Función de distribución

- **Condiciones de la función de distribución**

  Sea X una variable aleatoria discreta con función de distribución de probabilidad f_X, entonces, se cumple que:

  1. $f_X(m) \geq 0$, para todo $m \in R_X$
  2. $\sum_{m \in R_X} f_X(m) = 1$

  ***Nota:** cuando la variable aleatoria discreta tiene rango infinito, se procede a resolver una serie geométrica, telescópica o exponencial según corresponda, tomando en cuenta lo siguiente:*

- **Serie geométrica**

  Una serie geométrica con razón r es de la forma:

  $$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

  donde r un número real.

  Dicha serie converge a $\frac{r^p}{1-r}$ si y solo si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$

Ahora bien, la función de distribución acumulada de la serie geométrica viene dada por:

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

donde r un número real.

- **Serie exponencial**

  Una serie exponencial es de la forma:

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  la cual converge a e^x.

Medidas de tendencia central

- **Esperanza**

  La esperanza, media o valor esperado de una variable aleatoria discreta X es el promedio ponderado de los valores del rango de X según las probabilidades de que X tome cada uno de estos valores. Así, se define la esperanza como:

  $$E(X) = \mu_X = \sum_{k \in R_X} k \cdot f_X(k)$$

- **Varianza**

  Si X es una variable aleatoria discreta tal que $E(X^2)$ converge y $E(X) = \mu_X$, se define la varianza de X como:

  $$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right]$$

Este parámetro indica qué tanto varían los valores de la variable con respecto a su esperanza y permite medir la variabilidad de la distribución.

Sea X una variable aleatoria discreta, entonces se cumple que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Esperanza normal   Esperanza al cuadrado

donde

$$E(X^2) = \sum_{k \in R_X} k^2 \cdot f_X(k)$$

Ojo, los $E(x^2)$ no es esperanza al cuadrado, sino todas las k al cuadrado

- **Desviación estándar**

  Sea X es una variable aleatoria discreta. Se define la desviación estándar de X como:

  $$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Función de distribución

- **Representación mediante arreglo**

  En forma de arreglo, una función de distribución de probabilidad puede verse como:

$$\begin{cases} P(X_i = x) & \text{si} \quad x = a \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad x = b \\ & \vdots \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad x = n \end{cases}$$

con $a, b, \ldots, n \in R_X$ e $i = 0, 1, 2, \ldots$

Función de distribución acumulada

- **Representación mediante arreglo**

  En forma de arreglo, una función de distribución acumulada puede verse como:

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad a \leq x < b \\ P(X_i = x) & \text{si} \quad b \leq x < c \\ & \vdots \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n \end{cases}$$

con $a, b, c, \ldots, n \in R_X$ e $i = 0, 1, 2, \ldots$

Propiedades de la esperanza

Sea c una constante y sea X una variable aleatoria discreta tal que $E(X)$ existe, entonces, se tiene que:

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = c \cdot E(X)$
4. Si $E(X)$ y $E(Y)$ existen, entonces $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Propiedades de la varianza

Sea c una constante y sean X, Y variables aleatorias discretas, entonces, se tiene que:

1. $Var(c) = 0$
2. $Var(X + c) = Var(X)$
3. $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$
4. Si X y Y son variables independientes, entonces $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria discreta. Se define el momento de orden k como $E(X^k)$. Además, se define la función generadora de momentos para X por

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

entonces, se cumple que

$$m_X(t) = \sum_{k \in R_X} e^{tk} \cdot f_X(k)$$

Con esta función, es posible determinar la esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta, esto de la siguiente manera:

- **Esperanza**

  Consiste en calcular la primera derivada de la función generadora de momentos y luego evaluarla en $t = 0$ así:

$$E(X) = m'_X(0)$$

- **Varianza**

  Consiste en calcular la segunda derivada de la función generadora de momentos, luego evaluarla en $t = 0$ y finalmente restarle la esperanza al cuadrado, así:

$$Var(X) = m''_X(0) - [m'_X(0)]^2$$

Distribuciones para variables aleatorias discretas

Prueba de Bernoulli

Es el experimento asociado a la extracción de una bola de una urna. Si se realizan varias pruebas de Bernoulli estas pueden ser:

- **Pruebas independientes:** las extracciones se realizan con reposición.
- **Pruebas dependientes:** las extracciones se realizan sin reposición.

Distribución binomial

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución binomial y se denota como:

En 15 jugadas cual es la proba de que pase x cosa?

$$X \sim B(n, p)$$

con n, p parámetros.

- **Características**
  1. Se realizan n extracciones con reposición.
  2. Existe una probabilidad de éxito fija por cada extracción.

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

n = cantidad de objetos , $\binom{n}{k} = C(n,k)$

q = Prueba de fracaso

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$

Para calcular Proba

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

p = prueba de exito

n = Cantidad de objetos
p = prueba de exito
q = prueba de fracaso
k = valores de la suma

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = n \cdot p$	$Var(X) = n \cdot p \cdot q$
Promedio	

con $q = 1 - p$

Distribución geométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de extracciones realizadas antes de (o hasta) obtener el primer éxito. Se dice que X sigue una distribución geométrica y se denota como:

Importante

det proba antes o hasta el x intento

$$X \sim G(p)$$

con p parámetro.

- **Características**
  1. Se realizan extracciones con reposición.
  2. p es la probabilidad de éxito.

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

Esta siempieza en 0

$$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, \ldots\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Esta si empieza en 1

📌 **Intentos hasta el primer éxito**

Usa $q^{k-1}p$ si el enunciado habla de:

- **"El éxito ocurre en el intento número k"**
  Ejemplo: *"La llamada se conecta en el 7° intento"* → aquí cuentas intentos → **usa** $k-1$.

📌 **Ejemplo de la central telefónica**

Enunciado: *"el sistema se considera eficiente si logra comunicación con a lo sumo 3 intentos"*.

- Aquí la condición está en términos de **en qué intento ocurre el éxito**.
- Se modela como **número de intento en el que ocurre el éxito**.
- Por eso se usa la versión $q^{k-1}p$ (intentos).

📌 **Número de fallos antes del primer éxito**

Usa $q^{k}p$ si el enunciado habla de:

- **"Número de fallos antes del primer éxito"**
  Ejemplo: *"Falla 7 veces y a la 8ª lo logra"* → aquí cuentas fallos → **usa** k.

📌 **Ejemplo de los bombillos**

Enunciado: *"probabilidad de encontrar el dañado antes de poner el bombillo número 30"*.

- Aquí la condición es **fallar hasta el bombillo 29** y encontrar uno dañado en ese rango.
- Eso se modela naturalmente como **número de fallos antes del éxito**.
- Por eso la versión que se usa es la de $q^{k}p$ (fallos).

- **Función generadora de momentos**

  Su función generadora de momentos viene dada por:

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t \cdot q}$$

con $q = 1 - p$.

Medidas de tendencia central

Esperanza	Varianza
$E(X) = \frac{q}{p}$	$Var(X) = \frac{q}{p^2}$

con $q = 1 - p$

Distribución hipergeométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución hipergeométrica y se denota como:

$$X \sim H(n, N, b)$$

con n, N y b parámetros.

Con muestras
De 300 personas
se atienden 30

- **Características**

  1. Se realizan n extracciones sin reposición.
  2. Inicialmente la urna contiene b éxitos y r fracasos, donde $b + r = N$ y $n \leq N$

N = Total de elementos de la poblacion
n = Cantidad de elementos de la muestra
b = Cantidad de elementos que cumplen
r = Cantida de elementos que no cumplen
K = valores de la suma

- **Función de distribución de probabilidad**

  Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \frac{C(b,k) \cdot C(N-b, n-k)}{C(N,n)}$$

con $R_X = \{\text{máx}\{0, n-r\}, \text{mín}\{n, b\}\}$

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = \frac{b \cdot n}{N}$	$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{b}{N}\right) \cdot \frac{b \cdot n}{N}$

Distribución de Poisson

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de resultados que se obtienen en una unidad o intervalo, para experimentos aleatorios. Se dice que X sigue una distribución Poisson y se denota como:

$$X \sim P(\lambda)$$

λ es el promedio (Esperanza)

con λ parámetro.

- **Características** Siempre dicen que es de Poisson

  1. Se necesita fijar una unidad t (longitud, tiempo, entre otros)
  2. Se debe establecer el número promedio de resultados λ por unidad t.

- **Función de distribución de probabilidad**

  Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$

$E(x) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$

Relación entre distribuciones

- **Hipergeométrica y binomial**

  Si $X \sim H(n, N, b)$ con $R_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y n es muy pequeño en comparación con N y b, entonces $X \sim B(n, p)$

- **Binomial y Poisson**

  Si $X \sim B(n, p)$ donde n es muy grande y p es muy pequeño, entonces $X \sim P(\lambda)$

  Estos casos son aplicables de la siguiente forma:

  - Si $\lambda < 5 \wedge p < 0{,}1$
  - Si $n > 100 \wedge p < 0{,}05$