

Variables aleatorias continuas

1. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Verifique que f_X es función de probabilidad.

2. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de k

$$\text{R/ } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x+k} & \text{si } x \geq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de k .

$$\text{R/ } 8$$

4. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{18} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ kx - 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Determine el valor de k

$$\text{R/ } \frac{18}{23}$$

5. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x \leq k \end{cases}$$

Determine el valor de k

6. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Determine el valor de k

R/ $\frac{18}{23}$

7. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-2x} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Determine el valor de k

R/ 11,2903

8. ¿Existe un valor de k de manera que la siguiente función sea una función de densidad de una variable aleatoria continua X ?

R/ No

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ kx^2 - k & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

9. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre la función acumulada $F_X(m)$

$$R/ F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq 0 \\ m - \frac{m^2}{2} & \text{si } 0 < m \leq 1 \\ 1 - m + \frac{m^2}{2} & \text{si } 1 < m \leq 2 \\ 1 & \text{si } m > 2 \end{cases}$$

10. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} M(3x - 9) & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ M(9x - x^2 - 14) & \text{si } 5 < x \leq 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Determine el valor de M
- b) Determine $E(X)$

11. Sea Y una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_Y(t) = \begin{cases} Ae^{-3t} & \text{si } 3 \leq t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Determine el valor de A
- b) Determine $E(Y)$

12. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{24} & \text{si } 1 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- | | |
|---|---|
| a) Determine $E(X)$ y $Var(X)$ | $R/ E(X) = \frac{19}{4}$ y $Var(X) = \frac{39}{16}$ |
| b) Si $Y = 20 - 4X$, determine $E(Y)$ y $Var(Y)$ | $R/ E(Y) = 1$ y $Var(Y) = 39$ |

13. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{333x^4} & \text{si } \frac{1}{5} \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- | | |
|---|--|
| a) Calcule $E(X)$ y $Var(X)$ | $R/ E(X) = \frac{11}{37}$ y $Var(X) = \frac{27}{1\,369}$ |
| b) Si $Y = 3X - \frac{1}{2}$, determine $Var(Y)$ | $R/ \frac{243}{1\,369}$ |

14. Sea V una variable aleatoria continua cuya función de densidad viene dada por:

$$f_V(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Verifique que la función generadora de momentos está dada por $m_V(t) = \frac{-2}{t-2}$, con $t < 2$

15. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3x+6} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle la función acumulada para X .

b) Determine $P(X \geq 5)$

c) Calcule $E(X)$

d) Verifique que la función generadora de momentos está dada por $m_X(t) = \frac{-3e^{2t}}{t-3}$, con $t < 3$

16. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-x} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

con k constante (no es necesario averiguarla). Determine la función generadora de momentos para X .

17. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 5e^{15-5x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Determine la función generadora de momentos para X .

18. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-7x} & \text{si } 5 < x < 12 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la función generadora de momentos de X

$$\text{R/ } \frac{2[e^{12t-84} - e^{5t-35}]}{t-7}, \text{ con } t < 7$$

19. Sea X una variable aleatoria continua cuya función generadora de momentos está dada por:

$$m_X(t) = \frac{ae^t}{a-t}, \text{ con } t < a$$

$$m'_X(t) = \frac{ae^t[a-t+1]}{(a-t)^2} \quad m''_X(t) = \frac{ae^t[(a-t)^2 + 2(a-t) + 2]}{(a-t)^3}$$

a) Determine $E(X)$

$$\text{R/ } \frac{a+1}{a}$$

b) Determine $Var(X)$

$$\text{R/ } \frac{1}{a^2}$$

20. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 5 \cdot e^{-5x+25} & \text{si } x \geq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la función generadora de momentos de X

$$\text{R/ } \frac{-5e^{5t}}{t-5}, \text{ con } t < 5$$

b) Determine $E(X)$

$$\text{R/ } \frac{-24}{5}$$

21. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} (k+1)e^{-7x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k

b) Calcule $P(X < 4)$

22. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-5}} & \text{si } 0 < x < 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la función generadora de momentos de X

b) Determine $E(X)$ usando el inciso a.

23. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^{2x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde k es una constante apropiada (no es necesario averiguarla)

a) Determine la función generadora de momentos de X

b) Determine $E(X)$ usando el inciso a.

24. Sea X la duración en horas de una batería de focos especiales. La función está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot e^{\frac{-x}{5}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que la función generadora de momentos está dada por $m_X(t) = \frac{-1}{5t-1}$, con $t < \frac{1}{5}$

b) Use $m_X(t)$ para encontrar la vida media de la batería.

R/ 5

c) Use $m_X(t)$ para encontrar la varianza de la batería.

R/ 25

25. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{4-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la función generadora de momentos de X

$$\text{R/ } \frac{-2e^4}{t-2}, \text{ con } t < 2$$

b) Utilizando el inciso anterior, calcule $E(X)$

$$\text{R/ } \frac{e^4}{2}$$

c) Utilizando los incisos anteriores, calcule $Var(X)$

$$\text{R/ } \frac{2e^4 - e^8}{4}$$

d) Si $Y = X + e^X$, determine $E(Y)$

$$\text{R/ } \frac{5e^4}{2}$$

26. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que f_X es función de probabilidad.

b) Encuentre la función acumulada $F_X(m)$

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ 1 - \cos(m) & \text{si } 0 \leq m \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } m > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

27. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{7}\right)^{k-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k .

$$\text{R/ } k = 7$$

b) Encuentre la función acumulada $F_X(m)$

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ \frac{1}{823543}m^7 & \text{si } 0 \leq m \leq 7 \\ 1 & \text{si } m > 7 \end{cases}$$

28. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que f_X es función de probabilidad.

b) Encuentre la función acumulada $F_X(m)$

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ 1 - \frac{1}{m} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

29. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-3x} & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k

$$\text{R/ } \frac{3e^9}{e^9 - 1}$$

b) Determine la función generadora de momentos de X

$$\text{R/ } \frac{3(e^{3t} - e^9)}{(e^9 - 1)(t - 3)}, \text{ con } t < 3$$

30. Sea X una variable aleatoria continua con función acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que f_X es función de distribución.

b) Encuentre la función de densidad.

31. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3 \cdot 15^3}{x^4} & \text{si } x \geq 15 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que f_X es función de probabilidad.

b) Encuentre la función acumulada $F_X(m)$

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 15 \\ \frac{-15^3}{m^3} + 1 & \text{si } m \geq 15 \end{cases}$$

c) Calcule $P(18 < X \leq 20)$

$$\text{R/ } 0,0701$$

32. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^5} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Demuestre que efectivamente f_X cumple las condiciones para ser una función de probabilidad para X .

b) Determine la función de distribución acumulada $F_X(m)$

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ 1 - \frac{1}{m^4} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

c) Determine $P(|X| < 2)$

$$\text{R/ } \frac{15}{16}$$

33. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^6} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Demuestre que efectivamente f_X cumple las condiciones para ser una función de probabilidad para X .

b) Determine la función de distribución acumulada $F_X(m)$

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ 1 - \frac{1}{m^5} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

c) Determine $P(3 < X \leq 10)$

$$\text{R/ } \frac{99\,757}{24\,300\,000}$$

34. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{-1}{k} \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{-1}{k} \leq x \leq 0 \\ e^{-2kx} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Determine el valor de k .

$$\text{R/ } \frac{3}{4}$$

b) Encuentre la función de distribución acumulada.

$$\text{R/ } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{4} \left(m + \frac{4}{3} \right) & \text{si } \frac{-4}{3} \leq m \leq 0 \\ \frac{-2}{3} \left(e^{\frac{-3}{2}m} - 1 \right) & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

c) Calcule $P(-1 < X \leq 4)$

$$\text{R/ } 0,581680$$

35. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-3x+8} & \text{si } x \geq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k .

$$\text{R/ } \ln \left(\frac{3}{2} \right) + 9$$

b) Encuentre la función de distribución acumulada

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 4 \\ 1 - e^{-2m+8} & \text{si } m \geq 4 \end{cases}$$

c) Determine $P(4 < X \leq 6)$

$$\text{R/ } 1 - e^{-4}$$

36. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3x+8} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k .

$$\text{R/ } 6$$

b) Demuestre que la función generadora de momentos de la variable X es $m_X(t) = \frac{-e^{2t}}{t-3}$
si $t < 3$

37. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x+6} & \text{si } x > 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la función de distribución acumulada. R/ $F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq 3 \\ 1 - e^{-2m+6} & \text{si } m > 3 \end{cases}$

b) Determine la función generadora de momentos de X R/ $\frac{-2 \cdot e^{3t}}{t-2}$, con $t < 2$

c) Calcule $E(X)$ y $Var(X)$ utilizando el inciso anterior R/ $E(X) = \frac{7}{2}$ y $Var(X) = \frac{1}{4}$

38. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot x^{-4} & \text{si } \frac{1}{5} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k . R/ $\frac{3}{124}$

b) Determine $E(X)$ R/ $\frac{9}{31}$

c) Determine $Var(X)$ R/ $\frac{12}{961}$

d) Calcule σ_X R/ $\frac{2\sqrt{3}}{31}$

e) Si $Y = 3X - \frac{1}{2}$, determine $E(Y)$ R/ $\frac{23}{62}$

39. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot x^{-3} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k .

b) Determine $E(X)$

c) Determine la función de distribución de probabilidad acumulada F_X

40. Un estudio realizado por algunos estudiantes revela que el tiempo X que dedica un profesor a explicar los conceptos durante una sesión de clases es una variable aleatoria continua, en horas, con densidad de probabilidad de la forma:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{4}{k(1+t^2)} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k .

R/ π

b) Encuentre la función de distribución acumulada. R/ $F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ \frac{4 \arctan(m)}{\pi} & \text{si } 0 \leq m \leq 1 \\ 1 & \text{si } m > 1 \end{cases}$

c) Determine la probabilidad de que el profesor dedique más de 15 minutos a explicar los conceptos durante una clase.

R/ 0,6880

d) Determine la esperanza para el tiempo que dedica el profesor a explicar los conceptos durante una sesión de clases.

R/ 0,4412

41. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot e^{5-3x} & \text{si } x \geq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre la función de distribución acumulada. R/ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 5 \\ -e^5(e^{-3m} - e^{-15}) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$

b) Calcule $P(X > 15)$ R/ 0,999954

c) Determine $E(X)$ R/ $\frac{16}{3e^{10}}$

d) Si $Y = 3X - \frac{1}{2}$, determine $E(Y)$ R/ $\frac{32 - e^{10}}{2e^{10}}$

e) Determine la función generadora de momentos. R/ $\frac{-3e^{5t-10}}{t-3}$

f) Utilizando el inciso anterior, determine $E(X)$ R/ $\frac{16e^{-10}}{3}$

g) Utilizando los incisos anteriores, determine $Var(X)$ R/ 0,001293

42. Considere la función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x < a \\ k(2a - x) & \text{si } a \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k para el cual f es una función de probabilidad.

$$\text{R/ } \frac{1}{a^2}$$

b) Determine $E(X)$.

$$\text{R/ } a$$

c) Determine $Var(X)$.

$$\text{R/ } \frac{a^2}{6}$$

d) Determine σ_X .

$$\text{R/ } \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

e) Determine la función acumulada $F_X(m)$

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} \frac{m^2}{2a^2} & \text{si } m \leq a \\ \frac{2m}{a} - \frac{m^2}{2a^2} - 1 & \text{si } a \leq m \leq 2a \\ 1 & \text{si } m > 2a \end{cases}$$

43. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k .

$$\text{R/ } 5$$

b) Encuentre la función de distribución acumulada.

$$\text{R/ } F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ 1 - e^{-5m} & \text{si } m \geq 0 \end{cases}$$

c) Determine $P(1 < X \leq 5)$

$$\text{R/ } e^{-5} - e^{-25}$$

d) Determine $E(X)$ y $Var(X)$

$$\text{R/ } E(X) = \frac{1}{5} \text{ y } Var(X) = \frac{1}{25}$$

e) Si $Y = 25X - \frac{2}{3}$, determine $E(Y)$

$$\text{R/ } \frac{13}{3}$$

f) Determine la función generadora de momentos para X .

$$\text{R/ } m_X(t) = \frac{-5}{t-5}$$

g) Calcule $E(X)$ y $Var(X)$, utilizando el inciso anterior.

$$\text{R/ } E(X) = \frac{1}{5} \text{ y } Var(X) = \frac{1}{25}$$

Demostraciones

1. Sea X una variable aleatoria continua. Usando la definición de esperanza matemática, demuestre que

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. Demuestre que

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [E(X)]^2$$

3. Sea X una variable aleatoria continua con media μ , varianza σ^2 y función generadora de momentos $m_X(t)$. Sea Y otra variable aleatoria continua tal que $Y = aX + b$ y función generadora de momentos $m_Y(t)$.

a) Muestre que $m_X(0) = 1$

b) Muestre que $m_Y(t) = e^{bt} \cdot m_X(at)$

c) Utilice $m_Y(t)$ para encontrar la media de Y .

$$\text{R/ } E(Y) = a\mu + b$$

d) Utilice $m_Y(t)$ para encontrar la varianza de Y .

$$\text{R/ } Var(Y) = a^2 \cdot \sigma^2$$