# Logaritmo principal

$$\ln(z) = \ln(r) + i \cdot \theta$$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad$ $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Tener en cuenta, de rectang. a polar

| Cuadrante | $a$ | $b$ | Resultado de $\tan^{-1}(b/a)$ | ¿Qué hacer para obtener Arg principal? |
|---|---|---|---|---|
| I | + | + | Ya está en $(0, \pi/2)$ | Nada |
| II | – | + | Cae en IV → negativo | ➕ Sumar π (para que quede entre 0 y π) |
| III | – | – | Cae en I → positivo | ➖ **Restar π** (para que quede en $(-\pi, \pi]$) ✅ |
| IV | + | – | Ya está en $(-\pi/2, 0)$ | Nada |

$z = a + bi$ Rectangular

$z = r\,\text{cis}(\theta)$ Polar

$z = re^{i\theta}$ Exponencial

Entonces se debe pasar z a exponencial

$$a + bi = re^{i\theta}$$

Rango de Logaritmo principal

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$$\ln(a+b) = \ln(r \cdot e^{i\theta})$$

$$= \ln(r) + \cancel{\ln}(\cancel{e}^{i\theta})$$

$$= \underbrace{\ln(r)}_{\text{Real}} + \underbrace{i\theta}_{\text{Img}} \longrightarrow \text{Forma rectangular}$$

1) Det $\ln(z^2)$ si $z = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

a) Primero pasar a exponencial

$$\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \to e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\ln(z^2)$$

$$= \ln\left[\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2\right]$$

Rango de Logaritmo principal

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$\frac{8\pi}{3} > \pi$ entonces para ajustarlo se le suma o resta $2\pi$ hasta que el resultado $\in\, ]-\pi, \pi]$

$$= \ln\left[e^{i\frac{8\pi}{3}}\right]$$

$$\frac{8\pi}{3} - 2\pi$$

$$\underbrace{\cancel{\ln}\left(\cancel{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{6\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3}i$$

Antes de quit...

$$= \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$$

ln(e) hay que ver que $-\pi < \theta \leq \pi$ $\quad -3,14 < 2,09 \leq 3,14$ ✓

2) $\dfrac{1-i}{(-\sqrt{3}+i)^5} + \ln(-5)$

Pasamos a polar

$1-i$, $a=1$ $b=-1$

$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\theta=\arctan\left(\frac{-1}{1}\right)=\frac{-\pi}{4}$

$z=\sqrt{2}\cdot cis\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$-\sqrt{3}+i$, $a=-\sqrt{3}$, $b=1$

$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$a<0 \wedge b>0$

$\theta=\arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)+\pi$

$\frac{-\pi}{6}+\pi$

$\theta=\frac{5\pi}{6}$

$z=2\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Primero pasar z a exponencial

$\ln(-5)$ $\quad z=-5+0i$, $a=-5$, $b=0$

$r=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$

$a<0$

$\theta=\arctan\left(\frac{0}{-5}\right)+\pi$

$\theta=\pi$

$\boxed{z=5\cdot e^{i\pi}}$

Entonces

$\ln(5\cdot e^{i\pi})$

Remplazamos

$\dfrac{\sqrt{2}\,cis\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{\left[2^5 cis\left(5\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right]^5} + \ln(5\cdot e^{i\pi})$

$\dfrac{\sqrt{2}\cdot cis\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{32\cdot cis\left(\frac{25\pi}{6}\right)} + \ln(5) + \cancel{\ln}(\cancel{e}^{i\pi})$

Antes de borrar ln(e) verificar

$-\pi < \theta \leq \pi$

$\pi$ queda en el rango entonces no se hace nada

$\dfrac{\sqrt{2}\cdot cis\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{32\cdot cis\left(\frac{25\pi}{6}\right)} + \ln(5) + i\pi$

Prop de moivre $\frac{cis(\theta_1)}{cis(\theta_2)} = cis(\theta_1 - \theta_2)$

$$\frac{\sqrt{2}}{32} \cdot cis\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{25\pi}{6}\right) + \ln(5) + i\pi$$

$$\frac{\sqrt{2}}{32} \cdot cis\left(\frac{-53\pi}{12}\right) + \ln(5) + i\pi$$

Pasamos a $\cos(\theta) + i\,sen(\theta)$

$$\frac{\sqrt{2}}{32}\left(\cos\left(\frac{-53\pi}{12}\right) + i\,sen\left(\frac{-53\pi}{12}\right)\right) + \ln(5) + i\pi$$

$$\frac{\sqrt{2}}{32}\cos\left(\frac{-53\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{2}}{32}\,i\,sen\left(\frac{-53\pi}{12}\right) + \ln(5) + i\pi$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{64} + i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{64}\right) + \ln(5) + i\pi$$

Juntar parte real y imaginaria

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{64} + \ln(5)\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{64} + \pi\right)i$$