

Función de distribución

- Condiciones de la función de distribución

Sea X una variable aleatoria discreta con función de distribución de probabilidad f_X , entonces, se cumple que:

$$1. f_X(m) \geq 0, \text{ para todo } m \in R_X \quad 2. \sum_{m \in R_X} f_X(m) = 1$$

Nota: cuando la variable aleatoria discreta tiene rango infinito, se procede a resolver una serie geométrica, telescopica o exponencial según corresponda, tomando en cuenta lo siguiente:

- Serie geométrica

Una serie geométrica con razón r es de la forma:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

donde r un número real.

Dicha serie converge a $\frac{r^p}{1-r}$ si y solo si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$

Ahora bien, la función de distribución acumulada de la serie geométrica viene dada por:

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

donde r un número real.

- Serie exponencial

Una serie exponencial es de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

la cual converge a e^x .

Medidas de tendencia central

- Esperanza

La esperanza, media o valor esperado de una variable aleatoria discreta X es el promedio ponderado de los valores del rango de X según las probabilidades de que X tome cada uno de estos valores. Así, se define la esperanza como:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{k \in R_X} k \cdot f_X(k)$$

- Varianza

Si X es una variable aleatoria discreta tal que $E(X^2)$ converge y $E(X) = \mu_X$, se define la varianza de X como:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]$$

Este parámetro indica qué tanto varían los valores de la variable con respecto a su esperanza y permite medir la variabilidad de la distribución.

Sea X una variable aleatoria discreta, entonces se cumple que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

donde $E(X)$ es la esperanza normal y $E(X^2)$ es la esperanza al cuadrado

$$E(X^2) = \sum_{k \in R_X} k^2 \cdot f_X(k)$$

Teorema 1.1 : Sumas

- $\sum_k (a_k \pm c \cdot b_k) = \sum_k a_k \pm c \sum_k b_k$
- $\sum_{k=m}^n c = c(n - m + 1)$
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$

$$\sum_k k = h \quad k \text{ constante}$$

$X = p$

Ejemplo

$$\left(\sum_{i=1}^k 1 \right) = k$$

- Desviación estándar

Sea X es una variable aleatoria discreta. Se define la desviación estándar de X como:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Función de distribución

■ Representación mediante arreglo

En forma de arreglo, una función de distribución de probabilidad puede verse como:

$$\begin{cases} P(X_i = x) & \text{si } x = a \\ P(X_i = x) & \text{si } x = b \\ \vdots \\ P(X_i = x) & \text{si } x = n \end{cases}$$

con $a, b, \dots, n \in R_X$ e $i = 0, 1, 2, \dots$

— Función de distribución acumulada

■ Representación mediante arreglo

En forma de arreglo, una función de distribución acumulada puede verse como:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P(X_i = x) & \text{si } a \leq x < b \\ P(X_i = x) & \text{si } b \leq x < c \\ \vdots \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

con $a, b, c, \dots, n \in R_X$ e $i = 0, 1, 2, \dots$

Propiedades de la esperanza

Sea c una constante y sea X una variable aleatoria discreta tal que $E(X)$ existe, entonces, se tiene que:

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = c \cdot E(X)$
4. Si $E(X)$ y $E(Y)$ existen, entonces $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Propiedades de la varianza

Sea c una constante y sean X, Y variables aleatorias discretas, entonces, se tiene que:

1. $Var(c) = 0$
2. $Var(X + c) = Var(X)$
3. $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$
4. Si X y Y son variables independientes, entonces $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden k como $E(X^k)$. Además, se define la función generadora de momentos para X por

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in R_X} e^{tk} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera:

■ Esperanza

Consiste en calcular la primera derivada de la función generadora de momentos y luego evaluarla en $t = 0$ así:

$$E(X) = m'_X(0)$$

■ Varianza

Consiste en calcular la segunda derivada de la función generadora de momentos, luego evaluarla en $t = 0$ y finalmente restarle la esperanza al cuadrado, así:

$$Var(X) = m''_X(0) - [m'_X(0)]^2$$

Distribuciones para variables aleatorias discretas

Prueba de Bernoulli

Es el experimento asociado a la extracción de una bola de una urna. Si se realizan varias pruebas de Bernoulli estas pueden ser:

- Pruebas independientes: las extracciones se realizan con reposición.
- Pruebas dependientes: las extracciones se realizan sin reposición.

Distribución binomial

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución binomial y se denota como:

$$X \sim B(n, p)$$

con n, p parámetros.

Características

1. Se realizan n extracciones con reposición.
2. Existe una probabilidad de éxito fija por cada extracción.

Función de distribución de probabilidad

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$

q = prueba de fracaso
con $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y $q = 1 - p$
 $p = prueba de éxito$

En las jugadas cual es
la proba de que pase X cosa?

Medidas de tendencia central

Esperanza	Varianza
$E(X) = n \cdot p$	$Var(X) = n \cdot p \cdot q$
Promedio	

con $q = 1 - p$

$n = \text{cantidad de objetos}$
 $p = \text{prueba de éxito}$
 $q = \text{prueba de fracaso}$
 $K = \text{valores de la suma}$

Distribución geométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de extracciones realizadas antes de (o hasta) obtener el primer éxito. Se dice que X sigue una distribución geométrica y se denota como:

Importante

det proba antes
o hasta el x
intento

$$X \sim G(p)$$

con p parámetro.

Características

1. Se realizan extracciones con reposición.
2. p es la probabilidad de éxito.

Función de distribución de probabilidad

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y $q = 1 - p$

Esta si empila
en 0

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, \dots\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1 - p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{\frac{p}{p}}_{\text{éxito}} ; E(X) = \frac{1}{p}$$

Esta si
empila en 1

Diferencia entre usar $q^k p$ y $q^{k-1} p$

Forma	Qué cuenta	Cuándo se usa	Ejemplo
$q^{k-1} p$	Cuenta intentos hasta el primer éxito	Cuando el enunciado dice "el éxito ocurre en el intento número k "	"La llamada se conecta en el 7. ^º intento" → el éxito pasa <i>en el intento 7</i> (hubo 6 fallos antes).
$q^k p$	Cuenta fallos antes del primer éxito	Cuando el enunciado dice "hay k fallos antes del primer éxito"	"Falla 7 veces y a la 8. ^a lo logra" → 7 fallos <i>antes del éxito</i> .

■ Función generadora de momentos

Su función generadora de momentos viene dada por:

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t \cdot q}$$

con $q = 1 - p$.

Medidas de tendencia central

Esperanza
 $E(X) = \frac{q}{p}$

Varianza
 $Var(X) = \frac{q}{p^2}$

con $q = 1 - p$

Distribución hipergeométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución hipergeométrica y se denota como:

$$X \sim H(n, N, b)$$

con n, N y b parámetros.

Con muestras

De 100 personas
 se atienden 30

■ Características

1. Se realizan n extracciones sin reposición.
2. Inicialmente la urna contiene b éxitos y r fracasos, donde $b + r = N$ y $n \leq N$

■ Función de distribución de probabilidad

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

con $k = \{ \max\{0, n-r\}, \min\{n, b\} \}$

N = Total de elementos de la población
 n = Cantidad de elementos de la muestra
 b = Cantidad de elementos que cumplen
 r = Cantidad de elementos que no cumplen
 K = Valores de la suma

■ Medidas de tendencia central

Esperanza
 $E(X) = \frac{b \cdot n}{N}$

Varianza
 $Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{b}{N}\right) \cdot \frac{b \cdot n}{N}$

Distribución de Poisson

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de resultados que se obtienen en una unidad o intervalo, para experimentos aleatorios. Se dice que X sigue una distribución Poisson y se denota como:

$$X \sim P(\lambda) \quad \lambda \text{ es el promedio (Esperanza)}$$

con λ parámetro.

- Características *Siempre diré que es de Poisson*

1. Se necesita fijar una unidad t (longitud, tiempo, entre otros)
2. Se debe establecer el número promedio de resultados λ por unidad t .

■ Función de distribución de probabilidad

§1.10. Distribución de Poisson

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$

Definición 1.12

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots\}; \quad E(X) = \lambda; \quad P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Nota 1.3 ¿Qué es lo importante? Si λ es el valor esperado para un tiempo t , el valor esperado para otro tiempo \hat{t} , sigue una regla de 3.

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

Relación entre distribuciones

■ Hipergeométrica y binomial

Si $X \sim H(n, N, b)$ con $R_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y n es muy pequeño en comparación con N y b , entonces $X \sim B(n, p)$

■ Binomial y Poisson

Si $X \sim B(n, p)$ donde n es muy grande y p es muy pequeño, entonces $X \sim P(\lambda)$

Estos casos son aplicables de la siguiente forma:

- Si $\lambda < 5 \wedge p < 0,1$
- Si $n > 100 \wedge p < 0,05$

§1.9. Distribución binomial negativa

Definición 1.11 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener r éxitos. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{r, r+1, r+2, \dots\}$ y

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r} \cdot p^r$$

$$\binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{k-r}$$