

### Función generadora de momentos

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden  $k$  como  $E(X^k)$ . Además, se define la función generadora de momentos para  $X$  por

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in R_X} e^{tk} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera:

#### ■ Esperanza

Consiste en calcular la primera derivada de la función generadora de momentos y luego evaluarla en  $t = 0$  así:

$$E(X) = m'_X(0)$$

#### ■ Varianza

Consiste en calcular la segunda derivada de la función generadora de momentos, luego evaluarla en  $t = 0$  y finalmente restarle la esperanza al cuadrado, así:

$$Var(X) = m''_X(0) - [m'_X(0)]^2$$

Sea  $Y$  una variable aleatoria discreta cuya función generadora de momentos tiene criterio:

$$m_Y(t) = \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine la esperanza y la varianza de  $Y$

$$\text{R/ } E(Y) = \frac{11}{10} \text{ y } Var(Y) = \frac{69}{100}$$

$$m'_Y(t) = \left( \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2 \cdot e^{2t}}{5} \right)'$$

$$0 + \frac{3 \cdot e^t}{10} + \frac{2 \cdot e^{2t} \cdot 2}{5}$$

$$\frac{3e^t}{10} + \frac{4e^{2t}}{5}$$

Ahora evaluar en  $t=0$   $\frac{3 \cdot e^0}{10} + \frac{4e^{2 \cdot 0}}{5}$

$$E(Y) = \frac{11}{10}$$

$$m''_y(t) = \left( \frac{3e^t}{10} + \frac{4e^{2t}}{5} \right)'$$

$$\frac{3e^t}{10} + \frac{4 \cdot e^{2t} \cdot 2}{5}$$

$$\frac{3e^t}{10} + \frac{8 \cdot e^{2t}}{5}$$

Evaluar  $m''_y(t)$  en  $t=0$  y restar  $(m'_y(0))^2$

$$\left( \frac{3 \cdot e^0}{10} + \frac{8 \cdot e^{2 \cdot 0}}{5} \right) - \left( \frac{11}{10} \right)^2$$

69
100

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad  $f_X(x)$  definida por:

$$f_X(x) = \frac{2^{x+1}}{4^x}, \text{ con } x = 2, 3, 4, \dots$$

a) Determine la función generadora de momentos de  $X$

$$M_X(t) = \frac{e^{2t}}{2 - e^t}$$

$$M_X(t) = \sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{2^{x+1}}{4^x}$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{2^x}{2^x}$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left( \frac{e^t \cdot 2}{2} \right)^x$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left( \frac{e^t}{2} \right)^x \quad \left. \begin{array}{l} \text{valor de } t? \\ \frac{e^t}{2} < 1 \rightarrow e^t < 2 \\ t < \ln(2) \end{array} \right\}$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left( \frac{\left( \frac{e^t}{2} \right)^2}{1 - \frac{e^t}{2}} \right) = \sum_{x=2}^{\infty} \left( \frac{\frac{e^{2t}}{4}}{2 - e^t} \right) = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{2t}}{2(2 - e^t)}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{2t}}{2 - e^t}, \quad t < \ln(2)$$

Esperanza ?

Varianza ?

#### Función generadora de momentos

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden  $k$  como  $E(X^k)$ . Además, se define la función generadora de momentos para  $X$  por

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} e^{tk} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera: