

## Tercer Examen Parcial Ordinario

### Instrucciones:

1. El examen consta de **8** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva.
3. Tiene dos horas y quince minutos para contestar las preguntas del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

- 
1. [**3 pts**] Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices de tamaño  $3 \times 3$  tales que  $|A| = \frac{1}{2}$ ,  $|B| = -1$  y  $|C| = 5$ . Calcule  $|2A^T \cdot B^2 \cdot C^{-1}|$ .

### Solución

$$|2A^T \cdot B^2 \cdot C^{-1}| = 2^3 |A| \cdot |B| \cdot |B| \cdot \frac{1}{|C|} = \frac{4}{5}$$

2. [**3 pts**] Determine el valor o valores de  $x$  para que la matriz  $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  sea una matriz invertible.

### Solución

Basta determinar el valor o valores de  $x$ , donde se cumpla que  $\det(M) \neq 0$ :

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & x \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2x \neq 0 \text{ si y solo si } x \neq 2.$$

3. [3 pts] Sean  $u = (-2, k, 2)$ ,  $v = (-4, 0, -6)$  y  $w = (1, 3, -2)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Determine, el valor de  $k$  (en caso de existir) para que el vector  $u$  se pueda escribir como combinación lineal de los vectores  $v$  y  $w$ .

### Solución

Deben existir constantes  $\alpha, \beta$ , tales que :

$$(-2, k, 2) = \alpha(-4, 0, -6) + \beta(1, 3, -2)$$

$$\text{es decir, } \begin{cases} -4\alpha + \beta &= -2 \\ 3\beta &= k \\ -6\alpha - 2\beta &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{7}, \beta = \frac{-10}{7}, \text{ y } k = \frac{-30}{7}$$

De esta forma,  $k = \frac{-30}{7}$ .

4. [4 puntos] Sean  $u = (x, y, z)$ ,  $v = (1, 0, 1)$  y  $w = (-1, 1, 1)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Determine el vector  $u$  que satisface de manera simultánea las siguientes condiciones:

- $u$  forma un ángulo de  $\frac{\pi}{6}$  rad con  $v$ .
- $u \times v = w$ .
- $\|u\| = \sqrt{6}$

### Solución

De la primera y tercera condición se sabe que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{u \cdot v}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow 3 = u \cdot v$$

Dado que  $\|v\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  y  $\|u\| = \sqrt{6}$ . Luego

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 3 \Leftrightarrow x + z = 3 \quad (1)$$

De la segunda condición se sabe que:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (y, -x + z, -y) = (-1, 1, 1)$$

Es decir

$$\begin{cases} y &= -1 \\ -x + z &= 1 \\ -y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -1 \\ -x + z &= 1 \\ y &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -1 \\ -x + z &= 1 \end{cases} \quad (2)$$

Con base en (1) y (2) se tiene el sistema de ecuaciones lineal

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ -x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ y } z = 2$$

De esta forma, el vector buscado es  $u = (1, -1, 2)$ .

5. [4 pts] Considere los vectores  $w = (-2, -2, 1)$  y  $r = (-1, 2, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Determine los vectores  $u$  y  $v$  que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones:

- $u$  es paralelo a  $r$ .
- $2w + v = u$ .
- $v$  es ortogonal a  $w$ .

### Solución

Como  $u$  es paralelo a  $r$ , existe un escalar  $k$  tal que:

$$u = kr = k(-1, 2, 1).$$

Como  $v$  es ortogonal a  $w$ , el producto punto  $v \cdot w$  debe ser cero:

$$v \cdot (-2, -2, 1) = 0.$$

Utilizando la tercera condición  $2w + v = u$ :

$$2(-2, -2, 1) + v = k(-1, 2, 1).$$

Esto se traduce en:

$$v = k(-1, 2, 1) - 2(-2, -2, 1).$$

Por lo tanto, tenemos:

$$v = (-k + 4, 2k + 4, k - 2).$$

Luego se tiene que:

$$(-k + 4, 2k + 4, k - 2) \cdot (-2, -2, 1) = 0.$$

$$-2(-k + 4) - 2(2k + 4) + (k - 2) = 0,$$

$$2k - 8 - 4k - 8 + k - 2 = 0,$$

$$-k - 18 = 0,$$

$$k = -18.$$

Sustituimos  $k = -18$  se obtiene :

$$v = (22, -32, -20)$$

$$u = (18, -36, -18)$$

6. [4 pts] Halle la ecuación de un plano  $\pi$  que satisfaga simultáneamente las condiciones siguientes:
- Es paralelo al plano  $\alpha$  que contiene a los puntos  $A(1, 3, 0)$ ,  $B(-2, 0, 4)$  y  $C(0, 1, 1)$
  - Contiene el punto  $D(3, 3, 3)$

### Solución

Recordamos que dos planos son paralelos si tiene el mismo vector normal o bien, son paralelos. Así, de la primera condición podemos encontrar el vector normal  $n$  del plano  $\pi$  con base en el del plano  $\alpha$ . Sin pérdida de generalidad fije  $A$  y construya los vectores

$$\vec{AB} = B - A = (-2, 0, 4) - (1, 3, 0) = (-3, -3, 4)$$

y

$$\vec{AC} = C - A = (0, 1, 1) - (1, 3, 0) = (-1, -2, 1)$$

Luego

$$n = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + 6, 2 - 3, 4 - 1) = (5, -1, 3)$$

De la segunda condición se sigue que la ecuación cartesiana del plano  $\pi$  corresponde a

$$\pi : (5, -1, 3) \cdot (x, y, z) = (5, -1, 3) \cdot (3, 3, 3) \Leftrightarrow$$

$$\pi : 5x - y + 3z = 21$$

7. Considere la recta  $L : (x, y, z) = (0, -3, 2) + t(2, 1, 1)$  con  $t \in \mathbb{R}$  y el plano  $\pi : 4x - 3y + 5z = 9$ .
- a) [3 pts] Encuentre el punto  $P_0$  de intersección entre  $L$  y  $\pi$ .

### Solución

Note en la recta  $L$ , se tiene que  $x = 2t$ ,  $y = -3 + t$ ,  $z = 2 + t$  y al sustituir en el plano  $\pi$  queda la ecuación:  $4(2t) - 3(-3 + t) + 5(2 + t) = 9$ , la cual al resolver tiene por solución  $t = -1$  y de esta manera  $P_0 = (-2, -4, 1)$ .

- b) [2 pts] Determine las ecuaciones paramétricas de la recta  $N$  que es perpendicular al plano  $\pi$  y que contiene a  $P_0$ .

### Solución

Al ser recta  $N$  perpendicular con plano  $\pi$  se puede tomar como vector director de la recta  $N$ , al vector  $n_\pi = (4, -3, 5)$  y de esta manera las ecuaciones paramétricas de recta  $N$  son:

$$\begin{cases} x &= -2 + 4t \\ y &= -4 - 3t \\ z &= 1 + 5t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

8. Considere la matriz  $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

a) [**2 pts**] Verifique que el vector  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  es un vector propio de la matriz  $A$ .

**Solución**

Debe existir constante  $\lambda$ , tal que  $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . En efecto pues al resolver producto matricial del lado derecho se tiene  $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . De donde basta tomar  $\lambda = a$ .

b) [**1 pto**] ¿A cuál valor propio de la matriz  $A$ , está asociado el vector propio  $v$ ?

**Solución**

De parte anterior se tiene por valor propio  $\lambda = a$  con  $a \in \mathbb{R}$