3. Las siguientes sucesiones están definidas de manera recursiva. Determine los primeros cinco términos en cada caso.

a) $a_1 = -1$, $a_n = 3a_{n-1}$, para $n \geq 2$.

$a_1 = -1$

$a_2 = 3(-1) = -3$

$a_3 = 3(-3) = -9$

$a_4 = 3(-9) = -27$

$a_5 = 3(-27) = -81$

b) $b_1 = b_2 = 1$, $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$, para $n \geq 2$.

$b_1 = 1$

$b_2 = 1$

$b_3 = 1 + 1 = 2$

$b_4 = 2 + 1 = 3$

$b_5 = 3 + 2 = 5$

c) $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{3}$, para $n \geq 4$.

$c_1 = 0$

$c_2 = 0$

Poo

$c_3 = 1$

$c_4 = \dfrac{1 + 0}{3} = \dfrac{1}{3}$

$c_5 = \dfrac{\frac{1}{3} + 1}{3} = \dfrac{4}{9}$

d) $d_1 = 2, d_2 = \dfrac{1}{2}$, $d_{n+1} = \dfrac{1}{1 + d_n}$, para $n \geq 2$.

$d_1 = 2$

$d_2 = \dfrac{1}{2}$

$d_3 = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$d_4 = \dfrac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$

$d_5 = \dfrac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \dfrac{5}{8}$

4. Para cada sucesión recursiva dada, se proporciona una fórmula explícita. Se debe demostrar que la fórmula es correcta usando inducción matemática.

a)
- Forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$

- Fórmula explícita: $a_n = 2^n - 1, \quad n \geq 1$

$n = 1 \quad a_1 = 2^1 - 1 \to 1 = 1 \ \checkmark$

$n = p \quad a_p = 2^p - 1$, Hi

$n = p+1 \quad a_{p+1} = 2^{p+1} - 1$, HQD

Demo   Forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$

$$a_{p+1} = 2a_{p+1-1} + 1$$
$$= 2a_p + 1$$
$$2(2^p - 1) + 1 \text{ , Hi}$$
$$2^{p+1} - 2 + 1$$
$$\boxed{2^{p+1} - 1} \ //$$

b)

- Forma recursiva: $b_n = b_{n-1} + 3, \quad b_1 = 2$
- Fórmula explícita: $b_n = 3n - 1, \quad n \geq 1$

$n = 1 \quad b_1 = 3(1) - 1 \to 2 = 2 \ \checkmark$

$n = p \quad b_p = 3p - 1$, Hi

$n = p+1 \quad b_{p+1} = 3p + 2$, HQD

Demo   Forma recursiva: $b_n = b_{n-1} + 3,$

$$b_{p+1} = b_{p+1-1} + 3$$
$$b_{p+1} = b_p - 1 + 3$$
$$3p - 1 + 3 \text{ , Hi}$$
$$\boxed{3p + 2} \ //$$

c)

- Forma recursiva: $c_n = c_{n-1} + n, \quad c_1 = 1$
- Fórmula explícita: $c_n = \dfrac{n^2 + n}{2}, \quad n \geq 1$

$n = 1 \quad c_1 = \dfrac{1^2 + 1}{2} \to 1 = 1 \ \checkmark$

$n = p \quad c_p = \dfrac{p^2 + p}{2}$, Hi

$n = p+1 \quad c_{p+1} = \dfrac{(p+1)^2 + (p+1)}{2}$, HQD $\to \dfrac{p^2 + 2p + 1 + p + 1}{2}$

Demo   Forma recursiva: $c_n = c_{n-1} + n,$

$$c_{p+1} = c_{p+1-1} + p + 1$$

$= (p + p + 1$

$= \frac{p^2+p}{2} + p+1$, H:

$= \frac{p^2+p+2p+2}{2}$

$= \frac{p^2+2p+1+p+1}{2}$

$\boxed{\frac{(p+1)^2+p+1}{2}}$ //

d)
- Forma recursiva: $d_n = n \cdot d_{n-1}, \quad d_1 = 1$
- Fórmula explícita: $d_n = n!\,, \quad n \geq 1$

$k=1 \quad d_1 = 1! \to 1 = 1$

$k=p \quad d_p = p!$, H:

$k=p+1 \quad d_{p+1} = (p+1)!$

Demo Forma recursiva: $d_n = n \cdot d_{n-1},$

$d_{p+1} = (p+1) \cdot d_{p+1-1}$

$= (p+1) \cdot d_p$

$= (p+1) \cdot p!$, H:

$\boxed{(p+1)!}$ //

e)
- Forma recursiva: $e_n = e_{n-1} + n!, \quad e_1 = 1$
- Fórmula explícita: $e_n = \sum_{k=1}^{n} k!\,, \quad n \geq 1$

$k=1 \quad e_1 = 1! \to 1 = 1$

$k=p \quad e_p = \sum_{k=1}^{p} k!$, H:

$k=p \quad e_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k!$, H(a1) $\to \sum_{k=1}^{p} k! + (p+1)!$

Demo Forma recursiva: $e_n = e_{n-1} + n!,$

$e_{p+1} = e_{p+1-1} + (p+1)!$

$= e_p + (p+1)!$

$\sum_{k=1}^{p} k! + (p+1)!$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p+1} k!} \quad //$$

f)

- Forma recursiva: $f_n = \dfrac{f_{n-1}}{n+1}, \quad f_0 = \int_0^1 dx$
- Fórmula explícita: $f_n = \dfrac{1}{(n+1)!}, \quad n \geq 0$

$k=0 \quad f_0 = \frac{1}{(k+1)!}$

$$\int_0^1 dx \to \int dx = x \to x \Big|_0^1 \to 1-0=1$$

$$1 = \frac{1}{(0+1)!} = 1=1 \checkmark$$

$k=p \quad f_p = \frac{1}{(p+1)!}, \text{ Hi}$

$k=p+1 \quad f_{p+1} = \frac{1}{(p+2)!}, \text{ HQD}$

Demo Forma recursiva: $f_n = \dfrac{f_{n-1}}{n+1}$,

$$f_{p+1} = \frac{f_{p+1-1}}{(p+1)+1}$$

$$= \frac{f_p}{p+2}$$

$$= \frac{\frac{1}{(p+1)!}}{\frac{(p+2)}{1}}$$

$$= \frac{1}{(p+2)(p+1)!}$$

$$= \boxed{\frac{1}{(p+2)!}} \quad //$$

6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n = \dfrac{(-1)^n 3^n n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

   a) Calcule los términos a_3, a_5 y a_{n+1}.

   b) Determine y simplifique $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

a) $a_3 = \dfrac{(-1)^3 \cdot 3^3 \cdot 3!}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\dfrac{27}{8}$

$$a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot 3^5 \cdot 5!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{-243}{32}$$

$$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 3^{k+1} \cdot (k+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)(2k+2)}$$

b)

$$\frac{\dfrac{(-1)^{p+1} \cdot 3^{p+1} \cdot (p+1)!}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2p)}(2p+2)}}{\dfrac{(-1)^p \cdot 3^p \cdot p!}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 (2p)}}}$$

$$\frac{(-1)^{p+1} \cdot 3^{p+1} \cdot (p+1)!}{(2p+2) \; (-1)^p \cdot 3^p \cdot p!}$$

$$\frac{\cancel{(-1)^p} \cdot (-1) \cdot \cancel{3^p} \cdot 3 \cdot (p+1) \cdot \cancel{p!}}{(2p+2) \cdot \cancel{(-1)^p} \cdot \cancel{3^p} \cdot \cancel{p!}}$$

$$\frac{-3\cancel{(p+1)}}{2\cancel{(p+1)}} = \boxed{\frac{-3}{2}}$$