§1.5. Experimento de Bernoulli

Definición 1.7 Un experimento con sólo dos resultados posibles: **Éxito** o **Fracaso**, donde $P(E) = p$ y $P(F) = 1 - p$.

Sea X una variable aleatoria, donde se asigna 0 si se obtuvo un éxito y 1 si se obtuvo un fracaso. Entonces se tiene que:

x	0	1
$f_X(x)$	$1-p$	p

$E(X) = p$, y $\text{Var}(X) = p(1-p)$.

§1.6. Distribución Binomial

Definición 1.8 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite n veces. Sea X el número de éxitos obtenidos. Entonces $R_X = \{0, 1, 2, ..., n\}$, y

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \; E(X) = n \cdot p$$

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = n \cdot p$	$Var(X) = n \cdot p \cdot q$

con $q = 1 - p$

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

n = cantidad de objetos, $\binom{n}{k} = C(n,k)$

q = Prueba de fracaso

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$ ← Para calcular Proba

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

p = prueba de exito

Ejemplo 1.16 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas **con reemplazo**. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

$n = 5 \qquad p = \frac{8}{20} \qquad q = \frac{3}{5}$

$$P(X=3) = C(5,3) \cdot \left(\frac{8}{20}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{5-3}$$

$$= \boxed{0{,}2304}$$

1. Distribución uniforme discreta

- Es una variable aleatoria que puede tomar **valores finitos o contables** con **igual probabilidad**.
- Ejemplo típico: lanzar un dado justo → posibles resultados: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Cada cara tiene probabilidad:

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Propiedades

- **Esperanza:**

$$E[X] = \frac{n+1}{2}.$$

(media aritmética de los valores posibles).

- **Varianza:**

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Ejemplo 1.17 Manuel lanza un dado de seis caras sobre una mesa.

a) Determine la media y la varianza para el total de puntos que Manuel obtiene.

media $= E(x)$

$n = 6 \qquad E(x) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$

$\mathrm{Var}(x) = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}$

b) Determine la probabilidad de que, al lanzar el dado 50 veces, Manuel acumule más de 160 puntos.

$X = 1, 2, \ldots, 50$

c) Manuel quiere lanzar el dado 200 veces. Plantee la suma, y luego use alguna aproximación posible para calcular la probabilidad de obtener más de 30 veces una cara con 6 puntos.

$n = 200 \qquad p = \frac{1}{6} \qquad q = \frac{5}{6}$

$$P(30 < x \leq 200) = \sum_{k=31}^{200} c(200, k) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k}$$

Ejemplo 1.18 Una pieza de los motores producidos en una fábrica de automóviles tiene un porcentaje de fallo del 1.3 %. Para garantizar la calidad del producto, se toma un lote de 60 de esas piezas para inspeccionarlas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 piezas estén defectuosas?

$n = 60 \quad p = 0{,}013 \quad q = 0{,}987$

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} c(60,k) \cdot (0{,}013)^{k} \cdot (0{,}987)^{60-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}9565}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 57 piezas **NO** estén defectuosas?

$n = 60 \quad p = 0{,}013 \quad q = 0{,}987$ pero como dicen NO defectuosas

Cambiamos p y q

$n = 60 \quad p = 0{,}987 \quad q = 0{,}013$

$$P(X \geq 57) = 1 - P(X < 57)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{56} c(60,k) \cdot (0{,}987)^{k} \cdot (0{,}013)^{60-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}9921}$$

3. $P(X > m) = 1 - F_X(m)$, para $m \in \mathbb{R}$ $\quad f_X(k) = P(X \leq m)$

Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta y f_X una ley de probabilidad para X. Se dice que $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función de distribución acumulada** o **función de masa** para X si:

$$F_X(m) = \sum_{\substack{k \in R_X \\ k \leq m}} f_X(k) = P(X \leq m)$$

$P(X \leq m) = F_X(m)$, $P(X < m) = F_X(m-1)$

entonces si piden $\boxed{P(X > m) = 1 - P(X \leq m) = 1 - F_X(m)}$

o si piden $\boxed{P(X \geq m) = 1 - P(X < m) = 1 - F_X(m-1)}$

§1.7. **Distribución Geométrica**

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, \ldots\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Nota 1.1 : Piensa por qué!

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

Distribución geométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de extracciones realizadas antes de (o hasta) obtener el primer éxito. Se dice que X sigue una distribución geométrica y se denota como: Importante

def proba antes o hasta el x intento

$$X \sim G(p)$$

con p parámetro.

- **Características**
  1. Se realizan extracciones con reposición.
  2. p es la probabilidad de éxito.

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$ ← Importante

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

n= Cantidad de objetos
p= prueba de exito
q= prueba de fracaso
k= valores de la suma

- **Función de distribución acumulada**

Su función de distribución acumulada viene dada por:

$$F_X(k) = 1 - q^{k+1}$$

con $q = 1 - p$

- **Función generadora de momentos**

Su función generadora de momentos viene dada por:

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t \cdot q}$$

con $q = 1 - p$.

Medidas de tendencia central

Esperanza	Varianza
$E(X) = \frac{q}{p}$	$Var(X) = \frac{q}{p^2}$

con $q = 1 - p$

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, ...\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Si X = Fallos antes del exito y Y intentos totales

$X = Y - 1 \qquad Y = X + 1$

Ejemplo 1.19 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente bolitas **con reemplazo** hasta que se obtiene la primera bolita roja. Calcula la probabilidad de que se necesiten 5 extracciones.

n= Cantidad de objetos
p= prueba de exito
q= prueba de fracaso
k= valores de la suma

$q \cdot p^{k-1} \qquad p = \frac{8}{20} \qquad q = \frac{3}{5}$

$$P(X=5) = \frac{8}{20} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 \approx \boxed{0,05184}$$

Ejemplo 1.20 En un concurso, nueve participantes deben seguir una rutina de ejercicios durante un mes para participar por premios.

a) En cada rutina se propone cierta cantidad de ejercicios para realizar. Cada ejercicios tiene una probabilidad de 0.4 de que se efectúe satisfactoriamente. Si el participante realiza más de 4 ejercicios en su rutina, entonces logrará terminar la rutina. ¿Cuál es la probabilidad de que un participante logre terminar la rutina?

b) Determine la probabilidad de que por lo menos 5 participantes terminen la rutina.

Falta n, es binomial

Ejemplo 1.21 Una fábrica de bombillos ha detectado que su máquina más nueva fabrica los bombillos con un porcentaje de 95 % de que no esté dañado.

a) Si se compraron 50 bombillos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 3 bombillos salgan dañados?

$n = 50 \quad p = 0{,}95 \quad q = 0{,}05$, pero piden que esten dañados

$n = 50 \quad p = 0{,}05 \quad q = 0{,}95$

$P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3)$

$$1 - \sum_{k=0}^{3} c(50,k) \cdot (0{,}05)^k \cdot (0{,}95)^{50-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}2396}$$

b) Rodolfo compró suficientes bombillos para abastecer el edificio de aulas. Empieza a colocarlos hasta encontrar uno dañado. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el dañado antes de poner el bombillo número 30?

Antes del primer exito (encontrarlo)

$n = 50 \quad p = 0{,}95 \quad q = 0{,}05$, pero piden que esten dañados

$n = 50 \quad p = 0{,}05 \quad q = 0{,}95$

$$P(x < 30) = \sum_{k=1}^{29} 0{,}05 \cdot (0{,}95)^{k-1}$$

$$= \boxed{0{,}779}$$

En una caja hay 15 bolas de colores, de las cuales 6 son de un color distinto de rojo y las demás rojas. El color favorito de un niño es el rojo, por lo que saca una bola de la caja y si no es de color rojo la devuelve y así sucesivamente hasta obtener una roja ¿Cuál es la probabilidad de que el niño obtenga la primera bola roja después de la décima extracción inclusive?

Antes de eso todas falla

R/ 0,0001

$$1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{9}{15} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k$$

$$\approx \boxed{0{,}0001}$$

- **Función de distribución de probabilidad**

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = p \cdot q^k$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1 - p$

Esta sí empieza en 0

Definición 1.9 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener el primer éxito. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{1, 2, \ldots\}$ y

$$P(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{intentos fallidos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxito}} \; ; \; E(X) = \frac{1}{p}$$

Esta sí empieza en 1

Diferencia entre usar $q^k p$ y $q^{k-1} p$

Forma	Qué cuenta	Cuándo se usa	Ejemplo
$q^{k-1}p$	Cuenta **intentos hasta el primer éxito**	Cuando el enunciado dice "el éxito ocurre en el intento número *k*"	"La llamada se conecta en el 7.º intento" → el éxito pasa *en el intento 7* (hubo 6 fallos antes).
$q^k p$	Cuenta **fallos antes del primer éxito**	Cuando el enunciado dice "hay *k* fallos antes del primer éxito"	"Falla 7 veces y a la 8.ª lo logra" → *7 fallos antes del éxito.*

Ejemplo 1.22 Para probar el nuevo sistema en una central telefónica de cierta empresa, se realiza una prueba diaria, la cual consiste en marcar un número específico tantas veces como sea necesario hasta obtener comunicación. El sistema se considera eficiente durante un día específico si al realizar dicha prueba telefónica se logra comunicación con a lo sumo 3 intentos. Además, se sabe que la probabilidad de que se responda una llamada es de 25 %.

Exito ocurre en el 3

a) Calcule la probabilidad de que un día se considere eficiente.

$p = 0,25 \quad q = 0,75$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} 0,25 \cdot (0,75)^{k-1}$$

$$\approx \boxed{0,578125}$$

b) Determine la probabilidad de que al observar el sistema por 15 días hábiles, en al menos 8 de ellos el sistema sea hallado eficiente.

binomial

$n = 15 \quad p = 0,578125 \quad q = 0,421875$

$$P(8 \leq X \leq 15) = \sum_{k=8}^{15} C(15, k) \cdot (0,578125)^k \cdot (0,421875)^{15-k}$$

$$\approx \boxed{0,73}$$

Ejemplo 1.23 Una empresa vende tarjetas de crédito mediante llamadas telefónicas. La probabilidad de que una persona a la que llaman para ofrecerle la tarjeta la acepte es de 0.01. Mario, empleado de esta empresa, recibe un salario que se calcula de la siguiente manera: una comisión de 2 000 colones por cada tarjeta vendida, y un monto fijo diario de 5 000 colones. Si Mario hace 500 llamadas diarias, ¿cuál es el salario esperado diario de Mario?

$E(X)$?

$n = 500 \quad p = 0{,}01$

$E(x) = 0{,}01 \cdot 500$

$= 5$ tarjetas por dia en promedio

Salario $= 2000X + 5000$

$2000 \cdot 5 + 5000$

$\boxed{R/ \ 15000}$

Distribución hipergeométrica

Sea X una variable aleatoria discreta que representa la cantidad de éxitos obtenidos en n extracciones realizadas. Se dice que X sigue una distribución hipergeométrica y se denota como:

$$X \sim H(n, N, b)$$

con n, N y b parámetros.

Con muestras

De 100 personas

se atienden 30

- **Características**

  1. Se realizan n extracciones sin reposición.
  2. Inicialmente la urna contiene b éxitos y r fracasos, donde $b + r = N$ y $n \leq N$

N = Total de elementos de la población

n = Cantidad de elementos de la muestra

b = Cantidad de elementos que cumplen

r = Cantida de elementos que no cumplen

K = valores de la suma

- **Función de distribución de probabilidad**

  Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

con $R_X = \{\max\{0, n-r\}, \min\{n, b\}\}$

- **Medidas de tendencia central**

Esperanza	Varianza
$E(X) = \frac{b \cdot n}{N}$	$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{b}{N}\right) \cdot \frac{b \cdot n}{N}$

Ejemplo 1.24 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas **sin reemplazo**. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

$N = 20 \quad n = 5 \quad b = 8$

$$P(X=3) = \frac{c(8,3) \cdot c(20-8,\, 5-3)}{c(20,5)}$$

$$\approx \boxed{0{,}2384}$$

Ejemplo 1.25 Para esta sede, suponga que el grupo de Probabilidades está formado por 40 estudiantes, y de estos, 22 viven actualmente fuera de la provincia. El profesor tomará una muestra aleatoria de 20 estudiantes.

a) Determine el rango y la distribución de probabilidad para la variable Z, correspondiente a la cantidad de estudiantes, de la muestra, que actualmente viven fuera de la provincia.

$N=40 \quad n=20 \quad b=22 \quad r=18$

con $R_X = \{\text{máx}\{0, n-r\}, \text{mín}\{n, b\}\}$

N= Total de elementos de la poblacion
n = Cantidad de elementos de la muestra
b= Cantidad de elementos que cumplen
r= Cantida de elementos que no cumplen
K= valores de la suma

$R_X = \{max(0, 20-18), min(20, 22)\}$

$R_X = \boxed{\{2, 20\}}$

$$\frac{C(22,z) \cdot C(40-22, 20-z)}{C(40,20)}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en dicha muestra, hayan entre 3 y 10 que actualmente viven fuera de la provincia?

$$P(3 \leq x \leq 10) = \overset{10}{\underset{z=3}{\infty}} \frac{C(22,z) \cdot C(40-22, 20-z)}{C(40,20)}$$

$$\approx \boxed{0,375}$$

Ejemplo 1.26 Luis lanza 10 dados idénticos de seis caras sobre una mesa. Si en más de 5 dados obtiene más de 4 puntos, entonces gana esa partida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar una partida?

$n = 10 \qquad p = \frac{3}{6} \qquad q = \frac{1}{2}$

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$

$$1 - \sum_{k=0}^{5} C(10,k) \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

$$\boxed{\approx 0{,}0377}$$

b) Determine la probabilidad de que en las próximas 8 partidas, Luis gane 3 o más veces.

$n = 8 \qquad p = 0{,}0377 \qquad q = 0{,}9623$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$

$$1 - \sum_{k=0}^{2} C(8,k) \cdot (0{,}0377)^k \cdot (0{,}9623)^{8-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}0188}$$

c) Si Luis decide jugar <u>hasta</u> ganar una partida, ¿cuál es la esperanza para el total de veces que Luis **no gana**?

$E(X) = \frac{q}{p} \qquad p = 0{,}0766 \qquad q = 0{,}9234$

$$\frac{0{,}9234}{0{,}0766} = \boxed{12{,}0548}$$

Ejemplo 1.27 En su casa, la mamá de Sara tiene ocho lapiceros, de los cuales solo tres tienen tinta para escribir. Antes del examen, toma cinco lapiceros al azar, y los coloca en su cartuchera.

Hiper por que toma muestra

a) Determine el rango y la distribución de probabilidad para la variable X, correspondiente a la cantidad de lapiceros, en su cartuchera, que tienen tinta para escribir.

con $k = \{\max\{0, n-r\}, \min\{n, b\}\}$

$N=8 \quad n=5 \quad b=3 \quad r=5$

N= Total de elementos de la población
n = Cantidad de elementos de la muestra
b= Cantidad de elementos que cumplen
r= Cantida de elementos que no cumplen
K= valores de la suma

$R_x = \{\min(0, 5-5), \max(5, 3)\}$

$\boxed{\{0, 3\}}$

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{c(3,k)\cdot c(5,5-k)}{c(8,5)} = 1$$

b) Determine la probabilidad de que a lo sumo cuatro lapiceros en su cartuchera **NO** tengan tinta para escribir.

Ocupo R_x para los que no tienen tinta

$N=8 \quad n=5 \quad b=3 \quad r=5$ pero como es sin tinta

$N=8 \quad n=5 \quad b=5 \quad r=3$ cambio b y r

$R_x = \{2, 5)$ $\quad P(X \leq 4) =$

$$\sum_{k=2}^{4} \frac{c(5,k)\cdot c(3,5-k)}{c(8,5)} \approx \boxed{0{,}9821}$$

c) Si al llegar a su casa, junta todos los lapiceros y los empieza a probar uno por uno hasta encontrar el primero que tenga tinta, ¿cuál es la probabilidad de que ese primero sea el tercero que prueba?

$N=8 \quad n=5 \quad b=3 \quad r=5$

F F E

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \boxed{\frac{5}{28}}$$

Ejemplo 1.28 Una partida de un juego consiste en sacar, sin reposición, 4 bolas de una urna que contiene: 4 bolas negras y 6 blancas. El juego se gana en el momento que se saquen más bolas negras que blancas. Si una persona decide repetir el juego hasta ganar la primera vez, determine la probabilidad de que juegue menos de 4 veces.

Hipergeometrica

geometrica

$N = 10 \quad n = 4 \quad b = 4 \quad r = 6$

mas negras que blancas

N	B
4	0
3	1

O sea 3 o 4 Negras

$$P(3 \le x \le 4) = \sum_{k=3}^{4} \frac{c(4,k) \cdot c(6, 4-k)}{c(10,4)}$$

Prob de ganar (P) $\rightarrow \boxed{\frac{5}{42}}$

persona decide repetir el juego hasta ganar la primera vez, determine la probabilidad de que juegue menos de 4 veces.

intentos hasta el exito, gana en el 4

$p = \frac{5}{42} \quad q = \frac{37}{42} \qquad p \cdot q^{k-1}$

$$P(x < 4) = \sum_{k=1}^{3} \frac{5}{42} \cdot \left(\frac{37}{42}\right)^{k-1}$$

$$\boxed{\approx 0{,}3363}$$

Ejemplo 1.29 Una empresa de servicios en la nube mantiene clústeres de 25 nodos de cómputo (servidores virtuales) que se despliegan para atender clientes empresariales. Cada nodo tiene una probabilidad de 0.0923 de experimentar fallos de conectividad crítica durante pruebas de verificación. Según la política de calidad de la empresa, si un clúster presenta más de 4 nodos con fallos, debe ser retirado del sistema y reemplazado por un nuevo despliegue.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un clúster deba ser reemplazado?

$n = 25 \quad p = 0{,}0923 \quad q = 0{,}9077$

$P(x > 4) = 1 - P(x \leq 4)$

$$1 - \sum_{k=0}^{4} C(25,k) \cdot (0{,}0923)^k \cdot (0{,}9077)^{25-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}0748}$$

b) Para un lote de 150 clústeres, se sabe que el 40% ya fue reemplazado previamente por fallos críticos. Calcule el número esperado de clústeres sin ningún nodo fallido entre los no reemplazados. $E(x)$

De 150, 40% remplazados, 60% no

60% de 150 = 90

Ejemplo 1.30 Doña Laura juega a los tiempos con mucha frecuencia. Este sorteo paga 70 por uno, es decir, si compra el número ganador, gana 70 colones por cada colón invertido. Cada vez que hay sorteo (en un sorteo solo hay un número ganador), doña Laura apuesta 200 colones a cada uno de 15 números distintos entre 100 posibles. <u>Si ella jugó durante 20 sorteos</u> consecutivos, determine la esperanza para el total de ganancias de doña Laura.

Binomial

Sea X la ganancia en un sorteo

$$p = \frac{15}{100} \qquad q = \frac{17}{20}$$

Si acierta uno gana

$$70 \cdot 200 - (14 \cdot 200) = 11200$$

Si no Acierta pierde $15 \cdot 200 = 3000$

$$E(X) = 11200 \cdot \frac{15}{100} - 3000 \cdot \frac{17}{20}$$

$$= -870 \text{ colones}$$

Jugo 20 sorteos, entonces

$$20 \cdot (-870) = -17400$$

$\boxed{\text{Pierde } 17400}$

Ejemplo 1.31 Suponga que para jugar AZUL, se deben pagar 400 colones. Una jugada consiste en sacar aleatoriamente de manera sucesiva, y sin reemplazo, dos bolitas de una urna cerrada. En dicha urna hay siete bolitas blancas y tres bolitas azules. Por cada bolita azul que saca, el dueño del juego le da 300 colones.

Hipergeometrica

a) Determine el criterio y el dominio de la distribución de probabilidad de la variable X correspondiente a la cantidad de bolitas azules en una jugada.

$N=10 \quad n=2 \quad b=3 \quad r=7$

$$\frac{C(3,k)\cdot C(7,2-k)}{C(10,2)}$$

$$R_X = \{\max(0,2-7),\ \min(2,3)\}$$
$$\{0,2\}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una jugada se saque al menos una bolita azul?

7B 1 3A

Se sacan 2

$N=10 \quad n=2 \quad b=3 \quad r=7$

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X<1)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{0} \frac{C(3,0)\cdot C(7,2)}{C(10,2)} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

Ejemplo 1.31 Suponga que para jugar AZUL, se deben pagar 400 colones. Una jugada consiste en sacar aleatoriamente de manera sucesiva, y sin reemplazo, dos bolitas de una urna cerrada. En dicha urna hay siete bolitas blancas y tres bolitas azules. Por cada bolita azul que saca, el dueño del juego le da 300 colones.

$\frac{b\cdot n}{N}$

c) ¿Cuál es la ganancia esperada en una jugada?

$N=10 \quad n=2 \quad b=3 \quad r=7$

$$E(X) = \frac{3\cdot 2}{10} = 0{,}6$$

$$E(\text{Pago}) = 300\cdot 0{,}6 = 180$$

$$E(\text{Ganancia}) = 180-400 = \boxed{-220}$$

Ejemplo 1.32 Un sistema de auditoría automatizada selecciona, sin reposición, 3 dispositivos al azar de una red que contiene 5 dispositivos comprometidos y 7 dispositivos seguros. Una auditoría se considera exitosa si se detectan más dispositivos comprometidos que seguros en la muestra. Si un analista configura el sistema para repetir la auditoría hasta tener éxito por primera vez, determine la probabilidad de que esto ocurra en menos de 5 intentos.

Hipergeometrica

Geometrica

$N = 12 \quad n = 3 \quad b = 5 \quad r = 7$

mas comprometidos que seguros, de 3
b r

b	r
3	0
2	1

osea 2 o 3 b

$$\sum_{k=2}^{3} \frac{C(5,k)\cdot C(7,3-k)}{C(12,3)}$$

$$p = \frac{4}{11} \qquad q = \frac{7}{11}$$

muestra. Si un analista configura el sistema para repetir la auditoría hasta tener éxito por primera vez, determine la probabilidad de que esto ocurra en menos de 5 intentos.

$$P(x < 5) = \sum_{k=1}^{4} \frac{4}{11}\cdot\left(\frac{7}{11}\right)^{k-1}$$

$$\approx \boxed{0,8361}$$

§1.9. **Distribución binomial negativa**

Definición 1.11 Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(E) = p$ se repite hasta obtener r éxitos. Sea X el número total de intentos. Entonces $R_X = \{r, r+1, r+2, ...\}$ y

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-\cancel{1}} (1-p)^{k-r} \cdot \cancel{p^1}$$

$c(k-1, r-1) \cdot p^r \cdot q^{k-r}$

Ejemplo 1.34 En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente bolitas **con reemplazo** hasta obtener 3 bolas rojas. Calcula la probabilidad de que se necesiten 5 extracciones.

$p = \frac{8}{20} \quad q = \frac{3}{5} \quad r = 3$

$P(X=5) = c(5-1, 3-1) \cdot \left(\frac{8}{20}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{5-3}$

$= \boxed{0,13829}$

Ejemplo 1.35 Un experimento aleatorio se va a repetir hasta obtener un éxito y un fracaso consecutivos (sin importar el orden). Se sabe que la probabilidad de éxito es 0.2. Determine el rango y la distribución de probabilidad para la cantidad de repeticiones que se deben hacer hasta terminar dicho experimento.

$p = 0,2 \quad q = 0,8$, pueden ser pq o qp, al menos 2 intento

$R_X = \{2, 3, ...\}$

$\boxed{p^{k-1} \cdot q + q^{k-1} \cdot p}$

§1.10. **Distribución de Poisson**

Definición 1.12

$$R_X = \{0, 1, 2, ...\};\ E(X) = \lambda;\ P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Nota 1.3 ¿Qué es lo importante? Si λ es el valor esperado para un tiempo t, el valor esperado para otro tiempo $\hat{t}$, sigue una regla de 3.

Ejemplo 1.36 Durante la explicación de un tema, la cantidad de veces que un profesor dice la expresión «¿verdad?» sigue una distribución de Poisson, con media de 5 veces por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que diga menos de 15 veces la expresión mencionada en 10 minutos de explicación?

$\lambda = 5$ veces por minuto

$t = 10$ minutos

$\lambda_t = 5 \cdot 10 = 50$

$$P(X < 15) = \sum_{k=0}^{14} \frac{e^{-50} \cdot 50^k}{k!}$$

$$\boxed{0{,}00000000185}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos expresiones «¿verdad?» seguidas, durante la explicación, se den en menos de 10 segundos?

$\lambda = 5$ veces por minuto es $\frac{5}{60} \to \frac{1}{12}$ por segundo

$t = 10$ segundos

$\lambda_t = \frac{1}{12} \cdot 10 = \frac{5}{6}$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}{2!}$$

$$\approx \boxed{0{,}1509}$$

Ejemplo 1.37 En cierta región del país un puente está en mal estado. La cantidad de reclamos formales que recibe la Municipalidad sigue una distribución de Poisson con media 5 reclamos por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que la Defensoría obtenga los próximos 10 reclamos en menos de 90 minutos?

$\lambda = 5$ reclamos por hora

$t = 90$ minutos $= 1{,}5$ horas

$\lambda_t = 5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$

$$P(x \geq 10) = 1 - P(x < 10)$$

$$1 - \sum_{x=0}^{9} \frac{e^{-7{,}5} \cdot 7{,}5^{x}}{x!}$$

Ejemplo 1.38 Una pequeña tienda de donas cerca de la universidad vende, en promedio, 15 donas por hora. Suponga que la cantidad de dondas vendidas por hora sigue una distribución de Poisson.

a) Determine la probabilidad de vender al menos 10 donas por hora.

$\lambda = 15$ por hora

$$P(x \geq 10) = 1 - P(x < 10)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-15} \cdot 15^{k}}{k!}$$

$$\boxed{\approx 0{,}9302}$$

b) Suponga que un día particular, la tienda pasa abierta durante 5 horas seguidas. ¿Cuál es la probabilidad de que vendan a lo sumo 50 donas en ese día?

$\lambda = 15$ por hora

$t = 5$ horas

$\lambda_t = 15 \cdot 5 = 75$

$$P(X \leq 50) = \sum_{k=0}^{50} \frac{e^{-75} \cdot 75^k}{k!}$$

$$\boxed{0{,}0017}$$

Ejemplo 1.39 Las interrupciones no críticas en un sistema de transmisión siguen una distribución de Poisson, con promedio una interrupción por minuto.

a) Determine la probabilidad de que haya 6 interrupciones en un periodo de 5 minutos.

$\lambda = 1$ por minuto

$t = 5$

$\lambda_t = 5 \qquad \frac{e^{-5} \cdot 5^6}{6!} \approx \boxed{0{,}1463}$

b) Determine la probabilidad de que haya que esperar 5 minutos para que se hayan acumulado 6 interrupciones.

Ejemplo 1.40 La sucursal de un banco en un centro comercial del país trabaja los siete días de la semana. El número de transacciones de más de cuatro millones de colones que se realizan, diariamente, en esa sucursal sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 3 transacciones por día.

a) Calcule la probabilidad de que el fin de semana (sábado y domingo) se reciban más de 4 transacciones mayores a cuatro millones de colones.

$\lambda = 3$ por dia

$t = 2$ dias

$\lambda_t = 6$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k!}$$

$$\boxed{\approx 0{,}7149}$$

b) Calcule la probabilidad de que en esta semana se reciban de 13 a 14 transacciones de más de cuatro millones de colones.

$\lambda = 3$ por dia

$t = 7$ dias

$\lambda_t = 21$

$$P(13 \leq X \leq 14) = \sum_{k=13}^{14} \frac{e^{-21} \cdot 21^k}{21!}$$

$$\boxed{\approx 0{,}0471}$$

c) Un día se considera poco rentable si se reciben menos de 2 transacciones superiores a cuatro millones de colones. Determine la probabilidad de que un día sea poco rentable.

$\lambda = 3$ por día

$$P(X<2) = \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-3} \cdot 3^k}{k!} \boxed{\approx 0{,}1992}$$

Ejemplo 1.41 El número de personas que llaman, por hora, a una radio para participar en una rifa para ganar entradas para el próximo concierto de Timbiriche sigue una distribución de Poisson, con media 6 llamadas por hora.

a) Determine la probabilidad de que, en tres horas, se reciban menos de 16 llamadas.

$\lambda = 6$ llamadas por hora

$t = 3$ horas

$\lambda_t = 18$

$$P(X<16) = \sum_{k=0}^{15} \frac{e^{-18} \cdot 18^k}{k!} \boxed{\approx 0{,}2866}$$

b) Una hora se considera muy buena si se reciben más de 10 llamadas. En las próximas ocho horas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 se consideren muy buenas?

Poisson

Binomial

$\lambda = 6$

$$P(X>10) = 1 - P(X \leq 10) =$$

$$1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k!} \boxed{\approx 0{,}0462}$$

$n = 8 \quad p = 0{,}0462 \quad q = 0{,}9538$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) =$$

$$1 - \sum_{k=0}^{2} C(8,k) \cdot (0{,}0462)^k \cdot (0{,}9538)^{8-k}$$

Definición 1.12

$$R_X = \{0, 1, 2, ..., \}; \; E(X) = \lambda; \; P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Nota 1.3 ¿Qué es lo importante? Si λ es el valor esperado para un tiempo t, el valor esperado para otro tiempo $\hat{t}$, sigue una regla de 3.

c) Determine la probabilidad de que el tiempo acumulado de las próximas tres llamadas sea inferior a 20 minutos.

$\lambda = 6$ por minuto, 0,1 por minuto

$t = 20$ minutos

$\lambda_t = 2$

Ejemplo 1.42 Durante un día de jornada laboral, se ha determinado que el número de estudiantes que asisten a horas de consulta con algún profesor de Matemática por hora sigue una distribución de Poisson, con media diez personas por hora. Además, la Escuela de Matemática se considera saturada si hay más de 15 estudiantes por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de haya entre 64 y 96 estudiantes en 8 horas?

$\lambda = 10$ por hora $\quad \lambda_t = 80$

$t = 8$ horas

$$P(64 \leq X \leq 96) = \boxed{\sum_{k=64}^{96} \frac{e^{-80} \cdot 80^k}{k!}}$$

b) Calcule la probabilidad de que la Escuela se considere saturada.

Si hay mas de 15 por hora esta saturada

$\lambda = 10$ por hora

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{15} \frac{e^{-10} \cdot 10^k}{k!} \approx \boxed{0,0487}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana (40 horas) hayan por lo menos 30 horas en las que la Escuela se considera saturada?

$n=40 \quad p=0{,}0487 \quad q=0{,}9513$

$P(30 \leq X \leq 40)=$

$$\sum_{k=30}^{40} C(40,k)\cdot(0{,}0487)^k\cdot(0{,}9513)^{40-k}$$

Ejemplo 1.43 Históricamente en nuestro país, se ha determinado que el número de fallecimientos por ahogamiento en Semana Santa (de lunes a domingo) sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 5 defunciones por día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de tener más de 18 defunciones en tres días de la Semana Santa?

$\lambda=5 \quad t=3 \quad \lambda_t=15$

$P(X>18)=1-P(X\leq 18)$

$$1-\sum_{k=0}^{18}\frac{e^{-15}\cdot 15^k}{k!}\approx \boxed{0{,}1805}$$

b) Un día de Semana Santa se cataloga como lamentable por parte de la CNE si fallecen más de 10 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que en la Semana Santa se declaren menos de dos días como lamentables?

Proba de que sea lamentable $\lambda=5$

$P(X>10)= 1-P(X\leq 10)$

$$1-\sum_{k=0}^{10}\frac{e^{-5}\cdot 5^k}{k!}\approx \boxed{0{,}1369}$$

$n=7 \quad p=0{,}1369 \quad q=0{,}8631$

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)$

$$1-\sum_{k=0}^{1} C(7,k)\cdot(0{,}1369)^k\cdot(0{,}8631)^{7-k}$$

Ejemplo 1.44 El número de personas que llaman, por hora, a una radio para participar en una rifa para ganar entradas para el próximo concierto de Timbiriche sigue una distribución de Poisson, con media 6 llamadas por hora.

a) Una hora se considera muy buena si se reciben más de 10 llamadas. En las próximas ocho horas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 se consideren muy buenas?

$\lambda = 6$

$P(x > 10) = 1 - P(x \leq 10)$

$$1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k!} \approx \boxed{0{,}0426}$$

$n = 8 \quad p = 0{,}0426 \quad q = 0{,}9574$

$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3)$

$$1 - \sum_{k=0}^{2} c(8,k) \cdot (0{,}0426)^k \cdot (0{,}9574)^{8-k}$$

$$\approx \boxed{0{,}0036}$$

b) Determine la probabilidad de que el tiempo acumulado de las próximas tres llamadas sea inferior a 20 minutos.

Ejemplo 1.45 Un servidor recibe solicitudes de lectura siguiendo un proceso de Poisson con una tasa promedio de 5 solicitudes por minuto.

a) Calcule la probabilidad de que el servidor reciba más de 8 solicitudes en un minuto.

$\lambda = 5$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{8} \frac{e^{-5} \cdot 5^{k}}{k!}$$

$$\approx \boxed{0,0681}$$

b) Determine la probabilidad de que lleguen menos de 25 solicitudes en un intervalo de 5 minutos.

$\lambda = 5 \quad t = 5 \quad \lambda_t = 25$

$$P(X < 25) = \sum_{k=0}^{24} \frac{e^{-25} \cdot 25^{k}}{k!} \quad \boxed{0,4734}$$

c) Siendo X el número de solicitudes por minuto y $Y = aX + b$, y sabiendo que $E(Y) = 22$ y $E(Y^2) = 504$, encuentre los valores de a y b.

$X = 5 \rightarrow \lambda = 5 \rightarrow E(X) = 5 \quad Var(X) = 5$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2$

$E(X^2) = 5 + 5^2 = 30$

$Y = aX + b$

$E(Y) = E(aX + b)$

$E(Y) = aE(X) + b$

$22 = a \cdot 5 + b$

$5a + b = 22$

$b = 22 - 5a$

$Y = aX + b$

$Y^2 = (aX + b)^2$

$E(Y^2) = E(a^2X^2 + 2abX + b^2)$

$504 = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2$

$504 = 30a^2 + 10ab + b^2$

$504 = 30a^2 + 10a(22 - 5a) + (22 - 5a)^2$

$504 = 30a^2 + \cancel{220a} - 50a^2 + 484 \cancel{- 220a} + 25a^2$

$504 = 5a^2 + 484$

$5a^2 = 20$

$a^2 = 4$

$a = \pm 2 \qquad b = 22 - 5a$

$a = 2 \wedge b = 12 \quad \text{si} \quad a = 2$

$a = -2 \wedge b = 32 \quad \text{si} \quad a = -2$

Ejemplo 1.46 En un sistema informático, las peticiones a un servidor de almacenamiento llegan siguiendo un proceso de Poisson con una tasa promedio de 3 peticiones por segundo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban más de 5 peticiones en un intervalo de un segundo?

$\lambda = 3$ por segundo

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$$

$$1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-3} \cdot 3^k}{k!} = \boxed{0{,}0839}$$

b) Suponiendo que el tiempo entre peticiones sigue una distribución exponencial, ¿cuál es la probabilidad de que se necesiten más de 2 segundos para recibir 4 peticiones?