Bondad de ajuste

Todos los de χ^2 son de cola derecha, en sí la formula del χ^2_c de cola derecha $\chi^2_c = \chi^2_{\alpha, v}$ con $v = k-1$

Cola derecha

Si se cumple
$\chi^2_{obs} < \chi^2_c$, No se rechaza H_0

Si se cumple
$\chi^2_{obs} > \chi^2_c$, Se rechaza H_0

El χ^2_c se mete con $>$ y el valor P con $>$

Ejemplo 1:

Un grupo de ratas baja 90 veces por una rampa que conecta con 3 puertas. Se observa que en 23 ocasiones las ratas pasaron por la puerta 1, 36 veces por la puerta 2 y 31 veces por la puerta 3.

Se desea probar que las ratas no tienen preferencias por alguna de las puertas en particular. Use un nivel de significancia de 0.05.

$H_0: P_i = \frac{1}{3}$, $i \in \{1,2,3\}$ $\quad n = 90$

H_1: Las ratas no tienen preferencia $\quad k = 3$

$V = 2$

$\alpha = 0,05$

Observados: 23, 36, 31

Esperados: $n \cdot P_i = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30, 30, 30$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ con } \nu = k-1$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(23-30)^2}{30} + \frac{(36-30)^2}{30} + \frac{(31-30)^2}{30}$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{43}{15} \simeq 2,86 \qquad \chi^2_c = \chi^2_{0.05,2} = 5,99146$$

R/ Como $\chi^2_{obs} = 2,86 < \chi^2_c = 5,99146$ No se rechaza H_0, las ratas no muestran preferencia por alguna puerta

Con valor P:

$$x^2_{obs} = \frac{(23-30)^2}{30} + \frac{(36-30)^2}{30} + \frac{(31-30)^2}{30} = \frac{43}{15} \simeq 2,86$$

$= P(x^2 > 2,86)$ $\quad v = 2 \quad \alpha = 0,05$

$= 0,23931$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Como } P = 0,23931 > \alpha = 0,05 \\ \text{NO se rechaza } H_0\end{array}}$$

El curso Estructura de Datos II, es impartido en el segundo año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de una Universidad. Un profesor considera que las edades de los estudiantes que llevan dicho curso, sigue una distribución normal. En una muestra de 200 estudiantes se obtuvieron los resultados de la tabla adjunta. ¿Considera correcta la afirmación del profesor?

Edad: X	Frecuencia Observada
$X < 18$	30
$18 \leq X < 19$	100
$19 \leq X < 20$	50
$20 \leq X < 21$	15
$X \geq 21$	5

Considera para los datos:

$\bar{x} = 18.825$

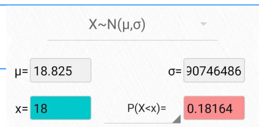
$s = 0.90746486$

$H_0: X \sim N(18.825, 0{,}90746486^2)$ $\quad n = 200 \quad V = 199$

$H_0: X \nsim N(18.825, 0{,}90746486^2)$ $\quad k = 5 \quad \alpha = 0{,}05$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ con } \nu = k - 1$$

Observados: 30, 100, 50, 15, 5



$e_1: 200 \cdot P(X < 18) = 200 \cdot 0{,}18164 = 36{,}328$

$e_2: 200 \cdot P(18 \leq X < 19) = 200 \cdot [P(X < 19) - P(X \leq 18)]$
$= 200\,[0{,}57696 - 0{,}18164]$
$= 78{,}964$

$e_3: 200 \cdot P(19 \leq X < 20) = 200 \cdot [P(X < 20) - P(X < 19)]$
$= 200 \cdot [0{,}90231 - 0{,}57696]$
$= 65{,}17$

$e_4: 200 \cdot P(20 \leq X < 21) = 200 \cdot [P(X < 21) - P(X \leq 20)]$
$= 200 \cdot [0{,}99173 - 0{,}90231]$
$= 17{,}884$

$e_5: 200 \cdot P(X \geq 21) = 200 \cdot 0{,}0827 = 1{,}654 < 5$

$\rightarrow e_4 = 17{,}884 + 1{,}654 = 19{,}53$

$k = 5 \rightarrow k = 4 \quad O_4 = 15 \rightarrow O_4 = 15 + 5 = 20$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ con } \nu = k - 1$$

Observados : 30, 100, 50, 20

esperados : 36.328, 78.964, 65.17, 19.53

$$X^2_{obs} = \frac{(30-36,328)^2}{36,328} + \frac{(100-78,969)^2}{78,969} + \frac{(50-65,17)^2}{65,17}$$

$$+ \frac{(20-19,53)^2}{19,53} = 10,298$$

$\alpha = 0,05$ $\quad k = 4$

$v = 3$

$$X^2_c = X^2_{0,05,\,3} = 7,81473$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{R/ Como } X^2_{obs} = 10,298 > 7,81473 \\ \text{Se rechaza } H_0 \end{array}}$$

Con valor P

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ con } \nu = k - 1$$

$$X^2_{obs} = \frac{(30-36,328)^2}{36,328} + \frac{(100-78,969)^2}{78,969} + \frac{(50-65,17)^2}{65,17}$$

$$+ \frac{(20-19,53)^2}{19,53} = 10,298$$

$\alpha = 0,05$

$v = 3$

$$P(x^2 > 10,298) = 0,01657$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{R/ Como } P = 0,01657 < \alpha = 0,05 \\ \text{Se rechaza } H_0 \end{array}}$$

Con el objetivo de redactar un informe anual del curso de Estadística se registraron las ausencias por semana durante todo el año lectivo (38 semanas).

	Ausencias	0	1	2	3	4 o más
e						
o	Frecuencia	6	9	10	6	7

$\rightarrow \Sigma = 38$

Con una significancia de 5 %, ¿puede concluirse que el número de ausencias por semana sigue una distribución Poisson $\left(P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right)$ con media 1.94? $\leftarrow \lambda$ **(5 puntos)**

$H_0: X \sim P(1{,}94)$ $\quad n = 38 \quad \alpha = 0{,}05$

$H_1: X \nsim P(1{,}94)$ $\quad k = 5 \quad v = 4$

$e_0: \frac{1{,}94^0 \cdot e^{-1{,}94}}{0!} = 5{,}461$ $\qquad e_0: \frac{1{,}94^3 \cdot e^{-1{,}94}}{3!} = 6{,}645$

$e_0: \frac{1{,}94^1 \cdot e^{-1{,}94}}{1!} = 10{,}594$ $\qquad e_0: \frac{1{,}94^3 \cdot e^{-1{,}94}}{3!} = 5{,}024$

$e_0: \frac{1{,}94^2 \cdot e^{-1{,}94}}{2!} = 10{,}276$ $\qquad \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$ con $\nu = k - 1$

Observados: 6, 9, 10, 6, 7

esperados: 5.461, 10.594, 10.276, 6.645, 5.024

$$\chi^2_{obs} = \frac{(6-5{,}461)^2}{5{,}461} + \frac{(9-10{,}594)^2}{10{,}594} + \frac{(10-10{,}276)^2}{10{,}276} + \frac{(6-6{,}645)^2}{6{,}645}$$

$$+ \frac{(7-5{,}024)^2}{5{,}024} = 1{,}1784$$

$v = 4$

$\alpha = 0{,}05$

$\chi^2_c = \chi^2_{0.05,4} = 9{,}48773$

$$\boxed{\text{R/ Como } \chi^2_{obs} = 1{,}1784 < 9{,}48773 \text{ No se rechaza } H_0}$$

Valor P

$v=4$

$\chi^2_{obs} = 1,1784$ $\alpha = 0,05$

$P(\chi^2 > 1,1784) = 0,88164$

$$\boxed{\begin{array}{l} R/ \text{ Como } p = 0,08164 > \alpha = 0,05 \\ \text{No se rechaza } H_0 \end{array}}$$

Hay seis tipos diferentes de colores en un paquete de chocolates M&Ms: azul, rojo, naranja, amarillo, verde y café. Se quiere saber si la distribución de estos 6 colores sucede en igual proporción. En la fábrica, antes de empacarlos, se toma una muestra simple de 600 chocolates M&Ms y se observan las distribuciones que se muestran en el Cuadro 1. Constraste la hipótesis de que los colores de los M&Ms se adaptan a una distribución uniforme. **(5 puntos)**

Color	Azul	Naranja	Verde	Rojo	Amarillo	Café
Cantidad	212	147	103	50	46	42

$H_0: p_i = \frac{1}{6}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ $n = 600$ $\alpha = 0,05$

$H_1: X \not\sim U$ $k = 6$ $v = 5$

observados = 212, 147, 103, 50, 46, 42

$e_i = 100 \cdot \frac{1}{6} = 100$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$ con $\nu = k - 1$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(212-100)^2}{100} + \frac{(147-100)^2}{100} + \frac{(103-100)^2}{100}$$

$$+ \frac{(50-100)^2}{100} + \frac{(46-100)^2}{100} + \frac{(42-100)^2}{100}$$

$\chi^2_{obs} = 235,42$ $\chi^2_c = \chi^2_{0,05,5} = 11,07050$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Como } \chi^2_{obs} = 235,42 > \chi^2_c = 11,07050 \\ \text{Se rechaza } H_0 \end{array}}$$

$X \sim B($

el n de $X \sim B = 3$

6. Se extraen tres cartas de una baraja ordinaria, con reemplazo, y se registra el número Y de espadas. Después de repetir el experimento 64 veces se registran los siguientes resultados

	y	0	1	2	3
e					
o	Frecuencia	21	31	12	0

¿existe evidencia en contra, con un nivel de significancia de 0.01, de que los datos se pueden ajustar a una distribución binomial $P(y) = C(n, y)\left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{3}{4}\right)^{n-y}$ para $y = 0, 1, 2, 3$?.$R/$ No, $X_{obs} \approx 2.3259$

$H_0: X \sim B(3, \frac{1}{4})$ $n = 64$ $k = 4$

$H_1: X \nsim B(3, \frac{1}{4})$ $\alpha = 0{,}01$ $v = 3$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ con } \nu = k - 1$$

$e_0 = 64 \cdot C(3,0) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-0} = 27 > 5$ ✓

$e_1 = 64 \cdot C(3,1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-1} = 27 > 5$ ✓

$e_2 = 64 \cdot C(3,2) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-2} = 9 > 5$ ✓

$e_3 = 64 \cdot C(3,3) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-3} = 1 < 5$ ✗

$\left.\begin{array}{l} e_2 = 9 + 1 = 10 \\ \\ k = 3 \quad v = 2 \end{array}\right\}$ Actualizando

observados $= 21, 31, 12$

esperados $= 27, 27, 10$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ con } \nu = k - 1$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(21-27)^2}{27} + \frac{(31-27)^2}{27} + \frac{(12-10)^2}{10} \approx 2{,}3259$$

$\chi^2_c = \chi^2_{0.01, 2} = 9{,}21034$

$\boxed{\text{R/ Como } \chi^2_{obs} = 2{,}3259 < \chi^2_c = 9{,}21034 \text{ NO se rechaza } H_0}$

8. Una partida ESCUDO consiste en una sucesión de lanzamientos hasta obtener un escudo, sea X el número de lazamientos realizados en un partida. Se registraron los valores de X en 80 partidas ESCUDO para una moneda particular, los resultados se resumen en la siguiente tabla:

X :	1	2	3	4
# de familias:	35	20	18	7

e $x \geq 4$
o

A un nivel de significancia del 5%, ¿Existe evidencia en contra de que X sigua la distribución $f_X(k) = \frac{1}{2^k}$? R/ $\chi^2_{obs} = 12.825$, se halla evidencia en contra de que $X \sim f_X$

$H_0: X \sim f_x(k) = \frac{1}{2^k}$ $\quad n = 80 \quad k = 4$

$H_1: X \nsim f_x(k) = \frac{1}{2^k}$ $\quad \alpha = 0{,}05 \quad v = 3$

$$\boxed{\frac{r^p}{1-r}}$$

$e_1 = 80 \cdot \frac{1}{2^1} = 40$ $\qquad e_3 = 80 \cdot \frac{1}{2^3} = 10$

$e_2 = 80 \cdot \frac{1}{2^2} = 20$ $\qquad e_4 = 80 \cdot P(x \geq 4)$

$$= 80 \cdot \sum_{4}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 80 \cdot \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} = 10$$

Observados $= 35, 20, 18, 7$

esperados $= 40, 20, 10, 10$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ con } \nu = k - 1$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(35-40)^2}{40} + \cancel{\frac{(20-20)^2}{20}} + \frac{(18-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10}$$

0

$\chi^2_{obs} = 12{,}825$

$\chi^2_c = \chi^2_{0.05,3} = 7{,}815$

R/ Como $\chi^2_{obs} = 12{,}825 > \chi^2_c = 7{,}815$
Se rechaza H_0