§1. Distribuciones discretas

§1.1. Introducción

Teorema 1.1 : Sumas

- $\sum_k (a_k \pm c \cdot b_k) = \sum_k a_k \pm c \sum_k b_k$
- $\sum_{k=m}^{n} c = c(n-m+1)$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\boxed{\sum_{x=p}^{k} c = ck \quad c \text{ constante}}$$

Teorema 1.2 : Serie geométrica

$$\sum_{k=m}^{\infty} r^k = \frac{r^m}{1-r}$$

Teorema 1.3 : Serie exponencial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

$$\boxed{\mathrm{Dom} =]-\infty, +\infty[}$$

§1.2. Variables Aleatorias

Definición 1.1 Una *variable aleatoria* X es una función cuyo dominio es un espacio muestral, y cuyo rango (denotado por R_X) es algún subconjunto de los números reales.

Definición 1.2 Sea un espacio muestral Ω, donde cada eventualidad $e \in \Omega$ tiene una probabilidad asignada. El evento de que X tenga el valor x es el subconjunto de Ω que contiene aquellos elementos e para los cuales $X(e) = x$, lo cual denotaremos por $X = x$. Es decir:

$$X = x : \{e \in \Omega \mid X(e) = x\}.$$

Si se denota por $f_X(x)$ la probabilidad de este evento, entonces:

$$f_X(x) = P(\{e \in \Omega \mid X(e) = x\}) = P(X = x).$$

Definición 1.3 La función $f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ cuyo valor para cada número real x está dado por $P(X = x)$, se llama *función de probabilidad* de la variable aleatoria X. Dicha función cumple además que

$$\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1$$

Ejemplo 1.1 Determine el valor de k para la variable aleatoria discreta Z, cuya función de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{15-x}{50} & \text{si } x \in \{1, 2, ..., k\} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$\sum_{x=1}^{k} \frac{15-x}{50} = 1$$

$$\frac{1}{50} \sum_{x=1}^{k} 15 - x = 1$$

$$\frac{1}{50}\left[\sum_{x=1}^{k} 15 - \sum_{x=1}^{k} x\right] = 1$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{1}{50}\left[15k - \frac{k(k+1)}{2}\right] = 1$$

$$\boxed{\sum_{x=p}^{k} c = ck \quad c \text{ constante}}$$

$$\frac{15k}{50} - \frac{k^2+k}{100} = 1$$

$$30k - k^2 - k = 100$$

$$-k^2 + 29k - 100 = 0$$

$$k^2 - 29k + 100 = 0$$

$$k = 25 \qquad k = 4$$

$$k = 25 \rightarrow \frac{15-25}{50} = -0{,}5 \ \times$$

$$k = 4 \rightarrow \frac{15-4}{50} = 0{,}22 \ \checkmark \qquad 0 \leq x \leq 1 \ \checkmark$$

Definición 1.4 La función $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ cuyo valor para cada número real x está dado por $P(X \leq x)$ se conoce como la *función de distribución (acumulada)* o *función de probabilidad acumulada* de la variable aleatoria X.

Definición 1.5 Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad f_X. La *media* o *esperanza* de X, denotada por $E(X)$ o μ_X, está dada por:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x f_X(x)$$

Teorema 1.6 Propiedades:

- $E(g(X)) = \sum_{X \in R_X} g(x) f_X(x)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

Medidas de tendencia central

- **Esperanza**

  La esperanza, media o valor esperado de una variable aleatoria discreta X es el promedio ponderado de los valores del rango de X según las probabilidades de que X tome cada uno de estos valores. Así, se define la esperanza como:

  $$E(X) = \mu_X = \sum_{k \in R_X} k \cdot f_X(k)$$

- **Varianza**

  Si X es una variable aleatoria discreta tal que $E(X^2)$ converge y $E(X) = \mu_X$, se define la varianza de X como:

  $$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right]$$

Ejemplo 1.2 En cierto juego, en cada turno, un jugador lanza un dado justo con 12 caras, numeradas del 1 al 12.

- Si se obtiene un número del 1 al 4, el jugador avanza 1 casilla. $\to$ 1, 2, 3, 4
- Si se obtiene un número del 5 al 8, el jugador avanza 2 casillas. $\to$ 5, 6, 7, 8
- Si se obtiene un número del 9 al 11, el jugador avanza 3 casillas. $\to$ 9, 10, 11
- Si se obtiene un 12, el jugador avanza 4 casillas. $\to$ 12

a) Determine la distribución de probabilidad para la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de casillas que un jugador avanza en un solo turno.

Sea X el numero de casillas que avanza en 1 turno

X	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

$a_2 = E(X)?$ $\quad 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{4}{12} + 3 \cdot \frac{3}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{25}{12}}$

$a_3 = Var(X)?$

$$\left[1^2 \cdot \frac{4}{12} + 2^2 \cdot \frac{4}{12} + 3^2 \cdot \frac{3}{12} + 4^2 \cdot \frac{1}{12}\right] - \left(\frac{25}{12}\right)^2$$

$$\frac{131}{144}$$

b) Terminando su tercer turno de un juego, ¿cuántas casillas avanza un jugador, en promedio?

$E(X) =$ Promedio

$3Y$

$\cancel{3} \cdot \frac{25}{\cancel{12}} = \frac{25}{4} = \boxed{6{,}25}$

Ejemplo 1.3 Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad asociada de criterio:

$$f_X(k) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k, \quad \text{con} \quad k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

a) Verifique que f_X define una función de probabilidad válida.

$$\frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 1$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^0}{1 - \frac{1}{5}} = 1$$

$1 = 1 \checkmark$

b) Determine $E(e^{tX})$, donde t es una constante.

Teorema 1.6 Propiedades:

- $E(g(X)) = \sum_{X \in R_X} g(x) f_X(x)$
- $E(aX+b) = aE(X)+b$

$$E(e^{tx}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k}$$

$$\frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \left(\frac{e^{x}}{5}\right)^{k}$$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{\left(\frac{e^x}{5}\right)^0}{1-\frac{e^x}{5}}\right)$$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{\frac{1-e^x}{5}}\right)$$

$$\frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{1-e^x}$$

$$\boxed{E(e^{tx}) = \frac{4}{1-e^x}}$$

§1.4. **Varianza**

Definición 1.6 Sea X una v.a.d. con función de probabilidad f_X. Sea $\mu_X = \mathrm{E}(X)$ la media de X. La *varianza* de X, denotada por $\mathrm{Var}(X)$ o σ_X^2 se define como el número:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)^2\right] = \sum_{x \in R_X} (x-\mu_X)^2 \; f_X(x).$$

Al número no-negativo $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ se le llama la *desviación estándar* de X.

Teorema 1.7
- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
- $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

Ejemplo 1.4 Para una empresa de servicio de entregas a domicilio, cada repartidor tiene un salario semanal base de 50 000 colones, más una cantidad X, en miles de colones, correspondiente a una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{kx+2}{5} & \text{si } \; x \in \{1,2,3,4,5\} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

$$\sum_{x=0}^{5} \frac{kx+2}{5} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{5} \frac{kx}{5} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{k}{5}\sum_{x=0}^{5} x + \sum_{x=0}^{5} \frac{2}{5} = 1$$

$$\boxed{\sum_{x=p}^{k} c = ck \quad c \text{ constante}}$$

$$\frac{k}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}(5+1)}{2} + \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 1$$

$$3k + 2 = 1$$

$$3k = -1$$

$$\boxed{k = \frac{-1}{3}}$$

b) Determine la varianza para el salario semanal esperado por un repartidor de la empresa.

Y = Salario semanal

$1000X + 50000$

Teorema 1.7

- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
- $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

$$\sum_{x=1}^{5} \frac{kx+2}{5} \rightarrow \frac{\frac{-1}{3}x+2}{5}$$

Reemplazando x

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E(x) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 5 \cdot \frac{1}{15} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

$$\mathrm{Var}(x) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{4}{15} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} + 4^2 \cdot \frac{2}{15} + 5^2 \cdot \frac{1}{15} - \left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{14}{9}}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = 1000X + 50000$$

$$1000^2 \cdot \mathrm{Var}(x)$$

$$\boxed{1000^2 \cdot \frac{14}{9}}$$

Teorema 1.7

- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
- $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

Ejemplo 1.5 Considere la variable aleatoria discreta Y, tal que $E(Y)$, $\operatorname{Var}(Y)$ y $E\big((5Y-2\mu_Y)^2\big)$ existen. Demuestre que:

$$E\big((5Y-2\mu_Y)^2\big) = 25\operatorname{Var}(Y) + 9\mu_Y^2.$$

$$E((5Y-2\mu_Y)^2)$$

$$E(25Y^2 - 20\mu_Y Y + 4\mu_Y^2)$$
$$E(25Y^2) - E(20\mu_Y Y) + 4\mu_Y^2$$
$$25E(Y^2) - 20\mu_Y E(Y) + 4\mu_Y^2$$
$$E(Y) = \mu_Y$$

$$25E(Y^2) - 20\mu_Y \cdot \mu_Y + 4\mu_Y^2$$
$$25E(Y^2) - 20\mu_Y^2 + 4\mu_Y^2$$
$$25E(Y^2) - 16\mu_Y^2$$

$$\operatorname{Var}(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2$$
$$E(Y^2) = \operatorname{Var}(Y) + \mu_Y^2$$

$$25(\operatorname{Var}(Y) + \mu_Y^2) - 16\mu_Y^2$$

$$25\operatorname{Var}(Y) + 25\mu_Y^2 - 16\mu_Y^2$$

$$\boxed{25\operatorname{Var}(Y) + 9\mu_Y^2} \quad //$$

Propiedades de la esperanza

Sea c una constante y sea X una variable aleatoria discreta tal que $E(X)$ existe, entonces, se tiene que:

1. $E(c) = c$
2. $E(X+c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = c \cdot E(X)$
4. Si $E(X)$ y $E(Y)$ existen, entonces $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Propiedades de la varianza

Sea c una constante y sean X, Y variables aleatorias discretas, entonces, se tiene que:

1. $Var(c) = 0$
2. $Var(X+c) = Var(X)$
3. $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$
4. Si X y Y son variables independientes, entonces $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Teorema 1.7

- $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
- $\operatorname{Var}(aX+b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$

Ejemplo 1.6 Considere la variable aleatoria discreta X, tal que $E(X) = 4$ y $\text{Var}(X) = 1$. Considere las nuevas variables $Y = 3X^2 - 4X + 2$ y $Z = 4 - 3X$.

a) Determine $E(Y)$.

$E(X) = 4 \qquad Var(X) = 1 \qquad Y = 3X^2 - 4X + 2 \qquad Z = 4 - 3X$

$Var(X) = 1$

$E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$

$E(X^2) = 1 + [E(X)]^2$

$E(X^2) = 1 + 4^2$

$E(X^2) = 17$

Teorema 1.7

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
- $\text{Var}(aX + b) = a^2\,\text{Var}(X)$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Propiedades de la esperanza

Sea c una constante y sea X una variable aleatoria discreta tal que $E(X)$ existe, entonces, se tiene que:

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = c \cdot E(X)$
4. Si $E(X)$ y $E(Y)$ existen, entonces $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Por linealidad de E (o Var)

$Y = 3X^2 - 4X + 2$

$E(Y) = E(3X^2 - 4X + 2)$

$= E(3X^2) + E(-4X) + E(2)$

$= 3E(X^2) - 4E(X) + 2$

$3 \cdot 17 - 4 \cdot 4 + 2$

37

$\boxed{E(Y) = 37}$

b) Determine $\text{Var}(Z)$.

Propiedades de la varianza

Sea c una constante y sean X, Y variables aleatorias discretas, entonces, se tiene que:

1. $Var(c) = 0$
2. $Var(X + c) = Var(X)$
3. $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$
4. Si X y Y son variables independientes, entonces $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

$Var(Z) = Var(4 - 3X)$

$= Var(4) + Var(-3X)$

$0 + (-3)^2\, Var(X)$

$Var(X) \cdot 9$

$1 \cdot 9$

$\boxed{9}$ //

Ejemplo 1.7 Considere la variable aleatoria discreta X. Además, considere la nueva variable Y, tal que:

$$Y = 4 + 5X, \ \mathrm{E}(Y) = 16, \ \mathrm{E}(Y^2) = 300.$$

a) Determine $\mathrm{E}(X)$.

$Y = 4 + 5X$

$E(Y) = E(4 + 5X)$

$16 = E(4) + E(5X)$

$16 = 4 + 5E(X)$

$5E(X) = 12$

$E(X) = \frac{12}{5} = \boxed{2,4}$

b) Determine $\mathrm{Var}(X)$.

$Y = 4 + 5X$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(4) + \mathrm{Var}(5X)$

$25\,\mathrm{var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$

$\mathrm{var}(X) = \frac{\mathrm{Var}(Y)}{25}$

$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$300 - (16)^2$

44

$\mathrm{var}(X) = \frac{\mathrm{Var}(Y)}{25} = \frac{44}{25} = \boxed{1,76}$

1) En una urna hay 4 bolas numeradas: 1, 2, 3 y 5. Se extraen bolas una a una sin reemplazo, hasta obtener una bola par. Sea Y el número total de bolas extraídas en el experimento. Determine:

a) El rango de Y. $\{1, 2, 3, 4\}$

b) La función de probabilidad de Y.

x	1	2	3	4
$f_Y(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

c) La esperanza.

$$E(x) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

d) La varianza.

$$E(x^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

$$Var(x) = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{5}{4}}$$

e) La función generadora de momentos.

$$m_x(t) = E(e^{xt}) = \boxed{e^{t} \cdot \frac{1}{4} + e^{2t} \cdot \frac{1}{4} + e^{3t} \cdot \frac{1}{4} + e^{4t} \cdot \frac{1}{4}}$$

2) En un edificio de 5 pisos (numerados S, 1, 2, 3 y 4), un ascensor comienza siempre en el sótano (S), pero tiene un fallo:

- Si se pulsa el piso 2, el ascensor se detiene en el piso 1 con probabilidad 1/4, y al piso 2 en el resto de los casos. $= \frac{3}{4}$
- Si se pulsa el piso 4, el ascensor se detiene en el piso 1 con probabilidad 1/8, al piso 2 con probabilidad 1/4, y al 4 el resto de los casos. $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + x = 1, \; x = \frac{5}{8}$
- Para los pisos 1 y 3, el ascensor llega de manera correcta.

Llega una persona al sótano, y marca al piso al cual desea ir (todos los pisos tienen la misma probabilidad de ser elegidos). Sea X el piso en el que realmente se detiene el ascensor. Determine R_X, $f_X(x)$, $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

$R_X = \{1, 2, 3, 4\}$, Todas tienen $\frac{1}{4}$ de ser elegidas

x	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$

Lo que falta

$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $+ = \frac{1}{4}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{11}{35} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{5}{32} = \boxed{\frac{71}{32}}$$

Var:

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{11}{35} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{5}{32} = \frac{195}{32}$$

$$\frac{195}{32} - \left(\frac{71}{32}\right)^2 = \boxed{\frac{1199}{1024}}$$

3) Se tienen tres monedas distintas en una bolsa, tales que:

- Moneda A: Tiene corona en ambas caras.
- Moneda B: $P(E) = ½P(C)$
- Moneda C: es justa (P(C) = P(E) = ½).

Se extrae una moneda al azar y se lanza una sola vez. Sea Z el resultado del lanzamiento, codificado como:

- $Z = 1$ si sale escudo,
- $Z = 0$ si sale corona.

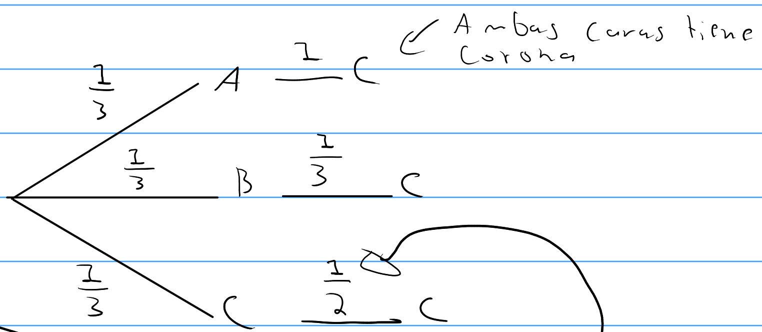
Determine $f_Z(x)$, $E(Z)$ y $\mathrm{Var}(Z)$.

$$P(E) + P(C) = 1 \qquad P(E) = \frac{1}{2} \cdot P(C)$$

$$\frac{1}{2} P(C) + P(C) = 1 \qquad P(E) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}$$

$$\frac{3}{2} P(C) = 1 \qquad P(E) = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{2}{3}$$



$$P(C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{13}{18}}$$

x	0	1
$f_Z(x)$	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{18}$

$E(x) \wedge VAR(x)$ lo mismo de siempre