

## Variables aleatorias discretas

### Medidas de tendencia central

1. Dada la siguiente tabla:

$X$	1	3	4	5
$f(X_i)$	0,40	0,10	0,20	0,30

a) Calcule  $E(X)$

$$E(X) = 1 \cdot 0,40 + 3 \cdot 0,10 + 4 \cdot 0,20 + 5 \cdot 0,30 = \boxed{3}$$

b) Calcule  $Var(X)$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot 0,40 + 3^2 \cdot 0,10 + 4^2 \cdot 0,20 + 5^2 \cdot 0,30 = 12$$
$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$12 - 3^2$$
$$\boxed{3}$$

c) Calcule  $\sigma_X$

$$\sqrt{3}$$

2. Sea  $X$  una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad  $f_X$  está dada por la siguiente tabla:

$X$	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{4}{17}$

a) Calcule  $E(X)$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{7}{17} + 1 \cdot \frac{1}{17} + 2 \cdot \frac{2}{17} + 3 \cdot \frac{3}{17} + 4 \cdot \frac{4}{17} = \boxed{\frac{30}{17}}$$

b) Calcule  $Var(X)$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{7}{17} + 1^2 \cdot \frac{1}{17} + 2^2 \cdot \frac{2}{17} + 3^2 \cdot \frac{3}{17} + 4^2 \cdot \frac{4}{17} = \frac{200}{17}$$

$$\frac{200}{17} - \left(\frac{30}{17}\right)^2 = \boxed{\frac{800}{289}}$$

c) Calcule  $\sigma_X$

$$\sqrt{\frac{800}{289}} = \boxed{\frac{20\sqrt{2}}{17}}$$

3. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta, para la cual se sabe que su rango es  $\{1, 2, 3, 4\}$  y se tiene que  $f_X(1) = 0,13$ ,  $f_X(2) = 0,0169$ ,  $f_X(3) = 0,002197$  y se desconoce el valor de  $f_X(4)$

a) Determine el valor de  $f_X(4)$

$$0,13 + 0,0169 + 0,002197 + f_X(4) = 1$$

$$0,149097 + f_X(4) = 1$$

$$f_X(4) = 0,850903$$

b) Calcule  $E(X)$

$$1 \cdot 0,13 + 2 \cdot 0,0169 + 3 \cdot 0,002197 + 4 \cdot 0,850903$$

$$3,579003$$

c) Calcule  $Var(X)$

$$1^2 \cdot 0,13 + 2^2 \cdot 0,0169 + 3^2 \cdot 0,002197 + 4^2 \cdot 0,850903$$

$$1,0583$$

$$d) \text{ Calcule } \sigma_X \sqrt{1,0583} = 1,02873709$$

4. Dada la siguiente tabla:

$X$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	$k$	0,20

a) Determine el valor de  $k$ .

$$0,10 + 0,15 + 0,25 + k + 0,20 = 1$$

$$k = 0,30$$

b) Encuentre la función acumulada de  $X$ .

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,10 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0,15 + 0,10 & 2 \leq x \leq 3 \\ 0,25 + 0,15 + 0,10 & 3 \leq x \leq 4 \\ 0,30 + 0,25 + 0,15 + 0,10 & 4 \leq x \leq 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

c) Calcule  $E(X)$

$$1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,30 + 5 \cdot 0,20 = \boxed{\frac{67}{20}}$$

d) Calcule  $Var(X)$

$$1^2 \cdot 0,15 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,25 + 4^2 \cdot 0,30 + 5^2 \cdot 0,20 = \frac{51}{4}$$

$$\frac{51}{4} - \left( \frac{67}{20} \right)^2 = \boxed{\frac{611}{400}}$$

e) Calcule  $\sigma_X$

$$\sqrt{\frac{611}{400}} = \boxed{\frac{\sqrt{611}}{20}}$$

5. La tienda Zapatiño se ha percatado que en su sucursal más nueva reciben máximo 8 clientes por hora. Si  $X$  es una variable aleatoria discreta, correspondiente a la cantidad de clientes en la tienda, por hora, entonces considere la siguiente tabla:

$X$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(X)$	0,05	0,10	0,10	0,10	0,20	0,25	0,10	0,05	0,05

a) Demuestre que  $f$  es una distribución de probabilidad para  $X$ .

$$0,05 + 0,10 + 0,10 + 0,10 + 0,20 + 0,25 + 0,10 + 0,05 + 0,05 = 1 \quad \checkmark$$

b) Calcule  $E(X)$

$$\boxed{R/ 4}$$

c) Calcule  $Var(X)$

$$\boxed{R/ \frac{41}{10}}$$

6. Determine la varianza de la variable  $Y = \frac{X}{4} - 7$  si  $E(Y) = -6$  y  $E(X^2) = 17$

$$E(Y) = \frac{1}{4} E(X) - 7 \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$-6 = \frac{1}{4} E(X) - 7 \quad \text{Var}(X) = 17 - 7^2$$

$$\frac{1}{4} E(X) = 1 \quad \text{Var}(X) = 1$$

$$E(X) = 4$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{16} \text{Var}(X) - 0$$

$$\frac{1}{16} \cdot 1$$

$$\boxed{\frac{1}{16}}$$

7. Determine la varianza de  $Y = \frac{X}{18} - 2$  si  $E(Y) = 23$  y  $E(X^2) = 250\,000$

$$E(Y) = \frac{1}{18} \cdot E(X) \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$23 = \frac{1}{18} E(X) - 2 \quad \text{Var}(X) = 250\,000 - [750]^2$$

$$\frac{1}{18} E(X) = 25 \quad \text{Var}(X) = 47\,500$$

$$E(X) = 750$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{324} \cdot \text{Var}(X)$$

$$\frac{1}{324} \cdot 47\,500$$

$$\boxed{\frac{11\,875}{81}}$$

8. Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias discretas tales que  $\text{Var}(3X+7) = 10$ ,  $E(4X+2) = 9$ .

Calcule  $E(X^2)$

$$\text{Var}(3X+7) = 10 \quad E(4X+2) = 9$$

$$9 \text{Var}(X) = 10 \quad 4E(X) + 2 = 9$$

$$\text{Var}(X) = \frac{10}{9} \quad E(X) = \frac{7}{4}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + [E(X)]^2$$

$$\frac{10}{9} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{601}{144}}$$

9. Considere la variable aleatoria  $X$  con las condiciones  $Y = 3X+5$ ,  $E(Y) = 14$ ,  $E(Y^2) = 250$ .

a) Determine  $E(X)$

$$E(Y) = E(3X+5)$$

$$14 = 3E(X) + 5$$

$$3E(X) = 9$$

$$\boxed{E(X) = 3}$$

b) Determine  $\text{Var}(X)$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(3X+5)$$

$$\text{Var}(Y) = 9 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{9} \text{Var}(Y)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= 250 - (14)^2 \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{9} \text{Var}(Y)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 54$$

$$= \boxed{6}$$

c) Determine  $\sigma_X$

$$\boxed{\sqrt{6}}$$

10. Considere la variable aleatoria  $Z$  tal que  $E(Z) = 2$  y  $Var(Z) = 6$ . Determine  $E(W)$ ,  
donde  $W = 3Z^2 - 2Z + 5$

R/  $E(W) = 31$

$$E(W) = E(3Z^2 - 2Z + 5)$$

$$E(W) = 3E(Z^2) - 2E(Z) + 5$$

$$E(W) = 3E(Z^2) - 2 \cdot 2 + 5$$

$$E(W) = 3E(Z^2) + 1$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2$$

$$E(Z^2) = Var(Z) + \{E(Z)\}^2$$

$$6 + 2^2$$

$$= 10$$

$$E(W) = 3E(Z^2) + 1$$

$$3 \cdot 10 + 1$$

$$\boxed{31}$$

# Función de distribución

1. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Pruebe que  $f_X(x) = \frac{2}{3^{x+1}}$  es función de distribución, con  $x = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{2}{3^{x+1}}$$

$$\frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^0}{1 - \frac{1}{3}} \right) = 1 \quad \checkmark$$

2. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Determine el valor de  $k$  para que su función de distribución sea  $f_X(x) = \frac{k}{7^x}$ , con  $x = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{R/ } k = \frac{6}{7}$$

$$k \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$$

$$k \cdot \frac{7}{6} = 1$$

$$k = \frac{6}{7}$$

3. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Determine el valor de  $k$  para que su función de distribución sea

$$R/ k = \frac{35}{6}$$

$$f_X(x) = \frac{k}{6^{2x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{1}{36} \right)^x = 1$$

$$\frac{k}{6} \cdot \frac{36}{35} = 1$$

$$k = \frac{35}{6}$$

4. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad  $f_X(x)$  definida por:

$$f_X(x) = k \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^{x+3}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

Determine el valor de  $k$

$$R/ k = 18$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^x = 1$$

$$\frac{1k}{27} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{k}{18} = 1$$

$$k = 18$$

5. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Determine el valor de  $k$  para que su función de distribución sea

R/  $k = 5$

$$f_X(x) = \frac{k^x \cdot e^{-5x}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$e^{-5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^x}{x!} = 1$$

$$e^{-5} \cdot e^k = 1$$

$$e^{-5+k} = 1$$

$$\ln(e^{-5+k}) = \ln(1)$$

$$-5+k=0$$

$$\boxed{k=5}$$

6. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con función generadora de momentos  $m_X(t) = \frac{e^{kt}}{2-e^t}$  y  $E(X) = 3$ . Determine el valor de  $k$ .

R/  $k = 11$

$$E(X) = m'_X(0)$$

$$m'_X(t) = \frac{e^{kt}}{2-e^t}$$

$$\frac{e^{k+1} \cdot k \cdot (2-e^t) - e^{k+1} \cdot (-e^t)}{(2-e^t)^2}$$

$$m'_X(0) = k+1$$

$$E(X) = k+1$$

$$3 = k+1$$

$$\boxed{k=2}$$

7. Una variable aleatoria  $X$  toma valores  $1, 2, 3, \dots, 25$  con probabilidades

$$f_X(i) = k \cdot (0,16)^{\frac{i}{2}}$$

a) Encuentre el valor de  $k$ .

$$k \sum_{i=1}^{25} (0,16)^{\frac{i}{2}} = 1$$

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{25} (0,16)^{\frac{i}{2}}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

b) Determine la probabilidad de que esta variable sea superior a 5.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$$

$$1 - \sum_{i=1}^5 \frac{1}{5} (0,16)^{\frac{i}{2}}$$

$$\boxed{0,868032}$$

8. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - k & \text{si } x = -1 \\ \frac{1}{6} + k^2 & \text{si } x = 0 \\ 2k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

con  $R_X = \{-1, 0, 1\}$

a) Encuentre el valor de  $k$ .

$$\frac{1}{2} - k + \frac{1}{6} + k^2 + 2k = 1$$

$$k^2 + k + \frac{2}{3} = 1$$

$$k^2 + k - \frac{1}{3} = 0$$

$$k = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6} \quad k = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$$

✓ ✗

9. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

Determine el valor de  $k$  para que  $f_X$  sea función de probabilidad.

$$\left[ k \cdot \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} \right] = 1$$

$$\frac{k}{2} + \frac{e^2}{2} = 1$$

$$k + e^2 = 2$$

$$k = 2 - e^2$$

10. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

Determine el valor de  $k$  para que  $f_X$  sea función de probabilidad.

$$R/ k = \frac{1}{e^2}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \frac{1}{2} k \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{e^2 k}{2} = 1$$

$$1 + e^2 k = 2$$

$$e^2 k = 1$$

$$k = \frac{1}{e^2}$$

11. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con rango  $R_X = \{2, 4, 6, 8\}$  y función de distribución acumulada

$$\begin{cases} 0 & \text{si } k < 2 \\ 0,2 & \text{si } 2 \leq k < 4 \\ 0,6 & \text{si } 4 \leq k < 6 \\ 0,8 & \text{si } 6 \leq k < 8 \\ 1 & \text{si } k \geq 8 \end{cases}$$

a) Determine la función de distribución de probabilidad de  $X$ .

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i - 1)$$

1.  $x = 2$

$$f_X(2) = F_X(2) - F_X(k < 2) = 0,2 - 0 = \boxed{0,2}$$

2.  $x = 4$

$$f_X(4) = F_X(4) - F_X(k < 4) = 0,6 - 0,2 = \boxed{0,4}$$

3.  $x = 6$

$$f_X(6) = F_X(6) - F_X(k < 6) = 0,8 - 0,6 = \boxed{0,2}$$

4.  $x = 8$

$$f_X(8) = F_X(8) - F_X(k < 8) = 1,0 - 0,8 = \boxed{0,2}$$

15. Sea  $Y$  una variable aleatoria discreta cuya función generadora de momentos tiene criterio:

$$m_Y(t) = \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine la esperanza y la varianza de  $Y$

$$\text{R/ } E(Y) = \frac{11}{10} \text{ y } \text{Var}(Y) = \frac{69}{100}$$

$$E(Y) = 0 + \frac{3e^+}{10} + \frac{4e^{2+}}{5}$$

$$m'_Y(0) = \boxed{\frac{11}{10}}$$

$$\text{Var}(Y) = m''_Y(0) - m'_Y(0)^2$$

$$m''_Y(t) = \frac{3e^+}{10} + \frac{4e^{2+}}{5}$$

$$m''_Y(t) = \frac{3e^+}{10} + \frac{8e^{2+}}{5}$$

$$m''_Y(0) = \frac{19}{10}$$

$$\text{Var}(Y) = m''_Y(0) - m'_Y(0)^2$$

$$\frac{19}{10} - \left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{69}{100}}$$

17. Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias tales que  $m_X(t) = \frac{5}{(5-t)^2}$  y  $Y = X^2 + 3X - 9$

a) Determine la esperanza de la variable  $X$

$$m'_X(t) = \frac{5}{(5-t)^2}$$

$$= \frac{0 - 5 \cdot 2(5-t) \cdot (0-1)}{(5-2)^3}$$

$$= \frac{10(5-t)}{(5-t)^3}$$

$$= \frac{10}{(5-t)^2}$$

$$m'_X(0) = \boxed{\frac{2}{25}} \leftarrow E(X)$$

b) Determine la esperanza de la variable  $Y$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X^2 + 3X - 9) \\ &= E(X^2) + 3E(X) - 9 \end{aligned}$$

$$m''_Y(t) = \frac{10}{(5-t)^3} \quad \frac{0 - 10 \cdot 3(5-t)^2 \cdot (0-1)}{(5-t)^6} =$$

$$\begin{aligned} E(X^2) + 3E(X) - 9 & \quad \frac{30}{(5-t)^4} \end{aligned}$$

$$\frac{6}{125} + 3 \cdot \frac{2}{25} - 9$$

$$m''_Y(0) = \frac{6}{125}$$

$$\rightarrow E(X^2)$$

$$\boxed{\frac{-1089}{125}}$$

18. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad  $f_X(x)$  definida por:

$$f_X(x) = \frac{3}{4^{x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \dots$$

a) Compruebe que  $f_X(x)$  satisface las condiciones necesarias para ser una función de probabilidad.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^x = 1$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1, \quad \boxed{1=1} \checkmark$$

b) Determine la función generadora de momentos de  $X$

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} \left( \frac{1}{4} \right)^x$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{e^t}{4} \right)^x$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{\left( \frac{e^t}{4} \right)^0}{1 - \frac{e^t}{4}}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\frac{4 - e^t}{4}}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4 - e^t}$$

$$\boxed{\frac{3}{4 - e^t}}$$