§5. Probabilidad

§5.1. Conteo

Definición 5.1 Regla de Laplace

En los casos donde los eventos son **equiprobables**, la probabilidad de un evento es el número de casos del evento, entre el total de casos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\mathcal{U})}$$

Ejemplo 5.1 Suponga que 8 bloques etiquetados $E_1, E_2, ..., E_8$ se colocan en una bolsa y se extraen uno a uno para ordenarlos. Determine:

a) El total de formas en las cuales los bloques etiquetados con un par quedan en las posiciones impares.

b) La probabilidad de este evento.

Ejemplo 5.2 Una clave consiste en 8 carácteres, compuesta por números (del 0 al 9), letras en minúscula (de un total de 26 letras distintas) y letras en mayúscula (de un total de 26 letras distintas).

a) ¿Cuántas claves es posible formar si no hay restricciones?

b) ¿Cuántas claves es posible formar si deben contener al menos un número, al menos una letra en minúscula y al menos una letra en mayúscula?

c) Determine la probabilidad de que la clave comience con mayúscula.

Ejemplo 5.3 Si se lanzan tres dados distintos, determine la probabilidad de que el resultado de los tres dados sume 7.

§5.2. **Teoría**

Definición 5.2 : Espacio muestral

Dado un experimento, el **espacio muestral** (denotado por Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.

Ejemplo 5.4 Defina el espacio muestral para los siguientes casos

a) Seleccionar una bola de una urna que contiene bolas enumeradas de 1 a 50. Anotar el número de la bola.

b) Lanzar una moneda tres veces, y anotar la secuencia de escudos y coronas.

c) Lanzar una moneda tres veces, y anotar el número de coronas.

d) Un bloque de información se transmite de manera repetida en un canal defectuoso (*noisy channel*) hasta que un bloque libre de errores llega al recibidor. Contar el número de transmisiones requeridas.

Ejemplo 5.5 Se tienen seis pilots, de los cuales 4 no tienen tinta. Determine el espacio muestral en los siguientes casos:

a) Se seleccionan los marcadores al azar uno por uno hasta que se encuentra un marcador bueno. Se anota la sucesión de las pruebas.
b) En lugar de escribir la sucesión, se escribe únicamente el número de marcadores que se probaron.
c) En lugar de escribir el número de marcadores que se probaron, se escribe únicamente el número de marcadores que no tenían tinta.
d) Se seleccionan los marcadores al azar uno por uno hasta que se encuentran ambos marcadores buenos. Se anota la sucesión de las pruebas.
e) Para el caso (c), si sólo se escribe el número de marcadores probados.

Ejemplo 5.6 Se realiza un experimento en el cual se lanza tres veces, de manera sucesiva, una moneda cargada. Si E denota escudo, C denota corona, y la probabilidad de obtener escudo es de 1/3, determine:

a) el espacio muestral.

b) la probabilidad de que se obtengan al menos 2 coronas, dado que el segundo lanzamiento fue corona.

Definición 5.3 : Evento

Un evento, es un subconjunto del espacio muestral.

Nota 5.1 Recuerde que tanto Ω como $\emptyset$ son subconjuntos de Ω.

Ejemplo 5.7 Un dado se lanza dos veces, y el número de puntos se anotan en orden. Sean los eventos A: "el número de puntos en el primer lanzamiento no es menor que el número de puntos en el segundo lanzamiento."; B: "el número de puntos en el primer lanzamiento es 6"; y C: "el número de puntos difiere en 2". Determine la probabilidad de:

a) cada elemento del espacio muestral.

b) los eventos A, B, C, $A \cap \overline{B}$ y $A \cap C$.

Definición 5.4 : Probabilidad

La **probabilidad** es una **métrica** que se define para los eventos de un espacio muestral Ω, que cumple las siguientes características:

- $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \Omega$.
- Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- Si A y B son eventos **disjuntos**, es decir, $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Nota 5.2 : Propiedades

- $P(\mathcal{U}) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ejemplo 5.8 Un experimento aleatorio tiene espacio muestral $S = \{a, b, c, d\}$. Si $P(\{c, d\}) = 3/8$, $P(\{b, c\}) = 6/8$ y $P(\{d\}) = 1/8$, determine las probabilidades de a, b y c.

Ejemplo 5.9 Suponga que los eventos A y B son tales que $P(A) = \frac{1}{2}P(B)$ y que $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$. Si $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, determine $P(A)$.

§5.3. **Probabilidad condicional**

Definición 5.5 : Probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición 5.6 : Eventos independientes

A y B son **eventos independientes** si $P(A|B) = P(A)$; en caso contrario se llaman **dependientes**.

Nota 5.3 : Eventos disjuntos

Recuerde que si A y B son disjuntos, entonces $A \cap B = \emptyset$. Dos eventos disjuntos **no son** independientes, pues $P(A|B) = 0$ (a menos que $P(A) = 0$).

Ejemplo 5.10 Considere los eventos A, B y C, no nulos, y con A y B disjuntos. Se sabe que $P(A \cap C) = \dfrac{P(B)}{5}$ y $P(C \cup A) = \dfrac{P(B)}{7}$. Pruebe que:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{33P(B)}{35}.$$

Ejemplo 5.11 Sean A, B y C eventos no nulos del espacio muestral Ω, de forma que $A \cup B = \Omega$, y A y C son independientes. Pruebe que

$$P[A \cap B \cap C] = 1 - P\left[\overline{A}\right] P[C] - P\left[\overline{B} \cup \overline{C}\right]$$

Ejemplo 5.12 Considere los eventos A, B y C de un experimento aleatorio. Si se sabe que A y B son independientes, y A y C son excluyentes, pruebe que:

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] P\left[\overline{B}\right] + P[B \cup C]$$

Ejemplo 5.13 Sean C y D eventos tales que $P(C) = 0.5$, $P(D) = 0.4$ y $P\left(\overline{C} \cap D\right) = 0.2$. Determine si los eventos C y D son independientes.

§5.3.1. **Ejercicios**

a) Sean A y B dos eventos no nulos tales que $P(A) = \frac{1}{3}P\left(\overline{B}\right)$ y además $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Pruebe que:

   a) $P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(B)$

   b) A y B son eventos dependientes.

b) Sean A, B y C eventos no nulos tales que: $A \cup B = \Omega$, A y C son independientes.

   a) Demuestre que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son conjuntos disjuntos.

   b) Pruebe que $P(A \cap B \cap C) = 1 - P\left(\overline{A}\right)P(C) - P\left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)$

§5.4. **Extracciones**

Ejemplo 5.14 En una bolsa se tienen 10 bolinchas blancas, 6 bolinchas verdes y 4 bolinchas rojas. Considere el experimento en que se extrae una bolincha al azar, se anota su color y se devuelve a la bolsa, junto con dos bolinchas del mismo color al de la bolincha extraída. Suponga que el experimento se repite hasta obtener dos bolinchas verdes consecutivas. ¿Determine la probabilidad de que se realicen a lo sumo 3 extracciones?

Ejemplo 5.15 Se tiene dos urnas con bolitas, indistinguibles salvo por el color, de la siguiente manera:

	Bolitas rojas	**Bolitas azules**
Urna 1	4	1
Urna 2	2	2

Se extraen bolitas de las urnas, sin reemplazo y de forma alternada iniciando con la primera urna, hasta obtener dos bolitas rojas (no necesariamente consecutivas).

a) Escriba una representación del espacio muestral para el experimento propuesto.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se saquen cuatro bolitas para terminar el experimento?

Ejemplo 5.16 En un laboratorio de control de calidad electrónico se están probando componentes de dos tipos distintos. El primer grupo contiene 12 transistores funcionales y 8 defectuosos, mientras que el segundo grupo tiene 9 diodos operativos y 6 con falla técnica. El proceso de prueba sigue una secuencia alternada aleatoria estricta: primero se examina un transistor, luego un diodo, después otro transistor, y así sucesivamente. Cada componente seleccionado se retira definitivamente del lote para su análisis. El proceso termina en el momento en que se encuentra el primer componente en buen estado.

Considerando este proceso de selección secuencial sin reemplazo, calcule la probabilidad de que sea necesario realizar exactamente cuatro pruebas para identificar el primer componente funcional.

§5.4.1. **Ejercicios**

1) En una canasta se tienen 10 bolas rojas y 1 bola verde. Se comienza a sacar bolas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas:

   Regla 1: Si la bola extraída es roja, no se devuelve a la canasta y se agrega una bola verde a la canasta.

   Regla 2: Si la bola es verde, no se devuelve a la canasta.

   El proceso termina hasta obtener 2 bolas verdes extraídas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar en total 4 bolas?

2) Cuatro compañeros de residencia van a rifar la lavada de los platos, se colocan tres fichas blancas y una negra en una bolsa de tela y cada uno va sacando una ficha, al que le corresponda la ficha negra le tocará lavar todos los platos. Uno de los estudiantes se apresura a tomar la ficha de primero convencido de que sus probabilidades de sacarse la lavada de platos se reducen si toma la ficha de primero. ¿Está ese estudiante en lo cierto?, utilice principios probabilísticos para contestar dicha pregunta.

3) Un juego consiste de dos etapas. En la primera etapa se debe elegir una bolita de una urna que contiene dos bolitas blancas, tres azules y cuatro rojas. Si la bolita elegida es blanca puede elegir una de dos puertas, en una de ellas hay premio y en la otra no. Si la bolita elegida es azul puede elegir una de tres cajas de las cuales una tiene premio. Si la bolita que extrae es roja entonces automáticamente tiene premio.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona haya sacado premio?

   b) Si una persona se sacó un premio en el juego, determine la probabilidad de que haya elegido una bolita blanca.

§5.5. **Probabilidad condicional (Bayes)**

Definición 5.7 Se dice que A_1, A_2, ..., A_n es una partición de A, si se cumple que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$, y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

Teorema 5.1 Dada una partición A_i de un conjunto, y B un subconjunto de A, entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \quad \text{y} \quad P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}$$

Ejemplo 5.17 Un estudiante del curso de IA crea una sistema de alertas para detectar posibles clientes impuntuales en operaciones de crédito. Un banco hace pruebas intensivas del sistema con base en los registros de su cartera de clientes y determina que: si la persona es impuntual el sistema acierta en clasificarla como tal el 95 % de las veces y que, si la persona es puntual, el sistema falla al calisficarla como impuntual el 3 % de las veces. Los registros del banco revelan que el 10 % de los clientes incumplen mientras que el 90 % no. Si un cliente al azar se clasifica como impuntual por el sistema ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?

Ejemplo 5.18 Los profesores de Cátedra se dieron cuenta que el 63.7 % del estudiantado tienen este ejercicio correcto. Suponga que las calificaciones de este ejercicio son independientes.

a) Si se toman al azar 4 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que solo el segundo **NO** tenga este ejercicio correcto?

b) Si se toman al azar 3 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero tenga este ejercicio correcto, dado que los otros dos estudiantes **NO** tienen este ejercicio correcto? Justifique su respuesta.

Ejemplo 5.19 Una persona debe usar una de dos líneas de autobús para llegar a su trabajo. Si viaja en buses de la línea A, tiene una probabilidad del 26.3 % de llegar tarde; mientras que si viaja en los buses de la línea B esta probabilidad es de 6.7 %. Suponga que esa persona utiliza el 60 % de las veces los autobuses de la línea A. ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado la línea de buses B, un día que llegó tarde?

Ejemplo 5.20 En una mesa se tienen un par de urnas: la primera urna (llamada A) tiene 4 bolitas rojas y 6 bolitas azules, mientras que la segunda urna (llamada B) posee 16 bolitas rojas y una cantidad desconocida de bolitas azules. Un experimento consiste en sacar una bolita, al azar, de cada urna. Si se sabe que la probabilidad de que ambas bolitas sean del mismo color es de 0.44, ¿cuántas bolitas azules hay en la urna B?

Ejemplo 5.21 Expertos concluyeron que, en un prueba sanguínea, si una persona posee cierta enfermedad, la probabilidad de que resulte positivo es de 95 %, mientras que si no posee la enfermedad, la probabilidad de que resulte positivo es de 0.5 %. Se estima que en determinada población, alrededor del 1 % de las personas realmente posee dicha enfermedad. Determine la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población tenga la enfermedad, si su prueba resultó positiva.

Ejemplo 5.22 En un grupo grande de pacientes en recuperación de heridas de hombro, el 22 % asiste tanto a terapia física como al quiropráctico, mientras que el 12 % no asiste a ninguno. Se sabe que la probabilidad de que un paciente escogido al azar visite al quiropráctico excede en 0.14 a la probabilidad de que un paciente escogido al azar visite la terapia física. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente, elegido al azar, visite la terapia física?

Ejemplo 5.23 En una encuesta sobre el uso de una pasta dental de cierta marca, donde el 63 % eran mujeres y el resto hombres, se obtuvieron los siguientes resultados:

	Sí la uso	No la uso	No responde
Mujeres	36 %	48 %	16 %
Hombres	31 %	46 %	13 %

a) ¿Qué porcentaje de las personas encuestadas usa la pasta dental?

b) Si una persona encuestada no quiso responder, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Ejemplo 5.24 Una empresa recibe lotes de material por parte de tres proveedores, de manera que el 50 % de los lotes vienen del proveedor A, el 30 % del proveedor B y el resto del proveedor C. Se sabe que el 0.1 % de los lotes del proveedor A vienen defectuosos, al igual que el 0.5 % de los lotes del proveedor B. Además, se sabe que la probabilidad de tomar un lote al azar y esté defectuoso es de 0.004.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote escogido al azar del proveedor C esté defectuoso?

b) Si se escoge al azar un lote y está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del proveedor A?

Ejemplo 5.25 Una clínica ha desarrollado una nueva prueba para detectar una enfermedad rara, que afecta al 1 % de la población. Dicha prueba tiene las siguientes características:

- La probabilidad de que la prueba sea positiva, dado que la persona tiene la enfermedad (sensibilidad) es de 95 %.
- La probabilidad de que la prueba sea negativa dado que la persona no tiene la enfermedad (especificidad) es de 90 %.

Un paciente de la clínica recibe un resultado positivo en la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que ese paciente realmente tenga la enfermedad?

Ejemplo 5.26 Una empresa fabrica dos tipos de dispositivos: tabletas y teléfonos inteligentes. El 60 % de la producción diaria son tabletas, y el 40 % restante son teléfonos inteligentes. Se sabe que de todos los dispositivos fabricados por día, el 5 % de las tabletas producidas tienen un defecto, así como el 2 % de los teléfonos inteligentes producidos tienen un defecto. Suponga que se escoge un dispositivo al azar de todos los fabricados un día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo seleccionado sea una tableta defectuosa?

b) Dado que el dispositivo seleccionado es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea una tableta?

Ejemplo 5.27 Un sistema recibe únicamente tres tipos de consultas, mutuamente excluyentes: SELECT (60 %), que tienen un 5 % de probabilidad de fallar; INSERT (25 %), con un 10 % de tasa de error; y UPDATE, con un 20 % de probabilidad de fallar.

a) Calcule la probabilidad general de que una consulta cualquiera falle en este sistema.

b) Si se detecta una consulta fallida, ¿cuál es la probabilidad de que corresponda específicamente a una consulta de tipo UPDATE?

c) (**MALA!**) Durante ese mes, se registraron 1179 consultas de tipo INSERT exitosas. Calcule el número total de consultas realizadas en el sistema durante ese periodo.

§5.5.1. **Ejercicios**

1) A una fiesta fueron igual cantidad de niños y de niñas. La probabilidad de que un niño beba Coca Cola es de 0.93 mientras que la probabilidad de que una niña beba Coca Cola es de 0.75. Determine la proporción de niñas y niños de manera que al elegir uno de ellos al azar, un 85% beban Coca Cola.

2) En el País de las Maravillas los gatos tienen una y solo una de las siguientes cualidades: vuelan, tienen bigotes, o comen pescado. En un censo, Alicia ha determinado que el 25 % de los gatos de este país vuelan y el 60 % de los gatos no tienen bigotes. Además en este estudio se determinó que el 80 % de los gatos que vuelan están locos, al igual que el 70 % de los gatos con bigotes y el 20 % de los gatos que comen pescado.

   a) ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas están locos?

   b) Se elige un gato al azar de este país y resulta que está loco. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga bigotes?

   c) ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas tienen bigotes o están locos?