**Pregunta #1:** Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $a_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$

ⓐ Calcule los términos $a_3$ y $a_4$ (1 pu

$$\frac{3^3\cdot 3!}{2\cdot 4\cdot 6} = \boxed{\frac{27}{8}} \qquad \frac{3^4\cdot 4!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} = \boxed{\frac{81}{16}}$$

ⓑ Determine si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no es monótona (3

Supongamos que es creciente

$$\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}}{3^n\cdot n!} \geq 1$$

$$\frac{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{3^n}\cdot \cancel{n!}\,(2n+2)} \geq 1$$

$$3n+3 \geq 2n+2$$

$$n+1 \geq 0 \;\checkmark$$

$\boxed{\text{Creciente}}$

**Pregunta #2:** Considere la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{2k-3}{3^k}$

ⓐ Demuestre utilizando el principio de inducción matemática que (3 puntos)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} \quad \text{para todo natural } n \geq 2$$

$n=2$ $\quad \dfrac{2(2)-3}{3^2} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3^2} \to \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{9}$ ✓

$n=p$ $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{p} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{p}{3^p}$, Hi

$n=p$ $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{p+1} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{k+1}{3^{k+1}}$, HQD

Demo

$$\sum_{k=2}^{p+1} \frac{2k-3}{3^k}$$

$$\sum^{p} \frac{2k-3}{} + 2p\,1$$

$$\sum_{k=2} \frac{\ldots}{3^k} + \frac{2p-1}{3^{p+1}}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{p}{3^p} + \frac{2p-1}{3^{p+1}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2p-1-3p}{3^{p+1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{3} - \frac{p+1}{3^{p+1}}} \quad //$$

ⓑ Determine si la serie converge, en caso de ser convergente, determine el valor de convergencia. (2 puntos)

$$\frac{1}{3} - \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{3^n} = 0 \quad n <<< 3^n$$

$$\boxed{\text{Converge a } \frac{1}{3}}$$

Pregunta #3: Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^{n+1}}{(3p)^{n-1}}$, donde $p$ es constante y $p \neq 0$. Determine qué condición debe cumplir la constante $p$ para garantizar la convergencia de la serie. Para estos valores, determine el valor de la suma en términos de $p$. (4 puntos)

Condicion de convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^n \cdot (2p^2)}{(3p)^n \cdot (3p)^{-1}}$$

$$6p^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2p^2}{3p}\right)^n$$

$$6p^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2p}{3}\right)^n$$ Serie geometrica con $|r| = \left|\frac{2p}{3}\right|$ el cual necesita ser $< 1$ para converger

Tenemos

$$\left|\frac{2p}{3}\right| < 1$$

$-1 < \frac{2p}{3} < 1$

$-3 < 2p < 3$

$\frac{-3}{2} < p < \frac{3}{2}$

$\boxed{\therefore \text{ La serie converge en } p \in \left]\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right[}$

Suma

$$6p^3 \cdot \left[\frac{\left(\frac{2p}{3}\right)^1}{1-\frac{2p}{3}}\right]$$

$$6p^3 \cdot \left[\frac{\frac{2p}{\cancel{3}}}{\frac{3-2p}{\cancel{3}}}\right]$$

$$\frac{12p^4}{3-2p}$$

$\boxed{\therefore \text{ La suma es } \frac{12p^4}{3-2p}}$

**Pregunta #4:** Utilizando el Criterio de la Integral, determine si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$ converge o diverge. (5 puntos)

Sea $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2} - x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{e^{x^4}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{x^2}}(1-2x^2)}{\cancel{e^{x^4}}}$$

$$= \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0$$

$$1-2x^2 = 0$$

$$x = \cancel{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \qquad x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

| | $-\infty$ | $\sqrt{\frac{1}{2}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^{x^2}$ | + | | + |
| $1-2x^2$ | + | | − |
| $f'(x)$ | + | | − |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ |

Decrece

$\boxed{\therefore f(x) \text{ decrece}}$

$\int^{+\infty}$

$$\int_1 \frac{x}{e^{x^2}}\,dx \longrightarrow \int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx \qquad u = x$$

$$du = 2x\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}du = x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^u}\,du$$

$$\frac{1}{2}\int e^{-u}$$

$$-e^{-u}$$

$$-e^{-x^2}$$

$$\frac{-1}{2e^{x^2}}$$

$$\left.\frac{-1}{2e^{-x^2}}\right|_1^{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \cancel{\frac{-1}{2e^{x^2}}} = 0 - -\frac{1}{2e^1}$$

$$\frac{1}{2e}$$

$\boxed{\text{Converge}}$

Pregunta #5: Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

(a) $\sum_{K=2}^{\infty} \frac{\cos^2(K)}{K^2}$ $a_K$ (4 puntos)

$$0 < \frac{\cos^2(k)}{k^2} < \frac{1}{k^2}$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, p serie con $p=2$ el cual es $>1$ ∴ converge por el crit de las p-series

$\boxed{\therefore \text{Converge}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+5n^2}{(1+2n)^n}$

Por crit de raiz

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(3+5n^2)}{(1+2n)^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{3+5n^2}} = 1}{1+2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+2n} = 0 < 1$$

$\boxed{\therefore \text{ Converge}}$

**Pregunta #6:** Considere la serie alternada $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln(n)}{n}$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \qquad f \nexists \; x = 0$$

$$1 - \ln(x) = 0$$

$$x = e$$

$\boxed{\therefore \text{ Decrece}}$

| | $-\infty$ | 0 | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | + | + | + |
| $1-\ln(x)$ | | + | + 0 | − |
| $f'(x)$ | | + | + | − |
| $f(x)$ | | ↗ | ↗ | ↘ |

Decrece

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}, \; \frac{+\infty}{+\infty}, \; \text{L'hôpital}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\boxed{\therefore \text{ Converge}}$

ⓑ Determine el menor valor para $N$ de manera que la suma parcial $S_N$ aproxime el valor de la suma de la serie $S$ con un error tal que $E_N \leq 10^{-1}$ (2 puntos)

| $N$ | $N+1$ | $a_{n+1}$ |
| --- | --- | --- |
| 35 | 36 | $0,9 < 0,1$ |

$\boxed{\text{Se cumple para } N=35}$

Pregunta #7: Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x-1)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$$

Por crit de razon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}\cdot \cancel{(x-1)^n}\cdot(x-1)}{\cancel{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\,(2n+3)} \cdot \frac{\cancel{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}}{\cancel{n!}\cdot\cancel{(x-1)^n}}$$

$$|x-1| \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+3}$$

$$|x-1| \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}|x-1| < 1$

$|x-1| < 2$

$-2 < x-1 < 2$

$-1 < x < 3$

$\boxed{\text{Converge para } x \in \left]-1,3\right[}$