Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 Horas, 15 minutos
Puntaje Total: 32 Puntos

Probabilidades
Primer Examen Parcial
(Soluciones)
I-2022

1. [**3 puntos**] Una bolsa contiene cierta cantidad de bolitas de las cuales 78 son rojas, 24 azules y el resto verdes. Si al extraer una bolita al azar la probabilidad de que sea verde es de 1/3, determine la probabilidad de sacar, en una extracción al azar, una bolita roja.

   Solución.

   Considere que n es la cantidad de bolitas de color verde. Esto quiere decir que en la bolsa hay en total $78 + 24 + n$ bolitas.

   Tomando el experimento: sacar una bolita al azar. Si R representa sacar una bolita roja, A representa sacar una bolita azul y V representa sacar una bolita verde, se sabe que:

   - $\Omega = \{R, A, V\}$, con $|\Omega| = 78 + 24 + n$.
   - $P\left[X = V\right] = \dfrac{n}{|\Omega|} = \dfrac{1}{3}$.
   - $\dfrac{n}{|\Omega|} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow n = 51$.
   - $P\left[X = R\right] = \dfrac{78}{|\Omega|} = \dfrac{78}{153}$.

   Con esto, se concluye que la probabilidad de sacar una bolita roja es de:

   $$\frac{26}{51} \approx 0.509803\ .$$

2. **[3 puntos]** Se tienen varios discos idénticos, salvo por su etiqueta. Hay un disco etiquetado con 1, 2 discos etiquetados con 2, tres discos etiquetados con 3, y así hasta completar 50 etiquetados con un 50. Se extraen dos discos al azar sin reemplazo. Determine la probabilidad del evento conjunto: la suma de los números de las etiquetas de ambos discos sea menor o igual que 51 y la etiqueta de uno de ellos sea mayor que 48.

Solución.

En este ejercicio se considera el experimento: extraer dos discos al azar, sin reemplazo.

Se utilizará la siguiente representación:

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, \ldots, 50\}\} \ ,$$

donde cada entrada del par ordenado de Ω representa en número de la etiqueta del disco.

Vale la pena rescatar que la probabilidad de extraer (x, y) no se puede calcular por medio de Laplace con dicho Universo. Más bien se resuelve de la siguiente manera:

$$P\left[X = (x, y)\right] = \frac{x}{1275} \cdot \frac{y}{1274} \ , \text{ si } x \neq y \ .$$

Así, para que ambas condiciones se cumplan simultáneamente, se resolverá el ejercicio por casos. Esto pues las únicas posibles combinaciones son $(49, 1)$, $(49, 2)$ y $(50, 1)$ (junto con sus respectivas permutaciones).

a) **Caso I**: Obtener $(49, 1)$ o $(1, 49)$: $2 \cdot \dfrac{49 \cdot 1}{1275 \cdot 1274}$.

b) **Caso II**: Obtener $(49, 2)$ o $(2, 49)$: $2 \cdot \dfrac{49 \cdot 2}{1275 \cdot 1274}$.

c) **Caso III**: Obtener $(50, 1)$ o $(1, 50)$: $2 \cdot \dfrac{50 \cdot 1}{1275 \cdot 1274}$.

Finalmente, dicha probabilidad es:

$$2\left(\frac{49}{1275 \cdot 1274} + \frac{98}{1275 \cdot 1274} + \frac{50}{1275 \cdot 1274}\right) = \frac{197}{812175} \approx 0.000242 \ .$$

3. [**4 puntos**] Un grupo debe formarse por 4 personas. Hay 5 abogados, 3 economistas y 2 periodistas. En dicho grupo debe haber al menos una persona de cada profesión. ¿Cuál es el total de formas en que puede formarse el grupo?

Solución.

Considere:

a) $\Omega = \{\text{Grupos que pueden formarse con 4 personas}\}$, con $|\Omega| = \binom{10}{4}$.

b) $A = \{x \in \Omega : x \text{ es una manera donde se selecciona al menos un abogado}\}$.

c) $E = \{x \in \Omega : x \text{ es una manera donde se selecciona al menos un economista}\}$.

d) $P = \{x \in \Omega : x \text{ es una manera donde se selecciona al menos un periodista}\}$.

Note que el ejercicio solicita $|A \cap E \cap P|$.

Se resolverá por complemente: $|A \cap E \cap P| = |\Omega| - \left|\overline{A \cap E \cap P}\right|$, pues es más fácil calcular $\left|\overline{A \cap E \cap P}\right|$.

Como $\left|\overline{A \cap E \cap P}\right| = \left|\overline{A} \cup \overline{E} \cup \overline{P}\right|$, se utiliza el principio de inclusión y exclusión.

- $|\overline{A}| = \binom{5}{4} = 5$.
- $|\overline{E}| = \binom{7}{4} = 35$.
- $|\overline{P}| = \binom{8}{4} = 70$.
- $\left|\overline{A} \cap \overline{E}\right| = 0$.
- $\left|\overline{E} \cap \overline{P}\right| = \binom{5}{4} = 5$.
- $\left|\overline{P} \cap \overline{A}\right| = 0$.
- $\left|\overline{A} \cap \overline{E} \cap \overline{P}\right| = 0$.

Por lo tanto, hay 105 maneras de formar el grupo con la condición dada.

4. [**5 puntos**] Se van a distribuir 10 bolitas rojas distintas y 15 negras idénticas en 4 urnas. Cada urna debe contener al menos una bolita roja y la cuarta urna ha de tener al menos 6 bolitas negras. ¿Cuál es el total de formas en que se puede hacer la repartición?

Solución.

Este ejercicio se debe hacer por etapas.

Etapa I: repartir bolitas rojas

Para repartir al menos una bolita por urna, se utiliza el principio de inclusión y exclusión. Tomando:

a) $\Omega = \{\text{Repartir las bolitas rojas en las 4 urnas}\}$, con $|\Omega| = 4^{10}$.

b) $A = \{x \in \Omega : \text{en } x \text{ hay al menos una bolita roja en la primera urna}\}$.

c) $B = \{x \in \Omega : \text{en } x \text{ hay al menos una bolita roja en la segunda urna}\}$.

d) $C = \{x \in \Omega : \text{en } x \text{ hay al menos una bolita roja en la tercera urna}\}$.

e) $D = \{x \in \Omega : \text{en } x \text{ hay al menos una bolita roja en la cuarta urna}\}$.

Se solicita $|A \cap B \cap C \cap D| = |\Omega| - \left|\overline{A \cap B \cap C \cap D}\right| = |\Omega| - \left|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}\right|$.

Note que:

- $\left|\overline{A}\right| = \left|\overline{B}\right| = \left|\overline{C}\right| = \left|\overline{D}\right| = 3^{10}$.
- $\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = \left|\overline{A} \cap \overline{C}\right| = \left|\overline{A} \cap \overline{D}\right| = \left|\overline{B} \cap \overline{C}\right| = \left|\overline{B} \cap \overline{D}\right| = \left|\overline{C} \cap \overline{D}\right| = 2^{10}$.
- $\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = \left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{D}\right| = \left|\overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{D}\right| = \left|\overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}\right| = 1^{10}$.
- $\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}\right| = 0$

Así, hay $4^{10} - (4 \cdot 3^{10} - 6 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 1^{10} + 0) = 818\ 520$ maneras de repartir las bolitas rojas.

Etapa II: repartir bolitas negras

Para repartir 6 bolitas en la urna solo hay una opción. Por lo tanto, el ejercicio se reduce a repartir las 9 bolitas negras restantes entre las 4 urnas: $\binom{9+4-1}{9} = \binom{9+4-1}{4-1} = 220$.

Finalmente, para hacer la repartición solicitada hay:

$818\ 520 \cdot 220 = 180\ 074\ 400$ maneras.

5. **[4 puntos]** Suponga que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ y $P(\overline{A \cup B}) = 0.42$. Analice la independencia de los eventos A y B.

Solución.

Este ejercicio se puede resolver tanto por definición como por teorema.

Por definición

Recuerde que si A y B son eventos independientes debe ocurrir:

$$P[A \mid B] = P[A] \ \wedge \ P[B \mid A] = P[B] \ .$$

Con esto, se procede a comprobar las anteriores ecuaciones. En caso contrario, se dice que los eventos son dependientes.

- $$\begin{aligned} & P[A \mid B] \\ &= \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \\ &= \frac{P[A] + P[B] - P[A \cup B]}{P[B]} \\ &= \frac{0.4 + 0.3 - 0.58}{0.3} \\ &= 0.4 \\ &= P[A] \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} & P[B \mid A] \\ &= \frac{P[B \cap A]}{P[A]} \\ &= \frac{P[B] + P[A] - P[B \cup A]}{P[A]} \\ &= \frac{0.3 + 0.4 - 0.58}{0.4} \\ &= 0.3 \\ &= P[B] \end{aligned}$$

Por lo tanto, los eventos A y B son independientes.

Por teorema

Recuerde que, según el teorema de la regla del producto:

$$A \text{ y } B \text{ son independientes } \ \Leftrightarrow P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] \ .$$

Como $P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0.4 + 0.3 - 0.58 = 0.12$ y además $P[A] \cdot P[B] = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$, entonces los eventos A y B son independientes.

6. [**4 puntos**] En un test de selección única, donde cada pregunta posee 4 opciones de respuesta, un estudiante se ha preparado lo suficiente como para responder correctamente el 50 % de los ítems, en el 25 %, él puede eliminar una de las 4 opciones incorrectas y responder al azar de las restantes opciones; y en el 25 % restante responde la azar. Determine la probabilidad de que en un test de 3 ítems obtenga al menos 2 correctos.

   Solución.

   Este ejercicio se iniciará con el cálculo de la probabilidad de obtener una respuesta correcta.

   Recuerde que para cada pregunta pueden ocurrir tres cosas: que la acierte, que elimine una opción incorrecta y de las tres restantes responda al azar, o simplemente responda al azar de las 4 opciones.

   Así, del experimento: se selecciona una pregunta del examen al azar, los eventos:

   - $A_1 = \{x \in \Omega : x \text{ se responde correctamente}\}$.
   - $A_2 = \{x \in \Omega : \text{en } x \text{ se elimina una opción incorrecta}\}$.
   - $A_3 = \{x \in \Omega : x \text{ se responde al azar}\}$.

   forman una partición de Ω. Por lo tanto, utilizando probabilidad total, si C es el evento: responder una pregunta al azar correctamente, entonces:

$$P[C] = \sum_{i=1}^{3} P[A_i] \cdot P[C \mid A_i]$$

$$\Rightarrow P[C] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{31}{48}$$

   Una vez que se tiene la probabilidad de responder correctamente una pregunta al azar, se analiza por casos.

   a) **Caso I**: Responder correctamente 2 preguntas: $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{31}{48}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{48}\right)$.

   b) **Caso II**: Responder correctamente 3 preguntas: $\left(\frac{31}{48}\right)^3$.

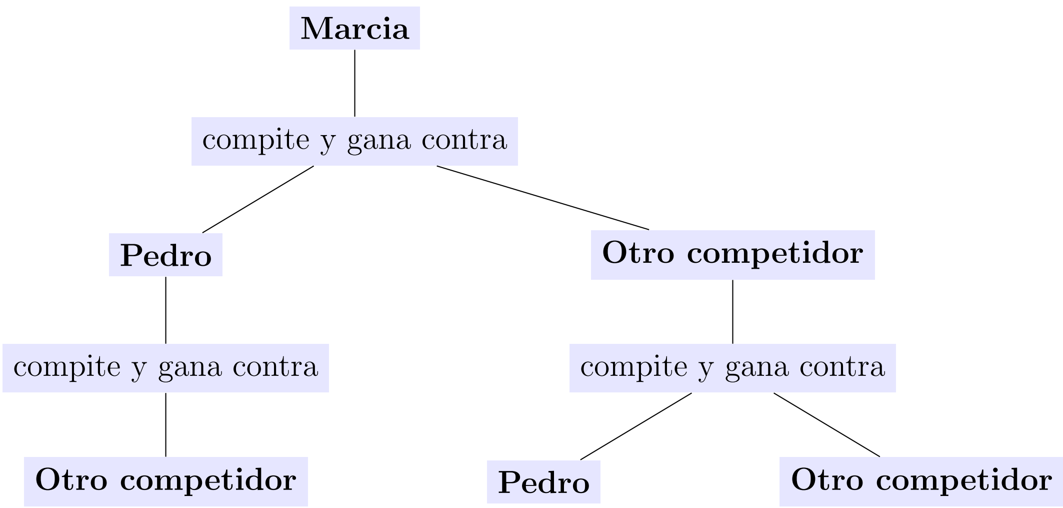
   Con esto, la probabilidad de que en un test de 3 ítems obtenga al menos 2 correctos es de:

$$\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{31}{48}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{48}\right) + \left(\frac{31}{48}\right)^3 \approx 0.712547 .$$

7. [**4 puntos**] Marcia participa junto con 7 personas más en un torneo por rondas, tres en total. Cada ronda consta de enfrentamientos entre parejas formadas al azar, y en cada pareja solo una persona continua. Marcia sabe que sus probabilidades de ganar en cada ronda son del 60 % con 6 de los competidores, pero solo del 30 % con Pedro: un competidor muy fuerte que gana con seguridad a los otros 6 competidores. ¿Qué probabilidades tiene Marcia de ser finalista en el torneo?

Solución.

Para este ejercicio es necesario hacer casos, teniendo en cuenta que para que Marcia quede de finalista debe ganar dos rondas seguidas. Para tener una idea más clara, considere el siguiente diagrama.



Caso I: Marcia contra Pedro en la primera ronda.

En este caso se debe enfrentar Marcia contra Pedro. Luego, en la siguiente ronda se enfrenta contra otro adversario al azar.

Etapa I: probabilidad de escoger a Pedro: $\frac{1}{7}$.

Etapa II: probabilidad de ganar a Pedro: 0.3.

Etapa III: probabilidad del contrincante para la segunda ronda: $\frac{3}{3}$.

Etapa IV: probabilidad de ganarle al contrincante: 0.6.

En este caso, hay una probabilidad de $\frac{9}{350}$ de que Marcia quede de finalista.

Caso II: Marcia contra Pedro en la segunda ronda.

Etapa I: probabilidad del contrincante para la primera ronda: $\frac{6}{7}$.

Etapa II: probabilidad de ganar al contrincante: 0.6.

Etapa III: probabilidad de Pedro para la segunda ronda: $\frac{1}{3}$.

Etapa IV: probabilidad de ganarle al contrincante: 0.3.

En este caso, hay una probabilidad de $\dfrac{9}{175}$ de que Marcia quede de finalista.

Caso III: Marcia no se enfrenta a Pedro en las dos rondas.

Etapa I: probabilidad del contrincante para la primera ronda: $\frac{6}{7}$.

Etapa II: probabilidad de ganar al contrincante: 0.6.

Etapa III: probabilidad del contrincante para la segunda ronda: $\frac{2}{3}$.

Etapa IV: probabilidad de ganarle al contrincante: 0.6.

En este caso, hay una probabilidad de $\dfrac{36}{175}$ de que Marcia quede de finalista.

Como no hay más casos, entonces la probabilidad de que Marcia sea finalista en el torneo es de:

$$\frac{9}{350} + \frac{9}{175} + \frac{36}{175} = \frac{99}{350} \approx 0.282857\ .$$

8. [**5 puntos**] Una clave debe formarse con 5 símbolos distintos tomados de los números del conjunto $\{1, 2, 3\}$ y de los símbolos del conjunto $\{\#, \$, \%, \&\}$. El sistema rechaza aquellos códigos que tengan los tres números en orden, por ejemplo #123&. Determine la probabilidad de que se rechace un código escrito al azar.

   Solución.

   Primero, se define Ω como el conjunto de todas las claves que se pueden formar tomando los símbolos dados. Note que $|\Omega| = \dfrac{7!}{(7-5)!} = 2\ 520$.

   Falta determinar la cantidad de claves formadas con el símbolo "123". Como este cuneta como un solo símbolo (con ese mismo orden), entonces el ejercicio se reduce a encontrar la cantidad de claves de el símbolo "123" con dos elementos del conjunto $\{\#, \$, \%, \&\}$. Por lo tanto, hay $\dbinom{4}{2} \cdot 3! = 36$ claves con dicha condición.

   Finalmente, la probabilidad solicitada es:

$$\frac{36}{2520} = \frac{1}{70} \approx 0.014285\ .$$

9. **[5 puntos, optativa]** Veinte vehículos idénticos se van a estacionar de forma aleatoria en una hilera que tiene 30 espacios. Determine la probabilidad de que queden más de 4 espacios consecutivos libres.

Solución.

Si bien el problema dice que los vehículos son idénticos, para que la regla de Laplace tenga sentido se debe resolver asumiendo que estos son diferentes (para asegurar la equiprobabilidad).

No obstante, el lector notará al final de la solución que la probabilidad será la misma si se hubiera supuesto que los autos son iguales. Así, en este problema da igual si los autos son diferentes o no pero, pero en general es un tema de mucho cuidado.

Con esto presente, considere Ω como las combinaciones posibles de acomodar los vehículos, donde $|\Omega| = \binom{30}{20} \cdot 20!$.

Por otro lado, observe la siguiente representación:

$$\underline{\qquad} \quad \underline{\ \ V_1\ \ } \quad \underline{\qquad} \quad \underline{\ \ V_2\ \ } \quad \underline{\qquad} \quad \underline{\ \ \ldots\ \ } \quad \underline{\qquad} \quad \underline{\ \ V_{20}\ \ } \quad \underline{\qquad}$$

Acá, V_i, con $i \in \{1, 2, \ldots, 20\}$, representa un vehículo, mientras que $\underline{\qquad}$ representa posibles lugares vacíos. En caso de que no se pueda asignar el espacio vacío, no se toma en cuenta y los vehículos estarían juntos. Note que hay 21 símbolos $\underline{\qquad}$.

Lo que se hará es seleccionar, de los símbolos guión bajo, los espacios que quedarán vacíos (con su respectiva distribución). Luego, se permutarán los vehículos. Así, este ejercicio se resolverá por casos:

Caso I: 5 espacios vacíos consecutivos. Se realizará por etapas.

- *Etapa I:* seleccionar un guión bajo para los 5 espacios consecutivos: 21.
- *Etapa II:* de los guiones bajos disponibles, hacer una "distribución" de espacios vacíos restantes: $\binom{5+20-1}{5} = 42504$.
- *Etapa III:* permutar los vehículos: $20!$.

Caso II: 6 espacios vacíos consecutivos. Se realizará por etapas.

- *Etapa I:* seleccionar un guión bajo para los 6 espacios consecutivos: 21.
- *Etapa II:* de los guiones bajos disponibles, hacer una "distribución" de espacios vacíos restantes: $\binom{4+20-1}{4} = 8855$.
- *Etapa III:* permutar los vehículos: $20!$.

Caso III: 7 espacios vacíos consecutivos. Se realizará por etapas.

- *Etapa I:* seleccionar un guión bajo para los 7 espacios consecutivos: 21.
- *Etapa II:* de los guiones bajos disponibles, hacer una "distribución" de espacios vacíos restantes: $\binom{3+20-1}{3} = 1540$.
- *Etapa III:* permutar los vehículos: $20!$.

Caso IV: 8 espacios vacíos consecutivos. Se realizará por etapas.

- *Etapa I:* seleccionar un guión bajo para los 8 espacios consecutivos: 21.
- *Etapa II:* de los guiones bajos disponibles, hacer una "distribución" de espacios vacíos restantes: $\binom{2+20-1}{2} = 210$.
- *Etapa III:* permutar los vehículos: $20!$.

Caso V: 9 espacios vacíos consecutivos. Se realizará por etapas.

- *Etapa I:* seleccionar un guión bajo para los 9 espacios consecutivos: 21.
- *Etapa II:* de los guiones bajos disponibles, hacer una "distribución" de espacios vacíos restantes: $\binom{1+20-1}{1} = 20$.
- *Etapa III:* permutar los vehículos: $20!$.

Caso VI: 10 espacios vacíos consecutivos. Se realizará por etapas.

- *Etapa I:* seleccionar un guión bajo para los 10 espacios consecutivos: 21.
- *Etapa II:* de los guiones bajos disponibles, hacer una "distribución" de espacios vacíos restantes: $\binom{0+20-1}{0} = 1$.
- *Etapa III:* permutar los vehículos: $20!$.

Con esto, la probabilidad de que queden más de 4 espacios consecutivos libres es de:

$$\frac{53130 \cdot 21!}{\binom{30}{20} \cdot 20!} = \frac{14}{377} \approx 0.037135 \,.$$