Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	02
Fecha	Lunes 05 de agosto del 2024 (semana 03)
Contenidos	a) Convergencia y divergencia de sucesiones
	b) Criterio de la divergencia
	c) Serie geométrica
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Sucesiones convergentes

Límite de una sucesión

Sea f una función de variable real y sea $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ una sucesión cualquiera, donde $p \in \mathbb{N}$.

Si $f(n) = a_n$, para todo $n \geq p$ entonces, se dice que: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = L \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$, donde L puede ser un valor real o bien $\pm\infty$

En el caso de que se cumplan las hipótesis de la definición anterior, se puede utilizar la Regla de L'Hôpital, así como se visualizó en cálculo diferencial e integral. Note que no todos los límites de sucesiones en forma indeterminada pueden resolverse con esta regla, pues existen funciones que no pueden extenderse a funciones de variable real.

En estos casos suele tenerse en cuenta que $(-1)^n$ y $n!$ no pueden extenderse a funciones de variable real, pero en realidad su pueden extenderse a este grupo, sin embargo, no siempre es tan fácil realizarlo. De hecho, $(-1)^n = \cos(\pi n)$ y $n! = \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-t}\, dt$

Ejercicio: Para cada una de las siguientes sucesiones, determine si son convergentes o divergentes. En caso de ser convergentes, indique su valor de convergencia.

a) $a_n = \dfrac{20n^2 - 29n^3 - 6 + 11n}{7n^2 - 4 + 2n^3}$ R/ $\dfrac{-29}{2}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{20n^2 - 29n^3 - 6 + 11n}{7n^2 - 4 + 2n^3}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-29\cancel{n^3}}{2\cancel{n^3}}$$

$$= \frac{-29}{2}$$

La sucesión a_n es convergente y converge a $\dfrac{-29}{2}$

b) $y_n = \dfrac{\ln(n^4+2n^3-6n)}{\ln(2n^3-4n+1)}$ R/ $\dfrac{4}{3}$

$\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ (1)

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ (2)

$\ln(a^n) = n\cdot\ln(a)$ (3)

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^4+2n^3-6n)}{\ln(2n^3-4n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^4)}{\ln(2n^3)}$$

$\lim\limits_{n\to a} \ln(p(n)) = \ln\left(\lim\limits_{n\to a} p(n)\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot\ln(n)}{\ln(2)+\ln(n^3)}$$ por (3) por (1)

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot\ln(n)}{\ln(2)+3\ln(n)}$$ por (3)

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{[4\cdot\ln(n)]'}{[\ln(2)+3\ln(n)]'}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot[\ln(n)]'}{[\ln(2)]'+3[\ln(n)]'}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot\frac{1}{n}}{0+3\cdot\frac{1}{n}}$$

$[\ln(n)]' = \dfrac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot\cancel{\frac{1}{n}}}{3\cdot\cancel{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{4}{3}$$

Teorema del Encaje o del Encuadramiento

Sean a_n, b_n y c_n tres sucesiones y sea $k \in \mathbb{Z}$ tales que:

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq k$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n = L$

entonces $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = L$, donde L puede ser un número real, o bien, $\pm\infty$

Ejercicio: Para cada una de las siguientes sucesiones, determine si son convergentes o divergentes. En caso de ser convergente, indique su valor de convergencia.

a) $$a_n = \frac{3n^2 - \operatorname{sen}(2n)}{n^2} + 1$$ R/ 4

$\operatorname{Sen} \to [-1, 1]$

$\operatorname{Cos} \to [-1, 1]$

$\arctan \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$-1 \leq \operatorname{Sen}(2n) \leq 1$

$\Rightarrow -1 \geq -\operatorname{Sen}(2n) \geq 1$ se multiplica por -1

$\Rightarrow 3n^2 - 1 \geq 3n^2 - \operatorname{Sen}(2n) \geq 3n^2 + 1$ se suma $3n^2$

$\Rightarrow \dfrac{3n^2 - 1}{n^2} \geq \dfrac{3n^2 - \operatorname{Sen}(2n)}{n^2} \geq \dfrac{3n^2 + 1}{n^2}$ se divide por n^2

$\Rightarrow \dfrac{3n^2 - 1}{n^2} + 1 \geq \dfrac{3n^2 - \operatorname{Sen}(2n)}{n^2} + 1 \geq \dfrac{3n^2 + 1}{n^2} + 1$ se suma 1

Ahora

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 1}{n^2} + 1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2} + 1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + 1 = 3 + 1 = 4$$

Por el Teorema del Encaje, a_n converge a 4.

Teorema del Valor Absoluto:

Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Criterio de la Razón:

Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ y $L < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Nota:

- Si $L > 1$ la sucesión diverge y si $L = 1$, el criterio no aplica.
- Este criterio usualmente se utiliza cuando en la sucesión se presentan productorias, factoriales o potencias.

Ejercicio: **Para cada una de las siguientes sucesiones, determine si son convergentes o divergentes. En caso de ser convergente, indique su valor de convergencia.**

a) $a_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n^4}{1+n^2+n^3}$ R/ Diverge

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1} \cdot n^4}{1+n^2+n^3}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{1+n^2+n^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n$$

$$= +\infty$$

La sucesión a_n es divergente.

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$ R/ Diverge

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot [2(n+1)]}}{\dfrac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot [2(n+1)] \cdot (-1)^n \cdot 3^n \cdot n!} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n \cdot 3^1 \cdot (n+1)!}{2(n+1) \cdot 3^n \cdot n!}$$

$(n+1)! = (n+1)(n+1-1)!$
$= (n+1) \cdot n!$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3(n+1) \cdot n!}{2(n+1) \cdot n!}$$

$$= \frac{3}{2} > 1$$

Por el Criterio de la Razón para sucesiones, a_n diverge.

Serie

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Se define la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ como la suma de todos los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Suma parcial

Dada una serie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se define su k-ésima suma parcial y se denota S_k como:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

Suma total

Si la sucesión de las k-ésimas sumas parciales de una serie converge a S, con $S \in \mathbb{R}$, entonces se dice que la serie converge a S y se escribe como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

donde, al valor de S se le llama suma total de la serie o valor de convergencia de la serie numérica.

Ahora, si S toma los valores de $\pm\infty$, se dice que la serie es divergente.

Propiedades de las series

Si $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=p}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes, p un número natural cualquiera y c es una constante real, entonces también son convergentes las series $\sum\limits_{n=p}^{\infty} c \cdot a_n$ y $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n \pm b_n)$.

Además, se cumple que:

- $\sum\limits_{n=p}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$
- $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=p}^{\infty} b_n$

Criterios para la convergencia y divergencia de series

Criterio de la Divergencia (CD)

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a $L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Ahora, si la sucesión $\{a_k\}$ no converge a cero, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Nota: si la sucesión $\{a_k\}$ converge a cero, no hay garantía de la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{k^5+243}$ R/ No decide

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{K^3}{K^5+243} = \lim_{K\to+\infty} \frac{K^3}{K^5}$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K^2}$$

$$= 0$$

No hay garantía de la divergencia de la serie, por el Criterio de la Divergencia

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3n^2}{4n^2-1}$ R/ Diverge

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot 3n^2}{4n^2-1} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{4n^2-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\cancel{n^2}}{4\cancel{n^2}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Por el Criterio de la Divergencia, la serie diverge.

Criterio de la Serie Geométrica (CSG)

Una serie geométrica con razón r es de la forma:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

donde r un número real.

La serie geométrica $\sum_{k=p}^{\infty} r^k$ converge a $\frac{r^p}{1-r}$ si y solo si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$

Ejercicio: Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{5 \cdot 2^{-i}}$ R/ Diverge

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i \cdot 3^1}{5 \cdot (2^{-1})^i} = \frac{3}{5} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{\left(\frac{1}{2}\right)^i}$$

$$= \frac{3}{5} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\frac{1}{2}}\right)^i$$

$$= \frac{3}{5} \sum_{\underbrace{i=1}_{p}}^{\infty} \underbrace{6}_{r}{}^i$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Como $|r| = |6| > 1$, por el CSG, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} 6^i$ es divergente.

Así $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{5 \cdot (2^{-1})^i}$ diverge.

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - 2 \cdot 5^{k-1}}{7^{k+1}}$

R/ $\dfrac{61}{196}$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Para cada una de las siguientes sucesiones, determine si son convergentes o divergentes. En caso de ser convergente, indique su valor de convergencia.

a) $a_n = \dfrac{-5n^2+6n+3}{4n^2-3n+1}$ R/ $\dfrac{-5}{4}$

b) $a_n = \dfrac{e^n}{2e^n+5n^2}$ R/ $\dfrac{1}{2}$

c) $c_n = \dfrac{n+\cos(n)}{6n+2}$ R/ $\dfrac{1}{6}$

d) $d_p = 4 + \dfrac{(-1)^p \cdot p}{2p^2+3}$ R/ 4

e) $a_n = \dfrac{(n-2)!}{n!}$ R/ 0

Ejercicio #2: Determine si las siguientes series convergen o divergen y calcule su suma si son convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1-(-3)^{n+2}}{2^{2n-1}}$ R/ $\dfrac{821}{336}$

b) $\displaystyle\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{5-2^{k+1}}{3^{2k}}$ R/ $\dfrac{2187}{56}$