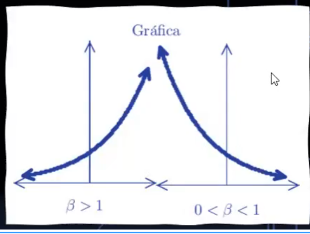
Regresion NO lineal simple

Modelos de regresión no lineales

- Muchas de las relaciones de las variables que se estudian a nivel estadístico, tienen comportamientos no lineales.
- Los modelos no lineales se determinan usualmente por dos métodos: mínimos cuadrados que ya se estudió para el caso lineal y el segundo, consiste en transformar las ecuaciones de los modelos no lineales a un modelo lineal, lo que llamaremos linealizar el modelo.

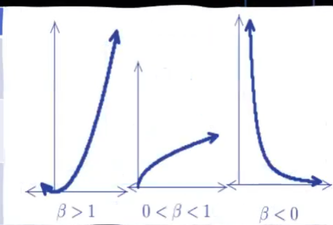
Modelo exponencial

Modelo	Transformación
$y = \alpha \cdot \beta^x$	Aplicando logaritmo natural: $\ln(y) = \ln(\alpha) + x \cdot \ln(\beta)$
Condiciones:	Cambios de variable: $x_1 = x$ $y_1 = \ln(y)$; $\beta_0 = \ln(\alpha)$; $\beta_1 = \ln(\beta)$
$y \neq 0$ Asíntota horizontal es el *eje x*	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$



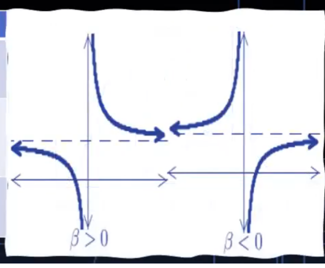
Modelo potencial

Modelo	Transformación
$y = \alpha \cdot x^\beta$	Aplicando logaritmo natural: $\ln(y) = \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(x)$
Condiciones:	Cambios de variable: $y_1 = \ln(y)$; $x_1 = \ln(x)$; $\beta_0 = \ln(\alpha)$; $\beta_1 = \beta$
Si $\beta > 0$, el modelo pasa por (0,0)	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1$



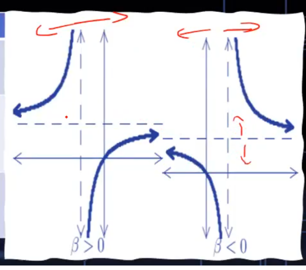
Modelo recíproco

Modelo	Transformación
$y = \alpha + \frac{\beta}{x}$	$y = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$
Condiciones:	Cambios de variable: $y_1 = y$; $x_1 = \frac{1}{x}$; $\beta_0 = \alpha$; $\beta_1 = \beta$
Asíntota horizontal $\neq$ *eje x* Asíntota vertical *eje y*	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1$



Modelo hiperbólico

Modelo	Transformación
$y = \frac{x}{\alpha x + \beta}$	$\frac{1}{y} = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$
Condiciones:	Cambios de variable: $y_1 = \frac{1}{y}$; $x_1 = \frac{1}{x}$; $\beta_0 = \alpha$; $\beta_1 = \beta$
Posee asíntotas verticales y horizontales que no necesariamente son los ejes	Modelo lineal obtenido: $y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1$



Aqui se puede sacar el a y b directo en la calculadora sin tener que calcularlo manual

$$b = \cancel{\frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}$$

$$a = \cancel{\frac{\sum y - b\sum x}{n}} = \bar{y} - b\bar{x}$$

menu → 6 → 2 → meter datos → AC → opt → 3

Ejemplo 97 *Considere los datos en la siguiente tabla:*

X varia poco

Y varia mucho

x	18	19	19.5	19.7	19.9
Y	19	40	79	130	397

1. *Escoja y justifique un modelo de regresión para Y como función de x, sabiendo que la variable x por su naturaleza toma valores menores que 20.*

$$Y = \frac{X}{\alpha x + \beta}$$, hiperbolico, suelen decir cual usar, $\alpha = a$ $\beta = b$

2. *Encuentre los coeficientes de la ecuación de regresión para el modelo escogido.*

$$Y_1 = \frac{1}{Y}, \quad X_1 = \frac{1}{X}, \quad Y_1 = a + b \cdot X_1$$

X	Y	$X_1\left(\frac{1}{X}\right)$	$Y_1\left(\frac{1}{Y}\right)$
18	19	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{19}$
19	40	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{40}$
19,5	79	$\frac{1}{19,5}$	$\frac{1}{79}$
19,7	130	$\frac{1}{19,7}$	$\frac{1}{130}$
19,9	397	$\frac{1}{19,9}$	$\frac{1}{397}$

Estos a la calcu para encontrar $y = a + bx$

$$y = -0,46977455 + 9,40324079\,X$$

El modelo seria

$$\boxed{Y = \frac{X}{\alpha x + \beta} = \frac{X}{-0,46977455 + 9,40324079\,X}}$$

3. Determine el valor esperado aproximado de Y cuando $x = 17$.

$$\frac{X}{-0{,}46977455+9{,}403241079\,X}$$

$$\frac{17}{-0{,}46977455+9{,}403241079\cdot 17} \approx 11{,}9959$$

4. Encuentre un Intervalo de confianza del 95% para α y β (los parámetros del modelo escogido en a).

Todos los datos es de la tabla nueva

IC para α: $a \pm t_{\delta/2,\nu} s\sqrt{\frac{\sum x_1^2}{nS_{xx}}}$ con $\nu = n-2$

IC para β: $b \pm t_{\delta/2,\nu} s\sqrt{\frac{1}{S_{xx}}}$ con $\nu = n-2$

$$S_{xx} = \sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n} \qquad S_{yy_1} = \sum y_1^2 - \frac{(\sum y_1)^2}{n}$$

$$S_{xy} = \sum xy_1 - \frac{(\sum x_1)(\sum y_1)}{n} \qquad s = \sqrt{\frac{S_{yy_1} - bS_{xy_1}}{n-2}}$$

$y = -0{,}46977455 + 9{,}403241079\,X$ $\quad n = 5 \quad \alpha = 0{,}05$

el a y b salen de este (Calcu) $\quad V = 3 \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$a = -0{,}46977455 \quad b = 9{,}403241079$

$S_{xx} = 0{,}0000018102 06$

$S_{yy} = 0{,}001600073979$

$S_{xy} = 0{,}00017027804$

$S = 0{,}00021488282$

$t_{0.025,3} = \pm 3{,}18245$

$X_1\ (\frac{1}{X})$	$Y_1\ (\frac{1}{Y})$
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{19}$
$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{40}$
$\frac{1}{19{,}5}$	$\frac{1}{79}$
$\frac{1}{19{,}7}$	$\frac{1}{130}$
$\frac{1}{19{,}9}$	$\frac{1}{397}$

$\sum x^2 = 0{,}01355882 6229$

Para a $a \pm t_{\delta/2,\nu} s \sqrt{\frac{\sum x^2}{nS_{xx}}}$ con $\nu = n - 2$

$-0{,}46977455 - 3{,}18245 \cdot 0{,}00021488282 \cdot \sqrt{\frac{0{,}01358826229}{5 \cdot 0{,}00160073979}}$

$= -0{,}9706655955$

$-0{,}46977455 + 3{,}18245 \cdot 0{,}00021488282 \cdot \sqrt{\frac{0{,}01358826229}{5 \cdot 0{,}00160073979}}$

$= -0{,}9688835045$

$\boxed{R \;]-0.9706655955, -0.9706655955[}$

Para b $b \pm t_{\delta/2,\nu} s \sqrt{\frac{1}{S_{xx}}}$ con $\nu = n - 2$

$9{,}403241079 - 3{,}18245 \cdot 0{,}00021488282 \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}000001810206}}$

$= 9{,}242145069$

$9{,}403241079 - 3{,}18245 \cdot 0{,}00021488282 \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}000001810206}}$

$= 9{,}564337089$

$\boxed{R/ \;]9.242145069, 9.564337089[}$

Ejemplo 98 *Seguidamente se muestra la distancia de frenado D (en pies) de un automóvil que viaja a la velocidad V (en millas por hora) a partir del instante en que se percibe el peligro.*

	Velocidad V (mi / h)	20	30	40	50	60	70
X	Distancia de frenado D (pies)	54	90	138	206	292	396

Y

1. *Seleccione y justique un modelo de regresión de la distancia de frenado dependiendo de la velocidad que lleva el automóvil.*

$y = a \cdot x^b$, potencial $\rightarrow \underbrace{\ln(y)}_{Y_1} = \underbrace{\ln(a)}_{a} + \underbrace{b}_{b}\underbrace{\ln(x)}_{X_1}$

2. *Encuentre la ecuación de regresión del modelo seleccionado en la parte (1).*

X_1	Y_1
$\ln(20)$	$\ln(54)$
$\ln(30)$	$\ln(90)$
$\ln(40)$	$\ln(138)$
$\ln(50)$	$\ln(206)$
$\ln(60)$	$\ln(292)$
$\ln(70)$	$\ln(396)$

Calcu

$\underbrace{Y}_{Y_1} = \underbrace{-0{,}870228393}_{a} + \underbrace{1{,}594556431}_{b}\,\underbrace{X}_{X_1}$

$\ln(a) = a$

$\ln(a) = -0{,}870228393$

$e^{\ln(a)} = e^{a}$

$a = e^{a}$

$a = e^{-0{,}870228393} = 0{,}41886$

En este modelo hay que hacer este despeje para el a

$b = b \rightarrow b = 1{,}594556431$

El modelo sería $y = a \cdot x^b$, potencial

$$\boxed{y = 0{,}41886 \cdot x^{1{,}594556431}}$$

3. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para α y β

$Y = -0{,}870228393 + 1{,}594556411X$

X_1	Y_1
$\ln(20)$	$\ln(54)$
$\ln(30)$	$\ln(90)$
$\ln(40)$	$\ln(138)$
$\ln(50)$	$\ln(206)$
$\ln(60)$	$\ln(292)$
$\ln(70)$	$\ln(396)$

$$a \pm t_{\delta/2,\nu} s \sqrt{\frac{\sum x^2}{nS_{xx}}} \text{ con } \nu = n-2$$

$$S_{xx} = \sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n} \quad S_{yy_1} = \sum y_1^2 - \frac{(\sum y_1)^2}{n}$$

$$S_{xy} = \sum xy_1 - \frac{(\sum x_1)(\sum y_1)}{n} \quad s = \sqrt{\frac{S_{yy_1} - bS_{xy_1}}{n-2}}$$

$S_{xx} = 1{,}083410023$

$S_{yy} = 2{,}779361722$

$S_{xy} = 1{,}727558398$

$S = 0{,}07853725723$

$n = 6$ $\quad \nu = 4$

$a = -0{,}870228393$

$\Sigma x^2 = 84{,}26768032$

$\alpha = 0{,}10$

$\alpha = 0{,}05$

$t_{0.05,4} = \pm 2{,}13185$

$$a \pm t_{\delta/2,\nu} s \sqrt{\frac{\sum x^2}{nS_{xx}}} \text{ con } \nu = n-2$$

$$-0{,}870228393 \pm 2{,}13185 \cdot 0{,}0785372 5723 \cdot \sqrt{\frac{84{,}26768032}{6 \cdot 1{,}083410023}}$$

$$]-1{,}473052773 , -0{,}267403913 4[$$

Para el caso de alfa, al no ser este parámetro equivalente a Bo, se debe realizar la siguiente transformación para calcular su IC de 90% como sigue:

$\alpha = e^{a}$, entonces

$$]e^{-1.473052773}, e^{-0.2674039134}[$$

$$\boxed{\alpha \;]0.229225, 0.765363[}$$

$$b \pm t_{\delta/2,\nu} s \sqrt{\frac{1}{S_{xx}}} \text{ con } \nu = n - 2$$

$b = 1{,}5945564 11$

$$1{,}59455 64 11 \pm 2{,}13185 \cdot 0{,}0785372 5723 \cdot \sqrt{\frac{1}{1{,}0834 10023}}$$

$$\boxed{R/\ ]1{,}43370091,\ 1{,}75591 1932[}$$

Ejemplo 99 *Considere los datos de la siguiente tabla:*

x :	1	2	4	6
Y :	5	7	20	40

A partir de estos datos, estime el coeficiente β de la ecuación de regresión $y = 3 + x^{\beta}$ trasformando el modelo a un modelo lineal y utilizando el método de mínimos cuadrados.

Linealizando el modelo

$$y = 3 + x^{\beta}$$

$$y - 3 = x^{\beta}$$

$$\underbrace{\ln(y-3)}_{y1} = \underbrace{\beta}_{\beta} \underbrace{\ln(x)}_{x1}$$

Hay que dejar β solo para poder aplicar ln y bajar β

Aplicando minimos cuadrados

$$y1 = \beta x1 \rightarrow y1 - \beta x1$$

$$f(\beta) = \sum (y1 - \beta x1)^2$$

$$f'(\beta) = \sum 2(y1 - \beta x1) \cdot -x1$$

$x1$	$y1$
$\ln(1)$	$\ln(5-3)$
$\ln(2)$	$\ln(7-3)$
$\ln(4)$	$\ln(20-3)$
$\ln(6)$	$\ln(40-3)$

$$= -2 \sum x y1 - \beta x^2 = 0$$

$$= \sum x y1 - \beta \sum x^2 = 0$$

$$= \beta = \frac{\sum x y_1}{\sum x_1^2} = \boxed{2{,}02372062}$$

$$\boxed{\therefore \text{ El modelo es } y = 3 + x^{2{,}02372062}}$$