Kompleks Analyse

jonathke

1 Intro Analytiske Funksjoner

Definition 1.1. *En funksjon $f : D \to \mathbb{C}$ kalles analytisk dersom den deriverte*

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

er definert for alle $z_0 \in D$, og hvor D er en åpen, sammenhengende undermengde av $\mathbb{C}$.

Herifra kaller vi åpne sammenhengende undermengder av $\mathbb{C}$ for områder.

Theorem 1.2 (Cauchy-Riemann)**.** *En funksjon $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ er analytisk $\Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann betingelsene er oppfylt:*

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x, y)$$

Proof. $\Rightarrow$: Veldig lett å komme frem til: Bare la h være reell, og la h gå mot 0 positivt, deretter la hi gå mot null. Da popper disse uttrykkene frem. Andre veien er litt mer jobb, men involverer jacobian osv., sikkert enkelt om man kan det. □

Definition 1.3. *En funksjon $f : D \to \mathbb{C}$ er* **conformal** *dersom for alle stier α, β i D som skjærer hverandre i et punkt z_0 med vinkel θ vil og $f(\alpha), f(\beta)$ være stier som skjærer hverandre i $f(z_0)$ med vinkel θ.*

Theorem 1.4. *En funksjon $f : D \to \mathbb{C}$ er conformal $\Leftrightarrow$ f er analytisk på D og $f'(z) \neq 0, z \in D$.*

2 Linear Fraksjonelle Transformasjoner

Definition 2.1. *En funksjon* $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$ *kalles en* **linear fraksjonell transformasjon** *(evt. en Möbius transformasjon).*

Linear fraksjonelle transformasjoner er conformal. Spesielt viktige er:

- Parallell translation: $S(z) = z + b$
- Rotasjon: $S(z) = az, |a| = 1$
- Homothetic transformasjon: $S(z) = az, |a| > 0$
- inversjon: $S(z) = \frac{1}{z}$

Alle linear fraksjonelle transformasjoner kan skrives som en kombinasjon av de over. Linear fraksjonelle transformasjoner er projektive transformasjoner på $\mathbb{C}$ som danner gruppen $PGL_2(\mathbb{C})$.

Todo: Hvordan mappe en seksjon til en annen med lin.frak.trans.

3 Kompleks integrasjon

Teoremet som er kilden til omtrent alt annet:

Theorem 3.1 (Cauchy's Theorem)**.** *La f være analytisk på et område D. Da vil*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

for alle lukkede kurver i D

Fra dette får vi den såkalte Cauchy's Integral formel, som viser at f er gitt av verdien på randen.

Theorem 3.2 (Cauchy's Integral Formula)**.** *La f være analytisk på et område D. Da vil*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

hvor γ er en simpel lukket kurve i D, og z ligger inni området som har γ som rand.

Ved simpelthen å derivere ser vi og at

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

To relativt umiddelbare konsekvenser av theoremene over:

Theorem 3.3 (Morera's Theorem)**.** *La f være en funksjon definert og kontinuerlig på et område D, og som er slik at for alle lukkede kurver γ i D har vi*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Da er f analytisk.

Theorem 3.4 (Liouville's Theorem)**.** *La f være analytisk og avgrenset (bounded) på hele $\mathbb{C}$. Da er f konstant.*

Proof. La $|f(z)| \leqslant M$ og la C være en sirkel med radius r. Bruk Cauchy's formel for den deriverte som gir

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}dz \leqslant 2Mr^{-1}$$

Ved å la $r \to \infty$ får vi at $f'(z) = 0$, og f må være konstant. □

Liouvilles teorem gir og et helt trivielt bevis på algebraens fundamental-teorem: Anta at $P(z)$ er et kompleks polynom uten noen nullpunkt. Da er $\frac{1}{P(z)}$ en analytisk funksjon på hele $\mathbb{C}$, som og er avgrensa, altså er det en konstant, som igjen vil si at P er en konstant.

3.1 Singulariteter

Theorem 3.5. *Anta at f er analytisk på et område D, untatt i $a \in D$. Dersom $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$, kan vi gjøre f til en analytisk funksjon på hele D ved å sette*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta$$

hvor C er en liten sirkel i D som inneholder a.

Merk at dette er et slags trivielt eksempel på analytic continuation, som vi definerer helt nederst. En slik isolert singularitet kalles en ***removable singularity***, og kan brukes til å vise Taylors teorem:

Theorem 3.6. *La f være analytisk på D, $a \in D$. Da kan vi skrive f som*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n$$

hvor $f_n(z)$ er analytisk i D.

Dette er en slags endelig versjon av standarde uendelige taylor rekker, men ofte kan disse være mer nyttige for å studere analytiske funksjoner lokalt.

Dersom $f(a), f'(a), \dots, f^{(h-1)}(a)$ alle er lik 0, og $f^h(a) \neq 0$. vil vi naturlig nok kunne skrive f på formen $f(z) = f_h(z)(z-a)^h$.

Definition 3.7. *Dersom f kan skrives på formen $f(z) = f_h(z)(z-a)^h$, sier vi at f har en rot av orden h i a.*

Dersom f har en isolert singularitet i a, men er analytisk i $0 < |z-a| < \delta$, og med $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ kalles a en ***pol*** i f. Da kan vi definere $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ på et område $0 < |z-a| < \delta'$, hvor δ' er liten nok til at f ikke har noen røtter i dette området.

Definition 3.8. *Dersom $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ har en rot av orden h i a, sier vi at f har en pol av orden h i a.*

Definition 3.9. *En funksjon f som er analytisk på et område D, med unntak av i et endelig antall poler kalles* **meromorphic***.*

Merk at i disse tilfellene kan vi skrive f som

$$f(z) = B_h(z-a)^{-h} + B_{h-1}(z-a)^{h-1} + \cdots + B_1(z-a)^{-1} + \varphi(z)$$

for konstanter B_i og en analytisk funksjon $\varphi(z)$

I det tilfellet for poler av grad h er h det første heltallet slik at $\lim_{z \to a}(z-a)^h f(z) \neq \infty$. Dersom en slik h ikke finnes kalles a en ***essensiell singularitet***, og da er det bare å løpe. Følgende gir et lite innblikk i hvor kaotisk situasjonen er da:

Theorem 3.10. *La f være analytisk på et område, utenom ved en essensiell singularitet a. Da vil f komme arbitrært nære alle mulige verdier av i $\mathbb{C}$ i alle omegn av a.*

Theorem 3.11. *La f være analytisk i et område D, med nullpunkter $z_1, \dots z_n$ (telt flere ganger, opp til multiplisitet), og la γ være en lukket kurve i D, som ikke passerer noen av nullpunktene. Da vil*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i n(\gamma, z_i)$$

hvor $n(\gamma, z)$ betegner "winding numberet" til z mtp. γ.

Teoremet utvides lett til meromorfe funksjoner, ved

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i n(\gamma, a_i) - \sum_i n(\gamma, b_i)$$

hvor a_i er røttene, og b_i er polene. Det kan brukes til å vise

Theorem 3.12 (Rouche's Theorem)**.** *f, g analytiske i D, γ simpel lukket kurve, og $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ for alle z på kurven. Da har f og g like mange røtter i området som har γ som rand.*

3.2 Maximum Principle

Theorem 3.13 (Maximum Principle)**.** *La f være analytisk på et område D. Da har $|f(z)|, z \in D$ ingen maksimum i D.*

En annen måte å si det på, ville vært at dersom f er definert og kontinuerlig på randen av D, er det der den oppnår sitt maksimum. Følger ganske umiddelbart fra Cauchy's theorem.

Theorem 3.14 (Schwarz' Lemma)**.** *La $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, og la $f : D \to D$ være analytisk, med $f(0) = 0$. Da vil $|f(z)| \leqslant |z|$ og $|f'(0)| \leqslant 1$. Dersom noen av disse er likheter vil $f(z) = cz$ for en $c \in \mathbb{C}$, med $|c| = 1$.*

Proof. Vi bruker maksimum principle på funksjonen

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z)/z & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

På sirkelen $|z| = r < 1$, har $f_1(z)$ absolutt-verdi $\leqslant 1/r$. Fra maximum principle får vi da at $f_1(z) \leqslant 1/r$ for $|z| \leqslant r$. Ved å la $r \to 1$, ser vi at $|f_1(z)| \leqslant 1$ for alle $z \in D$ som impliserer at $|f(z)| \leqslant |z|$. Dersom den oppnår likhet på noe sted, vil f_1 oppnå sitt maksimum, og f_1 må være konstant, som impliserer del to av lemma. □

3.3 Residue Calculus

Følgende er kjekt for å regne ut vanskelige integraler, dersom du av en eller annen merklig grunn skulle bry deg om det:

Theorem 3.15. *La f være analytisk i D med unntak av ved isolerte singulariteter $z_1, \ldots z_n$, og la γ være en lukket kurve i D. Da vil*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_i n(\gamma, z_i) \mathrm{Res}_{z \to z_i} f(z_i)$$

For essensielle singulariteter finner vi nok ikke disse residuene, men for poler er det ganske greit: Skriv f på formen

$$f(z) = B_h (z-a)^{-h} + B_{h-1}(z-a)^{h-1} + \cdots + B_1 (z-a)^{-1} + \varphi(z)$$

Da er $\mathrm{Res}_{z \to a} f(a) = B_1$. Se prosjektet for noen slike utregninger.

3.4 Harmoniske Funksjoner

For en analytisk funksjon $f(z) = u(z) + iv(z)$ er u, v harmoniske funksjoner. Men det er verdt å studere dem alene og.

Definition 3.16. *En funksjon $u : D \to \mathbb{R}$ er* **harmonisk** *dersom den tilfredstiller Laplace-ligningen*

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0$$

Dersom u er harmonisk vil $f(z) = \frac{\partial}{\partial x} u + i \frac{\partial}{\partial y} u$ være analytisk.

Theorem 3.17 (Mean-Value Property)**.** *La $u(z)$ være analytisk på et område D som inneholder sirkelen $|z| = r$. Da vil*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} u(z) dz = u(0)$$

Ved variabel-bytte kan vi få en formel

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Det forrige teoremet sier at mye som analytiske funksjoner, er også harmoniske funksjoner bestemt av deres verdi på randen (se Poisson's formel under). Det implis-erer og at Maximum Principle gjelder for harmoniske funksjoner og (til og med enda sterkere - vi kan kvitte oss med absolutt verdi tegnet, og si at det hverken oppnår maksimum eller minimum).

Faktisk kan vi bruke Mean-Value Property til å definere harmoniske funksjoner siden

Theorem 3.18. *La $u : D \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig, og la u tilfredstille*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

for alle $z_0 \in D$, og alle r s.a. $B(z_0; r) \subseteq D$. Da er u harmonisk.

Theorem 3.19 (Poisson Formula)**.** *Anta $u(z)$ harmonisk for $|z| < R$, og kontinuerlig for $|z| \leqslant R$. Da vil*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|}{|z-a|^2} u(z) dz$$

for alle $|a| < R$.

4 Extra

Theorem 4.1 (Riemann Mapping Theorem). *La Ω være et enkeltsammenhengende område (alle løkker er nullhomotope), som ikke er hele $\mathbb{C}$. Da finnes en bijeksjon $f : \Omega \to D, D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, hvor f er analytisk. Ved å velge et punkt $z_0 \in \Omega$, og kreve at $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$, blir f unik.*

Theorem 4.2 (Analytic Continuation). *La f være analytisk på et område D, og la $D \subseteq U$, hvor U er åpent og sammenhengende. Dersom det finnes en utvidelse av f til hele U er denne unik.*

Proof. Veldig sketsj: Dersom f og g er to slike utvidelser er $f - g$ og analytisk, men $f - g = 0$ på D. Analytiske funksjoner har diskret røtter, så dette impliserer at $f = g$. $\square$