II Semestre 2022
Probabilidades – III Examen Parcial

2) **(2 pts)** El tiempo que tarda un proceso es una variable aleatoria Gamma con media 6 segundos y varianza 9 segundos al cuadrado. Determine la probabilidad de que un proceso elegido de manera aleatoria tarde más de 6 segundos.

Solución: $\mu = 6, \quad \sigma^2 = 9 \Rightarrow \beta = 1.5 \quad$ y $\quad \alpha = 4. \quad P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F\left(\frac{6}{1.5}, 4\right) = 1 - 0.567 = 0.433.$

4) **(4 pts)** Se sabe que el total de personas que asisten diariamente a un EBAIS es una variable aleatoria discreta con media 200 pacientes y desviación estándar 25 pacientes. Se desea establecer una cota inferior para la probabilidad de que un día cualquiera lleguen entre 150 y 250 pacientes.

Solución: $\mu = 200$ y $\sigma = 25$. Cota inferior $\Rightarrow$ desigualdad de Chebishev. Entre 150 y 250: $150 \leq X \leq 250 \Rightarrow -50 \leq X - \mu \leq 50 \Rightarrow |X - \mu| \leq 50 \Rightarrow P(|X - \mu| < 51) \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{51^2}$. R/ 0.7597

5) **(4 pts)** Se sabe que la probabilidad de que un paciente convocado por un EBAIS para aplicarse cierta dosis de la vacuna contra la COVID-19 realmente llegue es de 0.8. En ese EBAIS se convoca a 5000 personas que deberían aplicarse la vacuna pero por aspectos económicos la administración desea llevar solo las dosis necesarias para asegurarse que el 95 % de las personas que lleguen a vacunarse tengan su vacuna. ¿De cuántas vacunas debe disponer ese EBAIS?

Solución: $p = 0.8, n = 5000$. X es el número de personas que llegan, k es el número de vacunas que debe disponer. $P(X \leq k) = 0.95$.

$$\mu = 4000; \sigma^2 = 800;$$
$$\Phi\left(\frac{k - 4000}{\sqrt{800}}\right) = 0.95 \Rightarrow \Phi\left(-\frac{k - 4000}{\sqrt{800}}\right) = 0.05$$
$$\Rightarrow -\frac{k - 4000}{\sqrt{800}} = -1.645 \Rightarrow k = 446.52$$

(El valor **DEBE** ser entero.) R/ 447

7) **(3 pts)** Los pesos de cierto tipo de paquetes de correo son una variable aleatoria normal con media 200 gramos y varianza 400 gramos al cuadrado. Estos paquetes se colocan en bolsas de correo que llevan 5 paquetes. Un control previo al envío revisa las bolsas y rechaza aquellas cuyo peso exceda los 1050 gramos. ¿Qué porcentaje de las bolsas se rechaza?

Solución: $\mu = 200, \sigma^2 = 400; n = 5$. (No dice promedio, debe corresponder a **suma**). $\mu_S = 1000, \sigma_S^2 = 2000$.

$$\begin{aligned} P(S > 1050) &= 1 - P(S \leq 1050) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1050 - 1000}{\sqrt{2000}}\right) \quad \text{(ojo el redondeo)} \\ &= 1 - \Phi(1.12) = \Phi(-1.12) = 0.1314 \end{aligned}$$

8) **(4 pts)** Un político desea justificar que los salarios en su país son equitativos. Para hacerlo contrata una empresa que le brinda la siguiente información como correcta. El salario promedio en la población es de 980 000 colones y además le indica que el 70 % de las veces que elija una muestra aleatoria de 1000 salarios, el promedio de éstos estará entre 960 000 y 1 000 000. Determine la varianza para el salario en esta población.

Solución: Observe que piden σ_X. Además, como el intervalo está centrado con respecto a 0.98, la cola izquierda es igual a la cola derecha.

$$\mu = 0.980 \quad \text{(en millones, no importa la 'escala' que uno use)}$$
$$n = 1000, \mu_{\overline{X}} = 0.980, \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{1000}}$$
$$P(0.96 < X < 1.00) = 1 - 2P(X < 0.96) = 0.7$$
$$\Rightarrow 1 - 2\Phi\left(\frac{0.96 - 0.98}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{1000}}}\right) = 0.7$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10\sqrt{10}(0.96 - 0.98)}{\sigma_X}\right) = 0.15$$
$$\Rightarrow \frac{10\sqrt{10}(0.96 - 0.98)}{\sigma_X} = -1.04 \Rightarrow \sigma_X = 0.608 \Rightarrow \sigma_X^2 = 0.370$$

R/ La varianza es de 370 mil colones².

I Semestre 2023
Probabilidades – III Examen Parcial

1) **(3 pts)** En una ciudad, el consumo de energía eléctrica, en millones de kilovatios por día, sigue una distribución gamma, con media 90 millones de kilovatios por día y varianza 1620 millones de kilovatios por día². Determine la probabilidad de que en un día cualquiera dicho consumo sea inferior a 81 millones de kilovatios.

Solución:
$$\mu = 90, \sigma^2 = 1620 \Rightarrow \beta = 18 \wedge \alpha = 5$$
$$P(X < 81) = F\left(\frac{81}{18}, 5\right) = 0.468$$

3) **(3 pts)** Se lanza una moneda 100 veces. Considere la variable X correspondiente a la cantidad de veces en la que se obtiene escudo. Utilizando la desigualdad de Chebyshev, acote inferiormente la probabilidad de obtener de 40 a 60 escudos. Luego, determine la probabilidad de obtener de 40 a 60 escudos y compárela con la cota encontrada.

Solución:
$$n = 100, p = 0.5, X \sim \text{binom}, \mu_X = 50, \sigma_X^2 = 25$$
$$40 \leq X \leq 60 = |X - 50| \leq 10 \Rightarrow P(|X - 50| < 11) \geq 1 - \frac{25}{11^2} = 0.7934$$
$$P(40 \leq X \leq 60) = \sum_{X=40}^{60} \binom{100}{X} 0.5^X (1 - 0.5)^{100-X} = 0.9648$$

4) Cierto dispositivo electrónico, cuando está completamente cargado, presenta una duración de descarga completa, en horas, que sigue una distribución normal, cuya media es de 2.4 horas y desviación estándar desconocida.

a) **(3 pts)** Suponiendo que la probabilidad de que el tiempo de descarga mencionado sea superior a las 3 horas es de 20 %, determine el valor la varianza para dicho tiempo de descarga.

Solución:
$$\mu = 2.4, P(X > 3) = 0.2 \Rightarrow P(X \leq 3) = 0.8$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{3 - 2.4}{\sigma}\right) = 0.8 \Rightarrow \Phi\left(-\frac{0.6}{\sigma}\right) = 0.2$$
$$\Rightarrow -\frac{0.6}{\sigma} = -0.84 \Rightarrow \sigma = 0.714$$

R/ $\sigma^2 = 0.51$ horas²

b) **(3 pts)** Suponiendo que la desviación estándar es de 0.8 horas, ¿cuál es la probabilidad que un dispositivo electrónico tenga una duración de descarga entre 1.3 y 2.7 horas?

Solución:
$$P(1.3 < X < 2.7) = P(X < 2.7) - P(X \leq 1.3) = \Phi\left(\frac{2.7 - 2.4}{0.8}\right) - \Phi\left(\frac{1.3 - 2.4}{0.8}\right)$$
$$= \Phi(0.375) - \Phi(-1.375) = 1 - \Phi(-0.375) - \Phi(-1.375)$$
$$= 1 - 0.3540 - 0.0845 = 0.5615$$

5) Un servicio de entrega de comida rápida cumple los pedidos con una media de 35 minutos y una desviación estándar de 8 minutos.

a) **(3 pts)** Si esta semana se entregaron 200 pedidos, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de entrega promedio esté entre 32 y 36 minutos?

Solución:
$$\mu_{\overline{X}} = 35, \sigma_{\overline{X}} = \frac{8}{\sqrt{200}}, P(32 < X < 36) = P(X < 36) - P(X \leq 32)$$
$$= \Phi\left(\frac{36 - 35}{\frac{8}{\sqrt{200}}}\right) - \Phi\left(\frac{32 - 35}{\frac{8}{\sqrt{200}}}\right) = \Phi(1.77) - \Phi(-5.30)$$
$$= 1 - \Phi(-1.77) - \Phi(-5.30) = 1 - 0.0384 - 0 = 0.9616$$

b) **(3 pts)** A un repartidor le dan un bono la primera vez que supera las 120 horas en los servicios de entregas. ¿Cuál es la probabilidad de que le den dicho bono la semana que entregó los 200 pedidos?

Solución: 120 horas = 7200 minutos.
$$\mu_S = 7000, \sigma_S = 8\sqrt{200}, P(X > 7200) = 1 - P(X \leq 7200)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{7200 - 7000}{8\sqrt{200}}\right) = 1 - \Phi(1.77) = \Phi(-1.77) = 0.0384$$

6) **(4 pts)** El tiempo X, en semanas, entre la ocurrencia y la notificación de un accidente ante una aseguradora tiene una distribución de probabilidad dada por:

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{8t - t^2}{72} & \text{para} \quad 0 < t < 6 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

El tiempo Y, en semanas, entre la notificación de un accidente y el pago del seguro cumple que $Y = \dfrac{X + 12}{3}$. Determine la probabilidad de que el tiempo entre la notificación de un accidente y el pago del seguro sea menor a 5 semanas.

Solución:
$$P(Y < 5) = P\left(\frac{X + 12}{3} < 5\right) = P(X + 12 < 15) = P(X < 3)$$
$$\int_0^3 \frac{8t - t^2}{72}\, dt = \left[\frac{4t^2}{72} - \frac{t^3}{72 \cdot 3}\right]_0^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$$

7) **(5 pts)** Se sabe que en la autopista El Platino la probabilidad de sufrir un accidente es de 7 %. El director, en su informe anual, escribió lo siguiente:

"De # conductores que han transitado, la probabilidad de que al menos 20 tengan un accidente en nuestra autopista es del 25 %",

donde # es un número borroso. Determine dicho número borroso.

Solución:
$$n = ?, \mu = 0.07n, \sigma = \sqrt{0.0651n}, P(X \geq 20) = 0.25$$
$$\Rightarrow P(X < 20) = 0.75 \Rightarrow \Phi\left(\frac{19.5 - 0.07n}{\sqrt{0.0651n}}\right) = 0.75 \Rightarrow \Phi\left(-\frac{19.5 - 0.07n}{\sqrt{0.0651n}}\right) = 0.25$$
$$\Rightarrow -\frac{19.5 - 0.07n}{\sqrt{0.0651n}} = -0.67 \Rightarrow n = 240.68$$

R/ 241 (aunque es probable que el director haya dicho 240)

II Semestre 2023
Probabilidades – III Examen Parcial

1) **(3 pts)** Determine el valor de a, de forma que la distribución de probabilidad para la variable aleatoria continua X tenga criterio:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{(ak^2+1)^2} & \text{si} \quad k \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

2) El peso de las piñas de una cierta finca sigue una distribución desconocida, con un media de 1.85 kilogramos y una desviación estándar de 0.2 kilogramos.

   a) **(3 pt)** Si se empacan en paquetes de 50 piñas para la exportación, ¿cuál es la probabilidad de que, en un paquete escogido al azar, el peso sea inferior a los 90 kilogramos?

   b) **(3 pt)** Si se empacan en paquetes de 50 piñas para la exportación, ¿cuál es la probabilidad de que, en un paquete escogido al azar, el peso promedio por piña sea de por lo menos 1.89 kilogramos?

3) Considere la variable aleatoria continua Y, la cual sigue una distribución normal, con media μ_Y desconocida y varianza $\sigma_Y^2 = 400$.

   a) **(3 pts)** Si se sabe que $P[Y > 20] = 0.3$, determine μ_Y.

   b) **(5 pts)** Suponiendo que $\mu_Y = 10$, determine un valor c tal que

$$P[\mu_X - c < X < \mu_x + c] = 0.1$$

4) **(4 pts)** Se sabe que el número de artículos producidos en una fábrica durante una semana es una variable aleatoria con media 500 artículos y varianza de 25 artículos². Utilizando la desigualdad de Chebyshev, acote inferiormente la probabilidad de que la producción de esta semana esté entre 490 y 510 artículos.

5) **(4 pts)** Una batería para un dispositivo electrónico tiene una duración que sigue una distribución Gamma, con media 2 meses y varianza 2 meses². En un total de 100 de estas baterías, determine la probabilidad de que más de 20 duren menos de 1 mes.

6) **(5 pts)** Se quiere estudiar la probabilidad de ganar un peluche en una máquina de garra. Para esto, se realizaron 70 intentos, y se obtuvo que la probabilidad de ganar al menos 10 peluches es de 30 % (suponga que solo se puede ganar un peluche por intento). Determine la probabilidad de ganar un peluche.

I Semestre 2024
Probabilidades – III Examen Parcial

1) **(3 pts)** En la universidad, se realizó un estudio para analizar las calificaciones finales de los estudiantes en un grupo de Cálculo. Se sabe que las calificaciones, denotadas por la variable aleatoria X, tienen una media de 70, con una desviación estándar de 5. Utilice la desigualdad de Chebyshev para encontrar una cota inferior para la probabilidad que de una calificación esté entre 55 y 85.

2) Considere la variable aleatoria continua Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{x^4} & \text{con} \quad x \geq k \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   a) **(3 pts)** Determine el valor de k.

   b) **(2 pts)** Calcule $P\left[\dfrac{3}{2} \leq X \leq 2\right]$.

4) Suponga que el tiempo T que tarda una persona en resolver una práctica para examen sigue una distribución normal con media 50 minutos y desviación estándar desconocida.

   a) **(3 pts)** Si se sabe que la probabilidad de que el tiempo para resolver la práctica supere los 80 minutos es del 5 %, determine el valor de la varianza de T.

   b) **(3 pts)** Suponiendo que $\sigma_T = 18.5$, determine el valor de c para que:

$$P[50 - c \leq T \leq 50 + c] = 0.975$$

5) Una compañía embotelladora de refrescos tiene envases para cierta bebida. Se sabe que la cantidad de refresco en una botella sigue una distribución, con media 2.02 litros y una desviación estándar de 0.04 litros.

   a) **(3 pts)** Si se inspeccionan 100 botellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad total de líquido esté entre 201 y 203 litros?

   b) **(4 pts)** Si se quiere que al menos el 95 % de la cantidad promedio de refresco esté entre 2 y 2.04, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

6) **(4 pts)** Una farmacéutica produce cierto tipo de pastillas, y lograron determinar que el 1 % de las pastillas producidas no cumplen con los estándares de calidad. Suponiendo que se tiene un lote de 500 pastillas, determine, utilizando la aproximación normal de la distribución binomial, la probabilidad de que entre 3 y 8 pastillas, inclusive, no cumplan con los estándares de calidad. Si calcula la probabilidad real, ¿considera que la aproximación es buena?

II Semestre, 2024

Tercer Examen Parcial – Probabilidades

1) En cierto cantón, se ha determinado que solo el 20 % de los conductores utiliza el cinturón de seguridad. Si en un operativo de tránsito se revisaron a 200 conductores, y se quiere determinar la probabilidad de que al menos 31 pero menos de 49 usen cinturón de seguridad:

   a) **(3 pts)** determine una cota inferior para dicha probabilidad, utilizando el teorema de Chebyshev.

   b) **(3 pts)** estime la probabilidad utilizando la aproximación de la binomial mediante la distribución normal.

2) **(3 pts)** Se ha determinado que el tiempo X, en horas, que semanalmente requiere un sitio web para actualizarse sigue una distribución gamma, con media de 12 horas y varianza de 48 horas^2. Determine la probabilidad de que, en una semana escogida al azar, el tiempo semanal de actualización del sitio sea inferior a 14 horas.

3) La ganancia diaria que recibe una soda en el centro de Naranjo, en dólares, tiene una media de 300 dólares, con una desviación estándar de 21.2 dólares.

   a) **(3 pts)** Determine, aproximadamente, la probabilidad de que la ganancia mensual (30 días) sea superior a los 9.1 miles de dólares.

   b) **(5 pts)** Si se quiere que al menos el 95 % de la ganancia diaria promedio esté entre 299 dólares y 301 dólares, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

4) **(4 pts)** Considere la variable aleatoria continua Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{con} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   Tomando μ_Z como la esperanza de Z y σ_Z^2 como la varianza de Z, calcule:

$$P[\mu_Z - \sigma_Z \leq Z \leq \mu_Z + \sigma_Z]$$