ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

ENTREGADO
20 JUN 2018

Práctica

Año	Número
2 0 1 8	3 2 4 9

Código de alumno

Maceda Virhuez Leonardo Jesus
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Práctica N°: PC4

Horario de práctica: 119

Fecha: 14/06/18

Nombre del profesor: J. Flores

Nota
20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2018-1

Horario: 113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,125,126 y B125

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores del curso.

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- Tiempo de duración: 1 hora y 50 minutos.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros ni calculadoras.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía, y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{x+3}, x < -1, x \neq -3 \\ x^3 - 2x^2 - 3x, -1 \leq x < 4 \end{cases}$$

a) Halle los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, si existen. 1 punto

b) Halle las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de f, si existen. 1 punto

c) Esboce la gráfica de la función f e indique su rango. 2 puntos

2. Sea f la función que cumple la ecuación

$$3e^{-f(x)} + 1 = x$$

a) Determine la regla de correspondencia de f, su dominio y su rango. 1.5 puntos

b) Demuestre que f es inyectiva usando la definición. 1 punto

c) Halle la función f^{-1}. 1 punto

d) Grafique f y f^{-1} en un mismo plano, indicando para cada una de ellas las ecuaciones de sus asíntotas. 1.5 puntos

3. Dada la función f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log(x-1); x < k \\ e^{x-12}; x \geq 12 \end{cases}$$

a) Determine el mayor valor que puede tomar k, de modo que la función f sea inyectiva. 2 puntos

b) Determine la inversa de la función f para el valor de k hallado en a). 2 puntos

4. Una compañía estima que los pedidos mensuales de computadoras está dado por la expresión $P(t) = 2000 - 1500e^{-t/4}$, donde t es el número de meses después de poner las computadoras en el mercado. A partir de la información dada responda las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el pedido de las computadoras al cabo de cuatro meses después de haberlas puesto en el mercado? 0.5 puntos

b) ¿Cuánto tiempo debe pasar para lograr un pedido de 1850 computadoras? 1.5 puntos

c) Bosqueje la gráfica de la función P y determine la ecuación de la asíntota. 1 punto

5. Determine y grafique una función real f, que cumple las condiciones siguientes: 4 puntos

i. f es parte de una función racional en el intervalo $]-\infty, -3[$, su gráfica pasa por el punto $(-4, 1)$ y tiene como asíntota vertical a la recta $x = -3$.

ii. f es parte de una función logarítmica de la forma $y = \log_a(x + b)$ en el intervalo $[-3, 0[$ y su gráfica pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(-1, 1)$.

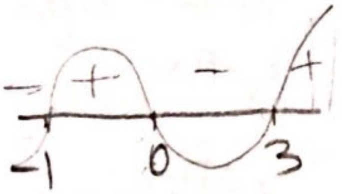
iii. f es una función impar en $\mathbb{R}$.

Coordinadora de práctica: Iris Flores

San Miguel, 14 de junio de 2018

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$1 \; -2 \; -3$

$-1 \; -2 \; +3$

(-1)

-1

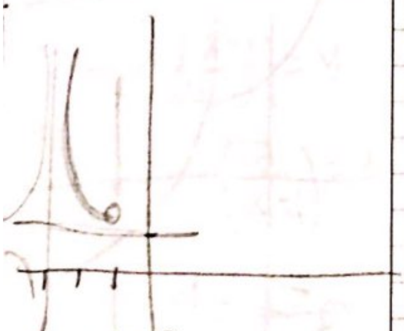
-2

3

$(x^2-3x)(x+1)$

$x^3+x^2-3x^2-3x$

x^3-2x^2-3x



$4(1)(5)$

$20.$

① a) Definimos los puntos de intersección en los tramos

$\boxed{f_1(x)} = \dfrac{x+4}{x+3}, x<-1, x\neq -3 \rightarrow x=0$ no está en el dominio

$\underline{y=0}$: $0=\dfrac{x+4}{x+3}$

$x+4=0 \rightarrow \underline{x=-4}$

$\boxed{f_2(x)} = x^3-2x^2-3x, -1\leq x<4 \rightarrow$ Factorizamos

	1	-2	-3	0
-1		-1	3	
	1	-3	0	

$\Rightarrow f_2(x)=(x^2-3x)(x+1)$

$f_2(x)=x(x-3)(x+1)$,

$-1\leq x<4$

~~Los puntos de corte~~ Los raíces de f_2 son $\underline{0, 3 \text{ y } -1}$

$\rightarrow$ Sea $x=0 \rightarrow 0(-3)(1) \rightarrow \underline{0}$

$\therefore$ Los puntos de intersección de la gráfica con los ejes son: $(-4,0)$; $(0,0)$; $(3,0)$; $(-1,0)$

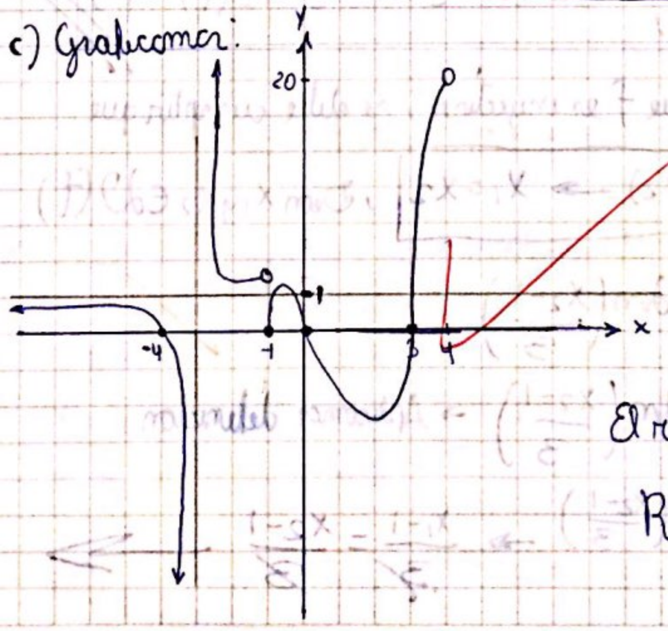
b) Las asíntotas para $f_1(x)=\dfrac{x+4}{x+3}$

$AV \Rightarrow x+3\neq \rightarrow x\neq -3 \Rightarrow AV: \underline{x=-3}$

$AH \Rightarrow \dfrac{1}{1}=1 \rightarrow y\neq 1 \rightarrow AH: \underline{y=1}$

Las asíntotas de la función son $\boxed{x=-3}$ y $\boxed{y=1}$

c) Graficamos:



El rango de la función

$\underline{R(f)=\mathbb{R}}$

2

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(2) a) $3e^{-f(x)}+1=x$

$3e^{-f(x)} = x-1$

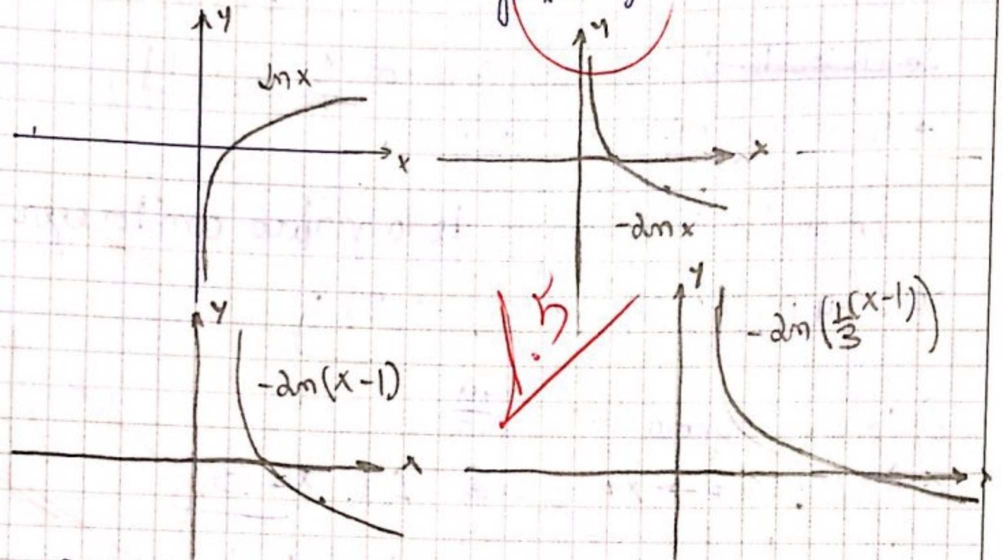
$e^{-f(x)} = \frac{x-1}{3}$ → Tomamos ln

$\ln e^{-f(x)} = \ln\left(\frac{x-1}{3}\right) \Rightarrow -f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3}\right)$

$\Rightarrow f(x) = -\ln\left(\frac{x-1}{3}\right)$ → Sabemos que $\frac{x-1}{3}>0$

→ $\boxed{x>1}$ → Dominio

Graficamos para hallar el rango (Esbozo)



1.5

∴ Por tanto, concluimos que el rango es $\mathbb{R}$, entonces:

$\boxed{f(x) = -\ln\left(\frac{x-1}{3}\right),\ D(f) =]1;+\infty[,\ R(f)=\mathbb{R}}$

b) Demostramos que f es inyectiva; se debe cumplir que:

$\boxed{f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2}$, Sean x_1 y $x_2 \in D(f)$;

$\rightarrow -\ln\left(\frac{x_1-1}{3}\right) = -\ln\left(\frac{x_2-1}{3}\right)$

$\ln_e\left(\frac{x_1-1}{3}\right) = \ln\left(\frac{x_2-1}{3}\right)$ → Aplicamos definición

$\left(\frac{x_1-1}{3}\right) = e^{\ln_e\left(\frac{x_2-1}{3}\right)} \rightarrow \frac{x_1-1}{\cancel{3}} = \frac{x_2-1}{\cancel{3}} \longrightarrow$

$3e^{-f(x)}+1=x$

$3e^{-f(x)}=x-1$

$\ln e^{-f(x)} = \ln\frac{x-1}{3}$

$-f(x) = \ln($

$\frac{x-1}{3}>0$

$\ln x$

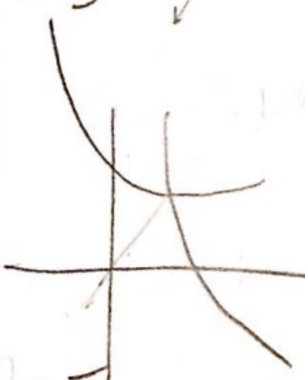
$-\ln x$

$-\ln(x-1)$

$-\ln\left(\frac{1}{3}(x-1)\right)$

$\ln_e\left(\frac{x_1-1}{3}\right) = \ln\left(\frac{x_2-1}{3}\right)$

$\frac{x_1-1}{3} = e^{\ln_e\left(\frac{x_2-1}{3}\right)}$



$3{,}7$

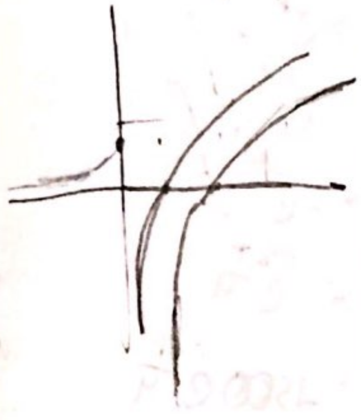
$\times 3$

$11{,}1$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\log(x) \to \log(x-1)$



$\ln\left(\frac{x-1}{3}\right)$

$-\ln\left(\frac{1}{3}(x-1)\right)$

$-\ln\left(\frac{x-1}{3}\right) = y$

$\ln_e\left(\frac{x-1}{3}\right) = -y$

$e^{-y} = \frac{x-1}{3}$

$\boxed{3e^{-y}+1 = x}$

$-\ln_e\left(\frac{x-1}{3}\right) = y$

$\ln e = \left(\frac{3}{x-1}\right) = y$

$e^{y} = \frac{3}{x-1}$

$x = \frac{3}{e^{y}} + 1$

$\boxed{3e^{-y}+1}$

$\to x_1 - 1 = x_2 - 1 \to \boxed{x_1 = x_2}$ Luego, queda demostrado que la función es INYECTIVA.

c) Hallemos la inversa de f: f^{-1}

$f(x) = -\ln\left(\frac{x-1}{3}\right) = y$

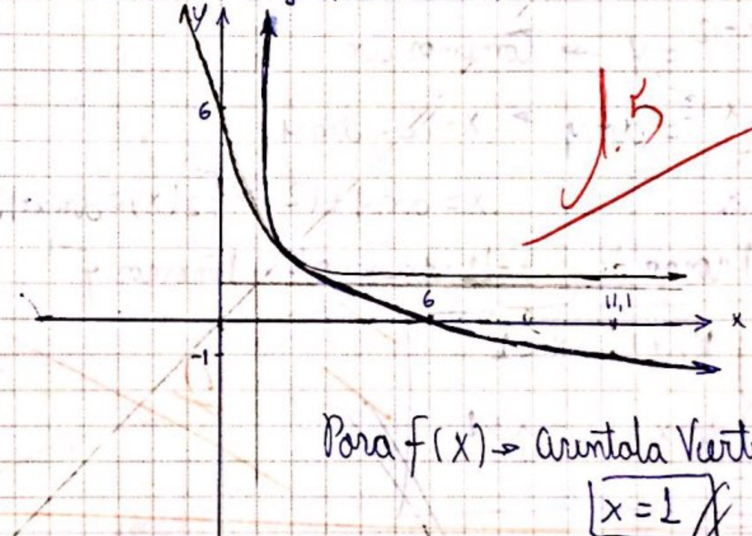
$\ln_e\left(\frac{x-1}{3}\right) = -y \to$ Aplicamos definición

$e^{-y} = \frac{x-1}{3} \to 3e^{-y} = x - 1 \to 3e^{-y} + 1 = x$

Usamos el rango de f hallado en a) como dominio de f^{-1}

Por tanto: $\boxed{f^{-1}(x) = 3e^{-x} + 1,\ x \in \mathbb{R}}$

d) Esbocemos la gráfica de f y f^{-1}



$f(x)$ = azul

$f^{-1}(x)$ = negro

1.5

Para $f(x) \to$ asíntota Vertical $\boxed{x = 1}$

Para $f^{-1}(x) \to$ asíntota Horizontal ~~[illegible]~~ $\boxed{y = 1}$

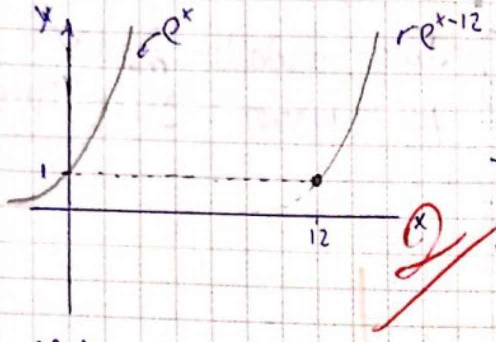
3) Los dos tramos de f son inyectivos por ~~naturaleza de~~ definición (exponencial y logarítmico), debemos hacer que el rango de ambos no se intersecte.

Por la gráfica de $f_2(x) = e^{x-12}, x \geq 12$, sabemos que su rango es $R(f_2) = [1, +\infty[$

$\Longrightarrow$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



Para que sea inyectiva, el rango de f_1 no puede intersectarse con el rango de f_2, Entonces, el rango de f_1 debe ser

$R(f_1) =]-\infty; 1[$

2

Hallemos el valor de x que ~~resulte~~ f_1 resulte 1

$\log_{10}(x-1) = 1 \rightarrow 10 = x-1 \rightarrow \boxed{x=11}$

Por lo tanto $x < K \rightarrow x < 11$ $\boxed{K = 11}$

b) Hallamos la función inversa por tramos:

- $f_1(x) = \log_{10}(x-1) = y \rightarrow$ usamos definición

$10^y = x-1 \rightarrow 10^y + 1 = x \rightarrow f_1^{-1}(x) = 10^x + 1$

- $f_2(x) = e^{x-12} = y \rightarrow$ Tomamos $\ln$

$\ln e^{x-12} = \ln y \rightarrow x - 12 = \ln y$

$x = \ln y + 12 \rightarrow f_2^{-1}(x) = \ln x + 12$

Utilicemos el rango de f hallado en a) y tenemos f^{-1}

$$\boxed{f^{-1}(x) = \begin{cases} 10^x + 1, & x < 1 \\ \ln x + 12, & x \geq 1 \end{cases}}$$

2

4) $P(t) = 2000 - 1500\, e^{-t/4}$

a) $t = 4 \rightarrow$ Reemplazamos:

$P(4) = 2000 - 1500\, e^{-\frac{4}{4}}$

$P(4) = 2000 - 1500\, e^{-1} = 100\left(20 - \frac{15}{e}\right)$

0.5

$\therefore$ Luego de 4 meses, resulta que se tienen

$100\left(20 - \frac{15}{e}\right)$ pedidos

$2000 - 1500\, e^{-\frac{t}{4}}$

$\rightarrow e^t$

$\rightarrow e^{-t}$

$\rightarrow -e^{-t}$

$= -e^{-\frac{t}{4}}$

$\rightarrow 1500\, e^{-\frac{t}{4}}$

$-1500\, e^{-\frac{t}{4}} + 2000$

$2000 - 1500 \cdot e^{-1}$

$100(20 - 15e^{-1})$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) $P(t_1)=1850 = 2000-1500\,e^{-\frac{t_1}{4}}$

$1850 - 2000 = -1500\,e^{-t_1/4}$

$1500\,e^{-\frac{t_1}{4}} = 150$ ¡¡Uhm???

$e^{-\frac{t_1}{4}} = 1$ → Tomemos $\ln$ 10

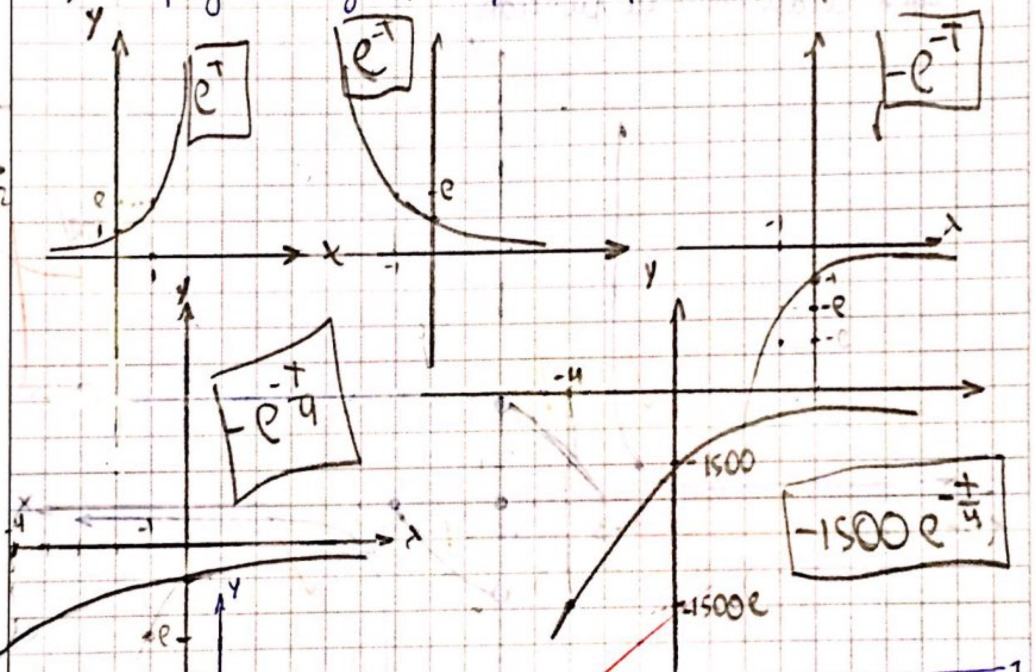
$\ln e^{-\frac{t_1}{4}} = \ln 10$

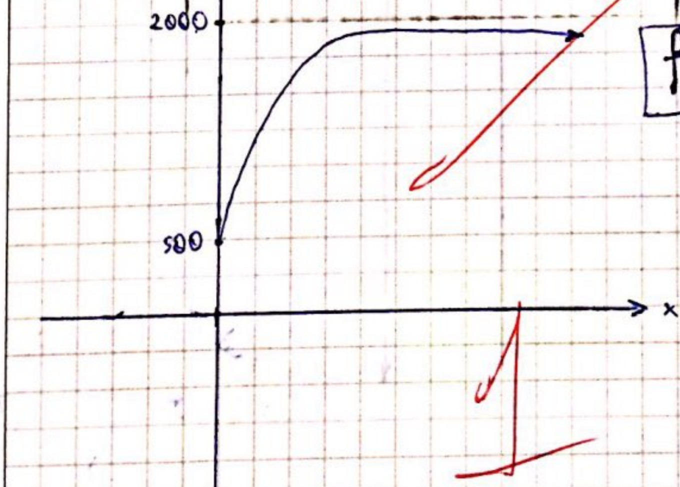
$\Rightarrow -\frac{t_1}{4} = \ln 10 \Rightarrow -t_1 = 4\ln 10 \rightarrow \boxed{t_1 = -4\ln 10}$

Para lograr es pedido, debe pasar un tiempo de

$-4\ln 1$ meses

c) Bosquejemos la gráfica por transformaciones





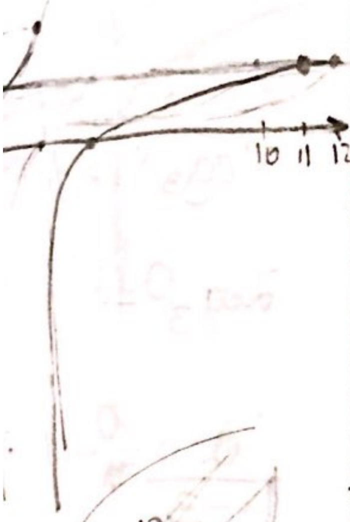
$\boxed{P(t)=200-1500e^{-\frac{t_1}{4}}}$

La gráfica sería así.

Su asíntota Horizontal es

$\boxed{Y=2000}$

1



$\ln e^{-\frac{t}{4}} = \ln 1$

$-\frac{t}{4} = \ln 1$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5) $f_1 = \frac{a}{x+3} \rightarrow \frac{a}{-4+3} = 1 \rightarrow a = -1$

$\boxed{f_1(x) = \frac{-1}{x+3}}$

f_2 $y = \log_a(x+b)$

$\rightarrow 0 = \log_a(-3+b) \rightarrow -3+b = 1$

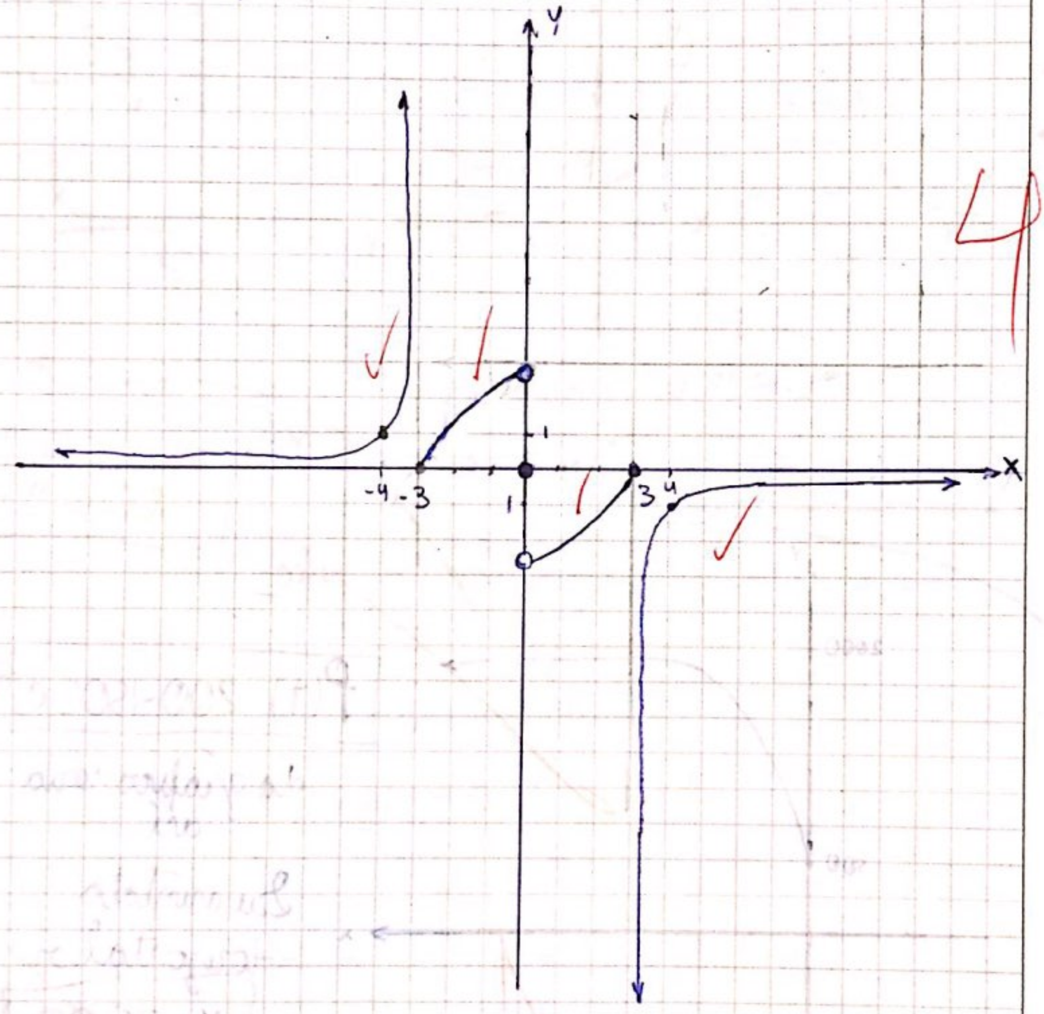
$\boxed{b=4}$

$\rightarrow 1 = \log_a(-1+4) \rightarrow 1 = \log_a(3)$

$\boxed{a=3}$

$\rightarrow \boxed{f_2(x) = \log_3(x+4)}$

• Graficamos la función



4

$\log_3 x = y$

$3^y = x$

$\log_3$

$\log_3 x_1 = y$

$\log_3 0 =$

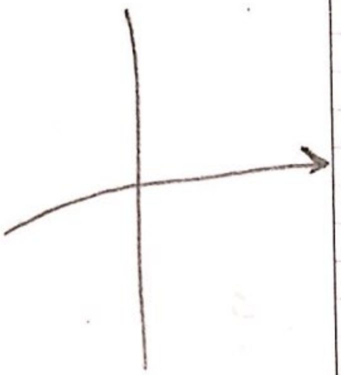
$\frac{a}{x-3}$

$\log_3 x = y$

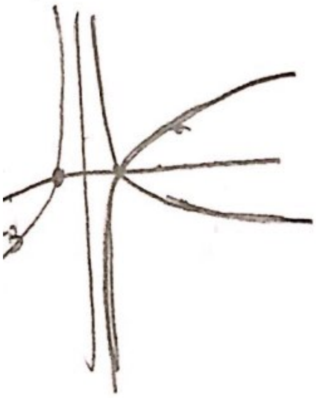
$3^y = x$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



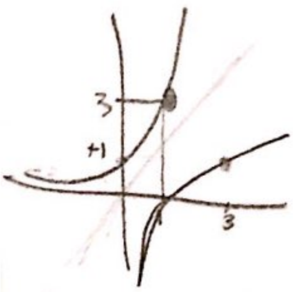
$-\log_3(x+4)$



$\frac{a}{1} = -1$

$a = -1$

$\boxed{\frac{-1}{x-3}}$



Determinamos la regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+3} & , x < -3 \\ \log_3(x+4) & , -3 \leq x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -\log_3(-x+4) & , 0 < x \leq 3 \\ \frac{-1}{x-3} & , x > 3 \end{cases}$$