w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4n^2}{n!+7n} \leftarrow a_n$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}+4(n+1)^2}{(n+1)!+7(n+1)}$$

$(a+b)^2$
$= a^2+2ab+b^2$

$$\frac{\dfrac{3^{n+1}+4(n+1)^2}{[(n+1)!+7(n+1)]}}{\dfrac{3^n+4n^2}{n!+7n}}$$

n^2+2n+1

$$\frac{[(3^{n+1}+4(n+1)^2)](n!+7n)}{(3^n+4n^2)[((n+1)!+7(n+1))]}$$

$$\frac{[(3^n \cdot 3^1+4(n^2+2n+1)](n!+7n)}{(3^n+4n^2)[(n+1)!+7n+7)}$$

$$\frac{[(3^n \cdot 3^1+4n^2+8n+4](n!+7n)}{(3^n+4n^2)[(n+1)!+7n+7)}$$

$$\frac{[(3^n \cdot 3^1+4n^2+8n+4](n!+7n)}{(3^n+4n^2)[(n+1) \cdot n!+7n+7)}$$

$$\frac{(n+2)(n^3+3)}{2(n!+2)} \approx \frac{n \cdot n^3}{n!}$$

$$\frac{n^2+n+3}{n!} \approx \frac{n^2+n}{n!}$$

$$\frac{[(3^n \cdot 3^1 + 4n^2 + 8n + 4](n! + 7n)}{(3^n + 4n^2)[(n+1) \cdot n! + 7n + 7)]}$$

$$\frac{(3^n \cdot 3 + 4n^2)\cancel{n!}}{(3^n + 4n^2)(n+1)\cancel{n!}} \qquad n^p < a^n$$

$$\frac{3^n \cdot 3 + 4n^2}{(3^n + 4n^2)(n+1)}$$

$$\frac{3^n \cdot 3 + 4n^2}{n \cdot 3^n + 4n^3} \qquad n^p < a^n$$

$$\frac{3 \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} = 3$$

∴ Diverge

Razon
Geometrica
Raiz < 1

$$\frac{n^p}{3n^2 + 2}$$

$$\int x \cdot e^x \, dx \qquad \boxed{u} \cdot \boxed{v} - \int \boxed{v} \, \boxed{du}$$

Alge Expo

Itate

$u = x \qquad dv = e^x$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$xe^x - \int e^x dx$$

$$x \cdot e^x - e^x$$

Ilate

$$\int x \ln(x) dx \qquad u = \ln(x) \qquad dv = x$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \cancel{x^2} \frac{1}{\cancel{x}} dx$$

$$\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

1. [1 punto] Dada la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

Determine si la siguiente serie converge o diverge, en caso de converger indique a qué valor converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+4)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{+\infty(+\infty+1)(2(+\infty)+13)}{6} = +\infty$$

Diverge

2. Sea $\{m_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, tal que $m_n = \frac{\boxed{3\cdot 4\cdot 5}\cdot \ldots \cdot (n+2)}{\boxed{4\cdot 6\cdot 8}\cdot \ldots \cdot (2n+2)}$

a) [1 punto] Calcule el término m_5

$$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} = \boxed{\frac{7}{64}}$$

b) [4 puntos] Determine si $\{m_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no monótona.

$$\frac{\frac{\cancel{3\cdot 4\cdot 5\ldots(n+2)}(n+3)}{\cancel{4\cdot 6\cdot 8\ldots(2n+2)}(2n+4)}}{\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot(n+2)}{4\cdot 6\cdot 8\ldots(2n+2)}} \geq 1$$

$$\frac{n+3}{2n+4} \geq 1$$

$$n+3 \geq 2n+4$$

$$0 \geq 2n+4-n-3$$

$$0 \geq n+1$$

$$0 \geq 1+1$$

$$0 \geq 2, \text{ Falso}$$

$\rightarrow$ Es decreciente

3. Determine si las siguientes series convergen o divergen. En caso de alguna ser convergente, determine su valor de convergencia.

a) **[5 puntos]** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3}+6}{5^n}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot (-2)^3}{5^n} + 6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

$$-8 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 6 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$|r| < 1 \quad \left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{2}{5} < 1$ ✓ $\qquad \frac{1}{5} \approx 0{,}2 < 1$ ✓

$$\boxed{\frac{r^p}{1-r}}$$

$$-8\left[\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^3}{1 - -\frac{2}{5}}\right] + 6\left[\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1 - \frac{1}{5}}\right]$$

$$-\frac{69}{175} + \frac{3}{50} = \boxed{\frac{-129}{550}}$$

$a_n - a_{n+1}$

b) **[3 puntos]** $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(p)}{p+1} - \frac{\cos(p-1)}{p}$

$-(x+2)$

$-x-2$

$$-\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(p-1)}{p} - \frac{\cos(p)}{p+1} \right)$$

$$-\left[1 - \underbrace{\lim_{p\to+\infty} \cancel{\frac{\cos(p)}{p+1}}}_{} \right] \quad 0$$

$$\frac{-1}{p+1} \leq \frac{\cos(p)}{p+1} < \frac{1}{p+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pm 1}{p+1} = 0$$

-1

4. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

a) **[3 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)+1}{7^n}$

$$-1 \leq \operatorname{sen}(n^2) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}(n^2)+1}{7^n} \leq \frac{2}{7^n}$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \to \left(\frac{1}{7}\right)^n < 1$$

si Converge

$\boxed{\text{La original converge}}$

$b)$ **[4 puntos]** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left[\left(\frac{3n^2+3n+1}{5+5n^2}\right)^3\right]^n}$$

$$\left(\frac{3\cancel{n^2}}{5\cancel{n^2}}\right)^3$$

$$\frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125} < 1$$

Converge //

5. Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(n+1)!}$

Condicional
Decreciente
$a_n \to 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$ Por razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)\cdot\cancel{n!}}{n\cdot(n+2)\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}$$

$$\frac{n+\cancel{1}}{n^2+\cancel{2}} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n^2}} = \frac{1}{n} = 0$$

Converge Absol.

b) **[2 puntos]** Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{[redacted]} \cdot n}{(n+1)!}$$

$0{,}0001 = 1 \cdot 10^{-4}$

N	$N+1$	a_n
7	8	$< 1 \cdot 10^{-4}$

$\cancel{\dfrac{7}{(7+1)!}}$

0 1 2 3 4 5 6

$\dfrac{8}{(8+1)!}$

$$\boxed{\sum_{x=0}^{6} \frac{(-1)^x \cdot x}{(x+1)!}}$$