

# Teorema del Límite Central (TLC)

## Desigualdad de Chebyshev

1. Un local comercial se dedica a vender celulares. La demanda para la época navideña es aleatoria y tiene una media de 150 celulares, con desviación estándar de 10 celulares ¿Con cuántos celulares se debe contar en el establecimiento, para satisfacer la demanda con un 90 %?  
R/ Entre 118 y 182
  
2. La empresa fabricadora de bolígrafos más reconocida de la ciudad quiere conocer el intervalo de rendimiento en metros en donde sus bolígrafos pueden escribir antes de terminarse. Para una prueba masiva de rendimiento, se obtuvo que el rendimiento medio fue de 1 250 metros con una desviación estándar de 200 metros. En dicho intervalo, debe encontrarse el 80 % de bolígrafos producidos.  
R/ Entre 803 y 1 698
  
3. Una aerolínea revela que tiene un promedio de 78,7 pasajeros por día, con una desviación estándar de 12,14 ¿Con qué frecuencia los pasajeros están dentro de  $k = 2$  desviaciones estándar de la media y cuál es dicho intervalo?  
R/ Entre 55 y 103
  
4. Se sabe que el peso de la población costarricense sigue una distribución, cuya media es 70 kg y desviación estándar de 5 kg. Determine una cota para la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga un peso entre 50 y 90 kilogramos.  
R/ 0,9375
  
5. Sea  $X$  una variable aleatoria continua, tal que su distribución es simétrica con respecto a su media. Si  $E(X) = 15$  y  $Var(X) = 9$ . Halle una cota inferior para la probabilidad dada por  $P(9 \leq X \leq 24)$   
R/  $\frac{59}{72}$
  
6. Sea  $X$  una variable aleatoria continua, tal que su distribución es simétrica con respecto a su media. Si  $E(X) = 25$  y  $Var(X) = 4$ . Halle una cota inferior para la probabilidad dada por  $P(20 < X < 30)$   
R/ 0,84

7. Se ha analizado el comportamiento de una máquina y se acepta que el total de piezas defectuosas, al día, que produce es una variable aleatoria con media 50 piezas y desviación estándar de dos piezas. Determine una cota superior para la probabilidad de que esta máquina produzca entre 50 y 60 piezas defectuosas. R/ 0,96
8. Se sabe que el peso de la población costarricense sigue una distribución, cuya media es 70 kg y desviación estándar de 2 kg. Determine una cota para la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga un peso entre 50 y 90 kilogramos. R/ 0,99
9. Una empresa de electrónicos planea fabricar una bombilla de luz de 100 Watts, esta tendrá una vida útil media de 1 200 horas y su desviación estándar es de 100 horas. La empresa desea conocer el porcentaje de bombillas que no logren durar más de 800 horas. R/  $\frac{1}{32}$
10. En una encuesta realizada en la zona norte de Bogotá, se les preguntó a 500 personas por sus gastos diarios en transporte y alimentación. Los datos recopilados mostraron una media de 70 000 pesos y una varianza de 100 millones de pesos. El autor de la encuesta quiere estimar la cantidad de personas que gasta entre 50 000 y 90 000 pesos para sus transportes y alimentación. R/ 375
11. Sea  $X$  una variable con media de 70 y desviación estándar desconocida. Al utilizar la desigualdad de Chebyshev, se obtiene que  $P(65 \leq X \leq 75) \geq 0,8$ . Halle la desviación estándar. R/  $\sqrt{5}$
12. La máquina fabricadora de panes de la mejor empresa nacional usa en promedio  $\mu$  libras de harina por pan. Para garantizar la calidad en sus productos prefabricados, se desea que las libras no excedan 1 libra por encima de la estimada al fabricar el pan, al menos un 90 % del tiempo. Por tal motivo, esta desea saber la desviación estándar máxima que cumpla con los requisitos de fabricación. R/  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

## Teorema del Límite Central (TLC)

1. El tiempo que el cajero del supermercado **Menos Menos** tarda con cada cliente sigue una distribución normal con un promedio de 7 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. Si el cajero atendió a 8 clientes ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo que tardó en atenderlos sea inferior a 72 minutos? R/ 0,9976
2. Un paquete de azúcar **Dulce** pesa en promedio 2 kilos con una varianza de  $0,01 \text{ kg}^2$ . Estos paquetes son empacados en sacos de 30 paquetes cada uno ¿cuál es la probabilidad de que el peso de un saco de azúcar sea inferior a 59 kilos? R/ 0,0336
3. El doctor Adrián tiene un consultorio privado y ha estimado que en promedio cobra 15 000 colones por consulta con una desviación estándar de 7 000 colones. Un cliente se quejó que el cobro de 18 000 colones por una consulta fue excesivo. Después de discutir, el doctor establece que si en una muestra de 50 facturas por consulta, se obtiene un ingreso inferior al monto cobrado al cliente, se le devolverá todo el dinero. Determine la probabilidad de que se devuelva todo el dinero cobrado. R/ 0,9987
4. Una clase de melocotones de cierto huerto tienen un diámetro promedio de 10 centímetros con una desviación estándar de 0,7 centímetros. En una muestra de 40 melocotones del huerto, determine la probabilidad de que el diámetro promedio de los 40 melocotones sea superior a 9,8 centímetros. R/ 0,9646
5. Un comerciante de papa lleva todos los miércoles al **CENADA** su camión cargado de sacos de malla con este producto. Por experiencia, se sabe que el peso de las papas de cada saco, se distribuye normalmente, con una media de 50 kilos y una desviación estándar de 2 kilos. Si el camión lleva 25 sacos de papa ¿cuál es la probabilidad de que el peso promedio de los sacos oscile entre 49,5 kilos y 51,5 kilos? R/ 0,8943

6. Un mercado mayorista de alimentos preparados vende diariamente un promedio de 5 millones de colones, con una desviación estándar de 1 millón de colones. Calcule la probabilidad de que en 36 días de ventas consecutivas, el total de ventas del mercado sea de al menos 190 millones de colones. R/ 0,0475
7. Una bolsa de zanahorias tiene un peso promedio de 2 kilogramos y una desviación de 100 gramos. Se empacan cajas que contienen 70 bolsas. Determine la probabilidad de que en una caja el peso promedio por bolsa sea inferior a 1 990 gramos. R/ 0,2004
8. El gasto diario de papelería en una fotocopiadora sigue una distribución con media de 80 páginas por minuto y desviación estándar de  $4\sqrt{5}$  páginas por minuto. Determine la probabilidad que en una hora (60 minutos), se gaste más de 5 000 páginas. R/ 0,002
9. Una fábrica de dispositivos médicos empaca bolsas de suero, con un peso promedio de 200 gramos y una desviación estándar de 20 gramos. Las bolsas se empacan en cajas que contienen 100 bolsas. Al elegir una caja al azar, esta pasa al control de calidad, si el peso promedio de las bolsas que contiene se encuentra entre los 198 y 202 gramos, calcule la probabilidad de que una caja no pase el control de calidad. R/ 0,3174
10. Una compañía constructora compra tubos y toma una muestra de 100 tubos, se miden los diámetros y se observa que la media de los diámetros es de 30 pulgadas y la desviación estándar es de 1,20 pulgadas. Calcule la probabilidad que la media se encuentre entre 29,75 y 30,25 pulgadas. R/ 0,9624
11. La empresa **LLAMAX** fabrica celulares. El número de celulares defectuosos sigue una media de 1,5. En un mes (30 días), calcule la probabilidad que el número de celulares defectuosos se encuentre en el intervalo de [50, 60] R/ 0,2142
12. Una empresa dedicada a hacer espejos contabilizó que el número de espejos que se quiebran diariamente en su bodega es una variable aleatoria que sigue una distribución con media 2. Calcule la probabilidad que, en un año, el número de espejos rotos se encuentre en el intervalo [650, 700], suponiendo que el año tiene 365 días. R/ 0,132

13. Un nuevo bombillo fluorescente ha salido al mercado, en el empaque dice que tiene una vida promedio de 8 000 horas, con desviación típica de 75 horas. La oficina de protección al consumidor escoge una muestra aleatoria de 95 bombillos para realizarle varias pruebas.
- a) Calcule la probabilidad que la media sea mayor a 7 975 horas. R/ 0,9994
- b) ¿Cuál es el valor de la media que debería sugerir la compañía fabricante, si quiere tener un 95 % de seguridad de que la media de los bombillos sea mayor al valor sugerido por la compañía? R/ 7 987,3
14. Jorge elaboró un software para resolver integrales no triviales, el cual tarda en promedio 4 segundos resolviendo una integral no trivial, con desviación estándar de 1,5 segundos.
- a) Suponga que el tiempo que tarda el programa en resolver una integral no trivial, sigue una distribución normal. La probabilidad que el programa resuelva una lista de 10 integrales no triviales en menos de un tiempo  $t$  en segundos, es superior al 95 %. Determine el menor valor de  $t$ . R/ 47,8
- b) ¿Cuál es la probabilidad que en promedio tarde menos de 3,5 segundos en resolver las integrales no triviales? R/ 0,0336
15. Cierta tipo de llantas tienen una duración media de 30 000 kilómetros con una desviación de 2 500 kilómetros. Don Juan tiene una flota de diez taxis que utilizan este tipo de llantas. Don Juan decide cambiarle las llantas a toda su flota.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración promedio de las llantas adquiridas por Don Juan sea inferior a 29 500 kilómetros? R/ 0,2643
- b) Se sabe que la probabilidad de que la duración promedio de las llantas adquiridas por Don Juan es mayor a  $C$  es de por lo menos 10 %. Determine el valor máximo de  $C$  para la situación dada. R/ 31 011,9288

16. El tiempo que tarda una persona en contestar una encuesta telefónica sobre las próximas elecciones de la empresa **UNI** es en promedio 200 segundos, con una desviación promedio de 20 segundos. La empresa contrató encuestadores para tal fin.
- a) Si un encuestador realiza 55 encuestas ¿cuál es la probabilidad de que tarde más de tres horas en realizarlas? R/ 0,9115
- b) Si se contrata un encuestador que realiza 30 encuestas ¿cuál es la probabilidad que tarde en promedio menos de 190 segundos en cada encuesta? R/ 0,0031
17. El tiempo que tarda una persona en contestar una encuesta telefónica sobre las próximas elecciones de la empresa **Candeco** es en promedio 200 segundos, con una desviación promedio de 20 segundos. La empresa contrató encuestadores para tal fin.
- a) Determine el número máximo de encuestas que puede realizar un encuestador en tres horas, de forma que al menos el 90 % de los encuestadores las puedan realizar.
- b) Un encuestador tiene suerte si realiza más de 38 encuestas en dos horas. ¿Determine la probabilidad de que un encuestador tenga suerte?
18. La estatura de los estudiantes de un centro educativo sigue una distribución normal con media de 1,70 metros y una desviación típica de 0,42. Si se toman 10 muestras con 49 estudiantes cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la estatura promedio sea menor o igual a 1,65 metros? R/ 0,2033

19. La empresa **Compu Segura** se encarga de reparar computadoras personales y por la revisión de cada una cobra en promedio ₩20 000, con una desviación estándar de ₩3 800.
- a) Don Beto se queja ante el dueño de la empresa de que el cobro de ₩22 600 por la revisión de su computadora es muy elevado. Después de discutir, el dueño accede a rebajarle el costo del servicio si el pago promedio en una muestra de 30 revisiones es inferior al monto cobrado a don Beto. Determine la probabilidad de que se le realice el rebajo. R/ 0,99991156
- b) Suponga que todos los días se revisan 100 computadoras. El dueño de la empresa califica un día como productivo si el ingreso de ese día por concepto de revisión está dentro del 10 % de ingresos diarios más elevados. Determine el ingreso diario mínimo para que el día sea productivo. R/ ₩2 048 640
20. Un técnico de la empresa **ECI** señala que la duración de las llamadas telefónicas realizadas en cierta localidad sigue una distribución normal con media de 180 segundos y una desviación estándar de 300 segundos.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada realizada en la localidad dure más de siete minutos? R/ 0,2119
- b) De las llamadas que se encuentran en el 5 % de las más largas ¿cuál es la duración de la llamada más breve? R/ 673,5 segundos
- c) En 10 llamadas ¿cuál es la probabilidad de que su duración promedio sea menor que 160 segundos? R/ 0,4168
- d) En 10 llamadas ¿cuál es la probabilidad de que su duración total sea mayor a 31 minutos? R/ 0,4760
21. El promedio de ingresos semanales de un empleado es de \$150 000, con desviación típica de \$10 000. El dueño de la empresa decide ahorrar la totalidad de los ingresos, hasta superar los \$6 millones. Determine la cantidad de semanas que deberá esperar para superar esa cantidad, con una probabilidad del 80 %. R/ 40

22. Una pieza recta se construye conectando tres secciones  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , cada una de las cuales se construye en una máquina diferente. Las tres medidas, dadas en centímetros, siguen una distribución normal con medias 50, 35 y 65; y varianzas 0,25, 0,0625 y 0,305, respectivamente. La pieza se utiliza para construir el ala de un avión, solo si su longitud total se encuentra entre 148,35 centímetros y 149,75 centímetros ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda utilizar la pieza?

R/ 0,3566

23. Una tienda de tatuajes hace tres tipos de tatuajes: estrellas, dragones y vampiros. Cada estrella vale ₩10 000, los dragones ₩10 000 y los vampiros ₩12 000. Las probabilidades de que los clientes pidan alguno de estos tatuajes son 0,5, 0,3 y 0,2, respectivamente. Si un día particular llegan 50 clientes y ordenan un tatuaje cada uno. Determine la probabilidad de que ese día la tienda adquiera más de ₩510 000.

R/ 0,9616

24. Una serie de ensayos  $E_1, E_2, \dots, E_n$  independientes e idénticamente distribuidos provienen de una distribución de tiempo que es una variable aleatoria con media de un minuto y desviación estándar de dos minutos. Se eligen ensayos de manera que la probabilidad de que el tiempo acumulado entre ellos no supere los 200 minutos sea inferior a 0,9. Determine el total de ensayos a elegir.

R/ [167, 239]

25. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias continuas tales que  $X_i \sim N\left(i, \frac{1}{n}\right)$ . Sea  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Determine el valor de  $n$ , de manera que  $P(S_n > 10n) = 0,75$ .

**Sugerencia:** recuerde que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

R/  $n = 19$ 

26. Dadas las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mutuamente independientes tales que

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \text{ con } \mu_i = i \text{ y } \sigma_i^2 = \frac{1}{n}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Considere la variable aleatoria  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Determine el valor de  $n$  que satisface que la probabilidad de que  $S_n > 10n$  es igual a 0,5

R/ 19

27. Dadas las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mutuamente independientes tales que

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \text{ con } \mu_i = 10i \text{ y } \sigma_i^2 = 2i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Consideré la variable aleatoria  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ .

a) Verifique que  $E(\bar{X}) = 5n + 5$  y que  $Var(\bar{X}) = n + 1$  **Sugerencia:** recuerde que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Determine el menor valor de  $n$  que satisface que la probabilidad de que  $\bar{X} < 5n$  sea superior al 10 %

R/ 15

## Aproximación a la binomial utilizando la normal

1. La probabilidad de vender un libro es de 0,01. Si se ofertan 5 000 libros en un día, determine la probabilidad de que se logren vender más de 60 libros. R/ 0,0681
2. En una canasta hay solo bolas rojas y blancas. Sea  $p$  la probabilidad de extraer una bola blanca de la canasta. De 100 extracciones con reposición, se sabe que la probabilidad de obtener a lo sumo 30 bolas blancas es del 40 %. Utilice la aproximación de la binomial por la normal para determinar el valor aproximado de  $p$ . R/ 0,3166
3. César, un estudiante de computación diseño un juego que tiene cierta probabilidad de ganarlo ajustable. Para un turno, decide poner un local y llevar su computadora, cobrando cierta cantidad por jugar. ¿A qué valor debe César ajustar la probabilidad de ganar el juego, para que la probabilidad de que, de los 100 jugadores, al menos 10 lo ganen sea aproximadamente igual a 15 %?
4. En un país  $C$ , el año pasado se inauguró la esperada autopista, sin embargo, desde su inauguración, varios vehículos han sufrido accidentes de diferentes tipos, pero la probabilidad  $p$  de que un vehículo sufra un accidente se desconoce. Ante esta situación, se ha estimado que de 1 000 vehículos, la probabilidad que al menos 50 sufran algún tipo de accidente es de 20 %. Con base en esta situación, halle aproximadamente la probabilidad  $p$  de que el vehículo sufra un accidente en esta autopista. R/ 0,0566
5. Jacó es una de las playas más visitadas de nuestro país, sin embargo, si una persona asiste al **Gran Hotel Jacó**, la probabilidad de que se broncee por más de tres horas es de 0,2.
  - a) De 10 personas que asisten al **Gran Hotel Jacó** ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas se bronceen por más de tres horas? R/ 0,6241
  - b) Aproximadamente ¿cuántas personas deben asistir este sábado al **Gran Hotel Jacó** para tener una probabilidad cercana al 90 % de que este día al menos 100 personas se bronceen por más de tres horas? R/ 558

## Ejercicios combinados

1. El gasto diario de cierta oficina sigue una distribución Gamma con media 20 y desviación estándar de  $2\sqrt{10}$  (en miles de colones)
  - a) Determine la probabilidad que en un día se gasten menos de ₡22 000. R/ 0,659
  - b) Determine la probabilidad de que en un mes (30 días) se gaste más de medio millón de colones. R/ 0,9981
2. Suponga que el peso de las sandías en cierta finca sigue una distribución normal, con media de tres kilogramos y desviación estándar de 0,8 kilogramos.
  - a) Amelia compra 15 sandías para su establecimiento de jugos naturales ¿cuál es la probabilidad de que la suma de sus pesos sea superior a 47 kilogramos? R/ 0,2578
  - b) Si el 30% de las sandías de mayor peso se consideran gigantes ¿cuál es el peso mínimo que debe tener una sandía para considerarse gigante? R/ 3,416
3. La cantidad de agua en las botellas **Manantial Puro** sigue una distribución normal con media de 1 005 mililitros por botella y desviación estándar de 50 mililitros. Las botellas antes de ser distribuidas a los puntos de venta pasan por una inspección donde son desecharadas aquellas que tienen una cantidad inferior a 950 mililitros.
  - a) ¿Cuál es la probabilidad de que una botella sea desecharada? R/ 0,1357
  - b) Se quiere empacar las botellas en cajas ¿cuántas botellas como mínimo deben ponerse en cada caja para que la cantidad total de agua en la caja sea mayor a 10 000 mililitros, con una probabilidad superior al 95%? R/ 11

4. El tiempo de vida útil de una tablet **XTEC** sigue una distribución exponencial con media de 3 años. Dada la variedad de marcas de tablet en el mercado, la organización **Evaluá Tablet** se ha dedicado a evaluar estos dispositivos y considera que una tablet es de buena calidad, si tiene una vida útil mayor a cuatro años.
- a) Halle la probabilidad de que una tablet **XTEC** sea de buena calidad. R/ 0,2635
- b) A partir del 2017, la empresa otorgará un certificado de calidad a las empresas que fabrican tablets y que cumplan el test: al elegir 40 tabletas al azar, estas deben ser en promedio de buena calidad. Determine la probabilidad de que **XTEC** obtenga el certificado de buena calidad. R/ 0,242
5. El precio de una barra de chocolate sigue una distribución normal con  $\mu = 100$  gramos y  $\sigma = 10$  gramos.
- a) La promoción **El Estafado Feliz** premia las barras que pasan cierta cantidad menos de lo indicado en el empaque ¿Cuál debe ser el peso si se desea que el total de barras a premiar sea inferior al 5%? R/ 83,55
- b) En una caja se colocan 100 barras de chocolate y se indica que el peso promedio de la caja está entre 99 y 101 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que esa afirmación sea verdadera? R/ 0,6826
6. El tiempo de vida útil (en años) de un televisor marca **Nítido** sigue una distribución exponencial con una media de nueve años. Un televisor se considera duradero si tiene una vida útil mayor a 10 años.
- a) Halle la probabilidad de que un televisor marca **Nítido** sea duradero. R/ 0,3291
- b) El **Mall Paseo Feliz** ha adquirido 50 televisores marca **Nítido**. Determine aproximadamente la probabilidad de que, en promedio, los televisores adquiridos sean duraderos. R/ 0,2148

7. El programa **Quien quiere ser multimillonario** realizó un test a las personas interesadas en participar en la próxima temporada. Los resultados del test siguen una distribución normal con un promedio de 56 y una desviación estándar de 12, en una escala de 1 a 100.
- a) El 40 % de las personas que obtuvieron mejor resultado en el test, se consideran candidatos elegibles para participar en la próxima temporada. Determine la nota mínima necesaria que debe obtener una persona en el test, para ser considerada elegible.
- b) El productor considera que la regla anterior no es atractiva, pues para la popularidad del programa se necesita de todo tipo de personas. Así, considera que se deben elegir cierta cantidad al azar de personas, de manera que se obtenga una probabilidad inferior al 5 % de que el resultado promedio, de las personas elegidas, sea menor a 50 ¿Cuántas personas considera que se deben elegir como mínimo?
8. El peso de una bolsa de tomate de cierta distribuidora alimenticia sigue una distribución normal con media de 1 000 gramos y desviación estándar de 75 gramos. Debido a la sobre oferta de tomate, deciden hacer paquetes de 3 bolsas y vender cada paquete por 1 000 colones. Un inspector decide revisar 1 000 de tales paquetes. Si al menos 175 de ellos pesan menos de 2975 gramos, entonces castigará a la distribuidora con una multa. ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que la distribuidora sea castigada? R/ 0,0721

9. El tiempo que tarda un empleado en empacar una caja de bananos sigue una distribución exponencial, con media de 90 segundos. La empresa bananera **Costa Rican Bananas** ha decidido despedir a aquellos que en una inspección sorpresa tarden más de 2 minutos.

a) Halle la probabilidad que un empacador sea despedido.

R/ 0,1083

b) La empresa **Costa Rican Bananas** cuenta con diversas empacadoras en todo el país y cada una cuenta con 35 empleados empacadores. La empresa ha decidido además, cerrar empacadoras en las que el promedio por empacador sea mayor a 100 segundos. Determine la probabilidad de que una empresa sea cerrada.

R/ 0,2546

c) En un control por parte de las autoridades del **Ministerio de Salud** ha decidido multar aquellas empacadoras de empresas frutícolas del país que incumplen con el tiempo eficiente de los empaques de sus productos frutales por al menos el 40 % de sus empleados. Por las regulaciones impuestas hacia las empresas bananeras, se considera tiempo eficiente cuando un empacador tarda a lo sumo dos minutos por empacar cada caja de bananos. Sabiendo que la empresa bananera **Costa Rican Bananas** tiene distribuidas empacadoras por todo el país y cada una cuenta con 35 empleados empacadores ¿cuál es la probabilidad de que una empacadora de la empresa **Costa Rican Bananas** sea multada por parte del **Ministerio de Salud**?

R/ 0,0505

## Ejercicios especiales

1. Una batería funciona en tiempo exponencial con promedio de 5 horas.

- a) En un lote de 20 baterías, determine la probabilidad que entre 7 y 12 baterías duren más de 6 horas. R/ 0,2260

- b) Se van utilizando una a una las baterías, pudiendo probar alguna de ellas en más de una ocasión, hasta obtener dos que duren menos de seis horas. Determine la probabilidad de que deban utilizarse entre 10 y 12 baterías. R/ 0,00009962

2. El tiempo en minutos que tarda cierto componente, sigue una distribución de la siguiente forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^{11}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Pruebe que  $E(X) = \frac{10}{9}$  y  $Var(X) = \frac{5}{324}$

- b) Si 40 componentes eléctricos se ponen a funcionar ¿cuál es la probabilidad que su duración promedio sea superior a 1,1 minutos? R/ 0,7157

- c) Si varios componentes se ponen en funcionamiento en serie ¿cuántos componentes es necesario unir para tener una probabilidad superior al 95 % de que el tiempo total de funcionamiento sea superior a una hora? R/ n = 56

3. El ingreso mensual en millones de colones de la empresa **GFM** es una variable aleatoria continua  $X$  cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{21} & \text{si } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Demuestre que el ingreso promedio mensual de la empresa es de  $\frac{85}{28}$  millones.
- b) Demuestre que la varianza del ingreso mensual es de  $\frac{2\,067}{3\,920}$  millones.
- c) El **Ministerio de Economía** calificará de exitosas a aquellas empresas que en los próximos cinco años muestren un ingreso total superior a 200 millones. Determine la probabilidad de que la empresa **GFM** sea calificada de exitosa.

R/ 0,0007

## Demostraciones

1. Dada una variable aleatoria  $X$  con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Recuerde que por la desigualdad de Chebyshev se tiene que para todo  $k > 0$ ,  $P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$ , con  $t = k\sigma$ . Demuestre que

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq \frac{k^2 - 1}{k^2}$$