INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
MA1103 CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

I SEMESTRE, 2023
TIEMPO: 2 HORAS Y 30 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: pts

Tercer Examen Parcial

Extraordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **seis** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva cada pregunta en su cuaderno de examen e incluya todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.

2. Tiene **dos horas y treinta minutos** para resolver los problemas del examen.

3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.

4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.

5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Considere la sucesión con término énsimo dado por $x_n = \frac{n!`}{2023^n}$. Determine a partir de cuál término dicha sucesión se hace creciente.

   Solución

   Para x_n sea creciente:

   $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n!`}{2023^n} \leq \frac{(n+1)!`}{2023^{n+1}}$, lo cual es válido para $n \geq 2022$.

2. Analice y justifique la convergencia de la siguiente serie, y calcule su suma

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{9 \cdot 5^{-k}}{(-3)^{2-k}} - \frac{2}{k^2-1}$$

   Solución

   Note la serie se separa en una serie geométrica y una serie telescópica(doble)todas ellas convergentes y de esta manera:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{-3^{-k}}{(5)^{-k}} - 2\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - 2\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{\left(\frac{-3}{5}\right)^3}{1+\frac{3}{5}} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3}$$

3. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

   Solución

   Sea $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x^2}$ continua en $[2, \infty[$. Donde $f'(x) = \dfrac{1 - 2ln(x)}{x^3} < 0$ para $x \in [2, \infty[$, por tanto es monotona, falta analizar convergencia de la integral

   $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{ln(x)}{x^2}$, la cual es convergente a $\dfrac{1}{2}(1 + ln(2))$, y por tanto por criterio de la integral se cumple que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ es convergente.

   b) $\displaystyle\sum_{k=7}^{\infty} \frac{5 - 3k^2}{7k + 5k^2} + \frac{2^k}{k}$

   Solución

   Note por criterio de divergencia que dicha serie es divergente ya que
   $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{5 - 3k^2}{7k + 5k^2} + \frac{2^k}{k} \neq 0$

4. Considere la siguiente serie numérica, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\ln(\ln(k+2))}$.

   a) Utilice el criterio para series alternadas para verificar que la serie S es convergente. Debemos considerar la función de variable real: $f(x) = \dfrac{1}{\ln(\ln(x+2))}$ en el intervalo $[1, +\infty[$, ya que $a_k = f(k)$.

   Solución

   Observamos que la función es positiva, y además como:

$$f'(x) = -\frac{1}{(\ln(\ln(x+2)))^2} \cdot \frac{1}{\ln(x+2)} \cdot \frac{1}{x+2} < 0,$$

   se sigue que $f(x)$ es decreciente, y por lo tanto se sigue que la sucesión a_k también es decreciente.
   Otra forma de ver esto es observar que si $k < k + 1$ entonces como la función $g(x) = ln(x + 2)$ es creciente se sigue que $\ln(k + 2) < \ln(k + 3)$, y de nuevo como $\ln(x)$ es creciente se sigue que $\ln(\ln(k + 2)) < \ln(\ln(k + 3))$, luego al pasar a dividir se sigue que:

$$\frac{1}{\ln(\ln(k+2))} > \frac{1}{\ln(\ln(k+3))} \Longrightarrow a_{k+1} < a_k.$$

Por otra parte, se observa que:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\ln(\ln(k+2))} = 0,$$

ya que el denominador va al infinito cuando k crece mucho.
Al cumplirse , las hipótesis del criterio de series alternadas se sigue que la serie original es convergente.

b) Si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\ln(\ln(k+2))}$ determine n tal que S_n aproxime a S con un error de 0,01.

Solución

Para ver esto, recuerde que el error en un serie alternada se acota de la siguiente forma:

$$|S - S_k| < a_{k+1},$$

donde S es la suma de la serie, S_k es la k-ésima suma parcial y a_{k+1} es el término general de la serie.
Para hallar lo que se nos pide hacemos lo siguiente:

$$a_{k+1} < 0{,}01 \Longrightarrow \frac{1}{\ln(\ln(k+3))} < 0{,}01 \Longrightarrow 100 < \ln(\ln(k+3)).$$

Al usar la exponencial en la desigualdad anterior se tiene que:

$$e^{100} < \ln(k+3) \Longrightarrow e^{e^{100}} < k+3,$$

de donde se concluye que para los k tales que:

$$k > e^{e^{100}} - 3,$$

se da respuesta a la pregunta inicial.

c) Analice si S es absolutamente convergente o convergente condicionalmente.

Solución

Lo que debemos estudiar es la serie con término general en valor absoluto, es decir a la serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{\ln(\ln(k+2))} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(\ln(k+2))},$$

esta serie es divergente porque la podemos comparar con la serie armónica:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln(\ln(k+2))}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\ln(\ln(k+2))} = +\infty,$$

lo cual fácilmente se calcula por cálculo I:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(\ln(x+2))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln(x+2)} \cdot \frac{1}{x+2}} = +\infty.$$

En resumen, la serie original es débilmente convergente.

5. Suponiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1$, halle el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{4^n}(x+2)^n$. Debe estudiar los extremos de dicho intervalo.

Solución

Como es usual vamos a utilizar el criterio del cociente con $a_n = \dfrac{\ln(n)}{4^n}(x+2)^n$, luego

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{4^{n+1}}(x+2)^{n+1} \cdot \frac{4^n}{\ln(n)(x+2)^n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{4} \cdot (x+2),$$

de donde:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{4} \cdot (x+2) \right| = \frac{|x+2|}{4},$$

al usar la información del inicio del ejercicio.

Para que haya convergencia se necesita que $\dfrac{|x+2|}{4} < 1$, es decir que se cumpla que $-6 < x < 2$.

En $x = 2$, la serie de potencias se convierte en la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{4^n}(2+2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{4^n} \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n),$$

la cual diverge porque su término general tiende a infinito.

En $x = -6$, la serie de potencias se convierte en la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{4^n}(-6+2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{(-4)^n} \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n),$$

la cual diverge porque el límite de su término general no existe, ya que por ejemplo por los pares tiende a más infinito, y por los impares tiene a menos infinito.

En resumen, el intervalo de convergencia de la serie original es: $]-6, 2[$.

6. (4 puntos) A partir de $\ln x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$, $0 < x \leq 2$, deduzca la serie de potencias para la función $f(x) = \ln(x+1) - x$, e indique su intervalo de convergencia (No analizar extremos del intervalo).

Solución

$$\begin{aligned}
\ln x &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ 0<x\leq 2\\
&\Rightarrow\ \ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+1-1)^n}{n},\ 0<x+1\leq 2\\
&\Rightarrow\ \ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ -1<x\leq 1\\
&\Rightarrow\ \ln(x+1)-x=-x+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ -1<x\leq 1\\
&\Rightarrow\ \ln(x+1)-x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ -1<x\leq 1
\end{aligned}$$

7. Si se sabe que $\displaystyle\int_0^1 x^2 arc\tan(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+4)}$, aproxime el valor de la integral de modo que el error en la aproximación sea menor que 0,01.

$$
\begin{aligned}
& \text{Si se le pide que justifique que} \\
\int_0^1 x^2 arc\tan(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+4)}, \\
& \text{entonces se resuleve así} \\
arc\tan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\
arc\tan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\
&\Rightarrow x^2 arc\tan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{2n+1} \\
&\Rightarrow \int_0^1 x^2 arc\tan(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{2n+1} dx \\
&\Rightarrow \int_0^1 x^2 arc\tan(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{(-1)^n x^{2n+4}}{(2n+1)(2n+4)} \right|_0^1 \\
&\Rightarrow \int_0^1 x^2 arc\tan(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+4)} \\
\text{Si no, sería que solo haga esto} &: \\
b_n &= \frac{1}{(2n+1)(2n+4)}, \text{ es decreciente} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{(2n+1)(2n+4)} \geq \frac{1}{(2n+3)(2n+6)} \\
&\Leftrightarrow (2n+3)(2n+6) \geq (2n+1)(2n+4) \\
&\Leftrightarrow 4n^2 + 18n + 18 \geq 4n^2 + 10n + 4 \\
&\Leftrightarrow 8n + 14 \geq 0, \text{ Verdadero} \\
\text{y } \lim_{n\to\infty} b_n &= 0 \\
|S - S_n| &\leq b_{n+0} = \frac{1}{(2n+1)(2n+4)} < 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow 100 < (2n+1)(2n+4) \\
n &= 4 \\
\int_0^1 x^2 arc\tan(x)\,dx &\approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+4)} = 0{,}214418
\end{aligned}
$$