Ringteori - Representasjonsteori av Endeligdimensjonale Algebraer

jonathke

2022

1 Preliminaries

Definition 1.1. Λ *er venstre-artinsk (noethersk) dersom den er artinsk (noethersk) over seg selv som venstre modul*

Proposition 1.2. Λ *venstre artinsk ring* $\Rightarrow$ Λ *noethersk ring.*

Det samme er ikke sant for moduler!

Proposition 1.3. Λ *semi-simpel* $\Rightarrow$ Λ *artinsk.*

Proposition 1.4. Λ *endelig-dimensjonal* k*-algebra* $\Rightarrow$ Λ *artinsk.*

Theorem 1.5 (Wedderburn-Artin)**.** *La* Λ *være en ring. Da er* Λ *semi-simpel hvis og bare hvis* $\Lambda \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$ *for* D_i *divisjonsringer.*

En annen karakterisering er Λ semi-simpel $\Leftrightarrow$ Λ artinsk og uten nilpotente venstre idealer.

Corollary 1.6. *Alle endelig-dimensjonale simple ringer er isomorfe til fulle matriseringer over divisjonsringer.*

2 Kogger

Definition 2.1. *Et* **kogger** $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ *er en rettet graf. Definer to funksjoner* $s, e : \Gamma_1 \to \Gamma_0$

- $s(\alpha) = i$ *for* $\alpha : i \to j$
- $e(\alpha) = j$ *for* $\alpha : i \to j$

Definition 2.2. *En* **sti/vei** *er enten triviell,* e_i *for* $i \in \Gamma_0$ *eller ikke triviell, hvor det da er en sti i den vanlige graf-betydningen, altså en følge av kanter som starter der den forrige slutter.*

Definition 2.3. *En* k*-algebra er en ring* Λ *sammen med en injektiv homomorfi* $\phi : k \hookrightarrow Z(\Lambda)$*, hvor* $Z(\Lambda)$ *betegner senteret til* Λ*.*

Kanskje enklere å tenke på det som et k-vektorrom, som også er en ring, og der den multiplikative strukturen respekterer ganging med k (assosiativ og kommutativ).

Definition 2.4. *En* **vei-algebra** $k\Gamma$ *er en algebra over* k*, generert av alle mulige veier i* Λ*. Vektorromstrukturen er åpenbar, mens multiplikasjon av veier er gitt som*

$$pq = \begin{cases} pq & e(q) = s(p) \\ 0 & ellers \end{cases}$$

og hvor de trivielle veiene enten virker trivielt eller dreper.

Definition 2.5. *En mengde* $\{e_i\}_{i \in \Gamma_0}$ *er* **ortogonale idempotenter** *dersom*

$$e_i^2 = e_i \tag{1}$$

$$e_i e_j = 0 \text{ for } i \neq j \tag{2}$$

Et eksempel på dette er åpenbart de trivielle veiene i $k\Gamma$.

Proposition 2.6. $k\Gamma$ *er endeligdimensjonal* $\Leftrightarrow$ Γ *har ingen orienterte sykler.*

Proposition 2.7. *La* $k\Gamma$ *være endeligdimensjonal. Da vil* $k\Gamma$ *semi-simpel* $\Leftrightarrow$ $\Gamma_1 = \emptyset$*.*

3 Representasjoner

Definition 3.1. *En* **representasjon** (V, f) *over koggeret* Γ *er en samling vektorrom* $\{V(i)\}_{i\in\Gamma_0}$*, samt lineær-avbildninger* $f_\alpha : V(i) \to V(j)$ *for alle* $\alpha : i \to j, \alpha \in \Gamma_1$.

Representasjoner er moduler over $k\Gamma$. Gitt en $k\Gamma$ modul M, får vi representasjonen ved $M = e_1M \oplus \cdots \oplus e_nM$ som vektorrommene, og hvor lineær-avbildningene kommer fra $\alpha \cdot - : e_iM \to e_jM$. Tilsvarende er det klart at en representasjon er en modul.

Definition 3.2. *En homomorfi av representasjoner* $h : (V, f) \to (V', f')$ *er en samling avbildninger* $h_i : V(i) \to V(f)$ *slik at følgende diagram kommuterer for alle* $\alpha : i \to j$.

$$\begin{tikzcd}
V(i) \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "h_i"] & V(j) \arrow[d, "h_j"] \\
V'(i) \arrow[r, "f'_\alpha"] & V'(j)
\end{tikzcd}$$

Ser man på representasjoner som moduler er det ganske tydelig at dette er både nødvendig og tilstrekkelig for at h skal være en $k\Gamma$-homomorfi.

Definition 3.3. *En modul* M *er ikke-dekomponerbar dersom* $M = M_1 \oplus M_2$ *impliserer at enten* $M_1 = 0$ *eller* $M_2 = 0$.

Null-, simple-, ikke-dekomponerbare-, under og faktor-representasjoner er akkurat det som gir mening fra å se dem som moduler.

Definition 3.4. *La* Λ *være en endeligdimensjonal* k*-algebra. Vi sier at* Λ *er av* **endelig representasjonstype** *dersom det kun finnes et endelig antall isomorfiklasser av ikke-dekomponerbare* Λ*-moduler.*

Theorem 3.5. $k\Gamma$ *endelig representasjonstype* $\Leftrightarrow$ Γ *er et dynkin-diagram.*

Definition 3.6. *En* **relasjon** *på et kogger er et element* $\sigma \in k\Gamma$, $\sigma = a_1p_1 + \dots a_np_n$, *hvor* $e(p_i) = e(p_j)$ *og* $s(p_i) = s(p_j)$ *og hvor* $l(p_i) \geqslant 2$ *for alle* i, j. *Dersom* $\rho = \{\sigma_i\}$ *er en mengde med relasjoner, kaller vi* (Λ, ρ) *et kogger med relasjoner over* k.

For en ring R, og et ideal $I \subseteq R$, er en R/I-modul M det samme som R-moduler med $I \cdot M = 0$. Dermed blir representasjoner over (Λ, ρ), k-representasjoner over Λ som må tilfredstille relasjonene.

4 Moduler av Endelig Lengde, og Jordan-Hölder

Definition 4.1. *En modul A er av endelig lengde dersom det eksisterer en filtrering*

$$\mathcal{F} : A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n = 0$$

slik at $A_i/A_{i+1} = 0$ eller simpel for alle i. $\mathcal{F}$ kalles en **generalisert komposisjonsrekke***, og dersom $A_i/A_{i+1} \neq 0$, kalles $\mathcal{F}$ en komposisjonsrekke.*

Definition 4.2. *La A, S være Λ-moduler, S simpel. Da definerer vi*

$$\begin{aligned} m_S^{\mathcal{F}}(A) &= |\{i \mid A_i/A_{i+1} = S\}| \\ l_{\mathcal{F}}(A) &= \sum_{\text{isomorfiklasser av simple } S} m_S^{\mathcal{F}}(A) \\ l(A) &= \min l_{\mathcal{F}}(A). \end{aligned}$$

Dersom $m_S^{\mathcal{F}}(A) \geqslant 1$, kalles S en **komposisjonsfaktor** *av A.*

Vi bygger opp til Jordan-Hölder theoremet med et teorem og et korollar (evt. to lemma).

Theorem 4.3. *La $0 \to A \to B \to C \to 0$ være eksakt. For en gen.komp.rekke $\mathcal{F}$ av B kan vi lage gen.komp.rekker $\mathcal{F}'$ for A og $\mathcal{F}''$ for B.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\ & A_0 = f^{-1}(B_0) \arrow[u, hook] & B_0 \arrow[u, hook] & C_0 = g(B_0) \arrow[u, hook] & \\ & A_1 = f^{-1}(B_1) \arrow[u, hook] & B_1 \arrow[u, hook] & C_1 = g(B_1) \arrow[u, hook] & \\ & \cdots \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[u, hook] & \\ & A_n = f^{-1}(B_n) = 0 \arrow[u, hook] & B_n = 0 \arrow[u, hook] & C_n = g(B_n) = 0 \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Da vil

- *$\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ være generaliserte komposisjonsrekker.*

- $m_S^{\mathcal{F}}(B) = m_S^{\mathcal{F}'}(A) + m_S^{\mathcal{F}''}(C)$

Proof. Sketsj: Må først vise at $0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0$ er eksakt for alle i. Derifra får vi fra slangelemma at $0 \to A_i/A_{i+1} \to B_i/B_{i+1} \to C_i/C_{i+1} \to 0$ også er eksakt. Siden B_i/B_{i+1} er simpel eller 0, følger det at $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ begge er generaliserte komposisjonsrekker, og den andre påstanden er like åpenbar. $\square$

Corollary 4.4. *La $0 \to A \to B \to C \to 0$ være eksakt. Da vil $l(B) = l(A) + l(C)$.*

Proof. Litt morsom sitausjon her: Fra det forrige beviset er det umiddelbart klart at $l(B) \geqslant l(A) + l(C)$. Dette resultatet trenger vi for å vise Jordan-Hölder. Når vi har vist det, blir det klart at $l(B) = l(A) + l(C)$. $\square$

Theorem 4.5 (Jordan-Hölder)**.** *La B være en modul, og la $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ være to generaliserte komposisjonsfølger for B. Da vil*

- $m_S^{\mathcal{F}}(B) = m_S^{\mathcal{G}}(B)$.
- $l_{\mathcal{F}}(B) = l_{\mathcal{G}}(B)$.

Dermed kan vi droppe alle $\mathcal{F}$ indeksene takk og pris...

Proof. Beviset går ved induksjon på $l(B)$. Dersom $l(B) = 1$ er det åpenbart.
Anta nå at $l(B) = n \geqslant 2$. Da kan vi velge en undermodul $0 \subsetneq A \subsetneq B$, og vi får en eksakt følge $0 \to A \xrightarrow{f} B \to B/f(A) \to 0$. Fra induksjonshypotesen vil utsagnet være sant for A og $B/f(A)$, siden de har lengde $< n$. Dermed får vi $m_S^{\mathcal{F}}(B) = m_S^{\mathcal{F}'}(A) + m_S^{\mathcal{F}''}(B/f(A)) = m_S^{\mathcal{G}'}(A) + m_S^{\mathcal{G}''}(B/f(A)) = m_S^{\mathcal{G}}(B)$. Dette viser første påstand, og andre påstand er en umiddelbar konsekvens. $\square$

Proposition 4.6. *La $f : A \to B$ være en Λ-homomorfi, hvor $l(A) = l(B) < \infty$. TFAE:*

- *f er en iso.*
- *f er en mono.*
- *f er en epi.*

Iso impliserer alltid begge. Dersom f er mono, følger det at f er iso fra den direkte følgen $0 \to a \xrightarrow{f} B \to B/f(A) \to 0$, og lignende dersom f er epi.

Definition 4.7. *En underkategori $\mathcal{C}$ er* **lukket under utvidelser dersom** *for alle eksakte følger $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, hvor $A, C \in \mathcal{C}$ impliserer det at $B \in \mathcal{C}$.*

Proposition 4.8. *La $fl(\Lambda) \subseteq \mathrm{Mod}\Lambda$ være underkategorien som består av alle Λ-moduler av endelig lengde. Da vil*

- *$fl(\Lambda)$ inneholde alle simple Λ-moduler, og være lukket under utvidelser.*
- *La $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mod}\Lambda$ være en underkategori lukket under utvidelser, som inneholder alle simple Λ-moduler. Da vil $fl(\Lambda) \subseteq \mathcal{C}$.*

Første del vises ved å lage en gen. komposisjonsfølge for B fra en for A og en for C (først $f(A_i)$ for alt opp til $\ker g$, deretter $g^{-1}(C_i)$ opp til hele B). Den neste delen vises med induksjon på lengden til B.

Proposition 4.9. *La A være en Λ-modul. Da vil $l(A) < \infty \Leftrightarrow A$ er noethersk og artinsk.*

Proof. $\Rightarrow$: Artinske og noethersk ringer er lukket under utvidelser!
$\Leftarrow$: Mer jobb. □

En konsekvens av dette er at Λ er artinsk hvis og bare hvis $l({}_\Lambda\Lambda) < \infty$.

Proposition 4.10. *La Λ være en venstre-artinsk ring, og A en venstre Λ-modul. TFAE:*

- *A er av endelig lengde*
- *A er noethersk*
- *A er endelig generert*

Nedover er greit, men det tricky er å vise at for venstre-artinske ringer impliserer endelig generert endelig lengde. Videre er det hele også ekvivalent til at A er artinsk, men det er enda vanskeligere å vise.

5 Radikalet

Definition 5.1. *La* Λ *være en ring.* **Radikalet** rad $\Lambda = \mathfrak{r}$ *er definert som*

$$\mathfrak{r} = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ maksimalt ideal}} \mathfrak{m}$$

Herifra så betyr alltid $\mathfrak{r}$ radikalet til RINGEN som er i konteksten.

Proposition 5.2. Λ *en ring,* $\lambda \in \Lambda$*. TFAE:*

- $\lambda \in \mathfrak{r}$
- $1 - x\lambda$ *venstre invertibel for alle* $x \in \Lambda$.
- $1 - x\lambda$ *har en tosidig invers for alle* $x \in \Lambda$.
- $1 - \lambda x$ *har en tosidig invers for alle* $x \in \Lambda$.
- $\lambda S = (0)$ *for alle simple* Λ*-moduler* S.

Definition 5.3. *La* M *være en* Λ *modul. Da er* **annhilatoren** *til* M *definert som*

$$\mathrm{Ann}_\Lambda(M) = \{x \in \Lambda \mid xM = (0)\}$$

Dette er et tosidig ideal i Λ.

Corollary 5.4. $\mathfrak{r}$ *er radikalet til* Λ *hvis og bare hvis*

$$\mathfrak{r} = \bigcap_{S \text{ simpel modul}} \mathrm{Ann}_\Lambda(S)$$

En åpenbar konsekvens av forrige korollar er at radikalet er tosidig.

Theorem 5.5 (Nakayama's lemma)**.** *La* M *være en endeliggenerert* Λ*-modul.* $\mathfrak{r}M = M$ *hvis og bare hvis* $M = (0)$.

Evt. kan vi forsterke det til at for $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$, har vi $\mathfrak{a}M = M$ hvis og bare hvis $M = (0)$.

Lemma 5.6. *La* I *være et ideal i* Λ*. Da har vi* I *nilpotent* $\Rightarrow I \subseteq \mathfrak{r}$.

Proof. Beviset går på å at $x \in \Lambda, a \in I, (xa)^n = 0$ for en n. Da vil $1 - (xa)^n = 1$, men $(1 - (xa)^n = 1 + xa + \cdots + (xa)^n - 1)(1 - xa)$, så $1 - xa$ har en venstre invers for alle $x \in \Lambda \Rightarrow a \in \mathfrak{r}$ $\square$

Lemma 5.7. *La Λ være venstre artinsk. Da er $\mathfrak{r}$ nilpotent.*

Beviset er nesten direkte fra Nakayamas lemma.

Theorem 5.8. *Λ semi-simpel $\Leftrightarrow$ Λ artinsk og $\mathfrak{r} = (0)$.*

Proof. $\Rightarrow$: umiddelbart. $\Leftarrow$: Fra lemma over har da Λ ingen nilpotente idealer. Wedderburn-Artin gir da at Λ artinsk, uten nilpotente idealer impliserer at Λ er semi-simpel. $\square$

Theorem 5.9. *Λ venstre artinsk. Da vil*

- *$\Lambda/\mathfrak{r}$ være semi-simpel*
- *En venstre modul M er semi-simpel $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{r}M = (0)$.*
- *Det finnes kun et endelig antal simple Λ moduler opp til isomorfi, og de dukker opp som summander i $\Lambda/\mathfrak{r}$.*
- *Λ er noethersk.*

Den første påstanden kan forsterkes til at for $I \subseteq \mathfrak{r}$ har vi $\Lambda/I \Leftrightarrow I = \mathfrak{r}$. Altså er på et vis $\mathfrak{r}$ det minste idealet som gjør at faktorringen blir semi-simpel for artinske ringer.

Corollary 5.10. *Λ en ring. TFAE:*

- *Λ artinsk.*
- *Alle endeliggenererte Λ-moduler har og endelig lengde.*
- *$\mathfrak{r}$ er nilpotent, og $\mathfrak{r}^i/\mathfrak{r}^{i+1}$ er endeliggenerert og semisimpel for alle i.*

Proposition 5.11. *Λ endeligdimensjonal k-algebra. TFAE:*

- *M endeliggenerert som Λ-modul.*

- $l(M) < \infty$.
- $\dim_k(M) < \infty$.

For endeligdimensjonale vei-algebraer er alltid radikalet idealet generert av veiene av lengde 1 (kantene i den underliggende grafen). Vi kaller og en relasjon ***admisibel*** dersom $J^t \subseteq (\rho) \subseteq J^2$ for en t.

Definition 5.12. *La $A \subseteq B$ være to Λ-moduler. A kalles* **liten** *i B dersom $A + X = B \Rightarrow X = B$.*

Definition 5.13. *La B være en Λ-modul. Vi definerer radikalet til B som*

$$\mathrm{rad}B = \bigcap_{A \text{ maksimal undermodul av } B} A$$

Proposition 5.14. *La $A \subseteq B$ være Λ-moduler. Vi har A liten $\Leftrightarrow A \subseteq \mathrm{rad}B$.*

Theorem 5.15. *La Λ være artinsk og A endeliggenerert. Da er $\mathrm{rad}A = \mathfrak{r}A$.*

Definition 5.16. *La Λ være artinsk og A endeliggenerert. Da kalles $A/\mathfrak{r}A$* **toppen** *til A.*

Se at generelt så er toppen semi-simpel (for endelig-dimensjonale algebraer er det f.eks. åpenbart ved å se på representasjoner).

Lemma 5.17. *Λ venstre artinsk, A, B endeliggenerte Λ-moduler, $f : A \to B$. Da har vi*

$$f \text{ epimorfi} \Leftrightarrow \bar{f} : A/\mathfrak{r}A \to B/\mathfrak{r}B \text{ epimorfi}$$

I det forrige lemma trenger strengt tatt kun B være endeliggenert.

Definition 5.18. *La $f : A \to B$ være en epimorfi. f kalles en* **essensiell epimorfi** *dersom for alle $g : X \to A$ er $f \circ g : X \to B$ epi $\Leftrightarrow g$ epi ($\Leftarrow$ er jo alltid sant...).*

Proposition 5.19. *La Λ være en venstre artinsk ring, A, B endeliggenererte Λ-moduler. TFAE:*

- *$f : A \to B$ er en essensiell epimorfi.*
- $\ker f \subseteq \mathfrak{r}A$.
- *$\bar{f} : A/\mathfrak{r}A \to B/\mathfrak{r}B$ er en isomorfi.*

6 Projektive Moduler

Se hom.alg notater for definisjon av projektive moduler.

Proposition 6.1. *Λ ring, P er en modul. Da har vi*

$$P \text{ projektiv} \Leftrightarrow P \oplus Q \simeq \Lambda^t$$

for en t, i.e. P er en direkte summand av en fri modul.

Definition 6.2. *La $f : P \to M$ være en Λ-homomorfi. f kalles et* **projektivt dekke** *dersom P er projektiv, og f er en essensiell epimorfi.*

Theorem 6.3. *La Λ være venstre artinsk, og A endeliggenerert.*

- *Det eksisterer et projektivt dekke av A,*
- *Det projektive dekke er unikt opp til isomorfi.*

Proof. Første påstand: Siden A er endeliggenert finnes det iallfall en surjeksjon fra en projektiv på A. Velg den med kortest lengde. Vis at den er et projektivt dekke.

Andre påstnad: La f_1 og f_2 være to projektive dekker. Se diagrammet under:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "f_1"] & & 0 \\
P_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dotted, "g"'] & A \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & 0 \\
P_1 \arrow[ur, "f_1"] & & 0
\end{tikzcd}$$

h og g er epi siden f_1 og f_2 er projektive dekker. Men dette gir $l(P_1) \geqslant l(P_2) \geqslant l(P_1) \Rightarrow l(P_1) = l(P_2)$, så g og h er isomorfier. $\square$

Proposition 6.4. *Λ venstre artinsk, $f : P \to A$ epi, P projektiv, A endeliggenert.*

- *f projektivt dekke $\Leftrightarrow$ $\bar{f} : P/\mathfrak{r}P \to A/\mathfrak{r}A$ isomorfi.*
- *For direkte summer så har vi at den direkte summen av masse morfier er et proj. dekke hvis og bare hvis hver individuelle del er et projektivt dekke.*

Proposition 6.5. *Λ venstre artinsk, P, Q projektive moduler.*

- *$P \to P/\mathfrak{r}P$ er et projektivt dekke.*
- *$P \simeq Q \Leftrightarrow P/\mathfrak{r}P \simeq Q/\mathfrak{r}Q$*
- *P ikke dekomponerbar $\Leftrightarrow P/\mathfrak{r}P$ simpel.*

Proof. Første påstand: Klart, andre påstand: Unikhet av projektive dekker, tredje: Litt mer. $\square$

Corollary 6.6. *La Λ være artinsk, og la $\Lambda/\mathfrak{r} \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$. Ta projektive dekker av hver av de simple, $P(S_i)$. Da er alle disse de eneste ikke-dekomponerbare projektive modulene over Λ (opp til isomorfi).*

Overraskende nyttig:

Proposition 6.7. *La Λ være venstre artinsk, og la $g : P \to M/\mathfrak{r}M$ være et projektivt dekke av Λ-modulen $M/\mathfrak{r}M$. Da vil det finnes en f slik at følgende kommuterer (siden P er projektiv).*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/\mathfrak{r}M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da vil og f være et projektivt dekke.

Det finnes flere ekvivalente beskrivelser av lokale ringer. Et par som brukes her: En ring med kun et maksimalt ideal, evt. en ring der alle ikke-inverterbare elementer former et ideal.

Proposition 6.8. *La Λ være en lokal ring. Da er $0, 1$ de eneste idempotente.*

Proof. Det er ganske lett å vise at den eneste ikke inverterbare idempotente er 1. Anta derfor $e \neq 0, 1$ ikke inverterbar. Da er heller ikke $1 - e$ inverterbar. Men vi har $1 = e + (1 - e)$, så de er ikke i et ideal, og ringer er dermed ikke lokal. $\square$

Proposition 6.9. *La M være en Λ modul. Da har vi $0, 1$ eneste idempotente i $\mathrm{End}_\Lambda(M) \Leftrightarrow M$ ikke-dekomponerbar.*

Et åpenbart korollar her er da at $\mathrm{End}(M)$ lokal $\Rightarrow$ M ikke-dekomponerbar. For artinske ringer og projektive moduler har vi noe enda sterkere.

Proposition 6.10. *La Λ være artinsk, og P projektiv og endeliggenerert. Da vil $\mathrm{End}_\Lambda(P)$ lokal $\Leftrightarrow$ P ikke-dekomponerbar.*

Faktisk er påstanden sant for M ikke nødvendigvis projektiv og, men da trenger vi fitting-lemma. Kommer lenger ned.

Proposition 6.11. *Λ venstre artinsk.*

- *$1 = e_1 + \cdots + e_n$ for en mengde $\{e_1, \ldots e_n\}$ primitive, ortogonale idempotenter (primitive betyr at ingen kan skrives som en sum av de andre).*
- *La $e_1, \ldots, e_n$ være ortogonale idempotenter, $e = e_1 + \ldots e_n$. Da vil $\Lambda e = \Lambda e_1 \oplus \ldots \Lambda e_n$.*
- *$e \neq 0$ idempotent. Λe ikke-dekomponerbar impliserer at e er primitiv.*

Proof. Første påstand: $\Lambda \to \Lambda/\mathfrak{r}$ er et projektivt dekke. Men vi har og $\Lambda/\mathfrak{r} \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, så $P(S_1) \oplus \cdots \oplus P(S_n)$ er og et projektivt dekke. Altså må $\Lambda \simeq P(S_1) \oplus \cdots \oplus P(S_n)$. Da vil $1 = e_1 + \cdots + e_n$, for $e_i \in P(S_i)$. □

7 Krull-Remak-Schmidt

Følgende er Krull-Remak-Schmidt for projektive, som er relativt trivielt å vise sammenlignet med den fulle.

Proposition 7.1. *La Λ være venstre artinsk, og P en endeliggenerert projektiv modul. Da er*

$$P \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$$

hvor alle P_i er ikke dekomponerbare. Videre er denne dekomponeringen unik opp til isomorfi og rekkefølge.

Proof. $P/\mathfrak{r}P \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_n \Rightarrow P \simeq P(S_1) \oplus \cdots \oplus P(S_n)$. □

For det fulle resultatet trenger vi følgende svært nyttige lemma.

Lemma 7.2 (Fitting lemma)**.** *la M være en Λ modul med $l(M) < \infty$ og la $\phi \in \operatorname{End}_\Lambda(M)$. Da eksisterer en $n \in \mathbb{Z}$ slik at*

$$M \simeq \operatorname{Im}\phi^n \oplus \ker\phi^n$$

Proof. Siden $l(M) < \infty$ er M både noethersk og artinsk. Dermed finnes det en n slik at både $\dots \supseteq \operatorname{Im}\phi^n \supseteq \operatorname{Im}\phi^{n+1} \supseteq \dots$ og $\dots \subseteq \ker\phi^n \subseteq \ker\phi^{n+1} \subseteq \dots$ stabiliserer seg. Kan vise at påstanden er sant for denne (og større) n'er. □

Theorem 7.3. *La Λ være artinsk og M endeliggenerert modul. Da har vi* $\operatorname{End}_\Lambda(M)$ *lokal $\Leftrightarrow$ M ikke-dekomponerbar.*

Proof. $\Rightarrow$: Har sett lenger oppe at dette er sant generelt. $\Leftarrow$: Anta at M er ikke-dekomponerbar. La $a \in \operatorname{End}_\Lambda(M)$ være ikke inverterbar. Da er og $xa \in \operatorname{End}_\Lambda(M), x \in \operatorname{End}_\Lambda(M)$ ikke inverterbar for alle x. Fitting lemma gir + M ikke-dekomponerbar gir at $(xa)^n = 0$, altså er xa nilpotent, og a er i radikalet til $\operatorname{End}_\Lambda(M)$. Siden a bare var et tilfeldig ikke inverterbart element, betyr dette at $\operatorname{End}_\Lambda(M)$ er lokal. □

Theorem 7.4 (Krull-Remak-Schmidt)**.** *La Λ være artinsk, og M endeliggenerert Λ-modul.*

- *$M \simeq \bigoplus_{i=1}^n M_i$, hvor M_i er ikke-dekomponerbar.*
- *Denne dekomponeringen er unik opp til isomorfi og rekkefølge.*

Proof. Første påstand: Veldig lett induksjonsbevis.

Andre påstand: Veldig vanskelig induksjonsbevis. Ideen er at dersom $M \simeq \bigoplus M_i \simeq \bigoplus N_i$ kan man finne en iso mellom en M_j og en N_k. For å gjøre dette bruker man at $\operatorname{End}_\Lambda(M)$ er lokal, og dermed at $\sum \psi_{sr}\phi_{rs} = 1$ gjør at en $\psi_{sr}\phi rs$ må være inverterbar. Her er ϕ og ψene de naturlige injeksjonene/projeksjonene på de direkte summene. En del mer jobb må til. □

8 Artin Algebraer

I denne seksjonen bytter vi ut kroppen k med en ring R for R-algebraer.

Definition 8.1. *En Artin R-algebra er en algebra over R, hvor R er en kommutativ, artinsk ring, og Λ er endeliggenerert som R-modul.*

Et av de viktigste eksemplene er endeligdimensjonale algebraer over en kropp.

Merk og at $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ blir en R-modul ved $(r \cdot f)(a) = \varphi(r) f(a)$.

Proposition 8.2. *La Λ være en artin R-algebra.*

- A, B *Λ-moduler* $\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ *endeliggenerert R-modul.*
- A *er en Λ-modul* $\to \mathrm{End}_\Lambda(A)$ *er en artin R-algebra, og en underalgebra av* $\mathrm{End}_R(A)$
- Λ *er en artinsk ring.*

9 Projektivisering

Gjennom denne seksjonen, la Λ være en artin R-algebra, la A være en endeliggenerert Λ-modul, og la $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(A)^{\mathrm{op}}$. Merk at

- ${}_\Lambda A_\Gamma$ er en $\Lambda - \Gamma$-bimodul.
- For X endeliggenerert Λ-modul, er også $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, X)$ en venstre Γ-modul ved $(\psi \cdot \phi)(a) = \phi(\psi(a)), \phi \in \Gamma, \psi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X)$

La A være en Λ-modul. Definer kategorien $\mathrm{add}A \subseteq \mathrm{mod}\Lambda$ som kategorien av moduler Z som er slik at det eksisterer en annen modul Y s.a. $Z \oplus Y \simeq A^t$ for en t. Videre la $\mathrm{proj}\Lambda$ være kategorien av projektive Λ-moduler.

Proposition 9.1. *Funktoren*

$$e_A = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X) : \mathrm{mod}\Lambda \to \mathrm{mod}\Gamma$$

er en R-funktor (en funktor som er en R-homomorfi på hom-mengdene), med følgende egenskaper:

- $e_A : \mathrm{Hom}_\Lambda(Z, X) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(e_A(Z), e_A(X))$ *er en R-isomorfi for alle* $Z \in \mathrm{add}A$*.*

- $X \in \mathrm{add}A \to e_A(X)$ *er en projektiv* Γ*-modul.*

- $e_A|_{\mathrm{add}A} : \mathrm{add}A \to \mathrm{proj}\Gamma$ *er en ekvivalens av kategorier.*

Alt det som vanligvis blir bevart av kategoriske ekvivalenser blir igjen bevart her. Merk og at ikke-dekomponerbarhet blir bevart, pga. isomorfi mellom endomorfiringene, samt at Γ og Λ er artinske ringer (så vi har $\mathrm{End}(M)$ lokal $\Leftrightarrow$ M ikke-dekomponerbar).

10 Basale Algebraer

Definition 10.1. *La* Λ *være en artin* R*-algebra.* Λ *er basal dersom*

$$\Lambda \simeq P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$$

hvor $P_i \neq P_j$ *og alle* P_i *ikke-dekomponerbare.*

Fra hvordan vi skriver Λ på denne formen (KRS for projektive), så er det åpenbart at Λ er basal hvis og bare hvis

$$\Lambda/\mathrm{r} \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$$

hvor alle S_i'ene er forskjellige (husk, de er simple).

Skriv nå for $\Lambda \simeq P_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus P_n^{r_n}$, $P = P_1 \oplus P_n.$, og $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(P)^{\mathrm{op}}$.

$e_P = \mathrm{Hom}_\Lambda(P, -)$ gir da at $e_P(P) = e_P(P_1) \oplus \cdots \oplus e_P(P_n) \simeq \Gamma \Rightarrow \Gamma$ er basal. Videre har vi at dersom Λ alt er basal vil $P \simeq \Lambda$ som gir $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda)^{\mathrm{op}} \simeq \Lambda$.

Proposition 10.2. *Behold notasjonen over.* $e_P = \mathrm{Hom}_\Lambda(P, -) : \mathrm{mod}\Lambda \to \mathrm{mod}\Gamma$ *er en ekvivalens av kategorier.*

Dersom to ringer har ekvivalente modul-kategorier kaller vi ringene ***morita-ekvivalente***. Proposisjonen over sier at alle Artin R-algebraer er morita-ekvivalente til en basal Artin R-algebra.

Theorem 10.3. *La* Λ *være en endeligdimensjonal* k*-algebra, hvor* $k = \bar{k}$ *(altså* k *er algebraisk lukket). Da vil*

- *Λ er morita ekvivalent med en basal Λ'.*
- *La Λ være basal. Da $\exists(\Gamma,\rho)$ slik at $\Lambda \simeq k\Gamma/(\rho)$.*

Beviset for påstand to over er ganske tungt. Wedderburn-Artin, og løfting av idempotente er nøkkelord.

11 Dualitet

Definition 11.1. *En funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ er en dualitet dersom det finnes en kontravariant funktor $H : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ slik at $HF \simeq 1_{\mathcal{C}}$ og $FH \simeq 1_{\mathcal{D}}$.*

Egentlig bare en kontravariant ekvivalens, eller misforstår jeg noe?

Proposition 11.2. *Λ endeligdimensjonal k-algebra, k en kropp. Da har vi at*

$$D = \mathrm{Hom}_k(-, k) : \mathrm{mod}\Lambda \to \mathrm{mod}\Lambda^{\mathrm{op}}$$

er en dualitet.

Merk at dette er bare en lett utvidelse av standard-eksemplet på dualitet (duale vektorrom). En annen ting dette sier er at $(\mathrm{mod}\Lambda)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{mod}\Lambda^{\mathrm{op}}$.

Denne D induserer og en dualitet på representasjoner.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(\Gamma,\rho) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "D'=HDF"] & \mathrm{mod}\Lambda \arrow[d, "D"] \\
\mathrm{Rep}(\Gamma^{\mathrm{op}},\rho^{\mathrm{op}}) & \mathrm{mod}\Lambda^{\mathrm{op}} \arrow[l, "H"]
\end{tikzcd}$$

Litt jobb viser at D' lar vektorrommene være, og transponerer matriseformen til alle lineær-avbildningene.

12 Injektive Moduler

Igjen, for definisjon av injektive moduler se hom.alg notater (det er den duale definisjonen).

Proposition 12.1. *Λ endeligdimensjonal k-algebra, P Λ-modul. Da er P projektiv $\Leftrightarrow D(P)$ er injektiv. Videre er alle endeliggenererte Λ moduler en undermodul av en injektiv modul.*

Proof. Begge to er ganske direkte fra dualiteten. □

Utsagnet er faktisk sant for alle ringer Λ, og alle moduler.

Definition 12.2. *La Λ være en ring.*

- *$A \subseteq X$ er Λ-moduler. A kalles en* **essensiell undermodul** *av X dersom for alle andre moduler $B \subseteq X$ har vi $A \cap B \neq (0)$.*
- *En monomorfi $f : A \to X$ kalles en* **essensiell monomorfi** *dersom $\operatorname{Im} f$ er essensiell i X (duale til essensiell epimorfi).*
- *En morfi $i : A \to I$ kalles en injektiv innhylning dersom i er en essensiell monomorfi og I er injektiv (duale til projektivt dekke).*

Definition 12.3. *Λ er en artin R-algebra, og A en endeliggenerert Λ-modul.* **Sokkelen** *til A, $\mathrm{soc}A$ er summen av alle simple undermoduler av A.*

For artinske ringer har vi at $D(A/\mathrm{r}A) \simeq \mathrm{soc}D(A)$.

Lemma 12.4. *Λ en artin R-algebra, $A \subseteq X$ Λ-moduler. TFAE:*

- *A er en essensiell undermodul av X*
- $\mathrm{soc}A = \mathrm{soc}X$
- $\mathrm{soc}X \subseteq A$

Proof. $i \to ii$: Anta at $\mathrm{soc}A \subsetneq \mathrm{soc}X$. Da finnes det en simpel $S \subseteq X$, som ikke er en undermodul av A. Altså er $A \cap S = (0)$ og A er ikke en essensiell undermodul av X.

$ii \to iii$ Umiddelbart.

$iii \to i$ La $(0) \neq B \subseteq X$ være en undermodul. Da vil $(0) \neq \mathrm{soc}B \subseteq \mathrm{soc}B \cap \mathrm{soc}X \subseteq \mathrm{soc}B \cap A \subseteq B \cap A$, så A er essensiell. □

Proposition 12.5. *La Λ være en artin R-algebra, $(0) \neq A$ en Λ-modul.*

- *$i : A \to I$, i mono, er en injektiv innhylning $\Leftrightarrow I$ er injektiv og* $\mathrm{soc}I = \mathrm{soc}A$.
- *Injektive innhylninger er unike opp til isomorfi.*
- $I(A) \simeq I(\mathrm{soc}A)$.

Lemma 12.6. *Λ Artin R-algebra, A endeliggenerert Λ-modul. Da har vi at*

$$\mathrm{soc}A = \{a \in A \mid (\mathrm{rad}A)a = (0)\}$$

En annen nesten-lemma er at $\mathrm{soc}A \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{r}, A)$.

Proposition 12.7. *Λ endeligdimensjonal k-algebra, k kropp. $P \xrightarrow{f} A$ projektivt dekke $\Leftrightarrow D(A) \xrightarrow{D(f)} D(P)$ injektiv innhylning.*

Generelt når vi er i endeligdimensjonal k-algebra tilfellet så har vi en hel hauged bijeksjoner:

$$\begin{aligned}
\{\text{i.d. injektive } \Lambda-\text{moduler}\} &\leftrightarrow \{\text{simple } \Lambda-\text{moduler}\} \\
I &\to \mathrm{soc}I \\
I(S) &\leftarrow S \\
\{\text{simple } \Lambda-\text{moduler}\} &\leftrightarrow \{\text{i.d. projektive } \Lambda-\text{moduler}\} \\
S &\to P(S) \\
P/\mathfrak{r}P &\leftarrow P \\
\{\text{i.d. projektive } \Lambda-\text{moduler}\} &\leftrightarrow \{\text{i.d. injektive } \Lambda^{\mathrm{op}}-\text{moduler}\} \\
P &\to D(P) \\
D(I) &\leftarrow I \\
\{\text{i.d. injektive } \Lambda^{\mathrm{op}}-\text{moduler}\} &\leftrightarrow \{\text{simple } \Lambda^{\mathrm{op}}-\text{moduler}\} \\
\{\text{simple } \Lambda^{\mathrm{op}}-\text{moduler}\} &\leftrightarrow \{\text{i.d. projektive } \Lambda^{\mathrm{op}}-\text{moduler}\} \\
\{\text{i.d. projektive } \Lambda^{\mathrm{op}}-\text{moduler}\} &\leftrightarrow \{\text{i.d. injektive } \Lambda-\text{moduler}\}
\end{aligned}$$