LET'S CODE

from ada

Lista de exercícios - Cálculo Básico

Questão 1.
Considere a seguinte função real: qual é seu domínio?

$$f(x) = \frac{4x-2}{x^2-2x-8}$$

Questão 2.
Qual é a imagem da função real abaixo?

$$f(x) = 2x^2 - 5$$

Questão 3.
Considere a função abaixo. Esta função trigonométrica é dita periódica, pois seus valores são repetidos periodicamente. Plote o gráfico da função (manualmente, ou então utilizando algum recurso virtual) e responda: qual é seu período?

$$f(x) = \sin(x)$$

Questão 4.
Considere a função abaixo.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)$$

Se enxergarmos esta função como a composição de três funções:

$$f(x) = (g \circ h \circ k)(x) = g(h(k(x)))$$

Quais são as funções g(x), h(x) e k(x)?

Questão 5.
Calcule a inversa da função sigmoidal abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Questão 6.
Calcule:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{x^2 - 2x - 8}$$

Questão 7.
Calcule:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{8x^2 + 12x - 8}$$

Questão 8.
Considere que a posição x de um corpo varia no tempo segundo a seguinte função:

$$x(t) = t \sin(t^2)$$

Sabendo que a velocidade do corpo é dada pela derivada temporal de sua posição, calcule sua velocidade, como uma função do tempo.

Questão 9.
Calcule a derivada da função:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{4x^2 + 1}\right)$$

Questão 10.
Calcule a derivada da função sigmoidal,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Resoluções ✅

Questão 1:

Por ser uma função real, a priori o seu domínio seria ℝ. No entanto, como a divisão por zero não é definida, precisamos excluir do domínio da função os pontos em que o denominador se anula. Como o denominador é um polinômio de grau 2, basta encontrarmos suas raízes:

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

De modo que as raízes são x = 4 e x=2. Portanto, temos que o domínio de f é:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4, -2\}$$

Questão 2:

Temos uma função real a valores reais, de modo que

$$D(f) = \mathbb{R}$$

No entanto, note que

$$x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

ou seja, o valor mínimo para o termo $2X^2$ é zero. No entanto, há o termo constante -5, que faz com que o valor mínimo da função seja -5. Sendo assim, temos que a imagem da função são todos os números reais maiores que -5, ou seja:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -5\}$$

Questão 3:

Examinando o plot da função seno (por exemplo, aqui: https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+sin%28x%29), fica claro que a função tem período 2π, pois seu valor (e, portanto, seu gráfico), se repete a cada incremento de 2π nos valores do domínio. Ou seja:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

Questão 4:

$$g(x) = \ln(x);\ h(x) = \frac{1}{x};\ k(x) = 4x^2 + 1$$

Questão 5:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{1+e^{-x}} \\
x &= \frac{1}{1+e^{-y}} \\
1+e^{-y} &= \frac{1}{x} \\
e^{-y} = \frac{1}{x} - 1 &= \frac{1-x}{x} \\
\ln e^{-y} &= \ln \frac{1-x}{x} \\
-y = \ln \frac{1-x}{x} &= -\ln \frac{x}{1-x} \\
f^{-1}(x) &= \ln \frac{x}{1-x}
\end{aligned}
$$

Na solução, usamos o fato de que

$$\ln(e) = 1$$

Questão 6:

Note que:

$$\frac{2x-8}{x^2-2x-8} = \frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{2}{x+2}$$

Assim, temos:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x-8}{x^2-2x-8} = \lim_{x \to 4} \frac{2}{x+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Questão 7:

Note que:

$$\frac{x^3-2x^2-5x+6}{8x^2+12x-8}=\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(4x-2)(2x+4)}=\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{4(2x-1)(x+2)}=$$

$$\frac{(x-1)(x-3)}{4(2x-1)}$$

Assim, temos:

$$lim_{x\to-2}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{8x^2+12x-8}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-1)(x-3)}{4(2x-1)}=\frac{(-3)(-5)}{4(-4-1)}=-\frac{3}{4}$$

Questão 8:

$$v(t)=\frac{dx(t))}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t\sin(t^2)\right)=\sin(t^2)+t(2t)\cos(t^2)=2t^2\cos(t^2)+\sin(t^2)$$

$$v(t)=2t^2\cos(t^2)+\sin(t^2)$$

Questão 9:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)\right)&=\frac{1}{\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)\\&=\left(4x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2+1\right)^{-1}\\&=\left(4x^2+1\right)(-1)(4x^2+1)^{-2}(8x)\\&=-8x(4x^2+1)^{-1}=\frac{-8x}{4x^2+1}\\\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)\right)&=-\frac{8x}{4x^2+1}\end{aligned}$$

Questão 10:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(1+e^{-x}\right)^{-1} =$$

$$= -(1+e^{-x})^{-2}(-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$