Homologisk algebra - Definisjoner og resultater

jonathke

October 2021

1 Kontinuerlige Funksjoner

Definition 1.1. *En metrikk* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *tilfredstiller:*

- $d(x, y) \geqslant 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Definition 1.2. *En funksjon* $f : X \to Y$ *er* **kontinuerlig** *dersom det for alle* $\epsilon > 0$ *eksisterer en* $\delta > 0$ *s.a.* $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$

Theorem 1.3. *En funksjon* $f : X \to Y$ *er kontinuerlig hvis og bare hvis for* U *åpen i* Y *er* $f^{-1}(U)$ *åpen i* X.

Proof. $\Rightarrow$: La U være åpen i Y. For alle $x \in f^{-1}(U)$ finnes det en epsilon $\epsilon > 0$ s.t. $B(f(x), \epsilon) \subseteq U$ siden U er åpen. Men da, siden f er kontinuerlig, finnes en $\delta > 0$, s.a. $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon) \subseteq U$, altså finnes det for alle $x \in f^{-1}(U)$ en $\delta > 0$ slik at $f(B(x, \delta)) \subseteq f^{-1}(U)$, altså er $f^{-1}(U)$ åpen.
$\Leftarrow$: La $\epsilon > 0$. Da er for alle $x \in X$, $B(f(x), \epsilon)$ åpen, så $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ er åpen. Altså finnes det en $\delta > 0$ s.a. $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. $\square$

2 Topologiske Rom

Definition 2.1. *Et topologisk rom* $\mathcal{T}$.

3 Generere topologier

4 Konstruere topologier

5 Topologiske egenskaper

6 Fundamentalgruppa

Definition 6.1. *La $f : X \to Y$ og $g : X \to Y$ være kontinuerlige funksjoner. Dersom det eksisterer en kontinuerlig funksjon $H : X \times I \to Y$ med $H(x, 0) = f(x)$ og $H(x, 1) = g(x)$ kalles H en* **homotopi** *mellom f og g, og f og g kalles* **homotope** *(skrives som $f \simeq g$). Dersom f er homotop med en konstant funksjon kalles f* **nullhomotop**.

Lemma 6.2 (Pasting lemma)**.** *La $X = A \cup B$, hvor A, B begge er lukkede. To kontinuerlige funksjoner $f : A \to Y$ og $g : B \to Y$ med $f(x) = g(x)$ for alle $x \in A \cap B$ kan limes sammen til en ny kontinuerlig funksjon $h : X \to Y$ gitt ved*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

Definition 6.3. *En* **vei-homotopi** *er en homotopi mellom to veier $f, g : I \to X$ som begge går fra x_0 til x_1, hvor homotopien og tilfredstiller $H(0, t) = x_0, H(1, t) = x_1$ for alle t. Er f og g vei homotope skriver fi $f \simeq_p g$.*

Både $\simeq$ og $\simeq_p$ er ekvivalensrelasjoner. Pasting lemma kan brukes til å vise transitivitet.

Definition 6.4. *La $f : I \to X$ være en sti fra x_0 til x_1 og la $g : I \to X$ være en sti fra x_1 til x_2. Definer $f * g : I \to X$ som*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ g(2t - 1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Da er $f * g$ en ny sti fra x_0 til x_1.

Theorem 6.5. *Definer $[f] * [g] := [f * g]$. Denne operasjonen er veldefinert. Videre er den assosciativ, har venstre og høyre enheter (konstante veier), og inverser (motsatte veier).*

Definition 6.6. *Fundamentalgruppe er definert som*

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] \mid f \text{ løkke i } x_0\}$$

Binæroperasjonen er $*$ som definert tidligere.

Theorem 6.7. *La X være path-connected. Da vil*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

for alle $x_0, x_1 \in X$.

Bevises ved å definere en homomorfi mellom fundamentalgruppene gitt ved $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ gitt ved $\hat{\alpha}([f]) = [\alpha]^-1 * [f] * [\alpha]$ for en vei α fra x_0 til x_1. Merk at isomorfien kan potensielt avhenge av α.

Definition 6.8. *La X være path-connected. Vi kaller X enkeltsammenhengende (simply connected) dersom $\pi_1(X, x_0) = 0$ for en (og dermed alle) $x_0 \in X$.*

Definition 6.9. *Et topologisk rom med et spesifisert punkt (X, x_0) kalles et* **based space**. *En kontinuerlig funksjon $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ med $h(x_0) = y_0$ kalles et* **based map**.

Theorem 6.10. *Fra et based map $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ får vi en indusert homomorphi $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ gitt ved*

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

Fundamentalgruppa kan sees som en funktor fra based-spaces til grupper. F.eks. vil $(h \circ g)_* = h_* \circ g_*$. Dermed er det åpenbart at dersom h er et based map som også er en homeomorfi, vil h_* være en isomorfi. Videre respekterer den produkt, altså har vi

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Lemma 6.11. *Dersom $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ er to based maps som er homotope, med en homotopi som også tilfredstiller $H(x_0, t) = y_0$ for alle t, er f_* og g_* samme homomorfier.*

Definition 6.12. *La X være et topologisk rom og A et underrom. En kontinuerlig funksjon $r : X \to A$ med $r(a) = a$ for alle $a \in A$ kalles en retrakt.*

Theorem 6.13. *La A være en retrakt av X, og la $x_0 \in A$. Da gir inklusjonsavbildningen $i : A \to X$ en monomorfi $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.*

Definition 6.14. *La $r : X \to A$ være en retrakt. Dersom det finnes en homotopi mellom r og id_x s.a. $H(a,t) = a$ for alle t og alle $a \in A$ kalles r en deformasjonsretrakt.*

Theorem 6.15. *La A være en deformasjonsretrakt av X, og la $x_0 \in A$. Da gir inklusjonsavbildningen $i : A \to X$ en isomorfi $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.*

Definition 6.16. *La $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være kontinuerlige funksjoner slik at $g \circ f \simeq id_X$ og $f \circ g \simeq id_Y$. Da kalles f og g* **homotopi ekvivalenser***, og X og Y er av samme* **homotopitype***.*

Theorem 6.17. *Dersom $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ er en homotopi ekvivalens med $f(x_0) = y_0$ gir $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ er en isomorfi.*

Dette impliserer igrunn resultatet om en deformasjonsretrakt: I en deformasjonsretrakt er retrakten r og inklusjonen i homotopiekvivalenser.

7 Fundamentalgruppa til sirkelen

Definition 7.1. *La $p : E \to B$ være surjektiv og kontinuerlig. Dersom det for alle $b \in B$ finnes et nabolag U_b s.a.*

$$p^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

for åpne mengder V_λ, og hvor $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U_b$ er homeomorfier for alle λ, kalles p et **covering map***. E kalles da et* **covering space***, mens B kalles* **base space***.*

Theorem 7.2. *Et covering map p er alltid åpen.*

Definition 7.3. *La $f : X \to Y$ være en kontinuerlig funksjon, s.a. for alle $x \in X$ eksisterer et nabolag U_x s.a. $f(U_x)$ er åpen i Y, og $f|_{U_x}$ er homeomorfier. Da kalles f en* **lokal homeomorfi***.*

Theorem 7.4. *La $p_1 : E_1 \to B_1$ og $p_2 : E_2 \to B_2$ være covering maps. Da vil og*

$$p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$$

være et covering map.

Definition 7.5. *La $p : E \to B$ være et covering map. For en kontinuerlig funksjon $f : X \to B$ kaller vi $\tilde{f} : X \to E$ en løfting dersom $\tilde{f} = p \circ f$, og $\tilde{f}$ er kontinuerlig.*

Theorem 7.6. *La $p : E \to B$ være et covering map, med $p(e_0) = b_0$. For enhver sti $f : I \to B$ med $f(0) = b_0$ finnes en unik løfting $\tilde{f}$ med $\tilde{f}(0) = e_0$.*

Beviset her bruker lebesque tallet som er kommer fra et lemma som sier at for et metrisk rom (X, d) og et åpent cover $\mathcal{A}$ av X finnes et tall $\lambda > 0$ s.a. for alle $x \in X$ finnes en $U \in \mathcal{A}$ s.a. $B(x, \lambda) \subseteq U$. Beviset går da på å lage et endelig åpent dekke av $f(I)$ som består av åpne mengder som er jevnt dekt av p, og så løfte f gradvis på hver av disse mengdene, og tilslutt lime det sammen med pasting lemma.

Theorem 7.7. *Veihomotopier løfter og unikt.*

Definition 7.8. *La $p : E \to B$ være et covering map. Funksjonen*

$$\Phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}$$

gitt ved $\Phi([f]) = \tilde{f}(1)$ kalles **løftingskorrespondansen**.

Denne er veldefinert pga. unik løfting av veier, og vei-homotopier.

Theorem 7.9. *La $p : E \to B$ være et covering map. Dersom E er path-connected, er løftingskorrespondansen Φ surjektiv. Videre, dersom E er enkeltsammenhengende, er også Φ bijektiv.*

Det eneste som gjenstår for å vise f.g. til sirkelen er å vise at i et spesialtifelle er også Φ en homomorfi.

Theorem 7.10. $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$

Corollary 7.11 (Browers fixed point theorem in dimension 2)**.** *La $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1\}$. Enhver kontinuerlig funksjon $f : D^2 \to D^2$ har da et fixed point, i.e. $f(a) = a$.*

Proof. Antar man at den ikke har noen fiksed punkt, kan man ganske enkelt lage en retrakt på S^1. Men da skal $i : S^1 \to D^2$ indusere en monomorfi fra $\mathbb{Z} \to 0$, som er en kontradiksjon. □

Lemma 7.12. *La $h : S^1 \to X$ være en kontinuerlig funksjon. Da er h nullhomotop hvis og bare hvis h_* er den trivielle homomorfien.*

Theorem 7.13 (Algebraens fundamentalteorem)**.** *La $f(x) \in \mathbb{C}[X]$. Da finnes en $z \in \mathbb{C}$ s.a. $f(z) = 0$.*

Beviset kan sketches som følger:

- $f_n : S^1 \to S^1$ gitt ved $f(z) = z^n$ er et covering map for alle $n \geqslant 2$.

- $g_n : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gitt ved $g_n(z) = (i \circ f_n)(z)$ er ikke nullhomotop. Dette følger fra lemma, siden g_n ikke er triviell (kan vise at g_n tilsvarer multiplikasjon med n).

- Ta et polynom $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Pga. variabelbytte $h(z) = f(\frac{z}{M})$ kan vi anta at $|a_{n-1}| + \ldots |a_0| < 1$.

- Anta at f ikke har røtter i D_2. Da vil $k : D^2 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gitt ved $k(z) = f(z)$ være veldefinert og kontinuerlig. Kan da vise at $h = k|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er homotop med g. Men h_* er helt klart 0 (faktor gjennom inklusjonsavbildningen til D^2), så h er også nullhomotop. Dette er en motsigelse.