1. En una compañía multinacional, se realiza un estudio de las habilidades de 300 empleados, de los cuales, 210 trabajan en alguna de las siguientes tres áreas: Análisis de Datos, Desarrollo de Software y Gestión de Proyectos. Se sabe que en Análisis de Datos trabajan 150 personas, en Desarrollo de Software trabajan 120 personas y en Gestión de Proyectos trabajan 100 personas. Además, 60 personas trabajan en Análisis de Datos y Gestión de Proyectos, 50 personas trabajan en las tres áreas, y 190 personas trabajan en Análisis de datos o en Desarrollo de Software.

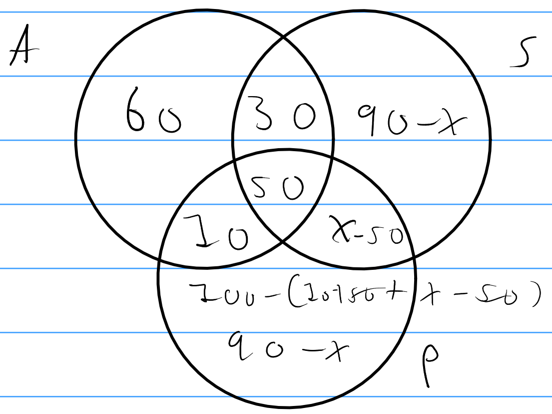
a) **[2 puntos]** ¿Cuántas personas trabajan únicamente en Análisis de Datos?

$|A| = 150 \qquad |A \cap P| = 60$

$|S| = 120 \qquad |A \cap S \cap P| = 50$

$|P| = 100 \qquad |A \cup S| = 190$

$$|A \cup S| = |A| + |S| - |A \cap S|$$
$$190 = 150 + 120 - |A \cap S|$$
$$|A \cap S| = 150 + 120 - 190$$
$$|A \cap S| = 80$$



R/ $\boxed{60}$

b) **[3 puntos]** ¿Cuántas personas trabajan en exactamente dos áreas?

$$50 + 30 + 10 + \cancel{x} - 50 + 60 + 90 - \cancel{x} + 90 - x = 210$$
$$280 + x = 210$$
$$x = 70$$

$$30 + 10 + (70 - 50)$$
$$\boxed{60}$$

2. Se tiene dos urnas con bolitas, indistinguibles salvo por el color, de la siguiente manera:

	Bolitas rojas	**Bolitas azules**
Urna 1	4	1
Urna 2	2	2

Se extraen bolitas de las urnas, sin reemplazo y de forma alternada iniciando con la primera urna, hasta obtener dos bolitas rojas (no necesariamente consecutivas).

a) **[3 puntos]** Escriba una representación del espacio muestral para el experimento propuesto.

$\Omega = \{RAAR, AARR, RR, ARR, RAR, \ldots\}$

b) **[3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que se saquen cuatro bolitas para terminar el experimento?

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\approx \boxed{0{,}1333}$$

3. **[3 puntos]** Considere los eventos A, B y C de un experimento aleatorio. Si se sabe que A y B son independientes, y A y C son excluyentes, pruebe que:

$$P[A \cup B \cup C] = P[A]\,P[\overline{B}] + P[B \cup C].$$

$P(A \cup B \cup C) =$

$P(A) + P(B) + P(C) - \{P(A \cap B) + \cancel{P(A \cap C)}^{\,0} + P(B \cap C)\} + \cancel{P(A \cap B \cap C)}^{\,0}$

$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A \cup B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A) \cdot (1 - P(B)) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A) - P(A) \cdot P(B) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A) - P(A \cap B) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A) + P(B)\,P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)\} + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cup B \cup C)$ //

4. Considere la palabra **IMPLEMENTACION**. $= 14$

a) [**3 puntos**] Determine la cantidad total de **anagramas con todas las letras** en los que todas las vocales estén juntas (en cualquier orden) y, además, todas aparecen después de la cuarta posición.

$\Omega_V = \{I\,I\,E\,E\,A\,I\,O\}$ $\Omega_C = \{M\,P\,L\,M\,N\,T\,C\,N)$

2I 2E   2M 2N

_ _ _ _ | _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Posicionar $\Omega_V = 10 - 6 + 1 = 5$

Colocar $\Omega_V = \dfrac{6!}{2!\,2!}$

Colocar resto $\dfrac{8!}{2!\,2!}$

$N/\ 5 \cdot \dfrac{6!}{2!\,2!} \cdot \dfrac{8!}{2!\,2!} = \boxed{9072000}$

b) [**3 puntos**] Determine la cantidad total de **anagramas de 4 letras** en los que hay a lo sumo dos vocales y las consonantes no se pueden repetir.

$\Omega_V = \{I\,E\,A\,O\}$ $\Omega_C = \{M\,P\,L\,M\,N\,T\,C\,N)$

V	C	
0	4	$P(7,4) = 840$
1	3	$C(4,1) \cdot C(4,1) \cdot P(7,3) = 3360$
2	2	$C(4,2) \cdot C(4,2) \cdot 2! \cdot P(7,2) = 3024$

Cual   Posicion   Colocar   Consonantes

$840 + 3360 + 3024 = \boxed{7224}$

5. Se van a repartir 10 entradas generales al estadio (todas iguales) y 8 camisetas distintas entre tres amigas: Ana, Melissa y Raquel. ¿De cuántas maneras se puede realizar la repartición si:

10 entradas iguales, 8 camisas distintas

3 personas

a) **[2 puntos]** a Melissa le corresponden a lo sumo cuatro entradas?

Camisas 3^8

Entradas(E)	Resto(E)
0	$c(2+10-1, 10) = 11$
1	$c(2+9-1, 9) = 10$
2	$c(2+8-1, 8) = 9$
3	$c(2+7-1, 7) = 8$
4	$c(2+6-1, 6) = 7$

R/ $3^8 \cdot (11+10+9+8+7)$

$3^8 \cdot 45 = \boxed{295245}$

b) **[3 puntos]** le corresponden al menos dos camisetas a cada amiga?

$\Omega = \{2-2-4, 2-3-3\}$

Repartir entradas $c(3+10-1, 10) = 66$

Caso: 2-2-4

Escoger quien recibe 4 $c(3,1) = 3$

Elegirle 4 $c(8,4) = 70$

Repartir resto $c(4,2) = 6$

Caso: 2-3-3

Escoger quien recibe 2 $c(3,1) = 3$

Elegirle 2 $c(8,2) = 28$

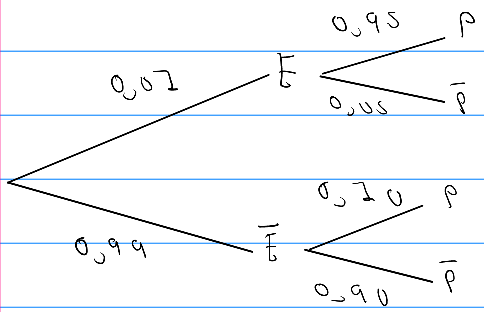
Repartir resto $c(6,3) = 20$

R/ $66 \cdot (3 \cdot 70 \cdot 6 + 3 \cdot 28 \cdot 20) = \boxed{194040}$

6. [**5 puntos**] Una clínica ha desarrollado una nueva prueba para detectar una enfermedad rara, que afecta al 1 % de la población. Dicha prueba tiene las siguientes características:

- La probabilidad de que la prueba sea positiva, dado que la persona tiene la enfermedad (sensibilidad) es de 95 %.
- La probabilidad de que la prueba sea negativa dado que la persona no tiene la enfermedad (especificidad) es de 90 %.

Si la prueba únicamente puede tener resultado positivo o negativo, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente que recibe la prueba con resultado positivo realmente tenga la enfermedad?



$$\frac{P(E)\cdot P(P)}{P(E)\cdot P(P)+P(\bar{E})\cdot P(P)}$$

$$\frac{0{,}01\cdot 0{,}95}{0{,}01\cdot 0{,}95+0{,}99\cdot 0{,}10}$$

$$\boxed{0{,}0876}$$