Examen Parcial II

13 de octubre 2018

Instrucciones:

- Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas.
- Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen.
- No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
- No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.
- El examen consta de **7 preguntas** con un total de **33 puntos**.
- Dispone de **2 horas y 30 minutos** para realizar el examen.

#1 Exprese el número complejo z en su forma rectangular, si **(5 puntos)**

$$z = \text{Ln}\,(-2i) + \frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^6}{\left(-1+i^{23}\right)^{10}}$$

Solución:

$$\text{Ln}\,(-2i) = \text{Ln}\left(2\cdot \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln 2 - \frac{\pi i}{2}$$

$$\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^6}{\left(-1+i^{23}\right)^{10}} = \frac{\left(2\cdot\text{cis}\,(5\pi/6)\right)^6}{\left(-1-i\right)^{10}} = \frac{2^6\cdot\text{cis}\,(5\pi)}{\left(\sqrt{2}\cdot\text{cis}(-3\pi/4)\right)^{10}} = \frac{2^6\cdot\text{cis}\,(5\pi)}{2^5\cdot\text{cis}(-15\pi/2)} = 2\,\text{cis}(25\pi/2) = -2i$$

$$z = \text{Ln}\,(-2i) + \frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^6}{\left(-1+i^{23}\right)^{10}} = \ln 2 - \frac{\pi i}{2} - 2i = \ln 2 - \left(\frac{\pi}{2}+2\right)i$$

#2 Si se tiene que $w = \dfrac{2-5ai}{1+2i}$, determine todos los valores para el número real a, de tal forma que $\operatorname{Im}(w) \neq 0$. **(4 puntos)**

Solución:

$$\begin{aligned} w &= \frac{2-5ai}{1+2i} \\ &= \frac{2-5ai}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} \\ &= \frac{2-5ai-4i-10a}{1+4} \\ &= \frac{(2-10a)+(-5a-4)i}{5} \end{aligned}$$

Se quiere que $\operatorname{Im}(w) \neq 0$, entonces:

$$\frac{-5a-4}{5} \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq -\frac{4}{5}$$

$\square$

#3 Determine la forma rectangular de todos los números complejos z que cumplen, simultáneamente, las dos condiciones siguientes: **(5 puntos)**

$$\begin{cases} i \cdot \operatorname{Ln}(e^{3\pi i}) + \operatorname{Re}(\overline{z}) &= 0 \\ \operatorname{Arg}(z-i) &= -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Solución:

Suponga que $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = a+ib$, entonces $\overline{z} = a - ib$

$$\begin{aligned} i \cdot \operatorname{Ln}\left(e^{3\pi i}\right) + \operatorname{Re}(\overline{z}) = 0 &\Longrightarrow i \cdot \operatorname{Ln}\left(e^{\pi i}\right) + \operatorname{Re}(z) = 0 \\ &\Longrightarrow \operatorname{Re}(z) = -i \cdot \pi i \\ &\Longrightarrow \operatorname{Re}(z) = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(z-i) = -\pi/3 &\Longrightarrow \operatorname{Arg}(a+ib-i) = -\pi/3 \\ &\Longrightarrow \arctan\left(\frac{b-1}{\pi}\right) = -\pi/3 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{b-1}{\pi} = \tan(-\pi/3)$$
$$\Longrightarrow \quad b-1 = -\sqrt{3}\,\pi$$
$$\Longrightarrow \quad b = -\sqrt{3}\,\pi + 1$$

Prueba:

Si $z = \pi + \left(-\sqrt{3}\,\pi + 1\right) i$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\left[\pi + \left(-\sqrt{3}\,\pi + 1\right) i - i\right] &= \operatorname{Arg}\left(\pi + -\sqrt{3}\,\pi i\right) \\ &= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}\,\pi}{\pi}\right) \\ &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z = \pi + \left(-\sqrt{3}\,\pi + 1\right) i$

$\lrcorner$

#4 Considere las matrices siguientes donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2a \\ -2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & -b & 1 \\ -a & -c & 1 & -a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Seleccione tres matrices distintas A, B y C que le permitan realizar la operación:

$$B^{-1} - \left(A^T + 2C\right) C^T,$$

y obtenga el resultado de dicha operación. **(6 puntos)**

Solución:

Note que B^{-1} es una matriz cuadrada, entonces se toma $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2a \\ -2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix}$. Luego es necesario que la matriz $\left(A^T + 2C\right) C^T$ sea de tamaño 3×3, para eso basta tomar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & -b & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^T + 2C = \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 0 & 2c-b \\ a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T + 2C\right) C^T = \begin{pmatrix} 2a^2+a & c & -1 \\ 0 & 2c^2-bc & b-2c \\ a^2 & -2c & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2a \\ -2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el resultado de dicha operación:

$$B^{-1} - \left(A^T + 2C\right) C^T = \begin{pmatrix} -2a^2-a+1 & -a-c & 1-a \\ -2 & -2c^2+bc+1 & 2c-b \\ -a^2 & 2c+1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lrcorner$

#5 Considere el sistema de ecuaciones $AX = b$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Suponga que después de realizar operaciones elementales sobre filas en la matriz aumentada $(A\,|\,b)$ se obtuvo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & m^2-m \end{array}\right)$$

Determine todos los valores de la constante real m para que, en caso de ser posible, el sistema:

$a)$ tenga infinito número de soluciones

$b)$ tenga solución única

$c)$ no tenga solución

Indique el conjunto solución en cada caso. **(5 puntos)**

Solución:

- Si $m = 0$ entonces se obtiene la matriz reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto implica que el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones, donde: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

- Si $m = 1$ la matriz reducida es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y en consecuencia el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones, donde: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ esto provoca una inconsistencia en la tercera fila de la matriz reducida, lo que implica que el sistema no tiene solución.

$\lrcorner$

#6 Sean A, B, C y X matrices, tales que $(XA - B)^T - C = 2X^T$. Si se sabe que $A - 2I$ es una matriz que posee inversa, utilice propiedades de las matrices y álgebra matricial para obtener la matriz X en términos de las demás matrices. **(4 puntos)**

Solución:

$$\begin{aligned} (XA - B)^T - C = 2X^T &\implies (XA - B) - C^T = 2X \\ &\implies XA - 2X = B + C^T \\ &\implies X(A - 2I) = B + C^T \\ &\implies X = \left(B + C^T\right) \cdot (A - 2I)^{-1} \end{aligned}$$

$\lrcorner$

#7 Se dice que una matriz A es *antisimétrica* si $A^T = -A$. Demuestre que la matriz C, con

$$C = B^T \left(B - B^T\right) B$$

es antisimétrica. **(4 puntos)**

Solución:

$$\begin{aligned} C^T &= \left[B^T \left(B - B^T\right) B\right]^T \\ &= B^T \left[B^T (B - B^T)\right]^T \\ &= B^T \left(B^T - B\right) B \\ &= -\left[B^T \left(B - B^T\right) B\right] \\ &= -C \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C^T = -C$, lo que implica que C es antisimétrica.

$\lrcorner$