Instituto Tecnológico de Costa Rica — Escuela de Matemática
MA-1103: Cálculo y Álgebra Lineal — II Semestre

Examen de Reposición

28 de noviembre 2018
(Solución)

Instrucciones:

- Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas.
- Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas.
- No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
- No se permite el uso de calculadora programable, ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.
- El examen consta de **8 preguntas** con un puntaje máximo de **32 puntos**. Dispone de **3 horas** para realizar el examen.

#1 Estudiar la convergencia de la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}$. **(4 puntos)**

Solución:

Note que $0 < \dfrac{2+\cos(n^3)}{2^n+n} \leq \dfrac{3}{2^n+n} \leq \dfrac{3}{2^n} = 3 \cdot \dfrac{1}{2^n}$, luego como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es geométrica convergente, entonces por criterio de comparación directa, se concluye que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}$ converge.

$\blacksquare$

#2 Hallar los valores de α para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (\alpha+1)^n}{3^n \cdot n^2}$ converge.

(4 puntos)

Solución:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \cdots = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{|\alpha+1|}{3}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{|\ \alpha+1\ |}{3}\cdot 1^2 = \frac{|\ \alpha+1\ |}{3}$$

La serie converge, según el criterio del cociente si se cumple:

$$|\ \alpha+1\ |< 3 \Longleftrightarrow -4<\alpha<2$$

.

Analizando los casos donde $\alpha=-4$ y $\alpha=2$, se tiene que

- $\alpha=-4$: Se obtiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, la cual es una $p-$serie y converge pues $p=2>1$.
- $\alpha=2$: Se obtiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

  En este caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es una $p-$serie convergente, por lo tanto la serie converge absolutamente, lo que implica que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ (\alpha+1)^n}{3^n\cdot n^2}$ converge si $\alpha\in[-4,2]$.

$\lrcorner$

#3 Determine la forma polar de todos los números complejos z que cumplen, simultáneamente, las dos condiciones siguientes: **(5 puntos)**

$$\begin{cases} |z-\overline{z}| & = & 6\sqrt{2} \\ \operatorname{Arg}\left(\overline{z}-3\sqrt{2}\right) & = & \dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

Solución:

Sea $z=a+ib$ el número complejo que satisface ambas condiciones. Así, de la primera condición se tiene que:

$$|z-\overline{z}| = 6\sqrt{2} \Longrightarrow |a+ib-a+ib| = 6\sqrt{2} \Longrightarrow b = \pm\, 3\sqrt{2}$$

De la segunda condición:

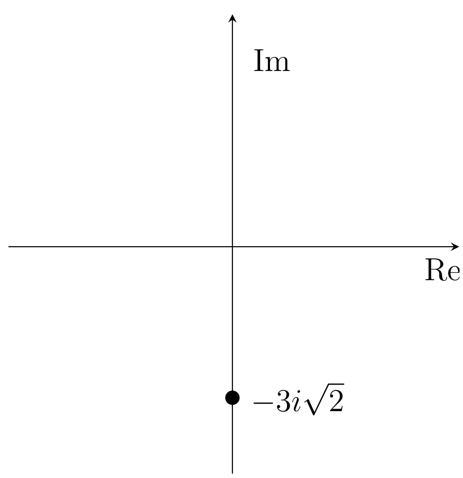
$$\operatorname{Arg}\left(\overline{z}-3\sqrt{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow -\frac{b}{a-3\sqrt{2}} = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Longrightarrow -b = 3\sqrt{2}-a$$

Luego:

$$b = 3\sqrt{2} \Longrightarrow a = 6\sqrt{2} \Longrightarrow z = 6\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$$

$$b = -3\sqrt{2} \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow z = -3i\sqrt{2}$$

Sin embargo, el número $z = 6\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$ no satisface una de las condiciones. Por lo tanto, el número complejo que satisface ambas condiciones es $z = -3i\sqrt{2}$ cuya forma polar es $z = 3\sqrt{2}\cdot \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.



$\square$

#4 Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz invertible y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $BC = A$. Determine el conjunto solución del sistema $B^2CX = 2BX$.

(5 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} B^2CX - 2BX &= 0 \\ \left(B^2C - 2B\right)X &= 0 \\ B\left(BC - 2I\right)X &= 0 \\ B^{-1}B\left(BC - 2I\right)X &= B^{-1}0 \\ \left(BC - 2I\right)X &= 0 \\ \left(A - 2I\right)X &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{1,2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{F}_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{F}_3 - 3F_2]{\overline{F}_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $\mathcal{S} = \{(-3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

$\lrcorner$

#5 Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{u} = (1, 1, -2)$ y $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$. Hallar $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones: **(4 puntos)**

- $\mathbf{w} \parallel \mathbf{u}$
- $\|\mathbf{w} \times \mathbf{v}\| = 5$

Solución: Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{u} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{w} = \lambda \cdot (1, 1, -2) \\ &\Longrightarrow \quad \mathbf{w} = (\lambda, \lambda, -2\lambda) \end{aligned}$$

Por la segunda condición:

$$\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \lambda & \lambda & -2\lambda \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} - \begin{vmatrix} \lambda & -2\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{k}} = (-5\lambda, -5\lambda, -5\lambda)$$

Luego:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{w} \times \mathbf{v}|| = 5 &\iff \sqrt{(-5\lambda)^2 + (-5\lambda)^2 + (-5\lambda)^2} = 5 \\ &\iff \sqrt{75\lambda^2} = 5 \\ &\iff 75\lambda^2 = 25 \\ &\iff \lambda^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Así, $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Por lo tanto, $\mathbf{w} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

#6 Considere las rectas $L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$, $L_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{3} = z-2$ y el plano $\pi : x - 2y + z = 1$. Determine la ecuación del plano ρ que satisface simultáneamente las siguientes condiciones: **(4 puntos)**

- ρ contiene a la recta L_1.
- ρ contiene el punto P de intersección entre el plano π y la recta L_2.

Solución:

Note que las ecuaciones paramétricas de L_2 son:

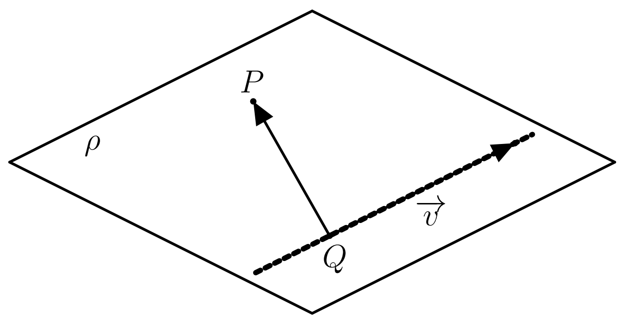
$$L_2 = \begin{cases} x = -2t \\ y = 4 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación del plano π :

$$\begin{gathered} x - 2y + z = 1 \\ -2t - 2(4+3t) + 2 + t = 1 \\ -2t - 8 - 6t + 2 + t = 1 \\ -7t = 7 \\ t = -1 \end{gathered}$$

Así, el punto de intersección es $P(2,1,1)$. Tomando el punto $Q(1,-1,2)$ sobre la recta L_1, entonces:

$$\overrightarrow{QP} = (2,1,1) - (1,-1,2) = (1,2,-1)$$



Si el vector de la recta L_1 es $\mathbf{v} = (2,3,1)$ podemos concluir que la ecuación escalar del plano ρ es:

$$\rho : (x,y,z) = t(2,3,1) + s(1,2,-1) + (2,1,1), \quad t,s \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones paramétricas:

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} x = 2t + s + 2 \\ y = 3t + 2s + 1, \quad t,s \in \mathbb{R} \\ z = t - s + 1 \end{array} \right.$$

#7 Determine el valor de x de modo que el vector $(-1,2,x)$ es combinación lineal de los vectores $(4,-2,2)$ y $(1,0,3)$. **(3 puntos)**

Solución:

$$(-1,2,x) = r \cdot (4,-2,2) + t \cdot (1,0,3)$$
$$(-1,2,x) = (4r,-2r,2r) + (t,0,3t)$$
$$(-1,2,x) = (4r+t,-2r,2r+3t)$$

Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{c} 4r + t = -1 \\ -2r = 2 \\ 2r + 3t = x \end{array} \right.$$

Del sistema se tiene que $r = -1$ y $t = 3$. Luego sustituyendo por estos valores $x = 7$.

$\lrcorner$

#8 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determine los valores de a y b para los cuales $\lambda = 3$ es un valor propio de A. **(3 puntos)**

Solución:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - 3I_n) = 0 \\
P(\lambda) = \det &\left[\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \\
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-3 & b & 3 \\ 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = 0 \\
(a-3) \cdot &\begin{vmatrix} -2 & a \\ 1 & a-3 \end{vmatrix} = 0 \\
(a-3) \cdot &(-2(a-3) - a) = 0 \\
(a-3)&(-3a+6) = 0 \\
-3(a-3)&(a-2) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda = 3$ es un valor propio de A si $a = 2$ ó $a = 3$.

$\lrcorner$