Combinados de Rectas y Planos

1. Halle una ecuación del plano que pasa por el punto $Q = (2, 1, 2)$ y que contiene a la recta con ecuaciones simétricas R/ $-3x - 18y + 16z = 8$

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{3}$$

2. Determine la ecuación del plano que pasa por $Q(3, 2, -3)$ y que contiene a la recta de ecuaciones simétricas dada por R/ $29x - 35y + 20z = -43$

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{-z+4}{2}$$

3. Sea $L : (x, y, z) = (3, 1, -3) + t(4, -4, 1)$ y $\Pi : ax + 2y - 4z = d$. Encuentre los valores de a y d para que L esté contenida en Π.

4. Determine la ecuación cartesiana del plano ϕ que contiene simultáneamente

   a) Al punto $P(0, 2, 1)$

   b) A la recta de ecuaciones $T : \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{5-2y}{4} = z$

5. Determine la ecuación del plano π que contiene a las rectas R/ $3x + 9y - 5z + 11 = 0$

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3} \qquad L_2 : \frac{x}{4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+5}{6}$$

6. Determine la ecuación del plano Π que contiene a las rectas R/ $5x + 7y + z = 24$

$$L_1 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{6} \qquad L_2 : \frac{x+3}{6} = \frac{y+4}{6} = \frac{z+3}{12}$$

7. Considere las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones respectivas:

$$L_1 : (x, y, z) = (1, -2, 1) + t(3, -4, 2), \text{ con } t \in \mathbb{R}$$
$$L_2 : (x, y, z) = (1 - 6s, 2 + 4s, -1 - 2s), \text{ con } s \in \mathbb{R}$$

   a) Determine el punto de intersección entre L_1 y L_2

   b) Determine la ecuación del plano que contiene a L_1 y L_2

8. Considere las rectas L y R, cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por:

$$L : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R} \qquad R : \begin{cases} x = 5 + 2r \\ y = 1 - r \\ z = 7 + r \end{cases}, \text{ con } r \in \mathbb{R}$$

   a) Justifique que L y R son rectas paralelas.

   b) Determine una ecuación del plano que contiene a L y R.

9. Sea $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 1, 2)$ y $C(3, -3, 0)$

   a) Calcule una ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por A y B R/ $(1 - 3t, 1, 1 + t)$

   b) Calcule una ecuación vectorial del plano denominado Π_1 que contiene a los puntos A, B y C definidos previamente. R/ $(1 - 3t + 2f, 1 - 4f, 1 + t - f)$

   c) Halle una ecuación cartesiana del plano denominado Π_1 que contiene a los puntos A, B y C definidos previamente. R/ $4x - y + 12z = 15$

10. Determine la ecuación cartesiana del plano π al cual pertenecen los puntos $A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y que además es paralelo a la recta con ecuación

$$L : (x, y, z) = (3, 2, -2) + \alpha(-1, 1, 3), \ \alpha \in \mathbb{R}$$

11. Determine la ecuación cartesiana del plano π al cual pertenecen los puntos $A(1,3,2)$ y $B(-2,5,0)$ y que además es paralelo a la recta con ecuación

$$L : (x,y,z) = (3,2,-2) + \alpha(-1,1,-3),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

12. Considere en $\mathbb{R}^3$ la recta L y el plano π definidos por:

$$L : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4} \qquad\qquad \pi : 2x + 4y + 4z = 5$$

Calcule una ecuación normal del plano ρ que es perpendicular al plano π y que contiene a la recta L.

13. Sea L la recta que pasa por el punto $P(2,0,-4)$ y que es paralela a los planos π_1 y π_2, con ecuaciones $\pi_1 : 2x - y = 4$ y $\pi_2 : 3x + z = -2$

    a) Encuentre las ecuaciones simétricas de L.

    b) ¿Pertenece a L el punto $(3,2,-2)$?

14. Determine la ecuación cartesiana del plano π que cumple de manera simultánea las siguientes condiciones:

    a) Es paralelo a la recta que contiene los puntos $A(-1,2,3)$ y $B(2,3,-1)$

    b) Es perpendicular al plano cuya ecuación es $2x - y + z = 2$

    c) Contiene al punto $(1,0,2)$

15. Determine una ecuación del plano π que cumple simultáneamente las condiciones siguientes:

    a) Es perpendicular al plano $\theta : -2x + y - z = 1$

    b) Es paralelo a la recta $L : 1 - x = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$

    c) Contiene al punto $P(2,-3,1)$

16. Determine la ecuación de un plano que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones, que se definen por: R/ $x + 2z = -4$

    a) Pasa por $A(2, 1, -3)$

    b) Es perpendicular a $3x + 2y - z = 2$

    c) Es paralelo a la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{5} = -z + 3$

17. Determine la ecuación de un plano que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones, que se definen por: R/ $x - 2z = -4$

    a) Pasa por $A(0, 1, 2)$

    b) Es perpendicular a $2x - y + z = 1$

    c) Es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = z - 3$

18. Determine la ecuación vectorial de la recta L de intersección de los planos δ y ρ de ecuaciones:

$$\delta : x + 5y + 9z = 13 \qquad \rho : 3x - y - 5z = -1$$

19. Considere las rectas L y M y el plano $\rho : 2x + y - z = 19$, donde:

$$L : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = z - 1 \qquad M : \begin{cases} x + 2r = 1 \\ 2y = 4 \\ z - r = 0 \end{cases}, \text{ con } r \in \mathbb{R}$$

    Determine la ecuación del plano π que contiene al punto de intersección entre ρ y M y que contiene también a la recta L.

20. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta de intersección de los planos

R/ $L : \begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 8t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$

$$\rho : 2x - y - z = 2 \qquad \pi : 4x + 2y - 4z = 1$$

21. Determine la ecuación cartesiana del plano π que satisface las siguientes condiciones:

   a) Contiene a la recta L cuya ecuación es $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{5}$

   b) Contiene el punto de intersección entre la recta R y el plano ρ de ecuaciones:

$$R : \frac{x-4}{5} = y + 2 = \frac{z-4}{-1} \qquad \rho : 3x - y + 7z + 7 = 0$$

22. Considere los vectores w y z de $\mathbb{R}^3$, tales que $w = (-1, 0, 1)$ y $z = (-3, 1, 2)$. Determine la ecuación simétrica de la recta L que cumple de manera simultánea las siguientes condiciones:

   a) Su vector director corresponde a proy_w^{z-3w}

   b) Contiene el punto de intersección entre la recta R y el plano π de ecuaciones:

$$R : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, 1), \text{ con } t \in \mathbb{R} \qquad \pi : 2x - y + z + 1 = 0$$

23. Determine el punto de intersección y el ángulo que se forma entre

$$\sigma : 2x - y + 5z = 0 \qquad L : \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

24. Determine las ecuaciones simétricas de la recta M que es perpendicular a π y que contiene al punto de intersección entre π y L, sabiendo que

$$L : (x, y, z) = (0, -3, 2) + t(2, 1, 1) \qquad \pi : 4x - 3y + 5z = 9.$$

25. Determine la ecuación del plano π que cumple de forma simultánea que:

    a) Contiene el punto de intersección de la recta $L_1 : \dfrac{-x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = z - 1$, con el plano con ecuación $x + 2y - 3z = -1$

    b) Es perpendicular a la recta $L_2 : \dfrac{3x-1}{6} = \dfrac{1-y}{2} = z - 2$

26. Determine la ecuación vectorial de la recta L que cumple simultáneamente las siguientes condiciones, definidas por: R/ $\left(\dfrac{56}{5}, \dfrac{38}{5}, \dfrac{-33}{5}\right) + t(-61, -6, 20)$

    a) Es perpendicular al plano determinado por $A(2, 5, 1)$, $B(2, -5, 4)$ y $C(4, 2, 8)$

    b) Pasa por el punto de intersección del plano con ecuación $3x - 5y - z = 1$ con la recta de ecuación $\dfrac{x}{3} = y - 4 = -z + 3$

27. Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que cumple simultáneamente las siguientes condiciones, definidas por: R/ $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}\right) + t(5, 7, 13)$

    a) Es perpendicular al plano determinado por los puntos $A = (3, 4, 2)$, $B = (-1, 5, 3)$ y $C = (2, 1, 4)$

    b) Pasa por el punto de intersección del plano de ecuación $2x - y - z = 1$, con la recta de ecuación $\dfrac{x}{2} = y - 1 = -z - 1$

28. Considere la recta L y los planos σ, ϕ y π, definidos por:

$$L : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-3} \qquad \sigma : x + y + z = 8$$
$$\phi : 2x + 3y + 3z = 4 \qquad \pi : x + 2y + 3z = 6$$

    Determine ecuaciones simétricas de la recta, que cumple de manera simultánea, las dos condiciones siguientes:

    a) Es paralela a la intersección de σ con ρ

    b) Contiene la intersección de L con π

29. Considere el plano θ de ecuación $5x+7y+13z=69$, el plano σ de ecuación $2x-y-z=1$ y la recta L cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$L:\begin{cases} x=t \\ y=1+\dfrac{1}{2}t \\ z=-1-\dfrac{1}{2}t \end{cases}, \text{ con } t\in\mathbb{R}$$

Determine la ecuación de la recta L_1 que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

a) Es perpendicular al plano θ

b) Pasa por el punto de intersección entre el plano σ y la recta L

30. Determine las ecuaciones simétricas de la recta L que cumple simultáneamente las condiciones siguientes:

a) Es perpendicular al plano determinado por los puntos $A=(1,2,3)$, $B=(3,0,0)$ y $C=(4,0,0)$

b) Contiene el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 dadas por las ecuaciones:

$$L_1:(x,y,z)=(3-t,4-2t,-4+3t), \text{ con } t\in\mathbb{R} \qquad L_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-4}=z-1$$

31. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta l que cumple las siguientes condiciones:

a) Contiene a P que es el punto de intersección de la recta M con el plano π, donde

$$\pi:4x-2y+z=3 \qquad M:x=2y-3=\frac{2z-1}{5}$$

b) Sea paralela a la recta de intersección de los planos σ y ρ, donde

$$\sigma:x-2y+3z=5 \qquad \rho:2x+y-z=-6$$

32. Halle la ecuación del plano π tal que:

  a) El plano π es perpendicular a la recta de intersección de los planos:

$$\sigma_1 : 2x - y - z = 1 \qquad \sigma_2 : x + y + 2z = 2$$

  b) Contiene al punto de intersección del plano σ_1 y la recta

$$L : \frac{2-x}{2} = 1 - y = \frac{-z}{4}$$

33. Si se sabe que

$$\phi : 3x - 2y - 3z = 7 \qquad L_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

Determine las ecuaciones paramétricas de la recta L que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

  a) El punto $A(3,2,4)$ pertenece a L

  b) La recta L es paralela al plano ϕ

  c) Las rectas L y L_1 se intersecan.

34. Determine la ecuación cartesiana del plano π que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

  a) Contiene el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones:

$$L_1 : (x,y,z) = (-2, -t, 1+t), \text{ con } t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : -x = -y - 1 = \frac{z}{2}$$

  b) El plano π es perpendicular al plano $\rho : 2x - 3y + z = 2$

  c) El plano π es paralelo a la recta $L : \dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{-z}{3}$

35. Sea L la recta con ecuación $(x,y,z) = (-1,-11,4) + t(2,4,-2)$, con $t \in \mathbb{R}$ y sea π el plano con ecuación $4x + 3y + 6z + 1 = 0$

  a) Encuentre el punto P de intersección entre la recta L y el plano π

  b) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

36. Sean π el plano que contiene los puntos $A = (2, -1, 1)$, $B = (3, 2, -1)$ y $C = (-1, 3, 2)$ y L la recta de ecuación $(x, y, z) = (-1, 13, 1) + t(1, 0, 2)$, $t \in \mathbb{R}$

    a) Determine la ecuación normal del plano π R/ $11x + 5y + 13z = 30$

    b) Halle el punto P de intersección entre el plano π y la recta L. R/ $(-2, 13, -1)$

    c) Determine la ecuación de la recta T que es perpendicular al plano π y que contiene el punto P hallado en el inciso anterior R/ $(-2, 13, -1) + t(11, 5, 13)$

37. Sea Π el plano que contiene los puntos $A(3, -1, -2)$, $B(3, 2, -1)$ y $C(1, -3, -4)$ y L la recta de ecuación $(x, y, z) = (1, -7, 2) + t(2, 0, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

    a) Determine la ecuación normal del plano Π R/ $2x - y - 3z = 13$

    b) Halle el punto de intersección entre Π y L R/ $(21, -7, 12)$

    c) Determine la ecuación de la recta M que es perpendicular al plano Π y que contiene al punto P hallado en el inciso anterior R/ $(21, -7, 12) + t(-4, 2, 6)$

38. Realice lo siguiente:

    a) Determine un vector director de la recta L_1, que se obtiene al intersecar los planos de ecuaciones:

    $$\pi : 3x - y = 0 \qquad \sigma : -x + 2y + 4z = 0$$

    b) Determine el punto de intersección P entre la recta L_2 y el plano ρ, cuyas ecuaciones son respectivamente:

    $$L_2 : x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{3} \qquad \rho : x - 2y + 3z = 0$$

    c) Halle las ecuaciones simétricas de una recta L paralela a L_1 y que contiene a P

39. Calcule la distancia del punto $P(1, 2, -3)$ al plano $\pi : 3x - 2y + 2z + 1 = 0$ R/ $\dfrac{6\sqrt{17}}{17}$

40. Calcule la distancia del plano $\pi : 2x + 3y - 2z = 5$ al origen. R/ $\dfrac{5\sqrt{17}}{17}$

41. Calcule la distancia del punto $M(3, -2, 1)$ al plano $\pi : -4x + y - 3z = 4$

42. Sea Π el plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$ y $C(2,0,2)$. Calcule la distancia de Π al origen.

43. Considere la recta L de ecuaciones $L : x-3 = -y-2 = -z-7$. Determine la longitud del segmento de la recta L que queda determinado por los puntos de intersección de L con el plano π y de L con con el plano σ cuyas ecuaciones son:

$$\pi : 3x-2y+3z+16 = 0 \qquad \sigma : 3x-2y+3z = 0$$

44. Encuentre la distancia entre los planos definidos por

$$\Pi : 2x-3y+5z = -6 \qquad \Sigma : -2x+3y-5z+1 = 0$$

45. Determine la distancia entre los planos π y θ definidos por:

$$\pi : 3x-2y+5z = -5 \qquad \theta : -3x+2y-5z = 4$$

46. Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1} \qquad L_2 : \frac{x-4}{-6} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{2}$$