

1. Estudie el ejemplo 1 y luego realice los ejercicios 2, 8b, 9b, 10, 11b, 13 y 16 correspondientes a la sección 1 folleto de ejercicios.

Ejemplo 1 Sea X y Y dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim B\left(10\theta, \frac{1}{2}\right), \quad Y \sim B\left(20\theta, \frac{1}{5}\right)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro $\theta > 0$ de una determinada población:

$$\hat{\theta}_1 = X - Y, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{9}$$

¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ ? Justifique su respuesta.

$$X \sim B\left(\underset{n}{10\theta}, \underset{p}{\frac{1}{2}}\right), \quad Y \sim B\left(\underset{n}{20\theta}, \underset{p}{\frac{1}{5}}\right)$$

$$n = n \quad \sigma^2 = n p q \quad \sigma = \sqrt{n p q} \quad q = 1 - p$$

Insesgados?

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_1) &= E(X) - E(Y) \\ &= 10\theta \cdot \frac{1}{2} - 20\theta \cdot \frac{1}{5} \\ &= 5\theta - 4\theta \\ &= \theta, \therefore \hat{\theta}_1 \text{ es insesgado} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_2) &= \frac{E(X) + E(Y)}{9} \\ &= \frac{10\theta \cdot \frac{1}{2} + 20\theta \cdot \frac{1}{5}}{9} \\ &= \frac{5\theta + 4\theta}{9} = \frac{9\theta}{9} = \theta, \therefore \hat{\theta}_2 \text{ es insesgado} \end{aligned}$$

Comparando $\hat{\theta}_1$ con $\hat{\theta}_2$

$$\eta = \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_1)}{\text{Var}(\hat{\theta}_2)}$$

Comparando $\hat{\theta}_1$ con $\hat{\theta}_2$

$$\eta = \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_1)}{\text{Var}(\hat{\theta}_2)}$$

$$\hat{\theta}_1 = X - Y,$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{9}$$

$$X \sim B\left(10\theta, \frac{1}{2}\right), \quad Y \sim B\left(20\theta, \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}{\frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}{9}}$$

$$= \frac{\cancel{\sigma^2} + \cancel{\sigma^2}}{1}$$

$$= 82 > 1$$

$$\frac{\cancel{\sigma^2} + \cancel{\sigma^2}}{81}$$

$$81$$

$\therefore \hat{\theta}_2$ es mejor estimador

Ejemplo 2 La variable aleatoria X tiene densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{x}{a^2 e^{x/a}}, \text{ para } x \geq 0$$

Tres observaciones de X son $x_1 = 12; x_2 = 16$ y $x_3 = 15$. Encuentre la estimación de máxima verosimilitud del parámetro a .

$$f(x) = \frac{x}{a^2 e^{\frac{x}{a}}}$$

$$L(a|x) = \frac{12}{a^2 e^{\frac{12}{a}}} \cdot \frac{16}{a^2 e^{\frac{16}{a}}} \cdot \frac{15}{a^2 e^{\frac{15}{a}}}$$

$$= \frac{2880}{a^6 \cdot e^{\frac{43}{a}}} \leftarrow \frac{12}{a} + \frac{16}{a} + \frac{15}{a}$$

$$\begin{aligned} \ln(L(a|x)) &= \ln(2880) - \left(6 \ln(a) + \frac{43}{a}\right) \\ &= \ln(2880) - 6 \ln(a) - \frac{43}{a} \end{aligned}$$

Derivando

$$\ln(L(a|x)) = \ln(2880) - 6 \ln(a) - \frac{43}{a}$$

$$\frac{L'(a|x)}{L(a|x)} = 0 - 6 \cdot \frac{1}{a} - 43 \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right)$$

$$= -\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2}$$

Igualar a 0

$$-\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2} = 0$$

$$\frac{-6a + 43}{a^2} = 0$$

$$-6a + 43 = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{43}{6}}$$

8. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, donde λ es un parámetro desconocido. Es decir

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) Pruebe que $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ es un estimador insesgado de $\frac{1}{\lambda}$. Sugerencia: recuerde que si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ entonces $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \mu \rightarrow \bar{X}$$

En este tipo de estimaciones el problema es que no se puede medir el error de estimación; sin embargo, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, se espera que mejor sea la estimación.

De acuerdo con lo estudiado en el primer capítulo, dada una muestra observada (x_1, x_2, \dots, x_n) de una muestra aleatoria M se tienen las siguientes estimaciones puntuales de los respectivos parámetros:

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	\bar{X}	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
σ^2	S^2	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
σ	S	$s = \sqrt{s^2}$
p	\hat{p}	$\hat{p} = \frac{b}{n}$, b es el número de éxitos en la muestra

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i)$$

$$E(x_i) = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot n$$

$$\sum_{i=1}^n k = nk$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

\therefore Queda demostrado

9. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim G(p)$, donde p es un parámetro desconocido. Es decir

$$f_X(k) = (1-p)^k p, \text{ para } k = 0, 1, \dots$$

(b) Pruebe que $\frac{1}{\hat{p}_1}$ es un estimador insesgado de $\frac{1}{p}$. Sugerencia: recuerde que si $Y \sim G(p)$

$$\text{entonces } E(Y) = \frac{1-p}{p}$$

$$L(p|x) = (1-p)^x p$$

$$\ln(L(p|x)) = x \ln(1-p) + \ln(p)$$

$$\frac{L'(p|x)}{L(p|x)} = x \frac{1}{1-p} \cdot -1 + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{-x}{1-p} + \frac{1}{p} = 0$$

$$= \frac{1}{p} = \frac{x}{1-p}$$

$$\begin{aligned} 1-p &= xp \\ 1 &= xp + p \\ 1 &= p(x+1) \\ \hat{p}_1 &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\hat{p}_1} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1$$

$$\Rightarrow E(x) = E(x) + 1$$

$$\frac{1-p}{p} + 1 = \boxed{\frac{1}{p}}$$

10. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim U[0, a]$, donde a es un parámetro desconocido. Es decir

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dada una muestra aleatoria de $X : (X_1, X_2, \dots, X_n)$, demuestre que $A = 2\bar{X}$ es un estimador insesgado de a .

Se busca probar $E(A) = a$

$$X \sim U(0, a) \quad E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}$$

$$a = \frac{a}{2} \rightarrow \bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}$$

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	\bar{X}	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{2} \cdot n$$

$$= \boxed{\frac{a}{2}}$$

11. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \text{Gamma}(3, \beta)$ es decir

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-x/\beta}}{2\beta^3} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde β es un parámetro desconocido.

(b) Pruebe que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β . Sugerencia: recuerde que si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ entonces $E(X) = \alpha\beta$.

$$X \sim \text{Gamma}(3, \beta)$$

$$E(X) = \alpha\beta = 3\beta$$

$$L(\beta|x) = \frac{x^2 \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{2\beta^3}$$

$$\ln(L(\beta|x)) = \ln\left(\frac{x^2 \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{2\beta^3}\right)$$

$$= 2\ln(x) - \frac{x}{\beta} - \ln(2) - 3\ln(\beta)$$

$$\frac{L'(\beta|x)}{L(\beta|x)} = \frac{x}{\beta^2} - \frac{3}{\beta} = 0$$

$$x - 3\beta = 0$$
$$\beta = \frac{x}{3}$$

$$E(\hat{\beta}) = \frac{1}{3} E(X)$$
$$= \frac{1}{3} 3\beta$$
$$= \beta$$

$$E(X) = \alpha\beta = 3\beta$$

∴ Queda demostrado

16. Considere \hat{P} y \hat{Q} dos estimadores insesgados independientes de un cierto parámetro θ con varianzas $a\sigma^2$ y $b\sigma^2$, con a y b constantes reales positivas, respectivamente. Considere el estimador $\hat{R} = t\hat{P} + (1-t)\hat{Q}$, con $t \in [0, 1]$.

(b) Calcule el valor de t de modo que \hat{R} tenga la menor varianza.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{R}) &= \text{Var}(t\hat{P} + (1-t)\hat{Q}) \\ &= t^2 \text{Var}(\hat{P}) + (1-t)^2 \text{Var}(\hat{Q}) \\ &= t^2 a\sigma^2 + (1-t)^2 b\sigma^2 \\ &= \sigma^2 (at^2 + b(1-t)^2)\end{aligned}$$

$$f(t) = at^2 + b(1-t)^2$$

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2at + 2b(1-t)(-1) \\ &= 2at - 2b(1-t)\end{aligned}$$

$$2at - 2b(1-t) = 0$$

$$2(at - b(1-t)) = 0$$

$$at - b(1-t) = 0$$

$$at - b - bt = 0$$

$$t(a-b) = b$$

$$t = \frac{b}{a-b}$$

Página 2 de este pdf
 Página 6 de este pdf

2. Realizar los ejercicios 1, 3, 9, 15b, 16b, 17, 18b de la sección II.3.3 del libro (pág. 79-83)

Página 5 de este pdf

3.3 Ejercicios

1. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(5\theta + 5, 9), \quad Y \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro θ de una determinada población:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X - Y}{5}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X + Y}{5}$$

¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ ? Justifique.

R/ Es mejor $\hat{\theta}_1$.

¿Insesgados?

$$X \sim N(5\theta + 5, 9)$$

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{E(X) - E(Y)}{5}$$

$$Y \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5\theta + 5 - 20 \cdot \frac{1}{4}}{5} = \frac{5\theta}{5} = \theta \quad \therefore \text{Es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{E(X) + E(Y)}{5}$$

$$= \frac{5\theta + 5 + 20 \cdot \frac{1}{4}}{5} = \frac{5\theta + 10}{5} = \theta + 2$$

$$= \theta + 2$$

\therefore Es sesgado

R/ $\hat{\theta}_1$ es mejor

3. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que

$$X \sim N(5\theta, 9), \quad Y \sim N(6\theta, 9.2)$$

Considere los siguientes estimadores de un parámetro θ de una determinada población:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X}{5}, \quad \hat{\theta}_2 = Y - X, \quad \hat{\theta}_3 = \frac{X+Y}{10}$$

(a) Determine si cada uno de estos estimadores es insesgado o no.

R/ $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son insesgados

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{E(X)}{5} = \frac{5\theta}{5} = \theta \quad \therefore \hat{\theta}_1 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(Y) - E(X) = 6\theta - 5\theta = \theta \quad \therefore \hat{\theta}_2 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_3) = \frac{E(X) + E(Y)}{10} = \frac{5\theta + 6\theta}{10} = \frac{11}{10}\theta$$

$\therefore \hat{\theta}_3$ es sesgado

R/ $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son insesgados

(b) ¿Cuál de estos es el mejor estimador del parámetro θ ? Justifique su respuesta.

R/ Es mejor $\hat{\theta}_1$

$$\eta = \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_1)}{\text{Var}(\hat{\theta}_2)}$$

$$= \frac{\text{Var}\left(\frac{X}{5}\right)}{\text{Var}(Y-X)}$$

$$= \frac{\frac{9}{25}}{9.2+9} = \frac{9}{755} < 1$$

$\therefore \hat{\theta}_1$ tiene menor varianza que $\hat{\theta}_2$, entonces es mejor

9. Considere la variable aleatoria X con media poblacional μ y variancia σ^2 . Dada una muestra aleatoria de esta población de tamaño $n > 1$: $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, considere los siguientes estadísticos de σ^2 :

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad y \quad S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

- (a) Expresé S_2^2 en términos de S_1^2 y de n .

$$R/ \quad S_2^2 = \frac{n-1}{n} S_1^2$$

Tienen en común el numerador

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

En este tipo de estimaciones el problema es que no se puede medir el error de estimación; sin embargo, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, se espera que mejor sea la estimación.

De acuerdo con lo estudiado en el primer capítulo, dada una muestra observada (x_1, x_2, \dots, x_n) de una muestra aleatoria M se tienen las siguientes estimaciones puntuales de los respectivos parámetros:

Parámetro	Estimador	Estimación puntual
μ	\bar{X}	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
σ^2	S^2	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
σ	S	$s = \sqrt{s^2}$
p	\hat{p}	$\hat{p} = \frac{b}{n}$, b es el número de éxitos en la muestra

, despejando

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S_1^2 (n-1)$$

Sustituyendo en S_2^2

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$S_2^2 = \frac{n-1}{n} S_1^2$$