Series alternadas

Forma: $\sum a_n \cdot \underbrace{(-1)^n}_{n \text{ alterna}}$ $-1, 1, -1, 1 \ldots$

$\sum a_n (-1)^{n+1}$

$\sum a_n (-1)^{n-1}$

$\sum a_n \underbrace{\cos(n\pi)}_{n \text{ alterna}}$

$\sum a_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

Resumen $(-1)^n = \cos(n\pi) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

Interesa analizar

A) Convergencia — La serie sin alternar diverge pero cumple el crit de series alternadas

B) Convergencia condicional $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Diverge $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2}\right)$ $(n \to \infty \wedge f \downarrow)$

C) Convergencia absoluta $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge absolutamente, no hace falta nada mas$\right)$

D) Estimar el error de la serie

$E = |S - S_k|$

I) Conver o diver?

Convergencia de una $\sum$ alternada requiere

1) a_n sea decreciente $(a_n \downarrow)$ — Para que converja

   - $f'(x)$
   - comparacion $a_n \geq a_{n+1}$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $(a_n \to 0)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to$ Armonica Alternada

$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \cdot (-1)^{n+1}$ → Armonica, divergente

Se estudia esta y se deja el alternado afuera

Sea $a_n = \frac{1}{n}$, decrece?

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f' > 0 \nearrow$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ negativa $\searrow$ $\quad f < 0 \searrow$

∴ Decrece

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Se cumplen ambas condiciones

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ Converge condicionalmente

esto por que la serie estudiada diverge pero esa serie (la estudiada) cumple el crit de series alternadas

Armonica → Divergente

Armonica alternada → Convergente

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, determine Converge?

Valor N de manera que S_N aproxime el valor de la serie con un error $E_N \geq 0.0001$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, Converge?

$- \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(2n)!}}_{a_n} \cdot (-1)^n$

Decreciente?

$a_n \geq a_{n+1}$

$\frac{1}{(2n)!} \geq \frac{1}{(2(n+1))!}$

$\frac{1}{(2n)!} \geq \frac{1}{(2n+2)!}$

$\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \geq 1$

$\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \geq 1$

$(2n+2)(2n+1) \geq 1$

$n=0 \quad 2 \geq 1$ ✓

$\therefore$ Es creciente

Sea $f(x) = \frac{1}{(2x)!}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(2x)!} = 0$

Por 1 y 2 $\rightarrow$ converge condicionalmente

Parte 2

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ Valor N de manera que S_N aproxime el valor de la serie con un error $E_N \geq 0.0001$

Sabemos $|E_N| \leq a_{n+1} \leq 0,0001$ (valor que pidan de error)

$a_n = \frac{1}{(2n)!}$

$a_{n+1} \leq 0,0001$

$\frac{1}{(2n+2)!} \leq 0,0001$

No se puede despejar n $\rightarrow$ hacer tabla de valores

	n (el primero es $n=0$)	$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}$
$N=1$	0	0,5 X
$N=2$	1	0,041 X
$N=3$	2	0,00138 X
$N=4$	3	0,0000248 ✓ $\leq 0,0001$

La aprox se logra con error $\leq 0,0001$ cuando $n=3$ que $\leftrightarrow$ a la cuarta suma parcial ($N=4$, es decir, los 4 primeros terminos)

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} = \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0)!} + \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1)!} + \frac{(-1)^2}{(2\cdot 2)!} + \frac{(-1)^3}{(2\cdot 3)!}$$

$N = 4$ terms

$$= \frac{389}{720} = 0,5402$$

Valor de Suma = 0,5402 con error $\leq$ que 0,0001

Conver abs si a_n converge

Conver condi si a_n diverge pero $(-1)^n a_n$ converge (Alternada)

con (el lim $\wedge$ F ☆)

Conver abs, condi o diver? (cumple lo demas)

3) $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h \, h}{\left(2 - \frac{1}{h}\right)^h}$ Alternado

se quita p/ $(-1)^h$

$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{h}{\left(2 - \frac{1}{h}\right)^h}$ ¿Es absoluta?

$\left(\lim_{h\to\infty} a_n \neq 0\right)$ } Diverge

Por crit de raiz

$$\lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{\frac{h}{\left(2 - \frac{1}{h}\right)^h}}$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt[h]{h}}{\sqrt[h]{\left(2 - \frac{1}{h}\right)^h}} \quad \sqrt[h]{h} = 1$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{h}} = \frac{1}{2} < 1 \quad \left(\frac{1}{h} = 0\right)$$

Converge Absolutamente

Aca no hace falta lo decreciente, por que la analizada le quitamos lo alternando

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}$

Absoluta? NO JAJA

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, p serie, $p < 1$ diverge

A) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 0$ (Sino diverge por (vit de divergencia)

B) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f' = \frac{-1}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)^2}$ Derivee < 0

Por A ∧ B converge (ondicionalmente

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n)}$

Absoluta?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

Por (vit de integral

$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$

$f'(x) = \frac{-1}{(\quad)^2} \cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{x}}$

$(x\ln(x))$

$= \frac{-\ln(x)}{(x\ln(x))^2}$ Decrece

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \quad u=\ln(x) \quad du=\frac{1}{x}dx$

$\ln|\ln(x)|\Big|_2^{+\infty} \qquad \int \frac{1}{u}\,du$

$\ln|\ln(x)|$

$\lim_{x\to+\infty} \ln|\ln(x)| - \ln|\ln(2)|$

$= +\infty$

∴ Diverge

Converge condicionalmente por que la serie

Sin el $(-1)^{n-1}$ diverge

Con el $(-1)^{n-1}$ converge

Sin el alternado diverge pero el $\lim_{n\to+\infty}$ es 0 ∧ $f'(x)\searrow$

(Se cumple lo demas)

Condicional?

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = 0$ ✓

2) Es decreciente? Si

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$

Abs(Quitar $(-1)^n$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$

Por crit de raiz

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}}{\sqrt[n]{e^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2}}{e} \quad (\frac{1}{n}\to 0) \quad = \frac{4}{e} > 1$$

Diverge

Crit de Series alt

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{e} \right)^n \quad (\frac{1}{n}\to 0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^{+\infty} = +\infty$$

Diverge