Examen Parcial III

20 de noviembre 2018

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable, ni el uso de dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica. El examen consta de **8 preguntas** con un puntaje máximo de **30 puntos** y una **pregunta opcional**. Dispone de **2 horas y 30 minutos** para realizar el examen.

#1 Si $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ m+1 & n+b & 3+c \\ 3a & 6 & 3p \end{vmatrix} = 27$, calcule $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & 2 & p \\ m & n & 3 \end{vmatrix}$ sin desarrollar el determinante.

(2 puntos)

#2 Considere los vectores $\mathbf{u} = (1,-2,0)$, $\mathbf{v} = (3,-4,1)$ y $\mathbf{w} = (2,1,c)$, $c \in \mathbb{R}$. Determine el valor de c para el cual, el vector $\mathbf{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

(3 puntos)

#3 Considere los vectores $\mathbf{u} = (1,a,1)$ con $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} = (3,2,1)$. Si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, determine los vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ que cumplen de manera simultánea las condiciones siguientes:

(4 puntos)

- $\mathbf{w}$ es paralelo a $\mathbf{v}$
- $||\mathbf{w}|| = 2\,||\mathbf{u}||$

#4 Considere los puntos $A(1,2,1)$, $B(3,-1,7)$ y $C(7,4,-2)$.

a) Verifique que A, B y C son los vértices de un triángulo isósceles. **(2 puntos)**

b) Calcule la medida del ángulo cuyo vértice es B. **(2 puntos)**

c) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y C. **(2 puntos)**

Continúa en la página siguiente...

#5 Considere el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}$ con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores tales que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pruebe que $\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. **(2 puntos)**

#6 Determine ecuaciones simétricas de la recta L que cumple simultáneamente las condiciones siguientes: **(5 puntos)**

- Es perpendicular al plano determinado por los puntos:

$$A(1,2,3),\ B(3,0,0)\ \text{ y }\ C(4,0,0)$$

- Contiene el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 dadas por las ecuaciones:

$$L_1 : (x,y,z) = (3,4,-4) + t(-1,-2,3),\ \ t \in \mathbb{R}$$

$$L_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-4} = z - 1$$

#7 Determine una ecuación del plano π que cumple simultáneamente las condiciones siguientes: **(4 puntos)**

- Es perpendicular al plano $\theta : -2x + y - z = 1$
- Es paralelo a la recta $L : 1 - x = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$
- Contiene al punto $P(2,-3,1)$

#8 Calcule la distancia del punto $P(1,2,-3)$ al plano $\pi : 3x - 2y + 2z + 1 = 0$. Debe incluir un esquema geométrico como parte de la justificación de su procedimiento de cálculo. **(4 puntos)**

Ejercicio opcional

El siguiente ejercicio es opcional. Sin embargo, se asignará puntaje únicamente a las soluciones completamente correctas, o bien se asignará un porcentaje parcial a las soluciones que, a criterio del profesor, se acerquen considerablemente a la solución correcta. En caso que la asignación de puntos en este ejercicio provocara que el estudiante obtenga un puntaje en la prueba mayor que el puntaje máximo, entonces se asignará dicho puntaje máximo y una nota de 100 en el examen.

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Determine los valores propios de A y los vectores propios asociados a cada valor propio. **(4 puntos)**

Cálculo y Álgebra Lineal
Solución III Parcial

1) **2 puntos**

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ m+1 & n+b & 3+c \\ 3a & 6 & 3p \end{vmatrix} = 27$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ m & n & 3 \\ 3a & 6 & 3p \end{vmatrix} = 27$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ m & n & 3 \\ a & 2 & p \end{vmatrix} = 9$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & 2 & p \\ m & n & 3 \end{vmatrix} = -9$$

2) **3 puntos**

$$(2,1,c) = a(1,-2,0) + b(3,-4,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 2 \\ -2a - 4b = 1 \\ b = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & c-5/2 \end{array}\right)$$

Para $c = \frac{5}{2}$ el sistema tiene solución y $\mathbf{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

3) **4 puntos**

$$(1,a,1)\cdot(3,2,1) = 0$$

$$\Rightarrow 3 + 2a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow ||u|| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$w = t(3,2,1) = (3t, 2t, t)$$

$$\Rightarrow \sqrt{9t^2 + 4t^2 + t^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 14t^2 = 24$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{12/7}, t = -\sqrt{12/7}$$

Los vectores son:

$$(3\sqrt{12/7}, 2\sqrt{12/7}, \sqrt{12/7})$$

$$(-3\sqrt{12/7}, -2\sqrt{12/7}, -\sqrt{12/7})$$

4a) **2 puntos**

$$\overrightarrow{BA} = (-2,3,-6) \Rightarrow ||\overrightarrow{BA}|| = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{BC} = (4,5,-9) \Rightarrow ||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{122}$$

$$\overrightarrow{AC} = (6,2,-3) \Rightarrow ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{49} = 7$$

Como $||\overrightarrow{BA}|| = ||\overrightarrow{AC}||$ el triángulo es isósceles.

4b) **2 puntos**

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BA}||||\overrightarrow{BC}||}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{(-2,3,-6)\cdot(4,5,-9)}{7\sqrt{122}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{61}{7\sqrt{122}}$$

$$\theta = 37,91^\circ$$

4c) **2 puntos**

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -6 \\ 4 & 5 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (3,-42,-22)$$

$$A = \frac{||(3,-42,-22)||}{2} = \frac{\sqrt{2257}}{2} \approx 23,75$$

5) **2 puntos**

$$w\cdot v = \left(u - \frac{u\cdot v}{||v||^2}v\right)v$$

$$= u\cdot v - \frac{u\cdot v}{||v||^2}(v\cdot v)$$

$$= u\cdot v - \frac{u\cdot v}{||v||^2}||v||^2$$

$$= u\cdot v - u\cdot v$$

$$= 0$$

Por lo tanto, los vectores son ortogonales.

6) **5 puntos**

$$\overrightarrow{AB} = (2,-2,-3)$$
$$\overrightarrow{AC} = (3,-2,-3)$$

$$v_L = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (0,-3,2)$$

De la ecuación de L_1 se obtiene:

$$x = 3 - t$$
$$y = 4 - 2t$$
$$z = -4 + 3t$$

Sustituyendo en ecuaciones de L_2:

$$\frac{3-t+1}{2} = \frac{4-2t-4}{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{4-t}{2} = \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow 4 = 2t$$

$$\Rightarrow t = 2$$

$$\frac{4-2\cdot 2-4}{-4} \stackrel{?}{=} -4+3\cdot 2-1$$

$$1 = 1\checkmark$$

Punto de intersección es $(1,0,2)$

La ecuación es:

$$x = 1;\ \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

7) **4 puntos**

$$n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (5, 7, -3)$$

$$5x + 7y - 3z = d$$

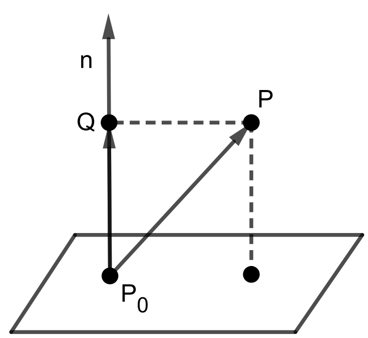
$$\Rightarrow 5 \cdot 2 + 7 \cdot -3 - 3 \cdot 1 = d$$

$$\Rightarrow d = -14$$

La ecuación del plano es:

$5x + 7y - 3z = -14$

8) **4 puntos**



$$P = (1, 2, -3)$$

$$P_0 = (1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (0, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{P_0Q} = proy_n \overrightarrow{P_0P}$$

$$= \frac{(0, 1, -2) \cdot (3, -2, 2)}{17}(3, -2, 2)$$

$$= -\frac{6}{17}(3, -2, 2)$$

$$= \left(-\frac{18}{17}, \frac{12}{17}, -\frac{12}{17}\right)$$

$$d = ||\overrightarrow{P_0Q}||$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{18}{17}\right)^2 + \left(-\frac{12}{17}\right)^2 + \left(-\frac{12}{17}\right)^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

9) Opcional **4 puntos**

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3, \lambda = -4$$

Para $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2y}{5}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-2y}{5} \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda = -4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$