Integrar es un proceso inverso a derivar

$$f(x) \xrightarrow{\text{Derivar}} f'(x)$$

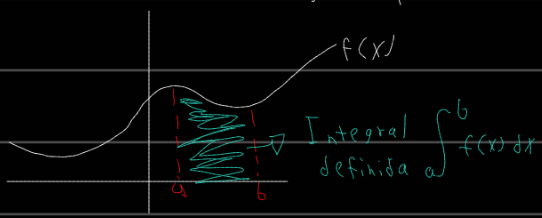
$$\int f'(x)\,dx$$

Al derivar una $f(x)$ se obtiene f' y al integrar f' se obtiene f

$\int f(x)\,dx \rightarrow$ Integral indefinida $\rightarrow$ se obtiene $\rightarrow$ función

$\int_a^b f(x)\,dx \rightarrow$ Integral definida $\rightarrow$ se obtiene $\rightarrow$ número

Gráficamente una integral representa el area bajo la curva



Integral indefinida

$f(x) = x^3$

$f' = 3x^2$

$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$ ← Se agrega +C por que existen "muchas funciones con igual derivada, solo cambia la constante

$f(x) = x^3$

$g(x) = x^3 + 4$

$h(x) = x^3 - \sqrt{3}$

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 \rightarrow \int 3x^2\,dx \rightarrow \underbrace{x^3 + C}_{\text{función antiderivada o integral}}$

Todas se diferencian solo en la constante

Calcular

Primero el superior

$${}_{-1}\int^{1} 3x^2\,dx = x^3 \Big|_{-1}^{1} = 1^3 - (-1)^3$$

$$= 2u^2$$

Ext. sup.: 1; Ext. inf.: -1

u^2 → unidades cuadradas por que es un área

Integrales definidas

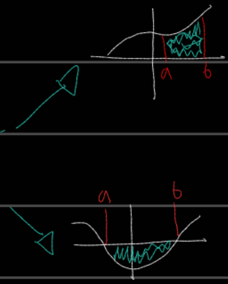
Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ → NO se suele incluir

K de integración

Función | Función integrada

integrando | primitiva

Entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{área bajo la curva de f}}$ } puede ser {



No se incluye el $+C$

Ojo

$\int f(x)\cdot g(x) \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

$\int \frac{f(x)}{g(x)} \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

Ejemplos

1) $\int \frac{1}{x^3}dx$ → Expresarlo como $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$= \int x^{-3}dx$

$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2x^2} + C$ //

2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)+C$ // → Directa

3) $\int \sqrt{x}\,dx$

$= \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$ //

En integrales es mejor desarrollar que factorizar

4) $\int \sqrt{x}(x-1)\,dx$

$=\int(\sqrt{x}\cdot x - \sqrt{x})\,dx$

$=\int(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{1} - x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$=\int(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$=\int x^{\frac{3}{2}} - \int x^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2x^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad //$$

5) $\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C \quad \left(\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} + C \right.$

6) $\int \left(3e^{-x} - \frac{2}{x}\right)$

$= \int 3e^{-x} - \int \frac{2}{x}$

$= 3\int e^{-x} - 2\int \frac{1}{x}$

$= 3 \cdot \frac{e^{-x}}{-1} - 2\ln(x)$

$= -3e^{-x} - 2\ln(x) + C$

7) $\int \pi\,dx = \pi \int \underbrace{dx}_{=x} = \pi x + C$

8) $\int e^x = e^x + C$

Metodos de integración

1) Directa
2) Sustitucion o cambio de variable
3) Por partes
4) Fracciones parciales
5) Sustitucion trigonometrica o inversa

Sustitucion o cambio de variable

Es bueno con funciones que vienen de resultado de cadena

Tenemos $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones compuestas

original

$\sqrt{x^2+e^x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+e^x}} \cdot 2x+e^x$ $u = f(x)$

Poner parentesis

debe agregarse el dx

$$\int \frac{\overbrace{2x+e^x}^{\text{Derivada}}}{2\sqrt{\underbrace{x^2+e^x}_{f(x)\ \text{original}}}}dx \quad , \quad u = x^2+e^x$$

$du = (2x+e^x)dx$, derivando ambos lados

$$\int \frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

Aqui $u = x^2+e^x$

para que

$[u]' = [x^2+e^x]'$

sea igual a la derivada

$du = (2x+e^x)dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{u} + C \qquad u = x^2+e^x$$

$$= \sqrt{x^2+e^x} + C \quad //$$

2) $\ln(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \cot(x)$

$$\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}dx \ , \quad u = \operatorname{sen}(x)$$

$$du = \cos(x)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u}du = \ln(u) + C$$

$$= \ln|\operatorname{sen}(x)| + C \quad //$$

Resumen: usar sustitucion cuando se pueda obtener la derivada

$$\int f'(x) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{} \rightarrow u = g(x)$$

$$du = g'(x)\,dx$$

Buscar "u"

$\sqrt{\boxed{g(x)}} \cdot g'(x)$ $\quad \frac{K\,g'(x)}{\boxed{g(x)}}$ $\quad \ln(\boxed{g(x)})\,g'(x)$ $\quad \operatorname{sen}(\boxed{g(x)})\,g'(x)$

$u = g(x)$

$du = g'(x)\,dx$

$\operatorname{sen}^5(x^3)$

$sen^5(x^3) \cdot cos(x^3) \cdot 3x^2 \qquad u = sen(x^3)$

$du = cos(x^3) \cdot 3x^2$

3) $\int x^2 \sqrt[4]{x^3+4}\, dx, \qquad u = \sqrt[4]{x^3+4}$

$u^4 = x^3+4$

$= \int \sqrt[4]{u^4}\ \frac{4}{3}u^3\, du \qquad 4u^3 du = 3x^2\, dx$

La diferencia es solo k

$= \frac{4}{3}\int u \cdot u^3\, du$

$= \frac{4}{3}\int u^4\, du \qquad \frac{4}{3}u^3 du = x^2 dx$

$= \frac{4}{3}\frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{4}{15}\left(\sqrt[4]{x^3+4}\right)^5 + C$ //

4) $\int \frac{ln^5(x)}{x}\, dx \qquad u = ln(x)$

$\int ln^5(x) \cdot \frac{1}{x} dx \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$\int u^5\, du$

$= \frac{u^6}{6} = \frac{ln^6(x)}{6} + C$ //

5) $\int sen(x) \cdot cos(x) \sqrt{1-sen^2(x)}\, dx \qquad u = \sqrt{1-sen^2(x)}$

$\int \sqrt{u^2}\ -u\ du \qquad u^2 = 1-sen^2(x)$

$-\int u^2\, du \qquad 2u\,du = -2sen(x) \cdot cos(x)$

$-\frac{u^3}{3} \qquad -u\,du = sen(x) \cdot cos(x)$

$= -\frac{\left(\sqrt{1-sen^2(x)}\right)^3}{3} + C$ //

6) $\int \frac{2x-9}{x^2-6x+34}\, dx \qquad u = x^2-6x+34$

$du = (2x-6)dx$

$\int \frac{2x-6-3}{x^2-6x+34}\, dx$

Nota $\int \frac{k}{\text{Cuadratico no factorizable}}$

$\int \frac{2x-6}{\ldots}\, dx - \int \frac{3}{\ldots}\, dx$

$\int x^2-6x+34 \qquad \int x^2-6x+34 \rightarrow$ Completar cuadrados

$\int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{3}{(x-3)^2+25} \qquad x^2-6x+34 \qquad 0^3 \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$(x^2-6x+9)(-9+34) \qquad 0 \rightarrow \left(\frac{-6}{2}\right)^2$

$(x-3)^2+25 \qquad = 9$

Dar forma

$\int \frac{1}{u}\,du - 3\int \frac{1}{5^2+(x-3)^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{5^2+x^2}\,dx \quad \boxed{a=k \in \mathbb{R}} \quad \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c}$

$\boxed{\ln|x^2-6x+34| - \frac{3}{5}\arctan\left(\frac{x-3}{5}\right)+C \; //}$

Practica

1) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \qquad u=\sqrt{4-x^2}$

$u^2=4-x^2$

$2u\,du=-2x\,dx$

$-u\,du=x\,dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$\int \frac{-u}{\sqrt{u^2}}\,du + 3\int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx$

$\int \frac{-u}{u}\,du + 3\,\frac{1}{2}\,\text{ar sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

$\int -du$

$-u + \frac{3}{2}\arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+c$

$-\sqrt{4-x^2} + \frac{3}{2}\arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-(x^3)^2}}\,dx \qquad u=x^3$

$du=3x^2$

$\int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{16-u^2}}\,du \qquad \frac{1}{3}du=x^2\,dx$

$\frac{1}{\ } \int \frac{1}{\ }\,du$

$$\frac{\quad}{3}\int\frac{\quad}{\sqrt{4^2-u^2}}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\,\text{arcsen}\left(\frac{u}{4}\right)+C$$

$$\frac{1}{12}\,\text{arcsen}\left(\frac{x^3}{4}\right)+C$$

3) $\int \cot(x)\cdot\ln(\text{sen}(x))\,dx$, $\quad u=\ln(\text{sen}(x))$

$\int u\,du \qquad\qquad du=\cot(x)$

$$=\frac{u^2}{2}+C$$

$$=\frac{\ln^2(\text{sen}(x))}{2}+C \quad //$$