1. Con motivo de la eliminatoria hacia el mundial de fútbol *Qatar* 2022, el comercio ha iniciado la venta de camisetas de nuestra selección nacional. Se ha considerado que las ventas mensuales (y), en miles de unidades, dependen linealmente de las horas por semana (x) que se dedica a publicidad relativa a la selección. Los siguientes datos se refieren a las horas semanales dedicadas a publicidad y las ventas de camisetas en ocho locales de la capital. $n=8$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 28.7625 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i = 12.45 \quad \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 926.31 \quad \sum_{i=1}^{8} y_i = 71.7 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 160.145$$

a) Determine la recta de regresión lineal.

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n} = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{8 \cdot 160{,}145 - 12{,}45 \cdot 71{,}7}{8 \cdot 28{,}7625 - 12{,}45^2} = 5{,}173208163$$

$$a = \frac{71{,}7 - 5{,}173208163 \cdot 12{,}45}{8} = 0{,}9176947963$$

$$\boxed{y = 0{,}9176947963 + 5{,}173208163x}$$

b) Según la recta de regresión lineal, ¿cuántas camisetas, en promedio, se esperaría vender si no se invierte en publicidad referente a la selección nacional de fútbol? **(1 punto)**

$$\boxed{0{,}9176947963}$$

c) ¿Qué porcentaje de la variación en las ventas mensuales de camisetas depende de factores diferentes a la cantidad de horas semanales de publicidad sobre la selección nacional de fútbol? **(3 puntos)**

$1 - r^2$

$$r^2 = b\frac{s_x}{s_y} = \left(b\sqrt{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}}\right)^2$$

$$S_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2 = (n-1)s_x^2 = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \sum(y_i - \bar{y})^2 = (n-1)s_y^2 = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}$$

$b = 5{,}173208163$

$$S_{xx} = 28{,}7825 - \frac{(12{,}45)^2}{8} = 9{,}4071875$$

$$S_{yy} = 926{,}31 - \frac{(71{,}7)^2}{8} = 283{,}69875$$

$$1 - r^2 = 1 - \left(5{,}173208163 \cdot \sqrt{\frac{9{,}4071875}{283{,}69875}}\right)^2 = 0{,}1182594152$$

$\boxed{\text{R/} \approx 11{,}8\% \text{ de variación}}$

3. En una universidad se realiza un estudio para verificar si el tipo de trabajo (administrativo y docente) se relaciona con el grado de estrés (I, II y III) de los trabajadores. Para lo cual se elige una muestra aleatoria de 300 trabajadores y se clasifican en la tabla siguiente. **(5 puntos)**

	I	II	III	
Administrativos	42	24	30	96
Docentes	54	78	72	204
Ty	96 102	102	300 → n

Pruebe la hipótesis de que el tipo de trabajo afecta el grado de estrés del trabajador.

H_0: El tipo de trabajo y el estres son independentes
H_1: El tipo de trabajo y el estres NO son independentes

$$e_{11} = \frac{96 \cdot 96}{300} = 30{,}72 \qquad e_{12} = \frac{96 \cdot 102}{300} = 32{,}64 \qquad e_{13} = \frac{96 \cdot 102}{300} = 32{,}64$$

$$e_{21} = \frac{204 \cdot 96}{300} = 65{,}28 \qquad e_{22} = \frac{204 \cdot 102}{300} = 69{,}36 \qquad e_{23} = \frac{204 \cdot 102}{300} = 69{,}36$$

	I	II	III	
Administrativos	42	24	30	96
Docentes	54	78	72	204
Ty	96	102	102	300

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

con $\nu = (f-1)(c-1)$, si $\nu \geq 2$.

$$V = (2-1)\cdot(3-1) = 2$$

	I	II	III	
Administrativos	30,72	32,64	32,64	96
Docentes	65,28	69,36	69,36	204
Ty	96	102	102	300

$$\chi^2_c = \chi^2_{0.05,\,2} = 5{,}99146$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(42-30{,}72)^2}{30{,}72} + \frac{(24-32{,}64)^2}{32{,}64} + \frac{(30-32{,}64)^2}{32{,}64} + \frac{(54-65{,}28)^2}{65{,}28}$$

$$+ \frac{(78-69{,}36)^2}{69{,}36} + \frac{(72-69{,}36)^2}{69{,}36} = 9{,}56816 7022$$

$$\boxed{\text{R/ Como } \chi^2_{obs} = 9{,}568167022 > \chi^2_c = 5{,}99146 \text{ Se rechaza } H_0\text{, el tipo de trabajo si afecta el grado de estres del trabajador}}$$

4. Los datos de la tabla siguiente se refieren a la cantidad de automóviles en cola, después de las 6:00 am, como consecuencia del paso regulado en la la rotonda de las *Garantías Sociales* debido a los trabajos que se realizan por la construcción del puente a desnivel.

X	**Tiempo (minutos)**	5	15	20	30	38	39	39.5	39.9
Y	**Automóviles**	25	33	45	60	85	100	140	180

Determine la ecuación de regresión hiperbólica $\left(y = \dfrac{x}{\alpha x + \beta}\right)$ para estimar la cantidad de automóviles en cola a partir del tiempo transcurrido después de las 6:00 am. **(5 puntos)**

$\frac{1}{Y} = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{X}$, $Y1 = \frac{1}{Y}$, $X1 = \frac{1}{X}$, $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$

X1	Y1
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{33}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{45}$
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$
$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{85}$
$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{39{,}5}$	$\frac{1}{140}$
$\frac{1}{39{,}9}$	$\frac{1}{180}$

$$Y = 0{,}00793 + 0{,}17731\,X$$

$$\boxed{Y = \frac{X}{0{,}00793X + 0{,}17731}}$$

5. La implementación del plan fiscal en nuestro país ha tenido un impacto directo en la solvencia económica de la mayoría de familias costarricenses. Para estimar la cantidad de dinero que se puede destinar al ahorro (Y) mensualmente, después de cumplir con las obligaciones pagos por servicios (X_1) y gasto por canasta básica (X_2) (todos los datos en miles de colones), se realizó un sondeo a cinco jefes de hogar costarricenses. Los datos obtenidos se resumen en la siguiente tabla

Y	50	81	52	98	74
X_1	47	57	55	40	57
X_2	165	182	165	130	148

a) Determine los coeficientes del modelo multivariado $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 47 & 165 \\ 1 & 57 & 182 \\ 1 & 55 & 165 \\ 1 & 40 & 130 \\ 1 & 57 & 148 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 81 \\ 52 \\ 98 \\ 74 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y)$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 47 & 57 & 55 & 40 & 57 \\ 165 & 182 & 165 & 130 & 148 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 47 & 165 \\ 1 & 57 & 182 \\ 1 & 55 & 165 \\ 1 & 40 & 130 \\ 1 & 57 & 148 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 256 & 790 \\ 256 & 13332 & 40840 \\ 790 & 40840 & 126378 \end{pmatrix}}$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 47 & 57 & 55 & 40 & 57 \\ 165 & 182 & 165 & 130 & 148 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 81 \\ 52 \\ 98 \\ 74 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 355 \\ 17965 \\ 55264 \end{pmatrix}}$$

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot y)$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 256 & 790 \\ 256 & 13332 & 40840 \\ 790 & 40840 & 126378 \end{pmatrix} \qquad X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 355 \\ 17965 \\ 55264 \end{pmatrix}$$

$$(X^T \cdot X)^{-1}(X^T \cdot y) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 155{,}05 \\ -0{,}02 \\ -0{,}52 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{array}$$

$$\boxed{y = 155{,}05 - 0{,}02X1 - 0{,}52X2}$$

b) ¿Cuánto se esperaría que ahorre una familia que paga 45 000 colones por servicios y que invierta 150 000 en canasta básica? **(2 puntos)**

$$y = 155{,}05 - 0{,}02X1 - 0{,}52X2$$

$$y = 155{,}05 - 0{,}02 \cdot 45 - 0{,}52 \cdot 150$$

$$\boxed{y = 76{,}15}$$