Instituto Tecnológico de Costa Rica — Escuela de Matemática
MA-1103: Cálculo y Álgebra Lineal — II Semestre

Examen Parcial III

Extraordinario

26 de noviembre 2018

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable, ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica. El examen consta de **7 preguntas** con un puntaje máximo de **31 puntos**. Dispone de **2 horas y 30 minutos** para realizar el examen.

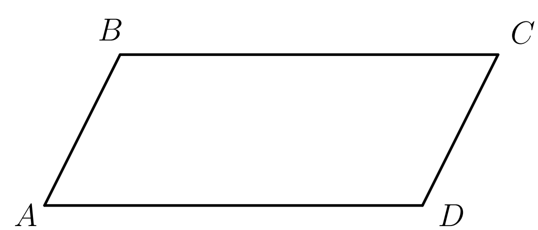
#1 Si la matriz B se define de modo que $B = P^{-1}AP$, con A y $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ y además P es una matriz que posee inversa. Pruebe que $|A| = |B|$. **(3 puntos)**

Solución:

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP \quad &\Longrightarrow \quad |B| = |P^{-1}AP| \\ &\Longrightarrow \quad |B| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| \\ &\Longrightarrow \quad |B| = \frac{1}{\cancel{|P|}} \cdot |A| \cdot \cancel{|P|} \\ &\Longrightarrow \quad |B| = |A| \end{aligned}$$

$\lrcorner$

#2 Considere el paralelogramo de vértices A, B, C, D. Si los vértices A, B, C son tales que $A(-1, 2, 3)$, $B(-1, 1, 5)$ y $C(-1, -3, 8)$. Determinar las coordenadas del vértice D. **(4 puntos)**



Solución:

Por regla del paralelogramo se cumple que: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &\iff (0,-5,5) = (0,-1,2) + (a+1, b-2, c-3) \\ &\iff (0,-5,5) = (a+1, b-3, c-1) \end{aligned}$$

Luego: $a = -1$, $b = -2$ y $c = 6$.

$\lrcorner$

#3 Considere los vectores $\mathbf{u} = (1,-1,0)$ y $\mathbf{v} = (-1,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$. Además del vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{r}$. Determine el o los vectores $\mathbf{r}$ en $\mathbb{R}^3$, de modo que se cumpla simultáneamente las siguientes condiciones: **(5 puntos)**

- $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$
- $||\mathbf{r}|| = 6$
- $\text{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} = 2\mathbf{u}$

Solución:

Sea $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Entonces:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0 \Longrightarrow (-1,1,2) \cdot (x,y,z) = 0 \Longrightarrow -x + y + 2z = 0$$

De la segunda condición:

$$||\mathbf{r}|| = 6 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

Por la tercera condición:

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} = 2\mathbf{u} &\Longrightarrow \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}}{||\mathbf{u}||^2} \cdot \mathbf{u} = 2\mathbf{u} \\ &\Longrightarrow \frac{(1-x,-1-y,-z) \cdot (1,-1,0)}{2} \cdot (1,-1,0) = (2,-2,0) \\ &\Longrightarrow \frac{1-x+1+y}{2} \cdot (1,-1,0) = (2,-2,0) \\ &\Longrightarrow \left(\frac{2-x+y}{2}, \frac{x-y-2}{2}, 0\right) = (2,-2,0) \end{aligned}$$

Se deduce que $x = y - 2$, esto implica:

$$-x + y + 2z = 0 \Longrightarrow 2 - y + y + 2z = 0 \Longrightarrow z = -1$$

por lo que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \Longrightarrow (y-2)^2 + y^2 + 1 = 36 \Longrightarrow 2y^2 - 4y - 31 = 0$$

cuyas soluciones están dadas por: $y = \dfrac{\sqrt{66} \pm 2}{2}$.

Por lo tanto, $\mathbf{r} = \left(\dfrac{\sqrt{66} \pm 2}{2} - 2, \dfrac{\sqrt{66} \pm 2}{2}, -1 \right)$.

$\lrcorner$

#4 Considere los puntos $A(1, 2-k, -1), B(1, -1, k)$ y $C(1, 1-k, k)$. Determine el valor de k para que estos sean colineales. **(5 puntos)**

Solución:

Sea L la recta que contiene los puntos A y B. Además, considere $\mathbf{v}$ un vector director de L, donde:

$$\mathbf{v} = (0, -3 + k, k + 1)$$

Entonces:

$$L : (x, y, z) = (1, 2-k, -1) + t\langle 0, k-3, k+1 \rangle; t \in \mathbb{R}$$

Luego para que $C \in L$ debe darse que:

$$x = 1, \qquad y = 2 - k + (k-3)t, \qquad z = -1 + (k+1)t$$

Así:

$$1 = 1; \qquad 1 - k = 2 - k + (k-3)t; \qquad k = -1 + (k+1)t$$

$$\Longrightarrow -1 = (k-3)t \Longrightarrow t = \frac{-1}{k-3}$$

Por otro lado,

$$k + 1 = (k+1)t \Longrightarrow t = \frac{k+1}{k+1} = 1$$

Esto implica:

$$\frac{-1}{k-3} = 1 \Longleftrightarrow k - 3 = -1 \Longleftrightarrow k = 2.$$

$\lrcorner$

#5 Considere $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vector normal del plano Π. Determine la ecuación cartesiana de un plano Π de modo que se cumpla simultáneamente las condiciones siguientes:

a) La norma de su vector normal es $\sqrt{14}$.

b) Su vector normal forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ con la recta

$$L : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(3, 2, 1); \ \ t \in \mathbb{R}$$

c) Los puntos $P(-2, 0, -1)$ y $Q(0, 4, -1)$ pertencen al plano Π.

(5 puntos)

Solución:

Sea $\mathbf{n} = (a, b, c)$ el vector normal del plano Π. Se cumple:

- $a^2 + b^2 + c^2 = 14$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{(a, b, c) \cdot (3, 2, 1)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3a + 2b + c}{14} \Longrightarrow 3a + 2b + c = 7$
- $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{n} \Longrightarrow (2, 4, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \Longrightarrow 2a + 4b = 0 \Longrightarrow a = -2b$

Sustituyendo se tiene: $-6b + 2b + c = 7 \Longrightarrow c = 4b + 7$. Luego:

$$\begin{aligned} 4b^2 + b^2 + (4b + 7)^2 = 14 \ &\Longrightarrow \ 5b^2 + 16b^2 + 56b + 49 = 14 \\ &\Longrightarrow \ 21b^2 + 56b + 35 = 0 \\ &\Longrightarrow \ b_1 = -1; b_2 = \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

Así, existen dos planos que satisfacen las condiciones:

$$\Pi_1 : 2(x + 2) - y + 3(z + 1) = 0$$
$$\Pi_1 : 2x - y + 3z = -7$$

$$\Pi_2 : \frac{10}{3}(x + 2) - \frac{5}{3}y + \frac{1}{3}(z + 1) = 0$$
$$\Pi_2 : \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}y + \frac{z}{3} = -7$$

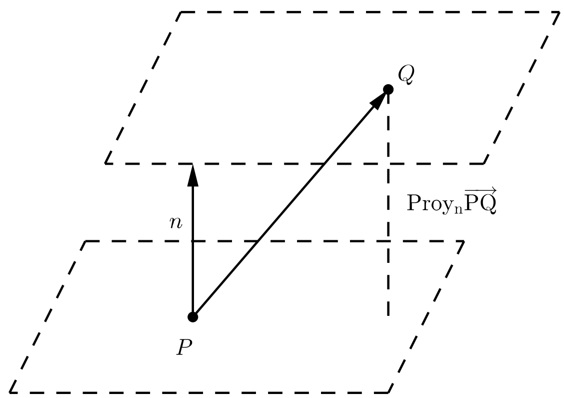
#6 Determine la distancia entre los planos π y θ definidos por: **(4 puntos)**

$$\pi : 3x - 2y + 5z = -5$$
$$\theta : -3x + 2y - 5z = 4$$

Debe incluir un esquema geométrico como parte de la justificación de su procedimiento de cálculo.

Solución:

Considere los puntos $P(0,0,-1)$ y $Q(1,1,-1)$ de los planos π y θ respectivamente.



Entonces: $\overrightarrow{PQ} = (1,1,0)$ y $\mathbf{n} = (3,-2,5)$. Calculando la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\mathbf{n}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\text{Proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ} &= \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||^2}\cdot\mathbf{n} \\
&= \frac{(1,1,0)\cdot(3,-2,5)}{38}\cdot(3,-2,5) \\
&= \frac{1}{38}\cdot(3,-2,5) \\
&= \left(\frac{3}{38}, -\frac{1}{19}, \frac{5}{38}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia entre ambos planos está dada por:

$$||\text{Proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{\left(\frac{3}{38}\right)^2 + \left(-\frac{1}{19}\right)^2 + \left(\frac{5}{38}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{38}} \approx 0.16222$$

$\lrcorner$

#7 Considere las rectas L y M y el plano $\rho : 2x + y - z = 19$, donde:

$$L : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4}, z = 1 \qquad M : \begin{cases} x + 2r = 1 \\ 2y = 4, & r \in \mathbb{R} \\ z - r = 0 \end{cases}$$

Determine la ecuación del plano π que contiene al punto de intersección entre ρ y M, y que contiene también a la recta L. **(5 puntos)**

Solución:

$$L : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 4t, & t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases} \qquad M : \begin{cases} x = 1 - 2r \\ y = 2, & r \in \mathbb{R} \\ z = r \end{cases}$$

Para encontrar el punto P tenemos:

$$2(1 - 2r) + 2 - r = 19 \Longrightarrow 2 - 4r + 2 - r = 19 \Longrightarrow r = -3$$

Entonces, $P(7, 2, -3)$ está contenido en el plano π. Tomando $Q(1, -3, 1)$ un punto sobre L, se cumple:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1, -3, 1) - (7, 2, -3) = (-6, -5, 4)$$

Esto implica que:

$$\mathbf{n}_\pi = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ -6 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-16, 8, -14)$$

Finalmente:

$$\pi : 8x - 4y + 7z - 27 = 0$$

$\square$