INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
MA1103 CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

II SEMESTRE, 2023
TIEMPO: 2 HORAS Y 15 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 25 pts

# Segundo Examen Parcial Extraordinario

**Instrucciones:**

1. El examen consta de **6** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada.
2. Tiene **dos horas y quince minutos** para contestar las preguntas del examen.
3. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
4. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**3 puntos**] Sean $u, v, w$ vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $u, v$ son linealmente independientes y se cumple que $u + v - w = 0$. Determine si el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

   **Solución:**

   Para $\{u, v, w\}$ sea linealmente independiente debe cumplirse que para constantes $\alpha, \beta, \gamma$ se tiene $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \ (*)$, donde debe cumplirse únicamente si $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

   Note como $u + v - w = 0 \Rightarrow w = u + v$ ahora sustituyendo en $(*)$ y reordenando un poco, se tendría:

   $$(\alpha + \gamma)u + (\beta + \gamma)v = 0$$

   Luego como $u, v$ son linealmente independientes debe cumplirse que $\alpha + \gamma = 0$ y $\beta + \gamma = 0$, de donde al resolver sistema tiene infinitas soluciones, y por tanto se concluye que el conjunto $\{u, v, w\}$ **no** es linealmente independiente.

2. [**5 puntos**] Determine el vector (o vectores) $u$ en $\mathbb{R}^3$, si existe, que cumple de manera simultánea las siguientes condiciones:

   - Se puede escribir como combinación lineal de los vectores $(1, -2, 1)$ y $(0, -1, -1)$.
   - $||u|| = \sqrt{6}$
   - $u \cdot (3, 1, 2) = 3$

   **Solución:**

   De la primera condición $u = (a, -2a - b, a - b)$, luego de la segunda condición

   $$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + (-2a - b)^2 + (a - b)^2} = \sqrt{6} &\implies a^2 + 4a^2 + 4ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 6 \\ &\implies 6a^2 + 2ab + 2b^2 = 6 \\ &\implies 3a^2 + ab + b^2 = 3 \end{aligned}$$

De la tercera condición

$$\begin{aligned} 3a + (-2a - b) + 2(a - b) = 3 &\implies 3a - 3b = 3 \\ &\implies a = 1 + b \end{aligned}$$

Sustituyendo este último resultado en el anterior

$$\begin{aligned} 3a^2 + ab + b^2 = 3 &\implies 3(1+b)^2 + (1+b)b + b^2 = 3 \\ &\implies 3 + 6b + 3b^2 + b + b^2 + b^2 = 3 \\ &\implies 5b^2 + 7b = 0 \\ &\implies b = 0 \vee b = \frac{-7}{5} \\ &\implies a = 1 \quad a = \frac{-2}{5} \end{aligned}$$

Los vectores que cumplen son $(1, -2, 1)$ y $\left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}, 1\right)$.

3. [**5 puntos**] Determine el vector (o los vectores) $v$ en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- $v$ es linealmente dependiente con el vector $(2, 0, -1)$.
- Los vectores $v$ y $w = (-1, 1, 3)$ forman un triángulo de área $\sqrt{30}$ ul$^2$

**Solución:**

- $v$ es linealmente dependiente con el vector $(2, 0, -1)$, entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que: $v = a(2, 0, -1) \to v = (2a, 0, -a)$

- Los vectores $v$ y $w = (-1, 1, 3)$ forman un triángulo de área $\sqrt{30}$ ul$^2$
  Se sabe que el área del triángulo está dada por:
  $\frac{||v \times w||}{2} = \sqrt{30}$
  $v \times w = (a, -5a, 2a)$
  $||v \times w|| = \sqrt{a^2 + 25a^2 + 4a^2} = \sqrt{30a^2}$. Entonces:
  $\frac{||v \times w||}{2} = \frac{\sqrt{30a^2}}{2} = \sqrt{30} \to a = \pm 2$
  Por lo tanto, $v = (4, 0, -2)$ o $(-4, 0, 2)$.

4. [**4 puntos**] Determine una ecuación normal del plano que contiene a la recta $l$ de ecuación $(x, y, z) = (1, -2, 4) + t\,(2, 3, 2)$ y al punto $Q = (2, -2 - 1)$.

**Solución:**

El vector normal del plano es ortogonal al vector director de $l$ y además al vector $(1, -2, 4) - (2, -2 - 1) = (-1, 0, 5)$.
Un vector normal entonces puede ser un vector paralelo a $(2, 3, 2) \times (-1, 0, 5)$. $(2, 3, 2) \times (-1, 0, 5) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15e_1 - 12e_2 + 3e_3 = (15, -12, 3) = 3\,(5, 4, 1)$. Entonces un

vector normal es $(a,b,c)=(5,4,1)$. De esta forma una ecuación del plano es $5x+4y+z=(5,4,1)\cdot(1,-2,4)=5-8+4=1$.Por lo tanto, una ecuación es

$$5x+4y+z=1$$

.

5. Considere un plano $\pi$ con ecuación $11x+5y+13z=30$ y la recta $l$ de ecuación $(x,y,z)=(-1,13,1)+t(1,0,2),\ t\in\mathbb{R}$.

   a) [**2 puntos**] Hallar el punto $P$ de intersección entre el plano $\pi$ y la recta $l$.

   b) [**2 puntos**] Determinar las ecuaciones simétricas de la recta $T$ que es perpendicular al plano $\pi$ y que contiene el punto $P$.

**Solución:**

a) Note recta $L$ se escribe en su forma paramétrica $L\colon\begin{cases} x=-1+2t \\ y=13 \\ z=1+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ luego sustituyendo en la ecuación de plano $\pi$, se tiene $t=-1$. De esta manera punto de intersección $P=(-2,13,-1)$.

b) Como $T\perp\pi$ se puede tomar vector director de recta $T$ igual al vector normal del plano $\pi$, es decir, $v_T=(11,5,13)$. Luego al $P\in T$, se tiene que ecuaciones simétricas de recta $T$, viene dada por

$$\frac{x+2}{11}=\frac{y-13}{5}=\frac{z+1}{13}$$

.

6. Considere el punto $Q=(1,1,3)$ y la recta $l:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$.

   a) [**1 punto**] Verifique que el punto $Q$ no pertenece a la recta $l$.

   b) [**3 puntos**] Plantee y determine **sin hacer uso de fórmula directa**, la distancia del punto $Q=(1,1,3)$ a la recta $l$.

**Solución:**

Es fácil verificar punto $Q$ no pertenece a la recta $l$ pues $\dfrac{1-2}{3}\neq\dfrac{1-1}{2}$.Por otra parte para determinar la distancia del punto $Q=(1,1,3)$ a la recta $l$, primero tomamos un punto $P$ de la recta, digamos $P=(2,-1,5)$. Entonces $d(Q,l)=\dfrac{\|PQ\times(3,-2,-1)\|}{\|(3,-2,-1)\|}=\dfrac{\|(-1,2,-2)\times(3,-2,-1)\|}{\|(3,-2,-1)\|}$ $(-1,2,-2)\times(3,-2,-1)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}=-6e_1-7e_2-4e_3=(-6,-7,-4)\Rightarrow\dfrac{\|(-1,2,-2)\times(3,-2,-1)\|}{\|(3,-2,-1)\|}=\dfrac{\|(-6,-7,-4)\|}{\|(3,-2,-1)\|}=\dfrac{\sqrt{101}}{\sqrt{14}}=2{,}68594.$ Entonces $d(Q,l)=2{,}68594$.