

# Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	13
Fecha	Lunes 21 de octubre del 2024 (semana 14)
Contenidos	a) Ángulo entre vectores (paralelos y octogonales)
	b) Proyección vectorial
	c) Producto vectorial en vectores en $\mathbb{R}^3$ y sus propiedades.
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada <b>Contenidos</b> . Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

## Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Sean  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  y  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ , entonces, el producto cruz se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \hat{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{k} \end{aligned}$$

Consideré los vectores  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $v \cdot (v \times w) = 0$
2.  $w \cdot (v \times w) = 0$
3. Identidad de Lagrange:  $\|v \times w\| = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2$
4.  $v \times w = -(w \times v)$
5.  $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
6.  $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
7.  $\alpha(v \times w) = (\alpha v) \times w = v \times (\alpha w)$
8.  $v \times 0_3 = 0_3 \times v = 0_3$
9. Si  $v$  y  $w$  son paralelos, entonces  $v \times w = 0$

**Ejercicio:** Calcule el producto cruz de los siguientes vectores:

a)  $u = (2, 4, -5)$  y  $v = (-3, -2, 1)$

b)  $p = (1, -3, 4)$  y  $q = (-2, 1, 1)$

a)  $u \times v$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i} (4 \cdot 1 - -2 \cdot -5) - \hat{j} (2 \cdot 1 - -3 \cdot -5) + \hat{k} (2 \cdot -2 - -3 \cdot 4) \\ &= \hat{i} (-6) - \hat{j} (-13) + \hat{k} (8) \\ &= (-6, 13, 8) \end{aligned}$$

## Ángulo entre vectores

Si  $v, w \in \mathbb{R}^n$  son vectores no nulos, el ángulo entre  $v$  y  $w$ , denotado como  $\angle v, w$ , es el único  $\theta \in [0, \pi]$  tal que

$$\begin{aligned} v \cdot w &= \|v\| \|w\| \cos(\theta) \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}\right) \end{aligned}$$

## Vectores paralelos

Sean  $u, v$  dos vectores no nulos, entonces  $u$  y  $v$  son paralelos si  $\angle u, v = 0$  o bien  $\angle u, v = \pi$  o dicho de otra forma  $u = \lambda v$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Vectores perpendiculares o vectores octogonales

Sean  $u, v$  dos vectores no nulos, entonces  $u$  y  $v$  son perpendiculares si  $\angle u, v = \frac{\pi}{2}$  o dicho de otra forma  $u \cdot v = 0$ .

## Proyección octogonal

Si  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , con  $w \neq 0$ , se llama proyección octogonal de  $v$  sobre  $w$  al vector dado por:

$$\text{proj}_w^v = \underbrace{\frac{w \cdot v}{\|w\|^2}}_{\text{escalar}} \cdot \underbrace{w}_{\text{vector}}$$

**Ejercicio #1:** Considere los vectores  $u = (4, 1, 0)$ ,  $v_1 = (2, 0, 2)$ ,  $v_2 = (-1, 1, 4)$  y  $v_3 = (0, -1, 4)$

a) Calcule  $\text{proy}_{v_3}^u$

$$\begin{aligned}\text{proy}_{v_3}^u &= \frac{v_3 \cdot u}{\|v_3\|^2} \cdot v_3 \Rightarrow \text{proy}_{v_3}^u = \frac{(0, -1, 4) \cdot (4, 1, 0)}{\|(0, -1, 4)\|^2} \cdot (0, -1, 4) \\ &= \frac{0 \cdot 4 + -1 \cdot 1 + 4 \cdot 0}{(\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2})^2} \cdot (0, -1, 4) \\ &= \frac{-1}{17} \cdot (0, -1, 4) \\ &= \left(0, \frac{1}{17}, \frac{-4}{17}\right)\end{aligned}$$

$$\text{proy}_w^v = \underbrace{\frac{w \cdot v}{\|w\|^2}}_{\substack{\text{escalar} \\ \text{vector}}} \cdot w$$

b) Determine el ángulo formado por los vectores  $v_1$  y  $v_2$

$$\theta = \arccos \left( \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \right)$$

$$\theta = \arccos \left( \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} \right) \Rightarrow \theta = \arccos \left( \frac{(2, 0, 2) \cdot (-1, 1, 4)}{\|(2, 0, 2)\| \cdot \|(-1, 1, 4)\|} \right)$$

$$= \arccos \left( \frac{2 \cdot -1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

**Ejercicio #2:** Sean  $u = (-2, 0, 1)$  y  $v = (-1, 2, 1)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Halle el o los vectores  $w$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que

- a)  $w$  es paralelo a  $v$
- b) La proyección de  $w$  sobre  $u$  es igual a  $4u$

$$\text{Sea } w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

**Condición b)** Note que la proyección de  $w$  sobre  $u$  es  $4u$ , es decir:

$$\text{proy}_w^v = \frac{w \cdot v}{\|w\|^2} \cdot w$$

vector escalar

$$\begin{aligned} \text{proy}_u^w &= \frac{u \cdot w}{\|u\|^2} \cdot u \Rightarrow 4u = \frac{u \cdot w}{\|u\|^2} \cdot u \\ &\Rightarrow 4 = \frac{u \cdot w}{\|u\|^2} \\ &\Rightarrow 4 = \frac{(-2, 0, 1) \cdot (a, b, c)}{\|(-2, 0, 1)\|^2} \\ &\Rightarrow 4 = \frac{-2a + 0b + 1c}{(\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2})^2} \\ &\Rightarrow 4 = \frac{-2a + c}{5} \\ &\Rightarrow 20 = -2a + c \\ &\Rightarrow 20 + 2a = c \quad (1) \end{aligned}$$

**Condición a)** Como  $w$  es paralelo a  $v$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} w &= \alpha v \Rightarrow (a, b, c) = \alpha (-1, 2, 1) \\ &\Rightarrow (a, b, 20+2a) = (-\alpha, 2\alpha, \alpha) \quad \text{por (1)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha & (2) \\ b = 2\alpha & (3) \\ 20+2a = \alpha & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sustituyendo (2) en (4), se tiene que: } 20+2(-\alpha) &= \alpha \Rightarrow 20-2\alpha = \alpha \\ &\Rightarrow 20 = 3\alpha \\ &\Rightarrow \frac{20}{3} = \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Así } a = -\frac{20}{3}, \quad b = 2 \cdot \frac{20}{3} \Rightarrow b = \frac{40}{3} \quad y$$

$$20 + 2a = c \Rightarrow 20 + 2 \cdot -\frac{20}{3} = c$$

$$\Rightarrow \frac{20}{3} = c$$

Por tanto,  $w = \left( \begin{array}{ccc} a & b & c \\ -\frac{20}{3} & \frac{40}{3} & \frac{20}{3} \end{array} \right)$

**Ejercicio #3:** Sean  $u = (1, -2, 0)$  y  $v = (1, 1, 0)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Halle el o los vectores  $w$  en  $\mathbb{R}^3$  que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- a)  $w$  es perpendicular a  $u$
- b)  $\|w\| = 9$
- c) La proyección de  $w$  a lo largo de  $v$  es igual a  $-6v$

Sea  $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{proy}_w^v = \underbrace{\frac{w \cdot v}{\|w\|^2}}_{\substack{\text{vector} \\ \text{escalar}}} \cdot v$$

Condición c) Dado que la proyección de  $w$  a lo largo de  $v$  es  $-6v$ , se tiene que:

$$\text{proy}_v^w = \frac{v \cdot w}{\|v\|^2} \cdot v \Rightarrow -6v = \frac{v \cdot w}{\|v\|^2} \cdot v$$

$$\Rightarrow -6 = \frac{(1, 1, 0) \cdot (a, b, c)}{\|(1, 1, 0)\|^2}$$

$$\Rightarrow -6 = \frac{|a + b + 0c|}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2})^2}$$

$$\Rightarrow -6 = \frac{a + b}{2}$$

$$\Rightarrow -12 = a + b$$

$$\Rightarrow -12 - b = a \quad (1)$$

Condición a) Dado que  $w$  es perpendicular a  $u$ , se tiene que:

$$w \cdot u = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (1, -2, 0) = 0$$

$$\Rightarrow a + -2b + 0c = 0$$

$$\Rightarrow a - 2b = 0$$

$$\Rightarrow -12 - b - 2b = 0 \quad \text{por (1)}$$

$$\Rightarrow -12 - 3b = 0$$

$$\Rightarrow -12 = 3b$$

$$\Rightarrow -4 = b \quad (2)$$

Como  $a = -12 - b$  (por (1)), se tiene que  $a = -12 - -4$  por (2)  
 $\Rightarrow a = -8$

Condición b) Como  $\|w\| = 9$ , entonces:

$$\|(a, b, c)\| = 9 \Rightarrow \|(-8, -4, c)\| = 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + c^2} = 9$$

$$\Rightarrow (\sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + c^2})^2 = (9)^2$$

$$\Rightarrow (-8)^2 + (-4)^2 + c^2 = 9^2$$

$$\Rightarrow 64 + 16 + c^2 = 81$$

$$\Rightarrow c^2 = 81 - 64 - 16$$

$$\Rightarrow c^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = \pm 1$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \text{Así } w = (-8, -4, \pm 1) \end{array}$$

### Ejercicio #4:

Sean  $u = (1, 1, 1)$  y  $v = (1, -1, 2)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Determine el o los vectores  $x, y \in \mathbb{R}^3$  que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

$$a) u = x + y$$

$$b) x \parallel v$$

$$c) y \cdot v = 7$$

Sean  $x = (a, b, c)$  y  $y = (d, e, f)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$

Condición b) Note que  $x \parallel v \Rightarrow x = \alpha v$

$$\Rightarrow (a, b, c) = \alpha (1, -1, 2)$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = (\alpha, -\alpha, 2\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = -\alpha \\ c = 2\alpha \end{cases} \quad (1)$$

Condición c) Note que  $y \cdot v = 7 \Rightarrow (d, e, f) \cdot (1, -1, 2) = 7$

$$\Rightarrow d + -e + 2f = 7$$

$$\Rightarrow d - e + 2f = 7 \quad (2)$$

Condición a) Note que  $u = x + y \Rightarrow (1, 1, 1) = (a, b, c) + (d, e, f)$

$$\Rightarrow (1, 1, 1) = (a+d, b+e, c+f)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+d=1 \\ b+e=1 \\ c+f=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+d=1 \\ -\alpha+e=1 \\ 2\alpha+f=1 \end{cases}$$

por (1)

$$\Rightarrow \begin{cases} d=1-\alpha \\ e=1+\alpha \\ f=1-2\alpha \end{cases} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se tiene que:

$$d - e + 2f = 7 \Rightarrow 1 - \alpha - (1 + \alpha) + 2(1 - 2\alpha) = 7$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha - 1 - \alpha + 2 - 4\alpha = 7$$

$$\Rightarrow -6\alpha + 2 = 7$$

$$\Rightarrow -6\alpha = 7 - 2$$

$$\Rightarrow -6\alpha = 5$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{5}{6}$$

Como  $\alpha = -\frac{5}{6}$ , se tiene que:

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = -\alpha \\ c = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{6} \\ b = \frac{5}{6} \\ c = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1 - \alpha \\ e = 1 + \alpha \\ f = 1 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 - \frac{5}{6} \\ e = 1 + \frac{5}{6} \\ f = 1 - 2 \cdot \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{6} \\ e = \frac{11}{6} \\ f = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\text{Así } x = \left( -\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{3} \right) \quad y = \left( \frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{8}{3} \right)$$

**Ejercicio #5:** Sean  $A$  y  $B$  dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ , los cuales vienen definidos de la siguiente forma:  $A = (30, -5, 1)$  y  $B = (1, 2, -2)$ . Halle los vectores  $C$  y  $D$  en  $\mathbb{R}^3$  que satisfagan, simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\text{R/ } C = (2, 4, -4) \text{ y } D = (28, -9, 5)$$

a)  $A = C + D$

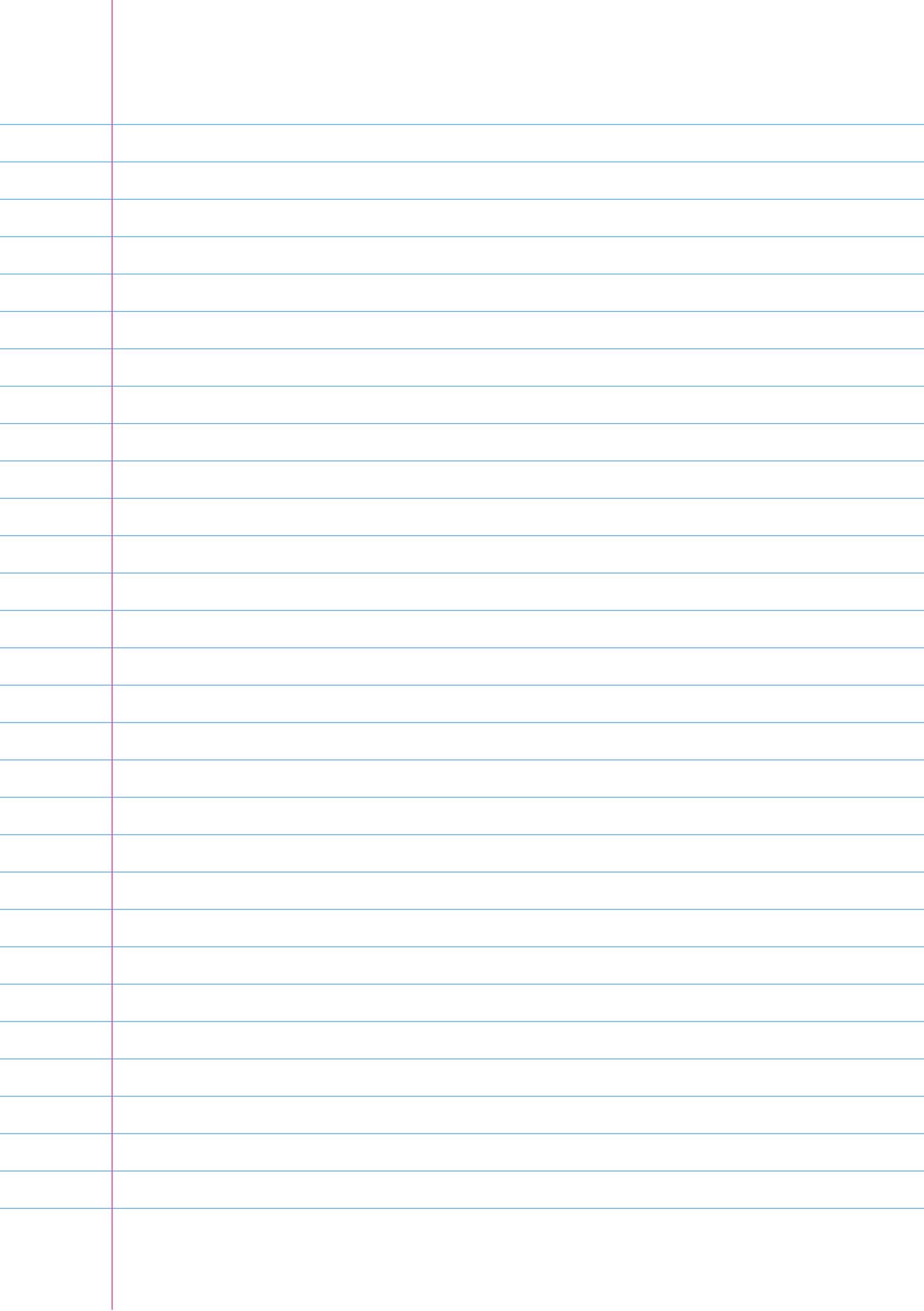
b)  $D \perp B$

c)  $C \parallel B$

Condición a)

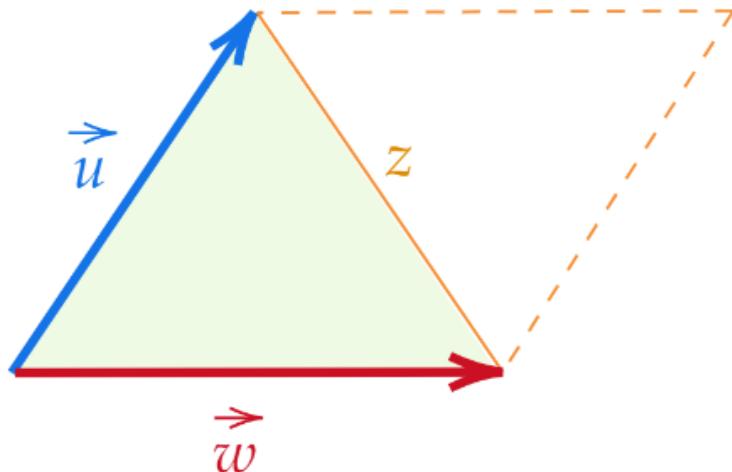
Condición b)

Condición c)



## Cálculo de áreas

De la igualdad de Lagrange se puede deducir la fórmula del área de ciertas figuras planas. Sean  $u, w, z$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ , los cuales se muestran seguidamente:



### Área de un triángulo

Note que  $\|u\|$ ,  $\|w\|$  y  $\|z\|$  representa la longitud de  $u$ ,  $w$  y  $z$ , respectivamente. El área de un triángulo formado por los vectores  $u, w, z$  viene dada por:

$$A = \frac{\|u \times w\|}{2}$$

*Nota: si un triángulo es equilátero, significa que  $\|u\| = \|w\| = \|z\|$ , si es isósceles, significa que  $\|u\| = \|w\|$  o  $\|u\| = \|z\|$  o  $\|w\| = \|z\|$ , mientras que si es un triángulo rectángulo, la medida de alguno de los ángulos equivale a  $90^\circ$  o bien  $\frac{\pi}{2}$ .*

### Área de un paralelogramo

Note que  $\|u\|$ ,  $\|w\|$  y  $\|z\|$  representa la longitud de  $u$ ,  $w$  y  $z$ , respectivamente. El área de un paralelogramo viene dada por:

$$A = \|u \times w\|$$

Ejercicio: Considere los puntos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(3, -1, 7)$  y  $C(7, 4, -2)$

a) Verifique que  $A, B, C$  son los vértices de un triángulo isósceles.

Note que los lados del triángulo son  $AB, AC, BC$ , así:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \|B-A\| & \|AC\| &= \|C-A\| & \|BC\| &= \|C-B\| \\ &= \|(3, -1, 7) - (1, 2, 1)\| & &= \|(7, 4, -2) - (1, 2, 1)\| & &= \|(7, 4, -2) - (3, -1, 7)\| \\ &= \|(2, -3, 6)\| & &= \|(6, 2, -3)\| & &= \|(4, 5, -9)\| \\ &= 7 & &= 7 & &= \sqrt{122} \end{aligned}$$

Se verifica que  $\triangle ABC$  es isósceles

b) Calcule la medida del ángulo cuyo vértice es  $B$ .

Se pide el ángulo cuyo vértice es  $B$ , es decir, el ángulo entre  $\vec{AB} = (2, -3, 6)$  y  $\vec{BC} = (4, 5, -9)$

$$\theta = \arccos \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \right)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \left( \frac{(2, -3, 6) \cdot (4, 5, -9)}{\|(2, -3, 6)\| \cdot \|(4, 5, -9)\|} \right) \Rightarrow \theta = \arccos \left( \frac{-61}{7 \cdot \sqrt{122}} \right) \\ &\Rightarrow \theta = 142.0809^\circ \\ &\Rightarrow \theta = 180^\circ - 142.0809^\circ \\ &\Rightarrow \theta = 37.9120^\circ \end{aligned}$$

c) Calcule el área del triángulo de vértices  $A, B, C$ .

$$\begin{aligned} \text{El área de un triángulo es } & \frac{\|AB \times BC\|}{2} = \frac{\|(2, -3, 6) \times (4, 5, -9)\|}{2} \\ &= 23.75394704 \text{ (m)}^2 \end{aligned}$$

## Ejercicios adicionales

**Ejercicio #1:** Sean los vectores  $u, v$  en  $\mathbb{R}^3$  tales que  $u \cdot v = 0$  y  $\|u\| = \|v\| = 2$

- a) Calcule el seno del ángulo entre los vectores  $u$  y  $v$ . R/ 1
- b) Determine el valor en grados del ángulo entre los vectores  $u$  y  $v$ . R/  $90^\circ$
- c) Calcule la norma del vector  $u \times v$  R/ 4
- d) Determine el valor que se obtiene al realizar R/ -36

$$(u - 2(u \times v) + 3v) \cdot (2v + 3(u \times v) + 9u)$$

**Ejercicio #2:** Sean  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (0, 1, 1)$ . Halle dos vectores  $w_1$  y  $w_2$  que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: (0, 1, 1) y (1, 0, 0)

- a)  $u = w_1 + w_2$
- b)  $v \cdot w_2 = 0$
- c)  $w_1 \parallel v$

**Ejercicio #3:** Sea  $u = (1, 2, -1)$ ,  $v = (2, -1, -3) \in \mathbb{R}^3$ . Halle los vectores  $w$  que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: R/  $\pm \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$

- a)  $w$  es combinación lineal de  $u$  y  $v$ .
- b)  $w \cdot u = 0$
- c)  $\|w\|^2 = \|v\|^2 - 2\|u\|^2$

**Ejercicio #4:** Considere los puntos  $A(-1, -2, 4)$ ,  $B(-4, -2, 0)$ ,  $C(3, -2, 1)$  vértices de un triángulo.

- a) Determine la medida del ángulo interno correspondiente al vértice  $B$ . R/  $45^\circ$
- b) Calcule el área de dicho triángulo. R/ 12.5
- c) Justifique si es un triángulo equilátero. R/ No