Variables aleatorias discretas

Medidas de tendencia central

1. Dada la siguiente tabla:

X	1	3	4	5
$f(X_i)$	0,40	0,10	0,20	0,30

   a) Calcule $E(X)$ R/ 3

   b) Calcule $Var(X)$ R/ 3

   c) Calcule σ_X R/ $\sqrt{3}$

2. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad f_X está dada por la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{4}{17}$

   a) Calcule $E(X)$ R/ $\frac{30}{17}$

   b) Calcule $Var(X)$ R/ $\frac{800}{289}$

   c) Calcule σ_X R/ $\frac{20\sqrt{2}}{17}$

3. Sea X una variable aleatoria discreta, para la cual se sabe que su rango es $\{1, 2, 3, 4\}$ y se tiene que $f_X(1) = 0{,}13$, $f_X(2) = 0{,}0169$, $f_X(3) = 0{,}002197$ y se desconoce el valor de $f_X(4)$

   a) Determine el valor de $f_X(4)$ R/ 0,8509

   b) Calcule $E(X)$ R/ 3,5740

   c) Calcule $Var(X)$ R/ 1,0583

   d) Calcule σ_X R/ 1,0272

4. Dada la siguiente tabla:

X	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	k	0,20

   a) Determine el valor de k. R/ 0,3

   b) Encuentre la función acumulada de X.

   c) Calcule $E(X)$ R/ $\frac{67}{20}$

   d) Calcule $Var(X)$ R/ $\frac{611}{400}$

   e) Calcule σ_X R/ $\frac{\sqrt{611}}{20}$

5. La tienda Zapatiño se ha percatado que en su sucursal más nueva reciben máximo 8 clientes por hora. Si X es una variable aleatoria discreta, correspondiente a la cantidad de clientes en la tienda, por hora, entonces considere la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(X)$	0,05	0,10	0,10	0,10	0,20	0,25	0,10	0,05	0,05

   a) Demuestre que f es una distribución de probabilidad para X.

   b) Calcule $E(X)$ R/ 4

   c) Calcule $Var(X)$ R/ $\frac{41}{10}$

6. Determine la varianza de la variable $Y = \dfrac{X}{4} - 7$ si $E(Y) = -6$ y $E(X^2) = 17$ R/ $\dfrac{1}{16}$

7. Determine la varianza de $Y = \dfrac{X}{18} - 2$ si $E(Y) = 23$ y $E(X^2) = 250\,000$ R/ $\dfrac{11\,875}{81}$

8. Sean X, Y dos variables aleatorias discretas tales que $Var(3X+7) = 10$, $E(4X+2) = 9$. Calcule $E(X^2)$ R/ $\dfrac{601}{144}$

9. Considere la variable aleatoria X con las condiciones $Y = 3X+5$, $E(Y) = 14$, $E(Y^2) = 250$.

   a) Determine $E(X)$ R/ 3

   b) Determine $Var(X)$ R/ 6

   c) Determine σ_X R/ $\sqrt{6}$

10. Considere la variable aleatoria Z tal que $E(Z) = 2$ y $Var(Z) = 6$. Determine $E(W)$, donde $W = 3Z^2 - 2Z + 5$ R/ $E(W) = 31$

Función de distribución

1. Sea X una variable aleatoria discreta. Pruebe que $f_X(x) = \dfrac{2}{3^{x+1}}$ es función de distribución, con $x = 0, 1, 2, \ldots$

2. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que su función de distribución sea $f_X(x) = \dfrac{k}{7^x}$, con $x = 0, 1, 2, \ldots$ R/ $k = \dfrac{6}{7}$

3. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que su función de distribución sea R/ $k = \dfrac{35}{6}$

$$f_X(x) = \frac{k}{6^{2x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

4. Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   Determine el valor de k R/ $k = 18$

5. Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que su función de distribución sea R/ $k = 5$

$$f_X(x) = \frac{k^x \cdot e^{-5x}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

6. Sea X una variable aleatoria discreta con función generadora de momentos $m_X(t) = \dfrac{e^{kt}}{2 - e^t}$ y $E(X) = 3$. Determine el valor de k. R/ $k = 11$

7. Una variable aleatoria X toma valores $1, 2, 3, \ldots, 25$ con probabilidades

$$f_X(i) = k \cdot (0{,}16)^{\frac{i}{2}}$$

   a) Encuentre el valor de k. R/ $\dfrac{3}{2}$

   b) Determine la probabilidad de que esta variable sea superior a 5. R/ 0,0102

8. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - k & \text{si} \quad x = -1 \\ \dfrac{1}{6} + k^2 & \text{si} \quad x = 0 \\ 2k & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

con $R_X = \{-1, 0, 1\}$

   a) Encuentre el valor de k. R/ $\dfrac{\sqrt{21}}{6} - \dfrac{1}{2}$

   b) Determine la esperanza y varianza de X en términos de k.

9. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Determine el valor de k para que f_X sea función de probabilidad. R/ $k = 2 - e^2$

10. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + k \cdot \frac{2^{x-1}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Determine el valor de k para que f_X sea función de probabilidad. R/ $k = \dfrac{1}{e^2}$

11. Sea X una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{2, 4, 6, 8\}$ y función de distribución acumulada

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 2 \\ 0{,}2 & \text{si} \quad 2 \leq k < 4 \\ 0{,}6 & \text{si} \quad 4 \leq k < 6 \\ 0{,}8 & \text{si} \quad 6 \leq k < 8 \\ 1 & \text{si} \quad k \geq 8 \end{cases}$$

   a) Determine la función de distribución de probabilidad de X.

   b) Determine $E(X)$ R/ $\dfrac{24}{5}$

   c) Determine $Var(X)$ R/ $\dfrac{104}{25}$

12. Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Determine el valor de k R/ $k = 120$

   b) Sea $m \in \mathbb{N}^*$, determine la función acumulada evaluada en m. R/ $1 - \left(\frac{1}{25}\right)^{m+1}$

   c) Determine $P(X < 3)$ R/ $\frac{15\,624}{15\,625}$

13. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(k) = \frac{c}{6^{2k-1}}, \text{ con } k = 2, 3, 4, \ldots \text{ y } c \in \mathbb{R}$$

   a) Determine el valor de c R/ $c = 210$

   b) Sea $m \in \mathbb{N}^*$, determine la función acumulada evaluada en m R/ $1 - 36\left(\frac{1}{36}\right)^{m}$

   c) Determine $P(X > 3)$ R/ $\frac{1}{1\,296}$

   d) Determine $P(X \geq 3)$ R/ $\frac{1}{36}$

14. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{4x+2}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Determine el valor de k R/ $k = \frac{609}{100}$

   b) Sea $m \in \mathbb{N}^*$, determine la función acumulada evaluada en m R/ $1 - \left(\frac{16}{625}\right)^{m+1}$

   c) Determine $P(X > 2)$ R/ $\frac{4\,096}{244\,140\,625}$

15. Sea Y una variable aleatoria discreta cuya función generadora de momentos tiene criterio:

$$m_Y(t) = \frac{3}{10} + \frac{3e^t}{10} + \frac{2e^{2t}}{5}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Determine la esperanza y la varianza de Y R/ $E(Y) = \dfrac{11}{10}$ y $Var(Y) = \dfrac{69}{100}$

16. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{4^x \cdot e^{-4}}{2 \cdot x!} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Pruebe que la función generadora de momentos para $f_X(x)$ viene dada por

$$m_X(t) = \frac{e^{4e^t - 4}}{2} + \frac{1}{2(2 - e^t)} \text{ si } e^t < 2$$

17. Sean X y Y variables aleatorias tales que $m_X(t) = \dfrac{5}{(5-t)^2}$ y $Y = X^2 + 3X - 9$

   a) Determine la esperanza de la variable X R/ $\dfrac{2}{25}$

   b) Determine la esperanza de la variable Y R/ $\dfrac{-1\,089}{125}$

18. Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = \frac{3}{4^{x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Compruebe que $f_X(x)$ satisface las condiciones necesarias para ser una función de probabilidad.

   b) Determine la función generadora de momentos de X R/ $m_X(t) = \dfrac{-3}{e^t - 4}$

   c) Utilizando el inciso anterior, determine $E(X)$ R/ $\dfrac{1}{3}$

   d) Utilizando el inciso anterior, determine $Var(X)$ R/ $\dfrac{4}{9}$

   e) Utilizando el inciso anterior, determine σ_X R/ $\dfrac{2}{3}$

19. Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = \frac{2^{x+1}}{4^x}, \text{ con } x = 2, 3, 4, \ldots$$

   a) Determine la función generadora de momentos de X R/ $m_X(t) = \dfrac{e^{2t}}{2 - e^t}$

   b) Utilizando el inciso anterior, determine $E(X)$ R/ 3

   c) Utilizando el inciso anterior, determine $Var(X)$ R/ 2

   d) Utilizando el inciso anterior, determine σ_X R/ $\sqrt{2}$

20. Sea X una variable aleatoria discreta, cuya función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{k}{5^{x+1}}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Determine el valor de k R/ $k = 4$

   b) Determine la función generadora de momentos para f R/ $\dfrac{4}{5 - e^t}$

   c) Utilizando el inciso anterior, calcule $E(X)$ R/ $\dfrac{1}{4}$

   d) Utilizando el inciso anterior, calcule $Var(X)$ R/ $\dfrac{5}{16}$

   e) Utilizando el inciso anterior, calcule σ_X R/ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

21. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad f_X definida por

$$f_X(x) = \frac{3^x \cdot e^{-3}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Compruebe que f_X satisfsface las condiciones necesarias para ser una función de distribución de probabilidad.

   b) Determine la función generadora de momentos de X R/ $m_X(t) = e^{3e^t - 3}$

   c) Utilizando el inciso anterior, determine $E(X)$ R/ 3

   d) Utilizando el inciso anterior, determine $Var(X)$ R/ 3

22. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad f_X definida por

$$f_X(x) = \frac{5^x \cdot e^{-5}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Compruebe que f_X satisface las condiciones necesarias para ser una función de distribución de probabilidad.

   b) Determine la función generadora de momentos de X R/ $m_X(t) = e^{5e^t - 5}$

   c) Utilizando el inciso anterior, determine $E(X)$ R/ 5

   d) Utilizando el inciso anterior, determine $Var(X)$ R/ 5

23. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad f_X definida por

$$f_X(x) = \frac{2^x \cdot e^{-3}}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Compruebe que f_X satisface las condiciones necesarias para ser una función de distribución de probabilidad.

   b) Determine la función generadora de momentos de X R/ $m_X(t) = e^{2e^t - 3}$

   c) Utilizando el inciso anterior, determine $E(X)$ R/ $2e^{-1}$

   d) Utilizando el inciso anterior, determine $Var(X)$ R/ $6e^{-1} - 4e^{-2}$

24. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = C(20, x) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{20-x}$$

   a) Determine la función generadora de momentos para X. R/ $m_X(t) = \left(\frac{3e^t + 2}{5}\right)^{20}$

   b) Determine $E(X)$ R/ 12

   c) Determine $Var(X)$ R/ $\frac{24}{5}$

25. Una variable aleatoria discreta X toma valores

$$f_X(k) = \frac{M}{6^{k-2}} \text{ para } k = 4, 5, 6, \ldots$$

   a) Determine el valor de M R/ 30

   b) Determine la función acumulada para f evaluada en p R/ $1296 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{p+1}$

   c) Determine la función generadora de momentos para X R/ $\frac{5e^{4t}}{6-e^t}$

   d) Utilizando el inciso anterior, calcule $E(X)$ R/ $\frac{21}{5}$

   e) Utilizando el inciso anterior, calcule $Var(X)$ R/ $\frac{6}{25}$

26. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k \cdot 4^{1-2x}, \text{ con } x = 1, 2, 3 \ldots \text{ y } k \text{ constante.}$$

   a) Determine el valor de k para que f sea distribución de probabilidad. R/ $k = \frac{15}{4}$

   b) Sea $m \in \mathbb{N}$, determine la función de distribución acumulada evaluada en m.

   c) Determine $P(X > 3)$ R/ $\frac{1}{4\,096}$

   d) Determine la función generadora de momentos para X R/ $\frac{15e^t}{16-e^t}$

   e) Utilizando el inciso anterior, determine $E(X)$ R/ $\frac{16}{15}$

   f) Utilizando el inciso anterior, determine $Var(X)$ R/ $\frac{16}{225}$

   g) Utilizando el inciso anterior, determine σ_X R/ $\frac{4}{15}$

Distribución de probabilidad

1. Se tiene una tarjeta con un 100 marcado, dos con un 200 marcado y tres con un 300 marcado. Una persona saca aleatoriamente tres tarjetas. Si X es el total que suman las tres tarjetas:

   a) Determine la función de distribución.

   b) Calcule $E(X)$ R/ 700

   c) Calcule $Var(X)$ R/ $\dfrac{50\,000}{3}$

2. En una bolsa hay 10 guayabas, y de estas 4 están dañadas. Verónica no sabe cuántas guayabas hay en la bolsa y va a probar que hay igual cantidad de guayabas buenas que de guayabas dañadas. Para ello, irá sacando al azar de la bolsa, sin reemplazo, guayabas hasta obtener una dañada.

   a) Determine la distribución de probabilidad para la cantidad de guayabas que Verónica va a extraer.

   b) Determine la esperanza para la variable aleatoria correspondiente a la cantidad de guayabas que Verónica va a extraer. R/ $\dfrac{11}{5}$

3. Un juego de apuestas llamado **Tres** consiste en lanzar un dado tres veces, se obtienen tres resultados. Para cada uno, si es múltiplo de tres, el jugador recibe 2 500 colones, sino, pierde 1 000 colones. Sea G la ganancia obtenida al jugar **Tres**, si G es negativa, significa que hubo pérdida.

   a) Determine la función de distribución de G.

   b) Calcule $E(G)$. R/ 500

   c) ¿Jugaría **Tres**? R/ Sí

   d) ¿El juego es justo? R/ no

   e) Calcule $Var(G)$ R/ $\dfrac{24\,500\,000}{3}$

4. En una urna hay una bolita marcada con 200 puntos, una con 100 puntos, una con 300 puntos, una con 400 puntos y una con 500 puntos. Se extraen al azar dos de estas bolitas. Si se define a X como la variable aleatoria discreta que representa la suma de puntos acumulados en ambas bolitas:

   a) Determine la función de distribución de probabilidad para X.

   b) Calcule el valor esperado para X. R/ 600

   c) Calcule la varianza para X. R/ 30 000

   d) Calcule la desviación estándar para X R/ $100\sqrt{3}$

5. Una persona paga 400 colones por jugar el juego **Azules**. Este consiste en sacar sucesivamente, sin devolver, dos bolas de una canasta con cinco bolas blancas y tres azules. Por cada bola azul obtenida, gana 300 colones. Sea X el número de bolas azules obtenidas en las dos extracciones.

   a) Determine la función de distribución de probabilidad.

   b) Determine $E(X)$ R/ $\frac{3}{4}$

   c) Determine $Var(X)$ R/ $\frac{45}{112}$

   d) Sea G la ganancia al jugar **Azules**. Exprese G en términos de X. R/ $300X - 400$

   e) Determine la ganancia esperada del juego ¿es justo? R/ -175, no

   f) Determine la varianza de G. R/ $\frac{253\,125}{7}$

   g) Determine la varianza de X R/ $\frac{45}{112}$

6. Un experimento consiste en lanzar dos dados distinguibles. Considere la variable aleatoria X; el resultado menor obtenido en los dos dados.

   a) Halle la función de distribución de probabilidad de X.

   b) Halle la función acumulada de X.

   c) Halle la esperanza de X. R/ 2,5278

   d) Halle la varianza de X. R/ 1,9714

   e) En una feria, este juego cuesta 400 colones por participar en cada lanzamiento, pero el concursante gana 700 colones si obtiene un uno en alguno de los dados y gana 600 colones si obtiene como mínimo en algunos de los dados un dos o un tres. Explique si el juego es justo. R/ Sí

7. Una persona paga 200 colones por jugar el juego **Pares**, el cual consiste en lanzar tres veces un dado; por cada par obtenido gana 200 colones y por cada impar obtenido debe pagar 100 colones.

   a) Determine la función de distribución para X.

   b) Determine $E(X)$ ¿es justo el juego? R/ -50, no

   c) Calcule $Var(X)$ R/ 67 500

8. Mario practica un juego en el cual la probabilidad de ganar en la partida i es $1-\left(\frac{1}{2}\right)^i$. Mario juega hasta que ocurra alguno de los siguientes eventos:

   - Acumula dos partidas ganadas.
   - Ha jugado cuatro veces.

   Sea X es la variable aleatoria que corresponde con el total de partidas jugadas por Mario.

   a) Determine la distribución de probabilidad para X.

   b) Calcule $E(X)$ R/ $\dfrac{45}{16}$

   c) Calcule $Var(X)$ R/ $\dfrac{135}{256}$

9. Dos bombillos defectuosos se mezclan con tres buenos. Se selecciona uno a uno un bombillo al azar y sin reposición, hasta encontrar los dos defectuosos.

   Si X es el número de bombillos seleccionados.

   a) Determine la función de probabilidad de X.

   b) Determine $E(X)$ R/ 4

   c) Determine $Var(X)$ R/ 1

10. Considere el experimento aleatorio: lanzar un par de dados de seis caras distinguibles (los dados no están trucados). Sea Z la variable aleatoria discreta correspondiente al resultado menor de ambos dados.

    a) Determine la distribución de probabilidad para la variable Z.

    b) Halle la distribución de probabilidad acumulada para la variable Z.

11. En un juego se lanzan tres dados. Sea X el número de caras en las que se obtiene un cuatro o un cinco como resultado.

    a) Determine la función de distribución de probabilidad para X.

    b) Encuentre la función de distribución acumulada para X.

    c) Calcule $P(0{,}5 \leq X < 3)$ R/ $\frac{2}{3}$

    d) Calcule $P(1{,}5 \leq X < 3)$ R/ $\frac{2}{9}$

12. Un experimento cuyos resultados son éxito p y fracaso q se repiten varias veces hasta que se dé alguna de las siguientes condiciones:

    - Se acumulan dos éxitos
    - Haya dos fracasos consecutivos

    Sea X la variable aleatoria que representa el total de repeticiones que se debe hacer el experimento.

    a) Halle la función de distribución de probabilidad para X

    b) ¿Cuál es la media para el total de repeticiones en términos de p y q?

13. Ester y Hernán lanzan una moneda cada uno una única vez. Sea X el número de coronas totales obtenidas.

    a) Determine la distribución de probabilidad para X. R/ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$

    b) Según el número de coronas obtenidas por Hernán y Ester será la cantidad de veces que Carmen lance un dado. Si Y es la variable que representa la cantidad de unos obtenidos por Carmen, determine al distribución de probabilidad de Y. R/ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$

14. Don Juan juega a los tiempos con mucha frecuencia. Este sorteo paga 75 veces la inversión realizada. Cada vez que hay juego, apuesta una cantidad fija a cada uno de 30 números distinto. Él jugó durante 20 sorteos, consecutivos. Sean Y el resultado en el juego y G la ganancia en un juego.

    a) Determine la distribución de probabilidad para Y.

    b) Determine la distribución de probabilidad para G.

    c) Determine la esperanza para el total de ganancias de don Juan. R/ -150

15. Un experimento consiste en lanzar dos dados distinguibles. Considere la variable aleatoria X que consiste en el experimento que corresponde al mínimo valor obtenido en los dos dados, por ejemplo, si en un dado se obtiene un tres y en el otro dado se obtiene un cinco, entonces $x = 3$. Se tiene que el rango de X es $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y su función de probabilidad está dada por

X	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

   a) Halle la función acumulada de X.

   b) Calcule $P(1{,}3 \leq X \leq 5{,}5)$ R/ $\dfrac{2}{3}$

   c) Calcule la varianza de X. R/ $\dfrac{2\,555}{1\,296}$

16. En una reunión hay cuatro hombres y tres mujeres. Se eligen personas al azar una a una hasta completar una pareja. Si X es la variable aleatoria que indica el total de personas que se eligen, determine:

   a) El rango de la variable X. R/ $\{2, 3, 4, 5\}$

   b) La función de probabilidad de X. R/ $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{7} & \text{si } k = 2 \\ \dfrac{2}{7} & \text{si } k = 3 \\ \dfrac{4}{35} & \text{si } k = 4 \\ \dfrac{1}{35} & \text{si } k = 5 \end{cases}$

Demostraciones

1. Demuestre que $Var(X) + [E(X) - \alpha]^2 = E\left([X - \alpha]^2\right)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Sea X una variable aleatoria discreta con valor esperado μ_x tal que $Var(X)$ y $E\left[(X - 3\mu_x)^2\right]$ existen. Pruebe que $E\left[(X - 3\mu_x)^2\right] = Var(X) + 4\mu_X^2$

3. Sea X una variable aleatoria discreta con esperanza μ_x tal que $Var(X)$ y $E\left[(2X - 5\mu_x)^2\right]$ existen. Pruebe que $E\left[(2X - 5\mu_x)^2\right] = 4 \cdot Var(X) + 9\mu_X^2$

4. Si c es una constante y X una variable aleatoria discreta tal que $E(X)$ existe, entonces, demuestre las siguientes propiedades:

   a) $E(c) = c$

   b) $E(X + c) = E(X) + c$

   c) $E(cX) = c \cdot E(X)$

   d) Si $E(g(X))$ y $E(h(X))$ existen, entonces $E(g(X) + h(X)) = E(g(X)) + E(h(x))$

5. Si X una variable aleatoria discreta, demuestre que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

6. Si c es una constante y X una variable aleatoria discreta, entonces, demuestre las siguientes propiedades:

   a) $Var(c) = 0$

   b) $Var(X + c) = Var(X)$

   c) $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$