Práctica de probabilidades.

Curso: MA2404 Probabilidades.

Enunciados

1. A un centro hospitalario llegan 100 personas con síntomas de cierta enfermedad. Por limitaciones de espacio y médicos sólo se pueden evaluar a 30 de ellos al azar. Si en total 25 de los 100 pacientes en realidad tienen dicha enfermedad:

   (a) ¿cuál es el rango y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X que representa el total de personas con la enfermedad en la muestra?

   (b) ¿cuál es la probabilidad de que en ese día se detecten más de 12 casos de la enfermedad?

2. La probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado alterado es de $\frac{2}{3}$. Un participante en un concurso se considera ganador si al lanzar este dado sucesivamente obtiene un número par hasta después del segundo lanzamiento. De siete participantes que asistirán un día al concurso, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de los participantes sean ganadores?

3. Un experimento, cuyos resultados son Éxito (p) y Fracaso ($1-p$), se repite varias veces hasta que se dé alguna de las siguientes condiciones:

   - se acumulan dos Éxitos.
   - hay dos Fracasos consecutivos.

   (a) Determine el espacio muestral y la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X que representa el total de repeticiones que se deben hacer para que el experimento termine.

   (b) ¿Cuál es la $E(X)$, en términos de p?

4. Se ha publicado que la razón de personas que se infectan de una enfermedad en México sigue aproximadamente una distribución de Poisson, con un promedio de 15 personas infectadas por día.

   (a) Determine la probabilidad de que menos de 10 personas sean infectadas mañana en este país.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten más de 25 personas infectadas por la enfermedad en el siguiente fin de semana (sábado y domingo)?

5. El total de estudiantes de una clase es 20, donde 14 son mujeres y 6 hombre. La maestra debe hacer aleatoriamente dos grupos de 10 estudiantes cada uno. Determine la distribución de probabilidad para el total de hombre del grupo 1.

6. Carlos tiene 6 confites en su bulto: 2 de menta y 4 de coco. Él quiere sacar un confite de menta pero no puede ver dentro del bulto, por lo que saca de manera aleatoria uno a uno (sin reposición) hasta que saque un confite de menta. Determine la esperanza para el total de confites que saca Carlos hasta obtener el primero de menta.

7. Determine la función generadora de momentos $m_X(t)$ para la distribución:

$$f_X(k) = R \cdot p^k \ ,$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Use esta generadora de momentos para encontrar la varianza de la distribución de probabilidad (en términos de R y p). ¿Se puede escribir la varianza en términos de p únicamente?

8. En una intersección ocurren en promedio 18 accidentes de tránsito por año, siguiendo una distribución de Poisson.

   (a) Determine la probabilidad de que ocurran menos de dos accidentes de tránsito durante un mes del año.

   (b) Determine la probabilidad de que este año ocurran 14 o más, pero menos de 17 accidentes.

9. Don Luis juega a los tiempos con mucha frecuencia, este sorteo paga 90 por uno, es decir si pega el número que compra ganas 90 colones por cada colón invertido. Cada vez que hay juego apuesta una cantidad fija a cada uno de 30 números distintos. Si él jugó durante 20 sorteos consecutivos, determine la esperanza para el total de ganancias de don Luis.

10. Un extraño virus se propaga con mucha rapidez en un país. Cuando una persona infectada entra en contacto con una no infectada la probabilidad de contagio es de 0.02. Si un infectado entra en contacto con 100 personas al día, ¿cuál es la probabilidad de que infecte a más de diez personas?

11. A un centro hospitalario llegan 100 personas con síntomas de influenza porcina. Por limitaciones de espacio y médicos solo pueden se pueden evaluar a 30 de ellos al azar. Si en total 25 de los 100 pacientes tienen en realidad la influenza. Determine:

    (a) el rango y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X que representa el total de personas con influenza en la muestra.

    (b) la probabilidad de que ese día se detecten más de 12 casos con influenza.

12. La probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado es de $\frac{2}{3}$. Un participante en un concurso se considera ganador si al lanzar este dado sucesivamente obtiene un número par hasta después del segundo lanzamiento. De siete participantes que asistirán un día al concurso, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de los participantes sean ganadores?

13. Se ha publicado que la cantidad de personas que se infectan de influenza porcina en el mundo sigue aproximadamente una distribución de Poisson, con un promedio de 45 personas infectadas por día.

    (a) Determine la probabilidad de que menos de 35 personas sean infectas mañana a nivel mundial.

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten más de 50 personas infectas por influenza en el siguiente fin de semana (sábado y domingo)?

14. Determine la varianza de la variable aleatoria Y, si se sabe que $Y = \dfrac{X}{4} - 7$, $E(Y) = -6$ y $E\left(X^2\right) = 17$.

15. En un juego se lanzan 3 dados. Sea X una v.a.d. que corresponde al número de caras en las que se obtienen un 4 o un 5 como resultado.

    (a) Determine la función de distribución de probabilidad $f_X(x)$.

    (b) La función de distribución acumulada $F_X(x)$.

16. La probabilidad de ganar un juego es de 0.2. Cada juego cuesta 1 000 colones, y al ganar, se obtienen 4 750 colones.

    (a) De 25 juegos, determine la probabilidad de ganar al menos 10 de ellos.

    (b) ¿Cuánta es la cantidad de dinero que se espera ganar o perder al jugar 25 juegos?

    (c) ¿Cuál es la probabilidad de que se gane después del quinto intento?

    (d) Juan es muy metódico para jugar. Si el primer juego lo gana en el n-ésimo intento, entonces juega en total $3n$ juegos. ¿Cuántas veces se espera que juegue Juan?

17. Una fábrica de televisores conoce que la probabilidad de que un televisor falle en el primer año es de 0.01. En un año se fabrican 1 000 televisores para un hotel. Determine la probabilidad de que fallen entre 8 y 15 televisores.

18. Dos bombillos defectuosos se mezclan con tres buenos. Se selecciona uno a uno un bombillo al azar y sin reposición hasta encontrar los dos defectuosos. Sea X el número de bombillos seleccionados.

    (a) Determine la función de probabilidad de X.

    (b) Determine $E(X)$.

    (c) Determine $Var(X)$ y σ_X.

19. En una bolsa hay 15 bolas rojas y 5 bolas verdes. Un juego consiste en sacar 10 bolas sin reposición, y se gana si se obtienen al menos 3 bolas verdes.

    (a) Determine la probabilidad de ganar el juego.

    (b) Alberto juega 10 veces. Determine la probabilidad de que gane al menos 2 juegos.

20. En una urna hay dos bolitas marcadas con 200 puntos, una con 100 puntos, una con 300 puntos y una con 500 puntos. Se extraen al azar dos de estas bolitas. Determine la media para el total de puntos acumulados en ambas bolitas.

21. Un experimento cuyos resultados son éxito (con probabilidad p) y fracaso (con probabilidad $1-p$) se repiten varias veces hasta que se dé alguna de las siguientes condiciones:

    - se acumulan dos éxitos.
    - haya dos fracasos consecutivos.

    (a) Determine el espacio muestral y la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X que representa el total de repeticiones que se debe hacer el experimento.

    (b) ¿Cuál es la media para el total de lanzamientos en términos de p?

22. Un experimento consiste en lanzar dos dados distinguibles. Considere la variable aleatoria X: el resultado menor obtenido en los dos dados. Por ejemplo si se obtiene en los dados $(3,2)$ el valor de $X=2$.

    (a) Hallar la función de distribución de probabilidad de la variable X.

    (b) Hallar la función acumulada de X.

    (c) Hallar la esperanza y varianza de X.

23. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot 4^{1-2x} & \text{, si} \quad x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases} .$$

    (a) Determine el valor de la constante k para que f sea realmente una función de probabilidad.

    (b) Determine la función generadora de momentos para la función f.

    (c) Determine $E(X)$ y $Var(X)$.

24. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p, donde n es el número de experimentos de Bernoulli y p la probabilidad de éxito. Demuestre que:

$$P[X = k+1] = P[X = k] \cdot \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k}{k+1} .$$

25. Se ha determinado que Lionel Messi mete un gol de tiro libre en partidos oficiales con una probabilidad de $p = 0.6$. Calcular el número de tiros libres que debe ejecutar Messi para que obtenga una probabilidad de anotar de al menos el 95%.

26. $*$ Se lanza un dado justo n veces. Sea X el número de veces que cayó un 6.

    (a) Determine el rango de X.

    (b) Determine la función de distribución de probabilidad.

    (c) Se piensa en un juego, el cual se gana si al realizar los n lanzamientos, se obtiene exactamente un 6; y se pierde si no se obtiene ningún 6 (en el resto de los casos no se gana ni se pierde). Determine n de manera que la probabilidad de ganar sea igual a la probabilidad de perder.

27. $*$ En el banco, cada año escogen a 20 de los mejores concursantes, de los cuales 7 son mujeres y el resto hombres. De ellos se seleccionan al azar 8 para trabajar en San José, y el resto se reparten en otras sucursales. Una auditoría externa ha comenzado un estudio de equidad de genero en las oficinas de la capital, y considera que existe una política injusta si de los funcionarios nuevos, a lo sumo la cuarta parte son mujeres; y si ello ocurre durante 3 años consecutivos, realiza una denuncia formal.

    (a) Determine la probabilidad de que en un año, el banco seleccione más de 2 mujeres, de las 8 personas seleccionadas para trabajar en San José.

    (b) Determine la probabilidad de que el banco pueda ser denunciado formalmente al finalizar el tercer año después de haber iniciado sus contrataciones.

28. $*$ Un profesor ha determinado que la probabilidad de que un estudiante responda cierta pregunta es de 0.3, lo cual se lo hizo saber a los estudiantes. Dicha pregunta se coloca en un examen a un grupo de 10 estudiantes, y ofrece anularla en caso de que menos de 3 estudiantes la hayan respondido de manera correcta. Regina puede contestar la pregunta de manera correcta, pero 2 de sus compañeros le han hecho señas de que no la saben hacer, así que le piden que la conteste mal. Del resto no se sabe nada. Quiere ayudar a sus compañeros, pero tiene miedo de que al menos 3 de los otros compañeros respondan la pregunta de manera correcta.

    (a) Si ella responde la pregunta de manera correcta, determine la probabilidad de que la pregunta se anule.

    (b) Si ella responde la pregunta de manera incorrecta, determine la probabilidad de que la pregunta no se anule.

    (c) ¿Qué haría usted en el caso de Regina? Justifique.

29. $*$ Demuestre que:
$$E\left([X-a]^2\right) = Var\left(X\right) + \left[E\left(X\right) - a\right]^2 \quad , \quad \text{donde } \; a \in \mathbb{R} \; .$$

30. $*$ En el programa Sábado Pequeño, el finalista debe jugar el siguiente concurso: se tiene inicialmente una canasta con 12 bolas (9 blancas y 3 negras), el finalista en cada turno tomará al azar tres bolas, se anotará el color de estas y se devolverán a la canasta. De un turno a otro se retiran dos bolas blancas de la canasta, y en total son 3 turnos.

    (a) Sea X el número de turnos en los cuales salió al menos una bola negra, determine la función de distribución de X.

    (b) Si el número de turnos en los cuales salió al menos una bola negra es menor a dos, el finalista se gana un automóvil del año. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo finalista se lleve el automóvil?