INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
MA1103 CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

I SEMESTRE, 2022
TIEMPO: 2 HORAS Y 30 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 28 pts

Primer Examen Parcial

Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **7** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene **dos horas y quince minutos** para contestar los ítems del examen.
3. No se permite tener hojas sueltas durante la realización del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**4 puntos**] Determine los valores de x de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1/4 \end{pmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1/4 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 2x+9 & x+5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1/4 \end{pmatrix} \\ = & \; x^2+7x+12=0 \\ x = & -3, x=-4 \end{aligned}$$

2. Considere el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones con cinco incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 & = & -a \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_3 + x_5 & = & a, \end{cases}$$

donde a es una constante.

   a) **[1 punto]** Verifique que $\begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ a \\ a \\ -a \end{pmatrix}$ es solución del sistema anterior.

   b) **[5 puntos]** Halle la solución general del sistema por el método de Gauss-Jordan, y luego indique cómo a partir de dicha solución general se obtiene la solución del apartado anterior.

Solución

La solución de la primer parte del ejercicio 1 es básicamente sustituir, y en efecto al sustituir en nuestro sistema el vector columna obtenemos que:

$$\begin{cases} -a - a + a & = & -a \\ -2a + 2a + a + -a & = & 0 \\ a + a + -a & = & a, \end{cases},$$

lo cual es claramente cierto.

Para la solución de la segunda parte, lo primero que consideramos es la matriz aumentada del sistema, y empezamos a aplicar operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -a \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & a \end{array}\right) \overset{-2F_1+F_2\to F_2; F_1+F_3\to F_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Volvemos a aplicar operaciones elementales y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-F_3+F_1\to F_1; F_3+F_2\to F_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Observe que ya tenemos la forma escalonada reducida, quedan tres pivotes y dos variables arbitrarias, con lo cual tenemos infinitas soluciones, y todas ellas se generan del siguiente vector columna:

$$\begin{pmatrix} x_3 + x_5 - a \\ -2x_3 - 2x_5 + 2a \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{pmatrix},$$

donde x_3, x_5 son los parámetros.

Se necesita que se cumpla lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_3 + x_5 - a \\ -2x_3 - 2x_5 + 2a \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ a \\ a \\ -a \end{pmatrix} \Longrightarrow x_3 = a, x_5 = -a.$$

3. [**4 puntos**] Supongamos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule $\left(A^T B^{-1}\right)^{-1}$.

Solución

A partir de la relación dada, y utilizando propiedades vistas en clase:+

$$\left(A^T B^{-1}\right)^{-1} = (B^{-1})^{-1}(A^T)^{-1} = B(A^{-1})^T,$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} B(A^{-1})^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. [**3 puntos**] Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2. Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Solución

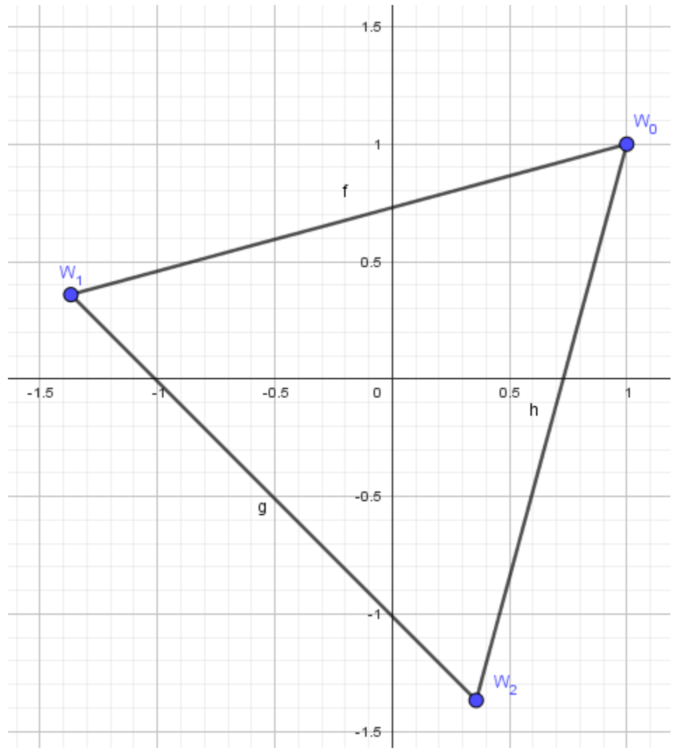
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrows F_3}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{-2F_3+F_2}{\Longrightarrow}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrows F_2}{\Longrightarrow} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

5. [**5 puntos**] Determine las tres raíces cúbicas de $w = -2 + 2i$ y represéntelas gráficamente en un mismo plano.

Solución

Sea $w = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\, cis(\frac{3\pi}{4})$, luego se tiene que las raíces cúbicas de w vienen dadas por:

$W_0 = \sqrt{2}\, cis(\frac{\pi}{4}) = 1 + i$
$W_1 = \sqrt{2}\, cis(\frac{11\pi}{12}) = -1,3660 + 0,3660\, i$
$W_2 = \sqrt{2}\, cis(\frac{19\pi}{12}) = \sqrt{2}\, cis(\frac{-5\pi}{12}) = 0,3660 - 1,3660\, i$



6. [**4 puntos**] Determine $(2+2i)^{1-i}$ y exprese su resultado en forma rectangular.

Solución

Note $(2+2i)^{1-i} = e^{(1-i)Ln(2+2i)}$, y además $Ln(2+2i) = Ln(2\sqrt{2}\, cis(\frac{\pi}{4})) = ln(2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}i$

De esta forma

$$(2+2i)^{1-i} = e^{(1-i)Ln(2+2i)} = e^{(1-i)(ln(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}i)} = e^{ln(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}+(\frac{\pi}{4}-ln(2\sqrt{2}))i}$$
$$= e^{ln(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}} \cdot cis(\frac{\pi}{4} - ln(2\sqrt{2})) = 6,00398 - 1,5607i$$

7. [**3 puntos**] Determine un polinomio de grado 4 con coeficientes reales que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$.

Solución

Dado que $-4i$ y $-5+2i$ son raíces complejas por teorema se cumple que sus conjugados complejos también son raíces del polinomio, y de esta forma un polinomio en variable x con coeficientes reales de grado cuatro que satisface lo solicitado viene dado por

$$P(x) = (x+4i)(x-4i)(x+5-2i)(x+5+2i) = x^4 + 10x^3 + 145x^2 + 160x + 464$$