Prueba de hipótesis para una media

Aceptar o rechazar vs correcta o incorrecta

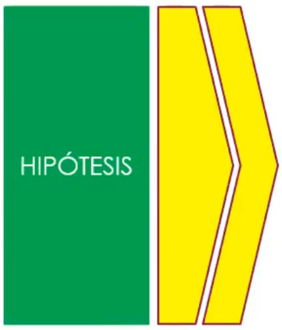
¿Cuál sería la su opinión en relación con la controversia planteada en el título?

La afirmación inicial sobre la composición de la caja, en cuanto a que tenga 5 bolas verdes y 1 bola blanca, le llamaremos una hipótesis y en la Estadística Inferencial la Prueba de Hipótesis constituye la herramienta para la toma de decisiones a partir de la información disponible.

Es importante tener presente que una prueba de hipótesis basa la toma de decisiones en hechos probabilísticos, por lo que no se puede garantizar su certeza, al depender de muchos factores relacionado con la calidad de la muestra usada para dicha toma de decisión. La prueba matemática por su parte, usa un método deductivo para garantizar la veracidad de sus conclusiones apoyado en las reglas de inferencia.

¿Qué es una hipótesis?

Si una persona, que podría ser un policía, llega a la escena donde ha ocurrido un accidente, podría de pronto establecer algunas conjeturas sobre lo ocurrido, es decir, proponer sus hipótesis, pero la certeza o falsedad de estas conjeturas deberán verificarse con evidencia tangible.



- Afirmación sobre la que se desea determinar su realidad
- Supuesto, posible o no
- Proposición no demostrada que se admite para orientar una investigación o experimento
- Conjetura de partida para poder explicar racionalmente la causa real de un hecho.

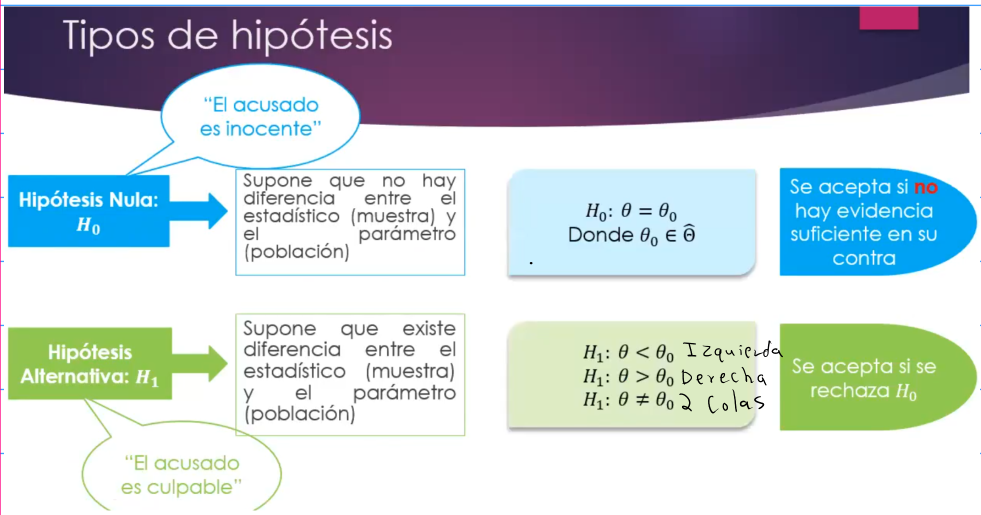
Hipótesis Estadística

Conjetura o supuesto que se realiza con respecto a una población, concretamente con respecto a un parámetro.

Prueba de Hipótesis

Es un método de investigación que parte de:

1. La afirmación sobre el valor de un parámetro $(\mu, \sigma, \sigma^2, p)$
2. Define dos hipótesis opuestas, donde una de ellas es la afirmación
3. Busca evidencia para aceptarlas o rechazarlas



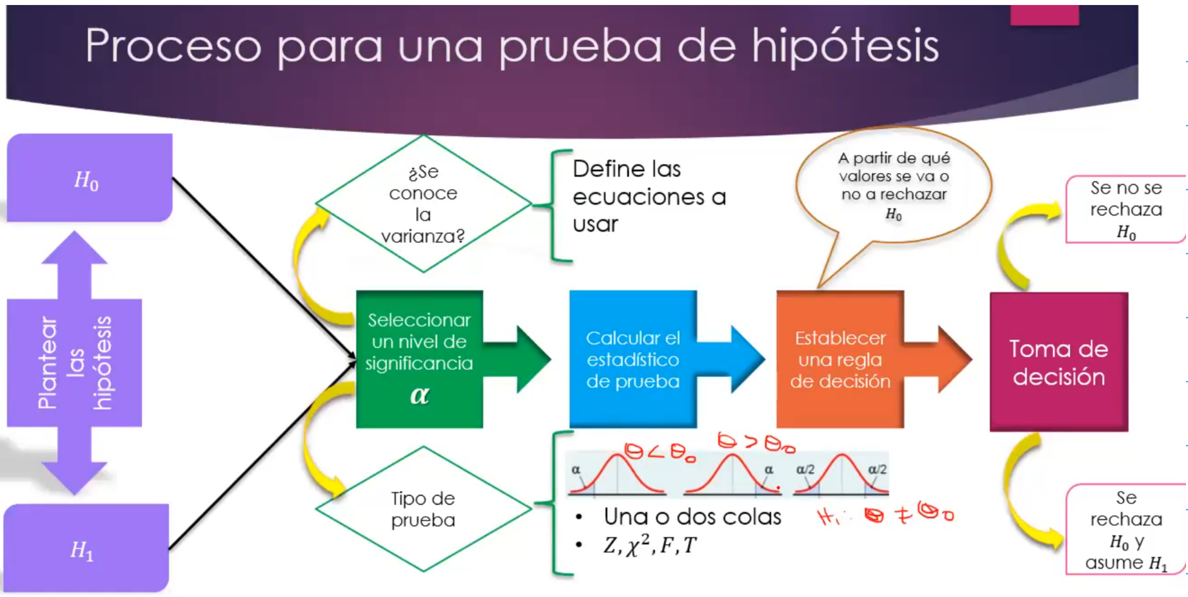
Se realiza una investigación sobre el gasto promedio por desayuno en la Soda Periférica del Tec. Alguien afirma que una persona gasta en promedio ¢1 300.

Para el caso anterior, plantee la hipótesis nula y alternativas posibles.

NOTA: *En las pruebas de hipótesis, lo que se busca es probar H_0, las hipótesis alternativas poseen el problema de que dan infinitas opciones.*

$H_0: u = 1300$

$H_1: u \neq 1300,\ u > 1300,\ u < 1300$



Recordemos que a nivel legal "Toda persona es inocente hasta que se demuestre lo contrario", en este sentido H_0 equivale a decir que a priori, la persona es inocente. De esta manera:

- No rechazar H_0: No significa necesariamente que se acepta que el "acusado es inocente", sino que NO HAY EVIDENCIA suficiente y fuerte en su contra.
- Rechazar H_0: Hay suficiente EVIDENCIA en contra.

Un gimnasio recién inaugurado, invita a su afiliación argumentando una reducción de (en promedio) peso de al menos 4.6 kg. Una muestra de 34 personas revela un promedio de reducción de peso de 4.1kg, con desviación típica de 1.8kg.

A un nivel de significancia del 1%.

1. ¿se puede creer lo tan anunciado por al gimnasio?

$n = 34 \geq 30 \longrightarrow n \geq \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{r}\right)^2$

$\bar{x} = 4{,}1 \longrightarrow$ Estadístico de prueba

$\sigma = 1{,}8$

$\alpha =$ Significancia $= 0{,}01$

1- Planteamiento de hipotesis

Indirectamente se considera que sea mayor o igual, esto por ser una igualdad

$H_0: u = 4{,}6 \quad \geq$

$H_1: u < 4{,}6$

H_1 se suele influenciar del estadistico de prueba, en este caso $\bar{X} = 4{,}1$, el cual es menor a 4,6

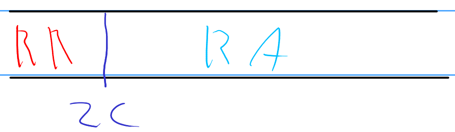
2- Definir tipo de prueba (una o dos colas)

Izquierda Derecha Izq y Der

Al ser $u < 4{,}6$ se usara una prueba Z de cola izquierda

$H_1: \theta < \theta_0$ Izquierda
$H_1: \theta > \theta_0$ Derecha
$H_1: \theta \neq \theta_0$ 2 Colas

El dibujo es solo ilustracion, no obligatorio



Region de Rechazo

Region de Aceptacion

Se debe estandarizar $\bar{x}$, osea pasarlo a su equivalente en distribucion normal estandart, en este paso se encuentra el Z_{obs}

Formula: $Z = \dfrac{\bar{x} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, como no se conoce σ pero $n \geq 30$, se tomara $\sigma = S$

hacerlo normal

$n = 34 \geq 30$

$\bar{x} = 4,1$

$\sigma = 1,8$

$\alpha = \text{Significancia} = 0,01$

$u = 4,6$ por que se asume certeza

De H_0

$$Z = \frac{\bar{x} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{4,1 - 4,6}{\frac{1,8}{\sqrt{34}}} \approx -1,6397$$

Definir regla de decision

$\alpha = \text{Significancia} = 0,01$ OJo!!!! SI Importa en la app

Calcular $Z_c = Z_\alpha = Z_{0,01} = -2,32635$

No se rechazara H_0 si se cumple

$$Z_{obs} > Z_c$$

$$-1,6397 > -2,32635 \text{ Verdadero}$$

$\therefore$ No se encontro suficiente info para rechazar H_0, asi lo anunciado por el gym es valido

Tipos de errores

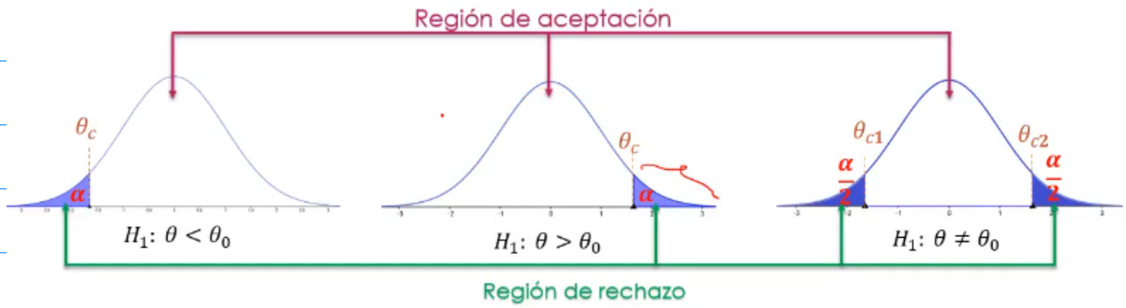
ERROR TIPO I: Es conocido como "Condenar al inocente" y ocurre cuando rechazamos una hipótesis nula verdadera, Decimos que hay un efecto o relación pero en realidad no lo hay. La probabilidad de un Error de Tipo I está dada por α (alfa)

ERROR TIPO II: Es conocido como "Dejar libre al culpable" ocurre cuando aceptamos una hipótesis nula falsa. Fallamos en rechazar una hipótesis nula falsa. Hay un efecto o relación pero no lo detectamos. La probabilidad de un Error de Tipo II está dada por β (beta)

$H_1: \theta < \theta_0$ Izquierda
$H_1: \theta > \theta_0$ Derecha
$H_1: \theta \neq \theta_0$ 2 Colas

Región de rechazo y aceptación

Una cola	Dos colas



Verdadera	Rechazamos H_0	No Rechazamos H_0
Hipótesis nula es verdadera (No diferencia)	Error Tipo I (α) Diferencia detectada, pero en realidad no existe	Decisión correcta. Diferencia no existe y por lo tanto no es detectada
Hipótesis nula es falsa (Diferencia)	Decisión correcta. Diferencia existe y es detectada	Error Tipo II (β) Diferencia no detectada, pero en realidad existe.

Tipo de prueba	Error tipo 1	Error tipo 2
Cola izquierda RR | RA θ_1 θ_c θ_0	$\underbrace{P(\overset{F}{\hat{\theta}_{obs} < \theta_c} \vert \overset{V}{\theta = \theta_0})}_{\alpha}$	$\beta = P(\overset{F}{\hat{\theta}_{obs} > \theta_c} \vert \overset{V}{\theta = \theta_1})$
Cola derecha RA | RR θ_0 θ_c θ_1	$\underbrace{P(\overset{F}{\hat{\theta}_{obs} > \theta_c} \vert \overset{V}{\theta = \theta_0})}_{\alpha}$	$\beta = P(\overset{F}{\hat{\theta}_{obs} < \theta_c} \vert \overset{V}{\theta = \theta_1})$
dos colas RR | RA | RR θ_1 θ_{c1} θ_0 θ_{c2} θ_1	$\underbrace{P(\overset{F}{\hat{\theta}_{obs} < \theta_{c1} \vee \hat{\theta}_{obs} > \theta_{c2}} \vert \overset{V}{\theta = \theta_0})}_{\alpha}$	$\beta = P(\overset{F}{\theta_{c1} < \hat{\theta}_{obs} < \theta_{c2}} \vert \overset{V}{\theta = \theta_1})$

Error tipo I y II: conclusiones

En cierta medida los errores Tipo I y II son opuestos, así si se trata de evitar el error tipo I (condenar al inocente) se puede caer en el error tipo II (dejar libre al culpable), esto conlleva a que se pueda controlar solo uno de los errores, el más grave.

¿Cuál de los errores es considerado más grave?

En un juicio se prefiere dejar libre al culpable que condenar a un inocente, es decir se considera más grave condenar a un inocente.

Recuerde que "el acusado es inocente hasta que se demuestre lo contrario", entonces se controla el error tipo I, se acepta inicialmente H_0 (el acusado es inocente) y si no se encuentra suficiente evidencia en contra para rechazar H_0, se prefiere "dejar libre al acusado" y evitar el error tipo I.

Coeficiente o nivel de significancia: representa la probabilidad de cometer error Tipo I y se denota por α (usualmente se usa $\alpha = 0{,}01$ o $\alpha = 0{,}05$)

Coeficiente de confianza: Probabilidad de que la hipótesis nula H_0 sea aceptada. Esto corresponde al complemento del Error Tipo I: $1 - \alpha$

Riesgo: representa la probabilidad de cometer Error Tipo II y se denota con β. Se asocia con el riesgo del consumidor: "Se adquiere el producto con el riesgo de que falle"

Potencia: representa la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa y se denota por $1 - \beta$. La potencia es conocida como "El poder de una prueba". Para una hipótesis alternativa H_1' es la probabilidad de que no ocurra el error tipo II.

Suponga que la edad promedio u de los niños de cierta comunidad es mayor que 11 y suponga que la hipótesis anternativa específica es :

H^*_1: $u=12$

1. Redacte Ho y H^*_1

Se afirma que: $u > 11$

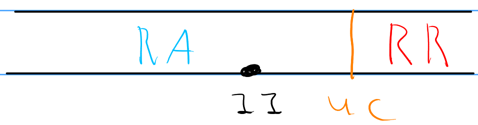
Estadístico de prueba: $\bar{X}$

Hipotesis: ← Por que H_1 es $\neq, >, <$

$H_0: u = 11$ $(\leq)$

$H_1: u > 11$, cola derecha

2. Establezca las regiones de aceptación y de rechazo (Dibujo)



3. Redacte el Error Tipo I y II

Hay que encontrar Z en este caso

Error Tipo I: $\boxed{\text{x̄ dio > uc cuando debió en realidad debió ser 11}}$

$$\alpha = P(H_1 | H_0) = P(\bar{x} > u_c \mid x = 11)$$

↳ Quedarse con H_1 significa que se rechaza H_0, esto ocurre en RR

Error Tipo II:

$$\beta = P(H_0 | H_1') = P(\bar{x} < u_c \mid u = 12)$$

↳ Quedarse con H_0, cuando esta es Falsa, Pues la verdadera sería H_1'

3. Calcule la probabilidad de cometer error tipo II de la prueba, suponiendo que el porcentaje de amas de casa que utilizan el detergente es en realidad de 35%.

Se cree que al menos el 40% de las amas de casa de una ciudad utilizan el detergente X. Se toma una muestra aleatoria de 100 amas de casa y si más de 36 utilizan el detergente, se aceptará que el porcentaje poblacional es de al menos el 40%. Recuerde que $\hat{P}$ es insesgado y suponga $\hat{P} \sim N\left(p, \frac{pq}{100}\right)$.

1. Determine las regiones de aceptación y de rechazo

$\hat{P} \sim N\left(p, \frac{pq}{100}\right)$

$\mu = p$ $\qquad n = 100$

$\sigma^2 = \frac{pq}{100}$

I) Hipotesis: Afirmacion: $P \geq 0,4$

$H_0: P = 0,4$ ($\geq$), por eso el H_1 es

$H_1: P < 0,4$ $\qquad$ el contrario ($<$)

Lo cola izquierda

Para definir las regiones de aceptación y rechazo, es necesario conocer alfa, que en este caso no se nos da, pero, por la redacción del problema se aceptará Ho siempre que el p estimador sea mayor que 36/100, así:

$P_c = \frac{36}{100} = 0.36$

$\frac{36}{100}$ ← condicion / ← n

RR | RA

P_c 0,36

2. Calcule la probabilidad de cometer error tipo I de la prueba

Estan preguntando por α

$I = \alpha$

$II = \beta$

$P(H_1 | H_0)$

$= P(\hat{p} \in RR \mid p = 0{,}4)$

$= P(\hat{p} < p_c \mid p = 0{,}4)$

$= P(\hat{p} < 0{,}36 \mid p = 0{,}4)$

Opcion 1: Dist normal no estandar

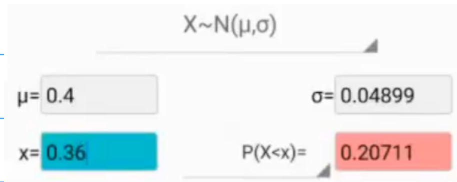
$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$, como no es normal estandart, debemos calcular u y σ

$p = 0{,}4 \quad q = 0{,}6 \quad u = 0{,}4 \ (H_0)$

$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}} = 0{,}4899$

Entonces con esto se busca el $P(X < x)$ en este caso

$P(\hat{p} < 0{,}36 \mid p = 0{,}4) = \boxed{0{,}20711}$



Opcion 2: Estandarizando

Formula: $\frac{P_c - p}{\sigma}$

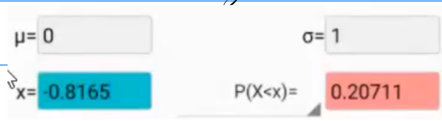
$u = 0{,}4 \ (H_0)$

$n = 100 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100} = 0{,}4899$

$P(\hat{p} < 0{,}36 \mid p = 0{,}4) \qquad P_c = 0{,}36$

$$Z = \frac{0{,}36 - 0{,}4}{0{,}4899} \approx -0{,}8165$$

$$P(\hat{p} < 0{,}36 \mid p = 0{,}4) = P(Z < -0{,}8165) = \boxed{0{,}20711}$$



Notese que en ambos se busca el $P(X<x)$

3. Calcule la probabilidad de cometer error tipo II de la prueba, suponiendo que el porcentaje de amas de casa que utilizan el detergente es en realidad de 35%.

Para calcular los Errores de Tipo II se requiere de una hipotesis alternativa especifica que se va a asumir como la verdadera en lugar de H_0

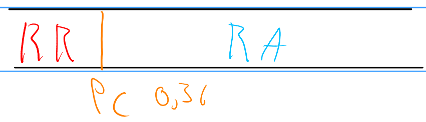
Se debe calcular β:

Entonces aqui mas bien seria

Hip. Alt. Especif.

$H_1': p = 0{,}35$ Cuando H_0 no es rechazada?

$P(H_0 \mid H_1')$



$= P(\hat{p} > p_c \mid p = 0{,}35)$

$= P(\hat{p} > 0{,}36 \mid p = 0{,}35)$

Cuando $\hat{p} > p_c$

Formula: $\dfrac{P_c - P}{\sigma}$

Estandarizando 0,36

$P_c = 0{,}36$, $P = 0{,}35$ (enunciado)

$n = 100$ $\quad q = 0{,}65$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{100}}$, $Z = \dfrac{0{,}36 - 0{,}35}{\sqrt{\dfrac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{100}}} = 0{,}2096$

$P(\hat{p} > 0{,}36 \mid p = 0{,}35) = P(Z > 0{,}2096)$

$= \boxed{0{,}41699}$

1. ¿se puede creer lo tan anunciado por al gimnasio?

Pag 3 de este archivo

Un gimnasio recién inaugurado, invita a su afiliación argumentando una reducción de peso de al menos 4.6 kg. Una muestra de 34 personas revela un promedio de reducción de peso de 4.1kg, con desviación típica de 1.8kg.

A un nivel de significancia del 1%.

3. Determine el tamaño de la muestra que se debe usar para el estudio si se de desea un nivel de significancia de 5%, una potencia de 85%, sabiendo que el verdadero promedio de reducción de peso es de 4kg. H_1' Hip. Alt. Esp.

Coeficiente o nivel de significancia: representa la probabilidad de cometer error Tipo I y se denota por α (usualmente se usa $\alpha = 0{,}01$ o $\alpha = 0{,}05$)

Potencia: representa la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa y se denota por $1-\beta$. La potencia es conocida como "El poder de una prueba". Para una hipótesis alternativa H_1' es la probabilidad de que no ocurra el error tipo II.

$\alpha = 0{,}05 \qquad \beta = 1 - \text{potencia} = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

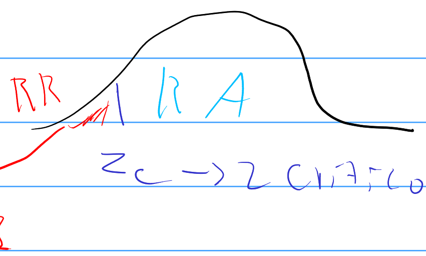
$\sigma = 1{,}8$

$H_0: \mu = 4.6 \quad (\geq 4{,}6)$

$H_1: \mu < 4{,}6$, 1 cola Izquierda

Tipo de prueba	Una población
	Supuestos: $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1': \mu = \mu_1 \end{cases}$
Una cola	$n \geq \frac{(\lvert z_\alpha \rvert + \lvert z_\beta \rvert)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$
Dos colas $H_1: \mu \neq \mu_0$	$n \geq \frac{(\lvert z_{\alpha/2} \rvert + \lvert z_\beta \rvert)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$

$H_1': \mu = 4$



$\alpha = 0{,}05$

$\beta = 0{,}15$

$\sigma = 1{,}8$

$$n \geq \frac{(\lvert z_\alpha \rvert + \lvert z_\beta \rvert)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

$z_\alpha = z_{0{,}05} = -1{,}64485$

X~N(μ,σ) μ= 0 σ= 1 x= -1.64485 P(X<x)= 0.05

$z_\beta = z_{0{,}15} = -1{,}03643$

X~N(μ,σ) μ= 0 σ= 1 x= -1.03643 P(X<x)= 0.15

$H_0: \mu = 4.6$

$H_1': \mu = 4$

Supuestos: $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1': \mu = \mu_1 \end{cases}$

$$n \geq \frac{(\lvert z_\alpha \rvert + \lvert z_\beta \rvert)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \longrightarrow n \geq \frac{(\lvert -1{,}64485 \rvert + \lvert -1{,}03643 \rvert)^2 \cdot \sqrt{1{,}8}}{(4 - 4{,}6)^2}$$

$n \geq 64{,}7039$

$\boxed{n \geq 65}$

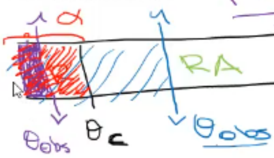
Enforque de valor P o Prueba P

- Es el nivel de significancia más bajo en el que el valor observado es significativo para rechazar H_0 (recuerde que el nivel de significancia está asociado con α)
- Indica el valor mínimo de posibilidad de cometer Error Tipo I. Siempre hay incertidumbre si al rechazar H_0 y aceptar la H_1 como cierta, estemos errando en "culpar al inocente", entonces, si esta incertidumbre es muy pequeña, estaremos más tranquilos de la decisión, pero si es muy grande, mantenemos la premisa de que H_0 no puede ser rechazada.
- Vídeo: https://youtu.be/bBfDemiDgP4

$P(\hat{\theta} < \theta_{obs})$

Valor P $< \alpha$

Rechaza Ho



No se rechaza Ho: $P(\hat{\theta} < \theta_{obs}) > \alpha$

Valor P $> \alpha$

Valor P: caso de la Dist. Normal

Dist. f ← t-student

Simétrica

$$\textit{Valor P} = \begin{cases} 2(1 - \textit{área de z}) \text{ (Caso de dos colas)} \\ 1 - \textit{área de z} \text{ (Caso de cola superior)} \\ \textit{área de z} \text{ (Caso de cola inferior)} \end{cases}$$

acumulada

Decisión:

- Si $\textit{valor P} < \alpha$, se rechaza H_0
- Si $\textit{valor P} \geq \alpha$, **NO** se rechaza H_0

Enfoque valor P versus valor observado

Se tiene:

Ho

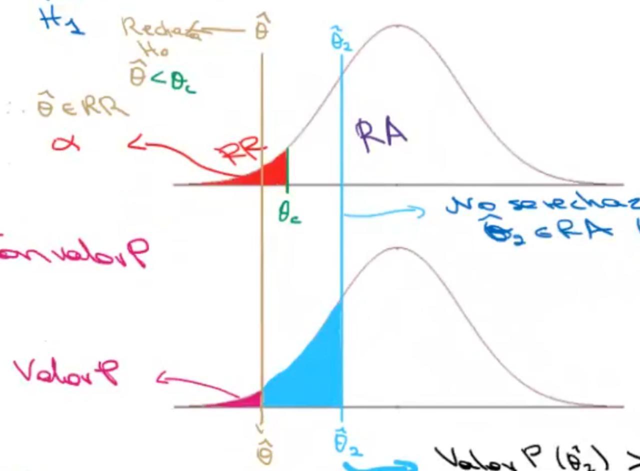
H1

Rechaza Ho ← $\hat{\theta}$

$\hat{\theta} < \theta_c$

$\therefore \hat{\theta} \in RR$

Estadístico de prueba: $\hat{\theta}$



No se rechaza Ho, pues $\hat{\theta}_2 \in RA$ $(\hat{\theta}_2 > \theta_c)$

Con valor P

Valor P $(\hat{\theta}_2) > \alpha$, ∴ no rechaza Ho

Note que:

Valor P $< \alpha \Rightarrow$ se rechaza Ho

Un gimnasio recién inaugurado, invita a su afiliación argumentando una reducción de peso de al menos 4.6 kg. Una muestra de 34 personas revela un promedio de reducción de peso de 4.1kg, con desviación típica de 1.8kg.

A un nivel de significancia del 1%.

¿se puede creer lo tan anunciado por al gimnasio?

Realice la prueba usando el criterio de Valor P

$u = 4,6 \qquad n = 34 \geq 30 \qquad \bar{x} = 4,1 \qquad \underset{(s)}{\sigma} = 1,8$

1) Planteamiento de hipotesis

$H_0: u = 4,6$

$H_1: u < 4,6 \rightarrow izq$ Se hizo con z en la pagina 3

2) Tipo de prueba

Usando valor p

$$\text{Valor } P = P(\bar{x} < \bar{x}_{obs})$$

$$= P(\bar{x} < 4,1)$$

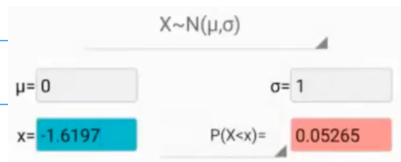
Estandarizando 4,1

Se debe estandarizar $\bar{x}$, osea pasarlo a su equivalente en distribucion normal estandart, en este paso se encuentra el z_{obs}

$$z = \frac{4,1 - 4,6}{\frac{1,8}{\sqrt{34}}} = -1,6197 \qquad \text{Formula: } z = \frac{\bar{x} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

valor p

$$= P(\bar{x} < -1,6197) = 0,05265$$



Ahora comparando con $\alpha = 0,01$

$\boxed{\text{Como valor } P = 0,05265 > \alpha = 0,01 \text{ entonces no se rechaza } H_0}$