Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 Horas, 15 minutos
Puntaje Total: 25 Puntos

**Probabilidades**
**Tercer Examen Parcial**
**I-2022**

---

*Instrucciones:* Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Estos procedimientos serán calificados y la respuesta sin procedimientos se considera incompleta y se califica con un máximo del 25 % del valor del item. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes en los cuales las calidad de las imágenes enviadas no sean claras y legibles. Una vez concluido el tiempo del examen usted tiene 15 minutos para subir un archivo ordenado con sus respuestas.

---

1. Si el tiempo de reacción, en segundos, de una persona a cierto estímulo es una variable aleatoria exponencial $(X)$, para la cual se sabe que $P(X>2)=\dfrac{1}{e^8}$.

   *a*) **[2 puntos]** Determine el valor de $\mu_X$.

   **Solución**
   Considere $X$: el tiempo de reacción (segundos) a cierto estímulo, donde $X \sim Exp(\lambda)$.

   $P(X>2)=e^{-2\lambda}=\dfrac{1}{e^8}$ entonces $\lambda=4$ y con esto $\mu_X=\dfrac{1}{4}$.

   *b*) **[3 puntos]** Plantee las integrales que permiten calcular $P(X>7|X>5)$. Además, compruebe que $P(X>7|X>5)=P(X>2)$.

   **Solución**

   $$P(X>7|X>5)=\frac{P(X>7 \wedge X>5)}{P(X>5)}=\frac{\int_7^\infty 4e^{-4x}dx}{\int_5^\infty 4e^{-4x}dx}$$

   Dado que $\displaystyle\int_a^\infty 4e^{-4x}dx=\lim_{M\longrightarrow\infty} -e^{-4x}|_a^M=e^{-4a}$ entonces

   $$P(X>7|X>5)=\frac{e^{-28}}{e^{-20}}=e^{-8}=P(X>2)$$

2. **[3 puntos]** Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias normales con medias $\mu_{X_1}=1, \mu_{X_2}=2, \ldots, \mu_{X_{50}}=50$ y todas con la misma varianza $n$. Si

se define la variable aleatoria $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, demuestre que

$$P\left[T < \frac{n^2}{2}\right] = \Phi(-0.5)$$

**Solución**
Dado que suma de normales es normal entonces $T \sim N(\frac{n(n+1)}{2}, n^2)$, con esto

$$P\left[T < \frac{n^2}{2}\right] = \Phi\left(\frac{\frac{n^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2}}{n}\right) = \Phi(\tfrac{-1}{2})$$

Algunas personas lo han hecho usando el valor de $n = 50$ y también es correcto

3. La distribución para las notas en la prueba de aptitud académica de una universidad sigue una distribución normal. Se sabe que el 20 % de las notas quedan por encima de 700 puntos y que solo el 10 % quedan por debajo de los 400 puntos.

   *a*) **[3 puntos]** ¿Qué porcentaje de la población queda por encima de los 480 puntos?

   **Solución**
   Si tenemos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, lo primero que se debe hacer es resolver el sistema formado por las ecuaciones

   $$\frac{700 - \mu}{\sigma} = 0.841621 \text{ y } \frac{400 - \mu}{\sigma} = -1.281552$$

   $700 - \mu = 0.841621\sigma$ y $400 - \mu = -1.281552\sigma$
   Restando término a término queda $2,123173\sigma = 300$ es decir $\sigma = 141.2979536$ y de allí $\mu = 581.080675$

   Luego, $P(X > 480) = 0.76283$

   *b*) **[2 puntos]** Si la política de la universidad es admitir a un 40 % de los candidatos con mejor nota ¿cuál es el puntaje mínimo de admisión?

   **Solución**
   Para $X \sim N(581.080675, 141.2979536^2)$ se debe encontrar el valor $\omega$ en el eje de modo que $P(X > \omega) = 0.4$, entonces por aplicación $\omega = 616.8871$. También es posible hacerlo estandarizando.

4. **[2 puntos]** La vida media de cierto tipo de motor es de 10 años con una desviación estándar de 2 años. Usando únicamente esta información y la desigualdad de Chebyshev, encuentre una cota inferior para la probabilidad de que la vida del motor esté en entre los 6 y los 14 años.

**Solución**

Sencillo es una aplicación simple de desigualdades, Si $V$ es la vida media del motor

$$P(6 \leq V \leq 14) = P(|V - 10| \leq 4) \geq 1 - \frac{4}{16}$$

5. [**3 puntos**] Suponga que en cierta región del país la duración media de los matrimonios, que terminan en divorcio, es de 10.3 años, con una desviación estándar de 1.2 años. Encuentre la probabilidad de que en una muestra de 75 divorcios, el tiempo medio de duración los matrimonios sea como máximo 8 años.

   **Solución** Siendo $m_1, m_2, \ldots m_{75}$ una muestra aleatoria igualmente distribuida de matrimonios, entonces el tiempo promedio $T = (t_1 + \ldots + t_{75})/75$ es aproximadamente normal, y $P(T < 8) = \Phi\left(\frac{8-10.3}{1.2/\sqrt{75}}\right) \approx 0$

6. [**3 puntos**] El número de taxis que pasan por una esquina es una variable aleatoria Poisson con media 2 taxis por minuto. Mario espera en esa esquina hasta que hayan pasado 10 taxis. Si Mario ya ha esperado 5 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que deba esperar al menos dos minutos más?

   **Solución**

   Es conocido que si $X$ es Poisson de parámetro $\lambda = 2$ eventos por minuto entonces el tiempo $T$ hasta la ocurrencia de 10 eventos es Gamma con parámetros $\lambda = 10$ y $\beta = 1/2$. Luego

$$P(T > 7 | T > 5) = \frac{P(T > 7)}{P(T > 5)} = \frac{0.10940}{0.45793}$$

7. [**3 puntos**] Suponga que la probabilidad de acertar una adivinanza es una distribución de probabilidad Beta con parámetros $s = 3$ y $r = 5$. Escriba la expresión integral para calcular la probabilidad de acierto entre 20 % y 30 %. ¿Cuántas adivinanzas debería resolver una persona para tener una probabilidad superior al 90 % de acertar al menos 78 veces?

   **Solución**

   Sea $R$ la probabilidad de acertar el ítem $f_R(x) = 105x^2(1-x)^4$ y

$$P(0.2 < X < 0.3) = \int_{0,2}^{0.3} 30x(1-x)^4 \, dx$$

   Sea $n$ el total ítemes a resolver y $X$ el total de ítemes resueltos, entonces el total de ítemes acertados es $X \sim b(x; n, 0.204899)$ que es aproximada por $N(0.204899n, 0.1629n)$, se busca que $P(X \geq 78) > 0,9$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 78) > 0.9 &\implies \\
P(X \leq 78) < 0.5 &\implies \\
\Phi\left(\frac{78.5 - 0.204899n}{\sqrt{0.1629n}}\right) < 0,1 &\implies \\
\frac{78.5 - 0.204899n}{\sqrt{0.1629n}} = -1.2815 &\implies
\end{aligned}
$$

Esta ecuación se resuelve, por ejemplo por fórmula general, o directamente y genera el valor de 436 para $n$.

8. **[1 puntos]**

   Un investigador busca analizar el patrón de gastos de la población de una ciudad. Quiere investigar elementos relacionados con los porcentajes del salario que se invierten en alimentación, vivienda, gastos de combustible, gastos en salud y gastos en entretenimiento. Decida y justifique un tipo de muestreo para que la investigación produzca resultados fructíferos.

   **Solución**

   En general es un problema abierto y casi cualquier respuesta podría ser aceptable dada la vaguedad del contexto, por ejemplo

   Bajo la premisa, bastante natural, de que distintos rangos o salarios permiten a las personas distintos tipos de gastos, entonces un muestreo aleatorio estratificado podría brindar información específica a estos grupos o rangos salariales sin distorsionar la información general.

   Eventualmente alguien podría sugerir un muestreo aleatorio simple bajo una premisa de que el interés en general es cuantificar los promedios generales de gasto en cada uno de los rubros indicados, y es válido

   Alguien podría argumentar que este estudio solo tiene sentido en la población con trabajos formales y entonces el tipo de muestreo debería evitar unidades de investigación que no aporten información. En fin la idea es ver que responden