

1. Verifique que la sucesión $\{n 2^{-n}\}_{n \geq 1}$ es decreciente.

$$f(x) = \frac{x}{2^x}$$

$$= \frac{2^x - x \cdot 2^x \ln(2)}{2^{x^2}}$$

$$= \frac{2^x (1 - x \ln(2))}{2^{x^2}}$$

$$= \frac{1 - x \ln(2)}{2^x} = 0$$

$$1 - x \ln(2) = 0$$

$$x = \frac{1}{\ln(2)}$$

\therefore Decreciente

	$-\infty$	$\frac{1}{\ln(2)}$	$+\infty$
2^x	+	+	+
$1 - x \ln(2)$	+	0	-
$f'(x)$	+	-	-
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\searrow

Decreciente

2. Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ con suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$. Determine si la serie converge, y en caso de ser convergente determine el valor de convergencia. [2 pts]

$$2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n}{2^n}, \frac{+\infty}{+\infty}, \text{L'Hôpital}$$

$$2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n \ln(2)} = \frac{1}{2^{+\infty} \ln(2)} = 0$$

$$2 - 0$$

$$2$$

converge a 2

3. Calcule la suma de la serie $B = \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+1} \right]$.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+1} \right] + \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right]$$

$$\left(\frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{5} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

8
15

converge a	8
	15

4. Utilice el criterio de la integral para determinar si la serie $\sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ converge o diverge.

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x \ln^2(x))^2} \cdot (\ln^2(x) + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x})$$

$$= - \frac{(\ln^2(x) + 2 \ln(x))}{x^2 \ln^4(x)}$$

$$= - \frac{\cancel{\ln(x)} (\ln(x) + 2)}{x^2 \cancel{\ln^2(x)}}$$

$$= - \frac{\ln(x) + 2}{x^2 \ln^3(x)} = 0 \quad f \nexists$$

$$-\ln(x) + 2 = 0$$

$$\ln(x) = 2$$

$$x = e^2$$

	$-\infty$	0	e^2	$+\infty$
$x^2 \ln^3(x)$	+	+	+	+
$-\ln(x) + 2$	+	+	0	-
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow

\therefore Decrece

Decrece

$$\int_6^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \rightarrow \int \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \quad u = \ln(x)$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{u^2} du$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\ln(h)} = \frac{-1}{\ln(6)} = \frac{-1}{\ln(h)}$$

$$\frac{1}{\ln(6)}$$

\therefore converge

5. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente. [4 pts c/u]

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{6+7k^2}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k^2}{6+7k^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \neq 0$$

Diverge por crit de diver

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) + 2}{\sqrt{n}}$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(n) + 2}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}, \text{ p serie, } p = \frac{1}{2} < 1$$

\therefore Diverge

\therefore Diverge por crit de comp direct

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k) + 2^k}{3^k + k^2}$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{h(h) + 2}{3^h + h^2} \sim \frac{2}{3^h}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^h, \text{ Serie geometrica, } |r| = \frac{2}{3} < 1, \text{ converge}$$

Por crit de comp al lim

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h(h) + 2^h}{3^h + h^2} \cdot \frac{3^h}{2^h}$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{3^h h(h) + 3^h \cdot 2^h}{3^h \cdot 2^h + 2^h \cdot h^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{3^h \cdot 2^h}{3^h \cdot 2^h} = 1$$

$$b_n \text{ conver } \wedge L \neq 0 \\ \therefore \text{Original converge}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n+5}{2n+9}\right)^{2n+1}$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sqrt[h]{\left(\frac{-h+5}{2h+9}\right)^{2h}} \cdot \sqrt[h]{\frac{-h+5}{2h+9}} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{h+5}{2h+9}\right)^2$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$$

$$\therefore \text{converge}$$

6. Considere la serie alternada $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

a) Pruebe que esta serie S es convergente.

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$$

$$= \frac{-3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-3}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^4} = 0$$

\therefore converge

b) Determine el menor valor para N de manera que la suma parcial S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error E_N menor que 10^{-3} . [2 pts]

$$\begin{array}{ccc} N & N+1 & a_{N+1} \\ 10 & 11 & < 10^{-3} \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n^3} \approx 0.9011$$

7. Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{3n}$$

Determine el intervalo de convergencia de esta serie (no estudie los extremos del intervalo).

(rit de razón

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot x^{3(n+1)}}{(n+1)! \cdot x^{3n}} \cdot \frac{n!}{(-1)^n \cdot x^{3n}} \right|$$

$$|x^3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

