Instituto Tecnológico de Costa Rica — Tiempo: 2 Horas, 20 minutos
Escuela de Matemática — Puntaje Total: 30 Puntos

Probabilidades
Segundo Examen Parcial
I-2022

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes en los cuales las calidad de las imágenes enviadas no sean claras y legibles. Una vez concluido el tiempo del examen usted tiene 15 minutos para subir un archivo ordenado con sus respuestas.

1. [**3 puntos**] Una variable aleatoria X toma valores $1, 2, 3, \ldots, 25$ con probabilidades $f_X(i) = k(0.16)^{\frac{i}{2}}$. Determine la probabilidad de que esta variable sea superior a 5.

   Solución.

   Primero, se debe encontrar el valor de k. Para esto, se utiliza la propiedad:

$$\sum_{i=1}^{25} f_X(i) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{25} k \cdot (0.16)^{i/2} = 1$$

$$\Rightarrow k \cdot \sum_{i=1}^{25} (0.4)^i = 1$$

$$\Rightarrow k \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

   Con esto:

$$P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5]$$

$$\Rightarrow P[X > 5] = 1 - \sum_{i=1}^{5} \frac{3 \cdot (0.16)^{i/2}}{2}$$

$$\Rightarrow P[X > 5] = \frac{32}{3125} = 0.01024$$

2. Cierto grupo del curso de probabilidades está compuesto de 15 mujeres y 25 hombres. Cada estudiante se ausenta de la clase con probabilidad de 0.45

   - **[2 puntos]** ¿Cuál es la esperanza para el total de estudiantes presentes en una clase cualquiera?
   - **[3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 32 clases en 15 o más se superen los 23 estudiantes en clase.
   - **[3 puntos]** El profesor toma la lista de clase y elige de manera aleatoria un grupo de 20 estudiantes. Determine la probabilidad de que haya más mujeres que hombres en el grupo.

   Solución.

   - Considere la variable X correspondiente al total de estudiantes presentes en una clase cualquiera. Esta variable sigue una distribución binomial, con $n = 40$ y $p = 0.55$.

     Como $E(X) = n \cdot p$, entonces se espera que asistan 22 estudiantes a una clase cualquiera.

   - Primero, se necesita saber cuál es la probabilidad de que se superen los 23 estudiantes por clase. Para esto:

     $$P[X > 23] = \sum_{i=24}^{40} \binom{40}{i} \cdot (0.55)^i \cdot (0.45)^{40-i} \approx 0.31855$$

     Ahora, tomando la variable aleatoria Y como el total de clases en las que se superan los 23 estudiantes, de las 32 clases, entonces se tiene que Y sigue una distribución binomial, con 32 repeticiones y una probabilidad de éxito de 0.31855. Por lo tanto:

     $$P[Y \geq 15] = \sum_{i=15}^{32} \binom{32}{x} \cdot (0.31855)^i \cdot (0.68145)^{32-i} \approx 0.05418$$

   - Suponga que la variable aleatoria Z es la cantidad de mujeres en la muestra de 20 estudiantes. Con esto, Z sigue una distribución hipergeométrica, con $N = 40$, $n = 20$ y $M = 15$.

     Como $R_Z = \{0, 1, \ldots, 15\}$, se tiene que:

     $$P[Z > 10] = \sum_{i=11}^{15} \frac{\binom{15}{i} \cdot \binom{25}{20-i}}{\binom{40}{20}} = \frac{1609}{66526} \approx 0.02419$$

3. **[4 puntos]** Mario practica un juego en el cual la probabilidad de ganar en la partida i es $1-(1/2)^i$. Mario juega hasta que ocurra alguno de los siguientes eventos. acumula dos partidas ganadas o ha jugado 4 veces, lo que ocurra primero. Sea X es la variable aleatoria que corresponde con el total de partidas jugadas por Mario. Determine la distribución de probabilidad para X.

   Solución.

   Note que para el experimento propuesto, si se toma E como ganar una partida y F como perder una partida:

$$\Omega = \{EE, EFE, FEE, FFFF,$$

$$FFFE, FFEF, FEFF, EFFF, EFFE, FEFE, FFEE\} \ .$$

   Esto indica que $R_X = \{2, 3, 4\}$.

   Por otro lado, para determinar la probabilidad solicitada, es necesario exponer la distribución de probabilidad. Para esto, tome en cuenta la siguiente tabla:

Juego	Prob. 1er	Prob. 2da	Prob. 3ra	Prob. 4ta	Total
EE	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$			0.375
EFE	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$		0.4375
FEE	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$		
FFFF	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	0.1875
FFFE	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^4$	
FFEF	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	
FEFF	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	
EFFF	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	
EFFE	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^4$	
FEFE	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^4$	
FFEE	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^4$	

   Por lo tanto:

$$f_X(X) = \begin{cases} 0.375 & \text{, si} \quad x = 2 \\ 0.4375 & \text{, si} \quad x = 3 \\ 0.1875 & \text{, si} \quad x = 4 \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases} \ .$$

4. **[3 puntos]** Cuando un usuario crea una nueva clave para un sistema, la probabilidad de que se rechace, por no respetar los recomendaciones, es de p.

   Si la probabilidad de que el usuario reciba el primer rechazo de su clave antes de la tercera es de 0.5, determine el valor de p.

   Solución.

   Considere la variable aleatoria X como la cantidad de contraseñas digitadas por usuarios hasta el primer rechazo. Esta variable sigue una distribución geométrica, con p probabilidad de éxito.

   Por lo tanto:

$$P[X < 3] = 0.5$$

$$\Rightarrow P[X \leq 2] = 0.5$$

$$\Rightarrow p + (1-p)p = 0.5$$

$$\Rightarrow p + p - p^2 = 0.5$$

$$\Rightarrow -p^2 + 2p - 0.5 = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1.70711 \text{ o } p = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.29289$$

   Así, se puede concluir que $p = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.29289$.

5. **[4 puntos]** Un estudio realizado por algunos estudiantes revela que el tiempo X que dedica un profesor a explicar los conceptos durante una sesión de clases es una variable aleatoria continua, en horas, con densidad de probabilidad de la forma:

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{k(1+t^2)} & \text{, si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \\ 0 & \text{, cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Determine la forma de la distribución de probabilidad acumulada para X.
- Determine la probabilidad de que el profesor dedique más de 15 minutos a explicar los conceptos durante una clase.
- Determine la esperanza para el tiempo que dedica el profesor a explicar los conceptos.

Solución.

- Note que la distribución de probabilidad acumulada para X es necesario determinar el valor de k. Con esto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \; dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{4}{k(1+t^2)} \; dt = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{k} \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \; dt = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{k} \cdot \left(\arctan(t) \right) \Bigg|_{t=0}^{t=1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{k} \cdot \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow k = \pi$$

Por otro lado, la distribución de probabilidad acumulada para X se puede escribir de la forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{4 \cdot \arctan(x)}{\pi} & \text{, si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 1 & \text{, si} \quad x > 1 \end{cases} .$$

- Note que si el profesor dedica más de 15 minutos a explicar los conceptos durante una clase, es lo mismo que decir que dedica más de 1 / 4 de hora.

  Por lo tanto, la probabilidad solicitada es:

  $$P\left[X > \frac{1}{4}\right] = 1 - P\left[X \leq \frac{1}{4}\right] = 1 - \frac{4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi} \approx 0.68808$$

- Note que:

  $$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_X\left(t\right)\ dt$$

  $$\Rightarrow E\left(X\right) = \int_{0}^{1} \frac{4t}{\pi\left(1+t^2\right)}\ dt$$

  $$\Rightarrow E\left(X\right) = \int_{1}^{2} \frac{2}{\pi \cdot u}\ du \qquad \text{, tomando } u = 1 + t^2 \ \Rightarrow\ du = 2t\ dt,$$

  $$\Rightarrow E\left(X\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\ln|t|\right)\Bigg|_{t=1}^{t=2}$$

  $$\Rightarrow E\left(X\right) = \frac{2 \cdot \ln\left(2\right)}{\pi} \approx 0.44127$$

6. [**4 puntos**] Se ha determinado que el total de sismos mayores a una escala fija en cierta región sigue una distribución que es Poisson con promedio 8 sismos al mes.

   - Determine la probabilidad de que en una semana haya más de 9 sismos mayores a la escala fija de la región mencionada.
   - Determine la probabilidad de que un día se tengan sismos mayores a la escala fija de la región mencionada.

   Solución.

   Suponga que X_1 es la cantidad de sismos mayores a la escala fija (por mes) en la región propuesta. Se tiene que $X_1 \sim \text{Poisson}\,(8)$.

   Para las partes solicitadas a continuación se tomarán los convenios: un mes tiene 4 semanas, y 30 días consecutivos forman un mes.

   Con esto, en la primera parte se define $X_{1/4}$ como la cantidad de sismos mayores a la escala fija (por semana) en la región propuesta. Esta variable sigue un distribución de Poisson con $\lambda = 2$.

   Así, $P\,(X > 9) = 1 - P\,(X \leq 9) = 0.00005$.

   Por otro lado, para la segunda parte se define $X_{1/30}$ como la cantidad de sismos mayores a la escala fija (por día) en la región propuesta. Esta variable sigue un distribución de Poisson con $\lambda = 4/15 \approx 0.266667$.

   Así, $P\,(X \geq 1) = 1 - P\,(X = 0) = 0.23407$.

7. **[4 puntos]** Sean X y Y variables aleatorias tales que: $M_X(t) = \dfrac{5}{(5-t)^2}$ y $Y = X^2 + 3X - 9$.

- Determine la esperanza de la variable X.
- Determine la esperanza de la variable Y.

Solución.

Por teoremas se sabe que $E(X) = M'_X(0)$.

Como $M_X(t) = 5/((5-t)^2) = 5 \cdot (5-t)^{-2} \Rightarrow M'_X(t) = 10 \cdot (5-t)^{-3}$, entonces $E(X) = 2/25 = 0.08$.

Por otro lado, note que:

$$Y = X^2 + 3X - 9$$

$$\Rightarrow E(Y) = E(X^2 + 3X - 9)$$

$$\Rightarrow E(Y) = E(X^2) + 3 \cdot E(X) - E(9)$$

$$\Rightarrow E(Y) = M''_X(0) + 3 \cdot 2/25 - 9$$

$$\Rightarrow E(Y) = 30 \cdot (5-0)^{-4} + 3 \cdot 2/25 - 9$$

$$\Rightarrow E(Y) = 6/125 + 6/25 - 9$$

$$\Rightarrow E(Y) = -1089/125 = -8.712$$