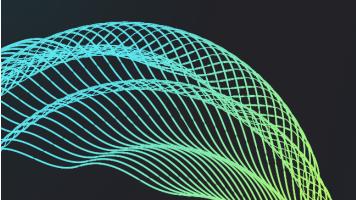


LET'S CODE





Lista de exercícios - Cálculo Básico

Questão 1.

Considere a seguinte função real: qual é seu domínio?

$$f(x) = \frac{4x - 2}{x^2 - 2x - 8}$$

Questão 2.

Qual é a imagem da função real abaixo?

$$f(x) = 2x^2 - 5$$

Questão 3.

Considere a função abaixo. Esta função trigonométrica é dita periódica, pois seus valores são repetidos periodicamente. Plote o gráfico da função (manualmente, ou então utilizando algum recurso virtual) e responda: qual é seu período?

$$f(x) = \sin(x)$$

Questão 4.

Considere a função abaixo.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{4x^2 + 1}\right)$$

Se enxergarmos esta função como a composição de três funções:

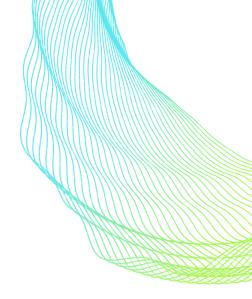
$$f(x) = (g \circ h \circ k)(x) = g(h(k(x)))$$

Quais são as funções g(x), h(x) e k(x)?

Questão 5.

Calcule a inversa da função sigmoidal abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Questão 6.

Calcule:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{x^2 - 2x - 8}$$

Questão 7.

Calcule:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{8x^2 + 12x - 8}$$

Questão 8.

Considere que a posição x de um corpo varia no tempo segundo a seguinte função:

$$x(t) = t\sin(t^2)$$

Sabendo que a velocidade do corpo é dada pela derivada temporal de sua posição, calcule sua velocidade, como uma função do tempo.

Questão 9.

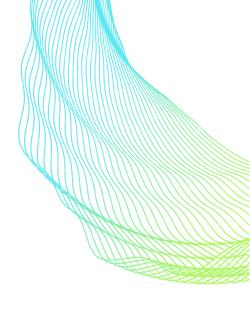
Calcule a derivada da função:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{4x^2 + 1}\right)$$

Questão 10.

Calcule a derivada da função sigmoidal,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Resoluções 🔽

Questão 1:

Por ser uma função real, a priori o seu domínio seria R. No entanto, como a divisão por zero não é definida, precisamos excluir do domínio da função os pontos em que o denominador se anula. Como o denominador é um polinômio de grau 2, basta encontrarmos suas raízes:

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

De modo que as raízes são x = 4 e x=2. Portanto, temos que o domínio de f é:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4, -2\}$$

Questão 2:

Temos uma função real a valores reais, de modo que

$$D(f) = \mathbb{R}$$

No entanto, note que

$$x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

ou seja, o valor mínimo para o termo $2X^2$ é zero. No entanto, há o termo constante -5, que faz com que o valor mínimo da função seja -5. Sendo assim, temos que a imagem da função são todos os números reais maiores que -5, ou seja:

$$Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} : y \ge -5 \}$$

Questão 3:

Examinando o plot da função seno (por exemplo, aqui:

https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+sin%28x%29), fica claro que a função tem período 2π , pois seu valor (e, portanto, seu gráfico), se repete a cada incremento de 2π nos valores do domínio. Ou seja:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

Questão 4:

$$g(x) = \ln(x); h(x) = \frac{1}{x}; k(x) = 4x^2 + 1$$

Questão 5:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$x = \frac{1}{1 + e^{-y}}$$

$$1 + e^{-y} = \frac{1}{x}$$

$$e^{-y} = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

$$\ln e^{-y} = \ln \frac{1 - x}{x}$$

$$-y = \ln \frac{1 - x}{x} = -\ln \frac{x}{1 - x}$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1 - x}$$

Na solução, usamos o fato de que

$$ln(e) = 1$$

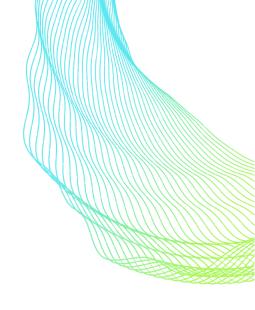
Questão 6:

Note que:

$$\frac{2x-8}{x^2-2x-8} = \frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{2}{x+2}$$

Assim, temos:

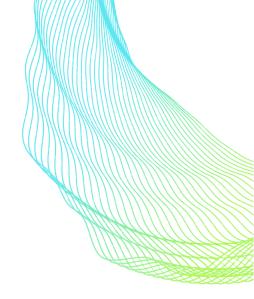
$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \to 4} \frac{2}{x + 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



Questão 7:

Note que:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{8x^2 + 12x - 8} = \frac{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}{(4x - 2)(2x + 4)} = \frac{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}{4(2x - 1)(x + 2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{4(2x - 1)}$$



Assim, temos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{8x^2 + 12x - 8} = \lim_{x \to -2} \frac{(x - 1)(x - 3)}{4(2x - 1)} = \frac{(-3)(-5)}{4(-4 - 1)} = -\frac{3}{4}$$

Questão 8:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(t \sin(t^2) \right) = \sin(t^2) + t(2t) \cos(t^2) = 2t^2 \cos(t^2) + \sin(t^2)$$
$$v(t) = 2t^2 \cos(t^2) + \sin(t^2)$$

Questão 9:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)$$

$$= \left(4x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2+1\right)^{-1}$$

$$= \left(4x^2+1\right)(-1)(4x^2+1)^{-2}(8x)$$

$$= -8x(4x^2+1)^{-1} = \frac{-8x}{4x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)\right) = -\frac{8x}{4x^2+1}$$

Questão 10:

$$\begin{split} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right) &= \frac{d}{dx} \left(1 + e^{-x} \right)^{-1} = \\ &= -(1 + e^{-x})^{-2} (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right) &= \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \end{split}$$

