Instituto Tecnológico de Costa Rica	Tiempo máximo: 2 horas 10 minutos
Escuela de Matemática	Puntaje máximo: 27 puntos
MA 3405 Estadística	I semestre 2025

II Examen Parcial

Instrucciones

Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Puede hacer uso de las fórmulas oficiales de la cátedra únicamente. No se permite el uso de calculadora programable. Se permite el uso discrecional de dispositivos electrónicos para la consulta de la aplicación *Probability Distributions* según las disposiciones comunicadas con anterioridad por la coordinación de la cátedra. Considere, de ser necesario, que las poblaciones involucradas en esta prueba siguen una **distribución normal**.

---

1. Los siguientes datos se refieren a las unidades vendidas en una semana de un nuevo dispositivo para cargas inalámbricas en teléfonos móviles. Se consideraron locales de San José y de Cartago

San José	59	68	44	71	63	46	69	54	48
Cartago	50	36	62	52	70	41			

a) [**4 puntos**] Construya un intervalo de confianza del 97 % para verificar que las varianzas poblacionales de las ventas semanales de este dispositivo pueden suponerse iguales en San José y Cartago.

Solución

De los datos se tiene $s_s^2 = 109$ y $s_c^2 = 160.96667$. Además, $f_{0.985,8,5} = 8.567118$ y $f_{0.985,5,8} = 5.778811$

El IC para $\dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_c^2}$ es $\left]\dfrac{109}{160.96667 \cdot 8.567118}, \dfrac{109 \cdot 5.778811}{160.96667}\right[=]0.07904161213, 3.913172826[$

Debe notarse que $1 \in IC$, es decir las varianzas de las ventas semanales en San José y Cartago pueden suponerse iguales con 97 % de confianza.

b) [**4 puntos**] Un ejecutivo de la empresa proveedora de este dispositivo afirma que si bien es cierto que las ventas promedio semanales son mejores en San José la diferencia entre estas está por debajo de 8 unidades. ¿Respaldan las evidencias esta afirmación con significancia del 3 %?

Solución

De los datos se tiene $\overline{x}_s = 58$, $\overline{x}_c = 51.83333$, $s_s^2 = 109$ y $s_c^2 = 160.96667$.

$H_0 : \mu_s - \mu_c = 8$
$H_1 : \mu_s - \mu_c < 8$

$$s_p^2 = \frac{8 \cdot 109 + 5 \cdot 160.96667}{13} \approx 128.9871808$$

$$t_c = t_{0.03,13} = -2.060038$$

$$t_{obs} = \frac{58 - 51.83333 - 8}{\sqrt{128.9871808\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right)}} \approx -0.30622799871$$

La hipótesis nula se tolera, por tanto los datos NO respaldan la afirmación del ejecutivo de la empresa.

2. **[4 puntos]** Se construyó un intervalo de confianza de 95 % para la diferencia de proporciones de personas hombres (p_h) y mujeres (p_m) que prefieren una cierta marca de café, en un determinado lugar. Se utilizó una muestra de tamaño n_1 de hombres y n_2 de mujeres. Se obtuvo que $\hat{p}_h$ y $\hat{p}_m$ gustan de la marca de café respectivamente. Suponga que $n_1\hat{p}_h \geq 5$, $n_1\hat{q}_h \geq 5$, $n_2\hat{p}_m \geq 5$ y $n_2\hat{q}_m \geq 5$. Si el intervalo de confianza para $p_h - p_m$ obtenido es $]a, 0.07057[$ y $\hat{p}_h - \hat{p}_m = 0.02$, ¿qué puede concluirse sobre la preferencia de café en ese lugar?

Solución

$a = 2 \cdot 0.02 - 0.07057 = -0.03057$. Con esto el intervalo sería $]-0.03057, 0.07057[$, por lo que no se puede argumentar alguna diferencia en la preferencia del café por género según los datos de las muestras.

3. **[3 puntos]** Un estudio concluyó, mediante una prueba de análisis de varianza, que el rendimiento académico de 5 grupos de Estadística NO puede considerarse similar. Si se determinó que el valor crítico para esta prueba es $f_c = 2.530694$ y además se tiene que $SSA = 265.8$ y $SST = 526.3$, calcule una cota inferior para el tamaño de muestra utilizado.

Solución

Por las condiciones dadas se tiene que $f_{obs} > f_c$ (esto porque la hipótesis se rechazó). Con esto,

$$f_{obs} > f_c \Rightarrow \frac{N-5}{4}\frac{265.8}{526.3 - 265.8} > 2.530694 \Rightarrow N > 14.92092983$$

Luego, la muestra utilizada en el estudio fue de al menos 15 estudiantes.

4. [**4 puntos**] Se quiere determinar si el sector de trabajo (público o privado) tiene alguna relación con la opinión sobre la gestión de los jerarcas del poder ejecutivo de la república. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos en una muestra aleatoria.

	Deficiente	*Cumple*	*Eficiente*
Público	35	15	22
Privado	10	28	25

Determine una cota para la significancia de modo que, con los datos de esta muestra, pueda concluirse que la opinión sobre la gestión de los jerarcas depende del sector en cual se labora.

Solución

Primero debe notarse que todos los esperados son mayores o iguales a 5.

	Deficiente	*Cumple*	*Eficiente*
Público	24	22.933	25.067
Privado	21	20.067	21.933

Luego, $\chi^2_{obs} = \dfrac{(35-24)^2}{24} + \dfrac{(15-22.933)^2}{22.933} + \dfrac{(22-25.067)^2}{25.067} + \dfrac{(10-21)^2}{21} + \dfrac{(28-20.067)^2}{20.067} + \dfrac{(25-21.933)^2}{21.933} \approx 17.48800667$.

Con esto, $P = P\left(\chi^2 > 17.48800667\right), v = 2 \approx 0.000169$. Este resultado es contundente pues indica que para cualquier significacia mayor a $0.01\,\%$ la hipótesis nula debe rechazarse. Es decir, prácticamente con cualquiera de las significancias usuales debe concluirse que la opinión sobre la gestión de los jerarcas si se ve afectada por el sector laboral al que se pertenezca.

5. [**5 puntos**] Los siguientes datos se refieren a la cantidad de veces que un usuario ingresó a un juego en línea hasta lograr ganarlo en registro de 54 noches.

Intentos	1	2	3
Noches	35	6	13

Si se define X como la cantidad de intentos por noche hasta ganar el juego, ¿existe evidencia en contra de suponer que $X \sim f_X$ con $f_X(x) = \dfrac{2}{3^x}$ con significancia 0.04?

Solución

$H_0 : X \sim f_X$
$H_1 : X \nsim f_X$

Intentos	1	2	3 o mas
o_i	35	6	13
e_i	36	12	6

$\chi_c^2 = \chi_{0.96,2}^2 = 6.437752$
$\chi_{obs}^2 = \dfrac{1}{36} + 3 + \dfrac{49}{6} = \dfrac{403}{36} \approx 11.194444$

La hipótesis nula se rechaza, es decir las evidencias son contrarias a suponer que $X \sim f_X$.

6. **[3 puntos]** Para dos variables normales e independientes X_1 y X_2, se desea probar la hipótesis $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2$ con $H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2$ y un nivel de significancia de 0.05. En dos muestras de tamaño $n_1 = 20$ y $n_2 = 15$, se obtuvieron desviaciones estándar s_1 y s_2, respectivamente. Si se utiliza el cociente de las desviaciones estándar $\left(\dfrac{s_1}{s_2}\right)$ como estadístico de prueba, determine el valor crítico $\left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_c$.

   Solución

   $$f_c = f_{0.05,19,14} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_c \Rightarrow \sqrt{0.443338 \cdot 2} \approx 0.9416347487 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_c.$$