

Variables aleatorias discretas

Medidas de tendencia central

1. Dada la siguiente tabla:

X	1	3	4	5
$f(X_i)$	0,40	0,10	0,20	0,30

a) Calcule $E(X)$

$$E(x) = 1 \cdot 0,40 + 3 \cdot 0,10 + 4 \cdot 0,20 + 5 \cdot 0,30 = \boxed{3}$$

b) Calcule $Var(X)$

$$E(x^2) = 1^2 \cdot 0,40 + 3^2 \cdot 0,10 + 4^2 \cdot 0,20 + 5^2 \cdot 0,30 = 12$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$12 - 3^2$$

$$\boxed{3}$$

c) Calcule σ_x

$$\sqrt{3}$$

2. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad f_X está dada por la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{4}{17}$

a) Calcule $E(X)$

$$E(x) = 0 \cdot \frac{7}{17} + 1 \cdot \frac{1}{17} + 2 \cdot \frac{2}{17} + 3 \cdot \frac{3}{17} + 4 \cdot \frac{4}{17} = \boxed{\frac{30}{17}}$$

b) Calcule $Var(X)$

$$E(x^2) = 0^2 \cdot \frac{7}{17} + 1^2 \cdot \frac{1}{17} + 2^2 \cdot \frac{2}{17} + 3^2 \cdot \frac{3}{17} + 4^2 \cdot \frac{4}{17} = \frac{200}{17}$$

$$\frac{200}{17} - \left(\frac{30}{17}\right)^2 = \boxed{\frac{800}{289}}$$

c) Calcule σ_x

$$\sqrt{\frac{800}{289}} = \boxed{\frac{20\sqrt{2}}{17}}$$

3. Sea X una variable aleatoria discreta, para la cual se sabe que su rango es $\{1, 2, 3, 4\}$ y se tiene que $f_X(1) = 0,13$, $f_X(2) = 0,0169$, $f_X(3) = 0,002197$ y se desconoce el valor de $f_X(4)$

a) Determine el valor de $f_X(4)$

$$0,13 + 0,0169 + 0,002197 + f_X(4) = 1$$

$$0,149097 + f_X(4) = 1$$

$$f_X(4) = 0,850903$$

b) Calcule $E(X)$

$$1 \cdot 0,13 + 2 \cdot 0,0169 + 3 \cdot 0,002197 + 4 \cdot 0,850903$$

$$3,579003$$

c) Calcule $Var(X)$

$$1 \cdot 0,13 + 2^2 \cdot 0,0169 + 3^2 \cdot 0,002197 + 4^2 \cdot 0,850903$$

$$1,0583$$

d) Calcule σ_X

$$\sqrt{1,0583} = 1,02873709$$

4. Dada la siguiente tabla:

X	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	k	0,20

a) Determine el valor de k .

$$0,10 + 0,15 + 0,25 + k + 0,20 = 1$$

$$k = 0,30$$

b) Encuentre la función acumulada de X .

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,10 & 1 \leq x < 2 \\ 0,15 + 0,10 & 2 \leq x < 3 \\ 0,25 + 0,15 + 0,10 & 3 \leq x < 4 \\ 0,30 + 0,25 + 0,15 + 0,10 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

c) Calcule $E(X)$

$$1 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,30 + 5 \cdot 0,20 = \boxed{\frac{67}{20}}$$

d) Calcule $Var(X)$

$$1^2 \cdot 0,10 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,25 + 4^2 \cdot 0,30 + 5^2 \cdot 0,20 = \frac{51}{4}$$

$$\frac{51}{4} - \left(\frac{67}{20} \right)^2 = \boxed{\frac{611}{400}}$$

e) Calcule σ_X

$$\sqrt{\frac{611}{400}} = \boxed{\frac{\sqrt{611}}{20}}$$

5. La tienda Zapatiño se ha percatado que en su sucursal más nueva reciben máximo 8 clientes por hora. Si X es una variable aleatoria discreta, correspondiente a la cantidad de clientes en la tienda, por hora, entonces considere la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(X)$	0,05	0,10	0,10	0,10	0,20	0,25	0,10	0,05	0,05

a) Demuestre que f es una distribución de probabilidad para X .

$$0,05 + 0,10 + 0,10 + 0,10 + 0,20 + 0,25 + 0,10 + 0,05 + 0,05 \\ = 1 \quad \checkmark$$

b) Calcule $E(X)$

R/ 4

c) Calcule $Var(X)$

R/ $\frac{41}{10}$

6. Determine la varianza de la variable $Y = \frac{X}{4} - 7$ si $E(Y) = -6$ y $E(X^2) = 17$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{4}E(x) - 7 & \text{Var}(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ -6 &= \frac{1}{4}E(x) - 7 & \text{Var}(x) &= 17 - 4^2 \\ \frac{1}{4}E(x) &= 1 & \text{Var}(x) &= 1 \\ E(x) &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \frac{1}{16}\text{Var}(x) - 0 \\ \frac{1}{16} \cdot 1 & \\ \boxed{\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

7. Determine la varianza de $Y = \frac{X}{18} - 2$ si $E(Y) = 23$ y $E(X^2) = 250\,000$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{18}E(x) & \text{Var}(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ 23 &= \frac{1}{18}E(x) - 2 & \text{Var}(x) &= 250\,000 - [750]^2 \\ \frac{1}{18}E(x) &= 25 & \text{Var}(x) &= 475\,000 \\ E(x) &= 450 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \frac{1}{324} \cdot \text{Var}(x) \\ \frac{1}{324} \cdot 475\,000 & \\ \boxed{11875} \\ \boxed{83} \end{aligned}$$

8. Sean X, Y dos variables aleatorias discretas tales que $\text{Var}(3X + 7) = 10$, $E(4X + 2) = 9$.

Calcule $E(X^2)$

$$\begin{aligned} \text{Var}(3X + 7) &= 10 & E(4X + 2) &= 9 \\ 9\text{Var}(x) &= 10 & 4E(x) + 2 &= 9 \\ \text{Var}(x) &= \frac{10}{9} & E(x) &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \text{Var}(x) + [E(x)]^2$$

$$\frac{10}{9} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{601}{144}}$$

9. Considere la variable aleatoria X con las condiciones $Y = 3X + 5$, $E(Y) = 14$, $E(Y^2) = 250$.

a) Determine $E(X)$

$$E(Y) = E(3X + 5)$$

$$14 = 3E(X) + 5$$

$$3E(X) = 9$$

$$\boxed{E(X) = 3}$$

b) Determine $\text{Var}(X)$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(3X + 5)$$

$$\text{Var}(Y) = 9\text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{9} \text{Var}(Y)$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ 250 &\rightarrow (14)^2 \\ 59\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{9} \text{Var}(Y)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 59$$

$$= \boxed{6}$$

c) Determine σ_X

$$\boxed{\sqrt{6}}$$

10. Considere la variable aleatoria Z tal que $E(Z) = 2$ y $Var(Z) = 6$. Determine $E(W)$,
donde $W = 3Z^2 - 2Z + 5$

$$\boxed{R/ E(W) = 31}$$

$$E(W) = E(3Z^2 - 2Z + 5)$$

$$E(W) = 3E(Z^2) - 2E(Z) + 5$$

$$E(W) = 3E(Z^2) - 2 \cdot 2 + 5$$

$$E(W) = 3E(Z^2) + 1$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$E(Z^2) = Var(Z) + [E(Z)]^2$$

$$6 + 2^2$$

$$= 10$$

$$E(W) = 3E(Z^2) + 1$$

$$3 \cdot 10 + 1$$

$$\boxed{31}$$

Función de distribución

1. Sea X una variable aleatoria discreta. Pruebe que $f_X(x) = \frac{2}{3^{x+1}}$ es función de distribución, con $x = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{2}{3^{x+1}}$$

$$\frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^0}{1 - \frac{1}{3}} \right) = 1 \quad \checkmark$$

2. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que su función de distribución sea $f_X(x) = \frac{k}{7^x}$, con $x = 0, 1, 2, \dots$

$$R/ k = \frac{6}{7}$$

$$k \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$$

$$k \cdot \frac{7}{6} = 1$$

$$k = \frac{6}{7}$$

3. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que su función de distribución sea

$$R/k = \frac{35}{6}$$

$$f_X(x) = \frac{k}{6^{2x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{k}{6} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{36}\right)^x = 1$$

$$\frac{k}{6} \cdot \frac{36}{35} = 1$$

$$k = \frac{35}{6}$$

4. Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

Determine el valor de k

$$R/k = 18$$

$$k \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$$

$$\frac{k}{27} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$k = 27$$

$$k = 27$$

5. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que su función de distribución sea

$$\text{R/ } k = 5$$

$$f_X(x) = \frac{k^x \cdot e^{-5x}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$e^{-5} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^x}{x!} = 1$$

$$e^{-5} \cdot e^k = 1$$

$$e^{-5+k} = 1$$

$$\ln(e^{-5+k}) = \ln(1)$$

$$-5 + k = 0$$

$$\boxed{k = 5}$$

6. Sea X una variable aleatoria discreta con función generadora de momentos $m_X(t) = \frac{e^{kt}}{2 - e^t}$
y $E(X) = 3$. Determine el valor de k .

$$\text{R/ } k = 11$$

$$E(X) = m'_X(0)$$

$$m'_X(t) = \frac{e^{kt}}{2 - e^t}$$

$$\frac{e^{kt} \cdot k \cdot (2 - e^t) - e^{kt} \cdot (-e^t)}{(2 - e^t)^2} = 1$$

$$m'_X(0) = k + 1$$

$$E(X) = k + 1$$

$$3 = k + 1$$

$$\boxed{k = 2}$$

7. Una variable aleatoria X toma valores $1, 2, 3, \dots, 25$ con probabilidades

$$f_X(i) = k \cdot (0,16)^{\frac{i}{2}}$$

a) Encuentre el valor de k .

$$k \sum_{i=1}^{25} (0,16)^{\frac{i}{2}} = 1$$

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{25} (0,16)^{\frac{i}{2}}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

b) Determine la probabilidad de que esta variable sea superior a 5.

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5)$$

$$1 - \sum_{i=1}^5 (0,16)^{\frac{i}{2}}$$

$$\boxed{0,868032}$$

8. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - k & \text{si } x = -1 \\ \frac{1}{6} + k^2 & \text{si } x = 0 \\ 2k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

con $R_X = \{-1, 0, 1\}$

a) Encuentre el valor de k .

$$\frac{1}{2} - k + \frac{1}{6} + k^2 + 2k = 1$$

$$k^2 + k + \frac{1}{3} = 1$$

$$k^2 + k - \frac{2}{3} = 0$$

$$k = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$k = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

✓

✗

9. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

Determine el valor de k para que f_X sea función de probabilidad.

$$\left[k \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} \right] = 1$$

$$\frac{k}{2} + \frac{e^2}{2} = 1$$

$$k + e^2 = 2$$

$$k = 2 - e^2$$

10. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

Determine el valor de k para que f_X sea función de probabilidad.

$$\text{R/ } k = \frac{1}{e^2}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + k \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{e^2 k}{2} = 1$$

$$1 + e^2 k = 2$$

$$e^2 k = 1$$

$$k = \frac{1}{e^2}$$

11. Sea X una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{2, 4, 6, 8\}$ y función de distribución acumulada

$$\begin{cases} 0 & \text{si } k < 2 \\ 0,2 & \text{si } 2 \leq k < 4 \\ 0,6 & \text{si } 4 \leq k < 6 \\ 0,8 & \text{si } 6 \leq k < 8 \\ 1 & \text{si } k \geq 8 \end{cases}$$

a) Determine la función de distribución de probabilidad de X .

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

1. $x = 2$

$$f_X(2) = F_X(2) - F_X(k < 2) = 0.2 - 0 = 0.2$$

2. $x = 4$

$$f_X(4) = F_X(4) - F_X(k < 4) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

3. $x = 6$

$$f_X(6) = F_X(6) - F_X(k < 6) = 0.8 - 0.6 = 0.2$$

4. $x = 8$

$$f_X(8) = F_X(8) - F_X(k < 8) = 1.0 - 0.8 = 0.2$$

15. Sea Y una variable aleatoria discreta cuya función generadora de momentos tiene criterio:

$$m_Y(t) = \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine la esperanza y la varianza de Y

$$\text{R/ } E(Y) = \frac{11}{10} \text{ y } Var(Y) = \frac{69}{100}$$

$$E(Y) = 0 + \frac{3e^t}{10} + \frac{7e^{2t}}{5}$$

$$m'_Y(0) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$Var(Y) = m''_Y(0) - m'_Y(0)$$

$$m''_Y(t) = \frac{3e^t}{10} + \frac{14e^{2t}}{5}$$

$$m''_Y(0) = \frac{3e^0}{10} + \frac{14e^0}{5}$$

$$m''_Y(0) = \frac{19}{10}$$

$$Var(Y) = m''_Y(0) - m'_Y(0)$$

$$\frac{19}{10} - \left(\frac{11}{10} \right)^2$$

$$= \boxed{\frac{69}{100}}$$

17. Sean X y Y variables aleatorias tales que $m_X(t) = \frac{5}{(5-t)^2}$ y $Y = X^2 + 3X - 9$

a) Determine la esperanza de la variable X

$$m'_X(t) = \frac{5}{(5-t)^2}$$

$$= \frac{0 - 5 \cdot 2(5-t) \cdot (0-1)}{(5-t)^3}$$

$$= \frac{10(5-t)}{(5-t)^3}$$

$$= \frac{10}{(5-t)^2}$$

$$m'_X(0) = \boxed{\frac{2}{25}} \leftarrow E(x)$$

b) Determine la esperanza de la variable Y

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X^2 + 3X - 9) \\ &= E(X^2) + 3E(X) - 9 \end{aligned}$$

$$m''_X(t) = \frac{10}{(5-t)^3} \quad \frac{0 - 10 \cdot 3(5-t)^2 \cdot (0-1)}{(5-t)^6} =$$

$$E(X^2) + 3E(X) - 9$$

$$\frac{6}{125} + 3 \cdot \frac{2}{25} - 9$$

$$m''_Y(0) = \frac{6}{125}$$

-1089
125

$$\overrightarrow{E(X^2)}$$

18. Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = \frac{3}{4^{x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

a) Compruebe que $f_X(x)$ satisface las condiciones necesarias para ser una función de probabilidad.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 1$$

$$\cancel{\frac{3}{4}} \cdot \cancel{\frac{4}{3}} = 1 \quad \boxed{1=1} \quad \checkmark$$

b) Determine la función generadora de momentos de X

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^x \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$\frac{3}{4} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^x$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{\left(\frac{e}{4}\right)^0}{1 - \frac{e}{4}}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\frac{9-e}{4}}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9-e}$$

$$\boxed{\frac{3}{9-e}}$$