e^{i\left(\ln 4 + \dfrac{\pi}{6}\right)}$$

Solución

Note $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{i-1} = e^{(1-i)Ln(2\sqrt{3}-2i)} = e^{(i-1)(\ln 4 - \dfrac{\pi i}{6})} = e^{i(\ln 4 + \frac{\pi}{6})} \cdot e^{\frac{\pi}{6} - \ln 4}$, luego de esta forma se tiene

$$4e^{\frac{-\pi}{6}}\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{i-1} = 4e^{\frac{-\pi}{6}}\cdot e^{i\left(\ln 4+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot e^{\frac{\pi}{6}-\ln 4} = \cdots = e^{i\left(\ln 4+\frac{\pi}{6}\right)}$$