1. Si se sabe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{N}{2N+1}$, determine el valor de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **[2 puntos]**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Converge a } \frac{1}{2}}$

2. Determine si $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{9 \cdot 5^{-2n}}{(-3)^{2-n}}$ es convergente o divergente. En caso de ser convergente, determine el valor de convergencia. **[5 puntos]**

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cancel{9}\,(5^{-2})^n}{\cancel{(-3)^2}\cdot(-3)^{-n}}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-3}{25}\right)^n \text{, geometrica con } |r| = \frac{3}{25} < 1$$

$$\frac{\left(\frac{-3}{25}\right)^3}{1 - -\frac{3}{25}} = \frac{-27}{17500}$$

$\boxed{\text{La serie converge a } \frac{-27}{17500}}$

3. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2+\cos^2(n)}{\sqrt[3]{n^5-2n}}$ **[5 puntos]**

Por crit de Comparacion directa

$$0 < \cos^2(n) < 1$$

$$2 < 2+\cos^2(n) < 3$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^5-2n}} \le 2+\cos(n) \le \frac{3}{\sqrt[3]{n^5-2n}}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^5-2n}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$$ p serie con $p < 1$

$\therefore$ diverge

$\boxed{\therefore \text{La original diverge}}$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^4+5^n}{2n+n!}$$

Por crit de cmp al lim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^4+5^n}{2n+n!} \sim \frac{5^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$, Analizando conver de esta serie por crit de razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{5^n}\cdot 5}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{5^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1$$

$\therefore$ Converge

Calculando $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4+5^n}{2n+n!} \cdot \frac{n!}{5^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{5^n}\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot \cancel{5^n}} = 1$$

b_n conver $\wedge$ $L \neq 0$

$\boxed{\therefore \text{ original converge}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3n)^n}{(5n-1)^n}$

Por crit de raiz

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\frac{|-3n|^{\cancel{n}}}{|5n-1|^{\cancel{n}}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\cancel{n}}{5\cancel{n}} = \frac{3}{5} < 1$$

$\boxed{\therefore \text{ converge}}$

4. Determine el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}{(n+1)!}(x-3)^n$. No debe analizar extremos del intervalo. **[5 puntos]**

Por crit de razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}(2n+4)\,\cancel{(x-3)^n}(x-3)}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}\cancel{(x-3)^n}}$$

$$|x-3| \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+4}{n+2}$$

$$|x-3| \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}} = 2$$

$$2\cdot|x-3| < 1$$

$$|x-3| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$$

$\boxed{I = \left]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[}$

6. Si se sabe que $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+2)}$, verifique que la serie alternada es convergente y aproxime el valor de la integral de modo que el error que se comete en la aproximación sea menor que 0,0001. **[5 puntos]**

$$\frac{1}{n!\,(n+3)} \cdot (n-1)!\,(n+2) \leq 1$$

$$\frac{\cancel{(n-1)!}\cdot(n+2)}{n\cdot\cancel{(n-1)!}\cdot(n+3)} \leq 1$$

$$\frac{n+2}{n(n+3)} \geq 1$$

$$n+2 \leq n(n+3)$$

Es decreciente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)!\cdot(n+2)} = 0$$

$$\boxed{\therefore \text{ Converge}}$$