Operaciones con matrices

Operaciones con matrices

1. Sea A una matriz de orden tres. Determine de manera explícita la matriz A, sabiendo que dicha matriz está definida por:

R/ $\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 1/3 \\ 4 & 2/3 & -1/2 \\ 8 & -3/4 & 3/5 \end{pmatrix}$

$$\langle A\rangle_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j+1}\cdot 2^i & \text{si} \quad i=1,2,3 \text{ y } j=1 \\ \dfrac{(-1)^{i+j}\cdot i}{i+j-1} & \text{si} \quad i=1,2,3 \text{ y } j=2,3 \end{cases}$$

2. Determine la inversa de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -8 \\ 1 & 7 & 9 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

b) $J = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 1 \\ -12 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

e) $Y = \begin{pmatrix} w & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3w & 1 \end{pmatrix}$, con $w \in \mathbb{R}$

f) $P = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ -1 & 3 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & 0 \\ 5/2 & -2 & -7 & 2 \\ -1/3 & 2/3 & 4/3 & -1/3 \\ 3/2 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9/2 & 9/2 & 3/2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/46 & -9/46 \\ 0 & 1 & 27/46 & 21/46 \\ 0 & 0 & 7/46 & -15/46 \\ 0 & 0 & -3/46 & 13/46 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -k-1 & k \end{pmatrix}$

3. Considere las matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, determine $(PQ)^{-1}$

4. Suponga que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule $(A^T B^{-1})^{-1}$

R/ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Verifique que $(AB - I_2)^{-1} = AB$

6. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule $B + B^T(C + 2I_2)^{-1}$

7. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} 27 & 1 & -10 \\ -1 & 6 & -14 \\ -1 & -14 & 32 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $(C - I_3)^{-1} + 3B^TB$

8. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} -3 & -13 & -2 \\ -1 & 14 & -6 \\ 4 & -10 & -3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule $A^{-1} - 2B^TC$

9. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ -10 & -6 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $B^T \cdot (C + 2I_3)^{-1}$

10. Dadas las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} 15 & -5 & -2 \\ 2/3 & 59/3 & 94/3 \\ 1/3 & 91/3 & 182/3 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcule $I_3 - C^{-1} + 3B^TB$

11. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ -2 & -15 & -9 \\ -1 & -15/2 & -1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $B^{-1} + 2I_3 - H^TH$

12. Dadas las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} \frac{59}{2} \\ -46 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcule $C(A + 3I_3)^{-1} \cdot B^T$

13. Considere las matrices A, B y C tales que:

R/ $\begin{pmatrix} 22 & -4 & 14 \\ 14 & -8 & 18 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^TC = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcule $(2C^TB)^TA$

14. Dadas las matrices A, B y C, calcule $AB^T + C^{-1}$ si

R/ $\begin{pmatrix} 2a-b & a \\ 2-a & 4 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

15. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} -7 & -8 & 9 \\ 0 & -6 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule $4A^{-1} - BB^T$

16. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} -11/5 & 0 & -36/5 \\ -4/5 & -2 & 11/5 \\ -28/5 & 3 & -73/5 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule $2A^{-1} - 3BB^T$

17. Considere las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} 3 & 14/3 & -14/3 \\ 0 & -5/3 & 26/3 \\ 0 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que A es invertible, determine explícitamente la matriz $C = A^{-1}(2B + A)$

18. Dadas las matrices:

R/ $\begin{pmatrix} -1/3 & -8/3 & 4/3 \\ -29/3 & 14/3 & -16/3 \\ 104/9 & 40/9 & 154/9 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que X es invertible, determine explícitamente la matriz $Z = (2X^{-1} - Y^T)X$

19. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determine $(AB)^T + 5C^{-1}$, si se tiene que:

R/ $\begin{pmatrix} 10a & 8 & 1 \\ -2-5a & -5 & 4 \\ \frac{3}{a}+5 & \frac{-9}{a} & \frac{-4}{a} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3/a \\ 1 & -3 & -1/a \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

20. Considere la constante real α y a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine todos los valores de α para que se cumpla $(A - \alpha I)^2 = B$

21. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$, encuentre todas las matrices tales que

$MP = PM$

R/ $\begin{pmatrix} 2c & d \\ c & 2c \end{pmatrix}$

22. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Se dice que A y B conmutan si $AB = BA$.

Determine todas las matrices P que conmutan con $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

R/ $\begin{pmatrix} -2a^2-a+1 & -a-c & 1-a \\ -2 & -2c^2+bc+1 & 2c-b \\ -a^2 & 2c+1 & -1 \end{pmatrix}$

23. Considere las siguientes matrices, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2a \\ -2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & -b & 1 \\ -a & -c & 1 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Seleccione tres matrices distintas A, B y C que le permitan realizar la operación $B^{-1} - (A^T + 2C)C^T$ y obtenga el resultado de dicha operación.

24. Sea $k \neq 0$ y sean A, B, C y D matrices definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De las operaciones que se enuncian, realice aquella que esté bien definida. Justifique por qué las otras tres no se pueden realizar.

a) $(AC)^T + B^{-1}$

b) $(CB)^T - D^{-1}$

c) $(BA)^{-1} + C^T$

d) $(CA)^{-1} - D^T$

25. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

a) Compruebe que $A^2 = O_3$

b) Calcule la matriz inversa de $I_3 - A$

R/ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

26. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   a) Verifique la igualdad $A^3 + I_3 = O_3$

   b) Utilizando el inciso *a*, calcule A^{10}

   R/ $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

27. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Verifique que A satisface la ecuación $A^2 - 4A - 5I_3 = O_3$

   b) Utilizando el resultado del inciso anterior, demuestre que $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A - 4I)$

   c) Halle A^{-1}

   R/ $\begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

28. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determine las matrices L y U, de la forma

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   tal que $A = L \cdot U$

29. Para las matrices:

R/ $a = \sqrt{2}$, $b = e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $c = d = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Determine los valores de a, b, c, d y e tales que $B^T B = A$

Operaciones con despeje de matrices

1. Si A es una matriz tal que $(I_2 - 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule A.

2. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

   Si se sabe que la matriz X de 2×2 satisface la ecuación $XA = 3X - 2BB^T$:

   a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = -2BB^T(A - 3I)^{-1}$

   b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} 20 & -22 \\ -2 & 44 \end{pmatrix}$

3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Si se sabe que $D + AB^T = C$

   a) Utilice operaciones matriciales para despejar a D. R/ $D = C - AB^T$

   b) Calcule explícitamente la matriz D.

4. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 2 \\ 3 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si se sabe que $AX^{-1} + C^T = B$

   a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = [A^{-1}(B - C^T)]^{-1}$

   b) Calcule explícitamente la matriz X.

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

   Si se sabe que $AX - 2XB = C$

   a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (A - 2B)^{-1}C$

   b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 \\ -5/7 & 61/14 \end{pmatrix}$

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -6 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$

   Si se sabe que $A^T - BX = C$

   a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = B^{-1}(A^T - C)$

   b) Calcule explícitamente la matriz X.

7. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 4 \\ 3 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y además, $A^{-1}X - B = 2C$ y $\alpha = 1$

   a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = A(2C + B)$

   b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} 60 \\ 72 \\ -5 \end{pmatrix}$

8. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Si se sabe que $A(X^T - 2C) = D$

   a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (A^{-1}D + 2C)^T$

   b) Calcule explícitamente la matriz X.

9. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si se sabe que $XA - 3R^T = BC$

a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (BC + 3R^T)A^{-1}$

b) Calcule explícitamente la matriz X.

10. Considere las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si se sabe que $BX - A = CX$

a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (B - C)^{-1}A$

b) Calcule explícitamente la matriz X.

11. Sean A y C dos matrices invertibles que cumplen la siguiente igualdad $(A^{-1}X)^T C - B = D$

a) Utilizando propiedades matriciales exprese la matriz X en términos de las matrices A, B, C, D. R/ $X = A[(D + B) \cdot C^{-1}]^T$

b) Si se sabe que

$$A(C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } D^T + B^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

determine la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

12. Considere las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $A(X^T + C) = D$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (A^{-1}D - C)^T$

    b) Calcule explícitamente la matriz X.

13. Considere las matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $YM(P - P^2) - (YM + M^2)P + M^2P = P$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a Y. R/ $Y = P(MP^2)^{-1}$

    b) Calcule explícitamente la matriz Y.

14. Considere las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $XAB^T = AB^T + XC^2$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = AB^T(AB^T - C^2)^{-1}$

    b) Calcule explícitamente la matriz X.

15. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considere las matrices reales A, B y C definidas como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    Si se sabe que $2A + BX = C^T$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = B^{-1}(C^T - 2A)$

    b) Calcule explícitamente la matriz X.

16. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considere las matrices reales A y C definidas como:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Si se sabe que $AB^T + A = (2C)^T + 2B^T$

a) Utilice operaciones matriciales para despejar a B. R/ $B = \left((A-2B)^{-1}[(2C)^T - A]\right)^T$

b) Calcule explícitamente la matriz B.

17. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Si se sabe que $A^T \cdot B - C = D$

a) Utilice operaciones matriciales para despejar a B. R/ $B = A^{-T}(D + C)$

b) Calcule explícitamente la matriz B. R/ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

18. Sean A, B y C matrices cuadradas 3×3 invertibles. Si se sabe que $\frac{1}{2}A = B^{-1}C$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule C^{-1}

R/ $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $XB(A + A^2) - (XB - B^2)A - B^2A = A$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (BA)^{-1}$

    b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$

20. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $XB^{-1} + AC = I_2$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (I_2 - AC)B$

    b) Calcule explícitamente la matriz X.

21. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $k \in \mathbb{R}$ y que $AB - 2C^T + D = 0$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a D. R/ $D = 2C^T - AB$

    b) Calcule explícitamente la matriz D.

22. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $ABX - A = X$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (AB - I)^{-1}A$

    b) Calcule explícitamente la matriz X.

23. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $XA = 2X - 2B^T B$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = -2B^T B(A - 2I)^{-1}$

    b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} -18 & 30 & -20 \\ 32 & 120 & -2 \\ 12 & 60 & -4 \end{pmatrix}$

24. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y además $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

    Si se cumple que $XA - 2X + B^T B = O_3$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = -B^T B(A - 2I)^{-1}$

    b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $\begin{pmatrix} -27 & 8 & 32 \\ -39 & 11 & 39 \\ -63 & 18 & 66 \end{pmatrix}$

25. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y además $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

    Si se cumple que $XA + B^T B = 2X$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (B^T B) \cdot (2I - A)^{-1}$

    b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -10 \\ -22 & 6 & 20 \\ 23 & -6 & -20 \end{pmatrix}$

26. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    Si se sabe que $BAX - A^T = X$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = (BA - I)^{-1}A^T$

    b) Calcule explícitamente la matriz X.

27. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $C \cdot X^T - A \cdot B^T = 2X^T$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = [(C - 2I)^{-1}(A \cdot B^T)]^T$

    b) Calcule explícitamente la matriz X.

28. Sean $a \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$

    Si se sabe que $AX^T + A = (2B)^T + 2X^T$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = [(A - 2I)^{-1}(2B^T - A)]^T$

    b) Calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} 2a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2+2a & a & 2a-2 \end{pmatrix}$

29. Considere las matrices cuadradas del mismo orden A, B y X, donde $A - B$ es no singular, tales que $XA^T = I + (BX^T)^T$, con I la matriz identidad.

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar X. R/ $X = (A^T - B^T)^{-1}$

    b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, calcule explícitamente la matriz X. R/ $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

30. Considere las matrices cuadradas del mismo orden A, B y X, tales que A y $(2I - A^T)$ son invertibles y se tiene que $2(XA)^T = B + A^TAX^T$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar a X. R/ $X = [(2A^T - A^TA)^{-1}B]^T$

    b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule explícitamente la matriz X.

31. Considere las matrices cuadradas del mismo orden C, D y X, donde $C^T - C = O$ y $(2X^TC - I)^T = C(D - X)$

    a) Utilice operaciones matriciales para despejar X.

    b) Si $D = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule explícitamente la matriz X

32. Considere las matrices M y N de dimensión 2×3, P una matriz de dimensión 3×2 y A una matriz de dimensión 2×2 invertible.

   a) Utilice propiedades de las operaciones con matrices para despejar la matriz P de la ecuación siguiente $A^{-1} \cdot (P^T + 2M) = N$ R/ $P = (AN - 2M)^T$

   b) Determine la matriz P de forma explícita, si se sabe que R/ $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 14 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

33. En la ecuación matricial $(3A + XB)^T = -(2X)^T + B$, las matrices A, B y X son matrices de órdenes adecuados para que se puedan realizar las operaciones respectivas.

   a) Mediante álgebra de matrices, halle la matriz X, suponiendo que la matriz $B + 2I$ es invertible.

   b) Halle la matriz X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

34. Sean A, B, C y X matrices, tales que $(XA - B)^T - C = 2X^T$. Si se sabe que $A - 2I$ es una matriz que posee inversa, utilice propiedades de las matrices y álgebra matricial para obtener la matriz X, en términos de las demás matrices. R/ $X = (B + C^T) \cdot (A - 2I)^{-1}$

35. Sean A, B, C y X matrices cuadradas de tamaño $n \times n$. Utilice propiedades de matrices para obtener a la matriz X, en términos de A, B y C, a partir de

$$(2C - X^T)^T \cdot A^{-1} = XB$$

36. Determine todas las matrices X que cumplen que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} X + 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -3 \end{pmatrix}$$

37. Determine, si existe, la matriz B que satisfaga la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot B$$

38. Utilizando álgebra matricial, determine de forma explícita la matriz P que satisface la siguiente ecuación:

$$\left[P^T + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios especiales

1. Se dice que una matriz A es antisimétrica si $A^T = -A$. Demuestre que la matriz C, con $C = B^T(B - B^T)B$, es antisimétrica.

2. Se dice que una matriz A es antisimétrica si $A^T = -A$. Pruebe que si B y C son matrices antisimétricas, entonces la matriz $B + C$ es antisimétrica.

3. Se dice que una matriz A es simétrica si $A^T = A$ y que es antisimétrica si $A^T = -A$.

   a) Sea $P = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -8 & 0 & c \\ d & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Determine todos los valores o condiciones para a, b, c y d, de manera que P sea una matriz antisimétrica.

   b) Demuestre que si A es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.

4. Demuestre usando inducción matemática que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$

5. Se dice que una matriz A es involutiva si $A^2 = I$ y se dice que A es idempotente si $A^2 = A$. Si se tiene que B es alguna matriz idempotente, demuestre que C es involutiva, donde $C + I = 2B$.