

Ejemplo 2.3 Considere la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$, definida de manera recursiva:

$$a_0 = 5, \quad a_n = 2a_{n-1} + 3 \quad \text{para } n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

a) Determine a_3 .

Forma recursiva

b) Utilizando inducción, demuestre que $a_n = 2^{n+3} - 3$ para $n \geq 0$.

Forma explícita

a) $a_0 = 5$

$$a_1 = 2(5) + 3 = 13$$

$$a_2 = 2(13) + 3 = 29$$

$$a_3 = 2(29) + 3 = 61$$

b) $k=0$ $a_0 = 2^{0+3} - 3$

$$5 = 5$$

$k=p$ $a_p = 2^{p+3} - 3$, Hi

$k=p+1$ $a_{p+1} = 2^{p+4} - 3$, HoD

Def $a_n = 2a_{n-1} + 3$ Def Recursiva

$$a_{p+1} = 2 \cdot a_p + 3$$

$$= 2(2^{p+3} - 3) + 3$$

$$2^{p+4} - 6 + 3$$

$$\boxed{2^{p+4} - 3} //$$

4. Para cada sucesión recursiva dada, se proporciona una fórmula explícita. Se debe demostrar que la fórmula es correcta usando inducción matemática.

a) ■ Forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$

■ Fórmula explícita: $a_n = 2^n - 1, \quad n \geq 1$

$k=1$ $a_1 = 2^1 - 1 \rightarrow 1 = 1$ ✓

$k=p$ $a_p = 2^p - 1$, Hi

$k=p+1$ $a_{p+1} = 2^{p+1} - 1$, HoD

Demo

Forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$

$$a_{p+1} = 2a_p + 1$$

$$= 2a_p + 1$$

$$2(2^p - 1) + 1, H:$$

$$2^{p+1} - 2 + 1$$

$$\boxed{2^{p+1} - 1} //$$

b) ■ Forma recursiva: $b_n = b_{n-1} + 3, \quad b_1 = 2$

■ Fórmula explícita: $b_n = 3n - 1, \quad n \geq 1$

$$h=1 \quad b_1 = 3(1) - 1 \rightarrow 2 = 2 \checkmark$$

$$h=p \quad b_p = 3p - 1, H:$$

$$h=p+1 \quad b_{p+1} = 3p + 2, H \text{ QD}$$

Demo

Forma recursiva: $b_n = b_{n-1} + 3,$

$$b_{p+1} = b_{p+1-1} + 3$$

$$b_{p+1} = b_p - 1 + 3$$

$$3p - 1 + 3, H:$$

$$\boxed{3p + 2} //$$

c) ■ Forma recursiva: $c_n = c_{n-1} + n, \quad c_1 = 1$

■ Fórmula explícita: $c_n = \frac{n^2 + n}{2}, \quad n \geq 1$

$$h=1 \quad c_1 = \frac{1^2 + 1}{2} \rightarrow 1 = 1 \checkmark$$

$$h=p \quad c_p = \frac{p^2 + p}{2}, H:$$

$$h=p+1 \quad c_{p+1} = \frac{(p+1)^2 + (p+1)}{2}, H \text{ QD} \quad \frac{p^2 + 2p + 1 + p + 1}{2}$$

Demo

Forma recursiva: $c_n = c_{n-1} + n,$

$$c_{p+1} = c_{p+1-1} + p+1$$

$$= c_p + p+1$$

$$= \frac{p^2 + p}{2} + p+1, H:$$

$$= \frac{p^2 + p + 2p + 2}{2}$$

$$= \frac{p^2 + 2p + 2 + p + 1}{2}$$

$$\boxed{\frac{(p+1)^2 + (p+1)}{2}} //$$

d) ■ Forma recursiva: $d_n = n \cdot d_{n-1}$, $d_1 = 1$

■ Fórmula explícita: $d_n = n!$, $n \geq 1$

$$k=1 \quad d_1 = 1! \rightarrow 1=1$$

$$k=p \quad d_p = p!, \text{ H:}$$

$$k=p+1 \quad d_{p+1} = (p+1)!$$

Demó

Forma recursiva: $d_n = n \cdot d_{n-1}$,

$$d_{p+1} = (p+1) \cdot d_{p+1-1}$$

$$= (p+1) \cdot d_p$$

$$= (p+1) \cdot p!, \text{ H:}$$

$$\boxed{(p+1)!} //$$

e) ■ Forma recursiva: $e_n = e_{n-1} + n!$, $e_1 = 1$

■ Fórmula explícita: $e_n = \sum_{k=1}^n k!$, $n \geq 1$

$$k=1 \quad e_1 = 1! \rightarrow 1=1$$

$$k=p \quad e_p = \sum_{k=1}^p k!, \text{ H:}$$

$$k=p \quad e_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k! \text{ (H:)} \rightarrow \sum_{k=1}^p k! + (p+1)!$$

Demó

Forma recursiva: $e_n = e_{n-1} + n!$,

$$e_{p+1} = e_{p+1-1} + (p+1)!$$

$$= e_p + (p+1)!$$

$$\sum_{k=1}^p k! + (p+1)!$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p+1} k!} //$$

f) ■ Forma recursiva: $f_n = \frac{f_{n-1}}{n+1}$, $f_0 = \int_0^1 dx$

■ Fórmula explícita: $f_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $n \geq 0$

$$h=0 \quad f_0 = \frac{1}{(h+1)!}$$

$$\int_0^1 dx = \left[x \right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$1 = \frac{1}{(0+1)!} = 1 = 1 \checkmark$$

$$h=p \quad f_p = \frac{1}{(p+1)!}, \text{ Hi}$$

$$h=p+1 \quad f_{p+1} = \frac{1}{(p+2)!}, \text{ Hi 00}$$

Demo

$$\text{Forma recursiva: } f_n = \frac{f_{n-1}}{n+1},$$

$$f_{p+1} = \frac{f_{p+1-1}}{(p+1)+1} \\ = \frac{f_p}{p+2}$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} \cdot \frac{1}{(p+2)}$$

$$= \frac{1}{(p+2)(p+1)!}$$

$$= \boxed{\frac{1}{(p+2)!}} //$$

6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n = \frac{(-1)^n 3^n n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

a) Calcule los términos a_3, a_5 y a_{n+1} .

b) Determine y simplifique $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$a) \quad a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot 3^3 \cdot 3!}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{27}{8}$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot 3^5 \cdot 5!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = -\frac{27 \cdot 3}{32}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)}$$

Ejemplo 2.2 Considere la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, definida por $a_n = \frac{b_{n+1}}{6 \cdot b_n}$, con $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$. Calcule a_3 .

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = 5$$

$$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

$$a_n = \frac{b_{n+1}}{6 \cdot b_n}$$

$$a_3 = \frac{b_{3+1}}{6 \cdot b_3}$$

$$= \frac{b_4}{6 \cdot b_3}$$

n puede ser b_2 entonces $n+1$ es b_3

Reemplazando

$$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

$$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

$$n=1 \quad b_{1+2} = b_1 + b_{1+1}$$

$$b_{2+2} = b_2 + b_{2+1} \quad n=2$$

$$b_3 = b_1 + b_2$$

$$b_4 = b_2 + b_3$$

$$= 2 + 5 = 7$$

$$= 5 + 7 = 12$$

$$\frac{b_4}{6 \cdot b_3}$$

$$= \frac{12}{6 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$