Vectores

Operaciones con vectores

1. Indique el vector unitario en cada una de las siguientes direcciones:

   a) $u = (-4, -8)$
   b) $v = (5, -2)$
   c) $w = (-2, 3)$
   d) $x = (12, -5)$
   e) $y = (-4, 3)$
   f) $z = (4, -2)$

2. Efectúe las operaciones indicadas usando $a = (-1, 4, 6)$, $b = (5, 2, -1)$ y $c = (-1, 3, 6)$.

   a) $2a - 3c$
   b) $a + b - 2c$
   c) $-4a + 3b + 5c$
   d) $a \cdot b$
   e) $b \cdot c$
   f) $(a - b) \cdot (2c - 3b)$

3. Sean $u = (x, y, z)$ y $v = (z, x, y)$ tales que $x + y + z = 0$. Determine el ángulo formado por los vectores u y v. R/ $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

4. Encuentre el ángulo entre el vector $u = (2, 4, -5)$ y $R = \dfrac{1}{3}[(1, -3, 4) \times (-2, 1, 1)] \cdot (-1, 4, 6) \cdot (5, 2, -1)$ R/ 72,5819°

5. Calcule el producto cruz de los siguientes vectores:

   a) $u = (2, 4, -5)$ y $v = (-3, -2, 1)$
   b) $p = (1, -3, 4)$ y $q = (-2, 1, 1)$

6. Halle $(3i - j + k) \times (i + 2j - k)$ R/ $(-1, 4, 7)$

7. Sean $P = (2, 3)$, $Q = (5, 2)$, $R = (2, -5)$ y $S = (1, -2)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}^{\overrightarrow{RS}}$ R/ $\left(\dfrac{-9}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

8. Dados los vectores $u = (1, -5, 7)$, $v = (-5, 4, 6)$ y $w = (-5, 2, 8)$, calcule:

   a) $u \times v$
   b) $(2u \times w) \cdot v$
   c) $(2u - v) \times w$
   d) $(2u \times w) - (v \times w)$
   e) $u \cdot (v \times w)$
   f) $(u \times v) \cdot w$

9. Considere los vectores $u = (4, 1, 0)$, $v_1 = (2, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 4)$ y $v_3 = (0, -1, 4)$

   a) Expese el vector u como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3.

   b) Calcule $\text{proy}_{v_3}^{u}$ R/ $\left(0, \frac{1}{17}, \frac{-4}{17}\right)$

   c) Determine el ángulo formado por los vectores v_1 y v_2 R/ $\theta = \frac{\pi}{3}$

10. Considere los vectores $p = (-1, 2, 1)$, $q = (1, 3, -1)$, $r = (-3, 2, 1)$ y $s = (-2, -2, 4)$ en $\mathbb{R}^3$

    a) Expese el vector p como combinación lineal de q, r y s.

    b) Calcule proy_{p}^{s} R/ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

    c) Determine el ángulo formado por los vectores q y r R/ $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{154}}\right)$

11. Probar que si u y v son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces los vectores $w_1 = ||v||u + ||u||v$ y $w_2 = ||v||u - ||u||v$ son octogonales.

12. Sea v un vector en $\mathbb{R}^n$ diferente de cero. Demuestre que para cualquier otro vector u en $\mathbb{R}^n$ el vector

$$w = u - \frac{u \cdot v}{||v||^2} \cdot v$$

    es octogonal a v, con $v \neq 0$.

13. Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^n$. Verifique que

$$||u + w||^2 - ||u - w||^2 = 4u \cdot w$$

14. Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$, tales que u y v son paralelos. Demuestre que $u \times v = 0$

15. Sean los vectores u, v en $\mathbb{R}^3$ tales que $u \cdot v = 0$ y $||u|| = ||v|| = 2$

    a) Calcule el seno del ángulo entre los vectores u y v. R/ 1

    b) Determine el valor en grados del ángulo entre los vectores u y v. R/ 90°

    c) Calcule la norma del vector $u \times v$ R/ 4

    d) Determine el valor que se obtiene al realizar R/ -36

$$(u - 2(u \times v) + 3v) \cdot (2v + 3(u \times v) + 9u)$$

Linealidad

1. ¿Será $S = \{(-1,2),(2,-5),(3,4)\}$ linealmente dependiente? R/ Sí

2. Determine si el conjunto $B = \{(2,-1),(-1,4),(-5,0)\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente.

3. Determine si los vectores $(1,2,-3)$, $(2,-2,0)$ y $(0,1,7)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes. R/ linealmente independientes

4. Considere los vectores u, v y w en $\mathbb{R}^3$ definidos por $u = (-1,5,-3)$, $v = (0,4,-2)$ y $w = (-2,-1,-3)$. Determine si el conjunto $\{u,v,w\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente. R/ linealmente independientes

5. Determine el o los valores de k, con $k \in \mathbb{R}$, de modo que los vectores $u = (0, k-5, -3)$, $v = (3,-1,1)$ y $w = (k,3,1)$ son linealmente independientes. R/ $k = -1$ y $k = 12$

6. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que los vectores $(1,0,-2,0)$, $(3,1,0,1)$, $(0,0,1,\alpha)$ y $(0,0,\alpha,\alpha)$ en $\mathbb{R}^4$ sean linealmente independientes. R/ $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

7. Considere los vectores u, v y w en $\mathbb{R}^4$ definidos por $u = (2,-1,3,0)$, $v = (4,-8,-6,3)$ y $w = (0,2,4,-1)$. Determine si los vectores u, v y w son linealmente independientes o linealmente dependientes. R/ linealmente dependientes

8. Sean $u = (0,1,2,1)$, $v = (1,-1,0,1)$ y $w = (3,2,-1,-3)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Verifique que los vectores u, v y w son linealmente independientes.

9. Demuestre que los vectores $(1,0,0,1)$, $(2,-2,2,-4)$ y $(8,-6,6,-10)$ en $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes.

10. Considere los vectores $(1,1,0,a)$, $(3,-1,b,-1)$ y $(-3,5,a,-4)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Determine a y b de forma que estos vectores sean linealmente dependientes. R/ $a = -2$ y $b = 1$

11. Sean $u = (1,a,0,0)$, $v = (1,-3,a+1,0)$ y $w = (0,1,-4,0)$ vectores en $\mathbb{R}^4$. Determine para cuáles valores de a (si existen), los vectores dados anteriormente (u, v y w) son linealmente independientes. R/ $a \neq -\dfrac{11}{3}$

12. Considere el conjunto de vectores $\{u, v, w\}$ en $\mathbb{R}^3$, donde $u = (8, -8, 16)$, $v = (3, 2, 1)$ y $w = (-21, -49, k)$, con $k \in \mathbb{R}$. Determine el valor de k para el cual $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente. R/ $k = 28$

13. Determine el conjunto de valores de α de manera que el conjunto de vectores

$$\{(3, 1, -1, 0), (-1, 4, 3, \alpha), (-7, 2, 5, \alpha)\}$$

sea linealmente independiente.

14. En $\mathbb{R}^3$ se define B, con $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 7)\}$.

    a) Verifique que B es linealmente independiente.

    b) Si $v = (\alpha, 3, 7)$. Determine α para que v sea linealmente dependiente o linealmente independiente con B. R/ $\alpha = \dfrac{19}{7}$

15. Sea $A = \{(1, 3, -4), (7, -12, 23), (3, -2, 5)\}$

    a) Demuestre que el conjunto de vectores A es linealmente dependiente.

    b) Exprese el primer vector como función de los otros dos. R/ $A = \dfrac{-1}{2}B + \dfrac{3}{2}C$

16. Escriba el vector $w = (3, 21)$ como combinación lineal de los vectores definidos por $x = (-2, 1)$ y $y = (1, 4)$. R/ $\alpha = 1$, $\beta = 5$

17. Escriba el vector $m = (34, -26)$ como combinación lineal de los vectores $n = (1, 5)$ y $p = (4, -8)$. R/ $\alpha = 6$, $\beta = 7$

18. Sean $u = (1, 3, 2)$, $v = (-1, 4, -2)$ y $w = (2, -1, 5)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Expresе el vector $z = (4, 5, 7)$ como combinación lineal de u, v y w. R/ $z = 4u - 2v - w$

19. Halle (si existe) el valor de α y β tales que el vector $(1, 2, \alpha, \beta)$ sea combinación lineal de los vectores $u = (1, 1, 0, 1)$ y $(1, 1, 2, 3)$ R/ No es posible

20. Halle los valores de a_1, a_2 y a_3 que satisfacen la ecuación R/ $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 0$

$$(-1, 1, 3) = a_1 \cdot (1, 2, 3) + a_2 \cdot (1, 1, 1) + a_3 \cdot (1, 0, 5)$$

21. Sean $u = (2, -1, 1)$ y $v = (1, -6, 2)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine para qué valor o valores de k se cumple que el vector $w = (4, k, -1)$ se puede expresar como combinación lineal de u y v. R/ $k = 9$

22. Sea $u = (2, -1, 1)$ y $v = (1, -6, 2)$. Determine para qué valores de c se cumple que $w = (-2, c, -1)$ se puede expresar como combinación lineal de $\{2u, v\}$. R/ $c = 1$

23. Sean $u = (-2, k, 2)$, $v = (-4, -1, 6)$ y $w = (1, 3, -2)$ en $\mathbb{R}^3$. Determine (si existe) el valor de k para que el vector u, dado anteriormente, se pueda escribir como combinación lineal de los vectores v y w. R/ $k = 5$

24. Considere los vectores $u = (1, -2, 0)$, $v = (3, -4, 1)$ y $w = (2, 1, c)$, con $c \in \mathbb{R}$. Determine el valor de c para el cual, el vector w se puede expresar como combinación lineal de u y v.

25. Dados los vectores $p = (-1, k, 3)$, $q = (2, -3, 1)$ y $r = (1, -1, 2)$ en $\mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{R}$. Determine el o los valores de k de modo que el vector p se pueda expresar como combinación lineal de q y r.

26. Determine el valor de a y b para que el vector $w = (1, 4, a, b)$ sea combinación lineal de los vectores $u = (1, 2, -1, 2)$ y $v = (0, 1, 2, 1)$ R/ $a = 3$, $b = 4$

27. Exprese (si es posible) el vector $w = (-1, 2)$ como combinación lineal de los vectores $u = (1, 2)$ y $v = (2, 3)$ R/ $w = 7u - 4v$

28. Considere en $\mathbb{R}^3$ a los vectores $u = (2, -3, 1)$, $v = (0, 1, -2)$ y $w = (\alpha, -14, 1 + 2\alpha)$

    a) Determine α para que el conjunto de vectores $\{u, v, w\}$ sea un conjunto linealmente dependiente. R/ $\alpha = 6$

    b) Para el valor α encontrado, escriba al vector w como combinación lineal de los vectores u, v. R/ $w = 3u - 5v$

29. Si $\{u, z, w\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes:

    a) Verifique que $B = \{u, u + z, z - w\}$ también es un conjunto de vectores linealmente independientes.

    b) Exprese el vector $u + z + w$ como una combinación lineal de los vectores de B.

30. Sean $u = (-1, 0, 1, 1)$ y $v = (1, 1, 0, 1)$ vectores en $\mathbb{R}^4$

    a) Calcule el ángulo θ entre los vectores $3u$ y $2v$

    b) Considere el conjunto de vectores $\{u, v, \text{proy}_{2v}^{3u}\}$. Determine si dicho conjunto es linealmente independiente o linealmente dependiente.

31. Considere los vectores $X = u + 3v$, $Y = -u + v$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Verifique que u es combinación lineal de X, Y. R/ $u = \dfrac{X}{4} - \dfrac{3Y}{4}$

32. Sean u y w vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Determine si los vectores $X = 3u - w$ y $Z = u + 2w$ son vectores linealmente independientes o linealmente dependientes.

33. Sabiendo que u, v y w son vectores linealmente independientes de un espacio vectorial, determine si $\{A, B, C\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente o linealmente dependiente, donde $A = u + v + 2w$, $B = u - v$ y $C = v + w$

34. Sean u, v, w vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, con $k \in \mathbb{R}$ y considere los vectores de $\mathbb{R}^n$: $s = u + kv + w$, $r = kv + w$ y $t = ku - v + kw$. Verifique que r, s y t son vectores linealmente independientes.

35. Considere el conjunto $A = \{U, V, W\}$. Si A es un conjunto linealmente independiente, verifique que el conjunto $B = \{3U - W, 2U - V + W, U + V - W\}$ también es linealmente independiente.

36. El conjunto $B = \{u, w, y\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^4$. Determine si el conjunto $A = \{y + u + w, w - 2y, 2w + u - y\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente.

37. Sea A el espacio vectorial de polinomios con grado menor o igual que 3, tales que $p = x^3 - x^2 - x + 1$, $q = x^3 + x - 3$ y $r = x^2 + x - 2$. Escriba el vector $v = x^3 + x^2 - x - 1$ como combinación lineal de p, q y r.

38. Sea V el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2, con coeficientes reales $V = \{at^2+bt+c\}$, tales que $a, b, c \in \mathbb{R}$, del cual, una base es $\{t^2, t, 1\}$. Sean $u = t^2+1$, $v = t^2 + t$ y $w = t + 1$ tres vectores en V.

    a) Demuestre que u, v y w son linealmente independientes.

    b) Exprese el vector $-3t^2 + 2t - 4$ como combinación lineal de u, v y w.

39. Considere el conjunto definido por $B = \{-x + 1, x - 2, x^2 + 1, x^3 + x\}$. Escriba (si es posible) el vector $p(x) = -4x^3 + 5x^2 - 8x + 10$ como combinación lineal de los elementos del conjunto llamado B. R/ $3X - Y + 5Z - 4W$

40. Sea $\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente de un espacio vectorial V. Si $X = 2u-3v+4w$, $Y = -2u+5w$, $Z = -2v+6w$ y $\{X, Y, Z\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Exprese el vector O (vector nulo) como dos combinaciones lineales distintas de X, Y y Z.

41. Si u y v son dos vectores linealmente independientes en cualquier espacio vectorial, demuestre que los vectores $w_1 = u+v$ y $w_2 = u-v$ también son linealmente independientes.

42. Sea $\{v, w\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que el conjunto $\{v - w, w - v\}$ es linealmente dependiente.

Ejercicios con condiciones

1. Sea $u = (-2, 3, 1)$ y $v = (-1, 2, 0)$. Determine el vector w tal que $w = (x, y, 0)$ que satisface simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right)$

   a) $u \cdot w = 2$

   b) $w \| v$

2. Sea $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determine los vectores r en que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $(0, 0, 0)$ y $\left(0, \frac{18}{5}, \frac{-6}{5}\right)$

   a) $||r + (1, -2, 0)|| = \sqrt{5}$

   b) $r = t(0, -3, 1)$

3. Sea $u = (-2, 0, 1)$ y $v = (-1, 2, 1)$. Determine el vector w que cumple simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $\left(\frac{-20}{3}, \frac{40}{3}, \frac{20}{3}\right)$

   a) $w \| v$

   b) $\text{proy}_u^w = 4u$

4. Sea $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Encuentre los vectores w que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $\left(0, \pm\frac{6}{\sqrt{5}}, \pm\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

   a) $w \| u$, con $u = (0, 2, 1)$

   b) $||w|| = ||(1, 2, -2)||$

5. Halle el vector w que: R/ $(-3, 3, 3)$

   a) Es octogonal a los vectores $u = (2, 3, -1)$ y $v = (1, -2, 3)$

   b) $w \cdot (2i - j + k) = -6$

6. Encuentre un vector $u = (x, 0, y) \in \mathbb{R}^3$ tal que R/ $(58, 0, 29)$

   a) $u \perp (-1, 1, 2)$

   b) La proyección de u a lo largo de $(3, 4, 2)$ es $8u$

7. Sean $u = (-2, 0, 1)$ y $v = (-1, 2, 1)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Halle el o los vectores w en $\mathbb{R}^3$ tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $\left(\frac{-20}{3}, \frac{40}{3}, \frac{20}{3}\right)$

   a) w es paralelo a v

   b) La proyección de w sobre u es igual a $4u$

8. Sean $s = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 2, -1)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Halle el vector o vectores $w \in \mathbb{R}^3$ que cumple simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $(2, 6, -2)$

   a) $w \parallel (s + v)$

   b) $\text{proy}_s^w = 4s$

9. Considere los vectores v y w tales que $v = (5, 6, 1)$ y $w = (a+5, 4a, 5a+3)$, con a constante real. Si se sabe que $v \cdot w = 198$. Determine un vector d que cumple simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $(148, -130, 40)$

   a) $d \perp v$

   b) $d \cdot w = 0$

10. Sean $p = (1, -2, 3)$, $q = (3, 1, 2)$ y $v = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{-7}{2}\right)$ vectores en $\mathbb{R}^3$

    a) Verifique que $v = \text{proy}_q^p - \frac{3}{2}p$

    b) Determine el o los vectores w en $\mathbb{R}^3$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

       - $w \parallel v$
       - $\|w\| = 1$

11. Determine la medida del ángulo formado por los vectores u y w, si se cumple simultáneamente que:

    - El área del triángulo generado por los vectores u y w es $5\sqrt{3}$ $(\text{ul})^2$
    - $u \cdot w = 30$

12. Dado el vector $v = (1, 2, 0)$ en $\mathbb{R}^3$, determine todos los vectores w en $\mathbb{R}^3$ de la forma $w = (a, b, a)$, que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones:

   - $\|w\| = 3$
   - $w \perp v$

13. Considere los vectores $u = (1, a, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$ y $v = (3, 2, 1)$. Si u es octogonal a v, determine los vectores $w \in \mathbb{R}^3$, que cumplen de manera simultánea las siguientes condiciones:

   - w es paralelo a v
   - $\|w\| = 2\,\|u\|$

14. Dados los vectores $u = (-4, -3, 0)$ y $v = (-3, 2, 1)$ en $\mathbb{R}^3$, determine los vectores w en $\mathbb{R}^3$, que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

   - w es paralelo a v
   - $\text{proy}_u^w = -2u$

15. Considere los vectores $v = (1, -2, 0)$ y $w = (1, -2, 1)$ en $\mathbb{R}^3$. Determine todos los vectores u en $\mathbb{R}^3$, que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

   - $u \parallel w$
   - $\text{proy}_v^u = -3v$

16. Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine el ángulo formado por dichos vectores si se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

   - El área del triángulo generado por u y v es de $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,(\text{ul})^2$
   - $u \cdot v = -3$

17. Sean $x = (3, 1, 0)$, $y = (2, 2, 0)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine los valores de a, b en $\mathbb{R}$ para que $z = (a, b, a)$ sea perpendicular a y y que $\text{proy}_x^z = -2x$

18. Si $w = (2, -1, 2)$ y $x = (1, 2, -2)$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$, determine los componentes de los vectores u y $y \in \mathbb{R}^3$ que cumplan, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

   - x es octogonal a y
   - $w = u + y$
   - $u \parallel x$

19. Considere los vectores $u = (1, -1, 0)$ y $v = (-1, 1, 2)$ en $\mathbb{R}^3$, además del vector $w = u - r$. Determine el o los vectores en $\mathbb{R}^3$, de modo que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

   - $v \perp r$
   - $\|r\| = 6$
   - $\text{proy}_u^w = 2u$

20. Considere en $\mathbb{R}^3$ los vectores $u = (3, -1, 0)$ y $v = (0, 0, 1)$. Determine todos los vectores $w \in \mathbb{R}^3$, para los que se cumplen, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

   - $\|w\| = 10$
   - u y w son octogonales.
   - w y v forman un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

21. Halle el o los vectores w en $\mathbb{R}^3$, que satisfacen, de manera simultánea las siguientes condiciones:

   - w es una combinación lineal de los vectores $(1, -1, 2)$ y $(-4, 0, -1)$
   - w es perpendicular al vector $(-1, 1, 2)$
   - $\|w\| = \sqrt{35}$

22. Sean $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$. Halle dos vectores w_1 y w_2 que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

   R/ $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 0)$

   a) $u = w_1 + w_2$ *b)* $v \cdot w_2 = 0$ *c)* $w_1 \| v$

23. Si $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 2)$, halle los vectores w, $s \in \mathbb{R}^3$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

   R/ $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

   a) $u = w + s$ *b)* $w \| v$ *c)* $s \cdot v = 0$

24. Sean $u = (-2, -2, 1)$, $v = (-1, 2, 1)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine los vectores w_1 y w_2 que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $(18, -36, -18)$ y $(22, -32, -20)$

    a) $w_1 \| v$ *b)* $w_1 = 2u + w_2$ *c)* w_2 es octogonal a u

25. Considere los vectores $u = (2, 1, 0)$, $w = (3, -2, 0)$. Halle todos los vectores $z = (a, b, c)$, que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones:

    - $u \perp z$
    - $\|z\| = 3$
    - El ángulo formado por w y z es $\dfrac{\pi}{3}$

26. Considere los vectores $v = (1, 0, -1)$ y $w = (1, 0, 1)$. Determine los vectores u que cumplan simultáneamente las condiciones siguientes: R/ $u = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

    a) w es octogonal a v

    b) $||u|| = 2$

    c) El ángulo formado por los vectores u y w es igual a $\dfrac{\pi}{3}$

27. Considere los vectores $u = (1, 1, 2)$ y $v = (1, -2, 1)$. Determine los vectores $w \in \mathbb{R}$ que cumplen simultáneamente, las siguientes condiciones: R/ $\left(\dfrac{-7}{3}, \dfrac{-4}{3}, \dfrac{13}{3}\right)$ y $(1, 4, 3)$

    a) $w = \alpha u + \beta v$, con α, $\beta \in \mathbb{R}$

    b) $\text{proy}_w^v = \dfrac{-2}{13} w$

    c) $||w|| = \sqrt{26}$

28. Sean A y B dos vectores en $\mathbb{R}^3$, los cuales vienen definidos de la siguiente forma: $A = (30, -5, 1)$ y $B = (1, 2, -2)$. Halle los vectores C y D en $\mathbb{R}^3$ que satisfagan, simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $C = (2, 4, -4)$ y $D = (28, -9, 5)$

    a) $A = C + D$ *b)* $D \perp B$ *c)* $C \parallel B$

29. Encuentre un vector $u \in \mathbb{R}^3$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones, definidas como: R/ $\left(\pm\frac{4}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{2}{3}\right)$

    a) El ángulo formado entre los vectores u y $(1,0,-1)$ mide $\frac{\pi}{4}$

    b) $||u|| = 2$

    c) u es perpendicular al vector $(1,-1,0)$

30. Sea $u = (1,2,-1)$, $v = (2,-1,-3) \in \mathbb{R}^3$. Halle los vectores w que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $\pm\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$

    a) w es combinación lineal de u y v.

    b) $w \cdot u = 0$

    c) $||w||^2 = ||v||^2 - 2||u||^2$

31. Sean $u = (1,-2,0)$ y $v = (1,1,0)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Halle el o los vectores w en $\mathbb{R}^3$ que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $(-8,-4,\pm 1)$

    a) w es perpendicular a u

    b) $||w|| = 9$

    c) La proyección de w a lo largo de v es igual a $-6v$

32. Considere el vector $x = (0,4,0)$ en $\mathbb{R}^3$. Halle el o los vectores z en $\mathbb{R}^3$ que cumplan con las condiciones siguientes: R/ $\left(\pm\frac{\sqrt{111}}{2}, \frac{7}{2}, 3\right)$

    a) $||z|| = 7$

    b) $z \cdot (0,0,3) = 9$

    c) El ángulo entre x y z es igual a $\frac{\pi}{3}$

33. Sean $u = (1,1,1)$ y $v = (1,-1,2)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine el o los vectores x, $y \in \mathbb{R}^3$ que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones: R/ $\left(\frac{-5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{-5}{3}\right)$ y $\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{8}{3}\right)$

    a) $u = x + y$

    b) $x \parallel v$

    c) $y \cdot v = 7$

34. Sean u y w vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine el vector w que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

    a) $\text{proy}_w^u = (-2, 4, 6)$

    b) $u \cdot w = 2$

    c) El ángulo entre u y w mide $\dfrac{\pi}{3}$

    d) $||u|| = 8$

35. Calcule el área del triángulo con vértices en los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(1, 1, 0)$.

36. Sean $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 2, 3)$ y $C = (2, 1, 0)$ en $\mathbb{R}^3$. Determine la longitud de la altura del triángulo ΔABC sobre el lado $\overline{AB}$.

37. Considere el paralelogramo de vértices A, B, C, D. Si los vértices A, B, C son tales que $A(-1, 2, 3)$, $B(-1, 1, 5)$ y $C(-1, -3, 8)$. Determine las coordenadas del vértice D.

38. Los puntos $A(1, 0, 5)$, $B(2, 3, -1)$, $C(x, -1, 0)$ son los vértices de un triángulo de área $\dfrac{\sqrt{539}}{2}(\text{ul})^2$. Determine los posibles valores de x.

39. Considere el triángulo generado por los vectores u y v en $\mathbb{R}^3$ tal que su área es igual a $14(u.l)^2$ y la medida del ángulo comprendido entre u y v es $\dfrac{\pi}{3}$. Calcule $u \cdot v$ R/ $\dfrac{28}{\sqrt{3}}$

40. Considere los puntos no colineales $A = (2, 4, 2)$, $B = (6, -2, 14)$ y $C = (14, 8, -4)$.

    a) Verifique que A, B y C son los vértices de un triángulo isósceles.

    b) Para el ΔABC, calcule la medida del ángulo cuyo vértice es B. R/ 37,9120°

    c) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y C. R/ 95,0157

41. Considere el triángulo cuyos vértices corresponden con los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 2)$ y $C = (3, 3, -2)$

    a) Pruebe que el triángulo ABC es rectángulo.

    b) Determine la medida del ángulo cuyo vértice es C

    c) Calcule la proyección $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{BC}$

42. Considere los puntos $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$ vértices de un triángulo.

    a) Determine la medida del ángulo interno correspondiente al vértice B. R/ 45°

    b) Calcule el área de dicho triángulo. R/ 12,5

    c) Justifique si es un triángulo equilátero. R/ No

43. Considere los puntos $A(1,2,1)$, $B(3,-1,7)$ y $C(7,4,-2)$

    a) Verifique que A, B, C son los vértices de un triángulo isósceles.

    b) Calcule la medida del ángulo cuyo vértice es B. R/ 37,9120°

    c) Calcule el área del triángulo de vértices A, B, C. R/ 23,7539