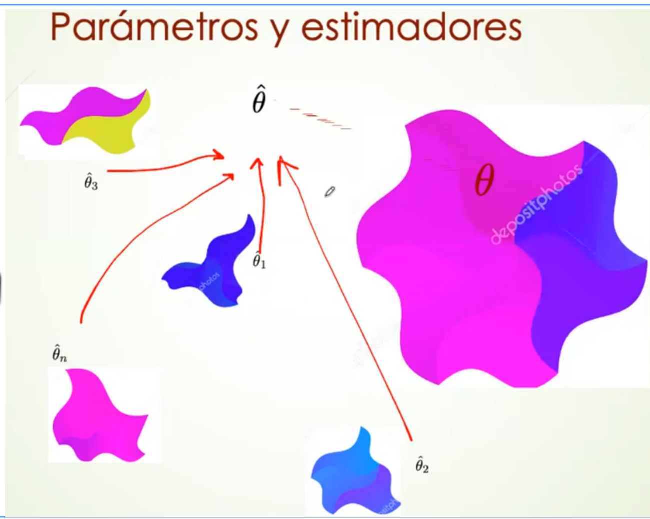
Poblacion y muestra

<u>Poblacion</u>: Totalidad de unidades estadisticas osea la unidad basica donde obtenemos informacion.

<u>Muestra</u>: Subconjunto de la poblacion, si se usan muestras, pierde precision, eso sellama error de muestreo



$\bar{X}$ = Promedio

Caracteristicas de Estimadores

Considere $\hat{\theta}_1$ un estimador para el parametro θ. Se dice que $\hat{\theta}_1$ es

Esperanza

<u>Insesgado</u> si $E(\hat{\theta}_1) = \theta$, de lo contrario, es sesgado

Si solo 1 de ellos es insesgado, ese es el mejor, si hay mas de 1 insesgado, hay que compararlos para ver cual es el mejor

Eta

<u>Mas eficiente</u> que $\hat{\theta}_2$ si $\eta = \dfrac{ECM(\hat{\theta}_1)}{ECM(\hat{\theta}_2)} < 1$,

<u>o menor varianza</u>

o sea $ECM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ y

$ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$

$\boxed{\text{ECM = Error cuadratico medio}}$

<u>Consistente</u> si $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1$$

Sea X y Y dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(5\theta + 5, 9), \quad Y \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro θ de una determina población

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{X - Y}{5}, \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{5}$$

¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ? Justifique su respuesta.$R/$ E

Recordar

$X \sim N(\underset{\text{media}}{u}, \underset{\text{varianza}}{\sigma^2})$

$X \sim B(\underset{\text{ensayos}}{n}, \underset{\text{proba}}{p})$ $\quad q = 1 - p \quad u = np \quad \sigma^2 = npq$

$X \sim N(\overset{u}{5\theta + 5}, \overset{\sigma^2}{9}) \qquad X \sim B(\overset{n}{20}, \overset{p}{\tfrac{1}{4}})$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro θ de una determina población

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{X - Y}{5}, \qquad \widehat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{5}$$

¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ? Justifique su respuesta.

1) Alguno de ellos es insesgado?

Calcular la esperanza del $\hat{\theta}_1$

$\hat{\theta}_1 = \frac{x - y}{5}$ $\qquad X = 5\theta + 5, 9 \qquad Y = 20, \frac{1}{4}$

$\qquad u = \underline{5\theta + 5} \qquad u = \underset{n}{20} \cdot \underset{p}{\tfrac{1}{4}} = \underline{5}$

$E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{x - y}{5}\right)$

$= E\left(\frac{1}{5}\right) + E(x) + E(-y)$

$= \frac{1}{5} + E(x) - E(Y)$

$= \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{5}\,\theta + \cancel{5} - \cancel{5}$

$= \theta, \therefore \hat{\theta}_1$ es insesgado

Calcular la esperanza del $\hat{\theta}_2$

$\hat{\theta}_2 = \frac{x-y}{5}$ $\qquad$ $X = 5\theta + 5,\ 9 \quad \cdot\ Y = 20,\ \frac{1}{4}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad u = \underline{5\theta + 5} \qquad u = 20 \cdot \frac{1}{4} = \underline{5}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \quad p$

$$E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{x+y}{5}\right)$$
$$= E\left(\frac{1}{5}\right) + E(x) + E(y)$$
$$= \frac{1}{5} + 5\theta + 5 + 5$$
$$= \frac{1}{5} + 5\theta + 10$$
$$= \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{5}(\theta + 2)$$
$$= \theta + 2, \quad \therefore\ \hat{\theta}_2 \text{ no es insesgado}$$

$\boxed{\text{El mejor estimador para } \theta \text{ es } \hat{\theta}_1}$

1. Considere las variables aleatorias X_1, X_2 yX_3 con la condición $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Si se definen tres estimadores para μ como

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{4X_2 - X_3}{3} \qquad \hat{\mu}_3 = \overline{X}$$

Determine cuál de ellos es el mejor estimador para μ. (8 puntos)

Todas las $X \sim N(u, \sigma^2)$, entonces en todos $E(x_n) = u$ y $Var(x_n) = \sigma^2$

Insesgados?

$$\hat{u}_1 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}$$

$$E(\hat{u}_1) = \frac{E(x_1) + 2E(x_2) + 3E(x_3)}{6}$$

$$= \frac{u + 2u + 3u}{6} = \frac{6u}{6} = u$$

→ Como $\boxed{\hat{u}_1 = u, \ \hat{u}_1 \text{ es insesgado}}$

$$E(\hat{u}_2) = \frac{4E(x_2) - E(x_3)}{3} = \frac{4u - u}{3} = u$$

$\boxed{\therefore \hat{u}_2 \text{ es insesgado}}$

$E(\hat{u}_3) = \overline{x} =$ Promedio, $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

→ $E(\hat{u}_3) = \frac{u + u + u}{3} = u$

$\boxed{\therefore \hat{u}_3 \text{ es insesgado}}$

Como $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$, $\hat{u}_3$ son insesgados, se deben comparar a ver cual es el mejor

Comparando $\hat{u}_1$ con $\hat{u}_2$, se usa la varianza por que ya se sabe que son insesgados

$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$ $\hat{\mu}_2 = \frac{4X_2 - X_3}{3}$ $\hat{\mu}_3 = \overline{X}$

Recordar

Teorema 1.7

- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

constante sola

$$h = \frac{\mathrm{Var}(\hat{u}_1)}{\mathrm{Var}(\hat{u}_2)}$$

$$h = \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right)}{\mathrm{Var}\left(\frac{4x_2 - x_3}{3}\right)}$$

$\mathrm{Var}(x_n) = \sigma^2$ en este caso

$$= \frac{\frac{\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2}{36}}{\frac{16\sigma^2 + \sigma^2}{9}}$$

$\mathrm{Var}\,\frac{1}{6}(x_1 \ldots)$

$\frac{1^2}{6^2}(x_1 \ldots)$

Siempre en Var sale positivo por que seria $(-1)^2 x = 1x$

$$= \frac{\cancel{9}(\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2)}{\cancel{36}(16\sigma^2 + \sigma^2)}$$

$$= \frac{14\cancel{\sigma^2}}{4 \cdot 17\cancel{\sigma^2}} = \frac{7}{34} < 1 \checkmark$$

Esto significa que $\hat{u}_1$ varia menos que $\hat{u}_2$, de momento $\hat{u}_1$ tiene menor varianza que $\hat{u}_2$

Ahora comparando $\hat{u}_1$ con $\hat{u}_3$

$$h = \frac{Var(\hat{u}_1)}{Var(\hat{u}_3)}$$

$$h = \frac{Var\left(\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right)}{Var\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2}{\cancel{36}}}{\frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2}{\cancel{9}}}$$

$$\frac{14\cancel{\sigma^2}}{4 \cdot 3\cancel{\sigma^2}} = \frac{7}{6} > 1$$

Esto significa que $\hat{u}_3$ tiene menor varianza que $\hat{u}_1$, entonces es el mas eficiente

$\boxed{\therefore\ \hat{u}_3 \text{ es el mejor estimador para } u}$

3. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(5\theta, 9), \quad Y \sim N(6\theta, 9.2)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro θ de una determinada población:

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{X}{5}, \qquad \widehat{\theta}_2 = Y - X, \qquad \widehat{\theta}_3 = \frac{X+Y}{10}$$

(a) Determine si cada uno de estos estimadores es insesgado o no.

R/ $\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ son insesgados

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{5}E(X) \qquad X: u = 5\theta \qquad Y: u = 6\theta$$

$$= \frac{1}{\cancel{5}} \cancel{5}\theta \qquad \sigma^2 = 9 \qquad \sigma^2 = 2$$

$$= \theta$$

$\therefore$ $\hat{\theta}_1$ es insesgado

$$E(\hat{\theta}_2) = E(Y) - E(X)$$

$$= 5\theta - 6\theta$$

$$= \theta$$

$\therefore$ $\hat{\theta}_2$ es insesgado

$$E(\hat{\theta}_3) = \frac{E(X) + E(Y)}{10}$$

$$= \frac{5\theta + 6\theta}{10} = \frac{11\theta}{10} \neq \theta$$

$\therefore$ $\hat{\theta}_3$ es sesgado

$\boxed{R/ \quad \hat{\theta}_1 \wedge \hat{\theta}_2 \text{ son insesgados}}$

(b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ? Justifique su respuesta.

$R/$ Es mejor $\widehat{\theta}_1$

Comparando $\hat{\theta}_1$ con $\hat{\theta}_2$

$$\eta = \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$$

X; $\sigma^2 = 9$

Y; $\sigma^2 = 9.2$

$$= \frac{Var(\frac{X}{5})}{Var(Y-X)}$$

$$= \frac{\frac{Var(X)}{25}}{Var(Y)-Var(X)}$$

$$= \frac{\frac{9}{25}}{9.2+9} = \frac{9}{455} < 1$$

$\therefore$ $\boxed{\hat{\theta}_1 \text{ tiene menor varianza que } \hat{\theta}_2\text{, entonces es mejor}}$