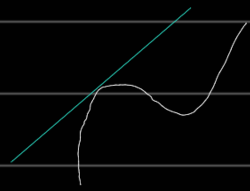
Analisis de funciones

$$f' \begin{cases} + \to f \nearrow \text{ (creciente)} \\ - \to f \searrow \text{ (Decreciente)} \end{cases} \quad \text{monotonia (crece, decrece, constante)}$$

Sentido de variación



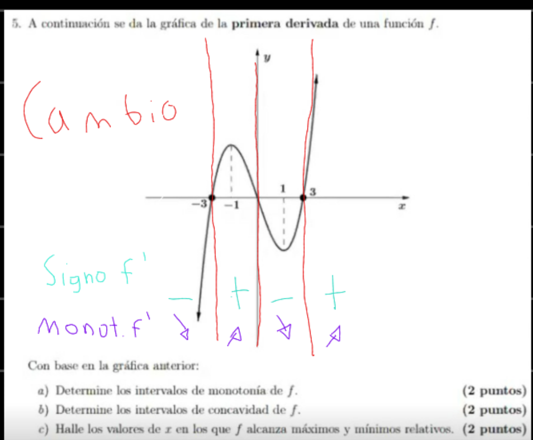
$$f'' \begin{cases} + \to f : \cup \text{ (concava hacia arriba)} \\ - \to f : \cap \text{ (concava hacia abajo)} \end{cases}$$

En resumen, la $f'(x)$ para analizar crecimiento
la $f''(x)$ para analizar concavidad

$f'(x)$ es la primera derivada de $f(x)$
$f''(x)$ es la primera derivada de $f'(x)$

Así, la primera derivada le da info de crecimiento a la segunda

$$f'' \begin{cases} + \to f' : \nearrow \to f : \cup \\ - \to f' : \searrow \to f : \cap \end{cases}$$


5. A continuación se da la gráfica de la **primera derivada** de una función f.

Con base en la gráfica anterior:

a) Determine los intervalos de monotonía de f. **(2 puntos)**
b) Determine los intervalos de concavidad de f. **(2 puntos)**
c) Halle los valores de x en los que f alcanza máximos y mínimos relativos. **(2 puntos)**

$$f'' \begin{cases} + \to f' : \nearrow \to f : \cup \\ - \to f' : \searrow \to f : \cap \end{cases}$$

a) Crecimiento y decrecimiento

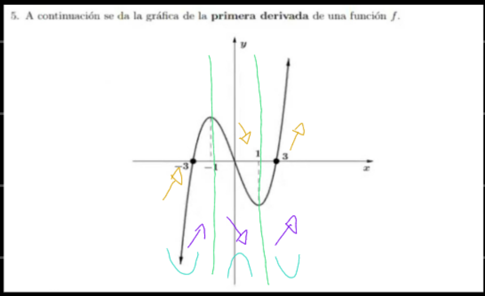
$f \nearrow : \,]-3,0[\,,\ ]3,+\infty[$

$f \searrow : \,]-\infty,-3[\,,\ ]0,3[$

$$f' \begin{cases} + \to f \nearrow \text{ (creciente)} \\ - \to f \searrow \end{cases} \quad \text{monotonia (crece, decrece, constante)}$$

Decreciente

b) Ocupamos info de f''



Concava hacia arriba

$f'' \begin{cases} + \to f: \cup \\ - \to f: \cap \end{cases}$

Concava hacia abajo

$f: \cup: \,]-\infty, -1[, \,]1, +\infty[$

$f: \cap: \,]-1, 1[$

Si $(x, f(x)) = \max \vee \min$

Donde se alcanza max v min (Donde $f' = 0$)

Valor max v min

c) $f' = 0$ en: $-3, 0, 3$

Se usa la concavidad

$f: \cup: \,]-\infty, -1[, \,]1, +\infty[$ $\quad$ $f: \cap: \,]-1, 1[$

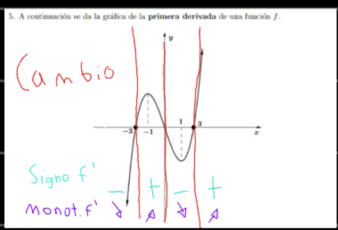
$\boxed{-3}$ esta aqui y es $\cup$ entonces es minimo relativo

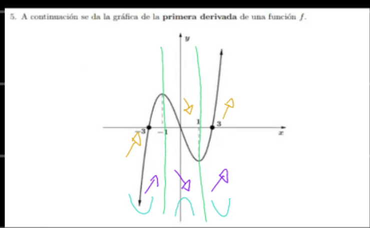
$\boxed{3}$ esta aqui y es $\cup$ entonces es minimo relativo

$\boxed{3}$ esta aqui y es $\cap$ entonces es maximo relativo

R| Minimos relativos -3 y 3

Maximos relativos 0





Son los números del plano nada mas

		$-\infty$ a -3	-3 a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
f'	Signo monot.	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	Signo concav.	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
f	Concav	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$
	Mon	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f: \cup: \,]-\infty, -1[, \,]1, +\infty[\; +$

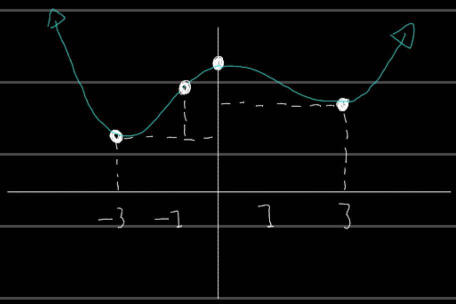
$f: \cap: \,]-1, 1[\; -$

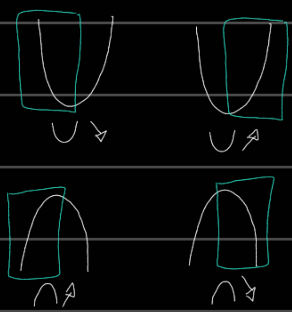
$f \nearrow: \,]-3, 0[, \,]3, +\infty[\; +$

$f \searrow: \,]-\infty, -3[, \,]0, 3[\; -$

Se tiene que en $x = -3 \wedge x = 3$ se alcanzan minimos y que en $x = 0$ se alcanzan maximos

Dibujando la grafica con la tabla





2) Analize $f(x)=\frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

1) Dominio e interseccion

a) Dominio $\frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

$D = \mathbb{R} - \{-3\} \to \begin{matrix} x+3 \neq 0 \\ x \neq -3 \end{matrix}$

b) Intersecciones:

$I_x: \frac{x^2-3x}{(x+3)^2} = 0 \qquad I_y: \frac{0^2-3(0)}{(0+3)^2}$

$x^2-3x=0 \qquad\qquad = 0$

$x(x-3)=0$

$x=0 \qquad x-3=0$

$x=3$

$\boxed{I_x=(0,0),(3,0)} \qquad \boxed{I_y=(0,0)}$

2) Sentido de variación (Primera derivada)

$\to$ Crecimiento, puntos criticos $\left(\begin{matrix}\text{candidatos a} \\ \text{max y min}\end{matrix}, \text{donde } f'=0\right)$

$f(x)=\frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

$f'=\frac{(2x-3)(x+3)^2-(x^2-3x)2(x+3)\cdot 1}{(x+3)^4}$

$(x+3)$

$$f' = \frac{\cancel{(x+3)}(2x-3)(x+3) - 2(x^2-3x))}{\cancel{(x+3)^4}}$$

$$f' = \frac{\cancel{2x^2} + 6x - 3x - 9 \cancel{- 2x^2} + 6x}{(x+3)^3}$$

$$f' = \frac{9x - 9}{(x+3)^3}$$

$$f' = \frac{9(x-1)}{(x+3)^3}$$

Ahora para buscar puntos criticos

$f' = 0$

$f' \nexists$

$x = -3 \quad (Df')$

$$\frac{9(x-1)}{(x+3)^3} = 0$$

$$9(x-1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

Candidatos solo de $f'(x) = 0$

$x = 1$

	$-\infty$	-3 $\nexists$	1	$+\infty$ } Eje x
$(x+3)^3$	$-$	0 $\;+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	0 $\;+$	
9	$+$	$+$	$+$	
f'	$+$	$-$	$+$	
f	↗	↘	↗	} Eje y
			$\frac{-1}{8}$	

} multiplicacion

Evaluamos candidatos (1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{(x+3)^2} = \frac{1-3}{16} = \frac{-1}{8}$$

$f(1) = \frac{-1}{}$, max y min?

$8 \quad ($

$\frac{-1}{8} \in \left]-3,1\right[\quad \wedge \quad \left]-3,1\right[\searrow$

$\therefore \left(1, \frac{-1}{8}\right)$ es un punto minimo

y se alcanza el min en $x=1$

3) Concavidad (Segunda derivada)

$\hookrightarrow \cup, \cap$, puntos de inflexión

(cambios de concavidad)

$$f' = \frac{9(x-1)}{(x+3)^3}$$

$$f' = \frac{9(x+3)^3 - 9(x-1)3(x+3)^2}{(x+3)^6}$$

$$= \frac{9\cancel{(x+3)^2}\left[(x+3) - 3(x-1)\right]}{\cancel{(x+3)}^6}$$

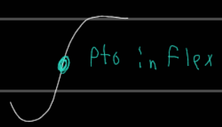
$$= \frac{9\left[x+3-3x+3\right]}{(x+3)^4}$$

$$= \frac{9(-2x+6)}{(x+3)^4}$$

$$\frac{9(2(-x+3))}{(x+3)^4}$$

$$\boxed{f'' = \frac{18(3-x)}{(x+3)^4}}$$

Punto de inflexión



Se obtener de $f''=0 \lor f'' \nexists$

$f''(x)=0$

$$\frac{18(3-x)}{(x+3)^4} = 0$$

$$f'' = \frac{18(3-x)}{(x+3)^4}$$

$f \nexists \quad \boxed{x=-3}$

$18(3-x)=0$

$3-x=0$

$-x=-3$

$\boxed{x=3}$

x	$-\infty$ … -3	-3 … 3	3 … $+\infty$
$(x+3)^4$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
18	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$

$f(3)$

$$f(x)=\frac{3^2-3(3)}{(3+3)^2}=0 \in \left]-3,3\right[$$

$\therefore (3,0)$ es un punto de inflexion

Ejercicio:

1) Analizar
   1) Dom e intersec
   2) Sentido de variacion
   3) Concavidad

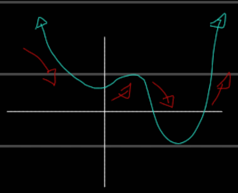
$f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ $\quad f'(x)=\frac{(x-1)}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ $\quad f''(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$

4) Asintotas: (AH, AV, oblicuas)

Ejemplos de clase

1) $f(x)=x^4-5x^3+4x^2+2x+10$

$f'=4x^3-15x^2+8x+2$

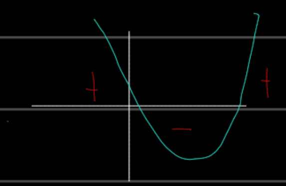


ptos criticos

$f'=0 \lor f' \nexists$

	R_1	R_2	R_3	R_4
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f'' = 12x^2 - 30x + 8$



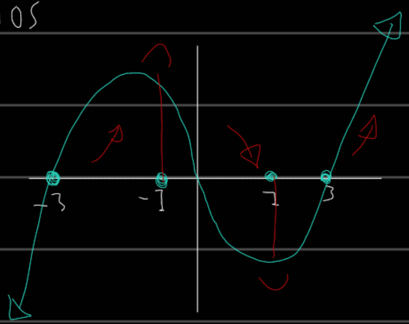
ptos inflexión

$f'' = 0 \cup f'' \nexists$

	R_1	R_2	R_3
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Ejercicios

1)



a) Sentido de variación f'

	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	−	+	−	+	
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	

Solo 0's en la tabla

f: ↗: $]-3, 0[\ ,\ ]3, +\infty[$

f: ↘: $]-\infty, -3[\ ,\ ]0, 3[$

b) Concavidad

No info de $f'' \to$ info de f'

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	↗	↘	↗	
$f''(x)$	+	−	+	
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

0's de puntos de cambio (pts inflex)

$f \cup : \;]-\infty, -1[\; , \;]1, +\infty[$

$f \cap : \;]-1, 1[$

c) pts criticos $x = \{-3, 0, 3\}$

$-3 \in \;]-\infty, -1[\; \to$ min

$3 \in \;]1, +\infty[\; \to$ min

$0 \in \;]-1, 1[\; \to$ max

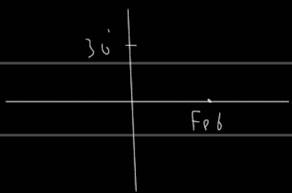
2) Determinar max y min absoluto en la region dada

Interpretacion

(x, y) : punto max o min

→ donde se alcanza el max o min

→ el valor max o min



Nota: Para estos ejercicios poner a competir pts criticos de f y extremos del intervalo

a) $x\ln(x) - 2x$ en $[1, 4]$

$f' = \ln(x) + 1 - 2$

$\ln(x) - 1$

ptos criticos

$\ln(x) - 1 = 0$

$\ln(x) = 1$

$e^{\ln(x)} = e^{1}$

$x = e$

Evaluar f

$f(e) = e\ln(e) - 2(e) = -e$

$f(1) = 1\ln(1) - 2(1) = -2$

$f(4) = 4\ln(4) - 2(4) = -2{,}4548$

Extremos del intervalo

max abs $y = -2$

min abs $y = -e$

b) $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 72x^2$ en $[-3, 2]$

$-12x^3 + 12x^2 + 144x$

ptos criticos

$-12x^3 + 12x^2 + 144x$

$x(-12x^2 + 12x + 144) = 0$

$x($ $-3x$ $\quad 12 = 48x$

$\quad 4x$ $\quad 12 = -36x$

$12x$

$x(-3x+12)(4x+12) = 0$

$x = 0$ $\qquad -3x + 12 = 0$ $\qquad 4x + 12 = 0$

$\qquad -3x = -12$ $\qquad 4x = -12$

$\qquad x = 4$ $\qquad x = -3$

$\notin [-3, 2]$

Ptos criticos $0, \cancel{4}, -3$

$g(-3) = 297$

$g(2) = 277$

Extremos

$g(0) = 0$

min abs $= 0$

Max abs = 297

4.6.2 Determine los valores de a y b de modo que la función $f(x) = 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$ tenga un extremo relativo en el punto (1, 2).

Pto crítico

Solución

$f(x) = 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$

$3a2x \cdot e^{bx^2+1} + 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1} \cdot 2bx + 0$

$6ax \cdot e^{bx^2+1} + 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1} \cdot 2bx$

$6ax^2 \cdot e^{bx^2+1} + 6ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$

Evaluando $f'(1,2) = 0$

$f(1) = 0$

$6a(1)^2 \cdot e^{b(1)^2+1} + 6ab(1)^3 \cdot e^{b(1)^2+1} = 0$

$6a \cdot e^{b+1} + 6ab \cdot e^{b+1} = 0$

$(6a)(e^{b+1})(1+b) = 0$

$a \cdot b = 0$
$a = 0 \vee b = 0$

$e^{b+1} = 0$
Imposible
$\ln(e)^{b+1} = \ln(0)$
Error

$6a = 0$
$a = 0$

$1+b = 0$
$b = -1$

$f(x) = 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$

Si $a = 0$; $f(x) = 0$ X

Si $b = -1$ $f(x) = 3ax^2 \cdot e^{-x^2+1}$

Como $(1,2) \in f$

Remplazando (1, 2) $2 = 3a \cdot 1^2 \cdot e^{-1^2+1}$

$2 = 3a$

$a = \frac{2}{3}$

La función que satisface

$f(x) = 3\left(\frac{2}{3}\right)x^2 \cdot e^{-1x^2+1}$

$2x^2 \cdot e^{-1x^2+1}$

(arriba está)

c) Analize $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

1) Dom e intersec

a) Dom

$Df = \mathbb{R} - \{-3\} \to AV$

b) Ix $\dfrac{x^2-3x}{(x+3)^2} = 0$ Iy: $\dfrac{0^2-3(0)}{(0+3)^2}$

$x(x-3) = 0$ $= 0$

$x=0 \wedge x=3$

$Ix = (0,0), (3,0)$ $Iy = (0,0)$

2) Sentido de variacion $f'(x)$

$f' = \dfrac{9(x-1)}{(x+3)^3}$

$f' = 0$ $f \nexists$

$\dfrac{9(x-1)}{(x+3)^3} = 0$ $x = -3$

$x = 1 \to$ Candidato (solo el de $f'=0$)

tabla de ptos criticos

$\nexists$

	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$(x+3)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
9		$+$		$+$		$+$	
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Para armar tabla

se ocupa factorizacion al max

$f \nearrow\ ]-\infty,-3[\ ,\ ]1,+\infty[$

$f \searrow\ ]-3,1[$

Evaluamos candidatos (1) en f

$$f(x) = \frac{x^2-3x}{(x+3)^2} = \frac{1-3}{16} = \frac{-1}{8}$$

$f(1) = \frac{-1}{8}$ ¿max o min?

$\frac{-1}{8} \in \,]-3,1[\quad \wedge \quad]-3,1[\searrow$

$\therefore$ $(1, \frac{-1}{8})$ es un punto minimo

se alcanza el min en $x=1$

3) Concavidad f''

$$f'' = \frac{18(3-x)}{(x+3)^4} \qquad f'' \nexists \; x=-3$$

$$\frac{18(3-x)}{(x+3)^4} = 0$$

$x = 3$

	$-\infty$ … -3	-3 … 3	3 … $+\infty$
$(x+3)^4$	+	+	+
$3-x$	+	+	−
18	+	+	+
f''	+	+	−
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$

$f(3)$

$$f(x) = \frac{3^2-3(3)}{(3+3)^2} = 0 \in \,]-3,3[$$

$\therefore$ $(3,0)$ es un punto de inflexion

cambio de concavidad

4)

7) Asintotas

AV: Si $x=a$ es restriccion de dom de f

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ v $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

$\boxed{x=a \text{ es av}}$

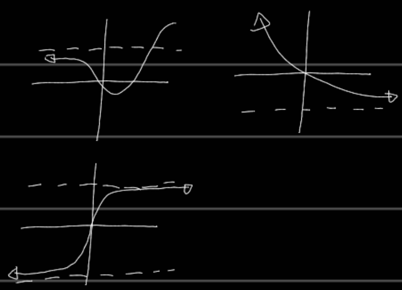
$D_f = \mathbb{R} - \{2,7\}$, $AV = 2$, $AV = 7$

AH: Se obtienen calculando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ y se obtiene una constante

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = K_1 \wedge \lim_{x\to-\infty} f(x) = K_2$

$\mid K_1 \wedge K_2$ son AH's, $\begin{matrix} y = K_1 \\ y = K_2 \end{matrix}$ son AH's

Posibilidades, las ah son independientes, ∴ puede: ∄, ∃ Ah V 2 Ah



AO: Asin oblicua
Compiten con las AH por extremos en $\pm\infty$

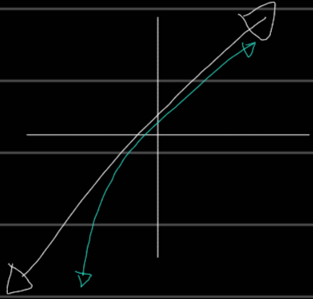
Requisitos

1) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (Descarta AH's)

2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \to$ Pendiente de AO

3) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = b \to$ intercepto de AO

∴ $y = mx + b = AO$



Resultados, puede

∄, 1 AO, 2 AO

Calculmos AV, $Df = \mathbb{R} - \{\underset{AV}{-3}\}$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2-3x}{(x+3)^4} = \frac{18}{0^+} = \frac{18}{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{x^2-3x}{(x+3)^4} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

tome $x=-4$ $\qquad$ tome $x=-2$

$(-4+3)^2 > 0$ $\qquad$ $(-2+3)^2 > 0$

$$\boxed{x = -3 \text{ es AV}}$$

Con que una de $\pm \exists$ pero se deben hacer ambas

Calculamos AH

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3x}{(x+3)^2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+6x+9} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2+6x+9}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Ambas dan 1 $K_1 = K_2$

$$\boxed{y = 1 \text{ es AH}}$$

AO ∄, ningun lim dio $\pm\infty$

Cuadro de variación

1) $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$I_x = (0,0), (3,0)$ $\quad I_y = (0,0)$

2) Sentido de variación

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$(x+3)^3$	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
9	$+$	$+$	$+$	
f'	$+$	$-$	$+$	
f	↗	↘	↗	

$\frac{-1}{8}$

3) Concavidad

	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$(x+3)^4$	$+$	$+$	$+$	
$3-x$	$+$	$+$	$-$	
18	$+$	$+$	$+$	
f''	$+$	$+$	$-$	
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$	

$\therefore$ $(3,0)$ es un punto de inflexion

(cambio de concavidad

4) $x = -3$ es AV

$y = 1$ es AH

$x = -3, 0, 1, 3$ $\quad$ Valores (repetidos no)

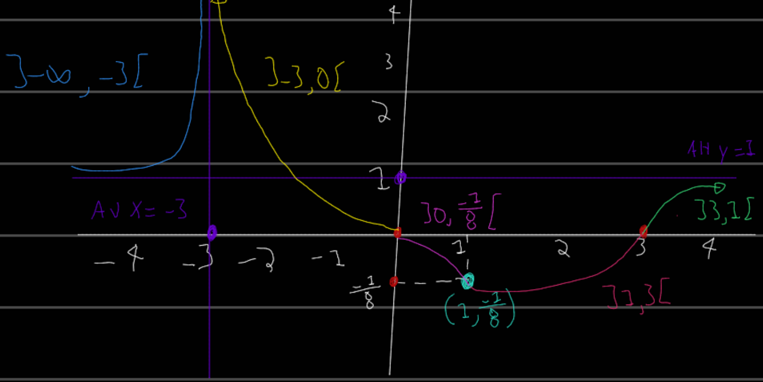
Cuadro de variacion

	$-\infty$	-3	0	1	3 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cap$
	↗	↘	↘	↗	↗
	$+\infty$	$+\infty$			

1 (y=1) AH $\quad (0,0)$ $\quad (1,\frac{-1}{8})$ $\quad (3,0)$ $\quad 1$ (y=1) AH

$\lim_{x \to -3^- \wedge 3^+} +\infty$

Grafica



Ejercicio (tiene AO)

Analizar $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$