Análise de Séries Temporais 2016/1

Relatório 2: Modelos Dinâmicos

Alunos:
Ivani IVANOVA e
Jonathas FERREIRA

Professora:
Alexandra M. SCHMIDT

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Julho de 2016

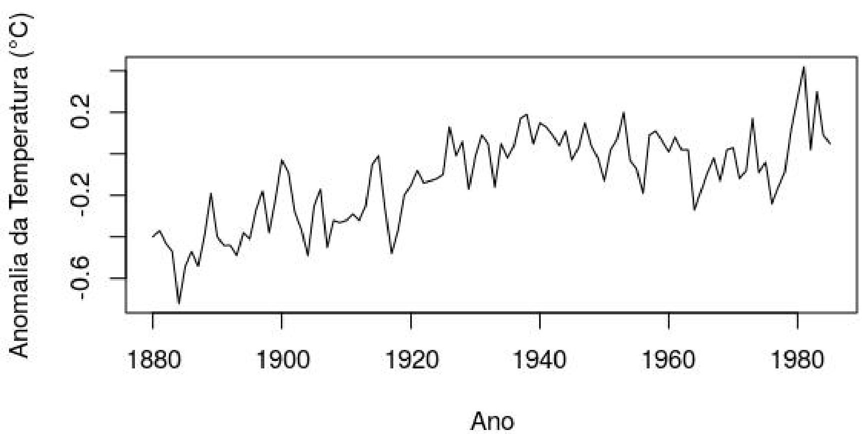
1 Introdução

Como sequência do estudo realizado no Relatório 1, onde ajustamos modelos ARIMA(p, d, q) para a série de anomalias da temperatura global primeiro descritas em [3], buscamos ajustar um Modelo Dinâmico Linear para a mesma série. Faremos estimativas dos parâmetros do modelo por máxima verossimilhança e via fator de desconto. Por fim, analisaremos se o modelo ajustado é satisfatório.

2 Problema

Neste trabalho queremos ajustar um modelo linear dinâmico para a série Y_t (com variância amostral igual a 0.04742253) da anomalia da temperatura global (Gŕafico 1) com a qual já trabalhamos anteriormente no Relatório 1.

Gráfico 1: Série temporal Y_t da anomalia da temperatura global



Para isso, supomos que Y_t segue um modelo da forma:

$$Y_t = F_t\theta_t + v_t, \qquad v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t) \tag{1}$$

$$\theta_t = G_t\theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim \mathcal{N}_p(0, W_t) \tag{2}$$

Onde θ_t é um vetor de p parâmetros e tal que no tempo $t = 0$ tem uma distribuição a priori $\mathcal{N}_p(m_0, C_0)$, F_t e G_t são matrizes conhecidas que especificam nosso modelo e V_t (no nosso caso, V_t é um escalar pois Y_t é unidimensional)

e W_t são matrizes de covariância das sequências independentes v_t e w_t que precisamos fixar ou estimar. Além disso, assumimos θ_0 independente de (v_t) e (w_t).
Como nossos dados apontam uma tendência linear, vamos ajustar o modelo de crescimento linear, dado por:

$$Y_t = \mu_t + v_t, \qquad v_t \sim \mathcal{N}(0, V) \tag{3}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + w_{t,1}, \quad w_{t,1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\mu^2) \tag{4}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{t,2}, \qquad w_{t,2} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\beta^2) \tag{5}$$

com erros não correlacionados $v_t, w_{t,1}$ e $w_{t,2}$.
Nesse caso, temos:

$$\theta_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; W = \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

com possível dependência temporal de σ_μ^2 e σ_β^2.
A análise que faremos a seguir estará baseada no Filtro de Kalman que enuncia:

Proposição 1 (Filtro de Kalman) [1]: Considere a MLD especificada por (1) e (2). Seja

$$\theta_{t-1}|y_{1:t-1} \sim \mathcal{N}(m_{t-1}, C_{t-1})$$

Então as seguintes afirmações são válidas.

(i) A distribuição de previsão um passo à frente de θ_t dado $y_{1:t-1}$ é Gaussiana, com parâmetros

$$\begin{aligned} a_t &= E(\theta_t|y_{1:t-1}) = G_t m_{t-1}, \\ R_t &= Var(\theta_t|y_{1:t-1}) = G_t C_{t-1} G_t' + W_t. \end{aligned} \tag{7}$$

(ii) A distribuição de previsão um passo à frente de Y_t dado $y_{1:t-1}$ é Gaussiana, com parâmetros

$$\begin{aligned} f_t &= E(Y_t|y_{1:t-1}) = F_t a_t, \\ Q_t &= Var(Y_t|y_{1:t-1}) = F_t R_t F_t' + V_t. \end{aligned} \tag{8}$$

(iii) A distribuição filtragem de θ_t dado $y_{1:t}$ é Gaussiano, com parâmetros

$$\begin{aligned} m_t &= E(\theta_t|y_{1:t}) = a_t + R_t F_t' Q_t^{-1} e_t, \\ C_t &= Var(\theta_t|y_{1:t}) = R_t - R_t F_t' Q_t^{-1} F_t R_t, \end{aligned} \tag{9}$$

onde $e_t = Y_t - f_t$ é o erro de previsão.

3 Estimação de V e W via máxima verossimilhança

Utilizando o método de estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança descrito em [1] (p.144-147), com inicialização do algoritmo no ponto (0,0,0), obtivemos as estimativas $\hat{V} = 1.108414(10^{-2})$, $\hat{\sigma}_\mu^2 = 2.275516(10^{-3})$ e $\hat{\sigma}_\beta^2 = 1.565144(10^{-10})$ com desvios padrão estimados de $2.997480(10^{-3})$, $2.003502(10^{-3})$ e $2.488127(10^{-8})$ respectivamente.
Utilizamos os parâmetros a priori $m_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C_0 = \begin{bmatrix} 10^7 & 0 \\ 0 & 10^7 \end{bmatrix}$.
Com isso, os modelos que ajustamos segue as equações (3), (4), (5) e (6) com $V = 1.108414(10^{-2})$ e $W = \begin{bmatrix} 2.275516(10^{-3}) & 0 \\ 0 & 1.565144(10^{-10}) \end{bmatrix}$.

A tendência filtrada, sua suavização com intervalos de 95 % de confiança e a previsão um passo a frente encontram-se nos gráficos a seguir.

Gráfico 2: Nível filtrado

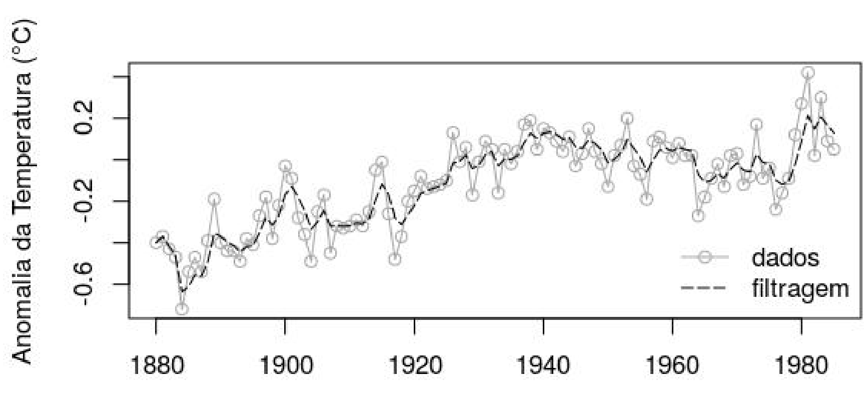
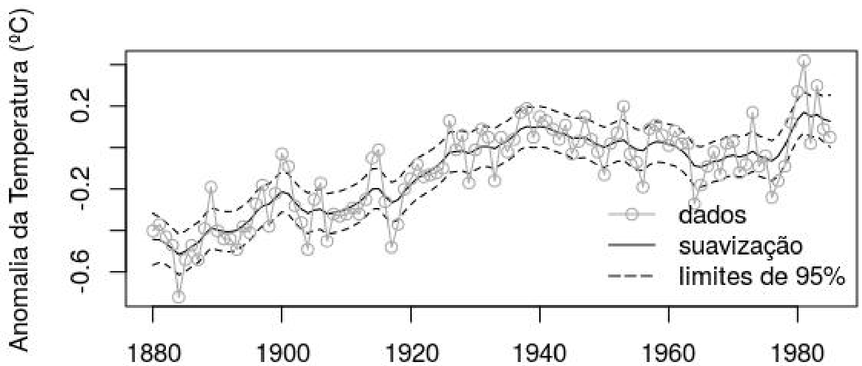


Gráfico 3: Nível suavizado



Os gráficos da tendência filtrada e suavizada a seguir evidenciam que provavelmente não seria necessário incluir ela no modelo, no entanto, testamos modelos sem tendência e eles falham em se ajustar a série.

Gráfico 4: Tendência filtrada

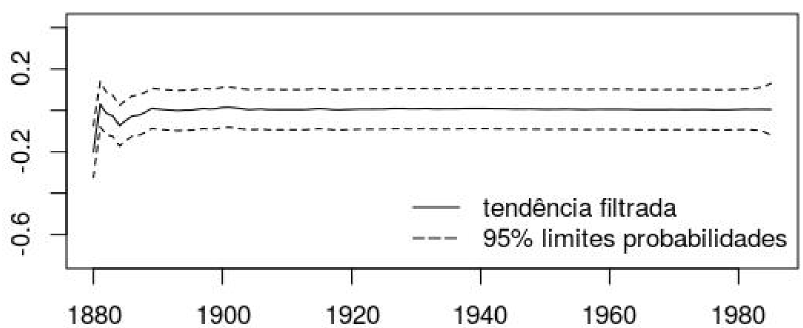


Gráfico 5: Tendência Suavizada

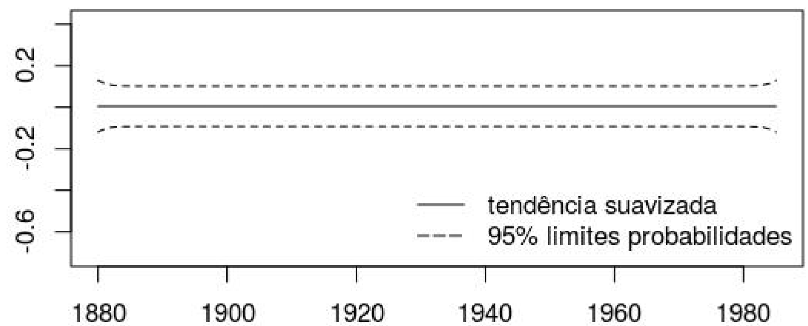
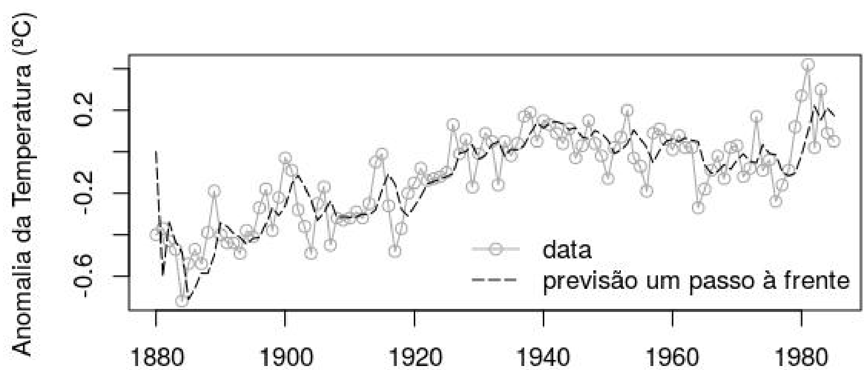
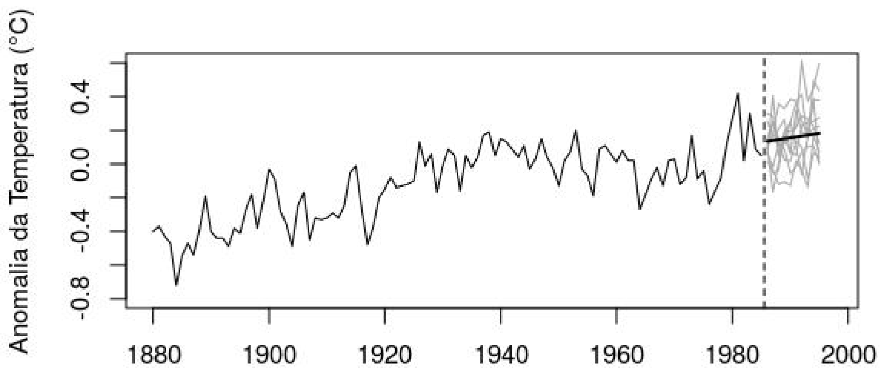


Gráfico 6: Previsão 1 passo à frente



O Gráfico 7 mostra uma previsão de 10 anos à frente juntamente com valores simulados da série.

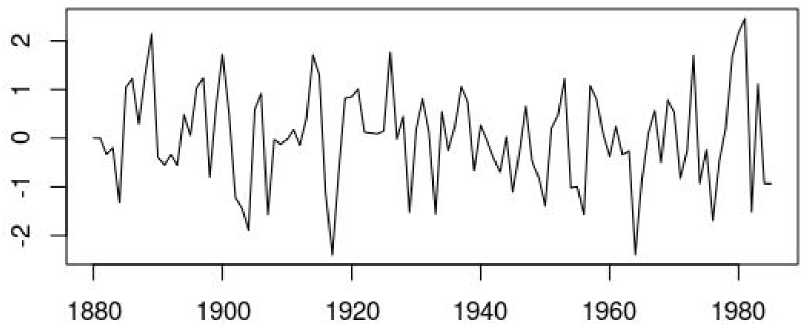
Gráfico 7: Previsão de 10 anos



3.1 Análise Residual

Esse modelo nos retorna resíduos que mostramos no Gráfico 8. O gráfico parece aceitável para a hipótese resíduos normais e descorrelacionados, porém vamos investigar isso mais a fundo.

Gráfico 8: Série temporal dos resíduos do modelo com parâmetros estimados por MV



O Gráfico 9 aponta que a hipótese de normalidade dos resíduos é razoável que é confirmada pelo teste de Shapiro-Wilk que retorna uma estatística $W = 0.9943$ com valor-p de 0.941.
A função de autocorrelação amostral dos resíduos (Gráfico 10) aponta alguma correlação nos lags 1 e 3, mas não o suficiente para descartarmos o modelo. O teste runs aplicado aos resíduos retorna 0.209 e, portanto, não descartamos a hipótese de resíduos descorrelacionados.

Gráfico 9: QQ-Plot dos resíduos

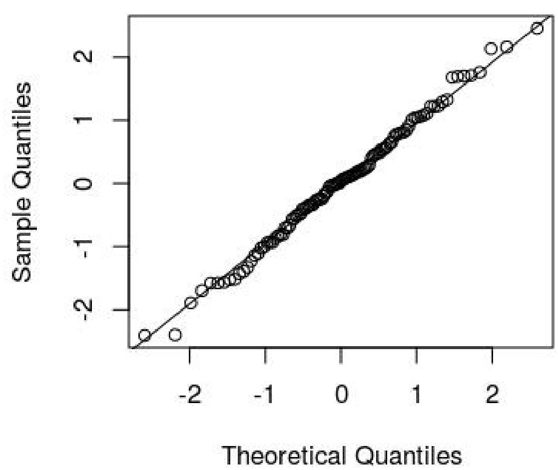
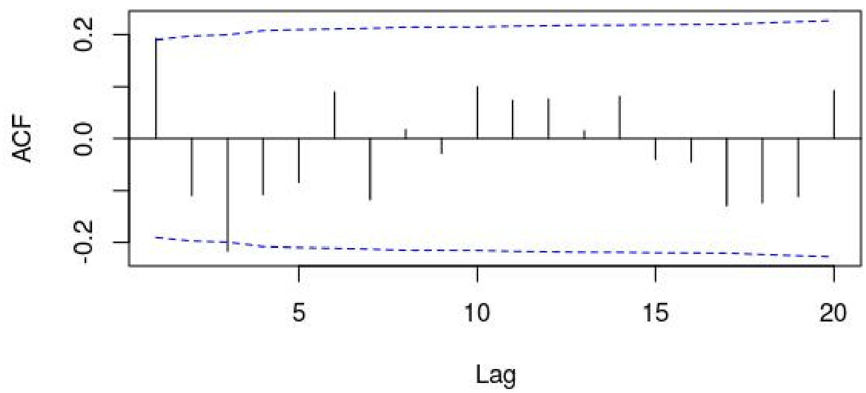


Gráfico 10: Função de autocorrelação amostral dos resíduos



4 Estimação via Fator de Desconto

Neste modelo, supomos a variância observacional $V = \sigma^2 = \phi^{-1}$ desconhecida onde ϕ é a precisão observacional, além disso W_t será especificado por fatores de desconto. Nesse modelo, temos:

$$Y_t = F_t\theta_t + v_t, \qquad v_t \sim \mathcal{N}(0, V) \tag{10}$$

$$\theta_t = G_t\theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim \mathcal{N}_p(0, VW_t^*) \tag{11}$$

Onde, $\theta_0|V \sim \mathcal{N}(m_0, VC_0^*)$ e $V^{-1} = \phi \sim Gama(\alpha_0, \beta_0)$ com ϕ sendo a precisão amostral.
Como a variância amostral de Y_t é igual a 0.04742253 e, portanto, a precisão amostral igual a 21.08702, especificamos os parâmetros $\alpha_0 = 2$ e $\beta_0 = 0.1$ da priori de ϕ.
Consideramos um fator de desconto $\delta \in (0, 1]$ que pode ser interpretada como a porcentagem de informação que passa de $t-1$ para t. $\delta = 1$ significa $W_t = 0$ e não há perda de informação, para $\delta < 1$ a perda de informação cresce a medida que δ decresce. Atribuímos um valor de 0.8 para o fator de desconto tanto para o nível μ_t quanto para a tendência β_t. Esse valor foi escolhido após a análise de resíduos do ajuste de modelos com diferentes fatores de desconto. Escolhemos os hiperparâmetros a priori $m_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_0^* = \begin{bmatrix} 10^7 & 0 \\ 0 & 10^7 \end{bmatrix}$

$\alpha_0 = 2$ e $\beta_0 = 0.1$ pois a precisão amostral foi estimada em 21.088.

Os gráficos a seguir mostram as estimativas filtradas e suavizadas do nível, além da previsão um passo a frente, todos com intervalos de confiança de 95%.

Gráfico 11: Nível filtrado

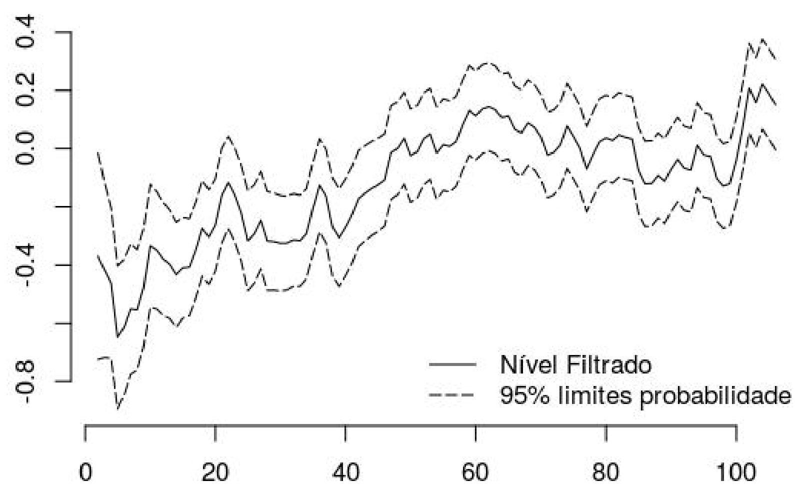


Gráfico 12: Nível suavizado

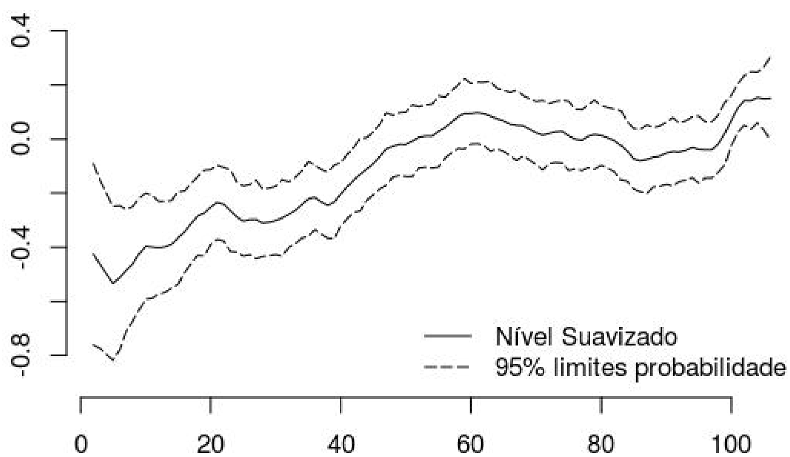
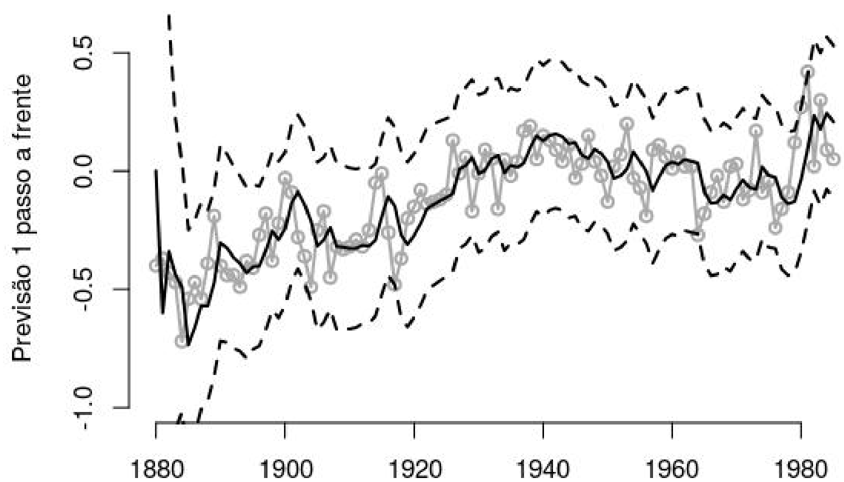


Gráfico 13: Previsão 1 passo à frente



Assim como na estimação de V e W via verossimilhança obtemos que provavelmente não seria necessário incluir a tendência no modelo, mas como modelos sem ela falham em se ajustar a seŕie, optamos por usar um modelo com tendência.

Gráfico 14: Tendência filtrada

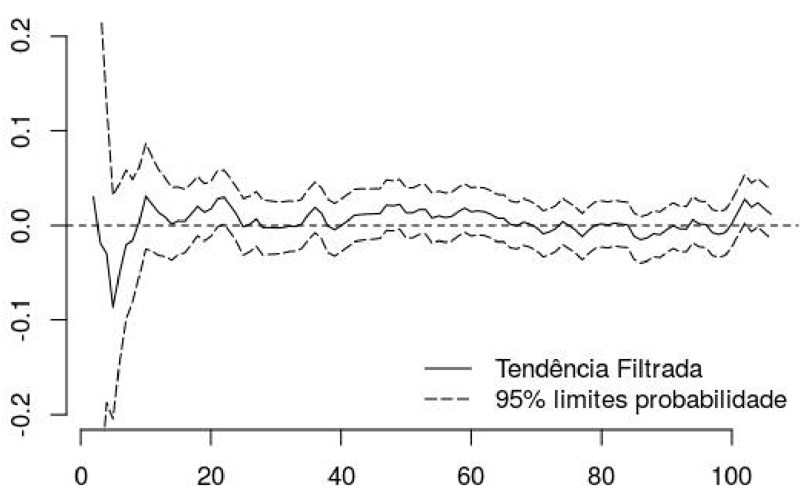
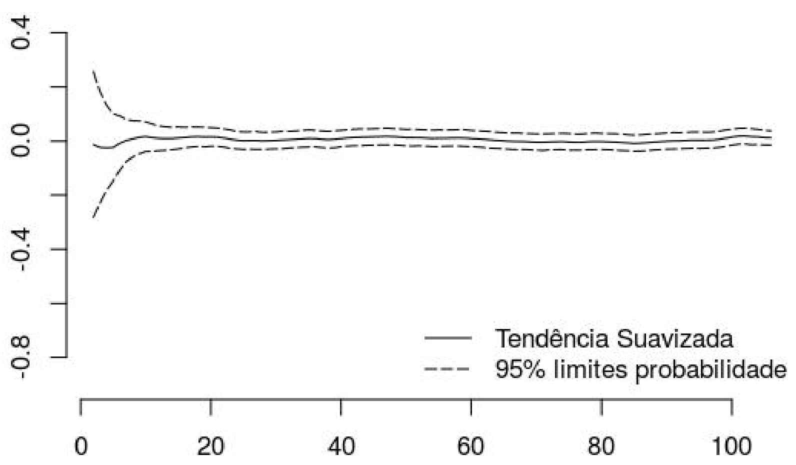
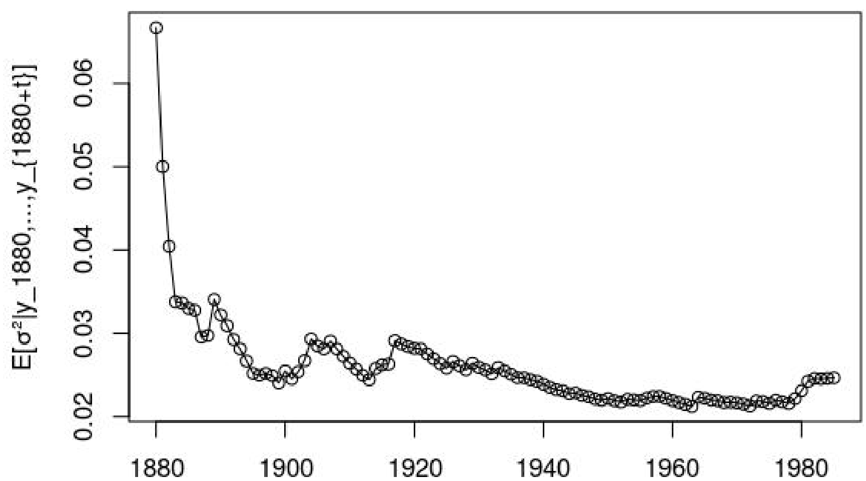


Gráfico 15: Tendência suavizada



O gráfico seguinte mostra a variância σ^2 filtrada.

Gráfico 16: Variância filtrada



4.1 Análise Residual

Os resíduos do modelo estão explicitados no Gráfico. O QQ-Plot e a função de autocorrelação amostral não sugerem evidências muito claras contra normalidade ou descorrelação (apesar de termos alguma correlação no lag 1 e 3). O teste Runs retorna um valor-p de 0.204 e o teste de Shapiro-Wilk retorna um valor-p igual a 0.9186. Logo, não rejeitamos nem a hipótese de descorrelação nem a de normalidade dos resíduos.

Gráfico 17: Resíduos do modelo com parâmetros estimados via fator de desconto

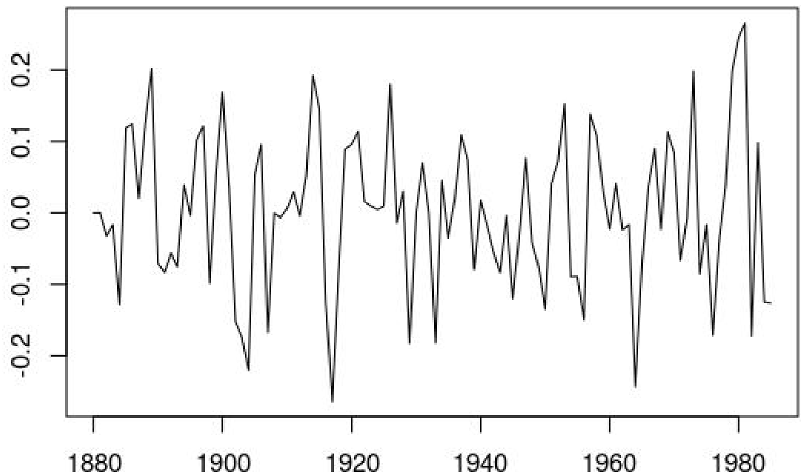


Gráfico 18: QQ-Plot dos resíduos

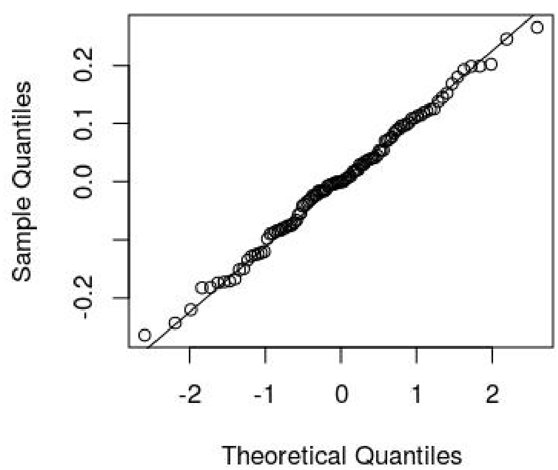
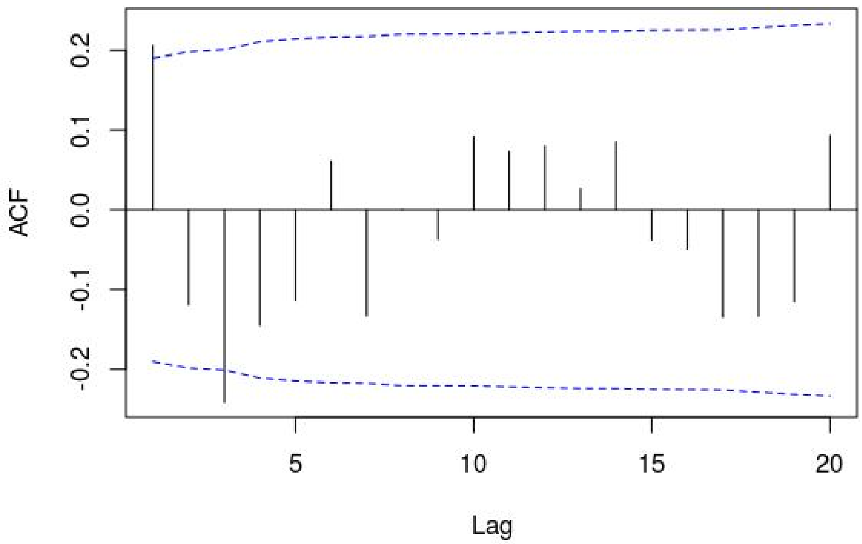


Gráfico 19: Função de autocorrelação amostral dos resíduos



5 Conclusão

Neste trabalho, ajustamos um modelo linear dinâmico com parâmetros estimados por duas formas diferentes: máxima verossimilhança e com fatores de desconto. Esses modelos nos propiciam integrar a informação a cada instante no modelo, ao contrário dos modelos ARIMA, estáticos, com os quais modelamos a mesma série no Relatório 1. Vemos que a previsão feita parece melhor e captura a tendência da série.

6 Bibliografia

[1] - Petris, G., Petrone, S. & Campagnoli P. - Dynamic Linear Models with R, Springer, 2009.

[2] - Cryer, J. D. & Chan, K. S. - *Time Series Analysis With Applications in R*, Springer, 2nd edition, 2010.

[3] - Hansen, J. & Lebedeff, S. - *Global Trends of Measured Surface Air Temperature*, Journal of Geophysical Research, Vol. 92, NO. D11, pages 13,345-13,372, 1987.

[4] - https://datamarket.com/data/list/?q=provider:tsdl