

# Principios de probabilidad

## Probabilidad condicionada

- Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  eventos tales que  $A$  y  $B$  son independientes y  $B$  y  $C$  son excluyentes. Para  $A$  y  $C$  se cumple que  $P(A|C) = 0,2$ . Si  $P(A) = P(B) = 0,1$  y  $P(C) = 0,3$ . Determine el valor de  $P(A \cup B \cup C)$  R/ 0,433
- El 80 % de los estudiantes de probabilidades son aficionados a natación y el 60 % son aficionados al cine. Se sabe que el 50 % de los estudiantes son aficionados a ambas actividades. Si se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad que el estudiante seleccionado?
  - No sea aficionado a ninguna de las dos actividades R/  $\frac{1}{10}$
  - Sea aficionado al cine, sabiendo que no es aficionado a la natación R/  $\frac{1}{2}$
- El administrador de una empresa ha realizado estudios sobre los procesos de ocupación de las dos líneas de atención al público y ha detectado que: la línea 1 pasa ocupada el 70 % del tiempo y la línea 2 el 50 % del tiempo. Si se sabe que la probabilidad de que alguna de las líneas esté en uso es de 0,80
  - ¿Cuál es la probabilidad que la línea 2 esté en uso dado que la línea 1 lo esté? R/  $\frac{4}{7}$
  - ¿Cuál es la probabilidad que la línea 1 esté en uso dado que la línea 2 lo esté? R/  $\frac{4}{5}$
- Sabiendo que  $P(A) = 0,28$  y  $P(B) = 0,57$  y que  $A$  y  $B$ , son eventos independientes. Determine  $P(\bar{A} \cap B)$  R/ 0,4104
- Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos independientes. Determine  $P(A \cap \bar{B})$ , sabiendo que  $P(A) = 0,30$  y  $P(B) = 0,53$  R/ 0,141
- Sabiendo que  $P(\bar{A}) = \frac{9}{10}$ ,  $P(B) = \frac{9}{20}$  y  $P(B|A) = \frac{17}{20}$  ¿Cuál es el valor de la probabilidad  $P(A|B)$ ? R/  $\frac{17}{90}$

7. A una fiesta fueron niñas y niños. La probabilidad de que un niño beba Coca Cola es de 0,93, mientras que la probabilidad de que una niña beba Coca Cola es de 0,75. Determine la proporción de niños y niñas que fueron a la fiesta, sabiendo que el 85 % beben Coca Cola

R/ Niños 56 % y niñas 44 %

8. En un semestre en el **TEC** se obtuvieron los siguientes resultados: el 25 % de los estudiantes perdieron cálculo, el 15 % perdió química, mientras que el 10 % perdió ambas materias.

a) Si perdió química, ¿cuál es la probabilidad que perdiera cálculo?

R/  $\frac{2}{3}$

b) Si perdió cálculo, ¿cuál es la probabilidad que perdiera química?

R/  $\frac{2}{5}$

c) ¿Cuál es la probabilidad que perdiera cálculo o química?

R/  $\frac{3}{10}$

9. En un comedor de beneficencia, una trabajadora social reúne los siguientes datos de las personas que asisten al comedor: el 59 % son hombres, 32 % son alcohólicos y el 21 % son hombres alcohólicos ¿Cuál es la probabilidad que un hombre seleccionado al azar sea alcohólico?

R/ 0,3559

10. Una caja tiene en su interior tres bolas rojas y tres bolas azules. Se extraen dos bolas sin reemplazar la primera.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja, dado que la primera fue roja?

R/  $\frac{2}{5}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja, dado que la segunda fue roja?

R/  $\frac{2}{5}$

## Probabilidad total

1. Una bolsa tiene 4 bolas azules y 3 bolas rojas. Juan saca 4 bolas al azar de una urna sin reposición. Determine la probabilidad de que la cuarta bola sea roja.

$$R/\frac{3}{7}$$

2. En una bolsa se tienen 10 bolas blancas, 6 bolas verdes y 4 bolas rojas. Considere el experimento en que se extrae una bola al azar, se anota su color y se devuelve la bola extraída con dos bolas del mismo color al de la bola extraída. Suponga que el experimento se repite hasta obtener dos bolas verdes consecutivas. Determine la probabilidad de que se realicen exactamente 3 extracciones.

$$R/\frac{7}{110}$$

3. En una bolsa se tienen 10 bolas blancas, 6 bolas verdes y 4 bolas rojas. Considere el experimento en que se extrae una bola al azar, se anota su color y se devuelve la bola extraída con tres bolas del mismo color al de la bola extraída. Suponga que el experimento se repite hasta obtener dos bolas rojas. Determine la probabilidad de que se realicen exactamente 3 extracciones.

$$R/\frac{112}{1495}$$

4. En una canasta se tienen 10 bolas rojas y 1 bola verde. Se comienza a sacar bolas al azar, sucesivamente bajo las siguientes reglas:

- **Regla 1:** si la bola extraída es roja, no se devuelve a la canasta y se agrega una bola verde a la canasta.
- **Regla 2:** si la bola es verde no se devuelve a la canasta.

El proceso termina hasta obtener 2 verdes extraídas ¿cuál es la probabilidad de sacar en total cuatro bolas?

$$R/\frac{4419}{66550}$$

5. En una mesa se tienen un par de urnas, la primera urna (llamada  $A$ ) tiene 4 bolitas rojas y 6 bolitas azules, mientras que, la segunda urna (llamada  $B$ ) posee 16 bolitas rojas y una cantidad desconocida de bolitas azules. Un experimento consiste en sacar una bolita al azar de cada urna. Si se sabe que la probabilidad de que ambas bolitas sean del mismo color es de 0,44 ¿cuántas bolitas azules hay en la urna  $B$ ?

$$R/4$$

6. Se tienen 15 artículos en un almacén, donde cuatro de ellos son defectuosos. Se toman tres artículos del almacén, uno a uno. Hallar la probabilidad de que los tres artículos estén buenos.  $R/ \frac{33}{91}$
7. Suponga que se tiene una caja con 20 botellas de un refresco para la venta y que 10 de ellos en su tapa traen la palabra **PREMIO**. Cada vez que un cliente compra una botella, esta es tomada al azar de la caja. Determine la probabilidad de que la tercera botella que se venda sea la primera que tenga la palabra **PREMIO** en su tapa.  $R/ \frac{5}{38}$
8. En una bolsa se tienen 10 bolas blancas, 8 bolas verdes y 7 bolas rojas. Considere el experimento en que se extraen bolas al azar sucesivamente de la bolsa y en cada extracción, la bola no se devuelve y antes de la siguiente extracción, las bolas blancas se pintan verdes, las que eran verdes se pintan rojas y las que eran rojas, se pintan blancas. Si se extraen tres bolas ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?  $R/ \frac{14}{115}$
9. Esteban tiene una moneda cargada. Sabe que la probabilidad de obtener al menos una corona en dos lanzamientos independientes es de 0,8. Determine la probabilidad de obtener al menos un escudo en dos lanzamientos.  $R/ \frac{2\sqrt{5} - 1}{5}$
10. Un experimento consiste en lanzar una moneda tantas veces como sean necesarias hasta obtener un escudo. Determine la probabilidad de que se de deba lanzar la moneda menos de 20 veces.  $R/ 0,999998$
11. Se tienen 4 hombres y 5 mujeres en una sala de eventos. El organizador del evento elige tres personas al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera persona sea hombre?  $R/ \frac{4}{9}$

## Regla de Bayes

1. María y Jorge son graduados del **TEC** y tienen una pequeña empresa que produce conservas. En la empresa tienen tres procesadoras de alimentos:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La procesadora  $A$  produce 35 % del total, la  $B$  produce 45 % del total y la  $C$  produce el resto. Por problemas técnicos, la procesadora  $A$  y la  $B$  dan un 5 % del producto con defectos, mientras que la procesadora  $C$  da un 3 % del producto con defectos.
  - a) Si se elige una conserva al azar, calcule la probabilidad que esta conserva se encuentre defectuosa R/ 0,046
  - b) Si se elige una conserva al azar y resulta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la procesadora  $A$ ? R/ 0,3804
  - c) Si se elige una conserva al azar y no resulta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la procesadora  $B$ ? R/ 0,4481
2. Se dispone de tres urnas: una urna  $A$  con 3 bolas blancas y 2 negras, una urna  $B$  con 4 bolas blancas y 5 negras y una urna  $C$  con 2 bolas blancas y 3 negras. Si se elige una urna al azar y se extrae una bola, determine la probabilidad que la bola elegida al azar sea negra. R/ 0,518
3. Un taller mecánico es atendido por Juan, Mary y Carlos. Se sabe que el 20 % es atendido por Juan, el 40 % es atendido por Mary y el 40 % es atendido por Carlos. El 10 % no queda satisfecho del trabajo de Juan, el 8 % no queda satisfecho del trabajo de Mary y el 15 % no queda satisfecho de la labor de Carlos. Se sabe que un cliente queda satisfecho, entonces ¿cuál es la probabilidad que lo haya atendido Carlos? R/ 0,3828
4. Estudios realizados indican que hay un 10 % de fumadores y un 90 % de no fumadores, estos mismos estudios revelan que el 20 % de los fumadores desarrollan molestias respiratorias por inhalación de humo, mientras que entre los no fumadores este porcentaje es de 85 %. Determine la probabilidad de que una persona que presente molestias sea realmente un fumador. R/ 0,0254

5. En la Universidad **TECNO**, se tiene que el 30 % de los alumnos es de primer año de ingreso, de los cuales, el 10 % tiene automóvil. El 40 % de los alumnos es de segundo año, de los cuales, el 20 % tiene automóvil. El 20 % de los alumnos es de tercer año, de los cuales, el 40 % tiene automóvil. Y el resto es de cuarto año o más, de los cuales, el 60 % tiene automóvil. Se elige un estudiante al azar.

a) Halle la probabilidad que el estudiante elegido tenga automóvil

$$R/ \frac{1}{4}$$

b) Si el estudiante elegido tiene automóvil ¿Cuál es la probabilidad que sea de tercer año?

$$R/ \frac{8}{25}$$

c) Si el estudiante elegido tiene automóvil ¿Cuál es la probabilidad que sea de primer año?

$$R/ \frac{3}{25}$$

d) Si el estudiante elegido tiene automóvil ¿Cuál es la probabilidad que sea de segundo año?

$$R/ \frac{8}{25}$$

e) Si el estudiante elegido tiene automóvil ¿Cuál es la probabilidad que sea de cuarto año o más?

$$R/ \frac{6}{25}$$

6. El 20 % de los empleados de una empresa son arquitectos y otro 20 % de los empleados son ingenieros. El 75 % de los arquitectos son directivos, mientras que, el 50 % de los ingenieros son directivos. De los que no son arquitectos ni ingenieros, el 20 % ocupa un puesto directivo ¿Cuál es la probabilidad que un empleado directivo elegido al azar sea arquitecto?

$$R/ 0,405$$

7. En una determinada ciudad, se tiene que el 40 % de los trabajadores laboran en el sector de servicios, un 35 % lo hace en sanidad y el resto en otros sectores. El 30 % de los trabajadores en el sector de servicios son mujeres, el 60 % del sector de sanidad y el 45 % de otros sectores. Si se elige al azar una persona y resulta que es hombre ¿Cuál es la probabilidad que trabaje en el sector de sanidad?

$$R/ 0,2511$$

8. Se dispone de dos urnas: la urna 1 tiene 3 bolas blancas y 7 bolas rojas y la urna 2 tiene 6 bolas blancas y 4 bolas rojas. Si se elige una urna al azar y luego se extrae una bola de ella.

a) Sabiendo que la bola extraída fue blanca ¿cuál es la probabilidad que provenga de la urna 1?

$$R/ \frac{1}{3}$$

b) Sabiendo que la bola extraída fue roja ¿cuál es la probabilidad que provenga de la urna 2?

$$R/ \frac{4}{11}$$

9. En la empresa **CELLPHONE** se fabrican celulares, el 50 % de los celulares fabricados son de la línea móvil 5G, el 35 % de la línea móvil 4G y el resto de la línea móvil 3G. Además, 25 % de los celulares de la línea móvil 5G tienen daños de fabricación, al igual que 35 % de la línea móvil 4G y el 40 % de la línea móvil 3G.

a) Halle la probabilidad que los celulares fabricados por la empresa **CELLPHONE** tengan daños de fabricación

$$R/ 0,3075$$

b) Si un celular, escogido al azar, tiene daños de fabricación ¿cuál es la probabilidad que sea de la línea 3G?

$$R/ \frac{8}{41}$$

10. Se ha determinado que, en Costa Rica, el 20 % de las familias son de clase baja; entre tanto, el porcentaje de familias de clase media y alta debe determinarse. De las familias de clase alta, el 90 % acostumbra a salir del país para fin de año; el 30 % de las familias de clase media y 5 % de familias de clase baja hace lo mismo. Si una familia seleccionada al azar acostumbra a salir del país para fin de año, la probabilidad que sea de clase media es de 0,4

a) ¿Cuál es el porcentaje de familias de clase alta en Costa Rica?

$$R/ 0,2593$$

b) ¿Cuál es el porcentaje de familias de clase media en Costa Rica?

$$R/ 0,5408$$

11. Una cierta noche, un taxi se ve involucrado en un accidente en donde choca y se escapa. En la ciudad operan dos compañías, la de los taxis verdes con el 85 % y la de los azules con el 15 %. Un observador de la escena identifica al taxi que se escapó como un taxi verde. Este observador fue probado bajo condiciones normales de visibilidad e hizo una correcta identificación del color en el 80 % de los casos ¿cuál es la probabilidad de que el taxi fugado sea azul?
- R/ 0,0422
12. En la carrera de computación de la **Universidad Bienestar Seguro**, el 45 % de los estudiantes prefieren películas de terror, el 35 % prefiere las películas de comedia y el resto prefiere las películas de drama. Además, el 15 % de los estudiantes prefieren las películas de comedia y utilizan Netpeli (cierta plataforma de películas en línea). Por otro lado, el 30 % de los que prefieren películas de terror utilizan Netpeli, al igual que el 20 % de los que prefieren las películas de drama. Se elige al azar un estudiante de la carrera de computación.
- a) Halle la probabilidad de que el estudiante elegido, utilice Netpeli.
- R/ 0,2275
- b) Si el estudiante elegido resultó que no utiliza Netpeli ¿cuál es la probabilidad de que prefiera las películas de comedia?
- R/ 0,3851
13. El 20 % de los empleados de una empresa son arquitectos y el otro 20 % son ingenieros. El 75 % de los arquitectos son directivos, mientras el 50 % de los ingenieros también son directivos. De aquellos que no son arquitectos ni ingenieros, el 20 % ocupan un puesto directivo. ¿Cual es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea arquitecto?
14. Suponga que una oficina tiene cuatro secretarias ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$ ) que manejan respectivamente 20 %, 60 %, 15 % y 5 % de los documentos. Las probabilidades de que estas secretarias traspapelen documentos son respectivamente: 0,05, 0,10, 0,10 y 0,05. Encuentre la probabilidad de que la secretaria  $N_1$  haya traspapelado un documento.



15. El 60 % de los tornillos producidos por una fábrica proceden de la máquina  $A$  y el 40 % de la máquina  $B$ . La proporción de defectuosos en  $A$  es 0,1 y en  $B$  es 0,5
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo de dicha fábrica sea defectuoso? R/ 0,26
- b) Sabiendo que un tornillo es defectuoso ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina  $A$ ? R/  $\frac{3}{13}$
16. Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20 % se realizan correcciones faciales, un 35 % implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de género masculino el 25 % de los que se realizan correcciones faciales, 15 % implantes mamarios y 40 % otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar:
- a) Determine la probabilidad de que sea de género masculino. R/ 0,2825
- b) Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios. R/ 0,1858
17. Suponga que las máquinas  $M1$ ,  $M2$  y  $M3$  producen, respectivamente, 500, 1 000 y 1 500 piezas por día, De las máquinas  $M1$  y  $M2$  se conoce que el 5 %, 6 % de las piezas son defectuosas, pero no se sabe qué porcentaje de las piezas producidas por  $M3$  son defectuosas. Si se sabe que la probabilidad que una pieza elegida al azar, al final del día sea defectuosa es de  $\frac{19}{300}$  ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de  $M3$ ? R/  $\frac{21}{38}$

## Dependencia e independencia

1. Sabiendo que  $P(A) = 0,5$ ,  $P(\overline{B}) = 0,6$  y  $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,25$ , determine si  $A$  y  $B$  son eventos independientes.

R/ Dependientes

2. Suponga que en  $\Omega$  se definen los eventos  $C$  y  $D$ , tales que  $P(C) = 0,5$ ,  $P(D) = 0,4$  y  $P(\overline{C} \cap D) = 0,2$ . Determine si los eventos  $C$  y  $D$  son independientes o no lo son.

R/ Independientes

3. Considere los eventos:

- $A$  : tener hijos de ambos sexos.
- $B$  : tener al menos un hijo (varón) después del primer varón.

Pruebe que si una familia tiene exactamente tres hijos (hombres o mujeres) entonces los eventos  $A$  y  $B$  son independientes.

## Ejercicios especiales

1. Muestre que  $C(n+1, 2) = C(n, 2) + n$
2. Muestre que  $C(n, n-k) = C(n, k)$
3. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres eventos independientes. Demuestre que  $A \cap (B \cup C)$  son independientes.
4. Sean  $A$  y  $B$  dos eventos, con  $B$  un evento no nulo.

a) Pruebe que  $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

b) Si  $P(A|B) > P(A)$ , pruebe que  $P(\bar{A}|B) < P(\bar{A})$

**Sugerencia:** use el resultado del inciso anterior.

5. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  eventos no nulos, tales que  $A$  y  $C$  son disjuntos,  $A$  y  $B$  son independientes y además, se sabe que:

$$P(B \cup C) = \frac{P(A)}{5}$$

Pruebe que  $P(A \cup B \cup C) = P(A) \left( \frac{1}{5} + P(\bar{B}) \right)$

6. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  eventos no nulos tales que  $A \cup B = \Omega$ ,  $A$  y  $C$  son independientes.

a) Demuestre que  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son disjuntos.

b) Pruebe que  $P(A \cap B \cap C) = 1 - P(\bar{A}) P(C) - P(\bar{B} \cup \bar{C})$

7. Demuestre que  $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

8. Hay  $n$  bolas rojas y 2 azules, todas indistinguibles (salvo por el color). Bryan las coloca en una hilera. Determine la probabilidad de que haya exactamente  $r$  bolas rojas entre las dos azules,  $0 \leq r \leq n$ . ¿Cambiarían las probabilidades si se tratara de bolas distinguibles?

R/  $\frac{2(n-r+1)}{(n+1)(n+2)}$ , No

9. Tres bolas se colocan aleatoriamente en tres cajas, determine la probabilidad de tener exactamente una caja vacía.

R/  $\frac{2}{3}$

10. José y María juegan con mazos de naipes numerados, cada uno tiene cartas numeradas con los números  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Un juego consiste en que cada uno de ellos saca una carta al azar de su mazo y la muestra con el número hacia arriba. Si la suma de ambos números es un número primo, María gana el juego. Si la suma es un número múltiplo de 3, José gana. En cualquier otro caso, el juego termina empatado.

a) Calcule la probabilidad que tiene cada jugador de ganar la partida. R/  $P(J) = \frac{5}{16}$  y  $P(M) = \frac{3}{8}$

b) Calcule la probabilidad de que María gane, dado que José sacó un 5 R/  $\frac{1}{4}$

c) Considere los eventos José gana, María sacó una carta inferior a 3, determine si estos eventos son o no independientes. R/ Independientes