

# Estimación puntual

## Estimadores insesgados

1. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$E(X) = 5\theta, \text{Var}(X) = 2, E(Y) = 3\theta, \text{Var}(Y) = 1$$

Considere los estimadores de un parámetro  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X + Y}{8}$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{X - Y}{2}$

a) Determine si cada uno de los estimadores dados es insesgado o no.

R/ Ambos

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_1$

2. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$E(X) = 9\theta, \text{Var}(X) = 4, E(Y) = 5\theta, \text{Var}(Y) = 3$$

Considere los estimadores de un parámetro  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X + Y}{4}$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{X - Y}{4}$

a) Determine si cada uno de los estimadores dados es insesgado o no.

R/  $\hat{\theta}_2$

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_2$

3. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$E(X) = 17\theta, \text{Var}(X) = 16, E(Y) = 12\theta, \text{Var}(Y) = 13$$

Considere los estimadores de un parámetro  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X - Y}{5}$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{29}$

a) Determine si cada uno de los estimadores dados es insesgado o no.

R/ Ambos

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_2$

4. Sean  $X$  y  $W$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$E(X) = 7\theta, E(W) = 5\theta, \text{Var}(X) = 3, \text{Var}(W) = 1$$

Considere los estimadores de  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X - W}{2}$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{2W - X}{3}$

a) Pruebe que ambos estimadores son insesgados de  $\theta$ .

R/ Ambos

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_2$

5. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$E(X) = 5\theta, E(Y) = \frac{3\theta}{2}, \text{Var}(X) = \frac{1}{16}, \text{Var}(Y) = \frac{1}{72}$$

Considere los siguientes estimadores puntuales de un parámetro  $\theta$  de una población:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2X - 4Y}{4}, \hat{\theta}_2 = \frac{5X - 6Y}{16}$$

a) Determine cuáles de estos estimadores son insesgados.

R/ Ambos

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_1$

6. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$E(X) = 2\theta, E(Y) = \frac{\theta}{2}, \text{Var}(X) = \frac{1}{5}, \text{Var}(Y) = \frac{1}{16}$$

Considere los siguientes estimadores puntuales de un parámetro  $\theta$  de una población:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{5X - 8Y}{6}, \hat{\theta}_2 = \frac{X - Y}{2} \text{ y } \hat{\theta}_3 = \frac{2(X + Y)}{5}$$

a) Determine cuáles de estos estimadores son insesgados.

R/  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_3$

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_1$

7. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(5\theta, 9) \text{ y } Y \sim N(6\theta, 9,2)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro  $\theta$  de una determinada población:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X}{5}, \hat{\theta}_2 = Y - X \text{ y } \hat{\theta}_3 = \frac{X + Y}{10}$$

a) Determine si cada uno de estos estimadores es insesgado o no.

R/  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique su respuesta.

R/  $\hat{\theta}_1$

8. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim B\left(10\theta, \frac{1}{2}\right) \text{ y } Y \sim B\left(20\theta, \frac{1}{5}\right)$$

Considere los estimadores de un parámetro  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = X - Y$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{9}$

a) Determine si cada uno de los estimadores dados es insesgado o no.

R/ Ambos

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_2$

9. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim B\left(35\theta, \frac{1}{7}\right) \text{ y } Y \sim B\left(28\theta, \frac{1}{7}\right)$$

Considere los estimadores de un parámetro  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = X - Y$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{9}$

a) Determine si cada uno de los estimadores dados es insesgado o no.

R/ Ambos

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_2$

10. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(3\theta, 25) \text{ y } Y \sim B\left(\theta, \frac{1}{4}\right)$$

Considera los estimadores de  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X - 4Y}{2}$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{X}{6} + 2Y$

a) Demuestre que  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  son estimadores insesgados para  $\theta$

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_2$

11. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim B\left(9\theta, \frac{1}{3}\right) \text{ y } Y \sim N(2\theta, 9), \text{ con } \theta \in \mathbb{N}$$

Considera los estimadores de  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X + Y}{5}$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{2X - Y}{4}$ .

¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique su respuesta.

R/  $\hat{\theta}_2$

12. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(5\theta + 5, 9) \text{ y } Y \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$$

Considera los estimadores de un parámetro  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X - Y}{5}$  y  $\hat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{5}$

a) Determine si cada uno de los estimadores dados es insesgado o no.

R/  $\hat{\theta}_1$

b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_1$

13. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(4\theta, 12) \text{ y } Y \sim B\left(24\theta, \frac{1}{8}\right)$$

Considera los estimadores de un parámetro  $\theta$  de una población:  $\hat{\theta}_1 = \frac{X + Y}{7}$  y  $\hat{\theta}_2 = X - Y$

a) Determine si cada uno de los estimadores dados es insesgado o no.

R/ Ambos

b) ¿Cuál de estos estadísticos es el mejor estimador del parámetro  $\theta$ ? Justifique.

R/  $\hat{\theta}_1$

14. Considere las variables aleatorias independientes  $X$  y  $Y$  de modo que  $X \sim N(7\alpha, 25)$  y  $Y \sim N(5\alpha, 16)$ . Determine el valor del número real  $k$  de modo que el estimador  $\hat{\theta} = 4kX - 6kY$  sea insesgado para estimar el parámetro  $\theta$ .

$$\text{R/ } k = \frac{-1}{2}$$

15. Considere las variables aleatorias independientes  $X$  y  $Y$  de modo que  $X \sim N(k\theta, 49)$  y  $Y \sim B\left(\theta, \frac{1}{4}\right)$ . Determine el valor del número real  $k$  de modo que el estimador  $\hat{\theta} = \frac{X - kY}{2}$  sea insesgado para estimar el parámetro  $\theta$ .

$$\text{R/ } k = \frac{8}{3}$$

## Estimación por máxima verosimilitud

1. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \beta \cdot e^{-\beta x}$  para  $x \geq 0$  con  $\beta$  constante positiva. Dadas las observaciones  $x_1 = 0,3$ ,  $x_2 = 0,2$  y  $x_3$ , se obtuvo que la estimación de máxima verosimilitud de  $\beta$  es 4. Determine el valor de  $x_3$ . R/  $x_3 = 0,25$
  
2. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución geométrica de parámetro  $p$  (la densidad es  $f(x) = p(1 - p)^x$  para  $x \geq 0$ ) Dadas las observaciones  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 8$  y  $x_3 = c$ , se obtuvo que la estimación de máxima verosimilitud de  $p$  es  $\frac{3}{30}$ . Determine el valor de la observación  $x_3$ . R/  $x_3 = 13$
  
3. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución geométrica de parámetro  $p$ , con densidad  $f(x) = p(1 - p)^x$  para  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Dadas las observaciones  $X_1 = 6$ ,  $X_2 = 8$ ,  $X_3 = 8$  y  $X_4 = 9$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $p$ . R/  $p = \frac{4}{35}$
  
4. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{-x}{\alpha}}$  para  $x > 0$  y  $\alpha > 0$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 0,3$ ,  $X_2 = 0,1$  y  $X_3 = 0,9$ . Encuentre la estimación de máxima verosimilitud del parámetro  $\alpha$ . R/  $\alpha = \frac{13}{30}$
  
5. La variable aleatoria  $X$  tiene una densidad de probabilidad dada por  $f(x) = \frac{x}{a^2 \cdot e^{\frac{x}{a}}}$  para  $x \geq 0$ . Tres observaciones de  $X$  son  $X_1 = 12$ ,  $X_2 = 16$ ,  $X_3 = 15$ . Encuentre la estimación de máxima verosimilitud del parámetro  $a$ . R/  $a = \frac{43}{6}$
  
6. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \frac{\phi^2(x - 5)}{e^{\phi(x-5)}}$  para  $x \geq 5$  con  $\phi$  un parámetro. Dadas las observaciones  $X_1 = 6$ ,  $X_2 = 8$  y  $X_3 = 11$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $\phi$ . R/  $\phi = \frac{3}{5}$
  
7. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = x \cdot e^{-\alpha^2 x + 5\alpha}$ . Dadas las observaciones  $X_1 = 2$ ,  $X_2 = 3$  y  $X_3 = 4$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $\alpha$ . R/  $\alpha = \frac{5}{6}$

8. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \frac{\lambda^2(x-3)}{e^{\lambda(x-3)}}$  para  $x \geq 3$  con  $\lambda$  un parámetro. Dadas las observaciones  $X_1 = 4$ ,  $X_2 = 6$  y  $X_3 = 8$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $\lambda$ . R/  $\lambda = \frac{2}{3}$
9. Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $X \sim P(\lambda)$ , donde  $\lambda$  es un parámetro desconocido, es decir,  $f_X(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Dadas las observaciones  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 2$  y  $X_3 = 7$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $\lambda$ . R/  $\lambda = \frac{10}{3}$
10. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de probabilidad  $f(x) = \frac{\theta+2}{9} \left(\frac{x}{9}\right)^{\theta}$ , con  $0 \leq x \leq 9$ . Determine el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro  $\theta$  dadas las observaciones  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 6$  y  $x_3 = \frac{3}{2}$  R/  $\theta = \frac{1}{\ln(3)} - 2$
11. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de probabilidad  $f(x) = \frac{\beta^4 \cdot x^{\beta+1}}{5}$ . Determine el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro  $\beta$  dadas las observaciones  $x_1 = 0,4$ ,  $x_2 = 0,3$ ,  $x_3 = 0,5$  y  $x_4 = 0,4$  R/  $\beta = \frac{-16}{\ln(0,024)}$
12. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = (\alpha + 1)x^\alpha$  para  $0 \leq x \leq 1$  con  $\alpha$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 0,2$ ,  $X_2 = 0,1$  y  $X_3 = 0,5$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $\alpha$ . R/  $\alpha = -0,3485$
13. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \alpha^3 \cdot x^{\alpha^3-1}$  para  $0 \leq x \leq 1$  con  $\alpha$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 0,5$ ,  $X_2 = 0,4$  y  $X_3 = 0,25$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $\alpha$ . R/  $\alpha = 1,0004$
14. El tiempo en horas, que tarda la prueba médica para diagnóstico de infección por coronavirus es una variable aleatoria con distribución de probabilidad  $f(x) = \frac{x \cdot e^{\frac{-x}{\omega}}}{\omega^2}$ , para  $x \geq 0$  y  $\omega \geq 0$ . Calcule el estimador de máxima verosimilitud de  $\omega$  para la muestra aleatoria cuyas observaciones son  $X_1 = 4$ ,  $X_2 = 5$ ,  $X_3 = 6$ ,  $X_4 = 5$  y  $X_5 = 5,5$ . R/ 2,55

15. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \frac{k}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^{k-1}$  para  $0 \leq x \leq 3$  con  $k$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 0,3$ ,  $X_2 = 0,1$  y  $X_3 = 0,9$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $k$ . R/  $k = 0,4342$
16. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \frac{k}{5} \left(\frac{x}{5}\right)^{k-1}$  para  $0 \leq x \leq 5$  con  $k$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 2,5$ ,  $X_2 = 0,1$  y  $X_3 = 5$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $k$ . R/  $k = 0,6514$
17. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \frac{k}{7} \left(\frac{x}{7}\right)^{k-1}$  para  $0 \leq k \leq 7$  con  $k$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 2,8$ ,  $X_2 = 3,5$  y  $X_3 = 1,4$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $k$ . R/  $k = 0,9320$
18. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \frac{k^2}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^{k^2-1}$  para  $0 \leq x \leq 3$  con  $k$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 0,3$ ,  $X_2 = 0,1$  y  $X_3 = 0,9$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $k$ . R/  $k = \pm 0,6590$
19. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad  $f(x) = \beta^2 \cdot e^{-\beta^2(x-5)}$  para  $x \geq 5$  con  $\beta$  constante. Dadas las observaciones  $X_1 = 6$ ,  $X_2 = 6,5$  y  $X_3 = 7,5$ , encuentre la estimación de máxima verosimilitud de  $\beta$ . R/  $\beta = \pm 0,7745$

20. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(\frac{-(x-u)^2}{2v}\right)$$

Dadas las observaciones  $X_1 = 152$ ,  $X_2 = 93$ ,  $X_3 = -14$  y  $X_4 = 65$

- a) Pruebe que la función de verosimilitud es

$$g(u, v) = \frac{1}{4\pi^2 v^2} \exp(-v^{-1} (2u^2 - 296u + 18\,087))$$

- b) Determine las estimaciones de máxima verosimilitud de  $u$  y  $v$ . R/  $u = 74$  y  $v = 3\,567,5$

## Ejercicios especiales

- El número de errores en la medición ( $X$ ) en las partes de una célula, mediante un ocular micrométrico en un microscopio, sigue una distribución normal dada por  $X \sim N(0, \sigma^2)$ . Verifique que  $\hat{\sigma}^2 = \frac{X_1^2}{3} + \frac{2X_2^2}{3}$  es un estimador insesgado para  $\sigma^2$ .
- Considere la población dada por la variable aleatoria  $X$  con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Dada una muestra aleatoria de esta población de tamaño  $n > 1$  tal que  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ , considere los siguientes estadísticos de  $\sigma^2$ :

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \text{ y } S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

a) Exprese  $S_2^2$  en términos de  $S_1^2$  y de  $n$ .

$$R/S_2^2 = \frac{n-1}{n} \cdot S_1^2$$

b) Si  $S_1^2$  es un estadístico insesgado de  $\sigma^2$  ¿es  $S_2^2$  un estimador insesgado de  $\sigma^2$ ? No.

- Considere la función exponencial cuya función de densidad viene dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}, \text{ para } x \geq 0$$

Suponga que se toma una muestra de observaciones independientes  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  de esta distribución. Determine la estimación de máxima verosimilitud de  $\beta$ . R/  $\bar{X}$

- Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $X \sim Exp(\lambda)$ , donde  $\lambda$  es un parámetro desconocido, es decir, su función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ para } x \geq 0$$

Suponga que se toma una muestra de observaciones independientes  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  de esta distribución.

- a) Determine el estadístico  $\hat{\lambda}$  que brinda el método de máxima verosimilitud para estimar  $\lambda$
- $R/\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
- b) Pruebe que  $\frac{1}{\hat{\lambda}}$  es un estimador insesgado de  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Sugerencia:** recuerde que si  $X \sim Exp(\lambda)$  entonces  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

5. Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $X \sim G(p)$ , donde  $p$  es un parámetro desconocido, es decir, su función de densidad viene dada por:

$$f_X(k) = (1 - p)^k p, \text{ para } k \geq 0$$

Suponga que se toma una muestra de observaciones independientes  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  de esta distribución.

- a) Determine el estadístico  $\widehat{P}_1$  que brinda el método de máxima verosimilitud para estimar  $p$ .

$$R/\widehat{P}_1 = \frac{1}{1 + \bar{X}}$$

- b) Pruebe que  $\frac{1}{\widehat{P}_1}$  es un estimador insesgado de  $\frac{1}{p}$ .

**Sugerencia:** recuerde que si  $Y \sim G(p)$  entonces  $E(Y) = \frac{1-p}{p}$

6. Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $X \sim P(\lambda)$ , donde  $\lambda$  es un parámetro desconocido cuya función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, \text{ para } x \geq 0$$

Suponga que se toma una muestra de observaciones independientes  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  de esta distribución.

- a) Utilice el método de máxima verosimilitud para demostrar que  $\widehat{\lambda} = \bar{X}$  es un estimador de  $\lambda$
- b) Demuestre que  $\widehat{\lambda}$  es un estimador insesgado para el parámetro  $\lambda$ .

**Sugerencia:** recuerde que si  $X \sim P(\lambda)$  entonces  $E(X) = \lambda$

7. Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $X \sim Gamma(3, \beta)$ , donde  $\beta$  es un parámetro desconocido, es decir, su función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{-x}{\beta}}}{2\beta^3}, \text{ para } x \geq 0$$

Suponga que se toma una muestra de observaciones independientes  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  de esta distribución.

- a) Determine el estadístico  $\widehat{\beta}$  que brinda el método de máxima verosimilitud para estimar  $\beta$
- $$R/\widehat{\beta} = \frac{1}{3}\bar{X}$$
- b) Pruebe que  $\widehat{\beta}$  es un estimador insesgado de  $\beta$ .

**Sugerencia:** recuerde que si  $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$  entonces  $E(X) = \alpha \cdot \beta$

8. Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , es decir, su función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{\exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suponga que  $\mu = 0$  y  $\sigma^2$  es un parámetro desconocido. Dada una muestra aleatoria de observaciones independientes  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ .

- a) Utilice el método de máxima verosimilitud para demostrar que  $\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$  es el estimador máximo verosímil del parámetro desconocido  $\sigma^2$ .

**Nota:** omita la justificación de que  $\widehat{\sigma}^2$  es el máximo de la función de verosimilitud.

- b) Demuestre que  $\widehat{\sigma}^2$  es un estimador insesgado del parámetro  $\sigma^2$ .

9. Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $X \sim U[0, a]$ , donde  $a$  es un parámetro desconocido, es decir, su función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{a}, \text{ para } x \in [0, a].$$

Suponga que se toma una muestra de observaciones independientes  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  de esta distribución. Demuestre que  $A = 2\bar{X}$  es un estimador insesgado de  $a$ .

10. Considere una muestra aleatoria  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , donde  $X$  es una variable aleatoria cuya función de distribución de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{x \cdot e^{\frac{-x}{\omega}}}{\omega^2}, \text{ para } x \geq 0 \text{ y } \omega \geq 0$$

Verifique que el estimador de máxima verosimilitud de  $\omega$  es  $\hat{\omega} = \frac{\bar{X}}{2}$

11. Si se tiene una muestra observada  $m = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de una variable poblacional con parámetro  $\theta$  y función de distribución  $f$  que depende de  $\theta$  y se sabe que una muestra aleatoria de tamaño  $n$  dada por  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  con sus  $n$  variables mutuamente independientes, justifique que la función de verosimilitud viene dada por  $g(\theta) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n)$
12. Considere la variable aleatoria  $X$  asociada a una población dada, con media poblacional  $\mu$  y varianza poblacional  $\sigma^2$ . Dada una muestra aleatoria  $M = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  y sabiendo que la media muestral se define como  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , demuestre que:

a) La media muestral es insesgada.

$$b) \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$c) E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

13. Considere la variable aleatoria  $X$  asociada a una población dada, con media poblacional  $\mu$  y varianza poblacional  $\sigma^2$ . Dada una muestra aleatoria  $M = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  y sabiendo que la varianza muestral se define como  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , demuestre que:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

14. Considere la variable aleatoria  $X$  asociada a una población dada, con media poblacional  $\mu$  y varianza poblacional  $\sigma^2$ . Dada una muestra aleatoria  $M = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  y sabiendo que la varianza muestral se define como  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , demuestre que la varianza muestral es insesgada.

15. Considere  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  dos estimadores insesgados independientes de un cierto parámetro  $\theta$  con varianzas  $a\sigma^2$  y  $b\sigma^2$ , con  $a$  y  $b$  constantes reales positivas, respectivamente. Considere el estimador  $\hat{R} = t\hat{P} + (1 - t)\hat{Q}$ , con  $t \in [0, 1]$

- a) Demuestre que  $\hat{R}$  es un estimador insesgado del parámetro  $\theta$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .
- b) Calcule el valor de  $t$  de modo que  $\hat{R}$  tenga la menor varianza.
- c) Sin hacer más cálculos, si  $a = 1$  y  $b = 5$ , ¿cuál de los siguientes estimadores insesgados de  $\theta$  es mejor:  $\hat{R} = \frac{5}{6}\hat{P} + \frac{1}{6}\hat{Q}$  o  $\hat{T} = \frac{2}{3}\hat{P} + \frac{1}{3}\hat{Q}$ ? R/  $\hat{R}$