Considere el lanzamiento de un solo dado, cuya media está dada por $\mu = 7/2$ y su varianza por $\sigma^2 = 35/12$. Para el caso de lanzar n dados, sea $\overline{X}$ el promedio obtenido. Se tiene que $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$. Se quiere determinar n tal que:

$$P\left(\left[|\overline{X} - 3.5| > 0.17\right]\right) \leq 0.13$$

(1) [1 punto] Aproxime el valor de n utilizando la desigualdad de Chebyshev.

Datos:

$\mu = 7/2$ $\qquad \mu_x = \mu$

$\sigma^2 = 35/12$ $\qquad \sigma^2_x = \sigma^2/n$

Promedio $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 \ldots x_n}{n}$

$\mu_x = 7/2$

$\sigma^2_x = \dfrac{32}{12n}$

$P(|\overline{x} - 3.5| > 0,17) \leq 0.13$

Desigualdad de cheby

$P(|Y - \mu_y| \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2_y}{a^2}$, $a > 0$

$P(|\overline{x} - 3.5| \geq 0.17) \leq \dfrac{\frac{35}{12n}}{(0,17)^2}$

$\dfrac{\frac{35}{12n}}{(0,17)^2} \leq 0,13 \qquad \dfrac{35}{12n \cdot 0,0289} = \dfrac{35}{0,3468\, n}$

$35 \leq 0,13 \cdot 0,3468n \Rightarrow 35 \leq 0,045084n$

$n \geq \dfrac{35}{0,04508} \qquad n \approx 776,328631$

$\boxed{777}$

(2) **[2 puntos]** Aproxime el valor de n, utilizando el teorema del límite central.

Datos:

$\mu = 3{,}5$

$\sigma^2 = 35/12$

$\mu_{\bar{x}} = 3{,}5$ $\qquad\qquad P(|\bar{x} - 3{,}5| > 0{,}17) \leq 0{,}13$

$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{35}{12n}}$

$$\bar{x} \approx N\left(3{,}5 \,,\ \frac{35}{12n}\right)$$

$$P(|\bar{x} - 3{,}5| > 0{,}17) = P\left(|Z| > \frac{0{,}17}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

$$|Z| > \frac{0{,}17}{\sqrt{35/(12n)}}$$

$$P(|Z| > z_0) = 0{,}13 \Rightarrow P(|Z| < z_0) = 1 - 0{,}13$$

$$\Rightarrow P(Z \leq z_0) = 0{,}935$$

$$\Phi(z_0) = 0{,}935 \Rightarrow z_0 = 1{,}50$$

$$\Phi(-z_0) = 1 - 0{,}935 \Rightarrow 0{,}065$$

$$\Phi(z_0) = 1{,}51$$

$$\Phi(\cancel{-}z_0) = \cancel{-}1{,}51$$

z	0,00	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,6	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
-3,1	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016
-2,8	0,0026	0,0025	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022
-2,7	0,0035	0,0034	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030
-2,6	0,0047	0,0046	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040
-2,5	0,0062	0,0061	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054
-2,4	0,0082	0,0081	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071
-2,3	0,0107	0,0106	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094
-2,2	0,0139	0,0137	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122
-2,1	0,0179	0,0176	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158
-2,0	0,0228	0,0225	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202
-1,9	0,0287	0,0284	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256
-1,8	0,0359	0,0355	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322
-1,7	0,0446	0,0441	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401
-1,6	0,0548	0,0542	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
-1,5	0,0668	0,0662	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606

$$\frac{\dfrac{0{,}17}{\sqrt{35}}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{12}} = 1{,}51$$

$$\frac{0{,}17\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{35}} = 1{,}51$$

$$\frac{\frac{0,17}{\sqrt{35}}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{12}} = 1,51$$

$$\frac{0,17\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{35}} = 1,51$$

$$0,17\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{12} = 1,51\cdot\sqrt{35}$$

$$\sqrt{n}\cdot\sqrt{12} = \frac{1,51\cdot\sqrt{35}}{0,17}$$

$$\sqrt{n} = \frac{\frac{1,50\cdot\sqrt{35}}{0,17}}{\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{1,51\cdot\sqrt{35}}{0,17\cdot\sqrt{12}}$$

$$n = \left(\frac{1,51\cdot\sqrt{35}}{0,17\cdot\sqrt{12}}\right)^2$$

$$n = 230,1138985$$

$$\boxed{231}$$

Un inspector observa una ruleta de un casino (la cual tiene los números del 1 al 36), y cuenta el número k de ocurrencias impares en 95 rondas. Si el número k excede 55, decide que la ruleta está alterada.

(3) [1 punto] Suponiendo que la ruleta es justa, utilice el teorema del límite central para determinar la probabilidad de que la decisión sea incorrecta.

$P(K > 55 \mid \text{ruleta justa})$

Datos:

impares del 1 al 36: 18

pares 18

proba impar $\frac{18}{36} = 0{,}5$

$K \sim \text{Binomial}(n = 95,\ p = 0{,}5)$

$\mu = n \cdot p = 47{,}5$

$\sigma^2 = np(1-p) = 23{,}75 \quad \sigma = 4{,}873$

$K \simeq N(47{,}5,\ 23{,}75)$

$P(K > 55) \qquad Z = \frac{K - \mu}{\sigma} = \frac{K - 47{,}5}{4{,}873}$

$Z_0 = \frac{55{,}5 - 47{,}5}{4{,}873} = 1{,}64$

$P(Z > 1{,}64) \Rightarrow P(Z \leq -1{,}64) = 0{,}0505$

$P(\text{desición incorrecta}) \simeq 0{,}05$

5,1%

(4) [2 puntos] ¿Qué valor de k haría que la decisión sea incorrecta sólo un 0.2 % de las veces?

$P(K > K_{crit} / \text{vuleto justo}) = 0{,}002$

$n = 95$

$p = 0{,}5$

$\mu = 47{,}5$

$\sigma^2 = 23{,}75$

$\sigma = 4{,}873$

$P(Z > z_c) = 0{,}002$

$P(Z \leq -z_c) = 0{,}002$

$-z_c \approx -2{,}88$

z ↓

z	0,00	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,6	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020

$$z_c = \frac{K_c - \mu}{\sigma} = K_c = \mu + z_c\sigma$$

$K_c = 47{,}5 + 2{,}88\,(4{,}873)$

$K_c = 61{,}534224$

$K_c = 62$

Una fábrica produce X_n artículos en el día n-ésimo, donde X_n son variables aleatorias idénticamente distribuidas, con media 4 y varianza 7.

(5) [2 puntos] Determine la probabilidad de que el número total de artículos producidos en 104 días sea menor a 337.

$\mu = 4$

$\sigma^2 = 7$

$P(S_{104} < 337)$

104×4

$\mu_S = 416$

$\sigma^2_S = 728$

104×7

$\sigma_S = 26{,}981$

$S_{104} \approx N(416, 728)$

$$Z = \frac{S_{104} - 416}{26{,}981}$$

$P(S_{104} < 337)$

$$P\left(Z < \frac{337-416}{26,481}\right) \Rightarrow P(Z < -2{,}928)$$

$P(Z < z) = 0{,}0017$ $\qquad$ $0{,}17\%$

sea menor a 337.

(6) [2 puntos] Determine el máximo valor de n tal que

$$P(X_1 + \cdots + X_n \geq 195 + 3n) \leq 0.025$$

$\mu = 4,\ \sigma^2 = 7$

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$\mu_{S_n} = 4n$

$\sigma^2_{S_n} = 7n$

$\sigma_{S_n} = \sqrt{7n}$

$S_n \approx N(4n, 7n)$

$P(S_n \geq 195 + 3n)$

$$P\left(Z \geq \frac{195 + 3n - 4n}{\sqrt{7n}}\right) \leq 0{,}025$$

$$P\left(Z \geq \frac{195-n}{\sqrt{7n}}\right) \leq 0{,}025$$

$P(Z > z_{0,025}) = 0{,}025$

$$\frac{195-n}{\sqrt{7n}} \geq 1{,}96$$

$z_{0,025} \approx 1{,}96$

$195 - n > 0 \Rightarrow 195 > n$?

$(195-n)^2 \geq (1{,}96)^2 \cdot (7n)$

$n^2 - 416{,}8912n + 38025 \geq 0$

$n_1 = 134{,}78$ $\qquad$ $n_2 = 287{,}11$ ✗ ← se descarta

$n = 134$

(7) **[2 puntos]** Sea N el primer día en el que el total de artículos producidos excede a los 1000. Determine la probabilidad de que $N \geq 275$ (*Sugerencia:* Piense el problema al revés, es decir, determinar la probabilidad de que en 274 días se produzcan menos de 1000 items.)

$S_n = X_1 + \dots + X_n > 100$

$N \geq 275 \Longleftrightarrow S_{274} \leq 1000$

$P(N \geq 275) = P(S_{274} \leq 1000)$

$\mu = 4$

$\sigma^2 = 7$

$\mu_{S_{274}} = 274 \cdot 4 = 1096$

$\sigma^2_{S_{274}} = 1918$

$\sigma_{S_{274}} = 43,78$

$S_{274} \approx N(1096, 1918)$

$P(S_{274} \leq 1000)$

$$Z_0 = \frac{1000 - 1096}{43,78} = -2,19$$

$P(Z < -2,19) \approx 0,0143$

$P(N \geq 275) \approx 0,0142$