Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	12
Fecha	Lunes 14 de octubre del 2024 (semana 13)
Contenidos	a) Operaciones con vectores
	b) Norma vectorial
	c) Combinación lineal (dependencia e independencia lineal)
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Un vector se puede definir como una cantidad con magnitud y dirección, también, se puede definir como un desplazamiento entre dos puntos. Del mismo modo, los vectores se pueden definir como un vector dirigido, es decir, un segmento de recta que va desde un punto inicial hasta un punto terminal.

Los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$, $\mathbb{R}^n$ se pueden ver como conjuntos de puntos tanto como conjuntos de vectores. Recuerde que:

- $\mathbb{R}^2 = \{(v_1, v_2)$ tal que $v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^3 = \{(v_1, v_2, v_3)$ tal que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}\}$

Los puntos se denotan con letras mayúsculas, mientras que los vectores se denotan como $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, o también como u, v, w. Los números reales serán llamados escalares y se denotarán con letras minúsculas o letras griegas, tales como k, β, entre otras.

Gráficamente, un vector y un punto pueden representarse de la forma:

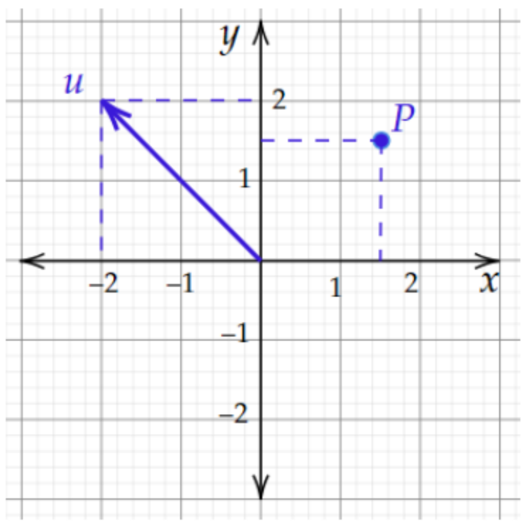

Figura 1 Punto y vector en 2D

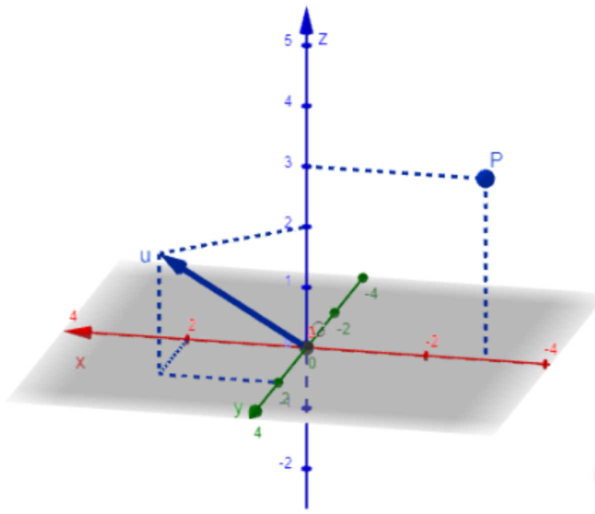

Figura 2 Punto y vector en 3D

Operaciones entre vectores

Entre las operaciones con vectores existentes destacan las siguientes:

Igualdad de vectores:

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, entonces $v = w$ si y solo si

$$v_1 = w_1,\ v_2 = w_2,\ \ldots,\ v_n = w_n$$

Adición de vectores:

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, entonces

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$$

Sustracción de vectores

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, entonces

$$v - w = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_n - w_n)$$

Vector desplazamiento:

Dados dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, el vector de desplazamiento de P a Q es

$$PQ = OQ - OP = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$

Multiplicación por un escalar:

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$k \cdot v = (k \cdot v_1, k \cdot v_2, \ldots, k \cdot v_n)$$

Producto punto o producto escalar

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, entonces

$$v \cdot w = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n \in \mathbb{R}$$

Sean los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $u \cdot u > 0$ si $v \neq 0$
2. $u \cdot v = v \cdot u$
3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
4. $(\alpha v) \cdot w = \alpha(v \cdot w)$
5. $0 \cdot v = 0$
6. $v \cdot v = ||v||^2$

Norma euclideana

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, entonces la norma de este vector se denota $||v||$ y se define de la siguiente manera:

$$||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \ldots + {v_n}^2}$$

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $||v|| \geq 0$ y $||v|| = 0$ si y solo si $v = 0$
2. $||\alpha v|| = |\alpha| \, ||v||$
3. **Desigualdad triangular:** $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$
4. **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** $|v \cdot w| \leq ||v|| \, ||w||$

Ejercicio:

Efectúe las operaciones indicadas usando $a = (-1,4,6)$, $b = (5,2,-1)$ y $c = (-1,3,6)$.

a) $2a-3c$ c) $-4a+3b+5c$ e) $b\cdot c$

b) $a+b-2c$ d) $a\cdot b$ f) $(a-b)\cdot(2c-3b)$

ⓐ $2a-3c$

ⓑ $a+b-2c$

ⓒ $-4a+3b+5c$

$-4(-1,4,6)+3(5,2,-1)+5(-1,3,6) = (4,-16,-24)+(15,6,-3)+(-5,15,30)$
$= (14,5,3)$

ⓕ $(a-b)\cdot(2c-3b)$

$[(-1,4,6)-(5,2,-1)]\cdot[2(-1,3,6)-3(5,2,-1)]$

$= (-6,2,7)\cdot[(-2,6,12)-(15,6,-3)]$

$= (-6,2,7)\cdot(-17,0,15)$

$= -6\cdot -17 + 2\cdot 0 + 7\cdot 15$

$= 207$

Combinación lineal

Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como una combinación lineal de los tres vectores canónicos de la siguiente manera: $(a,b,c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$.

Ejercicio #1: Considere los vectores u, v y w en $\mathbb{R}^4$ definidos por $u = (2,-1,3,0)$, $v = (4,-8,-6,3)$ y $w = (0,2,4,-1)$. Determine si los vectores u, v y w son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Note que $\alpha u + \beta v + \theta w = \vec{0} \Rightarrow \alpha(2,-1,3,0) + \beta(4,-8,-6,3) + \theta(0,2,4,-1) = (0,0,0,0)$

Representación matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -8 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}\tilde{F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1F_1 + \tilde{F_2} \\ \sim \\ -3F_1 + \tilde{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$-\tfrac{1}{6}\tilde{F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & -12 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2F_2 + \tilde{F_1} \\ 12F_2 + \tilde{F_3} \\ \sim \\ -3F_2 + \tilde{F_4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \theta & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Así, se tiene que $\begin{cases} \alpha + \frac{2}{3}\theta = 0 \\ \beta - \frac{1}{3}\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{3}\theta \\ \beta = \frac{1}{3}\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Los vectores u, v, w son linealmente dependientes.

Ejercicio #2: Determine el o los valores de k, con $k \in \mathbb{R}$, de modo que los vectores $u = (0, k-5, -3)$, $v = (3, -1, 1)$ y $w = (k, 3, 1)$ son linealmente independientes.

Note que $\alpha u + \beta v + \theta w = \vec{0} \Rightarrow \alpha(0, K-5, -3) + \beta(3,-1,1) + \theta(K,3,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 0\alpha + 3\beta + K\theta = 0 & (1) \\ (K-5)\alpha + -\beta + 3\theta = 0 & (2) \\ -3\alpha + \beta + \theta = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) se tiene que $3\beta + K\theta = 0 \Rightarrow 3\beta = -K\theta \Rightarrow \beta = \dfrac{-K\theta}{3}$ (4)

Sustituyendo (4) en (2) y (3), se tiene que:

$$\begin{cases} (K-5)\alpha - \left(\dfrac{-K\theta}{3}\right) + 3\theta = 0 \\ -3\alpha + \left(\dfrac{-K\theta}{3}\right) + \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (K-5)\alpha + \dfrac{K\theta}{3} + 3\theta = 0 \\ -3\alpha - \dfrac{K\theta}{3} + \theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (K-5)\alpha + \dfrac{K\theta + 9\theta}{3} = 0 \\ -3\alpha + \dfrac{-K\theta + 3\theta}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (K-5)\alpha + \dfrac{(K+9)}{3}\theta = 0 & (5) \\ -3\alpha + \dfrac{(3-K)}{3}\theta = 0 & (6) \end{cases}$$

De (6) se tiene que:

$$-3\alpha + \frac{(3-K)}{3}\theta = 0 \Rightarrow \frac{(3-K)\theta}{3} = 3\alpha \Rightarrow \frac{(3-K)}{9}\theta = \alpha \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (5), se tiene que:

$$(K-5)\frac{(3-K)}{9}\theta + \frac{(K+9)}{3}\theta = 0 \Rightarrow \left[(K-5)\cdot\frac{(3-K)}{9} + \frac{(K+9)}{3}\right]\theta = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(K-5)\cdot(3-K)}{9} + \frac{(K+9)}{3}\right] = 0 \lor \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(K-5)(3-K)\cdot 3 + (K+9)\cdot 9}{27} = 0$$

$$\Rightarrow (3K - K^2 - 15 + 5K)\cdot 3 + 9K + 81 = 0$$

$$\Rightarrow 9K - 3K^2 - 45 + 15K + 9K + 81 = 0$$

$$\Rightarrow -3K^2 + 33K + 36 = 0$$

$$\Rightarrow K = 12 \quad \lor \quad K = -1$$

$\therefore$ Los valores de K son $K = -1$ y $K = 12$.

Ejercicio #3: Sean $u=(1,3,2)$, $v=(-1,4,-2)$ y $w=(2,-1,5)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Exprese el vector $z=(4,5,7)$ como combinación lineal de u, v y w.

Note que $\alpha u+\beta v+\theta w = z \Rightarrow \alpha(1,3,2)+\beta(-1,4,-2)+\theta(2,-1,5)=(4,5,7)$

Representación matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{array}\right) \underset{-2F_1+F_3}{\overset{-3F_1+\tilde{F_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{7}\tilde{F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_2+\tilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3+\tilde{F_2}}{\overset{-F_3+\tilde{F_1}}{\sim}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \theta \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -2 \\ \theta = -1 \end{cases}$$

Así $\alpha = 4$, $\beta = -2$ y $\theta = -1$

$\therefore\ 4(1,3,2)+-2(-1,4,-2)+-1(2,-1,5)=(4,5,7)$

Ejercicio #4: Sea $A = \{(1,3,-4),(7,-12,23),(3,-2,5)\}$

a) Demuestre que el conjunto de vectores A es linealmente dependiente.

Note que $\alpha(1,3,-4) + \beta(7,-12,23) + \theta(3,-2,5) = (0,0,0)$

Representación matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & -12 & -2 \\ -4 & 23 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & -12 & -2 & 0 \\ -4 & 23 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$\alpha = -\frac{2}{3}\theta$ y $\beta = -\frac{1}{3}\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$

Se demuestra que los vectores de A son linealmente dependientes.

b) Exprese el primer vector como función de los otros dos. R/ $A = \frac{-1}{2}B + \frac{3}{2}C$

Note que $\alpha(7,-12,23) + \beta(3,-2,5) = (1,3,-4)$

Representación matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -12 & -2 \\ 23 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 1 \\ -12 & -2 & 3 \\ 23 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

$\alpha = \frac{-1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$

Ejercicios adicionales

Ejercicio #1: Considere los vectores $(1,1,0,a)$, $(3,-1,b,-1)$ y $(-3,5,a,-4)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Determine a y b de forma que estos vectores sean linealmente dependientes. R/ $a=-2$ y $b=1$

Ejercicio #2: En $\mathbb{R}^3$ se define B, con $B=\{(1,2,-1),(1,0,7)\}$.

a) Verifique que B es linealmente independiente.

b) Si $v=(\alpha,3,7)$. Determine α para que v sea linealmente dependiente o linealmente independiente con B. R/ $\alpha=\dfrac{19}{7}$

Ejercicio #3: Escriba el vector $m=(34,-26)$ como combinación lineal de los vectores $n=(1,5)$ y $p=(4,-8)$. R/ $\alpha=6$, $\beta=7$

Ejercicio #4: Determine el valor de a y b para que el vector $w=(1,4,a,b)$ sea combinación lineal de los vectores $u=(1,2,-1,2)$ y $v=(0,1,2,1)$ R/ $a=3$, $b=4$