Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
II Semestre

Tiempo máximo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje máximo: 34 puntos

I Examen Parcial Extraordinario

MA-1103: Cálculo y álgebra lineal

08 de setiembre 2018

Indicaciones: *Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.*

---

1. Considere la serie $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)}$.

   a) Usando inducción matemática, demuestre que el término $n-$ésimo de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ asociada a la serie S, es $S_n = \dfrac{n}{3(2n+3)}$. **(5 puntos)**

   b) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n+6) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \right]$ es convergente o divergente. **(2 puntos)**

Solución

a)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} = \frac{n}{3(2n+3)}$$

Se verifica para el primer elemento ($n = 1$)

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} = \frac{1}{3(2\cdot 1+3)}$$
$$\frac{1}{5\cdot 3} = \frac{1}{3\cdot 5} \quad \checkmark$$

Se supone para ($n = k$)

$$HI : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} = \frac{k}{3(2k+3)}$$

Se verifica para $(n = k+1)$

$$HQD : \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} = \frac{k+1}{3(2(k+1)+3)} = \frac{(k+1)}{3(2k+5)}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)+3)(2(k+1)+1)} \\
= \ & \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+5)(2k+3)} \qquad \text{(HI)} \\
= \ & \frac{k(2k+5)+3}{3(2k+5)(2k+3)} \\
= \ & \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+5)(2k+3)} \\
= \ & \frac{(k+1)(2k+3)}{3(2k+5)(2k+3)} \\
= \ & \frac{(k+1)}{3(2k+5)}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} = \frac{k+1}{3(2(k+1)+3)} = \frac{(k+1)}{3(2k+5)}$$

Por lo tanto

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)} = \frac{n}{3(2n+3)}; \qquad \forall n \geq 1$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n+6) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n+6) \cdot \frac{n}{3(2n+3)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{3} \right]$

Por p serie, con $p = 1$ Diverge.

---

2. Calcule la suma de la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - 2 \cdot 5^{k-1}}{7^{k+1}}$. **(4 puntos)**

Solución

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - 2 \cdot 5^{k-1}}{7^{k+1}}, \quad \text{Geométrica} \\
= \; & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{7^{k+1}} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^{k-1}}{7^{k+1}} \\
= \; & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k} 9}{7^{k} 7} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^{k}}{7^{k} 7 \cdot 5} \\
= \; & \frac{9}{7} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^{k} - \frac{2}{35} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{k} \\
& \left|\frac{3}{7}\right| < 1 \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{5}{7}\right| < 1 \qquad \therefore \text{ ambas series convergen} \\
= \; & \frac{9}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^{2} \frac{1}{1 - \frac{3}{7}} - \frac{2}{35} \left(\frac{5}{7}\right)^{2} \frac{1}{1 - \frac{5}{7}} \\
\therefore \; & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - 2 \cdot 5^{k-1}}{7^{k+1}} = \frac{61}{196}
\end{aligned}
$$

---

3. Determine la convergencia o divergencia de la siguiente serie. Debe indicar el o los criterios aplicados. **(4 puntos)**

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(m^2+1)+3}{e^m+m}$$

Solución

Criterio de comparación directa

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \operatorname{sen}\left(m^2+1\right) \leq 1 \\
2 &\leq \operatorname{sen}\left(m^2+1\right)+3 \leq 4 \\
\frac{2}{e^m+m} &\leq \frac{\operatorname{sen}(m^2+1)+3}{e^m+m} \leq \frac{4}{e^m+m} \qquad \text{Se escoge la mayor}
\end{aligned}$$

$$\text{Analizar convergencia para } \sum \frac{4}{e^m+m}$$

$$\text{se compara paso por límite con } \sum \frac{1}{e^m}$$

$$\begin{aligned}
\text{C. Geométricas, } \left|\frac{1}{e}\right| &< 1 \Longrightarrow \sum \frac{1}{e^m} \text{ Converge} \\
\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{4}{e^m+m}}{\frac{1}{e^m}} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{4e^m}{e^m+m} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{4e^m}{e^m\left(1+\frac{m}{e^m}\right)} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{m}{e^m}\right)} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{1}{e^m}\right)} = 4 \qquad \text{Ambas series se comportan igual} \\
&\therefore \text{ y como } \sum \frac{1}{e^m} \text{ Converge, entonces } \sum \frac{4}{e^m+m} \text{ Converge} \\
&\therefore \text{ y por criterio de comp. dir. } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(m^2+1)+3}{e^m+m} \text{ Converge}
\end{aligned}$$

---

4. Si la función $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x\left(1 + (\ln x)^2\right)}$ es continua, positiva y decreciente, determine si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\left(1 + (\ln k)^2\right)}$$

es convergente o divergente. **(4 puntos)**

Solución

Como f es continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, +\infty[$, se puede utilizar el Criterio de la Integral para analizar la serie.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\left(1 + (\ln x)^2\right)} dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{x\left(1 + (\ln x)^2\right)} dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\arctan(\ln x)\Big|_1^b\right]$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\arctan(\ln b) - \arctan(\ln 1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\left(1 + (\ln x)^2\right)} dx$ Converge

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\left(1 + (\ln k)^2\right)}$ Converge

---

5. Considere la serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$.

a) Si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)\,!} = 0$, verifique que la serie es convergente. **(2 puntos)**

Solución

Como se tiene que: $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)\,!} = 0$, basta verifiacar que la sucesión sean decreciente.

$a_n = \frac{3^{n-1}}{(n+1)\,!}$ es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{3^{n-1}}{(n+1)\,!} &\geq \frac{3^n}{(n+2)\,!} \\
\frac{3^{n-1}}{3^n} &\geq \frac{(n+1)\,!}{(n+2)(n+1)\,!} \\
\frac{3^n}{3^n \cdot 3} &\geq \frac{1}{(n+2)} \\
n+2 &\geq 3 \\
n &\geq 1, \text{ lo cual es verdadero } \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!} \text{Converge}
\end{aligned}$$

b) Determine el menor valor para k de manera que S_k aproxime a S con un error menor que 10^{-3}. **(2 puntos)**

S_k aproxima a S con un error E menor que 10^{-3}, si $b_{k+1} < 10^{-3}$ ya que

$$E < b_{k+1} < 10^{-3}$$

n	a_n	Término b_{n+1}	$b_{n+1} < a10^{-3}$
1	$0,5$	$0,5$	NO
2	$-0,5$	$0,375$	NO
3	$0,375$	$0,225$	NO
4	$-0,225$	$0,1125$	NO
5	$0,1125$	$0,048214286$	NO
6	$-0,048214286$	$0,018080357$	NO
7	$0,018080357$	$0,006026786$	NO
8	$-0,006026786$	$0,001808036$	NO
9	$0,001808036$	$0,000493101$	SI

El menor valor de k sería: 9.

c) Aproxime la suma de la serie usando el valor de k obtenido en b). **(2 puntos)**

$\sum_{n=1}^{9} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!} = \frac{243}{492800}$

6. Encuentre el intervalo de convergencia para la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(x+4) \cdot 3 \ln(n+1)}{\ln n} \right]^n$$

(NO analice los extremos). **(4 puntos)**

Solución

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \left[\frac{(x+4) \cdot 3 \ln(n+1)}{\ln n} \right]^n \right|}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(|x+4|) \cdot 3 \ln(n+1)}{\ln n}$$

$$= 3|x+4| \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

Por L'Hopital

$$= 3|x+4| \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

Para que converge se tiene

$$= 3|x+4| < 1$$

$$\Rightarrow |x+4| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-13}{3} < x < \frac{-11}{3}$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(x+4) \cdot 3 \ln(n+1)}{\ln n} \right]^n$ Converge Absolutamente $\forall x \in]\frac{-13}{3}, \frac{-11}{3}[$

7. Determine si la serie dada es absolutamente convergente. **(4 puntos)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

Solución

Análisis de Convergencia Absoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-5)^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{2n+1}}{(2n+1)\,!} \right| = \sum \frac{5^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

C. razón

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+3}}{(2n+3)\,!} \cdot \frac{(2n+1)\,!}{5^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{2n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot (2n+1)\,!}{(2n+3)\,(2n+2)(2n+1)\,!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{(2n+3)^2(2n+2)}$$

$$= 0 < 1$$

$\therefore$ La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{2n+1}}{(2n+1)\,!}$ Converge Absolutamente