

Tercer Examen Parcial Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **8** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva.
3. Tiene dos horas y quince minutos para contestar las preguntas del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

-
1. [3 pts] Sean A , B y C matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{2}$, $|B| = -1$ y $|C| = 5$. Calcule $|2A^T \cdot B^2 \cdot C^{-1}|$.

Solución

$$|2A^T \cdot B^2 \cdot C^{-1}| = 2^3 |A| \cdot |B| \cdot |B| \cdot \frac{1}{|C|} = \frac{4}{5}$$

2. [3 pts] Determine el valor o valores de x para que la matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sea una matriz invertible.

Solución

Basta determinar el valor o valores de x , donde se cumpla que $\det(M) \neq 0$:

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & x \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2x \neq 0 \text{ si y solo si } x \neq 2.$$

3. [3 pts] Sean $u = (-2, k, 2)$, $v = (-4, 0, -6)$ y $w = (1, 3, -2)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Determine, el valor de k (en caso de existir) para que el vector u se pueda escribir como combinación lineal de los vectores v y w .

Solución

Deben existir constantes α, β , tales que :

$$(-2, k, 2) = \alpha(-4, 0, -6) + \beta(1, 3, -2)$$

es decir,
$$\begin{cases} -4\alpha + \beta &= -2 \\ 3\beta &= k \\ -6\alpha - 2\beta &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{7}, \beta = \frac{-10}{7}, \text{ y } k = \frac{-30}{7}$$

De esta forma, $k = \frac{-30}{7}$.

4. [4 puntos] Sean $u = (x, y, z)$, $v = (1, 0, 1)$ y $w = (-1, 1, 1)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Determine el vector u que satisface de manera simultánea las siguientes condiciones:

- u forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ rad con v .
- $u \times v = w$.
- $\|u\| = \sqrt{6}$

Solución

De la primera y tercera condición se sabe que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{u \cdot v}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow 3 = u \cdot v$$

Dado que $\|v\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\|u\| = \sqrt{6}$. Luego

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 3 \Leftrightarrow x + z = 3 \quad (1)$$

De la segunda condición se sabe que:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (y, -x + z, -y) = (-1, 1, 1)$$

Es decir

$$\begin{cases} y &= -1 \\ -x + z &= 1 \\ -y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -1 \\ -x + z &= 1 \\ y &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -1 \\ -x + z &= 1 \end{cases} \quad (2)$$

Con base en (1) y (2) se tiene el sistema de ecuaciones lineal

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ -x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ y } z = 2$$

De esta forma, el vector buscado es $u = (1, -1, 2)$.

5. [4 pts] Considere los vectores $w = (-2, -2, 1)$ y $r = (-1, 2, 1)$ en \mathbb{R}^3 . Determine los vectores u y v que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones:

- u es paralelo a r .
- $2w + v = u$.
- v es ortogonal a w .

Solución

Como u es paralelo a r , existe un escalar k tal que:

$$u = kr = k(-1, 2, 1).$$

Como v es ortogonal a w , el producto punto $v \cdot w$ debe ser cero:

$$v \cdot (-2, -2, 1) = 0.$$

Utilizando la tercera condición $2w + v = u$:

$$2(-2, -2, 1) + v = k(-1, 2, 1).$$

Esto se traduce en:

$$v = k(-1, 2, 1) - 2(-2, -2, 1).$$

Por lo tanto, tenemos:

$$v = (-k + 4, 2k + 4, k - 2).$$

Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} (-k + 4, 2k + 4, k - 2) \cdot (-2, -2, 1) &= 0. \\ -2(-k + 4) - 2(2k + 4) + (k - 2) &= 0, \\ 2k - 8 - 4k - 8 + k - 2 &= 0, \\ -k - 18 &= 0, \\ k &= -18. \end{aligned}$$

Sustituimos $k = -18$ se obtiene :

$$v = (22, -32, -20)$$

$$u = (18, -36, -18)$$

6. [4 pts] Halle la ecuación de un plano π que satisfaga simultáneamente las condiciones siguientes:

- Es paralelo al plano α que contiene a los puntos $A(1, 3, 0)$, $B(-2, 0, 4)$ y $C(0, 1, 1)$
- Contiene el punto $D(3, 3, 3)$

Solución

Recordamos que dos planos son paralelos si tiene el mismo vector normal o bien, son paralelos. Así, de la primera condición podemos encontrar el vector normal n del plano π con base en el del plano α . Sin pérdida de generalidad fije A y construya los vectores

$$\vec{AB} = B - A = (-2, 0, 4) - (0, 1, 1) = (-2, -1, 3)$$

y

$$\vec{AC} = C - A = (0, 1, 1) - (1, 3, 0) = (-1, -2, 1)$$

Luego

$$n = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + 6, 2 - 3, 4 - 1) = (5, -1, 3)$$

De la segunda condición se sigue que la ecuación cartesiana del plano π corresponde a

$$\pi : (5, -1, 3) \cdot (x, y, z) = (5, -1, 3) \cdot (3, 3, 3) \Leftrightarrow$$

$$\pi : 5x - y + 3z = 21$$

7. Considere la recta $L : (x, y, z) = (0, -3, 2) + t(2, 1, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi : 4x - 3y + 5z = 9$.

- a) [3 pts] Encuentre el punto P_0 de intersección entre L y π .

Solución

Note en la recta L , se tiene que $x = 2t$, $y = -3 + t$, $z = 2 + t$ y al sustituir en el plano π queda la ecuación: $4(2t) - 3(-3 + t) + 5(2 + t) = 9$, la cual al resolver tiene por solución $t = -1$ y de esta manera $P_0 = (-2, -4, 1)$.

- b) [2 pts] Determine las ecuaciones paramétricas de la recta N que es perpendicular al plano π y que contiene a P_0 .

Solución

Al ser recta N perpendicular con plano π se puede tomar como vector director d la recta N , al vector $n_\pi = (4, -3, 5)$ y de esta manera las ecuaciones paramétricas de recta N son:

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 - 3t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

8. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) [2 pts] Verifique que el vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz A .

Solución

Debe existir contante λ , tal que $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En efecto pues al resolver producto matricial del lado derecho se tiene $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De donde basta tomar $\lambda = a$.

b) [1 pto] ¿A cuál valor propio de la matriz A , está asociado el vector propio v ?

Solución

De parte anterior se tiene por valor propio $\lambda = a$ con $a \in \mathbb{R}$