# Conteo

## Principios elementales de conteo

- **Principio de la suma**

  Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en $k$ casos y $C_i$ es el conjunto de maneras de realizar el proceso, ubicados en el caso $i$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, se tiene que hay $|C_1| + |C_2| + \ldots + |C_k|$ maneras de realizar el proceso.

- **Principio del producto**

  Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en $k$ etapas y $E_i$ es el conjunto de maneras de realizar el proceso, ubicados en la etapa $i$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, se tiene que hay $|E_1| \cdot |E_2| \cdot \ldots \cdot |E_k|$ maneras de realizar el proceso.

- **Anagramas**

  El anagrama de una palabra es un ordenamiento de las letras de la palabra dada. Las posiciones de un anagrama se enumeran de izquierda a derecha.

**Definición 1.9** Principio de inclusión-exclusión.

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad \textbf{si} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

$$\left|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k<l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \cdots$$

$|\overline{A}| = |U| - |A|$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \quad \text{DM}$$

$$= |\overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{A_5}}|$$

$$= |U| - \Big[ \sum |\overline{A_i}| - \sum \overline{A_i} \cap \overline{A_j} + \sum \overline{A_i} \cap \overline{A_j} \cap \overline{A_k} - \sum \overline{A_i} \cap \overline{A_j} \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_l} + \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$$

- **Permutación**

  Una permutación de $n$ objetos distintos es un ordenamiento de ellos. Al número de permutaciones de $n$ objetos distintos se le denota por $P(n)$ y si fórmula viene dada por:

$$\boxed{P(n) = n!}$$

El orden importa, entonces $AB \neq BA$

- **Arreglo**

  Un arreglo de $r$ objetos tomados de $n$ objetos distintos es una escogencia ordenada de $r$ objetos tomados de los $n$ objetos. El número de arreglos de $r$ objetos tomados de $n$ objetos distintos, se denota por $P(n, r)$ y su fórmula viene dada por:

$$\boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}}$$

El orden importa, entonces $AB \neq BA$ y de hecho $P(n) = P(n, n)$

$n! = P(n, n)$

- **Combinación**

Una combinación tomada de $r$ objetos tomados de $n$ distintos es una selección de $r$ objetos tomados de los $n$, es decir, si $A$ es el conjunto de los $n$ objetos, entonces una combinación de $r$ objetos tomados de los $n$ es un subconjunto de $A$ de cardinalidad $r$. El número de combinaciones de $r$ objetos tomados de $n$ distintos, se denota por $C(n,r)$ y su fórmula viene dada por:

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

El orden no importa entonces AB = BA

$C(n, r)$

Por eso $C(2,1) \wedge C(2,2) = 1$

Cantidad total de objetos

Cantidad total de espacios

(Siempre el mayor va primero)

$C(4,2)$ = De 4 objetos, elijo 2

- **Conteo de permutaciones con objetos repetidos**

En este caso, se tiene que

objetos totales

$$\boxed{P(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}}$$

← repetidos

ALAJUELA → 8 letras, 3A, 2L, 1J, 1U, 1E

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3360$$

- **Conteo de combinaciones con repetición**

En este caso, se tiene que el número de soluciones naturales de la ecuación $x_1+x_2+\ldots+x_n = r$ es

$$\boxed{C(n+r-1,r)}$$

**Conteo de distribuciones**

- **Distribuciones de objetos distinguibles** (Diferentes)

  Si se tienen $r$ objetos distinguibles y $n$ cajas distintas, el número de maneras de distribuir $r$ objetos distinguibles en $n$ cajas distintas viene dado por:

  1. Si $r < n$ entonces el número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, donde a lo sumo debe estar un objeto en cada caja es $P(n, r)$
  2. El número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, si no hay restricciones es $n^r$

- **Distribuciones de objetos indistinguibles** (Iguales)

  Si se tiene $r$ objetos indistinguibles en $n$ cajas distintas, el número de maneras de distribuir $r$ objetos indistinguibles en $n$ cajas distintas viene dado por:

  1. Si $r < n$ entonces el número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, donde a lo sumo debe estar un objeto en cada caja es $C(n, r)$
  2. El número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, si no hay restricciones es $C(n + r - 1, r)$

| Objetos (r) | Cajas (n) | Restricción | Resultado |
|---|---|---|---|
| Iguales | Diferentes | - | $C(n+r-1, r)$ |
| Iguales | Diferentes | Al menos un objeto | $C(n,r)$ |
| Diferentes | Diferentes | Al menos un objeto | $P(n,r)$ |
| Diferentes | Diferentes | - | $n^r$ |

Iguales = Repetidos

Diferentes = Sin repetir

Al menos → $x \geq k$

A lo sumo → $x \leq k$ , $k$ constante $\in \mathbb{R}$

Exactamente → $x = k$

# Probabilidades

### Reglas de Bayes

- **Regla de Bayes #1**

  Sean $A$ y $B$ eventos sobre un espacio muestral $\Omega$, con $B$ no vacío, entonces, se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- **Regla de Bayes #2**

  Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral $\Omega$. Sean $A$ y $B$ dos eventos arbitrarios, con $B$ no vacío, entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

## Ley de Laplace

Sea $\Omega$ un conjunto no vacío y finito, entonces la función $P : P(\Omega) \Longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$$

es una medida de probabilidad en $\Omega$. Una forma de interpretarla viene dada por

$$P(X) = \frac{\text{\# de casos favorables}}{\text{\# de casos totales}}$$

## Reglas del producto

- **Regla del producto #1**

  Se dice que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si y solo si

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

- **Regla del producto #2**

  Se dice que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si y solo si

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cdot A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n|(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}))$$

## Probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral $\Omega$. Sea $B$ un evento cualquiera, entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

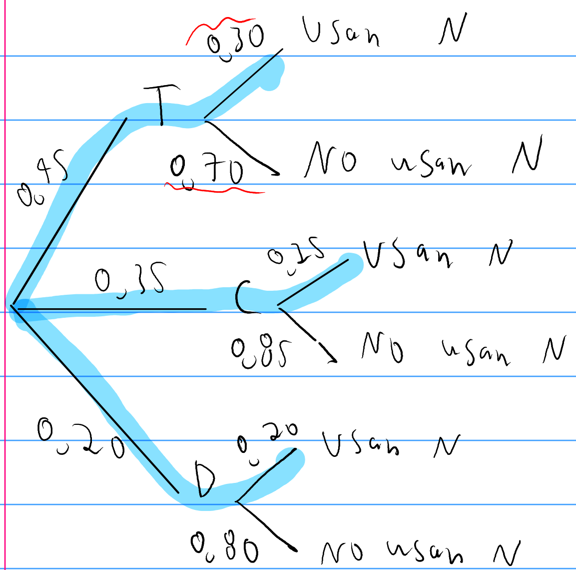
Esta se puede reducir:

$$P(A)_i \cdot P(B|A_i)$$

$$= P(A)_i \cdot \frac{P(B) \cdot \cancel{P(A)_i}}{\cancel{P(A_i)}} = \boxed{P(A_i) \cdot P(B)}$$

En la carrera de computación de la **Universidad Bienestar Seguro**, el 45 % de los estudiantes prefieren películas de terror, el 35 % prefiere las películas de comedia y el resto prefiere las películas de drama. Además, el 15 % de los estudiantes prefieren las películas de comedia y utilizan Netpeli (cierta plataforma de películas en línea). Por otro lado, el 30 % de los que prefieren películas de terror utilizan Netpeli, al igual que el 20 % de los que prefieren las películas de drama. Se elige al azar un estudiante de la carrera de computación.

*a*) Halle la probabilidad de que el estudiante elegido, utilice Netpeli.




Ejemplo del árbol de probabilidades

$$P(T)\cdot P(N|T)+P(C)\cdot P(N|C)+P(D)\cdot P(N|D)$$

$$0{,}45\cdot 0{,}30+0{,}35\cdot 0{,}15+0{,}20\cdot 0{,}20$$

$$0{,}2275 \,//$$

## Espacio muestral

Un espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio y se denota como $\Omega$

## Eventualidad

Es un resultado particular de un fenómeno aleatorio. Dicho de otra forma, es un elemento del espacio muestral.

## Evento

Es un conjunto de resultados de un fenómeno aleatorio, es decir, un subconjunto de elementos de un espacio muestral.

## Ocurrencia de un evento

Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades.

### Propiedades de sucesos y eventos

Ojo P es probabilidad, NO permutaciones

Sean $A$ y $B$ eventos arbitrarios.

1. **Suceso imposible:** es un suceso que no contiene sucesos elementales. Se representa como

$$P(\varnothing) = 0$$

2. **Suceso contrario:** es un suceso opuesto al dado inicialmente. Se representa como

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

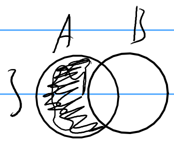
3. **Unión de sucesos:** se da cuando ocurre un evento u ocurre otro evento. Se representa como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

similar al principio de inclusion-exclusion

4. **Diferencia de sucesos:** se da cuando ocurre un evento y no ocurre otro evento. Se representa como

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$




5. **Evento excluyente:** son eventos que no comparten nada en común. Se representa como

$$P(A \cap B) = \varnothing$$

6. **Evento independiente:** la probabilidad de ocurrencia de un evento, no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento. Se representa como

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

### Probabilidad condicionada

Sea $P$ una función de probabilidad sobre $\Omega$. Sea $B$ un evento de probabilidad no nula. Se define la probabilidad condicional sobre $B$ por

| = "Dado que"

$$P(X|B) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)}$$

y se lee como **probabilidad de $X$ dado $B$**

Ninguna probabilidad es > 1 por lo que se representan como 0, algo

0,2 <-> 0,20 -> 20%
0,25 -> 25%
0,02 -> 2% <- Tener cuidado con estos caso

P(C | Q) <- La condicion va despues del dado que "|"

"Probabilidad de perder calculo dado que perdio Quimica"

El "|" solo se usa cuando hay implicita o explicitamente un "sabiendo que" o un "si" <- de if

# TIPS:

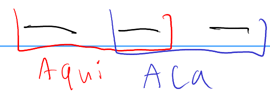
1) Solo cuando no se pueda repetir, se debe hacer posicionamiento y luego la colocacion

2) La formula $n+k-1$, donde $n$ es la cantidad de espacios disponibles y $k$ el tamaño del bloque, se usa para elegir cuantas posiciones puede ocupar un bloque $k$, en $n$ espacios, que ocupa $k$ espacios consecutivos

Un Ejemplo de 1) y 2)

Tengo los numeros 1, 2, 3 y quiero ver de cuantas maneras se pueden acomodar si el 1 y el 3 deben ir juntos, sin repetir numeros

Etapa 1: Elegir posiciones del bloque $\boxed{1\ 3}$
$n-k+1$, hay 3 posiciones ($n$) y el bloque($k$) mide 2

$3-2+1 = \boxed{2}$ posiciones disponibles 


Etapa 2: Colocar bloque →
Si el orden importa → $P(2,2) = 2$ $(13 \neq 31)$
Si el orden NO importa $C(2,2) = 1$ $(13 = 31)$

Etapa 3: Elegir posicion de resto de numeros
$P(1,1)$ v $C(1,1) = 1$

Etapa 4: Colocar resto de numeros
$P(1,1)$ v $C(1,1) = 1$

Total: Con orden: $\boxed{2 \cdot 2 \cdot 1 = 4}$ Sin orden $\boxed{2 \cdot 1 \cdot 1 = 2}$

En ejercicios como este de letras separadas

**Ejemplo 4.17** Considere la palabra «INDEPENDENCIA».

b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas, con las vocales «E» separadas por al menos una vocal?

$\Omega_V = \{I, I, E, E, E, A\} = 6$

$\Omega_C = \{N, N, N, D, D, P, C\} = 7$

Hay que considerar inicio y final y colocar las demas en el centro de forma intercalada

_ I _ I _ A _

Posicionar bloque de vocales $\to 13 - 6 + 1 = 8$

Posiciones de E's $\to c(4, 3) = 4$

Colocar resto de vocales $\to \dfrac{3!}{2!} = 3$

Colocar resto de consonantes $\to \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

Total: $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 420 = \boxed{40320}$

**Ejemplo 4.19** Considere la palabra «OLOROSITO». ¿Cuántos anagramas se pueden formar a partir de esa palabra si:

b) todas las vocales deben ir separadas por al menos una consonante?

Separador

$\Omega_V = \{O, O, O, O, I\}$ $\Omega_C = \{L, R, S, T\}$

Poner el separador ahí y las demas afuera considerando extremos

_ L _ R _ S _ T _

Posiciones de vocales $\to c(5, 5) = 1$

Colocar vocales $\to \dfrac{5!}{4!} = 5$

Posiciones de consonantes $\to c(4, 4) = 1$

Colocar consonantes $\to 4!$

Total: $1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4! = \boxed{120}$