Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 3405 Estadística

Tiempo máximo: 2 horas 15 minutos
Puntaje máximo: 31 puntos
I semestre 2023

II Examen Parcial Extraordinario

Instrucciones:
Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Puede hacer uso de las fórmulas oficiales de la cátedra únicamente. No se permite el uso de calculadora programable. Se permite el uso discrecional de dispositivos electrónicos para la consulta de la aplicación *Probability Distributions* según las disposiciones comunicadas con anterioridad por la coordinación de la cátedra. Considere, de ser necesario, que las poblaciones involucradas en esta prueba siguen una distribución **normal**.

---

1. Los siguientes datos corresponden a los tiempos en minutos de una muestra aleatoria de nuevos dispositivos de las computadoras *Peach* sometidos a calentamiento extremo hasta que se destruyen: 19, 10, 7, 6, 6, 4, 16, 11, 10, 9, 6, 5, 8, 5, 7, 12, 18

   a) **[5 puntos]** La empresa fabricante afirma que el tiempo de resistencia media de sus dispositivos es de al menos 10 minutos. Determine la zona de rechazo para el estadístico tiempo medio de resistencia ($\overline{X}$) con una significancia de 8 %.

   Solución
   $H_0 : \mu = 10 \ (\geq)$
   $H_1 : \mu < 10$

   Se tiene que $n = 17$, $\overline{x} = 9.352941176$ y $s = 4.581773353$.

   $$t_c = t_{0.08,16} = -1.473565 = \frac{(\overline{X}_c - 9.352941176)\sqrt{17}}{4.581773353} \Rightarrow \overline{X}_c \approx 7.715451996.$$

   Con esto, la significancia $ZR = \left]-\infty,\ 7.715451996\right[$.

   b) **[5 puntos]** La empresa de computadoras *Peach* necesita tener certeza de que la resistencia de estos dispositivos es similar entre ellos. Se ha establecido como criterio que la desviación estándar de tiempos de resistencia (σ_X) debe ser a lo sumo 3.5 minutos. Según los datos de la muestra y con una significancia de 5 %, ¿puede concluirse que los dispositivos tienen una resistencia similar?

   Solución

$H_0 : \sigma_X = 3.5 \ (\leq)$
$H_1 : \sigma_X > 3.5$

Procedemos por valor P (podría usarse otro enfoque)

$$P = P(\chi^2 > \chi^2_{obs}) = P\left(\chi^2 > \frac{16 \cdot 4.581773353^2}{3.5^2}\right), v = 16$$

$$= P\left(\chi^2 > 27.41896759\right), v = 16$$

$$\approx 0.037055 < 0.05$$

La hipótesis nula se rechaza. En conclusión, los dispositivos no satisfacen el criterio de resistencia establecido con una significancia de 5 %. ⌋⌋

2. [**5 puntos**] En una expoAuto se argumentó que el modelo 2022 del automóvil *PRtric* tiene un rendimiento promedio mayor en por lo menos 45 Km que el modelo del año anterior. En la expoAuto 2023 se presentan los datos de algunos automóviles escogidos de manera aleatoria, como evidencias de la mejora en la autonomía del modelo *PRtric* 2022.

	n	$\overline{x}$ (km por carga)	s (km por carga)
2021	24	340	3.1
2022	28	380	2.6

Si se supone que las varianzas poblacionales sobre el rendimiento de los automóviles modelos 2021 y 2022 son iguales, ¿respaldan los datos la afirmación sobre el rendimiento medio de los modelos de *PRtric* con una significancia del 6 %?

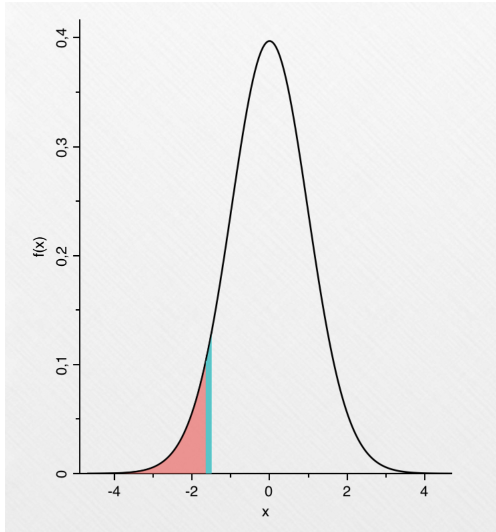
Solución

Llamaremos μ_1 y μ_2 a los rendimientos promedio por carga del modelo 2021 y 2022, respectivamente.

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 45 \ (\geq)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 45$

$$t_c = t_{0.06,50} = -1.581805 \qquad sp^2 = \frac{23 \cdot 3.1^2 + 27 \cdot 2.6^2}{50} = \frac{8071}{1000}$$

$$t_{obs} = \frac{40 - 45}{\sqrt{\frac{8071}{24000} + \frac{8071}{28000}}} \approx -6.3268756$$



La hipótesis nula se rechaza. Con esto, los datos no respaldan la afirmación sobre el rendimiento medio de los automóviles.

3. Un estudio sobre preferencia de plataformas de streaming *Retflix* y *Bisney +* pretende determinar si existe relación con la edad de los consumidores. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos en una muestra aleatoria.

	Niños	**Jóvenes**	**Adultos**
Retflix	8	x	34
Bisney +	5	24	25

a) [**4 puntos**] Si en una prueba de independencia se determinó que el valor esperado correspondiente a x es $\dfrac{1064}{55}$, verifique que $\chi^2_{obs} = 4.661945498$.

Solución

Con las condiciones dadas debe cumplirse que $\dfrac{1064}{55} = \dfrac{(x+24)(x+42)}{96+x}$, de donde se sigue que $x = 14$. Además, la taba para valores esperados es

	Niños	**Jóvenes**	**Adultos**
Retflix	$\dfrac{364}{55}$	$\dfrac{1064}{55}$	$\dfrac{1652}{55}$
Bisney +	$\dfrac{351}{55}$	$\dfrac{1026}{55}$	$\dfrac{1593}{55}$

Co esto, $\chi^2_{obs} = \dfrac{1444}{5005} + \dfrac{3087}{2090} + 0.5230464451 + \dfrac{5776}{19305} + 1.531738437 + 0.5424185356$

$\chi^2_{obs} \approx 4.661945498$

$\rfloor\rfloor$

b) [**2 puntos**] ¿Se puede concluir que la preferencia de plataformas de streaming *Retflix* y *Bisney* + depende de la edad de los consumidores?

Solución

H_0 : Las variables son independientes
H_1 : Las variables NO son independientes

Se procede por valor P
$P = P\left(\chi^2 > 4.661945498\right)$ con $v = 2$
≈ 0.097201

H_0 se tolera. No puede concluirse que la preferencia de plataformas de streaming *Retflix* y *Bisney* + depende de la edad de los consumidores. $\rfloor\rfloor$

4. [**5 puntos**] Un noticiero informa que al menos 6 de cada 10 personas creen que el sector turismo se recuperará en 2023. Se analizó esta afirmación utilizando regiones para una muestra de tamaño 13 y se obtuvo que el valor crítico para la proporción es 0.376509. En esta prueba de hipótesis, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad del error tipo II si solamente la tercera parte de las personas cree que el sector turismo se recuperará en el 2023?

Solución

Por el contexto presentado (o bien por el valor alternativo dado o bien por darse un único valor crítico) las hipótesis deben ser $H_0 : p = \frac{3}{5}$ y $H_1 : p < \frac{3}{5}$. Además, note que al asumir que $p = \frac{1}{3}$ entonces $np = 13 \cdot \frac{1}{3} < 5$

Con esto $\beta = P(H_0 \mid H_1)$

$= P\left(\hat{P} > 0.376509 \mid p = \frac{1}{3}\right)$

$= P(b > 13 \cdot 0.376509)$

$= P(b > 4.894617)$

$= \displaystyle\sum_{k=5}^{13} \binom{13}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{13-k} \approx 0.4479612977.$ $\rfloor\rfloor$

5. **[2 puntos]** Se afirma que el número de artículos defectuosos en una fábrica en la ciudad de Limón sigue una distribución f. El número X de artículos defectuosos para una muestra de 60 artículos y su frecuencia esperada se muestran a continuación.

X	0	1	2	3	4 o más
Frecuencia esperada	28.32	21.24	7.98	1.98	0.48

Con un nivel de significancia de 5 %, determine el valor de χ^2_c.

Solución

Debe notarse que existen valores esperados que son menores a 5, por lo que la tabla debe ajustarse a

X	0	1	2 o más
Frecuencia esperada	28.32	21.24	10.44

Ahora solo debe buscarse el valor de $\chi^2_c = \chi^2_{0.95,2}$, el cual corresponde a 5.991465.

6. **[3 puntos]** Para dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2, se desea probar la hipótesis $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2$ con $H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2$ y un nivel de significancia de 0.05. En dos muestras aleatorias de tamaño $n_1 = 20$ y $n_2 = 15$ se obtuvieron desviaciones estándares s_1 y s_2, respectivamente. Si se utiliza el cociente de las desviaciones estándar $\left(\dfrac{s_1}{s_2}\right)$ como estadístico de prueba, determine el valor crítico $\left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_c$.

Solución

A partir de la fórmula que relaciona la distribución F con el cociente de varianzas $\left(F = \dfrac{\sigma_1^2}{r_0\sigma_2^2}\right)$ se puede despejar $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \sqrt{Fr_0}$

Con esto y utilizando la versión para críticos, se tiene

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_c = \sqrt{f_{0.05,19,14} \cdot 2} = \sqrt{2 \cdot 0.443338} \approx 0.9416347487$$