Distribuciones continuas

Distribución Uniforme Continua

1. Una variable aleatoria X se distribuye uniformemente en el intervalo $[0,25]$ ¿Cuál es la probabilidad que se encuentre en el intervalo $[12,20]$? R/ $\frac{8}{25}$

2. Un estudiante del **TEC** entra a clases a las 5pm. De su casa al **TEC** dura entre 40 y 50 minutos ¿A qué hora debe salir el estudiante de su casa para llegar puntualmente con una probabilidad de 0,95? R/ $4:10:30$

3. Se sabe que el tiempo de espera de un cliente para ser atendido en la caja de un supermercado, cuando está ubicado en la cuarta posición de la fila, sigue una distribución uniforme, donde los tiempos mínimo y máximo de espera, son de 6 y 18 minutos respectivamente.

   a) Determine la probabilidad que una persona ubicada en la quinta posición de la fila de dicho supermercado deba esperar entre 8 y 11 minutos para ser atendida. R/ $\frac{1}{4}$

   b) Calcule la esperanza y la varianza. R/ $E(X)=12$, $Var(X)=12$

4. La empresa **Save Water** ha manifestado que el gasto diario promedio de agua por persona en Costa Rica es aproximadamente 250 litros, con un máximo de 400 litros. Sea X el gasto diario de agua en litros de una persona en Costa Rica, donde X sigue una distribución uniforme.

   a) ¿Cuál es el gasto diario mínimo de agua en litros presentado por persona en el país de Costa Rica? R/ $a=100$

   b) ¿Cuál es la probabilidad que, en un día, el gasto diario de agua por persona supere los 320 litros? R/ $\frac{4}{15}$

5. El consumo mensual de agua en un condominio sigue una distribución continua uniforme con media de 40 000 litros. Si se sabe que el consumo mínimo de agua por mes en el condominio es 30 000 litros.

   a) Calcule el consumo máximo de agua en el condominio. R/ $b = 50\ 000$

   b) Calcule la probabilidad que en un mes se consuman entre 40 000 y 44 000 litros de agua en el condominio. R/ $\frac{1}{5}$

6. El ingeniero supervisor del proyecto **Chinecas** sabe que la llegada de cada uno de los trabajadores a su centro de labores se produce independientemente, de acuerdo con la distribución uniforme en el intervalo de 7:00 a 7:25am.

   a) Calcule la probabilidad de que un trabajador llegue a su centro de labores después de las 7:17am. R/ $\frac{8}{25}$

   b) Calcule la probabilidad de que un trabajador llegue entre las 7:18 y 7:20am. R/ $\frac{2}{25}$

7. La duración en minutos de una clase de matemática general de una universidad sigue una distribución uniforme en el intervalo $[70, 110]$. Una clase tiene una duración apropiada si dura entre 90 y 110 minutos.

   a) Determine la probabilidad de que una clase de matemática general tenga una duración apropiada. R/ $\frac{1}{4}$

   b) ¿Cuánto tiempo (en minutos) se espera que tenga de duración una clase de matemática general? R/ 90 minutos

8. La duración en horas de una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones** sigue una distribución uniforme en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$. Una fiesta se considera austera si dura entre 30 minutos y dos horas.

   a) Determine la probabilidad de que una fiesta sea austera. R/ $\frac{1}{3}$

   b) ¿Cuánto tiempo (en minutos) se espera que dure una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones**? R/ 165 minutos

   c) El costo de una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones** es de ₡25 000 por decoración del salón más ₡500 por cada minuto que dure la fiesta ¿cuánto dinero se espera pagar por una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones**? R/ ₡107 500

Distribución Exponencial

1. Se sabe que el tiempo de vida útil de un tractor sigue una distribución exponencial con media de 8 años ¿Cuál es la probabilidad de que un tractor de este tipo se tenga que reemplazar antes de 12 años? R/ 0,7768

2. Se ha determinado que el tiempo, en minutos, que un cliente espera para ser atendido en la soda comedor de la universidad **Futuro Garantizado** sigue una distribución exponencial con media de tres minutos. Para un cliente elegido al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea atendido en menos de cinco minutos? R/ 0,8111

3. Se sabe que el tiempo de reparación de unas máquinas de escribir tiene una distribución exponencial con media de 22 minutos. Determine la probabilidad de que el tiempo de reparación sea menor a 15 minutos. R/ 0,4943

4. Se ha determinado que el tiempo en minutos que tarda un cajero de cierto banco atendiendo a una persona, sigue una distribución exponencial con media de cinco minutos. Para un cliente elegido al azar ¿cuál es la probabilidad de que un cajero tarde más de 10 minutos atendiendo a dicho cliente? R/ 0,1352

5. El tiempo durante el cual cierta marca de batería trabaja en forma efectiva hasta que falle, se distribuye según el modelo exponencial con un tiempo promedio de fallas igual a 360 días. Halle la probabilidad de que el tiempo que la batería trabaja hasta que falle, sea mayor a 400 días. R/ 0,3291

6. El tiempo en horas de funcionamiento de una cierta batería AA de la marca **Costa Sonic** sigue una distribución exponencial con promedio de 30 horas. Determine la probabilidad de que al seleccionar una batería al azar dure más de 33 horas. R/ 0,3328

7. Cada día, el tiempo que tarda don Juan en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo sigue una distribución exponencial con un promedio de dos minutos. Determine la probabilidad de que mañana don Juan tarde más de tres minutos en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo. R/ 0,2231

8. Se ha determinado que el tiempo en minutos que tarda la gasolinera **Fast Station** en llenar un tanque de gasolina de un auto, sigue una distribución exponencial con media desconocida. Se sabe que la probabilidad que **Fast Station** tarde más de 6 minutos en llenar el tanque es de $e^{\frac{-3}{2}}$ ¿Cuál es la varianza del tiempo que tarda **Fast Station** en llenar un tanque de gasolina de un auto? R/ $Var(X) = 16$

9. Suponga que la vida útil de una pila marca **Duracell** tiene una distribución exponencial con media de 50 horas.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la pila dure menos de 20 horas? R/ 0,3296

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la pila dure al menos 60 horas? R/ 0,3011

10. En una tienda de suministros electrónicos, el tiempo (en horas) que toma atender una solicitud de cotización sigue una distribución exponencial con media de dos horas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para atender una cotización supere las cuatro horas? R/ 0,1353

    b) Carlos envió una solicitud de cotización y lleva cuatro horas esperando ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar al menos seis horas en total? R/ 0,9144

11. En una tienda de suministros computacionales, el tiempo, en horas, que toma atender una solicitud de cotización sigue una distribución exponencial con media de dos horas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para atender una cotización supere las cuatro horas? R/ 0,1353

    b) Si el tiempo de respuesta ha superado las cuatro horas ¿cuál es la probabilidad de que supere las ocho horas? R/ 0,1353

Distribución Normal

1. Suponga que, en Cartago, la temperatura en el mes de enero sigue una distribución normal con media de $20°C$ y una desviación estándar de $6°C$. Un día cualquiera de enero, un habitante toma la temperatura. Determine la probabilidad que la temperatura no supere los $24°C$ R/ 0,7486

2. Una máquina expendedora de café está confeccionada para descargar una media de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de líquido está distribuida normalmente con media 200 mililitros y desviación típica de 15 mililitros ¿Cuál porcentaje de vasos se llenará con más de 225 mililitros? R/ 0,0475

3. La compañía **XYZ** hace computadoras y garantiza su funcionamiento por 4 años. Si la computadora se mantiene en buen estado, siguiendo una distribución normal con $E(X) = 5$ años y $\sigma = 4$ meses ¿Qué probabilidad hay que una computadora tenga que ser reparada antes de su garantía? R/ 0,0013

4. La fábrica **TORNIPLUS** hace tornillos, tal que los diámetros están distribuidos normalmente con media de $0,25$ y desviación estándar de $0,02$. Un tornillo se considera defectuoso si tiene un diámetro d, donde $d \leq 0,20$ o $d \geq 0,28$. Halle el porcentaje de tornillos defectuosos producidos por la fábrica. R/ 0,073

5. Se espera que para el tercer parcial de probabilidades, las notas sigan una distribución normal con media 78 y varianza de 49

   a) ¿Cuál es la probabilidad que un estudiante que haga examen tenga una nota superior a 82? R/ 0,2843

   b) Si se sabe que la nota es mayor que 82 ¿Cuál es la probabilidad que la nota sea mayor a 90? R/ 0,1533

6. Doña Sonia tiene una pequeña tienda de reparación de ropa, cuya ganancia diaria sigue una distribución normal con un promedio de ₡50 000 y una desviación estándar de ₡5 000.

   a) Determine la probabilidad de que en un día doña Sonia obtenga una ganancia superior a los ₡60 000 R/ 0,0228

   b) Halle la probabilidad de que en un día doña Sonia obtenga una ganancia entre ₡40 000 y ₡57 000 R/ 0,8964

7. Sea T el tiempo que tarda una compañía en resolver un problema de un semáforo, desde el momento que se recibe el reporte de avería. Se sabe que sigue una distribución con $E(T) = 10$ y $Var(T) = 9$

   a) ¿Cuál es la probabilidad que luego de recibir el reporte de avería, el tiempo que tarda la compañía en resolverlo supere las $14,5$ horas? R/ 0,0668

   b) Determine el tiempo por encima del cual se ubica el $4,75\,\%$ de los trabajos que más tardan en ser atendidos. R/ 15,01

8. El frijol **Llanero** vende bolsas a un peso que sigue una distribución normal de media de 1 000 gramos y desviación estándar de 20 gramos.

   a) Determine la probabilidad que una bolsa de frijoles marca **Llanero** pese menos de 980 gramos. R/ 0,1587

   b) Determine un peso C, a partir del cual quede el $17\,\%$ de las bolsas de frijoles más pesadas. R/ 1 019

   c) Un rango $]\mu - c, \mu + c[$ que contenga el $70\,\%$ de los pesos R/ $]979{,}2, 1\,020{,}8[$

9. Una población de peces tiene pesos que se distribuyen normalmente, donde no se conoce μ ni σ. Una persona desea conocer el peso C por debajo del cual queda el $80\,\%$ de los pesos. Para ello, toma 100 peces aleatoriamente y se da cuenta que 25 de ellos pesan menos de 400 gramos, luego los devuelve y hace otra captura con la misma cantidad de peces y determina que 13 de ellos pesan más de 900 gramos. ¿Cuál es el valor de C? R/ $\dfrac{7\,375}{9}$

10. La distribución para los tiempos de entrega, en semanas, de un servicio de casilleros es una variable aleatoria que sigue una distribución normal.

    a) Se sabe que solo el 20 % de las entregas quedan por fuera de un rango de una semana alrededor de la media. ¿Qué porcentaje de las entregas quedan a más de 1,3 desviaciones estándar de la media?

    b) Si la media y la varianza para la entrega son de 3 semanas y de 9 semanas, determine un tiempo t_0 de manera que la probabilidad de que menos del 10 % de las entregas sobrepasen ese tiempo, sea inferior a 0,05.

11. La vida media de cierto tipo de motor es de 10 años con una desviación estándar de 2 años. Suponga que la vida útil de un motor sigue un distribución normal. El fabricante reemplaza gratis todos los motores que fallan mientras estén en garantía. Si la compañía está dispuesta a reemplazar solo el 3 % de los motores que fallan, ¿de cuánto tiempo debe ser una garantía?.

12. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim N(5, 9)$. Obtenga los valores de a y b tales que $P(a < X < b) = 0{,}8$, en donde el intervalo es simétrico con respecto a la media. R/ 8,8448

Distribución Gamma Incompleta

1. Se sabe que el tiempo de espera al hacer fila para almorzar en el comedor de la universidad **CET** sigue una distribución Gamma, con $\alpha = 4$. La probabilidad que una persona elegida al azar espere menos de 15 minutos, es de 0,353. Determine el tiempo promedio de esperar al hacer fila para almorzar en esta universidad. R/ $E(X) = 20$

2. Cuando una persona toma un medicamento, el tiempo durante el cual hace efecto en el cuerpo, sigue una distribución Gamma, con un promedio de 5 horas y una varianza de 2,5 horas. Si una persona toma el medicamento a las 6am ¿Cuál es la probabilidad que a la 1pm el medicamento aún esté haciendo efecto en el cuerpo de la persona? R/ 0,891

3. Una piscina pública necesita que le agreguen al agua un cierto químico para que sea apta para el usuario. La distribución del químico del agua sigue una distribución Gamma con una media de 5,383 litros y una varianza de 4,14 litros. Determine la probabilidad de que la cantidad de litros del químico en el agua no sobrepase los 8,5 litros. R/ 0,921

4. En cierta ciudad, el consumo diario de gasolina, en millones de litros, sigue una distribución Gamma como media de seis millones de litros y desviación estándar de $\sqrt{12}$ millones de litros. Científicos han determinado que, si en un día se consumen más de ocho millones de litros en la ciudad, el día se considera altamente contaminante ¿cuál es la probabilidad de un día se considere altamente contaminante? R/ 0,238

5. A un peaje de cierta autopista, la llegada de carros sigue una distribución Gamma con media de 12 carros por minuto y desviación estándar de 4,9 carros por minuto. Los ingenieros de tránsito han determinado que, si pasan más de 20 carros por minuto, se debe abrir otro carril. Calcule la probabilidad que en un tiempo determinado no se tenga que abrir otro carril en la autopista. R/ 0,933

6. En una cierta ciudad el consumo de energía eléctrica, en millones de kilovatios por hora, sigue una distribución Gamma, con promedio de 2 millones de kilovatios y desviación estándar $\sqrt{2}$ millones de kilovatios. Si el consumo de energía es superior a los 4 millones de kilovatios en una hora, esa hora se considera crítica. Determine la probabilidad de que en una determinada hora el consumo de energía eléctrica sea considerada crítica. R/ 0,092

7. Se ha determinado que el tiempo T en horas que semanalmente requiere un sitio web para actualizarse sigue una distribución gamma con media de 12 horas y una desviación estándar de $\sqrt{48}$ horas. Determine la probabilidad de que en alguna semana el tiempo de actualización del sitio sea mayor a 16 horas. R/ 0,238

8. El tiempo que tarda un proceso es una variable aleatoria Gamma con media 6 segundos y varianza 9 segundos al cuadrado. Para la probabilidad de que un proceso elegido de manera aleatoria tarde más de 6 segundos:

   a) Escriba la forma de la integral que debería calcularse para obtener la probabilidad solicitada. R/ $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{8}{243} \cdot x^3 \cdot e^{\frac{-2x}{3}}\, dx$

   b) Use la Gamma Incompleta para aproximar el valor de esta probabilidad R/ 0,433

9. Se ha determinado que el tiempo real que invierte una persona haciendo una tarea es una variable aleatoria X que sigue una distribución gamma con media $5a$ horas y desviación estándar de $\sqrt{5}a$ horas. Exprese la integral, en términos de a, para la probabilidad de que una persona invierta por encima de $6a$ horas.

Distribución Beta

1. Suponga que la probabilidad de acertar una adivinanza es una distribución beta con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 5$.

   a) Escriba la expresión integral para calcular la probabilidad de acierto entre 20 % y 30 %. R/ $\int_{0,2}^{0,3} 30x(1-x)^4\,dx$

   b) Calcule la probabilidad de acierto entre 20 % y 30 % R/ 0,2351

2. Suponga que la proporción de los componentes de cierto envío que son defectuosos sigue una distribución beta con $\alpha = 2$ y $\beta = 5$. Calcule la probabilidad de que el envío tenga de 20 % a 30 % de componentes defectuosos. R/ 0,2351

3. Un técnico ofrece garantía de un año para los electrodomésticos que repara. La proporción de electrodomésticos que necesitan ser revisados por esta garantía sigue una distribución beta, con media de 0,6 electrodomésticos y desviación estándar de 0,2 ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 80 % de los electrodomésticos que se repararon en el año requieran revisión por la garantía? R/ 0,0126

4. Muestre que si

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ y } \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

   entonces

$$\alpha = \frac{\mu^2-\mu^3}{\sigma^2} - \mu \text{ y } \beta = \frac{\mu(1-\mu)^2}{\sigma^2} + \mu - 1$$

5. Los artículos con códigos de barras, son iluminados con luz láser y luego éstos son leídos por un lector óptico. La fracción de luz que llega al lector óptico sigue una distribución beta, con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. La lectura solo es válida si la cantidad de luz recogida por el lector es superior al 30 %. Determine la probabilidad de que la lectura de un código sea correcta. R/ 0,9163

Relación Poisson-Exponencial

1. El número de llamadas que se reciben en una oficina sigue una distribución de Poisson con promedio de 7 llamadas cada dos horas.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre las llamadas realizadas exceda el tiempo esperado? R/ 0,36788

   b) Determine el intervalo de tiempo tal que la probabilidad de que no se reciban llamadas en dicho intervalo sea de 0,8. R/ 0,03188

2. La empresa **SBE** se dedica a abastecer verduras a los supermercados. Para esto tiene 8 camiones. El tiempo útil de cada camión sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0{,}001$ (el tiempo medido en meses) Si funcionan bien al menos 6 camiones, la empresa cumple su labor correctamente. Calcule la probabilidad de que la empresa cumpla bien su labor durante más de 5 años, sin tener que adquirir nuevos camiones. R/ 0,8876

Relación Poisson-Gamma

1. La cantidad de reclamos telefónicos que recibe una empresa de servicio postal sigue una distribución de Poisson con una media de dos reclamos por minuto. El gerente está valorando si la cantidad de operadores que trabajan en el departamento de reclamos en este momento es suficiente. Un día visita dicho departamento y propone lo siguiente: si debe esperar menos de tres minutos para obtener los próximos 10 reclamos, entonces se procede a contratar más operadores ¿cuál es la probabilidad de que en este servicio postal contraten más operadores? R/ 0,084

2. En cierta región del país están quitando el servicio de agua potable con mucha frecuencia. La cantidad de reclamos formales que reciben al correo electrónico de la empresa encargada de suministrar este líquido sigue una distribución de Poisson, con media de 5 reclamos por hora. La Defensoría ha concluido que si debe esperar menos de 90 minutos para obtener los próximos 10 reclamos, entonces hará un proceso judicial ¿Cuál es la probabilidad de que inicien dicho proceso? R/ 0,224

Demostraciones

1. Sea X una variable aleatoria continua tal que $X \sim Exp(\lambda)$. Muestre que:

$$P(X \geq t + h | X \geq t) = P(X \geq h)$$

2. Pruebe que para cualquier valor positivo de a, se cumple que

$$P(-a < Z < a) = 2P(Z < a) - 1$$

   donde Z sigue una distribución normal estándar.

3. Si X es una varaible aleatoria continua uniforme, demuestre que:

   a) $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

   b) $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$