Ceros racionales de $x^{3} - 7x + 6$

Cantidad maxima de ceros (Pueden ser menos pero no mas)

Se sacan los divisores del coeficiente principal y secundario y se evaluan

Teorema 1
Todo polinomio de grado impar posee al menos un cero real.

Teorema 2
Todo polinomio de grado $n \geq 1$ es el producto de una constante, por polinomios de grado uno de la

Teorema 3 [Número máximo de ceros en un polinomio]
Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, entonces existen como máximo n ceros del polinomio, contando multiplicidades (raíces repetidas).

Teorema 4 [Teorema de los ceros racionales de Gauss]
Sea $P(x) = a_n x^n + ... + a_0$ un polinomio de grado n de coeficientes enteros, tales que el coeficiente principal $a_n \neq 0$ y término independiente $a_0 \neq 0$, si $P(x)$ posee ceros racionales, entonces estos son de la forma $x = \frac{p}{q}$, donde:

- *p es divisor de a_0.*
- *q es divisor de a_n.*
- *$\frac{p}{q}$ está simplificado al máximo.*

Ejemplo 3

Encuentre todos los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Solución

Como $a_3 = 1$, entonces sus divisores son ± 1.
Como $a_0 = 6$, entonces sus divisores son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Por el teorema de los ceros racionales se tiene que los posibles ceros son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Por el teorema que establece el número máximo de ceros, sabemos que como el polinomio es de grado 3, de los 8 posibles ceros, máximo tres serán ceros (pueden ser menos), para encontrar cuáles lo son evaluamos:

$P(-1) = (-1)^3 - 7(-1) + 6 = 12$

$P(1) = (1)^3 - 7(1) + 6 = 0$

$P(-2) = (-2)^3 - 7(-2) + 6 = 12$

$P(2) = (2)^3 - 7(2) + 6 = 0$

$P(-3) = (-3)^3 - 7(-3) + 6 = 0$

Como ya se obtuvo el número máximo de ceros posibles, no hace falta probar con los demás valores.

Teorema 5 [Teorema del Residuo]
Sea $P(x)$ un polinomio de grado mayor o igual que uno, si $P(x)$ es dividido entre $x - c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces su residuo es igual a $P(c)$

Ejemplo 5

Determine el residuo de dividir el polinomio $P(x) = x^{2020} + 2x^{50} - 7x$ entre $D(x) = x + 1$

Solución

Como el grado del polinomio $P(x)$ es muy grande, realizar la división simplemente no es una opción, afortunadamente el teorema del residuo indica que basta calcular $P(-1)$ ya que $x = -1$ es el cero del polinomio $D(x)$, así

$$P(-1) = (-1)^{2020} + 2(-1)^{50} - 7(-1) = 10$$

$\therefore$ el residuo de efectuar la división es igual a 10

Sabiendo que todos los ceros del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ son $x = 1$, $x = 2$ y $x = -5$ determine:

1. *El residuo de la división del polinomio P entre: $x - 1$, entre $x - 2$ y entre $x + 5$ sin hacer la*

división.

2. La factorización completa del polinomio P.

1) Por el teorema del residuo al evaluar $x = 1, 2$ y -5 se obtiene 0

2) Ya que se conocen los ceros
$x^3 + 2x^2 - 13x + 10$
$(x-1)(x-2)(x+5)$

Ejemplo 7

Obtenga un polinomio de grado 4 que tenga por ceros a $x = -2$ *y* $x = \dfrac{1}{5}$

Por teorema del factor

$x = -2 \qquad x = \frac{1}{5}$

$x + 2 \qquad x - \frac{1}{5}$

Para lograr el grado 4 hay que multiplicarlos por un polinomio de grado x

$$\left((x+2)\left(x-\frac{1}{5}\right)\right)(x^2+1)$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{5}x + 2x - \frac{2}{5}\right)\left(x^2+1\right)$$

$$-\frac{1}{5} + 2$$

$$\frac{-1+10}{5} = \boxed{\frac{9}{5}x}$$

$$\left(x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5}\right)\left(x^2+1\right)$$

$$x^4 + \boxed{x^2} + \frac{9}{5}x^3 + \frac{9}{5}x \boxed{-\frac{2}{5}x^2} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{5} = \frac{5-2}{5}$$

$$\boxed{= \frac{3}{5}}$$

$$\boxed{x^4 + \frac{9}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5}}$$

Factor común

Se basa en la ley distributiva

$$a(b+c) = ab + ac$$

Consiste en buscar el monomio que corresponde al máximo común divisor (MCD) de todos los términos del polinomio y factorizarlo mediante la aplicación de la ley distributiva y propiedades de la división.

Ejemplo 8

Factorice completamente:

$$6w^4x^4y - 8w^3x^5 + 10w^2x^4$$

$$2w^2x^4(3w^2y - 4wx + 5)$$

Agrupación con factor común

También toma como base la ley distributiva

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = (ac+ad) + (bc+bd)$$

Cuando se aplica este método se realizan agrupaciones de los términos que conforman al polinomio, estos grupos se separan por sumas, de tal forma que todos los grupos tenga igual cantidad de términos, luego se aplica la técnica de factor común a cada grupo, obteniendo finalmente un factor común de toda la expresión, que se encuentra entre los paréntesis.

Ejemplo 10

Factorice completamente

$$2a^2bx + 4a^2by - 3x^2y^2 - 6xy^3$$

$$2a^2b(x+2y) - 3xy^2(x+2y)$$

$$(2a^2b - 3xy^2)(x+2y)$$

Factorización con productos notables (F.N)

Para esta estrategia es necesario recordar los productos o fórmulas notables:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = (a-b)^3$$

Ejemplo 12

Factorice completamente

$$64x^6 - 27y^6$$

$$64x^6 - 27y^6$$
$$\sqrt{64x^6} \qquad \sqrt{27y^6}$$
$$\sqrt[2]{8^2x^6} \qquad \sqrt{3^3y^6}$$
$$\sqrt[2]{8^2x^2\cdot x^2\cdot x^2} \qquad \sqrt{3^2\cdot 3\cdot y^2\cdot y^2\cdot y^2}$$
$$8x^3 - 3y^3\sqrt{3}$$
$$= (8x^3)^2 - (3y^3\sqrt{3})^2$$
$$= (8x^3 - 3y^3\sqrt{3})(8x^3 + 3y^3\sqrt{3})$$

$$= \left(2x-y\sqrt{3}\right)\left(4x^2+2xy\sqrt{3}+3y^2\right)\left(2x+y\sqrt{3}\right)\left(4x^2-2xy\sqrt{3}+3y^2\right)$$

Ecuaciones de primer grado (lineales)

Para resolver este tipo de ecuaciones se deben aplicar las propiedades anteriores.

Ejemplo 19

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{3x+4}{5} = \frac{3x-6}{3}$$

$$\frac{3x+4}{5} = \frac{3x-6}{3} \qquad 15$$

$$(3x+4)3 = (3x-6)5$$
$$9x+12 = 15x-30$$
$$42 = 6x$$
$$\frac{42}{6} = x$$
$$7 = x$$

Ecuaciones polinomiales

Para resolver estas ecuaciones es muy importante tener en cuenta que se debe evitar dividir a ambos lados de la ecuación por una expresión algebraica que posea variables, ya que esto puede ocacionar que se pierdan soluciones y también añade restricciones para la ecuación que originalmente no estaban.

Los pasos a seguir **siempre** *son los siguientes:*

1. *Escribir todas las expresiones del mismo lado del símbolo del igual, esto para poder comparar la expresión con cero (la solución o soluciones de la ecuación se obtiene encontrando cuando la expresión algebraica pasa por cero).*
2. *Se debe factorizar completamente la expresión algebraica.*
3. *Se debe aplicar el principio del producto nulo, con el fin de obtener ecuaciones más simples.*
4. *Se encuentran los ceros del polinomio, es decir, se resuelven las ecuaciones lineales obtenidas.*
5. *Se escribe el conjunto solución de la ecuación original.*

Ejemplo 22

Resuelva la siguiente ecuación

$$x(x+1)^2 = (x+1)(x+4)$$

$$x(x+1)^2 - (x+1)(x+4) = 0$$

$$(x+1)(x(x+1) - (x+4)) = 0$$

$$(x+1)(x^2 \cancel{+x} \cancel{-x} - 4) = 0$$

$$(x+1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

$0 = x+1$ $\quad$ $0 = x-2$ $\quad$ $0 = x+2$

$-1 = x$ $\quad$ $2 = x$ $\quad$ $-2 = x$