INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL

TIEMPO: 2 HORAS Y 30 MINUTOS
PUNTAJE: 32 PUNTOS
I SEMESTRE DE 2019
LUNES 20 DE MAYO

II Examen Parcial - Extraordinario

(Solución)

Indicaciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso dispositivos electrónicos con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

---

1. Sean $\mathbf{u} = (1,a,0,0)$, $\mathbf{v} = (1,-3,a+1,0)$ y $\mathbf{w} = (0,1,-4,0)$ vectores en $\mathbb{R}^4$. Determine para cuáles valores de a, si existen, los vectores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes. (5 pts)

Solución:

Planteamos la ecuación $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los escalares α, β, γ. Resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & -3 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-af_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3-a & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & a+1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & a+1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{-(a+1)f_2+f_3}{\xrightarrow{-f_2+f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3a-11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suponiendo que $a \neq -\dfrac{11}{3}$ se efectúa la siguiente operación

$$\xrightarrow{\frac{2}{-3a-11}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\frac{3}{2}f_3+f_1}{\xrightarrow{-\frac{3}{2}f_3+f_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema homogéneo tiene solución única ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) si se cumple que $a \neq -\frac{11}{3}$, o bien, si $a \neq -\frac{11}{3}$ los vectores son l.i

2. Considere en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\mathbf{u} = (3,-1,0)$ y $\mathbf{v} = (0,0,1)$. Determinar todos los vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ para los que se cumplen, de manera simultánea, las condiciones siguientes: (5 pts)

   - $||\mathbf{w}|| = 10$
   - $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales
   - $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ forman un ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$

   Solución:

   Suponiendo que $\mathbf{w} = (x,y,z)$ se tiene

   - $||\mathbf{w}|| = 10$

   $$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 10 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 100.$$

   - $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales

   $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 0 \Longrightarrow (3,-1,0)\cdot(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 3x-y=0 \Longrightarrow y = 3x.$$

   - $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ forman un ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$

   $$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{w}||\,||\mathbf{v}||} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{z}{10\cdot 1} \Longrightarrow z = 5.$$

   Sustituyendo en la primera ecuación

   $$x^2 + (3x)^2 + 5^2 = 100 \Longrightarrow 10x^2 = 75 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

   Por lo tanto, existen dos vectores que cumplen las condiciones:

   $$\mathbf{w}_1 = \left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right) \text{ ó } \mathbf{w}_2 = \left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right).$$

3. Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones respectivas:

$$L_1 : (x,y,z) = (-2,1,1) + t(-5,1,2),\ t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y+6}{-3};\ z = -1$$

Si B es el punto de intersección entre L_1 y L_2, determine todos los vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ que cumplen de manera simultánea las condiciones siguientes: (5 pts)

- $\mathbf{w}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{OA} = (1,0,-1)$
- El área del paralelogramo generado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{w}$ es 4 (u.l.)^2

Solución:

La forma paramétrica de las rectas L_1 y L_2 para $t,s \in \mathbb{R}$

$$L_1 : \begin{cases} x = -2-5t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = -1-2s \\ y = -6-3s \\ z = -1 \end{cases}$$

Se debe cumplir que $\begin{cases} -5t+2s = 1 \\ t+3s = -7 \\ 2t = -2 \end{cases}$, sistema que se satisface para $t = -1$ y $s = -2$.

Así, $B = (3,0,-1)$ es el punto de intersección de ambas rectas. Suponiendo que el vector $\mathbf{w} = (x,y,z)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, entonces

- $\mathbf{w}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{OA} = (1,0,-1)$

$$\mathbf{w} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} \Longrightarrow (x,y,z) = \alpha(1,0,-1) \Longrightarrow (x,y,z) = (\alpha,0,-\alpha) \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{w} = (\alpha, 0-\alpha)$$

- El área del paralelogramo generado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{w}$ es 4 (u.l.)^2

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,0,-1)-(1,0,-1) = (2,0,0).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = (0,2\alpha,0) \Longrightarrow \left\| \overrightarrow{AB} \times \mathbf{w} \right\| = \sqrt{(2\alpha)^2} = 2|\alpha|.$$

Igualando por el valor del área del paralelogramo

$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \mathbf{w} \right\| = 4 \Longrightarrow 2|\alpha| = 4 \Longrightarrow \alpha = \pm 2.$$

Por lo tanto, existen dos vectores que satisfacen las condiciones: $\mathbf{w}_1 = (2,0,-2)$ ó $\mathbf{w}_2 = (-2,0,2)$.

4. Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (2,-1,1), B = (3,2,-1)$ y $C = (-1,3,2)$, y los planos π_1 y π_2 de ecuaciones respectivas:

$$\pi_1 : -2x + y - 4z = -1$$

$$\pi_2 : x - 3y + 2z = 5$$

a) Determine una ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y C. (4 pts)

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,2,-1) - (2,-1,1) = (1,3,-2)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1,3,2) - (2,-1,1) = (-3,4,1)$$

Realizando el producto cruz $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, tenemos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (11,5,13)$$

Luego, una ecuación del plano π es $11(x-2) + 5(y+1) + 13(z-1) = 0$, o bien

$$\pi : 11x + 5y + 13 = 30.$$

$\lrcorner$

b) Si L es la recta de intersección entre los planos π_1 y π_2, determine el punto P que interseca la recta L y el plano $\delta : 2x - y + 3z = 4$. (5 pts)

Solución:

Por Gauss-Jordan se busca la ecuación de la recta L, esto al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2x + y - 4z = -1 \\ x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Reduciendo por filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{3f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} \end{array}\right)$$

Luego, la ecuación de la recta L es $\begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2t \\ y = -\frac{9}{5}, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

Ahora, sustituyendo en la ecuación del plano δ tenemos

$$2\left(-\frac{2}{5}-2t\right)+\frac{9}{5}+3t=4 \Longrightarrow t=-3.$$

Por lo tanto, el punto de intersección que se buscaba es $P=\left(\frac{28}{5},-\frac{9}{5},-3\right)$.

c) Determine ecuaciones simétricas de la recta que contiene el punto $Q=(-1,2,3)$ y es perpendicular al plano $\rho: 11x+5y+13z=30$. (2 pts)

Solución:
La recta es perpendicular al plano ρ, esto implica que el vector director de la recta es paralelo al vector $(11,5,13)$. Entonces ecuaciones simétricas de dicha recta son de la forma

$$\frac{x+1}{11}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{13}$$

5. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-8 & 12\\ -6 & 10\end{pmatrix}$. Hallar los valores propios de la matriz A y un vector propio asociado a alguno de los vectores propios. (4 pts)

Solución:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-8-\lambda & 12\\ -6 & 10-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$$

Los valores propios de la matriz A son $\lambda_1=4$ y $\lambda_2=-2$.

- $\lambda=-2$

$$(A+2I)v=0 \Longrightarrow \begin{pmatrix}-6 & 12\\ -6 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow x=2y \Longrightarrow v=\begin{pmatrix}2y\\ y\end{pmatrix},\ y\neq 0.$$

- $\lambda=4$

$$(A-4I)v=0 \Longrightarrow \begin{pmatrix}-12 & 12\\ -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow x=y \Longrightarrow v=\begin{pmatrix}y\\ y\end{pmatrix},\ y\neq 0.$$

6. Considere los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos. Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. (2 pts)

Solución:

Suponiendo que $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $(u_1, u_2, u_3) = \alpha(v_1, v_2, v_3)$ con $\alpha \neq 0$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha v_1 & \alpha v_2 & \alpha v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (\alpha v_2 v_3 - \alpha v_2 v_3, \alpha v_1 v_3 - \alpha v_1 v_3, \alpha v_1 v_2 - \alpha v_1 v_2) = (0,0,0).$$

$\lrcorner$