§5. Probabilidad

§5.1. Conteo

Definición 5.1 Regla de Laplace
En los casos donde los eventos son **equiprobables**, la probabilidad de un evento es el número de casos del evento, entre el total de casos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\mathcal{U})}$$

$$0 \leq \frac{n(A)}{n(\mathcal{U})} \leq 1$$

$$|A| \leq |\mathcal{U}|$$

Ley de Laplace

Sea Ω un conjunto no vacío y finito, entonces la función $P : P(\Omega) \Longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$$

es una medida de probabilidad en Ω. Una forma de interpretarla viene dada por

$$P(X) = \frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ de casos totales}}$$

Ejemplo 5.1 Suponga que 8 bloques etiquetados $E_1, E_2, \ldots, E_8$ se colocan en una bolsa y se extraen uno a uno para ordenarlos. Determine:

a) El total de formas en las cuales los bloques etiquetados con un par quedan en las posiciones impares.

$\Omega_p = \{2,4,6,8\}$, $\Omega_{imp} = \{1,3,5,7\}$

ordenar pares $\to 4!$

ordenar impares $\to 4!$

Casos favorables: $\boxed{4! \cdot 4!}$

b) La probabilidad de este evento.

$$\frac{4! \cdot 4!}{8!} = \boxed{\frac{1}{70}}$$

Ley de Laplace

Sea Ω un conjunto no vacío y finito, entonces la función $P : P(\Omega) \Longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$$

es una medida de probabilidad en Ω. Una forma de interpretarla viene dada por

$$P(X) = \frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ de casos totales}}$$

Ejemplo 5.2 Una clave consiste en 8 carácteres, compuesta por números (del 0 al 9), letras en minúscula (de un total de 26 letras distintas) y letras en mayúscula (de un total de 26 letras distintas).

a) ¿Cuántas claves es posible formar si no hay restricciones?

$10 + 26 + 26 = 62$, $|\Omega|$ $\boxed{62^8}$

b) ¿Cuántas claves es posible formar si deben contener al menos un número, al menos una letra en minúscula y al menos una letra en mayúscula?

Por complemento, $|U| - [(|A|+|B|+|C|) - [(A\cap B) + |A\cap C| + B\cap C] + |A\cap B\cap C|]$

$62^8 - [(52^8 + 36^8 + 36^8) - (26^8 + 26^8 + 10^8) + 0]$

c) Determine la probabilidad de que la clave comience con mayúscula.

Casos totales $= 62^8$

Casos favorables

Elegir mayuscula $c(26,1) = 26$

Elegir resto 62^7

Total: $26 \cdot 62^7$

R/ $\dfrac{26 \cdot 62^7}{62^8} = \dfrac{13}{31} \approx \boxed{0{,}41}$

Ejemplo 5.3 Si se lanzan tres dados distintos, determine la probabilidad de que el resultado de los tres dados sume 7.

Cada dado tiene 6 caras

Casos totales: $6 \cdot 6 \cdot 6 = \boxed{216}$

Suman 7 $\quad 115 \to \dfrac{3!}{2!} = 3$

$124 \to 3! = 6$

$133 \to \dfrac{3!}{2!} = 3$

$223 \to \dfrac{3!}{2!} = 3$

R/ ; $\dfrac{3+6+3+3}{216} = \boxed{\dfrac{5}{72}}$

Definición 5.2 : Espacio muestral

Dado un experimento, el **espacio muestral** (denotado por Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.

Ejemplo 5.4 Defina el espacio muestral para los siguientes casos

a) Seleccionar una bola de una urna que contiene bolas enumeradas de 1 a 50. Anotar el número de la bola.

$\Omega = \{1 \ldots 50\}$

b) Lanzar una moneda tres veces, y anotar la secuencia de escudos y coronas.

$2^3 = 8$

$\Omega = \{EEE, EEC, ECE, ECC, CEE, CEC, CCE, CCC\}$

c) Lanzar una moneda tres veces, y anotar el número de coronas.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

d) Un bloque de información se transmite de manera repetida en un canal defectuoso (*noisy channel*) hasta que un bloque libre de errores llega al recibidor. Contar el número de transmisiones requeridas.

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots \infty\}$, Infinito

Ejemplo 5.5 Se tienen seis pilots, de los cuales 4 no tienen tinta. Determine el espacio muestral en los siguientes casos:

a) Se seleccionan los marcadores al azar uno por uno hasta que se encuentra un marcador bueno. Se anota la sucesión de las pruebas.

6 ; 2 Buenos $\wedge$ 4 malos

$\Omega = \{B, mB, mmB, mmmB, mmmmB\}$

b) En lugar de escribir la sucesión, se escribe únicamente el número de marcadores que se probaron.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) En lugar de escribir el número de marcadores que se probaron, se escribe únicamente el número de marcadores que no tenían tinta.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

d) Se seleccionan los marcadores al azar uno por uno hasta que se encuentran ambos marcadores buenos. Se anota la sucesión de las pruebas.

d) $\Omega = \{BB, MBB, BMB, MMBB, MBMB, BMMB,$
$MMMBB, MMBMB, MBMMB, BMMMB,$
$MMMMBB, MMMBMB, MMBMMB, MBMMMB, BMMMMB\}$

e) Para el caso (c), si sólo se escribe el número de marcadores probados.

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Ejemplo 5.6 Se realiza un experimento en el cual se lanza tres veces, de manera sucesiva, una moneda cargada. Si E denota escudo, C denota corona, y la probabilidad de obtener escudo es de 1/3, determine:

a) el espacio muestral.

$\Omega = \{EEE, EEC, ECE, ECC, CEE, CEC, CCE, CCC\}$

b) la probabilidad de que se obtengan al menos 2 coronas, dado que el segundo lanzamiento fue corona.

$\Omega = \{ECC, CCE, CCC\}$, 3 elementos en todos

$$\underset{ECC}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}} + \underset{CCE}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}} + \underset{CCC}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{16}{27}}$$

Definición 5.3 : Evento

Un evento, es un subconjunto del espacio muestral.

Nota 5.1 Recuerde que tanto Ω como $\emptyset$ son subconjuntos de Ω.

$A = \{ECC, CCE, CCC\}$ Ejercicio anterior

$P(A) = \frac{16}{27}$

Ejemplo 5.7 Un dado se lanza dos veces, y el número de puntos se anotan en orden. Sean los eventos A: "el número de puntos en el primer lanzamiento no es menor que el número de puntos en el segundo lanzamiento."; B: "el número de puntos en el primer lanzamiento es 6"; y C: "el número de puntos difiere en 2". Determine la probabilidad de:

1ro \ 2do	1	2	3	4	5	6
1	✓					
2	✓	✓				
3	✓	✓	✓			
4	✓	✓	✓	✓		
5	✓	✓	✓	✓	✓	
6	✓	✓	✓	✓	✓	✓

El primero no es mayor que el segundo

$A = \{11, 21, 22, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54, 55, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

$|A \cap \bar{B}| = 15$

$B = \{61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

$P(A \cap C) = 4$

$C = \{13, 24, 31, 35, 42, 46, 53, 64\}$

a) cada elemento del espacio muestral.

$6 \cdot 6 = 36$, $P(= \frac{1}{36}$

b) los eventos A, B, C, $A \cap \overline{B}$ y $A \cap C$.

$P(A) = \frac{21}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36}$, $P(C) = \frac{8}{36}$

$P(A \cap \bar{B}) = \frac{15}{36}$ $P(A \cap C) = \frac{4}{36}$

Definición 5.4 : Probabilidad

La **probabilidad** es una **métrica** que se define para los eventos de un espacio muestral Ω, que cumple las siguientes características:

- $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \Omega$.
- Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- Si A y B son eventos **disjuntos**, es decir, $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Nota 5.2 : Propiedades

- $P(\mathcal{U}) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ejemplo 5.8 Un experimento aleatorio tiene espacio muestral $S = \{a, b, c, d\}$. Si $P(\{c, d\}) = 3/8$, $P(\{b, c\}) = 6/8$ y $P(\{d\}) = 1/8$, determine las probabilidades de a, b y c.

x	a	b	c	d	Σ
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$P(u) = 1$

Para que de 1

Ya que $c\ d = \frac{3}{8}$, $\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Y así con todos

Ejemplo 5.9 Suponga que los eventos A y B son tales que $P(A) = \frac{1}{2}P(B)$ y que $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$. Si $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, determine $P(A)$.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{4} P(B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) + \frac{3}{4} P(B) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} P(B) + \frac{3}{4} P(B) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{4} P(B) = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} P(B)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

§5.3. **Probabilidad condicional**

Definición 5.5 : Probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición 5.6 : Eventos independientes

A y B son **eventos independientes** si $P(A|B) = P(A)$; en caso contrario se llaman **dependientes**.

Nota 5.3 : Eventos disjuntos

Recuerde que si A y B son disjuntos, entonces $A \cap B = \emptyset$. Dos eventos disjuntos **no son** independientes, pues $P(A|B) = 0$ (a menos que $P(A) = 0$).

Ejemplo 5.10 Considere los eventos A, B y C, no nulos, y con A y B disjuntos. Se sabe que $P(A \cap C) = \frac{P(B)}{5}$ y $P(C \cup A) = \frac{P(B)}{7}$. Pruebe que:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{33P(B)}{35}.$$

$$P(C \cup A) = \frac{P(B)}{7} \rightarrow P(C) + P(A) - P(C \cap A) = \frac{P(B)}{7}$$

$$P(C) + P(A) - \frac{P(B)}{5} = \frac{P(B)}{7}$$

$$P(C) + P(A) = \frac{P(B)}{5} + \frac{P(B)}{7}$$

$$P(C) + P(A) = \frac{7P(B) + 5P(B)}{35}$$

$$P(C) + P(A) = \frac{12P(B)}{35}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \left[\overset{0}{\cancel{P(A \cap B)}} + P(A \cap C) + P(B \cap C)\right] + \overset{0}{\cancel{P(A \cap B \cap C)}}$$

$$\frac{12P(B)}{35} + P(B) - \frac{P(B)}{5} - P(B \cap C)$$

$$\frac{8P(B)}{7} - P(B \cap C) = \frac{33P(B)}{35}$$

$P(B \cap C) = \frac{P(B)}{5}$, sustituyendo cumple

Ejemplo 5.11 Sean A, B y C eventos no nulos del espacio muestral Ω, de forma que $A \cup B = \Omega$, y A y C son independientes. Pruebe que

$$P[A \cap B \cap C] = 1 - P\left[\overline{A}\right] P[C] - P\left[\overline{B} \cup \overline{C}\right]$$

$A \cup B = \Omega \to P(A \cup B) = 1$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$$1 - P(\bar{A}) \cdot P(C) - P(\bar{B} \cup \bar{C})$$

$$1 - P(\bar{A} \cap C) - P(\overline{B \cap C})$$

$$1 - P(\bar{A} \cap C) - (1 - P(B \cap C))$$

$$\cancel{1} - P(\bar{A} \cap C) \cancel{-1} + P(B \cap C)$$

$$P(B \cap C) - P(\bar{A} \cap C)$$

$$P(B \cap C) - (P(C) - P(A \cap C))$$

$$P(B \cap C) - P(C) + P(A \cap C)$$

Ejemplo 5.14 En una bolsa se tienen 10 bolinchas blancas, 6 bolinchas verdes y 4 bolinchas rojas. Considere el experimento en que se extrae una bolincha al azar, se anota su color y se devuelve a la bolsa, junto con dos bolinchas del mismo color al de la bolincha extraída. Suponga que el experimento se repite hasta obtener dos bolinchas verdes consecutivas. ¿Determine la probabilidad de que se realicen a lo sumo 3 extracciones?

10B 6V 4R, Total = 20

$\Omega = \{VV, BVV, RVV\}$

$$\frac{6}{20}\cdot\frac{8}{22}+\frac{10}{20}\cdot\frac{6}{22}\cdot\frac{8}{24}+\frac{4}{20}\ \frac{6}{22}\ \frac{8}{24}$$

R/ $\frac{19}{110} \approx \boxed{0,17}$

Ejemplo 5.15 Se tiene dos urnas con bolitas, indistinguibles salvo por el color, de la siguiente manera:

	Bolitas rojas	**Bolitas azules**
Urna 1	4	1
Urna 2	2	2

Se extraen bolitas de las urnas, sin reemplazo y de forma alternada iniciando con la primera urna, hasta obtener dos bolitas rojas (no necesariamente consecutivas).

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se saquen cuatro bolitas para terminar el experimento?

$\Omega = \{RAAR, AARR\}$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{2}{15}}$$

Ejemplo 5.16 En un laboratorio de control de calidad electrónico se están probando componentes de dos tipos distintos. El primer grupo contiene 12 transistores funcionales y 8 defectuosos, mientras que el segundo grupo tiene 9 diodos operativos y 6 con falla técnica. El proceso de prueba sigue una secuencia alternada aleatoria estricta: primero se examina un transistor, luego un diodo, después otro transistor, y así sucesivamente. Cada componente seleccionado se retira definitivamente del lote para su análisis. El proceso termina en el momento en que se encuentra el primer componente en buen estado.

Considerando este proceso de selección secuencial sin reemplazo, calcule la probabilidad de que sea necesario realizar exactamente cuatro pruebas para identificar el primer componente funcional.

$A = 12F \wedge 8D$, $B = 9F \wedge 6D$

Transistores Diodos

$\Omega = \{AD, BD, AD, BF\}$

$$\frac{8}{20} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{9}{14} = \frac{18}{475} \approx \boxed{0{,}037}$$

1) En una canasta se tienen 10 bolas rojas y 1 bola verde. Se comienza a sacar bolas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas:

Regla 1: Si la bola extraída es roja, no se devuelve a la canasta y se agrega una bola verde a la canasta.

Regla 2: Si la bola es verde, no se devuelve a la canasta.

El proceso termina hasta obtener 2 bolas verdes extraídas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar en total 4 bolas?

$\Omega = \{RVRV, RRVV, VRRV\}$

$$\frac{10}{11} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10}$$

$$+ \frac{1}{11} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{5769}{66550} \approx \boxed{0{,}86}$$

2) Cuatro compañeros de residencia van a rifar la lavada de los platos, se colocan tres fichas blancas y una negra en una bolsa de tela y cada uno va sacando una ficha, al que le corresponda la ficha negra le tocará lavar todos los platos. Uno de los estudiantes se apresura a tomar la ficha de primero convencido de que sus probabilidades de sacarse la lavada de platos se reducen si toma la ficha de primero. ¿Está ese estudiante en lo cierto?, utilice principios probabilísticos para contestar dicha pregunta.

3B ∧ 1N

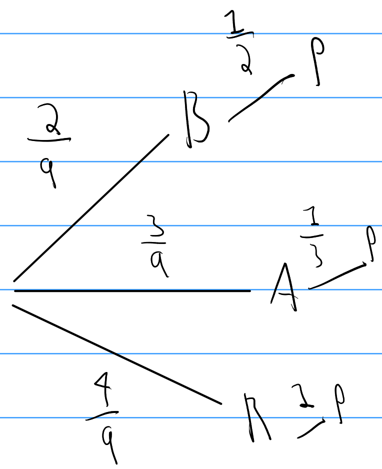
$\frac{1}{4} = 0,25 \to 25\%$, en todos los intentos, es la misma proba

3) Un juego consiste de dos etapas. En la primera etapa se debe elegir una bolita de una urna que contiene dos bolitas blancas, tres azules y cuatro rojas. Si la bolita elegida es blanca puede elegir una de dos puertas, en una de ellas hay premio y en la otra no. Si la bolita elegida es azul puede elegir una de tres cajas de las cuales una tiene premio. Si la bolita que extrae es roja entonces automáticamente tiene premio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona haya sacado premio?

Urna 1 → 2B , 3A , 4R , 9 en total

B → 2 posibilidades , A → 3 posibilidades , R → 1 posibilidad



$P(B) \cdot P(P) + P(A) \cdot P(P) + P(R) \cdot P(P)$

$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1}$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \approx \boxed{0,66}$

b) Si una persona se sacó un premio en el juego, determine la probabilidad de que haya elegido una bolita blanca.

$$\frac{P(B)\cdot P(P)}{P(B)\cdot P(P) + P(A)\cdot P(P) + P(N)\cdot P(P)}$$

$$\frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \approx \boxed{0{,}16}$$