Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	06
Fecha	Lunes 02 de setiembre del 2024 (semana 07)
Contenidos	**a)** Operaciones con números complejos en forma rectangular
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Número complejo

Los números complejos ($\mathbb{C}$) son una extensión de los números reales, lo cual significa que el conjunto de los números complejos incluye a todos los números reales y también a otros, llamados **imaginarios**. Se denota como i y corresponde con la raíz cuadrada de -1.

Forma rectangular de un número complejo

Un número complejo z es un número que se escribe de la forma $z = a + bi$, o bien, de la forma $z = (a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$

Al número a se le llama **parte real** y se denota como $\mathrm{Re}(z)$ y al número b se le llama **parte imaginaria** y se denota como $\mathrm{Im}(z)$. Gráficamente, esto puede verse como:

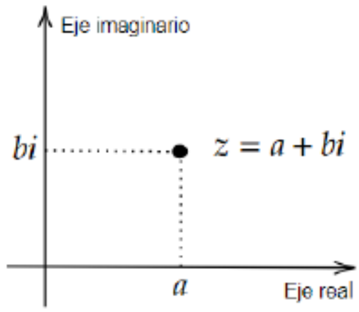
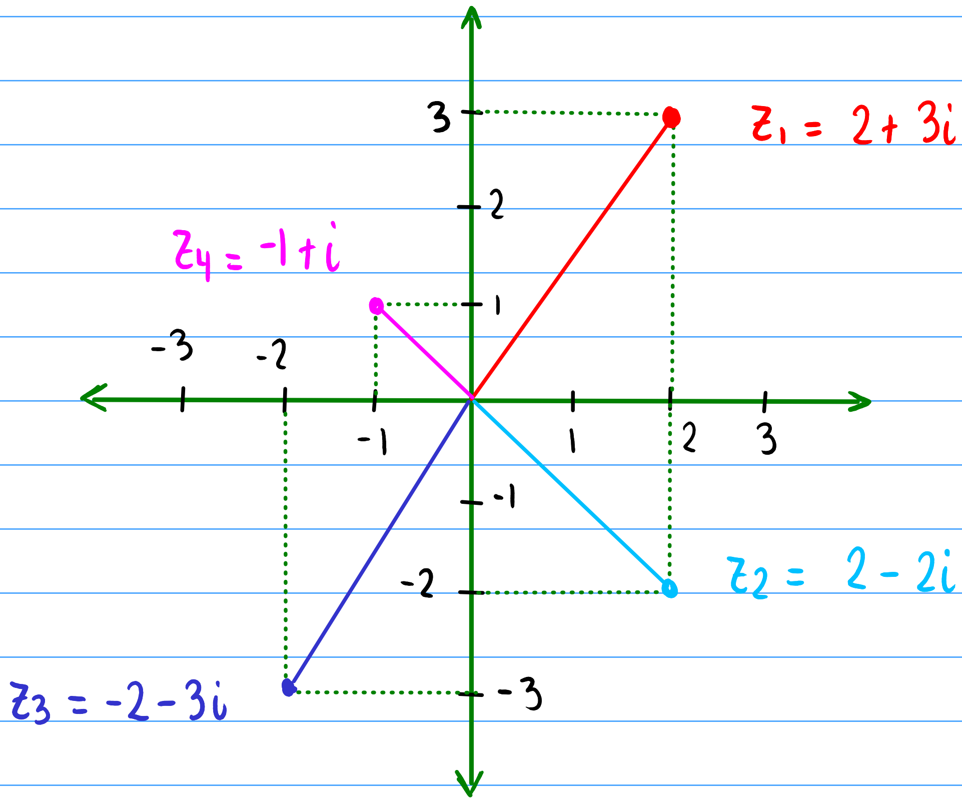


Figura 1.2.1: *Plano complejo*



Fórmula general para ecuaciones de segundo grado

Sean a, b, c números reales tales que $a \neq 0$ y considere la ecuación de segundo grado dada por $ax^2 + bx + c = 0$. Si $\triangle = b^2 - 4ac$, las soluciones de dicha ecuación están dadas por

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$$

donde a $\triangle$ se le llama **discriminante** de la ecuación cuadrática.

Ahora bien, según el valor que tome el discriminante, se tienen los siguientes casos:

1. Si $\triangle > 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales diferentes.
2. Si $\triangle = 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales iguales.
3. Si $\triangle < 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones complejas diferentes.

Igualdad de números complejos

Sean z y w dos números complejos cualesquiera, se dice que $z = w$ si y solo si

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ y } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

Números imaginarios puros

Un número imaginario puro es aquel número complejo cuya parte real es igual a cero.

Conjugado de un número complejo

Sea $z = a + bi$, su conjugado viene dado por $\overline{z} = a - bi$

Ejercicio #1: Encuentre los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ si $(2x-y)i-(x+y)=6-9i$ R/ $x=-5$ y $y=-1$

Sea $w=(2x-y)i-(x+y)$ y $z=6-9i$

Por igualdad de números complejos, se tiene que:

$Re(w)=Re(z)$ $Im(w)=Im(z)$

$\Rightarrow -(x+y)=6$ $\Rightarrow 2x-y=-9$

$\Rightarrow x+y=-6$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que:

$$\begin{cases} x+y=-6 \\ 2x-y=-9 \end{cases}$$

Así $x=-5$ y $y=-1$

$\therefore$ Los valores de "x" y "y" son $x=-5$ y $y=-1$

Ejercicio #2: Sean $z = -3 + ix^2y$ y $w = x^2 + y + 4i$. Halle los valores de x y y para que z y w sean números complejos conjugados.

R/ $x = \pm 1$, $y = -4$

Para que z y w sean números complejos conjugados, debe darse que:

$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$

$\Rightarrow -3 = x^2 + y$

$\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(w)$

$\Rightarrow x^2 y = -4$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que:

$$\begin{cases} x^2 + y = -3 \\ x^2 y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -3 - y & (1) \\ x^2 = \dfrac{-4}{y} & (2) \end{cases}$$

Por transitividad, se tiene que: $-3 - y = \dfrac{-4}{y} \Rightarrow y(-3-y) = -4$

$\Rightarrow -3y - y^2 = -4$

$\Rightarrow 0 = -4 + 3y + y^2$

$\Rightarrow y = 1 \quad \vee \quad y = -4$

- Si $y = 1$, entonces $x^2 = \dfrac{-4}{1} \Rightarrow x^2 = -4$ por (2)
  $\Rightarrow x = \sqrt{-4}$ ⊗ pues $x, y \in \mathbb{R}$

- Si $y = -4$, entonces $x^2 = \dfrac{-4}{-4} \Rightarrow x^2 = 1$
  $\Rightarrow x = \pm 1$

$\therefore$ Los valores buscados son $x = \pm 1$, $y = -4$

Operaciones con números complejos en forma rectangular

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos. A partir de ellos, se pueden definir las siguientes operaciones:

1. **Suma:** $z + w = (a + c) + (b + d)i$
2. **Resta:** $z - w = (a - c) + (b - d)i$
3. **Multiplicación:** $z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i$
4. **División:** se genera un uno a conveniencia, utilizando el conjugado de un número complejo, en general, su forma viene dada por: $\frac{z}{w} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$

Propiedades del conjugado de un número complejo

Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{z \div w} = \overline{z} \div \overline{w}$, si $w \neq 0$
4. $\overline{\overline{z}} = z$

Ejercicio #1: Realice cada una de las siguientes operaciones con números complejos y exprese el resultado en forma rectangular.

a) $\dfrac{3i^{-50} - 2i^{-37}}{4i^{-13} + 5i^{-19}}$ R/ $2 + 3i$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$$\frac{\frac{3}{i^{50}} - \frac{2}{i^{37}}}{\frac{4}{i^{13}} + \frac{5}{i^{19}}} = \frac{\frac{3}{-1} - \frac{2}{i}}{\frac{4}{i} + \frac{5}{-i}}$$

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$

$i^{50} = (i^{12})^4 \cdot i^2 = 1 \cdot -1 = -1$

$i^{37} = (i^9)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^{13} = (i^3)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^{19} = (i^4)^4 \cdot i^3 = 1 \cdot -i = -i$

$$= \frac{\left(\frac{3i - -2}{-i}\right)}{\frac{-4i + 5i}{-i^2}}$$

$$= \frac{(3i+2) \cdot -i^2}{(-4i+5i) \cdot -i}$$

$$= \frac{(3i+2) \cdot 1}{i \cdot -i}$$

$$= \frac{(3i+2)}{-i^2}$$

$$= \frac{3i+2}{1}$$

$$= 3i+2$$

$$= 2+3i$$

b) $\dfrac{5i(2+2i)}{(1-i)(2+i)(3-i)}$ R/ $\dfrac{-7}{5}+\dfrac{i}{5}$

$$\frac{10i+10i^2}{(2+i-2i-i^2)(3-i)} = \frac{10i+10\cdot-1}{(2-i+1)(3-i)}$$

$$= \frac{10i-10}{(3-i)(3-i)}$$

$$= \frac{10i-10}{9-3i-3i+i^2}$$

$$= \frac{10i-10}{9-6i-1}$$

$$= \frac{10i-10}{8-6i} \cdot \frac{8+6i}{8+6i}$$

$$= \frac{(10i-10)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)}$$

$$= \frac{80i+60i^2-80-60i}{8^2-(6i)^2}$$

$$= \frac{20i-60-80}{64-36i^2}$$

$$= \frac{20i-140}{64+36}$$

$$= \frac{20i-140}{100}$$

$$= \frac{20i}{100} - \frac{140}{100}$$

$$= \frac{i}{5} - \frac{7}{5}$$

Ejercicio #2: Encuentre dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ cuya suma sea cuatro y su producto sea ocho. R/ $w = 2 + 2i$ y $z = 2 - 2i$, $w = 2 - 2i$ y $z = 2 + 2i$

Se pide que $z + w = 4$ (1) y $z \cdot w = 8$ (2)

De (1) se tiene que $w = 4 - z$ (3)

De (2) se tiene que $z = \frac{8}{w}$ (4)

Sustituyendo (4) en (3), se tiene que:

$$w = 4 - \frac{8}{w} \Rightarrow w = \frac{4w - 8}{w}$$
$$\Rightarrow w^2 = 4w - 8$$
$$\Rightarrow w^2 - 4w + 8 = 0$$
$$\Rightarrow w_1 = 2 + 2i \quad \vee \quad w_2 = 2 - 2i$$

Como $z = \frac{8}{w}$, entonces: $z_1 = \frac{8}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i}$ y $z_2 = \frac{8}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i}$

$$z_1 = \frac{16 - 16i}{2^2 - (2i)^2} = \frac{16 - 16i}{4 - 4i^2} = \frac{16 - 16i}{4 + 4} = \frac{16 - 16i}{8} = 2 - 2i$$

$$z_2 = \frac{16 + 16i}{2^2 - (2i)^2} = \frac{16 + 16i}{4 - 4i^2} = \frac{16 + 16i}{4 + 4} = \frac{16 + 16i}{8} = 2 + 2i$$

$\therefore$ $w = 2 + 2i$ y $z = 2 - 2i$, $w = 2 - 2i$ y $z = 2 + 2i$

Ejercicio #3: Determine los números complejos z y w que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $z = 2 - i$ y $w = 1 + 2i$, $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - i$

- $z + w = 3 + i$ (1)
- $\text{Re}(z) = 2$ (2)
- $\frac{z}{w}$ es imaginario puro. (3)

Sea $z = a + bi$ y $w = c + di$

Como $\text{Re}(z) = 2$, entonces $a = 2$ por (2)

Ahora $z + w = 3 + i$ por (1)

$\Rightarrow a + bi + c + di = 3 + i$

$\Rightarrow 2 + bi + c + di = 3 + i$

$\Rightarrow (2 + c) + (b + d)i = 3 + i$

$\Rightarrow 2 + c = 3 \quad \wedge \quad b + d = 1$ A

$\Rightarrow c = 3 - 2$

$\Rightarrow c = 1$

Note que $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a + bi}{c + di} \Rightarrow \dfrac{z}{w} = \dfrac{2 + bi}{1 + di} \cdot \dfrac{1 - di}{1 - di}$

$$= \frac{2 - 2di + bi - bdi^2}{1^2 - (di)^2}$$

$$= \frac{2 - 2di + bi + bd}{1 - d^2 i^2}$$

$$= \frac{(2 + bd) + (-2d + b)i}{1 + d^2}$$

$$= \frac{2 + bd}{1 + d^2} + \frac{(-2d + b)i}{1 + d^2}$$

Como $\frac{z}{w}$ es imaginario puro, entonces $Re\left(\frac{z}{w}\right)=0 \Rightarrow \frac{2+bd}{1+d^2}=0$

$\Rightarrow 2+bd=0$

$\Rightarrow bd=-2$ (B)

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que:

$$\begin{cases} b+d=1 & (A) \\ bd=-2 & (B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1-b & (4) \\ bd=-2 & (5) \end{cases}$$

Sustituyendo (4) en (5) se tiene que:

$b(1-b)=-2 \Rightarrow b-b^2=-2$

$\Rightarrow 0=-2-b+b^2$

$\Rightarrow b=2 \quad \vee \quad b=-1$

⊛ Si $b=2$, entonces $d=1-2$

$=-1$

⊛ Si $b=-1$, entonces $d=1--1$

$=2$

$z=a+bi$

$w=c+di$

∴ Los números buscados son:

$z=2+2i$

$w=1-i$

$z=2-i$

$w=1+2i$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Determine el valor de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación dada por el criterio $(3-4i)^2 - 2(x-yi) = x+i$.

R/ $x = \frac{-7}{3}, y = \frac{25}{2}$

Ejercicio #2: Sea $w = (x-i)(x+3-4i)$. Halle los valores reales de x para los cuales w es imaginario puro. Escriba el número w resultante en cada caso.

R/ $x = -4 \vee x = 1$

Ejercicio #3: Realice cada una de las siguientes operaciones con números complejos y exprese el resultado en forma rectangular.

a) $3 - 7i + \dfrac{13i}{3-2i}$ R/ $1-4i$

b) $\left(\dfrac{52i}{1-5i}\right)^3 + 7i^3 + 2$ R/ $-878 + 585i$

Ejercicio #4: Determine los números complejos z y w que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

R/ $z = 3+6i$ y $w = 2+4i$

- $z - w = 1 + 2i$
- $\mathrm{Re}(z) = 3$
- $z \cdot \overline{w} \in \mathbb{R}$