Plan semanal del taller virtual CAL

Tutor	Marco Salazar Vega
Sesión	10
Fecha	Lunes 30 de setiembre del 2024 (semana 11)
Contenidos	a) Método de Gauss-Jordan
	b) Combinación de matrices y números complejos
Referencias	Material propio
Descripción general de las actividades	Se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en la sección denominada **Contenidos**. Finalmente, se asignan algunos ejercicios adicionales para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller. Se recomienda trabajar en las prácticas adicionales facilitadas.

Sistema de ecuaciones

Sea M un sistema de m ecuaciones y n incógnitas de la forma:

$$M = \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

donde los a_{ij} y b_i son números reales para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y los $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables o incógnitas.

Si $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ se llama **sistema de ecuaciones homogéneo**.

Representación matricial de un sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones M se puede escribir de forma matricial de la manera $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A la matriz A se le llama **matriz asociada de M o matriz de coeficientes**.

Matriz asociada o matriz de coeficientes

La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales corresponde con una matriz cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas en el sistema, con una fila para cada ecuación y una columna para cada incógnita (no incluye los valores que igualan a cada ecuación).

Matriz aumentada

La matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales corresponde con la matriz de coeficientes del sistema aumentada con una columna adicional que contiene las constantes a las cuales está igualada cada ecuación. Se denota como $(A|b)$

Solución de un sistema de ecuaciones

La solución del sistema de ecuaciones M será el vector columna x que satisface simultáneamente todas las ecuaciones. En caso de ser imposible formar dicho vector, entonces se dice que el sistema no tiene solución.

Gauss-Jordan

Los pasos utilizados para resolver un sistema de ecuaciones con este método son:

1. Representar el sistema de la forma $Ax = b$.
2. Obtener la matriz escalonada reducida por filas.
3. Resolver el sistema de ecuaciones obtenido.
4. Brindar el conjunto solución.

Ejercicio #1: Utilizando el método de Gauss-Jordan determine el conjunto solución y halle dos soluciones particulares de los siguientes sistemas lineales:

a) $$\begin{cases} 5x - 15y + 4z = 7 \\ 2x - 6y + 4z = 12 \\ 3x - 9y + 4z = 11 \end{cases}$$

Representación matricial del sistema:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & -15 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 4 & 7 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{5}\widetilde{F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4/5 & 7/5 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right) \underset{-3F_1+\widetilde{F_3}}{\overset{-2F_1+\widetilde{F_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 12/5 & 46/5 \\ 0 & 0 & 8/5 & 34/5 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{5}{12}\widetilde{F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 23/6 \\ 0 & 0 & 8/5 & 34/5 \end{array}\right) \underset{-\frac{8}{5}F_2+\widetilde{F_3}}{\overset{-\frac{4}{5}F_2+\widetilde{F_1}}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 23/6 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right) \end{array}$$

Así $$\begin{cases} x - 3y = -5/3 \\ z = 23/6 \\ 0 = 2/3 \quad \Rightarrow\Leftarrow \end{cases}$$

$\therefore$ Es un sistema inconsistente

$S = \{\ \}$ o $S = \emptyset$

b) $\begin{cases} a-2b+c-d+2e=10 \\ 2a-4b+4d+2e=8 \\ -4a+8b+c-11d-2e=-10 \end{cases}$

Representación matricial del sistema:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 1 & -11 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 2 & -4 & 0 & 4 & 2 & 8 \\ -4 & 8 & 1 & -11 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{4F_1+\tilde{F}_3}{\overset{-2F_1+\tilde{F}_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 6 & 30 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{2}\tilde{F}_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 6 & 30 \end{array}\right) \underset{-5F_2+\tilde{F}_3}{\overset{-F_2+\tilde{F}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{-F_3+\tilde{F}_2}{\overset{-F_3+\tilde{F}_1}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{Así} \begin{cases} a-2b+2d=4 \\ c-3d=6 \\ e=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4+2b-2d \\ c=6+3d \\ e=0 \end{cases}$$

$$S=\{(\underset{a}{4+2b-2d}, \underset{b}{b}, \underset{c}{6+3d}, \underset{d}{d}, \underset{e}{0})\}, \text{ con } b,d \in \mathbb{R}$$

Soluciones particulares:

⊛ Para $b=d=0$

$(4+2\cdot 0-2\cdot 0, 0, 6+3\cdot 0, 0, 0)$

$=(4,0,6,0,0)$

⊛ Para $b=d=1$

$(4+2\cdot 1-2\cdot 1, 1, 6+3\cdot 1, 1, 0)$

$=(4,1,9,1,0)$

Combinación de matrices y números complejos

Ejercicio #1: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcule $30A^{-1} + B^T \cdot C$

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot -3}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 \\ -1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 30A^{-1} = 30\begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 \\ -1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 30A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ i & -3 \end{pmatrix} \qquad B^T \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ i & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 0 & 3\cdot -i + 2\cdot 1 \\ i\cdot 2 + -3\cdot 0 & i\cdot -i + -3\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3i + 2 \\ 2i & -2 \end{pmatrix}$$

Así $30A^{-1} + B^T C = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3i+2 \\ 2i & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 11-3i \\ -6+2i & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio #2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2i & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2i \end{pmatrix}$$

Determine la matriz X si se sabe que $XA^{-1} - B^T = C^T$

$$XA^{-1} - B^T = C^T \Rightarrow XA^{-1} = C^T + B^T$$

$$\Rightarrow XA^{-1} \cdot A = (C^T + B^T) \cdot A \qquad \text{pues } AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$$\Rightarrow X \cdot I = (C^T + B^T) \cdot A \qquad \text{pues } I_n A = A I_n = A$$

$$\Rightarrow X = (C^T + B^T) \cdot A$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

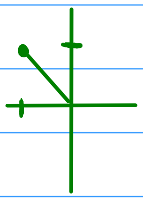
$$C^T + B^T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$(C^T + B^T)A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -i \end{pmatrix}_{3\times \cancel{2}} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\cancel{2}\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$z = \ln(-2i) + \frac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(-1+i^{23})^{10}}$$

$$i^{23} = (i^4)^5 \cdot i^3$$
$$= 1^5 \cdot i^3$$
$$= i^3$$
$$= -i$$

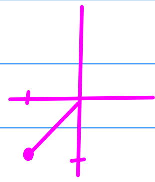
Sea $p = -\sqrt{3}+i$ 

$|p| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$
$= 2$

$\theta = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi$
$= \frac{5\pi}{6}$

$p = 2\,\text{Cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow p^6 = \left[2\,\text{Cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]^6$
$= 64 \cdot \text{Cis}(5\pi)$

$K = -1-i$ 

$|K| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi$
$= -\frac{3\pi}{4}$

$K = \sqrt{2}\ \text{Cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow K^{10} = \left[\sqrt{2} \cdot \text{Cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{10}$
$= 32 \cdot \text{Cis}\left(-\frac{15\pi}{2}\right)$

Ahora $\frac{p^6}{k^{10}} = \frac{64 \cdot Cis(5\pi)}{32 \cdot Cis\left(-\frac{15\pi}{2}\right)}$

$$= 2 \; Cis\left(5\pi - -\frac{15\pi}{2}\right)$$
$$= 2 \; Cis\left(\frac{25\pi}{2}\right)$$
$$= 2\,[0 + i]$$
$$= 2i$$

Sea $m = -2i$

$|m| = \sqrt{0^2 + (-2)^2}$
$= 2$

$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{0}\right)$

$= -\frac{\pi}{2}$

$$Ln(-2i) = Ln\left(2 \, Cis\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$
$$= Ln(2) + Ln\left(Cis\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$
$$= Ln(2) + -\frac{\pi}{2} i$$

Finalmente

$$z = Ln(-2i) + \frac{(-\sqrt{3} + i)^6}{(-1 + i^{23})^{10}} \Rightarrow z = Ln(2) - \frac{\pi}{2} i + 2i$$
$$\Rightarrow z = Ln(2) + \left(\frac{-\pi}{2} + 2\right) i$$

Considere el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 34x^2 + ax - 65$ tal que en el proceso de factorización de $P(x)$ se realiza lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & -12 & 34 & a & -65 & 2-3i \\ \downarrow & 6-9i & -39 & b & 65 & \\ \hline 3 & -6-9i & -5 & 10+15i & 0 & \end{array}$$

a) (2pts) Determine el valor de a y b

$-5(2-3i) = b \Rightarrow -10 + 15i = b$

$a + b = 10 + 15i \Rightarrow a + -10 + 15i = 10 + 15i$

$\Rightarrow a = 10 + \cancel{15i} + 10 - \cancel{15i}$

$\Rightarrow a = 20$

b) (2pts) Determine los ceros complejos de $P(x)$. Justifique su respuesta.

Por el Teorema de los Ceros Conjugados $2+3i$ también es un cero de $P(x)$

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & -6-9i & -5 & 10+15i & 2+3i \\ \downarrow & 6+9i & 0 & -10-15i & \\ \hline 3 & 0 & -5 & 0_{/\!/} & \\ x^2 & x^1 & x^0 & & \end{array}$$

$3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

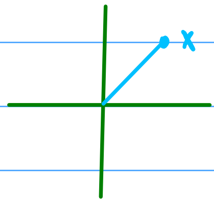
Así los ceros complejos de $P(x)$ son:

$2+3i$ y $2-3i$

2. **[3 ptos.]** Sea $m \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{R}$. Dados los números complejos $x = 6 + 6\sqrt{3}i$ y $z = 4\sqrt{3} + 4i$, si se sabe que $\dfrac{x^{13}}{z^m} = k\operatorname{cis}\left(\dfrac{8\pi}{3}\right)$, encuentre un posible valor de m.

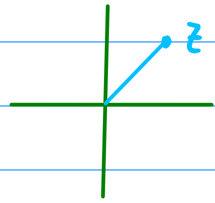
Note que $x = 6 + 6\sqrt{3}i$

$$|x| = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2}$$
$$= 12$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{6\sqrt{3}}{6}\right)$$
$$= \frac{\pi}{3}$$



Note que $z = 4 + 4\sqrt{3}i$

$$|z| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$$
$$= 8$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi}{3}$$



Se sabe que $\dfrac{x^{13}}{z^m} = K\operatorname{Cis}\left(\dfrac{8\pi}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{x^{13}}{K\operatorname{Cis}\left(\frac{8\pi}{3}\right)} = z^m$

$$\Rightarrow \frac{\left[12\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{13}}{K\operatorname{Cis}\left(\frac{8\pi}{3}\right)} = \left[8\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^m$$

$$\Rightarrow \frac{\left[12\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{13}}{K\cdot\left[\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^8} = \left[8\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^m$$

$$\Rightarrow \frac{12^{13}\cdot\left[\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{13}}{K\cdot\left[\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^8} = \left[8\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^m$$

$$\Rightarrow \frac{12^{13}\cdot\left[\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{5}}{K} = \left[8\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^m$$

$$\Rightarrow \frac{12^{13}}{K} \cdot \left[Cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^5 = \left[8\, Cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^m$$

$$\Rightarrow \frac{12^{13}}{K} \cdot Cis\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 8^m \cdot Cis\left(\frac{m\pi}{3}\right)$$

Note que para que la igualdad sea verdadera, debe darse que

$\frac{12^{13}}{K} = 8^m \Rightarrow \log_8\left(\frac{12^{13}}{K}\right) = m$ y que

$$Cis\left(\frac{5\pi}{3}\right) = Cis\left(\frac{m\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{m\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 5 = m$$

Así, tome $m = 5$.

Ejercicios adicionales

Ejercicio: Utilizando el método de Gauss-Jordan determine el conjunto solución y halle dos soluciones particulares de los siguientes sistemas lineales:

a) $$\begin{cases} 2z+14w=7 \\ -x+y-z+2w=9 \\ -2x+2y-3z-w=-1 \end{cases}$$

R/ $\left(y-\frac{329}{4}, y, \frac{231}{4}, \frac{-31}{4}\right)$, con $y \in \mathbb{R}$

b) $$\begin{cases} x+3y-2z=-3 \\ 3x+5y-2z-w=-2 \\ x-y+2z-w=4 \end{cases}$$

R/ $\left(-z+\frac{3w}{4}+\frac{9}{4}, \frac{-7}{4}+z-\frac{w}{4}, z, w\right)$, con $z, w \in \mathbb{R}$