

1. Verifique que la sucesión $\{n2^{-n}\}_{n \geq 1}$ es decreciente.

$$f(x) = \frac{x}{2^x}$$

$$= \frac{2^x - x \cdot 2^x \ln(2)}{2^{x^2}}$$

$$= 2^x (1 - x \ln(2))$$

$$= \frac{1 - x \ln(2)}{2^x} = 0$$

$-\infty$	$\frac{1}{\ln(2)}$	$+\infty$
$+$	\oplus	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$

$$1 - x \ln(2) = 0$$

$$x = \frac{1}{\ln(2)}$$

Verdeciante

∴ Decreciente

2. Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ con suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$. Determine si la serie converge, y en caso de ser convergente determine el valor de convergencia. [2 pts]

$$2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n}{2^n}, \text{ L'Hopital}$$

$$2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{\ln(2)}} = \frac{1}{2^{+\infty \ln(2)}} = 0$$

$$2 = 0$$

2

Converge a 2

3. Calcule la suma de la serie $B = \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+1} \right]$.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+1} \right] + \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right]$$

$$\left(\frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{5} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

8
15

(converge a $\frac{8}{15}$)

4. Utilice el criterio de la integral para determinar si la serie $\sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ converge o diverge.

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x \ln^2(x))^2}, \quad \ln^2(x) + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{2}{x}$$

$$= -\frac{(\ln^2(x) + 2 \ln(x))}{x^2 \ln^4(x)}$$

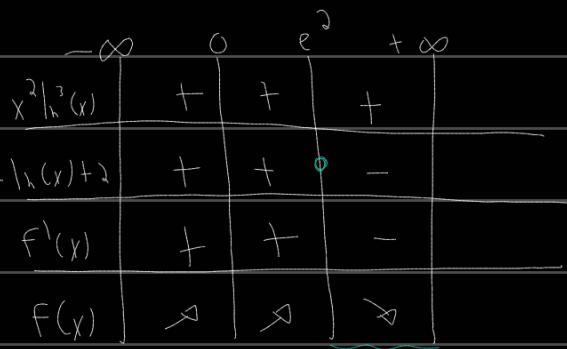
$$= -\frac{\ln(x)(\ln(x) + 2)}{x^2 \ln^4(x)}$$

$$= -\frac{\ln(x) + 2}{x^2 \ln^3(x)} = 0 \quad f \not\equiv 0$$

$$-\ln(x) + 2 = 0$$

$$\ln(x) = 2$$

$$x = e^2$$

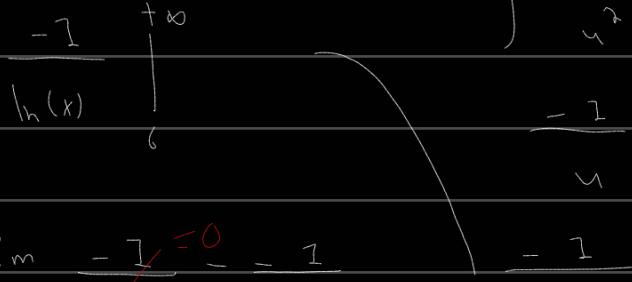


\therefore Decrece

Decrece

$$6 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \rightarrow \int \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \quad u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{u^2} du$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\ln(x)} = 0 \quad \ln(6) \quad \frac{-1}{\ln(x)}$$

$$\frac{1}{\ln(6)}$$

∴ converge

5. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente. [4 pts c/u]

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{6+7k^2}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k^2}{6+7k^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k^2}{7k^2} = \frac{4}{7} \neq 0$$

Diverge por crit de diver.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) + 2}{\sqrt{n}}$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \cos(n) + 2 \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}, \text{ p serie, } p = \frac{1}{2} < 1 \quad \therefore \text{ Diverge}$$

∴ Diverge por crit de comp direct

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k) + 2^k}{3^k + k^2}$

$$\infty \quad (1, 1, 2^k, 3^k)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{3^n + n^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, Serie geométrica
 $|r| = \frac{2}{3} < 1$, converge

Por criterio de comparación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^n + n^2} \cdot \frac{3^n}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n |(-1)^n + 2^n|}{3^n \cdot 2^n + 2^n \cdot n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 2^n}{3^n \cdot 2^n} = 1$$

b_n converges a $L \neq 0$
\therefore original converge

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n+5}{2n+9}\right)^{2n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\left(\frac{-n+5}{2n+9}\right)^{2n+1}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{2n+9}\right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2x}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$$

\therefore converge

6. Considere la serie alternada $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$.

a) Pruebe que esta serie S es convergente.

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^3)^2}, \quad 3x^2$$

$$= \frac{-3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-3}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^4} = 0$$

∴ (Por regla)

b) Determine el menor valor para N de manera que la suma parcial S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error E_N menor que 10^{-3} . [2 pts]

$$N \quad N+1 \quad a_{n+1} < 10^{-3}$$

$$\approx \frac{(-1)^{N+1}}{N^3} \approx 0.9071$$

7. Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{3n}.$$

Determine el intervalo de convergencia de esta serie (no estudie los extremos del intervalo).

(Vea el video)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{n+1} \cdot x^{3(n+1)}}{(n+1)! \cdot n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^3}{(-1)^n \cdot n!} \right|$$

$$|x^3| \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0$$

