

II EXAMEN PARCIAL
 (Guía de solución)
22 de octubre de 2016

Tiempo: 2 horas y 15 minutos
Valor: 35 puntos

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones. (4 puntos)

$$\begin{cases} 2x + 7y - 3z - 2w = 5 \\ x + 3y - z - w = 2 \\ x + 2y - w = 1. \end{cases}$$

* **Solución:** La matriz aumentada del sistema de ecuaciones es la siguiente.

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & -3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Reduciendo la matriz a su forma escalonada reducida se tiene el siguiente proceso.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & -3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-3F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Luego de esta última matriz se tiene que

$$\begin{cases} x + 2z - w = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

de donde:

$$\begin{cases} x = -1 - 2z + w \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Así, el conjunto solución del sistema se representa por medio del conjunto

$$S = \{ (-1 - 2t_1 + t_2, 1 + t_1, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}.$$

2. Determine el valor de x de manera que satisfaga: (4 puntos)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ x & 5 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 80x.$$

* Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ x & 5 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 196 - 18x.$$

Entonces:

$$196 - 18x = 80x \Leftrightarrow 196 = 98x \Leftrightarrow x = 2.$$

3. Sean A y B matrices de dimensiones 3×3 tales que $\det(A) = 2$ y $\det[(4A)^{-1} B] = \frac{1}{16}$. Determine $\det(B)$. (4 puntos)

* Solución:

$$\begin{aligned} \det[(4A)^{-1} B] = \frac{1}{16} &\Leftrightarrow \det[(4A)^{-1}] \cdot \det(B) = \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\det(4A)} \cdot \det(B) = \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4^3 \det(A)} \cdot \det(B) = \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{64 \cdot 2} \cdot \det(B) = \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \det(B) = 8. \end{aligned}$$

4. Determine los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y verifique que el producto de ellos es igual a su determinante de la matriz. (4 puntos)

* Solución:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -3 & 6 - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(6 - \lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 7.$$

Luego:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

5. Considere las matrices A y X de dimensiones 3×3 y la matriz B de dimensión 2×3 , para las cuales está definida la igualdad

$$XA + B^t B = 2X.$$

- a) Utilice álgebra matricial para despejar X de la ecuación anterior. (3 puntos)

* Solución:

$$\begin{aligned} XA + B^t B = 2X &\Leftrightarrow B^t B = 2X - XA \\ &\Leftrightarrow B^t B = 2XI - XA \\ &\Leftrightarrow B^t B = X(2I - A) \\ &\Leftrightarrow (B^t B) \cdot (2I - A)^{-1} = X. \end{aligned}$$

- b) Determine X de forma explícita, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

* Solución:

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$B^t B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(B^t B) \cdot (2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -10 \\ -22 & 6 & 20 \\ 23 & -6 & -20 \end{pmatrix}.$$

6. Determine el número complejo z que satisface simultáneamente las condiciones siguientes:
(4 puntos)

$$\begin{cases} |z - 1| = 2 \\ \operatorname{Arg}(z - 2 - i) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

* **Solución:** Sea $z = a + bi$. Entonces:

$$|z - 1|^2 \Rightarrow |a + bi - 1| = 2 \Rightarrow |(a - 1) + bi| = 2 \Rightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + b^2} = 2.$$

De esta ecuación se deduce que: $(a - 1)^2 + b^2 = 4$. (*). Por otro lado:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(z - 2 - i) = -\frac{\pi}{2} &\Rightarrow \operatorname{Arg}(a + bi - 2 - i) = -\frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \operatorname{Arg}[(a - 2) + (b - 1)i] = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Entonces se debe cumplir lo siguiente:

$$\operatorname{Re}[(a - 2) + (b - 1)i] = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

$$\operatorname{Im}[(a - 2) + (b - 1)i] < 0 \Rightarrow b - 1 < 0 \Rightarrow b < 1.$$

Sustituyendo en (*) por $a = 2$ se tiene que

$$(a - 1)^2 + b^2 = 4 \Rightarrow 1 + b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}.$$

Como la condición $b < 1$ se tiene que satisfacer, entonces $b = -\sqrt{3}$, por lo tanto el número complejo que satisface simultáneamente las condiciones es

$$z = 2 - i\sqrt{3}.$$

7. Resuelva $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2 = 0$ en el conjunto de los números complejos, considerando que $i - 1$ es una solución.
(4 puntos)

* **Solución:** Aplicando división sintética tomando a $x = i - 1$ como un cero se obtiene:

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2 = (x - (i - 1))(x^3 + (i + 2)x^2 + (i + 2)x + (i + 1)).$$

Ahora considerando que $x = -i - 1$ es un cero del polinomio por ser éste de coeficientes reales, y aplicando división sintética:

$$(x^3 + (i + 2)x^2 + (i + 2)x + (i + 1)) = (x - (-i - 1))(x^2 + x + 1).$$

Entonces las soluciones de dicha ecuación son:

$$x = i - 1, \quad x = -i - 1, \quad x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

8. Exprese $(-1 - i)^i$ en la forma $a + bi$, con a y b números reales.

* Solución:

$$z = (-1 - i)^i = e^{\ln(-1-i)^i} = e^{i \cdot \ln(-1-i)}.$$

Realizando el cálculo de $\ln(-1 - i)$ se tiene que

$$r = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\theta = \operatorname{Arg}(-1 - i) = \arctan(1) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$\ln(-1 - i) = \ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

Luego para calcular z^i :

$$\begin{aligned} (-1 - i)^i &= e^{i \cdot \ln(-1-i)} \\ &= e^{i \cdot [\ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i]} \\ &= e^{i \ln \sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}} \\ &= e^{i \ln \sqrt{2}} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \operatorname{cis}(\ln \sqrt{2}) \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= [\cos(\ln \sqrt{2}) + i \sin(\ln \sqrt{2})] \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= 9.923400227 + 3.583839621i. \end{aligned}$$

Prof. Marco Gutiérrez M.
2016