Contents

1 Grunnleggende om Idealer **2**
1.1 Primspekteret 4

2 Lokalisering **6**

3 Avstikker: Hopkins-Neeman Teoremet **9**

4 Primær Dekomponering **11**

5 Hele elementer **14**
5.1 Opp- og nedstigning 15

6 Dedekindområder **16**
6.1 Diskrete Valuasjonsringer 17
6.2 Dedekindområder generelt 18
6.3 Unik faktorisering av idealer 20

7 Dimensjonsteori **21**
7.1 Intro 21
7.2 Assosierte graderte ringer 24

8 Dimensjonsteoriens Fundamentalteorem **26**

9 Extra topic: from free modules to torsion free modules **27**
9.1 Free and stably free modules 28
9.2 Loc. free, projective, stalk. loc. free and flat modules 28
9.3 Torsion free modules 30

Om det ikke står noe annet, la A være en kommutativ ring, med enhet.

1 Grunnleggende om Idealer

Definition 1.1: Primideal og maksimalt ideal

To viktige definisjoner:

- Et **primideal** er et ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ slik at $\mathfrak{p} \neq A$ og $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq A$ eller $\mathfrak{b} \subseteq A$.
- Et **maksimalt ideal** er et ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ med $\mathfrak{m} \neq A$ og ingen idealer $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq A$.

Vet godt grunnleggende egenskaper ved primidealer og maksimale idealer, så trenger ikke dvele mer på det.

Definition 1.2: Lokal ring

En ring A er **lokal** dersom den kun har ett maksimalt ideal $\mathfrak{m}$. Da skriver vi $(A, \mathfrak{m})$.

Proposition 1.1. *Følgende er ekvivalent for* $\mathfrak{m} \subseteq A$*:*

- $(A, \mathfrak{m})$ *er lokal.*
- $a \in A \setminus \mathfrak{m} \to a$ *er en enhet.*
- $\mathfrak{m}$ *er maksimal og* $1 + a$ *er en enhet for alle* $a \in \mathfrak{m}$*.*

Definition 1.3: Radikaler

Nullradikalet til A er idealet

$$\mathfrak{n} = \{a \in A \mid \text{Det finnes } t > 0, a^t = 0\}.$$

Jakobsenradikalet (også kalt **radikalet**) til A er idealet

$$\mathfrak{r} = \bigcap_{\mathfrak{m} \subseteq A, \mathfrak{m} \text{ maksimalt}} \mathfrak{m}$$

Merk følgende:

- a nilpotent $\Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ for alle $\mathfrak{p}$ primideal. Så $\mathfrak{n} \subseteq \bigcap \mathfrak{p}$.
- Fra forrige punkt følger det at $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{r}$.
- A er **redusert** dersom $\mathfrak{n} = 0$. F.eks. er $A/\mathfrak{n}$ alltid redusert.

Proposition 1.2. *Faktisk er det enda sterkere:*

- *Vi har $\mathfrak{n} = \bigcap \mathfrak{p}$ der snittet går over alle primidealer.*
- *$a \in \mathfrak{r} \Rightarrow 1 + ab$ er en enhet for alle $b \in A$.*

Følgende bevis (for første punkt) krever å gå litt frem i notatene (til lokalisering), men er veldig rett frem:

Proof. Vi har alt vist at $\mathfrak{n} \subseteq \bigcap \mathfrak{p}$. For å vise motsatt, viser vi at $a \notin \mathfrak{n} \Rightarrow a \notin \bigcap \mathfrak{p}$, altså at det finnes et primideal som a ikke er i. La a ikke være nilpotent, og se på $A[S^{-1}]$, hvor $S = \{1, a, a^2, \dots\}$. Denne ringen er ikke 0 (siden $0 \notin S$), og har dermed et primideal (f.eks. et maksimalt ideal), $\mathfrak{p}_a$. Da vil $\mathfrak{p}_a^c$ være et primideal i A, disjunkt fra S (se korrespondanse mellom $\operatorname{Spec} A$ snitt primidealer disjunkte fra S og $\operatorname{Spec} A[S^{-1}]$). □

Det neste teoremet ser uskyldig ut, men er veldig viktig:

Theorem 1.3 (Prime avoidance)**.** *text.*

- *La $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t \subseteq A$ være primidealer, og la $\mathfrak{a} \subseteq A$ være et ideal med $a \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Da vil $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ for en i.*
- *La $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t \subseteq A$ være idealer og la $\mathfrak{p} \subseteq A$ være et primideal med $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq p$. Da vil $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ for en i. Spesielt, har vi $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$.*

Proof. Første punkt: Vises med induksjon på t. La $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{t+1} \mathfrak{p}_i$. Dersom vi kan droppe en indeks, er det sant pr.induksjon, så anta ikke. Da vil, for alle $1 \leq j \leq t+1$ tilfredsstille $\mathfrak{a} \subsetneq \bigcup_{i=1, i \neq j}^{t+1} \mathfrak{p}_i$, så det eksisterer en $a_j \in \mathfrak{a}$ med $a_j \notin \mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_{j-1}, \mathfrak{p}_{j+1}, \dots, \mathfrak{p}_{t+1}, a_j \in \mathfrak{p}_j$. Se nå på elementet $a = \sum_{j=1}^{t+1} a_1 \dots \hat{a}_j \dots a_{t+1} = a_2 a_3 \dots a_{t+1} + a_1 a_3 \dots a_{t+1} + \dots + a_1 a_2 \dots a_t$. Det ligger i $\mathfrak{a}$, men ikke i noen $\mathfrak{p}_i$, altså har vi en motsigelse.

Andre punkt følger av første, og at $\prod \mathfrak{a}_i \subseteq \bigcap \mathfrak{a}_i$. □

Et par siste ting:

- Vi utvider definisjonen av radikal til **radikalet til $\mathfrak{a}$** som $\mathfrak{r}(\mathfrak{a} = \{a \in A \mid a^t \in \mathfrak{a}$ for en $t > 0\})$.

- Definer $\operatorname{Ann}\mathfrak{a} = \{a \in A \mid a\mathfrak{a} = 0\}$.
- La $f : A \to B$ være en ring homomorfi, og $\mathfrak{a} \subseteq A, \mathfrak{b} \subseteq B$ være idealer. Definer idealene $\mathfrak{a}^e = \langle f(\mathfrak{a})\rangle \subseteq B$, og $\mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$.
- Dersom $\mathfrak{b}$ er et primideal, er og $\mathfrak{b}^c$ et primideal.

1.1 Primspekteret

I alg top har vi brukt algebra til å løse topologi problemer. Med primspekteret får vi en funktor andre veien, og kan bruke topologi til å løse algebraiske problemer!

Definition 1.4: Zariski-topologien

Følgende mengde:
$$\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ primideal i } A\}$$
kan bli gitt en topologi ved å definere de lukkede mengdene som
$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}$$
for alle idealer $S = \mathfrak{a} \subseteq A$. Evt kan vi naturlig nok definere de åpne mengdene som
$$D(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \subsetneq \mathfrak{p}\}$$

Merk følgende:

- $V(S) = V(\langle S\rangle)$.
- $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow V(S_2) \subseteq V(S_1)$
- Hvis $\mathfrak{a} \subseteq A$ er et ideal, har vi $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$.
- $V(0) = \operatorname{Spec} A, V(1) = \varnothing, D(0) = \varnothing, D(1) = \operatorname{Spec} A$.
- La I være en indeks mengde, og la $\{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$ være idealer. Da vil
$$\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i)$$
og tilsvarende vil
$$\bigcup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i) = D(\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i)$$

- For idealer $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ har vi

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \\ D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \end{aligned}$$

- For $x \in A$

$$\begin{gathered} V(x) = \varnothing \Leftrightarrow x \text{ enhet}, \, D(x) = \varnothing \Leftrightarrow x \in \mathfrak{n}. \\ V(x) = \operatorname{Spec} A \Leftrightarrow x \in \mathfrak{n}, \, D(x) = \operatorname{Spec} A \Leftrightarrow x \text{ enhet}. \end{gathered}$$

- For idealer $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ har vi $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$.

Denne topologien på $\operatorname{Spec} A$ kalles **Zariski-topologien**. Denne topologien er riktignok rar:

Proposition 1.4. *Disse tingene er sant:*

- *Hvis $\mathfrak{a} \subseteq A$ er et endelig generert ideal, så er $D(\mathfrak{a})$ kompakt i underromstopologien. Spesielt er da $\operatorname{Spec} A = D(1)$ kompakt.*

- $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Spec} A$ *er* $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$, *så de lukkede punktene er de maksimale idealene.*

- $\operatorname{Spec} A$ *er T_0 (dvs. for alle par av punkter finnes det en åpen mengde som inneholder det ene, men ikke det andre punktet), men ikke Hausdorff så snart det finnes to punkter $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subseteq \operatorname{Spec} A$ med $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ (merk at dette nesten alltid skjer: F.eks. i integritetsområder, så er (0) et primideal...).*

Definition 1.5: Irredusibelt rom

Et topologisk rom X kalles **irredusibelt** dersom det tilfredstiller en (og dermed alle) av følgende egenskaper:

- Hvis $X = V_1 \cup V_2$ med V_1, V_2 lukket, så er $V_1 = X$ eller $V_2 = X$
- Alle ikke tomme, åpne mengder $U \subseteq X$ er tette, altså $\overline{U} = X$.
- U_1, U_2 åpne og ikke tomme $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

Følgende lemma er enkelt, men nyttig:

Lemma 1.5. *Alle kommutative ringer har minimale primidealer.*

Irredusibelhelt er mindre brukt i standard topologi, men helt essensielt i f.eks. Algebraisk Geometri. Her er noen grunnleggende egenskaper:

Proposition 1.6. *Følgende er sant:*

- $\operatorname{Spec} A$ *irredusibelt* $\Leftrightarrow \mathfrak{n}$ *er et primideal.*
- $V \subseteq \operatorname{Spec} A$ *lukket og irredusibelt* $\Leftrightarrow V = V(\mathfrak{p})$ *for et primideal* $\mathfrak{p}$.
- *De maksimale, irredusible undermengdene av* $\operatorname{Spec} A$ *er* $\{V(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p}$ *minimalt*$\}$.

Spec A er og funktoriell:

Theorem 1.7. *La* $\phi : A \to B$ *være en ring homomorfi, og se på* $\phi^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ *gitt ved* $\phi^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^c$. *For et ideal* $\mathfrak{a} \subseteq A$ *er da*

$$\begin{aligned}(\phi^*)^{-1}(D(\mathfrak{a})) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid \phi^*(\mathfrak{p}) \subseteq D(\mathfrak{a})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{a} \not\subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{a}^e \not\subseteq \mathfrak{p}\} = D(\mathfrak{a}^e),\end{aligned}$$

så ϕ^* *er kontinuerlig.*

Definition 1.6: Spektralt rom

Et topologisk rom X er **spektralt** dersom det eksisterer en ring A med $\operatorname{Spec} A \simeq X$.

2 Lokalisering

Mye av komplikasjonene kommer når vi lokaliserer på andre ringer enn integritetsområder, alt er mye enklere da. Uansett, poenget er at lokalisering er omtrent den fineste funktoren vi kan ha, den har alle egenskaper en kunne ønsket seg.

Definition 2.1: Lokalisering

La $S \subseteq A$ være en delmengde lukket under multiplikasjon. Vi definerer ekv. rel $\sim$ på $A \times S$ som

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S : u(at - bs) = 0$$

Definer **lokaliseringen** til A mhp. S som

$$A[S^{-1}] = A \times S/\sim$$

I denne definisjonen bruker vi at operasjonene $a/s \cdot b/t := ab/st, a/s + b/t := (at + bs)/st$ er veldefinerte, og gir en ringstruktur på $A[S^{-1}]$ (a/s betegner ekvivalensklassen til (a, s)). Merk følgende grunnleggende egenskaper:

- Nullelementet i $A[S^{-1}]$ er $0/1$, identitetselementet er $1/1$.
- $a/s = ta/ts$ for alle $t \in S$.
- $a \in S \Rightarrow a/s$ er en enhet for alle $s \in S$ (siden $a/s \cdot s/a = 1$).
- Vi har en ring homomorfi $\phi : A \to A[S^{-1}]$ gitt ved $\phi(a) = a/1$.
- $a \in \ker \phi \Rightarrow \exists s \in S : as = 0$.

Det viktigste spesialtilfellet er **lokaliseringen på $\mathfrak{p}$**, hvor $\mathfrak{p}$ er et primideal:

$$A_{\mathfrak{p}} := A[S^{-1}] = \{a/s \mid s \notin \mathfrak{p}\}.$$

her betegner S de elementene som IKKE er i $\mathfrak{p}$. Dette er en multiplikativt lukket undermengde, nettopp pga. primegenskapen til $\mathfrak{p}$.

Proposition 2.1. *La $\mathfrak{a}$ være et ideal i A, og la $\mathfrak{b}$ være et ideal i $A[S^{-1}]$.*

- $\mathfrak{a} \cap S \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathfrak{a}^e = A[S^{-1}]$.
- $\mathfrak{b} \subseteq A[S^{-1}] \Rightarrow (\mathfrak{b}^c)^e$ *(Så alle idealer i $A[S^{-1}]$ er på formen $\mathfrak{a}^e$.*
- $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A[S^{-1}] \Rightarrow \mathfrak{p}^c \in \operatorname{Spec} A$ *(det er alltid sant for ring.hom). Men også motsatt, hvis $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ og $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ er $\mathfrak{p}^e \in \operatorname{Spec} A[S^{-1}]$.*
- *Vi har en bijeksjon*

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\} &\leftrightarrow \operatorname{Spec} A[S^{-1}] \\ \mathfrak{p} &\leftrightarrow \mathfrak{p}^e \\ \mathfrak{q}^c &\leftrightarrow \mathfrak{q} \end{aligned}$$

Det viktigste korollaret:

Corollary 2.2. *For $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ får vi en bijeksjon:*

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} &\to \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{q} &\to \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

Spesielt er $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})$ lokal.

Lokalisering er egentlig en funktor fra A-moduler til $A[S^{-1}]$-moduler:

Definition 2.2: Lokalisering av moduler og homomorfier

For en A-modul M, kan vi lage samme ekv. rel. på $M \times S$ som på $A \times S$. Dette gir en $A[S^{-1}]$-modul

$$M[S^{-1}] = \{m/s \mid m \in M, s \in S\}.$$

For A-homomorfier $f : M \to N$ får vi og en $A[S^{-1}]$-homomorfi

$$\begin{aligned} M[S^{-1}] &\to N[S^{-1}] \\ m/s &\to f(m)/s \end{aligned}$$

Følgende brukes (i Eisenbud) til å vise at lokalisering er eksakt:

Lemma 2.3. $M[S^{-1}] \simeq A[S^{-1}] \otimes_A M$

Proof. $A[S^{-1}] \otimes_A M \to M[S^{-1}]$ gitt ved $\sum(a_i/s_i \otimes m_i) \to \sum a_i m_i/s_i$ er en isomorfi. $\square$

Theorem 2.4. *Lokalisering er en eksakt funktor.*

Proof. Høyre-eksakt følger fra at det er isomorf med tensor produkt, venstre-eksakt vises direkte. $\square$

Corollary 2.5. $A[S^{-1}]$ *er en flat A-modul (pr. def er flat at* $A[S^{-1}]) \otimes -$ *er eksakt).*

Corollary 2.6. $(M \otimes_A N)[S^{-1}] \simeq M[S^{-1}] \otimes_{A[S^{-1}]} N[S^{-1}]$

Med følgende lemma blir det påfølgende korollaret trivielt.

Lemma 2.7. $M \in \operatorname{Mod} A$ *endelig generert* $\Rightarrow (\operatorname{Ann}_A M)[S^{-1}] \simeq \operatorname{Ann}_{A[S^{-1}]} M[S^{-1}]$

Corollary 2.8. *La* $M \in \operatorname{Mod} A$ *være endelig generert og* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. *Da har vi* $M_\mathfrak{p} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ann} M \subseteq \mathfrak{p}$.

Definition 2.3: Støtten til en modul

La $M \in \operatorname{Mod} A$. Vi definerer **støtten** til M som

$$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}$$

Det er lett å se at dersom M er endeliggenerert, har vi $\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann} M)$.

Proposition 2.9. *Gitt en eksakt følge* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *i* $\mathrm{Mod}A$ *har vi at*

$$\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} L \cup \operatorname{Supp} N$$

Spesielt er $\operatorname{Supp} L \oplus N = \operatorname{Supp} L \cup \operatorname{Supp} N$.

Proof. Lokaliser på alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Siden lokalisering er eksakt, følger resultatet. □

Avslutter denne seksjonen med en til kommutativ algebra klassiker:

Theorem 2.10 (Nakayama's Lemma)**.** *Hvis* $M \in \mathrm{Mod}A$ *er endeliggenerert og* $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{r}$ *(hvor* $\mathfrak{r}$ *betegner jakobson-radikalet til* A*), så er*

$$M = \mathfrak{a}M \Leftrightarrow M = 0.$$

Proof. Siden M er endeliggenerert har den en minimal generatormengde. Anta $M \neq 0$, så denne generatormengden er $m_1, \ldots m_t$. Siden $M = \mathfrak{a}M$ må vi ha at

$$m_1 = a_1 m_1 + \cdots + a_t m_t$$

for $a_i \in \mathfrak{a}$. Fra dette følger det at

$$m_1(1 - a_1) = a_2 m_2 + \cdots + a_t m_t,$$

men siden $a_1 \in \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{r}$, er $1 - a_1$ invertibelt. Dermed kan m_1 skrives som en lineær kombinasjon av $m_2, \ldots, m_t$, og generatormengden vi startet med var ikke minimal. □

3 Avstikker: Hopkins-Neeman Teoremet

I dette kapitellet oppsummeres de mest generelle tingene gått igjennom som kan ha anvendelser utenfor Hopkins-Neeman. På slutten står også resultatet, men vi dveler ikke ved bevis eller lignende...

I denne seksjonen jobber vi med $K^b(\operatorname{Proj} A)$, homotopikategorien av alle endelige kjedekomplekser av projektive moduler over A. Dette er en triangulert kategori, og dette beviset er egentlig et godt eksempel på hvordan jobbe med disse. Se andre notater for mer detaljer.

I denne seksjonen, gitt en $X \in K^b(\operatorname{Proj} A)$, betegner vi homotopigruppene som

$$H_*(X) = \oplus H_n(X)$$

Definition 3.1: Støtten til en kjede

For en $X \in K^b(\operatorname{Proj} A)$ betegner vi **støtten** til X som

$$\operatorname{Supp} X = \operatorname{Supp} H_*(X)$$

Følgende brukes i beviset til Hopkins-Neeman, men det viser vi ikke her uansett. Likevel, Koszul-komplekser brukes til mye, så vi tar med definisjonen her:

Definition 3.2: Koszulkompleks

For $P_* \in K^b(\operatorname{Proj} A)$ og $x \in A$, definer $P_*//x$ som $C(P_* \xrightarrow{x} P_*)$, altså kjeglen til multiplikasjon med x. Denne definisjonen utvides induktivt: For $x_1, \ldots, x_t \in A$, definerer vi **Koszulkomplekset til** $x_1, \ldots, x_t$ **på** P_* som

$$P_*//(x_1, \ldots, x_t) := (P_*//(x_1, \ldots, x_{t-1}))//x_t$$

Spesielt er **Koszulkomplekset til** $x_1, \ldots, x_t$ simpelthen koszulkomplekset på A, hvor A betegner stilk-komplekset til A.

Dette er den homologiske definisjonen. Det finnes haugevis av andre.

For å kunne i det hele tatt uttrykke Hopkins-Neeman trenger vi to definisjoner til:

Definition 3.3: Tykk underkategori

En full underkategori $\mathcal{A} \subseteq K^b(\operatorname{Proj} A)$ kalles **tykk** dersom følgende er tilfredsstilt:

- $\mathcal{A} \neq \varnothing$,
- $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \Sigma^n X \in \mathcal{A}$ (Σ er automorfien til den triangulerte kategorien),
- Dersom
$$X \to Y \to Z \to \Sigma X$$
er et distingvert triangel i $K^b(\operatorname{Proj} A)$ og $X, Y \in \mathcal{A}$, så er også $Z \in \mathcal{A}$,
- $X \oplus Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X, Y \in \mathcal{A}$.

For $X \in K^b(\operatorname{Proj} A)$ skriver vi $\operatorname{thick}(X)$ for den minste tykke underkategorien av $K^b(\operatorname{Proj} A)$ som inneholder X.

Definition 3.4: Lukket under spesialisering

La $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$. En delmengde $W \subseteq \operatorname{Spec} A$ kalles **lukket under spesialisering** dersom $\mathfrak{p} \in W$ og $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ medfører at $\mathfrak{q} \in W$.

Theorem 3.1 (Hopkins-Neeman)**.** *Avbildningen*

$$\phi : \{\mathcal{A} \subseteq K^b(\operatorname{Proj} A) \mid \mathcal{A} \textit{ tykk}\} \to \{W \subseteq \operatorname{Spec} A \mid W \textit{ luk. un. spes.}\}$$
$$\phi(\mathcal{A}) = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} \operatorname{Supp} X$$

er en bijeksjon, med invers

$$\psi : \{W \subseteq \operatorname{Spec} A \mid W \textit{ luk. un. spes.}\} \to \{\mathcal{A} \subseteq K^b(\operatorname{Proj} A) \mid \mathcal{A} \textit{ tykk}\}$$
$$\psi(W) = \{X \in K^b(\operatorname{Proj} A) \mid \operatorname{Supp} X \subseteq W\}$$

4 Primær Dekomponering

Denne seksjonen bygger opp til Primær dekomponering. For idealer er dette viktig, da det (geometrisk) tilsvarer å dekomponere varieteer til irredusible komponenter.

Definition 4.1: Primære idealer

Et ideal er **primært** dersom $\mathfrak{q} \subsetneq A$ og

$$xy \in \mathfrak{q} \Rightarrow x \in \mathfrak{q} \vee y^n \in \mathfrak{q} \text{ for en } n \in \mathbb{Z}$$

Merk at definisjonen er helt symmetrisk (pga. kommutativitet): En annen måte å si definisjonen på er at dersom $xy \in \mathfrak{q}$ så må enten $x \in \mathfrak{q}$, eller $y \in \mathfrak{q}$, eller så må $x^n \in \mathfrak{q}$ og $y^m \in \mathfrak{q}$ for noen $n, m \in \mathbb{Z}$.

Merk og følgende:

- $\mathfrak{q}$ primært $\Leftrightarrow$ alle nuldivisorer i $A/\mathfrak{q}$ er nilpotente.
- $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Leftrightarrow \mathfrak{p}$ primært.

Videre, diskusjon om primære idealer i $\mathbb{Z}$ (og PIDer generelt) er nesten trivielt, men det er ikke like rett frem i mer generelle ringer.

Definition 4.2: Primær dekomponering

En **primær dekomponering** av et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ er et snitt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$$

hvor alle $\mathfrak{q}_i$ er primære.

Merk at primær dekomposisjon av idealer ikke trenger å eksistere for en generell ring. Dersom ringer er Noethersk eksisterer det riktignok alltid.

Proposition 4.1. *Hvis $\mathfrak{q}$ er primært, så er $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$. Spesielt er $\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ det minste primidealet som inneholder $\mathfrak{q}$.*

Motsatt implikasjon holder ikke, med unntak av et spesialtilfelle: Dersom $\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ er maksimalt, er også $\mathfrak{q}$ primært.

Proof. Første påstand er veldig rett from fra definisjonen. For motsatt implikasjon, anta at $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$ er maksimalt. Da er $V(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{m}\}$ ($\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \bigcap \mathfrak{p}$ hvor snittet går over $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ som inneholder $\mathfrak{q}$), som impliserer at $A/\mathfrak{q}$ er lokal. Hvis $x + \mathfrak{q} \in A/\mathfrak{q}$ er en nulldivisor, må $x \in \mathfrak{m}$, så pr. def. er $x^n \in \mathfrak{q}$ for en $n \in \mathbb{Z}$. Dermed er $x + \mathfrak{q}$ nilpotent. □

Definition 4.3: $\mathfrak{p}$-primært

La $\mathfrak{q} \subseteq A$ være et primært ideal med $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Da er $\mathfrak{q}$ **$\mathfrak{p}$-primært**

Her kommer vi til poenget i introduksjonen: Anta at $\mathfrak{a} \subseteq A$ har en primær dekomposisjon

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t.$$

Sett $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$. Da vil

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{q}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{q}_t) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_t).$$

Siden $V(\mathfrak{p}_i)$ er irredusible (og lukkede) i $\operatorname{Spec} A$, så gir primær dekomposisjon av et ideal en dekomponering i irredusible komponenter i $\operatorname{Spec} A$.

Definition 4.4: Irredusible idealer

Et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ er **irredusibelt** dersom $\mathfrak{a} \neq A$ og

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2$$

De viktigste resultatene fra denne forelesningen:

Theorem 4.2. *La A være en noethersk ring. Da er*

- *Alle irredusible idealer primære.*
- *Alle ekte idealer $\mathfrak{a} \subseteq A$ kan uttrykkes som et endelig snitt av irredusible idealer, og har dermed en primær dekomponering.*

Proof. Anta at $\mathfrak{q}$ er irredusibelt. Vi antar at $xy \in \mathfrak{q}$, og at $x \notin \mathfrak{q}$. Se på kjeden

$$(\mathfrak{q} : y) \subseteq (\mathfrak{q} : y^2) \subseteq (\mathfrak{q} : y^3) \subseteq \dots$$

hvor $(\mathfrak{q} : z) = \{a \in A \mid az \in \mathfrak{q}\}$. Siden ringen er noethersk må denne kjeden stabiliseres, altså $(\mathfrak{q} : y^n) = (\mathfrak{q} : y^{n+1})$ for en stor nok n. Dermed er for alle $a \in A$

$$ay^n \in \mathfrak{q} \Leftrightarrow ay^{n+1} \in \mathfrak{q} \tag{1}$$

Observer nå at $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}, x) \cap (\mathfrak{q}, y^n)$: Inklusjonen $\mathfrak{q} \subseteq (\mathfrak{q}, x) \cap (\mathfrak{q}, y^n)$ er åpenbar. La nå $a \in (\mathfrak{q}, x) \cap (\mathfrak{q}, y^n)$. Hvis $a \in \mathfrak{q}$, så er vi ferdige, så anta heller at $a = cx = dy^n$. Vi vet at $ay = dy^{n+1} = cxy \in \mathfrak{q}$ (siden $xy \in \mathfrak{q}$), men da har vi fra Ligning 1. at også $dy^n = a \in \mathfrak{q}$. Siden $\mathfrak{q}$ er irredusibelt og $x \notin \mathfrak{q}$, må vi da ha at $x^n \in \mathfrak{q}$.

For den andre påstanden: Se på den delvis ordnede mengden

$$\Omega = \{\mathfrak{a} \subseteq A \mid \mathfrak{a} \neq A, \mathfrak{a} \text{ kan ikke uttrykkes som et slikt snitt}\}.$$

Anta at Ω ikke er tom (ellers er vi ferdig). Da finnes et maksimalt ideal (siden A er noethersk), $\mathfrak{a}$. Siden $\mathfrak{a}$ ikke er irredusibelt, finnes det idealer $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ slik at $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Siden da $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \notin \Omega$, kan de da uttrykkes som et snitt av irredusible idealer, dermed kan også $\mathfrak{a}$ det. Dermed må $\Omega = \varnothing$. □

Videre, denne dekomposisjonen er ikke unik, men et unikthetsresultat eksisterer likevel:

Lemma 4.3. *Følgende er sant:*

- $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$ *er $\mathfrak{p}$-primære impliserer at $\bigcap_{i=1}^t \mathfrak{q}_i$ er $\mathfrak{p}$-primært.*
- *La $\mathfrak{q}$ være $\mathfrak{p}$-primært, og se på $x \in A$. Hvis $x \notin \mathfrak{q}$, så er $(\mathfrak{q} : x)$ $\mathfrak{p}$-primært. Videre, dersom $x \notin \mathfrak{p}$, så er $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$.*

Fra lemma ser vi at dersom $\mathfrak{a}$ har en primær dekomposisjon $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{q}_i$, med $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$, kan vi sette sammen de med lik radikal. Videre, dersom

$$\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \subseteq \mathfrak{q}_i$$

kan vi naturligvis fjerne $\mathfrak{q}_i$. Dermed får vi et konsept av unike primale dekomposisjoner, og disse er til en viss grad unike:

Theorem 4.4. *La* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ *være en minimal primal dekomposisjon, dvs*

- $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i) \neq \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_j)$ *for* $i \neq j$,
- $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ *for alle* i.

Da er primidealene $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ *unike opp til rekkefølge; det vil si hvis* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_s$ *være en annen minimal primal dekomposisjon, så er* $t = s$, *og*

$$\{\mathfrak{r}(\mathfrak{q}'_1), \ldots, \mathfrak{r}(\mathfrak{q}'_s)\} = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t\}$$

5 Hele elementer

Hele elementer og ringer er klart essensielt i algebraisk tallteori, men en del kan gjøres generelt i kommutativ algebra.

I gjennom hele denne seksjonen er $A \subseteq B$ ringer.

Definition 5.1: Hele elementer

Et element $b \in B$ er **helt** over A dersom det finnes en $f(X) \in A[X]$ med $f(b) = 0$. B kalles **hel over** A dersom alle $b \in B$ er hele.

Definition 5.2: Heltallslukningen

Heltallslukningen til A i B er

$$\{b \in B \mid b \text{ hel over } A\}.$$

Proposition 5.1. *TFAE for* $b \in B$*:*

- b *hel over* A.
- $A[b]$ *er en endeliggenerert* A*-modul.*
- *Det finnes en ring* $A[b] \subseteq C \subseteq B$ *som er en.gen. som* A*-modul.*
- *Det finnes en* ***trofast*** $A[b]$*-modul som er en.gen. som* A*-modul*

I proposisjonen over er en trofast R-modul en modul M med $\operatorname{Ann}_R M = 0$. Det siste punktet er mest nyttig for beviset...

Proof. Implikasjonene nedover er alle trivielle, men for å se at det nederste punktet impliserer det øverste: Anta at M er en trofast $A[b]$-modul som er endeliggenerert som A-modul, altså $M = \sum_{i=1}^{t} Am_i$. Da er $bm_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}m_j$. Vi ser at

$$P = \begin{pmatrix} a_{11}-b & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22}-b & \dots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{tt}-b \end{pmatrix}, \bar{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_t \end{pmatrix}$$

tilfredstiller $P\bar{m} = 0$. Dette impliserer at $\det(P)\bar{m} = 0$, så $\det(P) \in \operatorname{Ann}_{A[b]} M$. Siden M er trofast gir dette at $\det(P) = f(b) = 0$, så b er hel over A. □

Proposition 5.2. *Følgende er sant:*

- $b_1, \dots, b_t \in B$ *er hele over* A *hvis og bare hvis* $A[b_1, \dots, b_t]$ *er en en. gen.* A*-modul.*
- *Anta at* $B \subseteq C$*. Hvis* B *er hel over* A *og* C *er hel over* B*, er* C *også hel over* A*.*
- *Heltallstillukningen* R_A *til* A *i* B *er en ring hvor* $A \subseteq R_A \subseteq B$*.*
- R_A *er heltallslukket i* B*.*

Definition 5.3: Dedekindområde

La A være et heltallsområde. Da er A et **Dedekindområde** dersom følgende er oppfylt:

- A er Noethersk
- $0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \to \mathfrak{p}$ maksimalt
- A er heltallslukket i $\operatorname{Quot}(A)$ (Brøkkroppen til A).

For eksempel er alle $\mathcal{O}_K$ (heltallsringen til en algebraisk tallkropp K) Dedekindområder.

5.1 Opp- og nedstigning

Mer eller mindre det eneste som ikke er trivielt, eller iallfall veldig enkelt, å vise i denne underdelen, er nedstigningsresultatet.

Proposition 5.3. *Hvis A og B er heltallsområder, og B er hel over A, så har vi at A er en kropp hvis og bare hvis B er en kropp.*

Lemma 5.4. *Anta at B er hel over A:*

- *For et ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$, sett $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$. Da er $B/\mathfrak{b}$ hel over $A/\mathfrak{a}$.*
- *La S være en multiplikativ delmengde av A. Da er $B[S^{-1}]$ hel over $A[S^{-1}]$.*

Proposition 5.5. *Anta at B er hel over A:*

- *La $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, og sett $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = A \cap \mathfrak{q}$. Da er $\mathfrak{q}$ maksimalt hvis og bare hvis $\mathfrak{p}$ er maksimalt.*
- *La $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$, med $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$. Dersom $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{q}_2^c$, så har vi og $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.*
- *$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ impliserer at det finnes en $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ med $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$.*

Theorem 5.6 (Oppstigning)**.** *Anta at $A \subseteq B$, hvor B er hel over A, og at $\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ er en kjede i $\operatorname{Spec} A$. Anta videre at $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_t$ er en kjede i $\operatorname{Spec} B$, hvor $t \leq n$, og $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i^c$.*

Da kan denne kjeden utvides til en kjede $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ i $\operatorname{Spec} B$, hvor $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i^c$.

Proof. Anta at $t \leq n-1$ (ellers er det ingenting å vise). Fra Lemma 5.4 er $B/\mathfrak{q}_t$ hel over $A/\mathfrak{p}_t$. Se på idealet $\mathfrak{p}_{t+1}/\mathfrak{p}_t \subseteq A/\mathfrak{p}_t$. Fra proposisjonen over finnes det da en $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B/\mathfrak{q}_t$ med $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}_{t+1}/\mathfrak{p}_t$. Trekk dette primidealet tilbake til B, som $\mathfrak{q}_{t+1} \in \operatorname{Spec} B$, altså $\mathfrak{q}_{t+1}/\mathfrak{q}_t = \mathfrak{q}$. Da er helt klart $\mathfrak{q}_t \subseteq \mathfrak{q}_{t+1}$, og videre er $A \cap \mathfrak{q}_{t+1} = \mathfrak{p}_{t+1}$. $\square$

Theorem 5.7 (Nedstigning)**.** *Anta at $A \subseteq B$ er heltallsområder med B hel over A, og hvor A er heltallslukket i $\operatorname{Quot}(A)$. La nå $\mathfrak{p}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_n$ være er en kjede i $\operatorname{Spec} A$, og $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_t$ en kjede i $\operatorname{Spec} B$ med $t \leq n$, og $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_\mathfrak{i}$.*

Da kan denne kjeden utvides til en kjede $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n$ i $\operatorname{Spec} B$, hvor $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i^c$.

6 Dedekindområder

Vi ser på Dedekindområder. Vi starter med å se på lokaliseringen av slike, det vil si DVRer.

6.1 Diskrete Valuasjonsringer

I denne seksjonen beskrives Diskrete Valuasjonsringer, lokale ringer som er ekstra fine.

Definition 6.1: Valuasjonsringer

La A være et int. omr., og $K = \operatorname{Quot}(A)$. Da kalles A en **valuasjonsring** dersom for alle $x \in K$, så er enten $x \in A$ eller $x^{-1} \in A$.

Lemma 6.1. *La A være en valuasjonsring, og $K = \operatorname{Quot}(A)$. Da er følgende sant:*

- *A er lokal.*
- *A er heltallslukket i K.*
- *For $A \subseteq B \subseteq K$, hvor B og er en ring, så har vi at $\operatorname{Quot}(B) = K$, og B også en valuasjonsring.*

Definition 6.2: Diskrete valuasjoner og DVRer

La K være en kropp. En **diskret valuasjon** på K er en surjektiv gruppehomomorfi

$$\nu : K^{\times} \to \mathbb{Z}$$

som tilfredsstiller $\nu(x+y) \geq| \{\nu(x), \nu(y)\}$. Per konvensjon setter vi og $\nu(0) = \infty$. Mengden

$$\{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\}$$

kalles **valuasjonsringen** for ν. Videre kalles A en **diskret valuasjonsring (DVR)** dersom det finnes en diskret valuasjon på $\operatorname{Quot}(A)$, med A som valuasjonsring.

Merk at ofte snakker man om diskret valuasjoner som ikke er surjektive, og surjektive diskret valuasjon kalles da **normaliserte**.

Merk at når A er en DVR, så er den lokal, men videre finnes det minst et element $\pi \in A$ med $\nu(\pi) = 1$ (når ν er normalisert). Merk da at det unike maksimale idealet

$$\{x \in A \mid \nu(x) \geq 1\} = (\pi).$$

Videre er alle idealer på formen

$$\{x \in A \mid \nu(x) \geq n\} = (\pi^n).$$

Altså er A en lokal PID med $\operatorname{Spec} A = \{(0), (\pi)\}$.

Proposition 6.2. *Anta at $(A, \mathfrak{m}, K)$ er et lokalt, noethersk integritetsområde, med* $\operatorname{Spec} A = \{(0), \mathfrak{m}\}$. *Da er følgende ekvivalent:*

- *A er en DVR.*
- *A er heltallslukket i* $\operatorname{Quot}(A)$.
- *$\mathfrak{m}$ er et hovedideal (generert av ett element).*
- $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$
- $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq A$ *impliserer at* $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n, n \geq 0$.
- *Det finnes en $\pi \in A$ slik at alle idealer $\mathfrak{a} \subseteq A$ er på formen* $\mathfrak{a} = (\pi^n), n \geq 0$.

6.2 Dedekindområder generelt

Definition 6.3: Krulldimensjonen til en ring

La A være en ring. **Krulldimensjonen** til A, $\dim A$ er supremum over alle $n \geq 0$, slik at det finnes en kjede

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

i $\operatorname{Spec} A$.

Vi kan formulere en tidligere definisjon litt mer tradisjonelt:

Definition 6.4: Dedekindområde (igjen)

Anta at A er et integritetsområde. Da er A et **Dedekindområde** dersom

- A er noethersk.
- $\dim A = 1$
- A er heltallslukket.

Videre er A en DVR dersom den i tillegg er lokal.

Dette er egentlig et lemma som hører til lokaliseringsseksjonen, men vi tar det her:

Lemma 6.3. *La A være en ring.*

- *La M være en A-modul. Da vil*

$$M = 0 \Leftrightarrow M_{\mathfrak{p}} = 0,\ \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Leftrightarrow M_{\mathfrak{m}} = 0,\ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathfrak{m}} A$$

- *La $f : M \to N$ være en A-hom. Da vil*

$$f \textit{ surj.} \Leftrightarrow f_{\mathfrak{p}} \textit{ surj.},\ \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Leftrightarrow f_{\mathfrak{m}} \textit{ surj.},\ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathfrak{m}} A$$

  og samme med injektiv.

Lemma 6.4. *La $A \subseteq B$ være ringer, og C heltatllstillukningen til A i B. For $S \subseteq A$ (multiplikativ) er da $C[S^{-1}]$ heltallstillukningen til $A[S^{-1}]$ i $B[S^{-1}]$.*
Videre, dersom A er et integritetsområde, så gjelder

$$A \textit{ h.l.} \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}} \textit{ h.l.},\ \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Leftrightarrow A_{\mathfrak{m}} \textit{ h.l.},\ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathfrak{m}} A$$

Følgende teorem viser at (prim)lokalisering til Dedekinddomener er DVRer.

Theorem 6.5. *La A være et noethersk integritetsområde med $\dim A = 1$. Da er følgende ekvivalent:*

- *A er et Dedekindområde*
- *$A_{\mathfrak{p}}$ er en DVR for alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.*
- *$\mathfrak{q} \subseteq A$ primært impliserer at det finnes en $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ med $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^n$ for en $n \geq 0$.*

Lemma 6.6. *La A være et noethersk integritetsområde med $\dim A = 1$. Da kan alle idealer $\mathfrak{a} \subseteq A$ uttrykkes som et produkt*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_t$$

hvor $\mathfrak{q}_i$ er primært og $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i) \neq \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_j)$ for $i \neq j$.

Lemma over følger direkte fra primær dekomposisjon, pluss det faktum at A har $\dim A = 1$ som gjør at man kan gå fra snitt til produkt.
Videre, fra forrige teorem + forrige lemma følger følgende direkte:

Corollary 6.7. *La A være et Dedekindområde, og $\mathfrak{a} \subseteq A$ et ekte ideal. Da kan $\mathfrak{a}$ uttrykkes som*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_t^{e_t}$$

hvor $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$.

I neste seksjon går vi over det faktum at denne dekomposisjonen også er unik!e

6.3 Unik faktorisering av idealer

For unik faktorisering ser vi på generelle brøkidealer først

Definition 6.5: Brøkidealer

La A være et integritetsområde, og la $K = \mathrm{Quot}(A)$. Et **brøkideal** $I \subseteq K$ er en A-modul som tilfredstiller et (og dermed alle) av følgende:

- $xI \subseteq A$ for en $x \in A^\times$.
- $xI \subseteq A$ for en $x \in K^\times$.
- $I \subseteq K$ er en endeliggenerert A-undermodul.

Et slikt brøkideal I er **inverterbart** dersom det eksisterer et annet brøkideal I^* slik at

$$II^* = A$$

Proposition 6.8. *A er et Dedekindområde, hvis og bare hvis alle brøkidealer er inverterbare. Inversen til I er*

$$(A : I) = \{x \in K \mid xI \subseteq A\}$$

Proof. Siden kolon-idealer av brøkidealer er et brøkideal, er den ene retningen åpenbar.

Anta nå at $IJ = A$ (altså at I er inverterbar med invers J). Siden alle $x \in J$ tilfredstiller $xI \subseteq A$ har vi $J \subseteq (A : I)$. Men da har vi og $A = IJ \subseteq I(A : I) \subseteq A$, dermed må vi ha likhet.

□

Sutherland sine notater viser det følgende resultatet greit ved å vise at invertibelhet er en lokal egenskap.

Corollary 6.9 (Unik faktorisering av idealer)**.** *Alle brøkidealer I kan skrives unikt som $I = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_t^{e_t}, e_i \in \mathbb{Z}$.*

Proof. En grei måte å vise det på er å vise at

$$I = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(I)},$$

where $\nu_p(I) = \nu(I_\mathfrak{p})$ (husk, Dedekindområder lokalisert ved primidealer er DVRer).

□

Selvom Dedekindområder sjeldent er PIDer, er de nesten det...

Lemma 6.10. *Anta at A er et Dedekindområde. Gitt et endelig antall $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_t$, $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$, samt tall $e_1, \dots e_t, e_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, så finnes det et element $\alpha \in A$ med $\nu_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = e_i$.*

Merk at α i lemma over ikke nødvendigvis har $\nu_{\mathfrak{q}}(\alpha) = 0$ for alle andre $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$. Man kan greit finne α med KRT.

Proposition 6.11. *Anta at A er et Dedekindområde, og $0 \neq \mathfrak{a} \subsetneq A$ et ekte ideal. Da er $\mathfrak{a}$ generert av to elementer.*

Proof. Sett $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_t^{e_t}$. Finn $\alpha \in A$ med de riktige valuasjonene, som i det foregående lemma. Vi har da at

$$(\alpha) = I \mathfrak{q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{q}_s^{e_s},$$

hvor $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{p}_j$ siden (α) må og faktorisere unikt i et endelig antall primidealer. Velg derfor en $\beta \in A$ som har

$$\nu_{\mathfrak{p}_i}(\beta) \geq \nu_{\mathfrak{p}_i}(\alpha)$$
$$\nu_{\mathfrak{q}_i}(\beta) = 0$$

Ved litt ettertanke er det da klart at

$$(\alpha, \beta) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_t^{e_t} = \mathfrak{a},$$

ved unik faktorisering av idealer. □

Kan også slenge på en siste funfact om at alle idealer til Dedekindområder er projektive som moduler.

7 Dimensjonsteori

7.1 Intro

La A være en ring, og $0 \neq M$ en A-modul.

Definition 7.1: Krulldimensjon en til en modul

Krulldimensjonen til M er definert som

$$\dim M = \dim A / \operatorname{Ann}_A M$$

Vi definerer en annen rar invariant, som vi skal vise at er lik krulldimensjonen:

Definition 7.2: Rar greie

Vi definerer δ som..

$$\delta(M) = \inf\{n \geq 0 \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{r} \text{ slik at } \ell_A(M/(\alpha_1, \dots, \alpha_n)M) < \infty\}$$

hvor $\mathfrak{r}$ er radikalet til A.

Hele poenget er at vi ønsker å vise at dersom $(A, \mathfrak{m})$ er noethersk og lokal, er

$$\dim M = \delta(M)$$

for $M \in \operatorname{mod} A$ (endeliggen. A-modul). Som en første observasjon har vi at $M/\mathfrak{m}M$ er et endeligdimensjonalt vektorrom over $A/\mathfrak{m}$ (så $\ell(M/\mathfrak{m}M)) < \infty$, og siden A var noethersk, er $\mathfrak{m} = (m_1, \dots, m_t)$. Dermed er $\delta(M) \leq t$.

Remark 7.1. *Fra det over (og det teoremet vi skal vise), har vi at* $\dim A \leq t$. *Når* $\dim A = t$ *kalles* A *en* ***regulær****, lokal ring. Disse ringene er essensielle i algebraisk geometri, bl.a. pga. et resultat som sier at*

$$A \textit{ regulær lokal} \Leftrightarrow \text{gl.dim}A < \infty$$

Måten vi skal vise det fundamentale resultatet over på, er ved hjelp av en tredje invariant, $d(M)$.

Definition 7.3: Gradert ring

A er en **gradert** ring dersom $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$, hvor alle A_i er abelske undergrupper, og $A_i A_j \subseteq A_{ij}$.
Videre er M da en **gradert A-modul** dersom $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$, med $A_i M_j \subseteq M_{ij}$.

Definition 7.4: Homogenitet og graderte undermoduler

Noen relaterte definisjoner:

- Et element i A_n (eller M_n) kalles et **homogent** element av grad n.
- En modul $N \subseteq M$ kalles en **gradert undermodul** dersom $N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i$ er en gradert A modul, og $N_i \subseteq M_i$ for alle i.
- Et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ er homogent dersom

$$x \in \mathfrak{a} \Rightarrow \text{ alle homogene komponenter til } x \text{ er i } \mathfrak{a}$$

Her er en rekke trivielle observasjoner:

- A_0 er en underring av A.
- Dersom M gradert A-modul, er M_i er en A_0-modul for alle i.
- La M være en gradert A-modul, og $N \subseteq M$ en gradert undermodul. Da er $M/N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i/N_i$ en gradert A-modul.
- $\mathfrak{a}$ er homogent hvis og bare hvis $\mathfrak{a} \subseteq A$ er en gradert undermodul.

Noen litt mindre trivielle proposisjoner:

Proposition 7.2. *La A være en gradert ring. Den er noethersk hvis og bare hvis A_0 er noethersk, og $A = A_0[\alpha_1, \dots, \alpha_t]$ for $\alpha_i \in A$ (altså, A er endeliggenerert som A_0-algebra).*

Proposition 7.3. *La A være en gradert noethersk ring, og la M være en endeliggenerert, gradert A-modul. Da er M_n endeliggenerert som A_0-modul for alle n.*

Corollary 7.4. *Dersom A er en noethersk, gradert ring, med A_0 artinsk, og M er en endeliggenerert, gradert A modul, har vi at*

$$\ell_{A_0}(M_n) < \infty$$

for alle n.

Dette korollare tillater følgende definisjon:

Definition 7.5: Hilbertrekker

La A være en noethersk, gradert ring, med A_0 artinsk, og M en endeliggenerert, gradert A modul. Da er

$$P(M, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{A_0}(M_n) X^n \in \mathbb{Z}[[X]]$$

hilbertrekken til M (også kalt Hilbert-Poincaré, og bare Poincaré).

Et eksempel er $A = k[x_1, \dots, x_t]$ (hvor x_i har grad 1). Da er

$$P(A, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{A_0}(A_n) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_{A_0}(A_n) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+t-1}{t} X^n = \frac{1}{1-X} t$$

siden A_n er et vektorrom over $A_0 = k$ med basis $= \{x_1^{e_1} \cdots x_t^{e_t} \mid e_1 + \dots + e_t = n\}$.
Følgende teorem er stilig, og viser at den fine formen over ikke var tilfeldig:

Theorem 7.5. *(Hilbert-Serre) La A være gradert, noethersk ring, med A_0 artinsk, og la M være en endeliggenerert A-modul. La $A = A_0[a_1, \ldots, a_t]$ (husk en tidligere proposisjon), med $d_i = \deg a_i \geq 1$. Da er $P(M, X)$ et rasjonalt polynom på formen*

$$P(M, X) = \frac{f(X)}{\prod_{i=1}^{t}(1 - X^{d_i})}$$

hvor $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$.

Proposition 7.6. *Anta $d_i = 1, \forall i$ i Theorem 46, altså at*

$$P(M, X) = \frac{f(X)}{(1 - X)^d}$$

for en $0 \leq d \leq t$, og med $f(1) \neq 0$ (hvis $d > 0$). Da eksisterer et polynom $\phi_M(X) \in \mathbb{Q}[X]$ av grad $d - 1$ slik at

$$\ell_{A_0}(M_n) = \phi_M(n)$$

for alle $n > \deg f$.

Dette polynomet ϕ_M kalles **Hillbertpolynomet** til M, mens funksjonen som sender n til $\ell_{A_0}(M_n)$ kalles **Hilbertfunksjonen** til M.

7.2 Assosierte graderte ringer

Definition 7.6: Assosierte graderte ringer og moduler

La A være en ring, og $\mathfrak{a} \subseteq A$ et ideal. Den **assosierte graderte ringen** er gitt ved

$$\mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n / \mathfrak{a}^{n+1}$$

Tilsvarene, for en A-modul M får vi en gradert $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(A)$-modul

$$\mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M / \mathfrak{a}^{n+1} M$$

Lemma 7.7. *Anta at A er noethersk, og at $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_t) \subseteq A$ er et ideal.*

- *$\mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ er noethersk og generert som $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(A)_0$-algebra av $\{a_1 + \mathfrak{a}^2, \ldots, a_t + \mathfrak{a}^2\}$.*
- *Dersom M er endeliggenert som A modul, er $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(M)$ endeliggenert som $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(A)$-modul.*

Om $(A, \mathfrak{m})$ er lokal, noethersk., gir $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ oss en endeliggen. $A/\mathfrak{m}$-algebra, altså en ring vi forstår bedre, uten å tape for mye informasjon.

Lemma 7.8. *La $(A, \mathfrak{m})$ være lokal noethersk, og la $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ være et ideal. TFAE:*

- *$\mathfrak{q}$ er $\mathfrak{m}$-primært.*
- *$A/\mathfrak{q}$ er artinsk.*
- *$\exists t \geq 1$ slik at $\mathfrak{m}^t \subseteq \mathfrak{q}$.*

Proposition 7.9. *Anta $(A, \mathfrak{m})$ lokal noethersk, og M endeliggenert som A-modul. Anta at $\mathfrak{q}$ er $\mathfrak{m}$-primært.*

1. *$\ell_A(M/\mathfrak{q}^n M) < \infty$ for $n \geq 1$.*
2. *Betrakt*
$$P(\mathrm{Gr}_{\mathfrak{q}}(M), X) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{A/\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1} M) X^n$$
Fra Proposisjon 7.6, og et foregående lemma, har vi da at
$$P(\mathrm{Gr}_{\mathfrak{q}}(M), X) = \frac{f(X)}{(1-X)^d}$$
for en $0 < d < t$, slik at $f(1) \neq 0$ (hvis $d > 0$). Da finnes et polynom $\chi_M^{\mathfrak{q}}$ av grad d som tilfredstiller
$$\chi_M^{\mathfrak{q}}(n) = \ell_A(M/\mathfrak{q}^{n+1} M)$$
for $n \geq d$.
3. *Dersom $\mathfrak{q}'$ er et annet $\mathfrak{m}$-primært ideal, så er $\deg \chi_M^{\mathfrak{q}'}(n) = \deg \chi_M^{\mathfrak{q}}(n)$*

Den forrige proposisjonen gir oss faktisk kanskje den algoritmisk enkleste måten å finne dimensjonen til en modul på. For av punkt 3, holder det å se på $P(\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}(M), X)$, hvor da $\ell_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1} M) = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1} M$, altså dimensjonen som vektorrom over $A/\mathfrak{m}$. Dette kan ofte regnes ut som en kombinatorisk formel, og gir oss deretter den rasjonale funksjonen.

8 Dimensjonsteoriens Fundamentalteorem

La $(A, \mathfrak{m})$ være en lokal, noethersk ring, og la M være en A-modul. Vi har nå tre invarianter:

Krull dimensjon: Vi setter

$$\dim M := \dim(A/\operatorname{Ann}_A(M))$$

hvor $\dim A := \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \exists\, \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A\}$

Generatorer Sett så

$$\delta(M) := \inf\{t \in \mathbb{Z} \mid \exists\, a_1, \dots a_t \in \mathfrak{r}, \ell_A(M/\langle a_1, \dots a_t \rangle M) < \infty\}$$

Hilbert-Samuel Polynomet: Til sist har vi

$$d(M) := \deg \chi_M^{\mathfrak{m}}(n)$$

hvor $\chi_M^{\mathfrak{m}}(n)$ er polynomet som tilfredsstiller $\chi_M^{\mathfrak{m}}(n) = \ell_A(M/\mathfrak{m}^{n+1}M)$. En annen måte å huske denne på er at $d(M) = d$, hvor d er ordenen til polen ved $d = 1$ til den rasjonale funksjonen

$$P(\operatorname{Gr}_{\mathfrak{m}}(M), X) = \frac{f(X)}{(1 - X)^d}$$

Theorem 8.1 (Dimensjonsteoriens fundamentalteorem:)**.** *La $(A, \mathfrak{m})$ være en lokal, noethersk ring, og la M være en endeliggenerert A-modul. Da har vi at*

$$\dim M = \delta(M) = d(M)$$

Følgender er noen eksempler på hvordan man kan benytte dette til å regne dimensjon. Først, la $\mu(\mathfrak{a})$ betegne minste antall generatorer for idealet $\mathfrak{a}$.

Example 8.2. *La k være en kropp, og $A = k[[x_1, \dots x_n]]$ være en potensrekkering. Da er $(A, \mathfrak{m})$ lokal, hvor $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Vi vet at*

$$(0) \subsetneq \langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

er en kjede i $\operatorname{Spec} A$*, så* $\dim A > n$*. Samtidig har vi at*

$$\ell_A(A/\mathfrak{m}) = 1$$

så $\delta(M) < \mu(\mathfrak{m}) = n$*. Dermed får vi* $\dim A = n$*.*

Example 8.3. *La k være en kropp, og sett $A = k[[x,y]]/\langle xy, y^2\rangle$. Da er $(A,\mathfrak{m})$ lokal, med $\mathfrak{m} = \langle x, y\rangle$. Vi kan regne ut*

$$P(\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}(A), X) := \sum \ell_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})X^n$$

Som k-vektorrom har $\mathfrak{m}^n$ basis $\{1, y, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Dette gir

$$P(\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}(A), X) := 2 + \sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{2X+3}{1+X}$$

Dermed får vi $\dim A = d(M) = 1$.

Corollary 8.4. *La alt være som før.*

$$\dim M \leq \dim A \leq \mu(\mathfrak{m}).$$

Som sagt kaller vi A **regulær, lokal** dersom $\dim A = \mu(\mathfrak{m})$. Vi avslutter med en klassiker. For det definerer vi $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ til å være lengden på den lengste kjeden som starter med $\mathfrak{p}$ i $\operatorname{Spec} A$.

Theorem 8.5 (Krull's hovedideal teorem)**.** *La A være noethersk, og la $\mathfrak{a} \subseteq A$ være et ideal. Da er* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \mu(\mathfrak{a})$ *for alle $\mathfrak{p}$ som er minimale i $V(\mathfrak{a})$. Spesielt, dersom $\mathfrak{a} = (x)$ er et hovedideal, så vil* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ *for alle minimale $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.*

9 Extra topic: from free modules to torsion free modules

Unfortunately I'm gonna change to english now as I cannot be bothered anymore to try and find the correct norwegian math words. These are anyways added way after I the previous notes, I just thought this was a suitable place to put it. Note though, that despite this being the commutative algebra notes, we will here **not assume that the rings in question are commutative**. All modules will be assumed to be left modules.

In this section, we will discuss the following

- Free modules
- Stably free modules
- Locally free modules
- Projective modules

- Stalkwise locally free modules
- Flat modules
- Torsion free modules

These are increasingly weak conditions on a module (free implies all the others, stably free implies all the others except free etc.). In many cases we care about (finitely generated, or even finitely presented, or modules over a local ring or PID), plenty of these properties also become equivalent, which we will also discuss.

For Dedekind domains, we even have that f.g. (or f.p.?) and torsion free implies locally free, so there many of these properties collapse into equivalent properties.

9.1 Free and stably free modules

Of course a free module P is a module $P \simeq R^n$ for some n. Equivalently, a free module is a module which admits a basis $\{e_1, \dots e_n\}$ such that every element in P can be written as $r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n$ for $r_i \in R$ in a unique way.

Definition 9.1: Stably free modules

An R-module P is called **stably free** (of rank $n-m$) if $P \oplus R^m \simeq R^n$ for some m, n.

It is not at all obvious exactly when stably free implies free. Some cases are PIDs (this is obvious by the fundamental theorem of finitely generated modules over PIDs, though its even true for not finitely generated modules), and Dedekind domains (way less obvious I think).

These are the nicest conditions (free and stably free), however they are not so common. We need more general definitions....

9.2 Loc. free, projective, stalk. loc. free and flat modules

Lets generalize slightly more.

The first is the first notion of locally free. Maybe surprisingly, there is another notion we will define later, which in general is not equivalent, but will turn out to be a weaker property.

Definition 9.2: Locally free modules

An R-module M is called **locally free** if there exists a set of elements $f_1, \dots f_n \in R$ such that $D(f)$ cover $\operatorname{Spec} R$ (eq. $\langle f_1, \dots f_n \rangle = R$), and such that M_{f_i} is a free R_{f_i}-module for all i.

Probably the most important property is the following though, which is what one typically works with.

Definition 9.3: Projective modules

An R-module P is called projective if it is a projective object in the category of R-modules; That is for every surjection $A \to B \to 0$, and map $P \xrightarrow{f} B$, there exists a (not necessarily unique!) homomorphism h making the following diagram commute:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

There are many equivalent definitions of projective modules though.

Proposition 9.1. *Let P be an R-module. TFAE:*

1. *P is projective.*
2. *Every short exact sequence* $0 \to A \to B \xrightarrow{g} P \to 0$
3. *$P \oplus Q \simeq R^n$ for some n and some other R-module Q. splits.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): Filling in the diagram as

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "id_P"] & \\ B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

shows that there exists some h such that $g \circ h = id_P$, thus the sequence splits.

(2) $\Rightarrow$ (3): Take any surjection by a free module F, which gives an exact sequence $0 \to \ker g \to F \xrightarrow{g} P \to 0$ which splits by assumption: Thus $F \simeq P \oplus \ker g$.

(3) $\Rightarrow$ (1): □

Another easy property of projective elements is that $\operatorname{Hom}(P, -)$ is exact (this is true in any category).

9.3 Torsion free modules