Homologisk algebra - Definisjoner og resultater

jonathke

October 2021

1 Definisjoner

Definition 1.1 *En* **Kategori** $\mathscr{C}$ *er en samling objekter* $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$*, sammen med mengder* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$, $\forall X, Y \in \mathscr{C}$*, samt en komposisjons funksjon* $\circ : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)$ *slik at:*

(i) For alle morfier f, g, h *har vi* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(ii) For alle $A \in \mathscr{C}$*, har vi en identitets morfi* $1_A \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$*, som er slik at for alle andre morfier* f, g *som hhv. starter eller slutter i* A *har vi* $f \circ 1_A = f$ *og* $1_A \circ g = g$.

Definition 1.2 *La* $f : A \to B$ *være en morfi i* $\mathscr{C}$*. Da er* f *en:*

- **Isomorfi** *dersom* $\exists g : B \to A$*, slik at* $g \circ f = 1_A$ *og* $f \circ g = 1_B$.
- **Monomorfi** *dersom* $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.
- **Epimorfi** *dersom* $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$.
- **Split monomorfi** *dersom* $\exists g : B \to A$*, slik at* $g \circ f = 1_A$.
- **Split epimorfi** *dersom* $\exists g : B \to A$*, slik at* $f \circ g = 1_B$.

Definition 1.3 *Alle kategorier* $\mathscr{C}$ *har en* **opposite kategori** $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$*, gitt ved "å snu alle piler", i.e.* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A,B) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$*, og* $f \circ_{\mathrm{op}} g = g \circ f$.

Definition 1.4 *La* $\mathscr{C}$ *og* $\mathscr{D}$ *være kategorier. En* **funktor** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *er en funksjon* $F : \operatorname{Ob}\mathscr{C} \to \operatorname{Ob}\mathscr{D}$*, samt* $\forall A, B \in \mathscr{C}$*, funksjoner:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

som er slik at $F(f \circ g) = F(f) \circ F(c)$*, og* $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

En **kontravariant funktor** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *er en (kovariant) funktor* $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$.

Definition 1.5 *En funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ er:*

- **full** *dersom* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$ *er surjektive* $\forall A, B \in \mathscr{C}$.
- **trofast** *dersom* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$ *er injektiv* $\forall A, B \in \mathscr{C}$
- **essensielt surjektiv** *dersom* $\forall D \in \mathscr{D}$ *finnes det en* $C \in \mathscr{C}$ *slik at* $F(C) \simeq D$ *(altså, isomorfe i $\mathscr{D}$).*

Definition 1.6 *La F, G være funktorer fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{D}$. En* **naturlig transformasjon** *$\eta : F \to G$ er en samling morfier $\{\eta_A : F(A) \to G(A) \mid \forall A \in \mathscr{C}\}$, slik at diagrammet under kommuterer:*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

En naturlig transformasjon er en **naturlig isomorfi**, *dersom η_A er isomorfier i $\mathscr{D}$ for alle $A \in \mathscr{C}$.*

Definition 1.7 *En funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ er en* **ekvivalens av kategorier** *dersom $\exists G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ slik at $G \circ F$ er naturlig isomorf med $1_{\mathscr{C}}$ og $F \circ G$ er nat. iso. med $1_{\mathscr{D}}$.*

Definition 1.8 *La* $\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *være to kategorier, og to funktorer. Da er (F, G) et* **adjungert par** *(eventuelt sier vi også at F er venstre-adjungert til G, eller at G er høyre-adjungert til F), dersom $\forall A \in \mathscr{C}, X \in \mathscr{D}$ eksisterer mengde-bijeksjoner*

$$\phi_{A,X} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, G(X))$$

som er naturlige i A og X, dvs. at for alle morfier $f : A \to A'$, $g : X \to X'$ kommuterer diagrammet:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A'), X)) & \xrightarrow{F(f)*} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), X)) & \xrightarrow{g*} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), X')) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{A',X}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{A,X}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{A,X'}} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', G(X))) & \xrightarrow{f*} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, G(X))) & \xrightarrow{G(g)*} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, G(X'))) \end{array}$$

Her betyr $f*$ mengde morfien gitt ved $f*(h) = f \circ h$, eller $h \circ f$ alt ettersom hva gir mening...

Remark 1.9 *Definisjonen over sier at (F, G) er et adjungert par dersom morfier $F(A) \to X$ er mer eller mindre "det samme som" morfier $A \to G(X)$. Se og Teorem 2.6 for en litt enklere definisjon.*

Definition 1.10 *La $\mathscr{C}$ være en kategori, og $\{X_i\}_{i \in I}$ objekter i $\mathscr{C}$.*

- **Et produkt** *av denne mengden er et objekt $\Pi X_i \in \mathscr{C}$, sammen med morfier $\{\pi_i : \Pi X_i \to X_i\}_{i \in I}$, slik at for hver $Y \in \mathscr{C}$, sammen med en familie morfier $\{f_i : Y \to X_i\}_{i \in I}$ finnes en unik $f : Y \to \Pi X_i$ slik at diagrammet kommuterer for alle $i \in I$:*

$$\begin{tikzcd} & \Pi X_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

- **Et koprodukt** *er den duale definisjonen (snu alle piler), og skrives som $\amalg X_i$.*

Definition 1.11 *La I være en liten kategori (dvs. at $\mathrm{Ob} I$ er en mengde), og $D : I \to \mathscr{C}$ en funktor.*

- **En grense** *for D er et objekt $\varprojlim D \in \mathscr{C}$, sammen med morfier $\{p_i : \varprojlim D \to D(i)\}_{i \in I}$ med kravet om at $D(u) \circ p_i = p_j$ for alle morfier $u : i \to j$ i I, slik at $\varprojlim D$ er produktet av $\{D(i)\}_{i \in I}$ (med kravet om at familien morfier $\{f_i : Y \to D(i)\}_{i \in I}$ må oppfylle $D(u) \circ f_i = f_j$ for alle $u : i \to j$ i I).*

- **En kogrense** *er igjen den duale definisjonen.*

Definition 1.12 *La I være kategorien* $\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "v"] \\ 1 \arrow[r, "u"] & 3 \end{tikzcd}$. *Funktor $D : I \to \mathscr{C}$ er da et diagram* $\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[d, "\beta"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha"] & A_3 \end{tikzcd}$ *i $\mathscr{C}$. En* **pullback** *av dette diagrammet er et objekt $P \in \mathscr{C}$, slik at $P = \varprojlim D$. Eksplisitt vil dette si at det følger med to morfier p_1, p_2 med den egenskapen at diagrammet* $\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & A_2 \arrow[d, "\beta"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha"] & A_3 \end{tikzcd}$ *kommuterer, samt at for alle andre* *kommutative diagrammer* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & A_2 \arrow[d, "\beta"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha"] & A_3 \end{tikzcd}$*, så finnes en unik morfi $f : A \to P$ slik at følgende diagram kommuterer:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] \arrow[dr, dotted, "\exists! f"] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & A_2 \arrow[d, "\beta"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha"] & A_3 \end{tikzcd}$$

La $D^* : I^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$. Da er en **pushout** *er da $Q \in \mathscr{C}$, med $Q = \varinjlim D^*$. Dette er igjen den duale definisjonen.*

Definition 1.13 *En kategori $\mathscr{A}$ er* **additiv** *dersom:*

(i) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ *er* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ *en abelsk gruppe.*

(ii) Komposisjon av morfier er bilinear, dvs. at $g \circ (f_1 + f_2) = (g \circ f_1) + (g \circ f_2)$ og $(g_1 + g_2) \circ f = (g_1 \circ f) + (g_2 \circ f)$ (hvor det gir mening).

(iii) $\exists O \in \mathscr{A}$, slik at $\forall A \in \mathscr{A}$ er $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(O, A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(O, A) =$ den trivielle gruppen.

(iv) $\forall A, B \in \mathscr{A}, \exists A \oplus B \in \mathscr{A}$, kalt biprodukt, sammen med morfier

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "i_A"] & A \oplus B \arrow[l, bend left, "\pi_A"] \arrow[r, bend right, "\pi_B"'] & B \arrow[l, bend right, "i_B"'] \end{tikzcd}$$

hvor $1_A = \pi_A \circ i_A$, $1_B = \pi_B \circ i_B$ og $1_{A \oplus B} = (i_A \circ \pi_A) + (i_B \circ \pi_B)$

Kategorien kalles **pre-additiv** *dersom (i) og (ii) holder.*

Definition 1.14 *$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ er* **additiv** *dersom $F(A \oplus B) = F(A) \oplus F(B)$ og $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(B))$ er gruppehomomorfier for alle $A, B \in \mathscr{A}$.*

Definition 1.15 *La $f : A \to B$ være en morfi i en additiv kategori.*

- **En kjerne** *for* f *er et objekt* $\ker f \in \mathscr{A}$, *sammen med en morfi* $i : \ker f \to A$, *slik at* $f \circ i = 0$, *og slik at for alle* $L \in \mathscr{A}$ *og morfier* $g : L \to A$ *med* $f \circ g = 0$, *finnes en unik morfi* $h : L \to \ker f$, *slik at diagrammet under kommuterer:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dotted, "\exists! h"'] \arrow[dr, "g"] & & \\ \ker f \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

- **En kokjerne** *er den duale definisjonen.*

For f.eks. abelske grupper er, gitt en $f : A \to B$, $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, *mens* $\operatorname{Coker} f = f / \operatorname{Im} f$ *(her mener jeg bildet av* f *som vi er vant med for grupper.* $\operatorname{Im} f$ *for en generell kategori defineres under). Merk også at* $\ker f$ *og* $\operatorname{Coker} f$ *er hhv. pullbacks og pushouts av enkle diagrammer.*

Definition 1.16 *Se Lemma 2.9. Her kalles* $\operatorname{Coker} i$ *for* **kobildet** *til* f *og skrives* $\operatorname{CoIm} f$, *mens* $\ker p$ *kalles* **bildet** *til* f *og betegnes* $\operatorname{Im} f$

Definition 1.17 *En kategori* $\mathscr{A}$ *kalles* **pre-abelsk** *dersom det for alle morfier* f, *eksisterer* $\ker f \in \mathscr{A}$ *og* $\operatorname{Coker} f \in \mathscr{A}$. *Videre kalles* $\mathscr{A}$ **abelsk** *dersom alle implisitte morfier* $\bar{f} : \operatorname{CoIm} f \to \operatorname{Im} f$ *er isomorfier.*

Definition 1.18 *Et følge* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *er et* **kompleks** *dersom* $g \circ f = 0$. *Fra kjerne-egenskapen til* $\ker g$ *vet vi at det dermed* $\exists! h_{f,g} \operatorname{Im} f \to \ker g$ *slik at* $i_p = i_g \circ h_{f,g}$. *Følgen er* **eksakt** *dersom* $h_{f,g}$ *er en isomorfi.*
Merk at vi som regel "tenker" $\operatorname{Im} f = \ker g$ *dersom følgen er eksakt. Definisjonen kan også utvides til å inneholde flere enn to morfier.*

Definition 1.19 *La* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *være abelske kategorier, og la* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *være en additiv funktor.*

- F *er* **venstre eksakt** *dersom* $O \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *eksakt* $\Rightarrow O \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ *eksakt.*

- F *er* **høyre eksakt** *dersom* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to O$ *eksakt* $\Rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to O$ *eksakt.*

- F *er* **eksakt** *dersom den er både venstre og høyre eksakt.*

Definition 1.20 *La* $\mathscr{A}$ *være en abelsk kategori.*

- $P \in \mathscr{A}$ *er* **projektiv** *dersom det for alle diagrammer*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

med eksakt rad (i.e. g er epi), finnes en (ikke nødv. unik) $h : P \to A$, med $f = g \circ h$.

- *(Dual)* $I \in \mathscr{A}$ *er* **injektiv** *dersom det for alle diagrammer*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ O \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[ul, dashed, "\exists h"'] \end{tikzcd}$$

med eksakt rad (i.e. g er mono), finnes en (ikke nødv. unik) $h : B \to I$, med $f = h \circ g$.

Definition 1.21 *La R være en ring, M være en høyre R-modul, la N være en venstre R-modul og la til slutt G være en vilkårlig abelsk gruppe. En funksjon $f : M \times N \to G$ kalles* ***R*-balansert** *dersom for alle $m_i \in M, n_i \in N, r \in R$ har vi:*

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2, n) &= f(m_1, n) + f(m_2, n), \\ f(m, n_1 + n_2) &= f(m, n_1) + f(m, n_2), \\ f(mr, n) &= f(m, rn). \end{aligned}$$

Definition 1.22 Tensorproduktet *$M \otimes_R N$ er en abelsk gruppe, sammen med en R-balansert funksjon $\phi : M \times N \to M \otimes_R N$, som er slik at for alle abelske grupper G og R-balanserte funksjoner $f : M \times N \to G$ finnes en unik $\bar{f} : M \otimes_R N \to G$ slik at $f = \bar{f} \circ \phi$:*

$$\begin{tikzcd} & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\ M \times N \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

Merk at Tensorproduktet alltid eksisterer og er unikt opp til unik isomorfi.

Definition 1.23 *Et* **kjedekompleks** *(ofte kun referrert til som kompleks) i den abelske kategorien $\mathscr{A}$ er en følge*

$$A_\bullet : \ldots \xrightarrow{d_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$$

der $d_n \circ d_{n+1} = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.24 *I et kompleks får vi en eksakt følge for alle* $n \in \mathbb{Z}$*:*

$$0 \to \operatorname{Im} d_{n+1} \xrightarrow{h_n} \ker d_n \to \operatorname{Coker} h_n \to 0$$

Da definerer vi den $\boldsymbol{n}$**-te homologien** *til* $A_\bullet$ *til å være* $H_n(A_\bullet) = \operatorname{Coker} h_n$*.*

Definition 1.25 *En morfi* $f : A_\bullet \to B_\bullet$ *er en samling morfier* $f_n : A_n \to B_n$ *i* $\mathscr{A}$*, slik at følgende diagram kommuterer:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d^A_{n+1}} & A_{n+1} & \xrightarrow{d^A_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \\ \dots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d^B_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d^B_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Spesifikt gjør dette at for enhver abelsk kategori $\mathscr{A}$*, kan vi lage kategorien av alle kjedekomplekser, notert som* $\boldsymbol{C}(\mathscr{A})$*. Merk at* $\boldsymbol{C}(\mathscr{A})$ *blir en abelsk kategori. Dette følger fra Lemma 2.10.*

Remark 1.26 *En morfi* $f : A_\bullet \to B_\bullet$ *induserer en morfi* $H_n(f) : H_n(A_\bullet) \to H_n(B_\bullet)$*. Med andre ord er* $H_n : \boldsymbol{C}(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ *en funktor.*
F.eks. dersom $\mathscr{A} = \mathbf{Mod}\boldsymbol{R}$ *vil* $H_n(A_\bullet) = \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$*. Da vil enkelt og greit* $H_n(f) :$ *være gitt ved* $a + \operatorname{Im} d^A_{n+1} \to f_n(a) + \operatorname{Im} d^B_{n+1}$*.*

For en beskrivelse av $H_n(f)$ i generelle abelske kategorier, se forelesningsnotater fra 6. oktober.

Definition 1.27 *La* $A_\bullet$ *være et kompleks, og la* $m \in \mathbb{Z}$*. Da definerer vi et nytt kompleks* $A_\bullet[m]$ *gitt ved* $A_\bullet[m]_n = A_{n-m}$*, og* $d_n^{A_\bullet[m]} = (-1)^m d_{n-m}$*.*

Definition 1.28 *La* $f : A_\bullet \to B_\bullet$ *være en kjedeavbilding, altså:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d^A_{n+1}} & A_{n+1} & \xrightarrow{d^A_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \\ \dots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d^B_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d^B_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Da definerer vi **kjeglen** $C(f)$ *ved* $C(f)_n = A_{n-1} \oplus B_n$ *og* $d_n = \begin{pmatrix} -d^A_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d^B_n \end{pmatrix}$.

Remark 1.29 *For enhver $f : A_\bullet \to B_\bullet$ kan vi konstruere den eksakte kjedeavbildingen $0 \to B_\bullet \xrightarrow{\binom{0}{1}} C(f) \xrightarrow{(1\ 0)} A_\bullet[1] \to 0$, altså får vi følgende kommutative diagram, hvor alle vertikale følger er eksakte:*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "d^B_{n+1}"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & B_n \arrow[r, "d^B_n"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & A_n \oplus B_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d^A_n & 0 \\ f_n & d^B_{n+1} \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & A_{n-1} \oplus B_n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d^A_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d^B_n \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & A_{n-2} \oplus B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "-d^A_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "-d^A_{n-1}"] & A_{n-2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Her blir lang-eksakt følgen i homologi (legg merke til at rekkefølgen her faktisk er riktig!):

$$\dots \to H_n(A_\bullet) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{H_n(\binom{0}{1})} H_n(C(f)) \xrightarrow{H_n((1\ 0))} H_{n-1}(A_\bullet) \to \dots$$

Definition 1.30 *La $f : A_\bullet \to B_\bullet$ være en morfi av komplekser. Vi kaller f en* **kvasi-isomorfi** *dersom $H_n(f) : H_n(A_\bullet) \to H_n(B_\bullet)$ er isomorfier (i $\mathscr{A}$) for alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Definition 1.31 *En kjedeavbildning $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ kalles* **nullhomotop** *dersom $\forall n \exists h_n : A_n \to B_{n+1}$ slik at $f_n = h_n \circ d^B_{n+1} + h_{n-1} \circ d^A_n$ (se diagrammet)*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d^A_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dl, dashed] & A_n \arrow[r, "d^A_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, dashed, "h_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "h_{n-1}"'] & \dots \arrow[dl, dashed] \\
\dots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "d^B_{n+1}"] & B_n \arrow[r, "d^B_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Dersom $g_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ er en annen kjedeavbilding sier vi at $f_\bullet$ og $g_\bullet$ er **homotope** *dersom $f_\bullet - g_\bullet$ er nullhomotop.*

Definition 1.32 *La $\mathscr{A}$ være en additiv kategorie.* **Homotopikategorien $\boldsymbol{K}(\mathscr{A})$** *er gitt ved at $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{K}(\mathscr{A})) = \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C}(\mathscr{A}))$ og*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}(\mathscr{A})}(A_\bullet, B_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}(\mathscr{A})}(A_\bullet, B_\bullet)/\sim$$

hvor $\sim$ er ekvivalensrelasjon gitt ved at $f \sim g$ hvis f, g er homotope.

Merk at $\boldsymbol{K}(\mathscr{A})$ er en ny additiv kategori, men om jeg husker riktig blir den ikke abelsk selvom $\mathscr{A}$ er abelsk (i motsetning til $\boldsymbol{C}(\mathscr{A})$).

Definition 1.33 *La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori.*

- *$\mathscr{A}$ har* **nok projektive** *hvis det $\forall A \in \mathscr{A}$ finnes et projektivt objekt $P \in \mathscr{A}$ og en epimorfi $P \twoheadrightarrow A$. Tilsvarende har $\mathscr{A}$* **nok injektive** *dersom det $\forall A \in \mathscr{A}$ finnes et injektivt objekt $I \in \mathscr{A}$ og en monomorfi $I \rightarrowtail A$.*

- *Anta nå at $\mathscr{A}$ har nok projektive. En* **projektiv oppløsing** *av $A \in \mathscr{A}$ er et kompleks*

$$P_\bullet : \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0 \to 0 \to \dots$$

hvor P_i er projektiv for alle i, og $H_n(P_\bullet) = 0$ for alle $n \neq 0$, og $H_n(P_\bullet) = A$ (altså at $\operatorname{Coker} d_1 = A$). Dualen kalles en **injektiv oppløsning**.

Definition 1.34 *La $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ være en additiv funktor mellom to abelske kategorier.*

- *Anta at $\mathscr{A}$ har nok projektive, og at F er høyre eksakt. Da er den* **n-te deriverte funktoren** *$\mathrm{L}_nF : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ gitt som følger: For $A \in \mathscr{A}$, sett $\mathrm{L}_nF(A) = H_n(F(P_\bullet))$, der $P_\bullet$ er en projektiv oppløsning av A.*
Videre, for en morii $f : A \to B$ i $\mathscr{A}$, velg projektive oppløsninger $P_\bullet, Q_\bullet$ av hhv. A og B, løft f til en kjedeavbildning $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ (se Lemma 2.24), og sett $\mathrm{L}_nF(f) = H_n(F(f_\bullet)$

- *Anta at $\mathscr{A}$ har nok injektive, og at F er venstre eksakt. Da er den* **n-te høyrederiverte** *funktoren gitt som $\mathrm{R}^nF(A) = H_{-n}(F(I_\bullet))$ for en injektiv oppløsning $I_\bullet$ av A. For morfier er $\mathrm{R}^nF(A)$ definert tilsvarende. $\mathrm{L}_nF(A)$.*

Vi får totalt fire tilfeller, om vi også tar med kontravariante funktorer. La $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ være en kontravariant funktor. Dersom:

- *$\mathscr{A}$ har nok projektive, og G er venstre eksakt, kan vi definere den n-te høyrederiverte funktoren på ved å se på den projektive oppløsningen av $A \in \mathscr{A}$.*

- *$\mathscr{A}$ har nok injektive, og G er høyreeksakt, kan vi definere den n-te venstrederiverte funktoren på ved å se på den injektive oppløsningen av $A \in \mathscr{A}$.*

Anta at $\mathscr{A}$ er en abelsk kategori med nok projektive og nok injektive. For $A, B \in \mathscr{A}$, vet vi at

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -) &: \mathscr{A} \to \mathbf{Ab} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, B) &: \mathscr{A} \to \mathbf{Ab} \end{aligned}$$

er to venstre eksakte funktorer, hhv. kovariant og kontravariant. Da er følgende definisjon enkel.

Definition 1.35 *Vi definerer* **Ext-funktoren** *som*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,B) = (\mathrm{R}^n \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A,-))(B)$$

Tilsvarende kan vi lage en lille exts av $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-,B) : \mathscr{A} \to \mathbf{Ab}$*, men vi skal se at de er isomorfe uansett.*

Hvis du må ha det inn med teskje, kan vi for $A, B \in \mathscr{A}$ velge projektive/injektive oppløsninger av hhv. A og B.

$$I_\bullet : \qquad 0 \longrightarrow B \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \dots$$

$$P_\bullet : \qquad \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow$$

Som gir nye komplekser i **Ab**:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, I_0)) \xrightarrow{(\delta_0)_*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, I_{-1})) \xrightarrow{(\delta_{-1})_*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, I_{-2})) \xrightarrow{(\delta_{-2})_*} \dots$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(P_0, B)) \xrightarrow{d_0^*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(P_1, B)) \xrightarrow{d_1^*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(P_2, B)) \xrightarrow{d_2^*} \dots$$

Dermed kan vi enkelt definere

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,B) &= H_{-n}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, I_\bullet)) = \ker(\delta_{-n})_* / \operatorname{Im}(\delta_{-n+1})_* \\ \mathrm{ext}^n_{\mathscr{A}}(A,B) &= H_n(\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(P_\bullet, B)) = \ker d^*_{n+1} / \operatorname{Im} d^*_n \end{aligned}$$

Definition 1.36 *La* R *være en ring, og la* $M \in \mathbf{Mod}\boldsymbol{R}^{\mathrm{Op}}$*, og la* $N \in \mathbf{Mod}\boldsymbol{R}$ *(Altså,* M *er en høyre* R*-modul, mens* N *er en venstre* R*-modul). Velg en projektiv oppløsning av* N*,* $P_\bullet$*. Da er* **Tor-funktoren** *definert som*

$$\mathrm{Tor}^R_n(M,N) = H_n(M \otimes P_\bullet)$$

eller $\mathrm{L}_n F(N)$*, hvor* $F : \mathbf{Mod}\boldsymbol{R} \to \mathbf{Ab}$ *er den høyre eksakte funktoren* $M \otimes_R -$*. På lignende vis kan vi definere lille tor ved å se på den* n*-te venstrederiverte av* $- \otimes_R N$*, men de er uansett isomorfe.*

Kan være lurt å se litt eksempler her, det er ganske inviklede definisjoner bak Tor og Ext funktoren.

Definition 1.37 *Korollar 2.29 og korollar 2.30 kalles for* **dimensjonsskift***.*

Litt rart å definere dimensjonsskift før dimensjon, men la gå.

Definition 1.38 *La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori med nok projektive. Vi definerer den* **projektive dimensjonen** *til $A \in \mathscr{A}$ som:*

$$\mathrm{pd}_{\mathscr{A}}(A) = \inf\{n \geqslant 0 \mid \exists \text{ en proj. oppl. av } A, P_\bullet : \dots \to 0 \to P_n \to \dots \to P_0 \to 0\}$$

Den **globale projektive dimensjonen** *til kategorien $\mathscr{A}$ er*

$$\mathrm{gpd}(\mathscr{A}) = \sup\{\mathrm{pd}(A) \mid A \in \mathscr{A}\}$$

Tilsvarende har vi såkalt **injektiv dimensjon** *og* **global injektiv dimensjon** *basert på injektive oppløsninger. Disse skrives hhv. som $\mathrm{id}_{\mathscr{A}}(A)$ og $\mathrm{gid}(\mathscr{A})$.*

Definition 1.39 *La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori, og anta at den har nok projektive. videre, la*

$$P_\bullet : \dots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$$

være en projektiv oppløsning av $A \in \mathscr{A}$. Vi definerer den n-te **syzygien** *som*

$$\Omega^n_{P_\bullet}(A) = \operatorname{Im} d_n$$

for $n \geqslant 1$, og $\Omega^0_{P_\bullet}(A) = A$. Tilsvarende, for en injektiv oppløsning

$$I_\bullet : 0 \to I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_{-1}} I_2 \to \dots$$

definerer vi $\Omega^{-n}_{I_\bullet}(A) = \ker d_{-n}$.

Definition 1.40 *La T være en additiv kategori, og $\Sigma : T \to T$ en additiv automorfi.*

- *Et* **triangel** *er et diagram i T på formen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$.*
- *En* **morfi** *av triangler er en trippel (α, β, γ), slik at*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma\alpha} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \end{array}$$

  kommuterer. (α, β, γ) er en isomorfi av triangler dersom α, β, γ er isomorfier i T.

- *En* **venstre rotasjon** *av triangelet over er triangelet $B \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma B$. Merk fortegnsendringen.*

- *En* **høyre rotasjon** *av triangelet er triangelet* $\Sigma^{-1}C \xrightarrow{-\Sigma^{-1}h} A \xrightarrow{f} \Sigma B \xrightarrow{g} C$.
- *For* $A \in T$ *er det* **trivielle triangelet** *på* A *gitt som* $A \xrightarrow{1_A} A \to 0 \to \Sigma A$.

Definition 1.41 *En* **triangulert kategori** *er en trippel* (T, Σ, Δ)*, hvor* T, Σ *er som over, og* Δ *er en samling av triangler i* T*, slik at følgende holder:*

(i) *(a)* Δ *er lukket under isomorfi av triangler.*

   (b) *For alle* $A \in T$ *er det trivielle triangelet på* A *med i* Δ.

   (c) *For hver morfi* $f \in \mathrm{Hom}_T(A, B)$ *finnes et triangel* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ *i* Δ.

(ii) Δ *er lukket under venstre og høyre rotasjon av triangler.*

(iii) *Gitt* α, β *under, slik at venstre firkant kommuterer, eksisterer alltid en* γ *slik at hele diagrammet kommuterer.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\exists\gamma"] & \Sigma A \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & \Sigma A' \end{tikzcd}$$

Merk at γ *ikke trenger å være unik.*

(iv) *Det siste aksiomet er* **oktahedron aksiomet**. *Søk det opp, for mye å skrive.*

Aksiom (i) - (iv) kalles herifra (TR1)-(TR4).

Definition 1.42 *La* (T, Σ, Δ) *være en triangulert kategori.*

- Σ *kalles typisk* **suspensjonen** *i algebraisk topologi, og* **skift** *i algebra.*
- *Trianglene i* Δ *kalles* **distingverte triangler**.

Oktahedron diagrammet er mulig å erstatte. Se definisjonen under og Teorem 2.37.

Definition 1.43 *La* $\phi = (\alpha, \beta, \gamma)$ *være en morfi av triangler (ikke nødvendigvis distingverte).* **Kjeglen** *til* ϕ *er da triangelet*

$$B \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & f' \end{pmatrix}} C \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ \gamma & g' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ \Sigma\alpha & h' \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A'$$

Husk definisjon 1.32, som vi herifra og ut ser litt mer på. $K(\mathscr{A})$ blir en triangulert kategori. Vi kaller standardtrianglet for triangler på formen

$$A_\bullet \xrightarrow{[f_\bullet]} B_\bullet \xrightarrow{[i_f]} C(f)_\bullet \xrightarrow{\pi_f} A_\bullet[1]$$

hvor $C(f)$ er kjeglen til f. Vi definerer da Δ til å være alle standardtriangler, lukket under isomorfi. Ganske mye jobb (øving 6) å skjekke alt som skal skjekkes for å formelt vise at $K(\mathscr{A})$ blir en triangulert kategori.

Definition 1.44 *La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori, og la $X \in \mathscr{A}$. Da har vi alltid kjedekomplekset:*

$$\cdots \to 0 \to X \to 0 \to \dots$$

i.e., komplekset med 0 i grad $n \neq 0$, og X i grad 0. Dette kalles for et stilkkompleks. I $K(\mathscr{A})$ (eller $C(\mathscr{A})$ for den slags skyld) betegner vi stilkkomplekset til X simpelthen som X.

Merk at en interessant ting med homotopi kategorien er at Ext-funktoren kan tolkes som en enkel Hom funktor. Dette blir enda tydeligere nå man ser på deriverte kategorier. Men som et eksempel: La R være en ring, og la $K(R)$ være homotopikategorien over $\mathbf{Mod}\boldsymbol{R}$. Da har vi

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_{K(R)}(P^M_\bullet, \Sigma^n N)$$

hvor $P^M_\bullet$ er en projektiv oppløsning av M (merk og at N her er naturligvis stilkkomplekset til N).

2 Resultater

Proposition 2.1 *Isomorfi $\to$ Split mono/epi $\to$ mono/epi.*

Bevis: Helt rett frem.

Observation 2.2 *Kategorien* **Cat** *er kategorien av kategorier. Her er* Ob **Cat** *kategorien, mens morfier er funktorer. Men for alle kategorier $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ danner funktorer mellom dem* $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ *en egen kategori, der objektene er funktorer, og morfiene er naturlige transformasjoner. Se* **2-kategori**.

Theorem 2.3 (Yoneda's Lemma) *La $\mathscr{C}$ være en kategori, og fikser en $A \in \mathscr{C}$. For enhver funktor $F : \mathscr{C} \to$* **Set**, *vil (mengde-) funksjonen*

$$\begin{aligned}\{\eta \mid \eta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -) \to F\} &\to F(A)\\ \eta &\to \eta_A(1_A)\end{aligned}$$

være en bijeksjon.

Remark 2.4 *Husk at* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -) : \mathscr{C} \to$ **Set** *er en funktor. I definisjonen over er $\eta_A : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A) \to F(A)$ funksjoner mellom mengder, og $\eta_A(1_A) \in F(A)$, så det over gir mening.*

Theorem 2.5 *En funktor F er en ekvivalens hvis og bare hvis F er full, trofast og essensielt surjektiv.*

Bevis: Går greit med hintene i notatet.

Theorem 2.6 *For kategorier og funktorer* $\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *er (F, G) et adjungert par hvis og bare hvis det eksisterer naturlige transformasjoner $\eta : 1_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ og $\epsilon : F \circ G \to 1_{\mathscr{D}}$, slik at $\forall A \in \mathscr{C}, X \in \mathscr{D}$ kommuterer:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "1_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\eta_{G(X)}"] \arrow[dr, "1_{G(X)}"'] & GFG(X) \arrow[d, "G(\epsilon_X)"] \\ & G(X) \end{tikzcd}$$

Bevis: Virker ganske vanskelig, har ikke fått det til enda.

Theorem 2.7 *For kategorier og funktorer* $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ *, der* (F,G) *er et adjungert par, vil* F *bevare kogrenser, mens* G *bevarer grenser.*

Bevis: Enklest å gå via Hom-funktoren, men kan også vises direkte.

Lemma 2.8 *La* $f : A \to B$ *være en morfi i en additiv kategori* $\mathscr{A}$*.*

(i) f *mono* $\Leftrightarrow \ker f = O$*,*

(ii) f *epi* $\Leftrightarrow \operatorname{Coker} f = O$*,*

(iii) Gitt at $\ker f$ *eksisterer, så vil* $i : \ker f \to A$ *i def. være mono,*

(iv) Gitt at $\operatorname{Coker} f$ *eksisterer, så vil* $p : A \to \operatorname{Coker} f$ *i def. være epi.*

Lemma 2.9 (Generalisering av f.th. of grp.hom. til abelske kategorier) *La* $f : A \to B$ *være en morfi i en additiv kategori, og anta videre at* $\ker f$ *og* $\operatorname{Coker} f$ *eksisterer. Anta videre at* $\operatorname{Coker} i$ *og* $\ker p$ *eksisterer. Da eksisterer det en unik* $\bar{f}$*, slik at* $f = i_p \circ \bar{f} \circ p_i$*, altså slik at følgende diagram kommuterer:*

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & B \arrow[r, "p"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coker} i \arrow[r, dashed, "\exists! \bar{f}"] & \ker p \arrow[u, "i_p"'] &
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.10 *Anta at* $\mathscr{A}$ *er en abelsk kategori, og at vi er gitt det kommuterende diagrammet:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "v"] \\
C \arrow[r, "u"] & D
\end{tikzcd}$$

Da kan vi si følgende:

(i) Diagrammet er en pushout $\Leftrightarrow A \xrightarrow{\binom{f}{g}} B \oplus C \xrightarrow{(u\ v)} D \to O$ *eksakt.*

(ii) (Dual) Diagrammet er en pullback $\Leftrightarrow O \to A \xrightarrow{\binom{f}{g}} B \oplus C \xrightarrow{(u\ v)} D$ *eksakt.*

(iii) Pushout og f *eller* g *mono* $\Rightarrow$ *pullback.*

(iv) (Dual) Pullback og f *eller* g *epi* $\Rightarrow$ *pushout.*

(v) *Se på diagrammet:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[r, two heads, "p_f"] \arrow[d, "v"] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists! h_v"] \\ C \arrow[r, "u"] & D \arrow[r, two heads, "p_u"] & \operatorname{Coker} u \end{tikzcd}$$

Vi ser at $(p_u \circ v) \circ f = p_u \circ u \circ g = 0$, *så det eksisterer en unik* $h_v : \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} u$ *som bevarer kommutativiteten. Dersom diagrammet er en pushout, så er* h_v *en isomorfi. Naturligvis har vi en tilsvarende* $h_u : \operatorname{Coker} g \to \operatorname{Coker} v$.

(vi) *(Dual) Se på diagrammet:*

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, tail, "i_f"] \arrow[d, dashed, "\exists! h_g"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "v"] \\ \ker u \arrow[r, tail, "i_u"] & C \arrow[r, "u"] & D \end{tikzcd}$$

Vi ser at $u \circ (g \circ i_f) = v \circ f \circ i_f$, *så det eksisterer en unik* $h_g : \ker f \to \ker u$. *Dersom diagrammet er en pullback, er* h_g *en isomorfi. Naturligvis har vi en tilsvarende* $h_f : \ker g \to \ker v$.

(vii) *Pushout og* $f(g)$ *mono/epi* $\Rightarrow$ $u(v)$ *mono/epi.*

(viii) *(Dual) Pullback og* $u(v)$ *mono/epi* $\Rightarrow$ $f(g)$ *mono/epi.*

Lemma 2.11 (Snake lemma) *Anta at følgende diagram kommuterer og har eksakte rader:*

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & O \\ O \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "b_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] & B_3 & \end{tikzcd}$$

Da eksisterer det en morfi $\delta : \ker f_3 \to \operatorname{Coker} f_1$, *slik at følgende sekvens er eksakt:*

$$\ker f_1 \xrightarrow{\alpha_{a_1}} \ker f_2 \xrightarrow{\alpha_{a_2}} \ker f_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f_1 \xrightarrow{\beta_{b_1}} \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{\beta_{b_2}} \operatorname{Coker} f_3$$

Videre, dersom a_1 *er mono, er* α_{a_1} *mono, og dersom* b_2 *er epi er* β_{b_2} *epi.*

Lemma 2.12 (Five lemma) *Anta at diagrammet kommuterer og har eksakte rader:*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_4"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "a_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r, "b_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] & B_3 \arrow[r, "b_3"] & B_4 \arrow[r, "b_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

Da vil følgende gjelde:

(i) f_2, f_4 *epi og* f_5 *mono* $\Rightarrow f_3$ *epi.*

(ii) *(Dual)* f_2, f_4 *mono og* f_1 *epi* $\Rightarrow f_3$ *mono.*

Lemma 2.13 *La* $\mathscr{A}$ *være en abelsk kategori, og la* $X \in \mathscr{A}$. *Da er funktorene* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)$ *og* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, X)$ *venstre eksakte.*

Lemma 2.14 *La* $\mathscr{A}$ *være en abelsk kategori, og la* $X \in \mathscr{A}$.

(i) X *projektiv* $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)$ *eksakt.*

(ii) X *injektiv* $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, X)$ *eksakt.*

Lemma 2.15 *La* R *være en ring og* M *en (venstre)* R*-modul. Da eksisterer det en en fri* R*-modul* F *og en surjektiv* R*-homomorfi* $\phi : F \to M$.

Theorem 2.16 *La* R *være en ring, og* $P \in \mathbf{Mod}\boldsymbol{R}$. *TFAE:*

(i) P *er projektiv.*

(ii) $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ *er eksakt.*

(iii) *Det eksisterer* $Q \in \mathbf{Mod}\boldsymbol{R}$, *slik at* $P \oplus Q$ *er en fri* R*-modul (altså at* P *er en direkte summand av en fri modul).*

Merk nå at alle frie R*-moduler er projektive.*

Theorem 2.17 *La* R, S *være ringer og la* ${}_SM_R$, ${}_RN$, ${}_SL$ *være moduler. Da eksisterer det en isomorfi av abelske grupper slik at*

$$\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, L) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_S(M, L)),$$

naturlig i M, N *og* L.

Corollary 2.18 *La* R *og* S *være ringer, og la* ${}_SM_R$ *være en bimodul. Da er funktoren*

$$M \otimes_R - : \mathbf{Mod}\boldsymbol{R} \to \mathbf{Mod}\boldsymbol{S}$$

høyre eksakt.

Gitt et kompleks $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{C}$ med $f \circ g = 0$, får vi at kommutativt diagram med eksakte rader:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} f \arrow[r, "i_{p_f}"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "1_B"] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\omega"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker g \arrow[r, "i_g"] & B \arrow[r, "\bar{g} \circ p_{i_g}"] & \operatorname{Im} g \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dette følger fra å tegne opp diagrammene i Lemma 2.9 for f og g. Vi kan konstruere ω pga. kokjerne egenskapen til $\operatorname{Coker} f$ (Merk at $\bar{g} \circ p_{i_g} \circ f = 0$). Neste lemma følger da fra Slangelemma.

Lemma 2.19 *Se situasjonen beskrevet over.* $\ker \omega \simeq \operatorname{Coker} h$.

Theorem 2.20 *Anta at vi har en eksakte følge i* $\boldsymbol{C}(\mathscr{A})$*:*

$$0 \to A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \to 0$$

Da får og en eksakt følge i $\mathscr{A}$ ved homologiene:

$$\cdots \to H_{n+1}(C_\bullet) \to H_n(A_\bullet) \to H_n(B_\bullet) \to H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet) \to \dots$$

Corollary 2.21 *La $0 \to A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \to 0$ være en eksakt følge i $\boldsymbol{C}(\mathscr{A})$. Dersom to av disse følgende er eksakte, så er den tredje det også.*

Theorem 2.22 *La $f : A_\bullet \to B_\bullet$ være en morfi av komplekser. Da vil f være en kvasi-isomorfi hvis og bare hvis $C(f)$ er eksakt.*

Lemma 2.23 *La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori, og la $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ være nullhomotop. Da er $H_n(f_\bullet) = 0$ for alle n. Spesielt er da $H_n : \boldsymbol{K}(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ en funktor for alle n.*

Lemma 2.24 *Anta at $\mathscr{A}$ har nok projektive.*

(i) *$\forall A \in \mathscr{A}$ finnes en projektiv oppløsning av A.*

(ii) *La $f : A \to B$ være en morfi og la $P_\bullet, Q_\bullet$ være projektive oppløsninger av hhv. A, B. Da kan vi løfte f til en kjedeavbildning $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$, dvs at $\exists f_n : P_n \to Q_n$ for alle n slik at følgende diagram kommuterer:*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1^P"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"] & Q_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(iii) Denne løftingen er unik opp til homotopi: Hvis $g_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ også løfter f, så vil $f_\bullet \sim g_\bullet$

Vi kan naturligvis også ta dualen av dette lemma.

Lemma 2.25 (Horseshoe lemma) *La $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ være en eksakt følge i en abelsk kategori. Anta videre at $P_\bullet, Q_\bullet$ er projektive oppløsninger av hhv. A, C. Da finnes det en projektiv oppløsning $T_\bullet$ av B, med $T_n = P_n \oplus Q_n$ for alle n, slik at følgende diagram kommuterer:*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "d_1^P"] & P_1 \oplus Q_1 \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "d_1^Q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\pi^P"] & P_0 \oplus Q_0 \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi^Q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Fra nå av: Husk at man kan få i alt fire forskjellige deriverte funktorer. Disse kaller vi tilfelle:

- 1a: F høyre eksakt, kovariant, og $\mathscr{A}$ har nok projektive. Da ser vi på L_nF.
- 1b: F venstre eksakt, kovariant, og $\mathscr{A}$ har nok injektive. R^nF.
- 2a: G venstre eksakt, kontravariant, og $\mathscr{A}$ har nok proj. Da ser vi på R^nG.
- 2b: G høyre eksakt, kontravariant, og $\mathscr{A}$ har nok injektive. Da ser vi på L_nG.

F.eks. har vi at Ext funktoren er på formen 1b, ext er på formen 2a, mens både Tor og tor er på formen 1a.

Theorem 2.26 *Relatert til de fire forskjellige deriverte funktorene har vi følgende:*

(i) Deriverte funktorer er uavhengige av den projektive/injektive oppløsningen som velges.

(ii) *For 1a og 2b:* $L_0 F \simeq F$, *og* $L_n F = 0$ *for* $n < 0$ *(samme for* G*)*
For 1b og 2a: $R^0 F \simeq F$ *og* $R^n F = 0$ *for* $n < 0$ *(samme for* G*).*

(iii) *Hvis* F *er eksakt, så er* $L_n F = R^n F = 0$ *for* $n \neq 0$*. Samme for* G*.*

(iv) *For 1a og 2a:* A *projektiv* $\Rightarrow \mathrm{L}_n F(A) = 0$ *for* $n > 0$ *i 1a (samme for* G*)*
For 1b og 2b: A *injektiv* $\Rightarrow \mathrm{R}^n G(A) = 0$ *for* $n > 0$ *i 1b (samme for* G*)*

Theorem 2.27 *La* $\mathscr{A}$ *og* $\mathscr{B}$ *være abelske kategorier, og la*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

være en eksakt følge i $\mathscr{A}$*. For de fire forskjellige deriverte funktorene får vi da følgende eksakte følger i* $\mathscr{B}$*:*

$$1a: \quad \ldots \longrightarrow \mathrm{L}_2 F(C) \to \mathrm{L}_1 F(A) \to \mathrm{L}_1 F(B) \to \mathrm{L}_1 F(C) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \twoheadrightarrow F(C)$$

$$1b: \quad F(A) \rightarrowtail F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow R^1 F(A) \to R^1 F(B) \to R^1 F(C) \to R^2 F(A) \longrightarrow \ldots$$

$$2a: \quad G(C) \rightarrowtail G(B) \longrightarrow G(A) \longrightarrow R^1 G(C) \to R^1 F(B) \to R^1 F(A) \to R^2 F(C) \longrightarrow \ldots$$

$$2b: \quad \ldots \longrightarrow \mathrm{L}_2 G(A) \to \mathrm{L}_1 G(C) \to \mathrm{L}_1 G(B) \to \mathrm{L}_1 G(A) \longrightarrow G(C) \longrightarrow G(B) \twoheadrightarrow G(A)$$

Corollary 2.28 *La* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *være abelske kategorier, og la* F, G *hhv. kovariant og kontravariant additive funktorer.*

(i) *La* $0 \to K \to P \to A \to 0$ *være en eksakt følge i* $\mathscr{A}$*, med* P *projektiv. Da er:*

$$\mathrm{L}_n F(K) \simeq \mathrm{L}_{n+1} F(A) \text{ for } n \geqslant 1 \text{ i 1a}$$
$$\mathrm{R}^n G(K) \simeq \mathrm{R}^{n+1} G(A) \text{ for } n \geqslant 1 \text{ i 2a}$$

(ii) *La* $0 \to A \to I \to L \to 0$ *være en eksakt følge i* $\mathscr{A}$*, med* I *injektiv. Da er:*

$$\mathrm{R}^n F(L) \simeq \mathrm{R}^{n+1} F(A) \text{ for } n \geqslant 1 \text{ i 1b}$$
$$\mathrm{L}_n G(L) \simeq \mathrm{L}_{n+1} G(A) \text{ for } n \geqslant 1 \text{ i 2b}$$

Corollary 2.29 *La* $\mathscr{A}$ *være en abelsk kategori.*

(i) *Anta at* $\mathscr{A}$ *har nok injektive og la* $A \in \mathscr{A}$*. Videre, la* $0 \to B \to I \to L \to 0$ *være en eksakt følge i* $\mathscr{A}$*, med* I *injektiv. Da er*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, L) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, B), \forall n \geqslant 1.$$

(ii) Samme gjelder for dualen (projektive, og lille ext).

Corollary 2.30 *La R være en ring, og la*

$$0 \to K_M \to P_M \to M \to 0$$
$$0 \to K_N \to P_N \to N \to 0$$

være eksakte følger av hhv. høyre og venstre R-moduler, hvor P_N, P_M er projektive. Da er

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, K_N) \simeq \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N), \forall n \geqslant 1$$
$$\mathrm{tor}_n^R(K_M, N) \simeq \mathrm{tor}^R(M, N), \forall n \geqslant 1$$

Følgende teorem har et lang bevis, men er viktig:

Theorem 2.31 *La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori med nok injektive og projektive. Da vil for alle $A, B \in \mathscr{A}$:*

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^n(A, B) \simeq \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}^n(A, B)$$
$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \simeq \mathrm{tor}_n^R(A, B)$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$

Lemma 2.32 *La $0 \to A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{p} C \to 0$. Da vil følgende være ekvivalent.*

(i) j er splitt mono.

(ii) p er splitt epi.

(iii) En isomorfi $h : B \to A \oplus C$, med $h \circ j = i_A$, der i_A er den "vanlige" monomorfien fra A inn i $A \oplus C$, og $r \circ h^{-1} = \pi_C$, hvor π_C er den "vanlige" epimorfien fra $A \oplus C$ på C.

I følgende teorem er egentlig det eneste vanskelige steget å vise (iv) $\Rightarrow$ (iii). Det bruker lemma over.

Theorem 2.33 *La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori med nok projektive, og la $A \in \mathscr{A}$. TFAE:*

(i) $\mathrm{pd}_{\mathscr{A}}(A) \leqslant n$

(ii) $\exists$ en projektiv oppløsning $P_\bullet$ av A, hvor $\Omega_{P_\bullet}^n(A)$ er projektiv.

(iii) $\forall$ *projektive oppløsninger* $P_\bullet$ *av* A *er* $\Omega^n_{P_\bullet}(A)$ *er projektiv.*

(iv) $\mathrm{ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, B) = 0, \forall B \in \mathscr{A}$

(v) $\mathrm{ext}^{i}_{\mathscr{A}}(A, B) = 0, \forall B \in \mathscr{A}$ *og* $i \geqslant n + 1$.

Corollary 2.34 *Anta at* $\mathscr{A}$ *har nok projektive.*

(i) $\forall A \in \mathscr{A}$*, med* $A \neq 0$ *er* $\mathrm{pd} = \sup\{n \geqslant 0 \mid \exists B \in \mathscr{A}$ *slik at* $\mathrm{ext}^n_{\mathscr{A}}(A, B) \neq 0\}$.

(ii) $\mathrm{gpd}(\mathscr{A}) = \sup\{n \geqslant 0 \mid \exists A, B \in \mathscr{A}$ *slik at* $\mathrm{ext}^n_{\mathscr{A}}(A, B) \neq 0\}$.

Merk at det naturligvis også finnes (duale) injektive versjoner av Teorem 2.33 og Korollar 2.34.

Corollary 2.35 *Anta* $\mathscr{A}$ *abelsk kategori med nok projektive og injektive. Da vil* $\mathrm{gpd}(\mathscr{A}) = \mathrm{gid}(\mathscr{A})$.

En kategori som tilfredstiller følgende teorem kalles en ***semisimpel*** kategori.

Theorem 2.36 *La* $\mathscr{A}$ *være en abelsk kategori. TFAE:*

(i) Alle $A \in \mathscr{A}$ *er projektive.*

(ii) Alle $A \in \mathscr{A}$ *er injektive.*

(iii) Alle epimorfier er split.

(iv) Alle monomorfier er split.

Theorem 2.37 *Anta at* (T, Σ, Δ) *er en pretriangulert kategori, dvs at den tilfredstiller (TR1), (TR2), (TR3). Da tilfredstiller den også (TR4) hvis og bare hvis det finnes i (TR3) en slik* γ *hvor i tillegg kjeglen til* (α, β, γ) *er et triangel i* Δ.

Beviset er ikke med i pensum. Men kan evt bruke "aksiomet" over (TR4'), istedenfor oktahedronaksiomet.

Lemma 2.38 *La* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ *være et distingvert triangel. Da er* $g \circ f, h \circ g, \Sigma f \circ h$ *alle lik* 0 *(dvs. ethvert triangel er også et kompleks).*

Bevis: Enkelt, bruk det trivielle triangelet.

Theorem 2.39 *La* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ *være et distingvert triangel og la* $D \in T$. *Da er de to følgene*

$$\ldots \to H_T(D, \Sigma^{-1}C) \xrightarrow{(\Sigma^{-1}h)_*} H_T(D, A) \xrightarrow{(f)_*} H_T(D, B) \xrightarrow{(g)_*} H_T(D, C) \xrightarrow{(h)_*} H_T(D, \Sigma A) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_T(\Sigma A, D) \xrightarrow{(h)^*} H_T(C, D) \xrightarrow{(g)^*} H_T(B, D) \xrightarrow{(f)^*} H_T(A, D) \xrightarrow{(\Sigma^{-1}h)^*} H_T(\Sigma^{-1}C, D) \to \ldots$$

eksakte i kategorien **Ab** *(pga. plassmangel er her* $\mathrm{Hom}_T(X, Y)$ *forkortet til* $H_T(X, Y)$*).*

Bevis: Ikke så ille det her heller, bruk igjen det trivielle triangelet og (TR3) sammen med det forrige lemma.

Lemma 2.40 *La* $\mathscr{C}$ *være en kategori og* $f : X \to Y$ *en morfi. Da er* f *en isomorfi hvis og bare hvis* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, Y)$ *er bijektiv for alle* $Z \in \mathscr{C}$.

Theorem 2.41 *La* (α, β, γ) *være en morfi av distingverte triangler. Hvis to av morfiene i* $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ *er isomorfier, så er den tredje også det.*

Bevis: Lemma over + den eksakte rekka man får ved å ta Hom-funktoren + fem lemma.

Theorem 2.42 *La* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ *og* $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} \Sigma A'$ *være to triangler. Da er følgende ekvivalent:*

1. *Begge er distingverte.*
2. *Den direkte summen*

$$A \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} B \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} C \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus \Sigma A'$$

   Er distingvert.

Bevis: Ikke pensum.