1. Considere la sucesión con término énsimo dado por $x_n = \dfrac{n!}{2023^n}$. Determine a partir de cuál término dicha sucesión se hace creciente.

$$\frac{(h+1)\cdot \cancel{h!}}{\cancel{2023^h}\cdot 2023} \cdot \frac{\cancel{2023^h}}{\cancel{h!}} \geq 1$$

$$h+1 \geq 2023$$

$$h \geq 2022$$

A partir de $h = 2022$ se hace creciente

2. Analice y justifique la convergencia de la siguiente serie, y calcule su suma

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{9 \cdot 5^{-k}}{(-3)^{2-k}} - \frac{2}{k^2-1}$$

$$\sum_{h=3}^{\infty} \frac{\cancel{9}\cdot 5^{-h}}{\cancel{(-3)^2}\cdot(-3)^{-h}} - \sum_{h=3}^{\infty} \frac{2}{(h-1)(h+1)}$$

$$\sum_{h=3}^{\infty} \left(\frac{-3}{5}\right)^h, \quad |r| \cancel{>} \quad \frac{3}{5} < 1$$

$$\frac{\left(\frac{-3}{5}\right)^3}{1 - -\frac{3}{5}} = \frac{-27}{200}$$

$$\frac{2}{(h-1)(h+1)} = \frac{A}{h-1} + \frac{B}{h+1}$$

$$2 = A(h+1) + B(h-1)$$

$$h = 1 \to 2 = 2A \to A = 1$$

$$h = -1 \to 2 = -2B \to B = -1$$

$$\frac{2}{(h-1)(h+1)} = \frac{1}{h-1} - \frac{1}{h+1}$$

$$\sum_{h=3}^{\infty}\left[\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}\right] + \sum_{h=3}^{\infty}\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h+1}\right]$$

$$\left[\frac{1}{2} - \lim_{h\to+\infty} \cancel{\frac{1}{h}}^{=0}\right] + \left[\frac{1}{3} - \lim_{h\to+\infty} \cancel{\frac{1}{h+1}}^{=0}\right]$$

$= 5$

$$= \frac{5}{6}$$

$$-\frac{27}{200} + \frac{5}{6}$$

$$\boxed{= \frac{419}{600}}$$

3. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

Por crit de la integral

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x - \ln(x) \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln(x))}{x^{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \qquad f \nexists \; x = 0$$

$$1 - 2\ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}}$$

	$-\infty$ a 0	0 a $e^{\frac{1}{2}}$	$e^{\frac{1}{2}}$ a $+\infty$
x^3	$+$	$+$	$+$
$1-2\ln(x)$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Decrece

$\therefore f(x)$ decrece

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \longrightarrow \int \ln(x) \cdot x^{-2} \qquad u = \ln(x) \quad dv = x^{-2}$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{-\ln(x)}{x} - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{-\ln(x)}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\left.\frac{-\ln(x) - 1}{x}\right|_2^{+\infty}$$

$$\lim \frac{-\ln(x) - 1}{} - \frac{-\ln(2) - 1}{}$$

$x \to +\infty \quad x \quad 2 \qquad \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\cancel{\frac{-1}{x}}}_{=0} + \frac{\ln(2)+1}{2} \qquad \frac{-\ln - 1}{x}$$

$$\frac{\ln(2)+1}{2}$$

$\boxed{\therefore \text{ Converge}}$

$$b) \sum_{k=7}^{\infty} \frac{5-3k^2}{7k+5k^2} + \frac{2^k}{k}$$

4. Considere la siguiente serie numérica, $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\ln(\ln(k+2))}$.

   a) Utilice el criterio para series alternadas para verificar que la serie S es convergente.
   Debemos considerar la función de variable real: $f(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x+2))}$ en el intervalo $[1, +\infty[$, ya que $a_k = f(k)$.