Ph diferencia de medias

Ejemplo 5: diferencia de medias

Un gerente aplicó el mismo test de capacitación a 2 grupos. El primero de 50 empleados obtuvo una media de 65 pts con una desviación De 10 pts. El segundo grupo de 40 empleados arrojó una media de 62 pts con una desviación estándar de 8 pts.

¿Existe diferencia significativa entre las medias de los dos grupos a un nivel de significancia del 5%?

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Normal

$H_0: u_1 \neq u_2$ $\quad n_1 = 50 \quad n_2 = 40 \quad d_0 = 0$

$H_1: u_1 = u_2$ $\quad \bar{x}_1 = 65 \quad \bar{x}_2 = 62 \quad \alpha = 0{,}05$

$\sigma_1 = 10 \quad \sigma_2 = 8$

$$Z_{obs} = \frac{65 - 62}{\sqrt{\frac{10^2}{50} + \frac{8^2}{40}}} = 1{,}5811$$

$$Z_c = Z_{0{,}05} = \pm 1{,}95996$$

R/ Como

$Z_{c_1} = -1{,}95996 < Z_{0{,}05} = 1{,}5811 < Z_{c_2} = 1{,}95996$

No se rechaza H_0

Valor P

$$Z_{obs} = \frac{65 - 62}{\sqrt{\frac{10^2}{50} + \frac{8^2}{40}}} = 1{,}5811$$

$$2P(Z > 1{,}5811) = 0{,}11386$$

R/ Como $P = 0{,}11386 > \alpha = 0{,}05$

No se rechaza H_0

Un investigador desea comparar dos modelos de baterías de teléfonos celulares para determinar cuál de ellos tiene mayor duración de carga. Como desconoce la media y la varianza poblacional de los dos modelos, decide tomar una muestra de 26 baterías del modelo X y de 21 del modelo Z. En ambos casos, el tiempo de duración de la carga se distribuyó de forma normal, con una media muestral de 26 horas y una desviación muestral de 2,3 horas para el modelo X y con una media muestral de 24 horas y una desviación muestral de 1,7 horas para el modelo Z.

[1 punto] Calcule el número de grados de libertad de la distribución empleada para realizar una prueba de hipótesis sobre la diferencia de ambas muestras. (**Suponga que las varianzas son distintas**).

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

$n_1 = 26 \quad n_2 = 21$

$S_1 = 2{,}3 \quad S_2 = 1{,}7$

$$v = \frac{\left(\frac{2{,}3^2}{26} + \frac{1{,}7^2}{21}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2{,}3^2}{26}\right)^2}{26-1} + \frac{\left(\frac{1{,}7^2}{21}\right)^2}{21-1}} = 44{,}69$$

b) **[4 puntos]** Realice una prueba de hipótesis con un nivel de significancia del 4 % para determinar si la diferencia entre el tiempo de duración de carga de ambos modelos de batería es menor a 3 horas.(**Suponga que las varianzas son distintas**).

Normal

$H_0: \mu = 3 \ (\geq)$

$H_1: \mu < 3$

$n_1 = 26 \quad n_2 = 21 \quad d_0 = 3$

$\bar{x}_1 = 26 \quad \bar{x}_2 = 24 \quad v = 44{,}69$

$S_1 = 2{,}3 \quad S_2 = 1{,}7 \quad \alpha = 0{,}04$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$T_{obs} = \frac{26 - 24 - 3}{\sqrt{\frac{2{,}3^2}{26} + \frac{1{,}7^2}{21}}} = -1{,}71$$

$T_c = 0{,}04{,}\ 44{,}69 = -1{,}79$

$\boxed{\text{R/ Como } T_{obs} = -1{,}71 > T_c = -1{,}79 \text{ No se rechaza } H_0}$

Con valor P

$$T_{obs} = \frac{26-24-3}{\sqrt{\frac{2{,}3^2}{26} + \frac{1{,}7^2}{21}}} = -1{,}71$$

$v = 44{,}69$

$\alpha = 0{,}04$

$P(T < -1{,}71) = 0{,}047$

$\boxed{R/ \text{ Como } P = 0{,}047 > 0{,}04 \text{ No se rechaza } H_0}$

1. Suponga que las marcas de disco DVD para grabar con capacidad nominal de 4.7 gb son A y B. Los disco A son más baratos que los disco B, razón por la cuál un vendedor de accesorios para computadoras afirma que la capacidad promedio de los discos A es menor en por lo menos 70 mb a la capacidad promedio de los discos B. Se tomaron muestras de capacidades de ambos tipos de discos en mb, la información se resume en la siguiente tabla

$<$

Disco	tamaño de muestra	$\overline{x}$	s
tipo A	21	4698 mb	15 mb
tipo B	17	4752 mb	27 mb

(a) Un estudiante X del TEC, realizó la prueba de hipótesis para la afirmación del vendedor suponiendo que las desviaciones estándar de las capacidades, de ambos tipos de discos, son iguales. ¿Aceptó X la afirmación del vendedor? $R/$ No se halló evidencia significativa a favor de la afirmación.

$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$

con $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

y $\nu = n_1 + n_2 - 2$

$H_0: u_1 = u_2 - 70$ $\quad n_1 = 21$ $\quad n_2 = 17$ $\quad V = 21+17-2 = 36$

$H_0: u_1 - u_2 = -70$ $\quad \bar{x}_1 = 4698$ $\quad \bar{x}_2 = 4752$ $\quad d_0 = 70$

$H_1: u_1 - u_2 < -70$ $\quad S_1 = 15$ $\quad S_2 = 27$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$$S_p^2 = \frac{(21-1)\cdot 15^2 + (17-1)\cdot 27^2}{21+17-2} = 449$$

$$T_{obs} = \frac{4698-4752--70}{\sqrt{\frac{449}{21} + \frac{449}{17}}} = 2{,}31$$

$T_c = t_{0.05,36} = -1{,}69$

$\boxed{R/ \; T_{obs} > T_c \text{ se rechaza } H_0}$

10. Considere las siguientes variables aleatorias independientes

X_1 : variable normal con una desviación estándar de $\sigma_1 = 5.2$
X_2 : variable normal con una desviación estándar de $\sigma_2 = 3.4$

De X_1 se toma una muestra aleatoria de tamaño $n_1 = 25$ y se observa una media de $\overline{x}_1 = 81$. De X_2 se toma una segunda muestra de tamaño $n_2 = 36$ y se observa una media de $\overline{x}_2 = 78$. Pruebe la hipótesis, a un nivel de significancia del 0.05, que $\mu_1 = \mu_2$ contra la alternativa $\mu_1 \neq \mu_2$. $R/ \quad z_{obs} = 2.533\,01, z_{c1} = -1.96, \quad z_{c2} = 1.96, Valor\ P = 0.011\,406$.Hay evidencia en contra de que las medias sean iguales

Normal

$H_0: u_1 = u_2$ $\quad n_1 = 25 \quad n_2 = 36 \quad d_0 = 0$

$H_1: u_1 \neq u_2$ $\quad \bar{x}_1 = 81 \quad \bar{x}_2 = 78 \quad \alpha = 0{,}05$

$\sigma_1 = 5{,}2 \quad \sigma_2 = 3{,}4$

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z_{obs} = \frac{81 - 78}{\sqrt{\frac{5{,}2^2}{25} + \frac{3{,}4^2}{36}}} = 2{,}53$$

$$Z_c = Z_{0.05} = \pm 1{,}96$$

$\boxed{\text{R/ Como } Z_{c1} = -1{,}96 < Z_{obs} = 2{,}53 \not< Z_{c2} = 1{,}96 \text{ se rechaza } H_0}$

Con valor P

$$Z_{obs} = \frac{81 - 78}{\sqrt{\frac{5{,}2^2}{25} + \frac{3{,}4^2}{36}}} = 2{,}53$$

$$2P(Z > 2{,}53) = 0{,}01141$$

$\boxed{\text{R/ Como } P = 0{,}01141 < \alpha = 0{,}05 \text{ se rechaza } H_0}$

Ejemplo 106. Se obtuvieron las estaturas de 20 mujeres y 30 hombres tomados aleatoriamente de la población de alumnos de cierta escuela. En la siguiente tabla se resumen los datos encontrados

	Número	Promedio	Desviación
Hombres (m):	30	69.8	1.92
Mujeres (f):	20	63.8	2.18

Suponga que las estaturas de las mujeres y las estaturas de los hombres se distribuyen normalmente y tienen desviaciones estándar similares.

¿Puede concluirse, con un nivel de significancia del 4 %, que el promedio de estaturas de los hombres de la escuela supera en más de 3 cm el promedio de las mujeres?

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

con $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

y $\nu = n_1 + n_2 - 2$

Normal

$H_0: u_1 - u_2 \leq 3$ $\quad n_1 = 30 \quad n_2 = 20 \quad d_0 = 3$

$H_1: u_1 - u_2 > 3$ $\quad \bar{x}_1 = 69{,}8 \quad \bar{x}_2 = 63{,}8 \quad V = 48$

$s_1 = 1{,}92 \quad s_2 = 2{,}18 \quad \alpha = 0{,}04$

$$S_p^2 = \frac{(30-1) \cdot 1{,}92^2 + (20-1) \cdot 2{,}18^2}{48} = 4{,}108$$

$$T_{obs} = \frac{69{,}8 - 63{,}8 - 3}{\sqrt{\frac{4{,}108}{30} + \frac{4{,}108}{20}}} = 5{,}127$$

$$T_c = t_{0.04,\ 48} = 1{,}788$$

$$\boxed{\text{R/ Como } Z_{obs} = 5{,}127 > 1{,}788 \text{ se rechaza } H_0}$$