Solución I Examen I Semestre 2024

Pregunta #1: Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $a_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$

ⓐ Calcule los términos a_3 y a_4 (1 punto)

$$a_3 = \frac{3^3 \cdot 3!}{2\cdot 4\cdot 6} \Rightarrow a_3 = \frac{27}{8} \qquad a_4 = \frac{3^4 \cdot 4!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} \Rightarrow a_4 = \frac{81}{16}$$

ⓑ Determine si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no es monótona. (3 puntos)

Suponga que a_n es creciente, entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \frac{\dfrac{3^{n+1}\cdot (n+1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2)}}{\dfrac{3^n \cdot n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot (n+1)\,\cancel{n!}\cdot \cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\,(2n+2)\cdot \cancel{3^n}\cdot \cancel{n!}} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{3n+3}{2n+2} \geq 1$$

$$\Rightarrow 3n+3 \geq 2n+2$$

$$\Rightarrow n+1 \geq 0$$

Como la desigualdad es cierta para todo $n\geq 1$, la sucesión es creciente en todo su dominio.

Pregunta #2: Considere la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k-3}{3^k}$

ⓐ Demuestre utilizando el principio de inducción matemática que (3 puntos)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} \quad \text{para todo natural } n \geq 2$$

① Probar para $n=2$

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \quad ✓$$

② Hipótesis de inducción

Se asume que para algún $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$

Para $n+1$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad \text{por HI}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2n-1}{3^n \cdot 3} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{-3n+2n-1}{3^n \cdot 3} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

Por tanto, se demuestra que $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$, para todo n natural, con $n \geq 2$.

ⓑ Determine si la serie converge, en caso de ser convergente, determine el valor de convergencia. (2 puntos)

En este caso, basta con realizar lo siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} - \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \frac{1}{3} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n \cdot \ln(3)}$$

$$= \frac{1}{3} - 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

Por tanto, la serie converge y converge a $\frac{1}{3}$.

Pregunta #3: Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^{n+1}}{(3p)^{n-1}}$, donde p es constante y $p \neq 0$. Determine qué condición debe cumplir la constante p para garantizar la convergencia de la serie. Para estos valores, determine el valor de la suma en términos de p. (4 puntos)

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^{n+1}}{(3p)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^n \cdot (2p^2)}{(3p)^n \cdot (3p)^{-1}}$

$$= 6p^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2p}{3}\right)^n$$

Esta serie es geométrica y converge si $\left|\frac{2p}{3}\right| < 1$, es decir, si y solo si $-1 < \frac{2p}{3} < 1 \iff -\frac{3}{2} < p < \frac{3}{2}$.

Por tanto, la serie es convergente para $p \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$

Para hallar su valor de convergencia, debe darse lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^{n+1}}{(3p)^{n-1}} = 6p^3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}}_{p} \underbrace{\left(\frac{2p}{3}\right)^n}_{r}$$

$$= 6p^3 \cdot \frac{\left(\frac{2p}{3}\right)^1}{1 - \frac{2p}{3}}$$

$$= 6p^3 \cdot \frac{\frac{2p}{3}}{\frac{3-2p}{3}}$$

$$= 6p^3 \cdot \frac{2p}{3-2p}$$

$$= \frac{12p^4}{3-2p}$$

Pregunta #4: Utilizando el Criterio de la Integral, determine si la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$ converge o diverge. (5 puntos)

Sea $a_k = \frac{k}{e^{k^2}}$ y sea $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$

Ahora $f'(x) = \frac{1 \cdot e^{x^2} - x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{e^{x^2}}[1-2x^2]}{\cancel{e^{x^2}} \cdot e^{x^2}} < 0$

Por lo cual f es decreciente y a_k también lo es.

Ahora $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^{A} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

Aparte:

$$\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int \frac{1}{e^u}\,\frac{du}{2}$$

Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$\Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-u}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x^2}}{-1} + c$$

Retomando  se tiene que:

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{x}{e^{x^2}}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \left. \frac{-e^{-x^2}}{2} \right|_{x=1}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \cancelto{0}{\frac{-e^{-A^2}}{2}} - \frac{-e^{-1^2}}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2e}$$ la cual es convergente

Finalmente, como $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\, dx$ es convergente, por el Criterio de la Integral, $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K}{e^{K^2}}$ también es convergente.

Pregunta #5: Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

ⓐ $\displaystyle\sum_{K=2}^{\infty} \frac{\cos^2(K)}{K^2}$ a_K (4 puntos)

b_K

Note que $-1 \leq \cos^2(K) \leq 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{K^2} \leq \dfrac{\cos^2(K)}{K^2} \leq \dfrac{1}{K^2}$

Ahora $\displaystyle\sum_{K=2}^{\infty} \frac{1}{K^2}$ es convergente por el Criterio de las p-Series, pues $p>1$

Como $\displaystyle\sum_{K=2}^{\infty} \frac{1}{K^2}$ es convergente, por el Criterio de Comparación Directa, la serie $\displaystyle\sum_{K=2}^{\infty} \frac{\cos^2(K)}{K^2}$ también es convergente.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+5n^2}{(1+2n)^n}$ (4 puntos)

Aplicando el Criterio de la Raíz, se tiene que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3+5n^2}{(1+2n)^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3+5n^2}{(1+2n)^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(3+5n^2)^{\cancel{1/n}\ 0}}{(1+2n)^{n/n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+2n}$$

$$= 0 < 1$$

Como $0<1$, por el Criterio de la Raíz, la serie converge.

Pregunta #6: Considere la serie alternada $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln(n)}{n}$

ⓐ Pruebe que esta serie es convergente (3 puntos)

Utilizando el Criterio de las Series Alternadas, debe darse que:

ⓐ $\{a_n\}$ es decreciente

Sea $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ y sea $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Ahora $f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - \ln(x) \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0$

Por lo cual f es decreciente y a_n también lo es.

ⓑ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 0$$

Por tanto, por el Criterio de las Series Alternadas, se verifica que S es convergente.

ⓑ Determine el menor valor para N de manera que la suma parcial S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error tal que $E_N \leq 10^{-1}$ (2 puntos)

Por definición de cota de error $|S - S_N| \leq a_{n+1} < 0.1$, así $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < 0.1$

Seguidamente, se muestra una tabla que detalla el cumplimiento de la desigualdad:

n	a_{n+1}
1	0,3465
2	0,3662
⋮	⋮
34	0,1015
35	0,0995

Con esto, la desigualdad se cumple a partir de $N = 35$.

Pregunta #7: Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x-1)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$$

No analice los extremos del intervalo de convergencia (5 puntos)

Aplicando el Criterio de la Razón, se tiene que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{(n+1)!\cdot(x-1)^{n+1}}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}}{\dfrac{n!\cdot(x-1)^n}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{n!}\cdot\cancel{(x-1)^n}\cdot(x-1)\cdot\cancel{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}}{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}(2n+3)\cdot\cancel{n!}\,\cancel{(x-1)^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+3}\cdot|x-1|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|x-1|$$

Ahora $\frac{1}{2}|x-1| < 1 \iff |x-1| < 2$

$$\iff -2 < x-1 < 2$$

$$\iff -1 < x < 3$$

Así, el intervalo de convergencia es $]-1,3[$