Variables aleatorias discretas

Variables que se pueden contar 10 ✓

10.2 ✗

Definición informal

Se dice que X es una variable aleatoria discreta si X es una variable aleatoria cuyo rango es finito o infinito numerable.

Definición formal

$\Omega = 1$

Se dice que X es una variable aleatoria discreta con espacio muestral Ω y sea P una probabilidad sobre Ω. La función $f_X : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_X(m) = P(X = m)$ es llamada la **función de distribución de probabilidad** o **función de densidad**.

Función de distribución

- **Condiciones de la función de distribución**

  Sea X una variable aleatoria discreta con función de distribución de probabilidad f_X, entonces, se cumple que:

  1. $f_X(m) \geq 0$, para todo $m \in R_X$
  2. $\sum_{m \in R_X} f_X(m) = 1$ ← Igualar a 1

  Nota: *cuando la variable aleatoria discreta tiene rango infinito, se procede a resolver una serie geométrica, telescópica o exponencial según corresponda, tomando en cuenta lo siguiente:*

- **Serie geométrica**

  Una serie geométrica con razón r es de la forma:

  $$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

  donde r un número real.
  Dicha serie converge a $\dfrac{r^p}{1-r}$ si y solo si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$

  Ahora bien, la función de distribución acumulada de la serie geométrica viene dada por:

  $$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

  donde r un número real.

- **Serie telescópica**

  Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es telescópica si existe una sucesión $\{b_n\}$ tal que $a_n = b_n - b_{n+1}$, es decir:

  $$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{n=p}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

  La serie converge a $b_p - \lim_{k \to +\infty} b_{k+1}$ si $\lim_{k \to +\infty} b_{k+1}$ existe y diverge si $\lim_{k \to +\infty} b_{k+1}$ no existe.

  Casi no se usa

- **Serie exponencial**

  Una serie exponencial es de la forma:

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  la cual converge a e^x.

Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta y f_X una ley de probabilidad para X. Se dice que $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función de distribución acumulada** o **función de masa** para X si:

$$F_X(m) = \sum_{\substack{k \in R_X \\ k \leq m}} f_X(k) = P(X \leq m)$$

Aqui no se iguala a 1

- **Características**

  Sea X una variable aleatoria discreta y F_X la función de distribución acumulada de probabilidad de X, entonces se cumple que:

  1. $F_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
  2. F_X es creciente.
  3. $P(X > m) = 1 - F_X(m)$, para $m \in \mathbb{R}$
  4. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$
  5. $f_X(x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1}), \forall x_n \in R_X$ que no sea el mínimo de R_X
  6. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  7. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

Termina en ∞

Empieza en 0

Determine el valor de k para que f_X sea función de probabilidad. R/ $k = \frac{1}{e^2}$

Escribir como una suma e igualar a 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + k \frac{1}{2} \sum_{x!}^{\infty} \cdot \frac{2^x}{x!} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{1 - \frac{1}{2}} + k \cdot \frac{1}{2} \cdot e^2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{k \cdot e^2}{2} = 1$$

$$\frac{1 + k \cdot e^2}{2} = 1 \longrightarrow 1 + k \cdot e^2 = 2$$

$$k \cdot e^2 = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{e^2}}$$

Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = \frac{\chi}{6^{2k-1}}, \text{ con } k = 2, 3, 4, \ldots \text{ y } \chi \in \mathbb{R}$$

a) Determine el valor de χ R/ $c = 210$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\chi}{6^{2k-1}} = 1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\chi}{36^{k} \cdot 6^{-1}} = 1$$

$$6\chi \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{36}\right)^{k} = 1$$

$$6\chi \cdot \frac{\left(\frac{1}{36}\right)^{2}}{1 - \frac{1}{36}} = 1$$

$$6\chi \cdot \frac{1}{1260} = 1$$

$$6\chi = 1260$$

$$\boxed{\chi = 210}$$

$f_X(k) = \frac{X}{6^{2k-1}}$, con $k = 2, 3, 4, \ldots$ y $X \in \mathbb{R}$

b) Sea $m \in \mathbb{N}^*$, determine la función acumulada evaluada en m R/ $1 - 36\left(\frac{1}{36}\right)^m$

nota
n = entero > 0

Aquí como empieza en n y no en 0, ocupan restarse desde n-1 hasta 0 para hacer que empiece en 0, esto se hace al final, al tener ya la forma geométrica

Inciso pasado x=210

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{210}{6^{2n-1}}$$

Ahora bien, la función de distribución acumulada de la serie geométrica viene dada por:

$$\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

donde r un número real.

Esto al final, al tener ya la forma geométrica

Aquí ya

$$210 \cdot 6 \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{36}\right)^n$$

solo a esa parte

$$1260 \left[\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{36}\right)^n - \left(\frac{1}{36}\right)^1 - \left(\frac{1}{36}\right)^0 \right]$$

en m, no en n

$$1260 \left[\frac{1-\left(\frac{1}{36}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{36}} - \frac{37}{36} \right]$$

$$1260 \left[\frac{1-\left(\frac{1}{36}\right)^{m+1}}{\frac{35}{36}} - \frac{37}{36} \right]$$

$$1260 \left[\frac{36}{35} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{36}\right)^{m+1}\right) - \frac{37}{36} \right]$$

$$1260\left[\frac{36}{35}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{36}\right)^{n+1}\right)-\frac{37}{36}\right]$$

$$1260\left[\frac{36}{35}-\frac{36}{35}\left(\frac{1}{36}\right)^{m}\cdot\frac{1}{\cancel{36}}-\frac{37}{36}\right]$$

$$1296-36\left(\frac{1}{36}\right)^{m}-1295$$

$$\boxed{1-36\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^{m}}$$

c) Determine $P(X>3)$ R/ $\frac{1}{1\,296}$

3. $P(X>m)=1-F_X(\cancel{k})$, para $m\in\mathbb{R}$ $f_X(k)=P(X\leq m)$

Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta y f_X una ley de probabilidad para X. Se dice que $F_X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una **función de distribución acumulada** o **función de masa** para X si:

$$F_X(m)=\sum_{\substack{k\in R_X\\ k\leq m}} f_X(k)=P(X\leq m)$$

$P(X\leq m)=F_X(m)$, $P(X<m)=F_X(a-1)$

entonces si piden $P(X>m)=1-P(X\leq m)=1-F_X(m)$

o si piden $P(X\geq m)=1-P(X<m)=1-F_X(m-1)$

$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$

$1-F_X(3)$ ← Acumulada del ejercicio pasado

$$1-\left(1-36\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^{m}\right)$$

$$1-\left(1-36\left(\frac{1}{36}\right)^{3}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{1296}}$$