

# Conteo

## Principios elementales de conteo

### ■ Principio de la suma

Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en  $k$  casos y  $C_i$  es el conjunto de maneras de realizar el proceso, ubicados en el caso  $i$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ , se tiene que hay  $|C_1| + |C_2| + \dots + |C_k|$  maneras de realizar el proceso.

### ■ Principio del producto

Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en  $k$  etapas y  $E_i$  es el conjunto de maneras de realizar el proceso, ubicados en la etapa  $i$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ , se tiene que hay  $|E_1| \cdot |E_2| \cdot \dots \cdot |E_k|$  maneras de realizar el proceso.

### ■ Anagramas

El anagrama de una palabra es un ordenamiento de las letras de la palabra dada. Las posiciones de un anagrama se enumeran de izquierda a derecha.

Definición 1.9 Principio de inclusión-exclusión.

$$|A \cup B| = |A| + |B| \text{ si } A \cap B = \emptyset$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

$$\left| \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i < j < k < l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \dots$$

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = |U| - \sum_{i=1}^n |\bar{A}_i| + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} |\bar{A}_i \cap \bar{A}_j| - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} |\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \bar{A}_k| + \dots \\ & = |U| - \sum_{i=1}^n |\bar{A}_i| + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} |\bar{A}_i \cap \bar{A}_j| - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} |\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \bar{A}_k| + \dots \end{aligned}$$

### ■ Permutación

Una permutación de  $n$  objetos distintos es un ordenamiento de ellos. Al número de permutaciones de  $n$  objetos distintos se le denota por  $P(n)$  y su fórmula viene dada por:

$$P(n) = n!$$

El orden importa, entonces  $AB \neq BA$

### ■ Arreglo

Un arreglo de  $r$  objetos tomados de  $n$  objetos distintos es una escogencia ordenada de  $r$  objetos tomados de los  $n$  objetos. El número de arreglos de  $r$  objetos tomados de  $n$  objetos distintos, se denota por  $P(n, r)$  y su fórmula viene dada por:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

El orden importa, entonces  $AB \neq BA$  y  
de hecho  $P(n) = P(n, n)$   
 $P(n, n) = n!$

■ Combinación

Una combinación tomada de  $r$  objetos tomados de  $n$  distintos es una selección de  $r$  objetos tomados de los  $n$ , es decir, si  $A$  es el conjunto de los  $n$  objetos, entonces una combinación de  $r$  objetos tomados de los  $n$  es un subconjunto de  $A$  de cardinalidad  $r$ . El número de combinaciones de  $r$  objetos tomados de  $n$  distintos, se denota por  $C(n, r)$  y su fórmula viene dada por:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

El orden no importa entonces  $AB = BA$

$$C(n, r)$$

↑ R

por eso  $C(2, 1) \cap C(2, 2) = \emptyset$

(cantidad total) (cantidad total) (Siempre el mayor)  
de objetos de espacios va primero

$C(4, 2) =$  De 4 objetos, elijo 2

■ Conteo de permutaciones con objetos repetidos

En este caso, se tiene que

objetos totales

$$P(n; k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

← repetidos

AIAJUELA  $\rightarrow$  8 letras, 3A, 2L, 2J, 1U, 1E

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 3360$$

■ Conteo de combinaciones con repetición

En este caso, se tiene que el número de soluciones naturales de la ecuación  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$  es

$$C(n+r-1, r)$$

### Conteo de distribuciones

- Distribuciones de objetos distinguibles (Diferentes)

Si se tienen  $r$  objetos distinguibles y  $n$  cajas distintas, el número de maneras de distribuir  $r$  objetos distinguibles en  $n$  cajas distintas viene dado por:

- Si  $r < n$  entonces el número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, donde a lo sumo debe estar un objeto en cada caja es  $P(n, r)$

- El número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, si no hay restricciones es  $n^r$

- Distribuciones de objetos indistinguibles (Iguales)

Si se tiene  $r$  objetos indistinguibles en  $n$  cajas distintas, el número de maneras de distribuir  $r$  objetos indistinguibles en  $n$  cajas distintas viene dado por:

- Si  $r < n$  entonces el número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, donde a lo sumo debe estar un objeto en cada caja es  $C(n, r)$

- El número de maneras de distribuir los objetos en las cajas, si no hay restricciones es  $C(n + r - 1, r)$

Objetos ( $r$ )	Cajas ( $n$ )	Restricción	Resultado
Iguales	Diferentes	-	$C(n+r-1, r)$
Iguales	Diferentes	Al menos un objeto	$C(n, r)$
Diferentes	Diferentes	Al menos un objeto	$P(n, r)$
Diferentes	Diferentes	-	$n^r$

← IMPORTANTE

Al menos  $\rightarrow x \geq k$

A lo sumo  $\rightarrow x \leq k$   $\wedge$  constante  $\in \mathbb{R}$

Exactamente  $\rightarrow x = k$

# Probabilidades

## Reglas de Bayes

### ■ Regla de Bayes #1

Sean  $A$  y  $B$  eventos sobre un espacio muestral  $\Omega$ , con  $B$  no vacío, entonces, se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

### ■ Regla de Bayes #2

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos que forman una partición del espacio muestral  $\Omega$ . Sean  $A$  y  $B$  dos eventos arbitrarios, con  $B$  no vacío, entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

## Ley de Laplace

Sea  $\Omega$  un conjunto no vacío y finito, entonces la función  $P : P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  dada por

$$P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$$

es una medida de probabilidad en  $\Omega$ . Una forma de interpretarla viene dada por

$$P(X) = \frac{\# \text{ de casos favorables}}{\# \text{ de casos totales}}$$

## Reglas del producto

### ■ Regla del producto #1

Se dice que los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son mutuamente independientes si y solo si

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

### ■ Regla del producto #2

Se dice que los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son mutuamente independientes si y solo si

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cdot A_2)) \cdot \dots \cdot P(A_n|(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}))$$

## Probabilidad total

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos que forman una partición del espacio muestral  $\Omega$ . Sea  $B$  un evento cualquiera, entonces

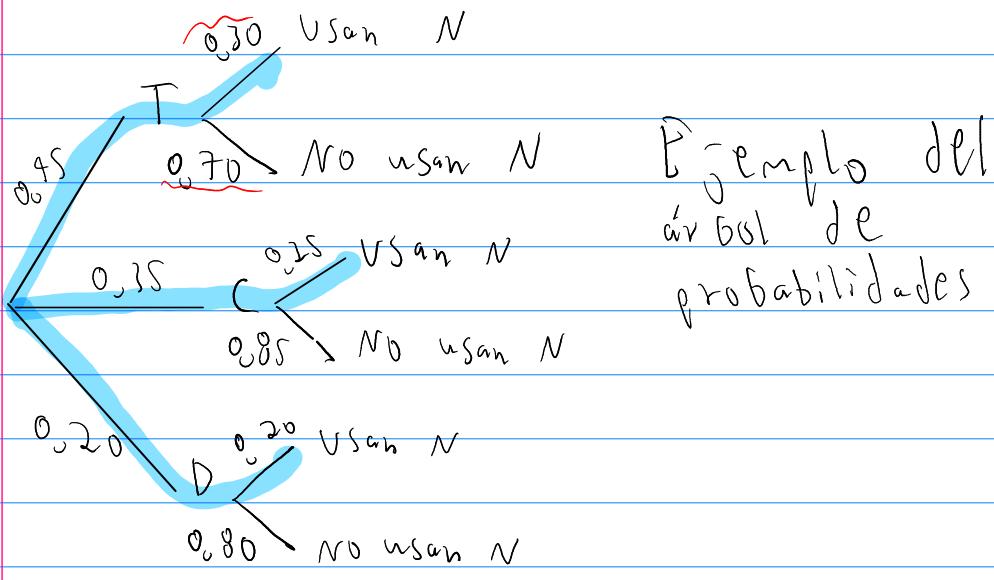
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Esta se puede reducir a:

$$\begin{aligned} & P(A_i) \cdot P(B|A_i) \\ &= P(A_i) \cdot P(B) \cdot \frac{P(B|A_i)}{P(A_i)} = P(A_i) \cdot P(B) \end{aligned}$$

En la carrera de computación de la Universidad Bienestar Seguro, el 45 % de los estudiantes prefieren películas de terror, el 35 % prefiere las películas de comedia y el resto prefiere las películas de drama. Además, el 15 % de los estudiantes prefieren las películas de comedia y utilizan Netpeli (cierta plataforma de películas en línea). Por otro lado, el 30 % de los que prefieren películas de terror utilizan Netpeli, al igual que el 20 % de los que prefieren las películas de drama. Se elige al azar un estudiante de la carrera de computación.

a) Halle la probabilidad de que el estudiante elegido, utilice Netpeli.



$$P(N) = P(T) \cdot P(N|T) + P(C) \cdot P(N|C) + P(D) \cdot P(N|D)$$

$$0,45 \cdot 0,30 + 0,35 \cdot 0,15 + 0,20 \cdot 0,20$$

$$0,2275$$

## Espacio muestral

Un espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio y se denota como  $\Omega$

## Eventualidad

Es un resultado particular de un fenómeno aleatorio. Dicho de otra forma, es un elemento del espacio muestral.

## Evento

Es un conjunto de resultados de un fenómeno aleatorio, es decir, un subconjunto de elementos de un espacio muestral.

## Ocurrencia de un evento

Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades.

### Propiedades de sucesos y eventos

Sean  $A$  y  $B$  eventos arbitrarios.

1. Suceso imposible: es un suceso que no contiene sucesos elementales. Se representa como

$$P(\emptyset) = 0$$

$\Omega \vdash P$   
es probabilidad  
No permutaciones

2. Suceso contrario: es un suceso opuesto al dado inicialmente. Se representa como

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

3. Unión de sucesos: se da cuando ocurre un evento u ocurre otro evento. Se representa como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

} similar al principio  
de inclusión-exclusión

4. Diferencia de sucesos: se da cuando ocurre un evento y no ocurre otro evento. Se representa como

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



5. Evento excluyente: son eventos que no comparten nada en común. Se representa como

$$P(A \cap B) = \emptyset$$

6. Evento independiente: la probabilidad de ocurrencia de un evento, no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento. Se representa como

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

## Probabilidad condicionada

Sea  $P$  una función de probabilidad sobre  $\Omega$ . Sea  $B$  un evento de probabilidad no nula. Se define la probabilidad condicional sobre  $B$  por

$$P(X|B) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)}$$

y se lee como probabilidad de  $X$  dado  $B$

$| = \text{"dado que"}$

Ninguna probabilidad es > 1 por lo que se representan como o algo

$$0,2 \rightarrow 0,20 \rightarrow 20\% \quad \text{Tener cuidado}$$
$$0,25 \rightarrow 25\% \quad \text{con estos casos}$$
$$0,02 \rightarrow 2\% \quad \text{A}$$

$P(C|Q)$  & La condición va después del dado que "l" =

"Probabilidad de orden calculo dado que perdió Química"

E) "l" solo se usa cuando hay implicir o explicitamente un "sabiendo que" o un "si" o de if

# TIPS:

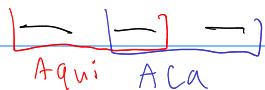
- 1) Solo cuando no se pueda repetir, se debe hacer posicionamiento y luego la colocación
- 2) La fórmula  $n+1-k$ , donde  $n$  es la cantidad de espacios disponibles y  $k$  el tamaño del bloque, se usa para elegir cuantas posiciones puede ocupar un bloque  $k$ , en  $n$  espacios, que ocupa  $k$  espacios consecutivos

Un Ejemplo de 1) y 2)

Tengo los números  $\{1, 2, 3\}$  y quiero ver de cuantas maneras se pueden acomodar si el 1 y el 3 deben ir juntos, sin repetir números

Etapa 1; Elegir posiciones del bloque  $\boxed{1 \ 3}$   
 $n-k+1$ , hay 3 posiciones ( $n$ ) y el bloque ( $k$ ) mide 2

$$3-2+1 = \boxed{2} \text{ posiciones disponibles}$$



Etapa 2; colocar bloque  $\rightarrow$   
Si el orden importa  $\rightarrow P(2, 2) = 2$  ( $13 \neq 31$ )  
Si el orden NO importa  $C(2, 2) = 1$  ( $13 = 31$ )

Etapa 3; Elegir posición de resto de números  
 $P(1, 1) \vee C(1, 1) = 1$

Etapa 4; colocar resto de números  
 $P(1, 1) \vee C(1, 1) = 1$

Total; con orden:  $\boxed{2 \cdot 2 \cdot 1 = 4}$  Sin orden  $\boxed{2 \cdot 1 \cdot 1 = 2}$