1. Suponga que para jugar AZUL, se deben pagar 400 colones. Una jugada consiste en sacar aleatoriamente de manera sucesiva, y sin reemplazo, dos bolitas de una urna cerrada. En dicha urna hay siete bolitas blancas y tres bolitas azules. Por cada bolita azul que saca, el dueño del juego le da 300 colones.

a) **[2 punto]** Determine el rango y el criterio de la distribución de probabilidad de la variable X correspondiente a la cantidad de bolitas azules en una jugada.

$N=10 \quad n=2 \quad b=3 \quad r=7$

$R_X = \{\max(0, 2-7), \min(2, 3)\}$

$\boxed{R_X = \{0, 2\}}$

Criterio: $\dfrac{C(3, x) \cdot C(7, 2-x)}{C(10, 2)}$

b) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una jugada se saque al menos una bolita azul?

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

$1 - \dfrac{C(3, 0) \cdot C(7, 2-0)}{C(10, 2)} = \dfrac{8}{15} \approx \boxed{0{,}5334}$

c) **[2 puntos]** ¿Cuál es la ganancia esperada en una jugada?

$N=10 \quad n=2 \quad b=3 \quad r=7$

$Y = 300X - 400$

$E(X) = \dfrac{b \cdot n}{N} = \dfrac{3 \cdot 2}{10} = 0{,}6$

$E(Y) = 300E(X) - 400$

$300 \cdot 0{,}6 - 400$

$= \boxed{-220}$

2. Durante un día de jornada laboral, se ha determinado que el número de estudiantes que asisten a horas de consulta con algún profesor de Matemática por hora sigue una distribución de Poisson, con media diez personas por hora. Además, la Escuela de Matemática se considera saturada si hay más de 15 estudiantes por hora.

a) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de haya entre 64 y 96 estudiantes, inclusive, en 8 horas?

$\lambda = 10 \quad t = 8 \quad \lambda_t = 10 \cdot 8 = 80$

$$P(64 \leq X \leq 96) = \sum_{k=64}^{96} \frac{e^{-80} \cdot 80^k}{k!}$$

b) **[2 puntos]** Calcule la probabilidad de que la Escuela se considere saturada.

$\lambda = 10 \quad t = 1 \quad \lambda_t = 10 \cdot 1 = 10$

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{15} \frac{e^{-10} \cdot 10^k}{k!} = \boxed{0{,}0487409033}$$

c) **[3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana (40 horas) hayan por lo menos 30 horas en las que la Escuela se considera saturada?

$p = 0{,}0487409033 \quad q = 0{,}9512590967 \quad n = 40$

$$P(X \geq 30) =$$

$$\sum_{k=30}^{40} c(40,k) \cdot (0{,}0487409033)^k \cdot (0{,}9512590967)^{40-k}$$

$$\boxed{= 2{,}265210291 \times 10^{-31}}$$

3. Para probar el nuevo sistema en una central telefónica de cierta empresa, se realiza una prueba diaria, la cual consiste en marcar un número específico tantas veces como sea necesario hasta obtener comunicación. El sistema se considera eficiente durante un día específico si al realizar dicha prueba telefónica se logra comunicación con a lo sumo 3 intentos. Además, se sabe que la probabilidad de que se responda una llamada es de 25 %.

a) **[2 puntos]** Calcule la probabilidad de que un día se considere eficiente.

$p = 0{,}25 \quad q = 0{,}75$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} 0{,}25 \cdot 0{,}75^{k-1} = \boxed{\frac{37}{64}}$$

b) **[3 puntos]** Determine la probabilidad de que al observar el sistema por 15 días hábiles, en al menos 8 de ellos el sistema sea hallado eficiente.

$p = \frac{37}{64} \quad q = \frac{27}{64} \quad n = 15$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{7} C(15,k) \cdot \left(\frac{37}{64}\right)^{k} \cdot \left(\frac{27}{64}\right)^{15-k} = \boxed{0{,}7320889578}$$

4. [**3 puntos**] Considere la variable aleatoria discreta Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{x+23}{900} & , \text{ si } \quad x \in \{1, 2, \ldots, k\} \\ 0 & , \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de k.

$$\sum_{x=1}^{k} \frac{x+23}{900} = 1$$

$$\left[\frac{1}{900} \sum_{x=1}^{k} x + \frac{23}{900} \sum_{x=1}^{k} 1\right] = 1$$

$$\frac{1}{900} \cdot \frac{k(k+1)}{2} + \frac{23}{900} k = 1$$

$$\frac{k^2+k}{1800} + \frac{46k}{1800} = 1$$

$$k^2 + k = 1800$$

$$k^2 + k - 1800 = 0$$

$$k = 25 \quad \vee \quad k = 72$$

$$\boxed{k = 25}$$

5. [**4 puntos**] Considere la variable aleatoria discreta Y, tal que $E(Y)$, $Var(Y)$ y $E\left((5Y-2\mu_Y)^2\right)$ existen. Demuestre que:

$$E\left((5Y-2\mu_Y)^2\right) = 25Var(Y) + 9\mu_Y^2.$$

$E[(5Y-2u_Y)^2]$

$= E(25Y^2 - 20u_Y Y + 4u^2_Y)$

$= 25E(Y^2) - 20E(u_Y Y) + 4E(u^2_Y)]$

$= 25E(Y^2) - 20u_Y E(Y) + 4u^2_Y$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$E(Y^2) = Var(Y) + \{E(Y)\}^2$

$= 25[Var(Y) + [E(Y)]^2] - 20u_Y E(Y) + 4u^2_Y$

$= 25Var(Y) + 25E(Y^2) - 20u_Y E(Y) + 4u^2_Y$

$E(Y) = u_Y, \quad E(Y^2) = u^2_Y$

$= 25Var(Y) + 25u_Y^2 - 20u_Y \cdot u_Y + 4u^2_Y$

$= 25Var(Y) + 25u^2_Y - 20u^2_Y + 4u^2_Y$

$\boxed{25Var(Y) + 9u^2_Y}$

6. [**5 puntos**] Considere la variable aleatoria discreta X, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_X(x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!}, \text{ si } x \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Determine el criterio y el dominio de la función generadora de momentos de X, y utilícela para calcular $E(X)$.

Dominio $= \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{4^x \cdot e^{-4}}{x!}$$

$$e^{-4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t 4)^x}{x!}$$

$$e^{-4} \cdot e^{4e^t}$$

$$m_X(t) = e^{4e^t - 4}, \quad 4e^t \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$m'_X(t) = e^{4e^t - 4}$$
$$= \left(e^{4e^t - 4}\right) \cdot 4e^t \cdot e^t$$

$$m'_X(0) = \left(e^{4 \cdot e^0 - 4}\right) \cdot 4e^0 \cdot e^0$$
$$= e^{4-4} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= 4$$

$$\therefore \boxed{E(X) = 4}$$