

Distribuciones para variables aleatorias discretas

Distribución Binomial

1. Se lanzan 15 dados idénticos. El juego consiste en ganar si se obtiene en 6 o más veces una cara mayor a 4, la persona repite el juego 15 veces. Determine que en 15 jugadas se gane 6 o más veces. R/ 0,3816

2. La probabilidad de contestar correctamente una pregunta es de 0,4. Sabiendo que el examen es de 5 preguntas. Calcule la probabilidad si:
 - a) Todas son correctas R/ 0,0102
 - b) Al menos 2 preguntas correctas R/ 0,6630
 - c) 3 preguntas correctas R/ 0,2304

3. Un equipo de natación tiene un 0,65 de probabilidad de ganar cada vez que hay una competencia. Si hay 10 competencias:
 - a) Calcule la probabilidad de ganar más de la mitad de las competencias R/ 0,7514
 - b) Calcule el número esperado de ganar las 10 competencias R/ 6,5

4. Se estima que el 12 % de la población es zurda. En un grupo de 32 estudiantes ¿cuál es la probabilidad que 2 de ellos sean zurdos? R/ 0,1542

5. Un quiz de probabilidad consta de cinco preguntas y la probabilidad de contestar correctamente una pregunta es de 0,60 ¿Cuántas preguntas se espera que sean contestadas correctamente? R/ 3

6. Una moneda tiene probabilidad 0,23 de caer corona. Se lanza la moneda hasta tener 2 coronas o 2 escudos, no necesariamente seguidos. Si X denota el total de veces que se lanza la moneda, entonces: ¿cuál es la probabilidad para $X = 2$? R/ 0,0529

7. La probabilidad de que llueva en Cartago cualquier día de mayo es 0,42. Para un período de cinco días.
- Encuentre la probabilidad del número de días lluviosos en ese lapso.
 - Encuentre la esperanza y la varianza.
8. Un extraño virus se propaga en un país. Cuando una persona infectada entra en contacto con una persona no infectada, la probabilidad de contagio es de 0,02. Si un infectado entra en contacto con 100 personas al día ¿cuál es la probabilidad que esta persona infecte a más de 10 personas? R/ 0,00000564
9. Históricamente, la selección de Costa Rica, una vez que está clasificada al mundial, tiene probabilidad de $\frac{2}{3}$ de no perder un partido amistoso previo al mundial. Si se sabe que Costa Rica disputará siete partidos amistosos previo al mundial y que la probabilidad de no perder dichos partidos, se mantiene partido a partido ¿cuál es la probabilidad que Costa Rica llegue invicta al mundial? R/ 0,0585
10. El juego **Más de Dos** consiste en lanzar 7 veces un dado. Si de los 7 resultados, se obtienen más de dos mayores a dos, se gana el juego.
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar Más de Dos? R/ $\frac{232}{243}$
 - Jorge juega 10 veces Más de Dos ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de ganar por lo menos 9 juegos? R/ 0,9275
11. Se lanza 10 veces una moneda y sea X el número de escudos obtenidos.
- Determine la función de distribución de X . R/ $\frac{C(10, k)}{2^{10}}$
 - Calcule la probabilidad de obtener cuatro escudos. R/ $\frac{105}{512}$
 - Determine la probabilidad de obtener al menos dos escudos. R/ $\frac{1\,013}{1\,024}$

Distribución Geométrica

1. El señor Pérez necesita controlar su nivel de glucosa en la sangre, para esto necesita realizarse varios exámenes de glucemia al mes. La probabilidad de salir positivo en un examen es de 0,70. Determine la probabilidad que resulte positiva la primera reacción, después del tercer examen.
R/ 0,027
2. Doña María tiene 5 llaves. Ella necesita abrir la puerta principal y solo una llave funciona. Prueba una llave tras otra con reemplazamiento hasta lograr abrir la puerta. Determine la probabilidad de abrir la puerta después del segundo intento.
R/ $\frac{16}{25}$
3. Una máquina expendedora de paquetes de galletas, falla en una de cada 500 extracciones. Determine la probabilidad de que el primer fallo de la máquina expendedora se dé en el quinto estudiante de la fila.
R/ 0,0019
4. En una caja hay 15 bolas de colores, de las cuales 6 son de un color distinto de rojo y las demás rojas. El color favorito de un niño es el rojo, por lo que saca una bola de la caja y si no es de color rojo la devuelve y así sucesivamente hasta obtener una roja ¿Cuál es la probabilidad de que el niño obtenga la primera bola roja después de la décima extracción inclusive?
R/ 0,000262
5. Si se sabe que la probabilidad que un tirador experto dé en el blanco es del 95 % ¿Cuál es la probabilidad que falle por primera vez en su décimo quinto disparo?
R/ 0,0231
6. En un proceso de manufactura, se sabe que la probabilidad de obtener una pieza defectuosa es de 2 % ¿Cuál es la probabilidad que la octava pieza inspeccionada sea la primera defectuosa que se obtenga del proceso de manufactura?
R/ 0,0170
7. Una central telefónica está permanentemente ocupada. Si la probabilidad de lograr hacer una llamada en los momentos de mayor congestión es del 6 %, calcule la probabilidad de hacer entre 7 y 10 intentos (inclusive) para lograr comunicarse.
R/ 0,1421

8. Se lanza una moneda varias veces hasta obtener un escudo. Sea X el número de lanzamientos realizados antes de obtener el primero.
- a) Determine la probabilidad de que hasta en el sexto lanzamiento se obtenga el primer escudo. R/ $\frac{1}{64}$
- b) Halle la probabilidad de que por lo menos en el quinto lanzamiento se obtenga el primer escudo. R/ $\frac{1}{16}$
- c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el escudo en un lanzamiento impar? R/ $\frac{2}{3}$
9. Cuando un usuario crea una nueva clave para un sistema, la probabilidad de que se rechace, por no respetar las recomendaciones es p . Si la probabilidad de que el usuario reciba el primer rechazo de su clave antes de la tercera es de 0,5, determine p . R/ 0,2928
10. Se ha determinado que Lionel Messi anota un gol de tiro libre en partidos oficiales con una probabilidad de $p = 0,6$. Calcule el número de tiros libres que debe ejecutar Messi para que obtenga una probabilidad de anotar de al menos el 95% R/ 3,2694
11. En un concurso de televisión se tienen 10 participantes que tratarán de ganarse un automóvil por medio del juego **Bola Blanca**, de la siguiente forma: si el primer participante gana el juego, obtiene el automóvil y se acaba el concurso, sino, pasa a jugar el segundo concursante y si gana el juego, obtiene el automóvil y se acaba el concurso y así sucesivamente. ¿Cómo se juega **Bola Blanca**? En este caso, se tiene una canasta con cinco bolas blancas y siete rojas, el jugador debe extraerlas con reposición de la canasta, si obtiene una bola blanca a lo sumo en la tercera extracción gana el juego, sino, lo pierde. Sea X el número de extracciones de la canasta, con reposición, realizadas antes de obtener una bola blanca.
- a) Determine la probabilidad de ganar **Bola Blanca** R/ $\frac{1385}{1728}$
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer participante gane el automóvil? R/ 0,0315
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los primeros cuatro participantes se gane el automóvil? R/ 0,9984

Distribución Hipergeométrica

1. Una tienda se especializa en vender ropa deportiva. Recibe la mercadería en lotes de 50 piezas. En cada lote hay 3 piezas defectuosas. Se extrae al azar 7 piezas. ¿Cuál es la probabilidad que se saquen 2 piezas defectuosas? R/ 0,0460

2. Una compañía ofrece carros para turistas. La compañía tiene 10 carros de la marca Guía y 15 carros de la marca Turista. Tiene 6 carros en reparación y las reparaciones se encuentran con la misma frecuencia en ambas marcas. ¿Cuál es la probabilidad que 4 carros en reparación sean de la marca Guía y 2 sean de la marca Turista? R/ 0,1245

3. En una caja hay 6 bolas azules y 4 bolas rojas. Se elige una al azar y se anota el color. Se vuelve a depositar la bola en la caja. El experimento se repite 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 bolas azules? R/ 0,4761

4. Una urna contiene 75 bolas blancas y 100 bolas negras. Se extrae al azar 10 bolas y se desea determinar la probabilidad de obtener 3 bolas blancas y 7 bolas negras si se sacan todas las bolas al mismo tiempo. R/ 0,1892

5. A nivel nacional, existe un partido político llamado **CET**. El jueves, habrá una convención para elegir el presidente del partido, para lo cual se presentarán 2 candidatos, a saber: Maruja y Pedro. La provincia de Cartago tiene 20 representantes que pueden ir a votar. De estos 20, 12 apoyan a Maruja y 8 a Pedro. Se eligen al azar 7 representantes por Cartago. ¿Cuál es la probabilidad que entre estos 7 representantes, 3 de ellos apoyen a Maruja? R/ 0,1986

6. A un centro hospitalario llegan 100 personas con síntomas de influenza porcina. Por limitaciones de espacio y médicos, solamente se pueden evaluar a 30 de ellos al azar. Si en total 25 de los 100 pacientes tiene en realidad influenza:
 - a) Determine el rango de la variable aleatoria X R/ $R_X = \{0, 25\}$

 - b) Determine la probabilidad de que en dicho día se detecten más de doce casos con influenza porcina R/ 0,0068

7. En una caja se tienen 10 celulares, de los cuales hay 3 celulares dañados, si se sacan 5 celulares de la caja ¿Cuál es la probabilidad de sacar un celular dañado? R/ 0,4167
8. En un parque industrial, se realiza el estudio del cumplimiento o no cumplimiento del código eléctrico de 50 edificios de este parque industrial. A partir del estudio se obtiene lo siguiente: 12 de ellos no cumplen con el código eléctrico. Si se seleccionan 10 edificios al azar:
- ¿Cuál es la probabilidad de que 3 edificios no cumplan el código? R/ 0,2702
 - ¿Cuál es la probabilidad de que 4 edificios no cumplan el código? R/ 0,1330
 - ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 5 edificios no cumplan con el código eléctrico del parque industrial? R/ 0,9539
9. David tiene en un recipiente 10 canicas, de las cuales 4 son coquitos (canicas blancas) Él ha decidido regalarle a Hernán n canicas extraídas al azar del recipiente. Se sabe que la probabilidad que Hernán reciba 2 coquitos como regalo de David es de $\frac{3}{7}$ ¿Cuántas canicas le regaló David a Hernán? R/ $n = 4 \vee n = 6$
10. **Compu Pato** tiene a la venta 20 computadoras a un excelente precio; sin embargo, 7 de ellas están defectuosas. Karla, emocionada por la oferta, compra 10 de esas computadoras. Sea X el número de computadoras defectuosas compradas por Karla.
- Halle el rango de X R/ $\{0, 7\}$
 - ¿Cuál es la probabilidad que Karla compre 2 computadoras defectuosas? R/ $\frac{189}{1\,292}$
 - De las 10 computadoras defectuosas, determine la probabilidad de que al menos una salga defectuosa. R/ $\frac{645}{646}$
11. La junta directiva de **Asociatec** está formada por 6 mujeres y 5 hombres. Se desea elegir 4 personas para conformar un comité que analice el impacto que tiene el nuevo proyecto fiscal en las finanzas de la asociación. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté integrado por al menos 2 mujeres? R/ $\frac{53}{66}$

Distribución de Poisson

1. Se ha publicado que la razón de personas que se infectan de influenza porcina en el mundo sigue aproximadamente una distribución de Poisson, con un promedio de 45 personas infectadas por día.
 - a) Determine la probabilidad que menos de 35 personas sean infectadas mañana a nivel mundial
R/ 0,0540
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten más de 50 personas infectadas por influenza en el siguiente fin de semana (sábado y domingo)?
R/ 0,9999
2. Un técnico es el encargado en reparar computadoras de una empresa. El número de máquinas reparadas sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el técnico repare menos de 5 computadoras, sabiendo que repara por lo menos 2?
R/ 0,7693
3. En una fábrica de conservas se reciben latas en lotes de 1000 piezas. La probabilidad que una lata sea defectuosa es de 0,004. Calcule la probabilidad que haya 3 latas defectuosas en el lote.
R/ 0,1953
4. Suponga que la versión impresa de la novela **Cien años de soledad** tiene 275 páginas y tiene 300 errores de impresión. Calcule la probabilidad de que una página, contenga:
 - a) Tres errores.
 - b) Dos o más errores.
5. El número de fallos de un cajero automático sigue una media de 1,2 fallos por hora. Determine:
 - a) La probabilidad de 2 fallos en una hora
R/ 0,2168
 - b) La probabilidad de 5 fallos en 3 horas
R/ 0,1376
 - c) Al menos un fallo en 2 horas
R/ 0,9092

6. La probabilidad que una persona tenga una mala reacción a una vacuna es de 0,001. Si se tiene una población de 2000 personas. Determine:
- a) La probabilidad que 3 personas tengan una mala reacción R/ 0,1804
- b) La probabilidad que más de 2 personas tengan una mala reacción R/ 0,3233
7. La compañía **SIN** determinó que el 0,002 del país tiene un percance automovilístico por razones meteorológicas. Si la cantidad de personas con una póliza por percances meteorológicos es de 2500. Calcule la probabilidad que haya que hacer efectivas a lo sumo 7 pólizas de seguro. R/ 0,8666
8. Suponga que el número de accidentes que ocurren en determinada carretera sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 2$ ¿Cuál es la probabilidad que en un día ocurran más de 2 accidentes, sabiendo que por día ocurre por lo menos uno? R/ 0,3739
9. En una central telefónica, el total de llamadas recibidas sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 2 llamadas por minuto. Un minuto se estima crítico si ocurren más de 3 llamadas.
- a) ¿Cuál es la probabilidad del total de minutos críticos en una hora? R/ 0,1428
- b) ¿Cuál es la probabilidad que el primer minuto crítico, desde las 7am ocurra antes de las 9am? R/ 0,0044
10. En Costa Rica, anualmente se realiza un estudio que muestra el promedio de incendios ocasionados por el humano. Para este año, el número de incendios ocasionados sigue una distribución de Poisson con media igual a 12 ¿Cuál es la probabilidad de que en un día ocurran menos de 8 incendios, sabiendo que por día ocurre a lo sumo seis? R/ 1

11. Se ha determinado que el total de sismos mayores a una escala fija en cierta región sigue una distribución que es Poisson con promedio 8 sismos al mes.
- a) Determine la probabilidad de que en una semana haya más de 9 sismos mayores a la escala fija de la región mencionada. R/ 0,00005
- b) Determine la probabilidad de que un día se tengan sismos mayores a la escala fija de la región mencionada. R/ 0,2340
12. Para modelar la cantidad de accidentes de tránsito que ocurren en una intersección del centro de Cartago se ha decidido usar una distribución de Poisson con promedio 100 accidentes por año.
- a) Determine la probabilidad de que ocurran menos de 10 accidentes durante un mes del año.
- b) Un mes se considera seguro si ocurren menos de dos accidentes en dicha intersección. Determine la probabilidad de que, a lo sumo, seis meses del año sean seguros.
13. Una empresa produce un nuevo tipo de impresoras y nota que fallan antes de cumplir 150 horas de funcionamiento. Si el número promedio de estos fallos es de 12 ¿cuál es la probabilidad de una falle antes de cumplir dos días? R/ 0,0825

Relación Binomial-Poisson

- La probabilidad de que una persona tenga una reacción alérgica a la vacuna contra la gripe es de 0,001. Calcule la probabilidad de que en una comunidad de 2500 personas, tres tengan una reacción alérgica.
- Una compañía que hace bolsas reciclables para supermercados. La probabilidad de que una bolsa salga defectuosa es de 0,0003. Una producción de 12 000 bolsas es enviada a los supermercados **RECICLE**. Hallar el número esperado de bolsas defectuosas.

Ejercicios combinados

- La probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado es de $\frac{2}{3}$. Un participante en un concurso se considera ganador si al lanzar este dado sucesivamente obtiene un número par hasta después del segundo lanzamiento. De 7 participantes que asistirán un día al concurso ¿cuál es la probabilidad que al menos dos de los participantes del concurso sean ganadores?
R/ 0,1778
- Se lanzan 15 dados indistinguibles y se cuenta la cantidad de números pares en las caras. Se considera que la jugada es limpia si hay más caras pares que impares. Determine la probabilidad de que el juego deba repetirse más de 5 veces, hasta obtener la primera jugada limpia.
R/ $\frac{1}{64}$
- La probabilidad de ganar un juego es 0,20. Cada juego cuesta ₡1 000 y al ganar se obtiene ₡4 750.
 - De 25 juegos, determine la probabilidad de ganar al menos 10 de ellos. R/ 0,0173
 - ¿Cuánto dinero que se espera ganar o perder al jugar 25 juegos? R/ -1 250
 - ¿Cuál es la probabilidad que gane después del quinto intento? R/ 0,3276
 - Juan es muy metódico para jugar. Si el primer juego lo gana en el n-ésimo intento, entonces juega en total $3n$ juegos ¿Cuántas veces se espera que juegue Juan? R/ 15

4. En una bolsa hay 15 bolas rojas y 5 bolas verdes. Un juego consiste en sacar 10 bolas sin reposición y se gana si se obtiene al menos 3 bolas verdes. Si Alberto juega diez veces ¿Cuál es la probabilidad que gane al menos dos de los juegos? R/ 0,9892
5. Una estación de bomberos de cierto pueblo está compuesta por 15 bomberos, donde de ellos 9 son experimentados y 6 son novatos. Cada emergencia es atendida inicialmente por un equipo de 5 bomberos elegidos al azar, el cual se considera especializado si está formado por al menos 3 bomberos experimentados. En 6 emergencias. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo tres personas sean atendidas por un equipo especializado? R/ 0,2314
6. Sea X una variable aleatoria discreta que mide el número de computadoras de la marca **COMPUT** que presentan daños en la batería durante el primer año después de haber sido comprada. Si X sigue una distribución de Poisson con un promedio de 5 computadoras con la batería dañada durante el primer año de uso. La oficina de servicio al cliente hace estudios cada dos años para verificar la confiabilidad de los productos vendidos. Si en al menos tres de cada cinco estudios realizados por servicio al cliente más de 20 computadoras presentan problemas en la batería durante los dos primeros años de uso, la empresa debe pagar una multa. ¿Cuál es la probabilidad de que **COMPUT** tenga que pagar multa?
R/ 0,00000004
7. Todos los sábados, el finalista del programa **Sábado Pequeño** tiene la opción de ganar un automóvil. Para ello, se tienen 10 sobres (6 marcados con la palabra CHACAL y los otros en blanco). El concursante debe tomar al azar 5 sobres y si obtiene a lo sumo 2 sobres con la palabra CHACAL, se gana el automóvil. Un programa se considera atractivo si el finalista se gana el automóvil. De 10 programas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 3 sean atractivos? R/ 0,5098

8. Certo grupo del curso de probabilidades está compuesto de 15 mujeres y 25 hombres. Cada estudiante se ausenta de la clase con probabilidad de 0,45
- a) ¿Cuál es la esperanza para el total de estudiantes presentes en una clase? R/ 22
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 32 clases en 15 o más se superen los 23 estudiantes en clase. R/ 0,0539
- c) El profesor elige de manera aleatoria un grupo de 20 estudiantes. Determine la probabilidad de que haya más mujeres que hombres en el grupo. R/ 0,0241
9. Históricamente, la selección de Costa Rica, una vez que está clasificada al mundial, tiene probabilidad de $\frac{2}{5}$ de ganar un partido en el mundial. Cuando un equipo obtiene su primera victoria hasta el tercer partido, dicho equipo se declara conservador. Asumiendo que Costa Rica mantiene la misma probabilidad de ganar un partido cada vez que va a un mundial, ¿cuál es la probabilidad de que, de las próximas 10 veces que Costa Rica asista a un mundial, en cinco de ellos sea declarado conservador? R/ 0,0071
10. El número de imperfecciones en una lata de zinc de segunda marca **Duran**, sigue una distribución de Poisson con un promedio de 4 imperfecciones por lata. Estas se venden en grupos de 4 latas escogidas al azar y un grupo se considera desechable si tiene más de 20 imperfecciones. Si el comprador se da cuenta que un grupo es desechable, tiene derecho a cambiarlo. Si se compran 10 grupos de latas ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo dos sean desechables? R/ 0,8650
11. El número de veces que Juan sale a dar un paseo en bicicleta sigue una distribución de Poisson y en promedio sale tres veces a la semana. Determine la probabilidad de que pasen cinco días antes de que Juan salga a dar un paseo. R/ 0,0665
12. Las interrupciones no críticas en un sistema de transmisión siguen una distribución de Poisson con un promedio de una interrupción por minuto. Determine la probabilidad de que haya que esperar al menos 5 minutos para que se hayan acumulado 6 interrupciones. R/ 0,3602

13. Un ingeniero elaboró una máquina para hacer puertas de $1\text{ m} \times 50\text{ m}$. La máquina elabora las puertas de forma secuencial, donde el proceso de fabricación de cada puerta se da en 2 fases. En una primera fase, se hace a partir de aserrín y en una segunda fase, la pinta. El número de imperfecciones que tiene una puerta elaborada en la primera fase sigue una distribución de Poisson con un promedio de 5 imperfecciones. Si una puerta tiene más de 10 imperfecciones es desecharla. Además, para ahorrar pintura en la segunda fase, si la máquina detecta una puerta que se debe desechar, no la pinta y se apaga para que se quite esa puerta, con el inconveniente de que no se puede encender hasta el día siguiente.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de una puerta sea desechara? R/ 0,0137
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un día al poner la máquina a funcionar, esta labore solamente 25 puertas pintadas de forma continua y se apague? R/ 0,0097
14. Una fábrica de televisores conoce que la probabilidad que un televisor falle en el primer año es de 0,01. En un año se fabrican 1000 televisores para un hotel. Determine la probabilidad de que fallen entre 8 y 15 televisores. R/ 0,7310
15. Se sabe que el 2 % de la población es zurda. Utilice la distribución de Poisson para hallar la probabilidad de encontrar al menos cuatro zurdos entre 100 personas. R/ 0,1428
16. En una caja hay tres tarros de pintura: uno con pintura roja, uno con pintura verde y otro con pintura azul. Se toma al azar un tarro de pintura, con él, se pinta una bola y se echa en otra caja. Después de haber pintado 15 bolas y ponerlas en la caja, un niño toma cinco bolas al azar para jugar ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres bolas que toma el niño sean rojas si se sabe que la cantidad de bolas rojas es equivalente al promedio de las bolas pintadas de un color distinto de rojo? R/ 0,6855

Demostraciones

1. Sea X una variable aleatoria discreta que sigue una distribución binomial, con parámetros n y p , donde n es el número de experimentos de Bernoulli y p la probabilidad de éxito. Demuestre que:

$$P(X = k + 1) = P(X = k) \cdot \frac{p}{1 - p} \cdot \frac{n - k}{k + 1}$$

2. Si se sabe que X es una variable aleatoria discreta, con distribución geométrica de parámetro p .

- a) Demuestre que la función generadora de momentos está dada por:

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - q \cdot e^t}$$

b) Demuestre que $E(X) = \frac{q}{p}$

c) Demuestre que $Var(X) = \frac{q}{p^2}$

3. Si se sabe que X es una variable aleatoria discreta, con distribución binomial de parámetro p .

- a) Demuestre que la función generadora de momentos está dada por:

$$m_X(t) = (p \cdot e^t + q)^n$$

b) Demuestre que $E(X) = n \cdot p$

c) Demuestre que $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

4. Si se sabe que X es una variable aleatoria discreta, con distribución de Poisson de parámetro λ .

- a) Demuestre que la función generadora de momentos está dada por:

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

b) Demuestre que $E(X) = \lambda$

c) Demuestre que $Var(X) = \lambda$

$$5. \text{ Pruebe que } 3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$