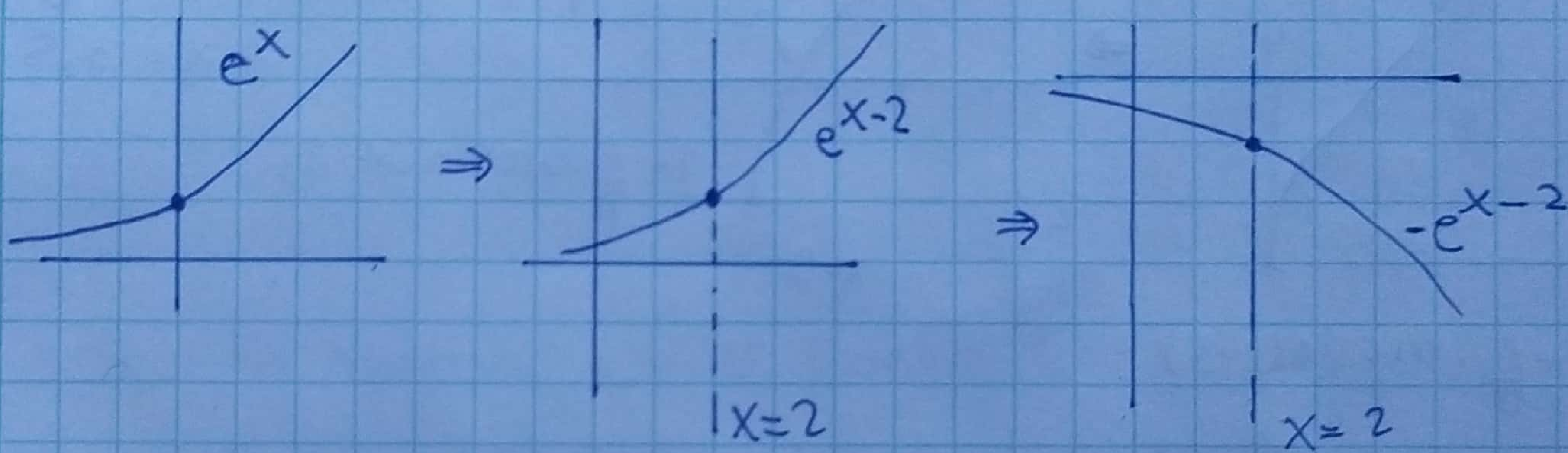
FUNDAMENTOS DE CÁLCULO PC4 / 2020-2

1. Sea $a \in \mathbb{R}$ tq $3 \leq a < 4$ y f definida por

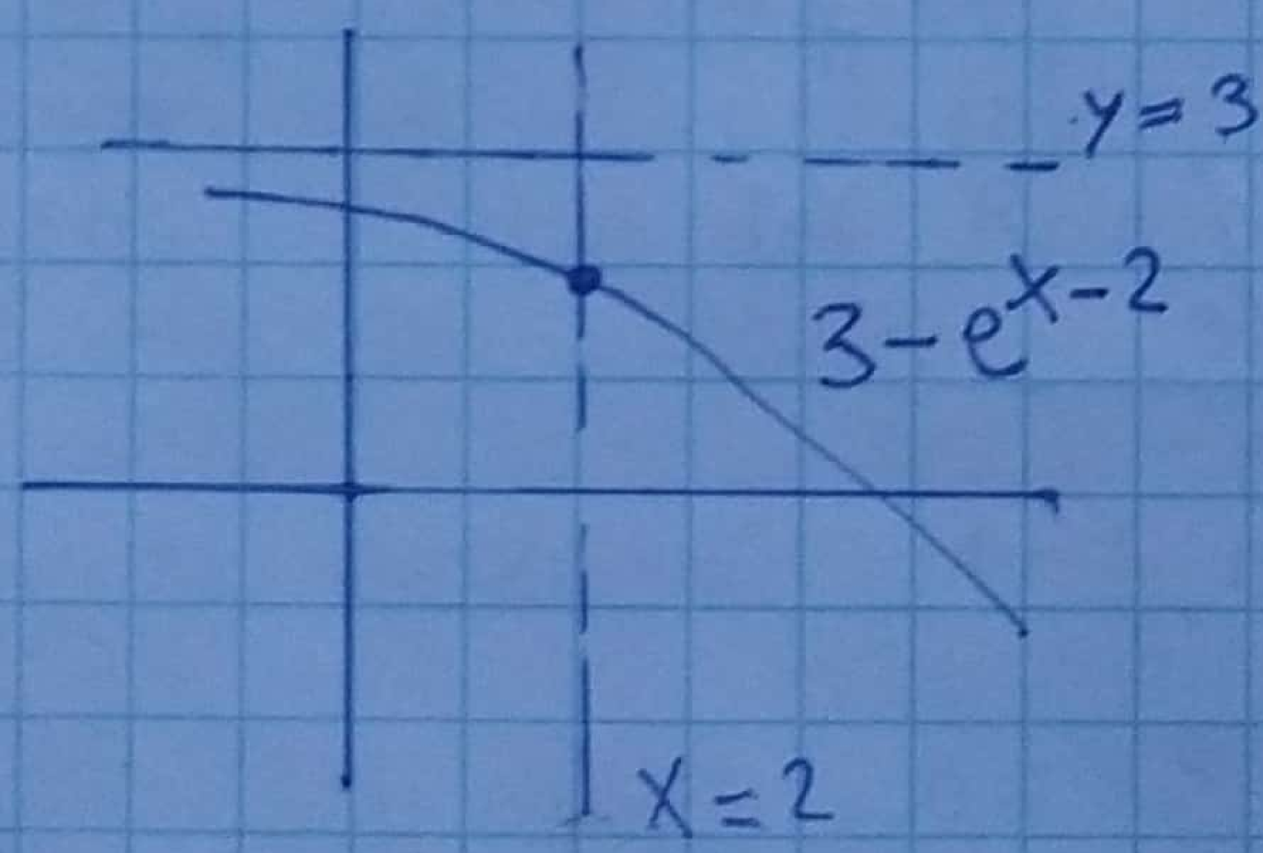
$$f(x) = \begin{cases} 3 - e^{x-2} &, x \leq 3 \\ \left| 1 - \frac{6}{\pi} \arcsin(x-3) \right| + 3 &, a < x \leq 4 \end{cases}$$

a) Para $a = 3$. Tengamos en cuenta que a únicamente está presente en el Dom f.

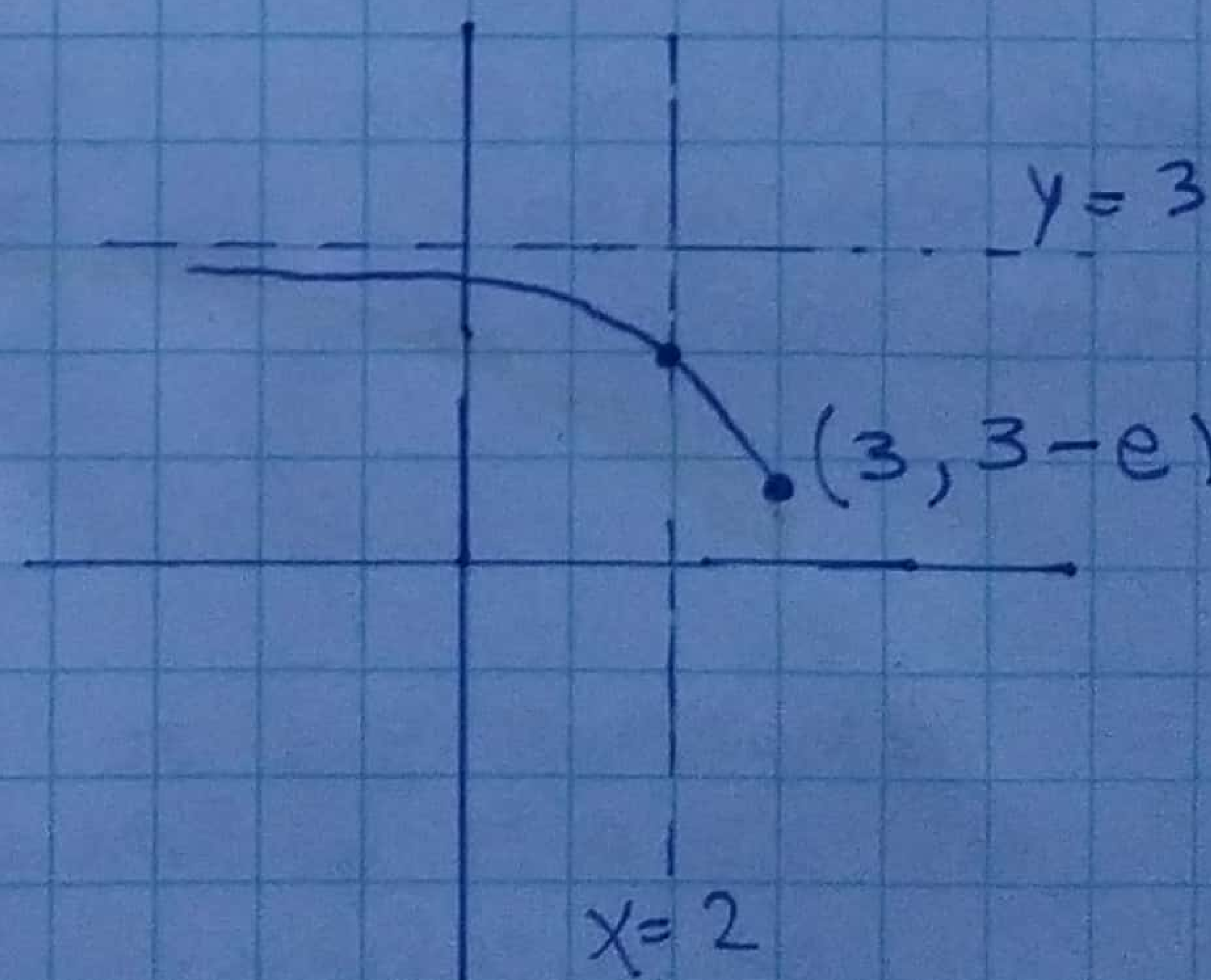
Esbocemos la primera rama:



finalmente:

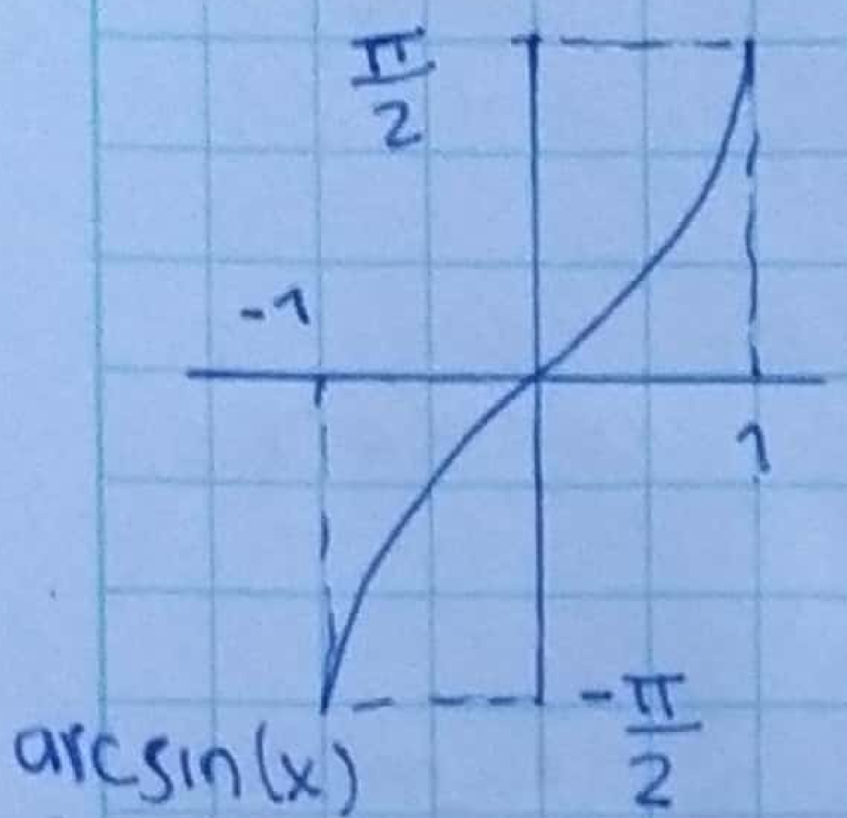


Acotando en el dominio:

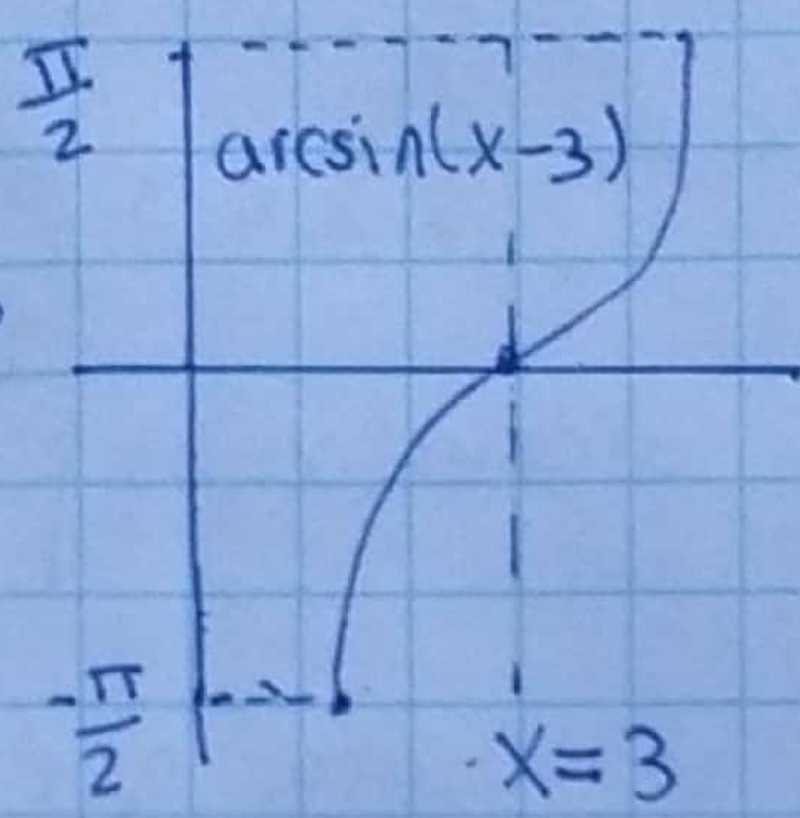


Notemos

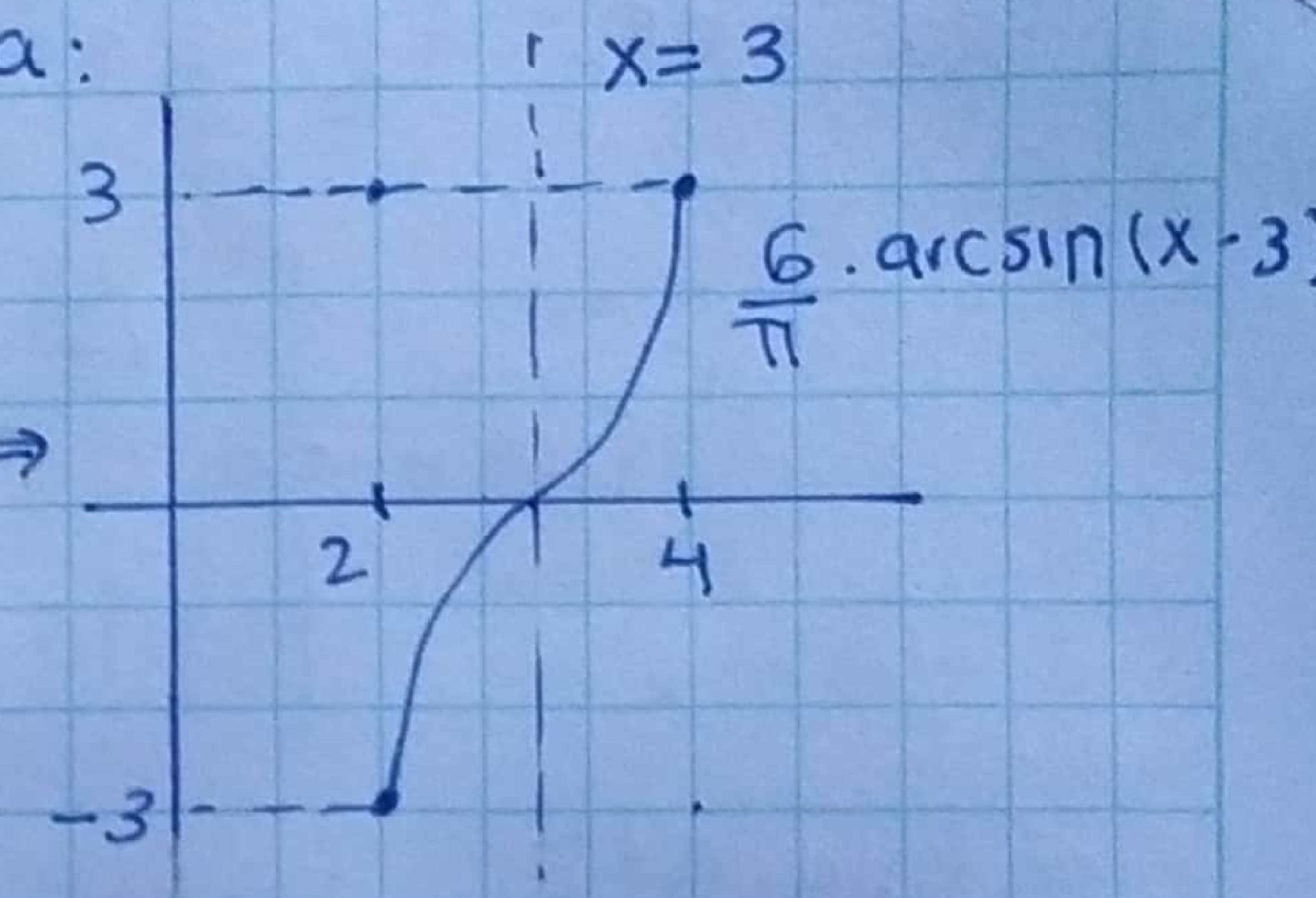
Esbocemos ahora la segunda rama:

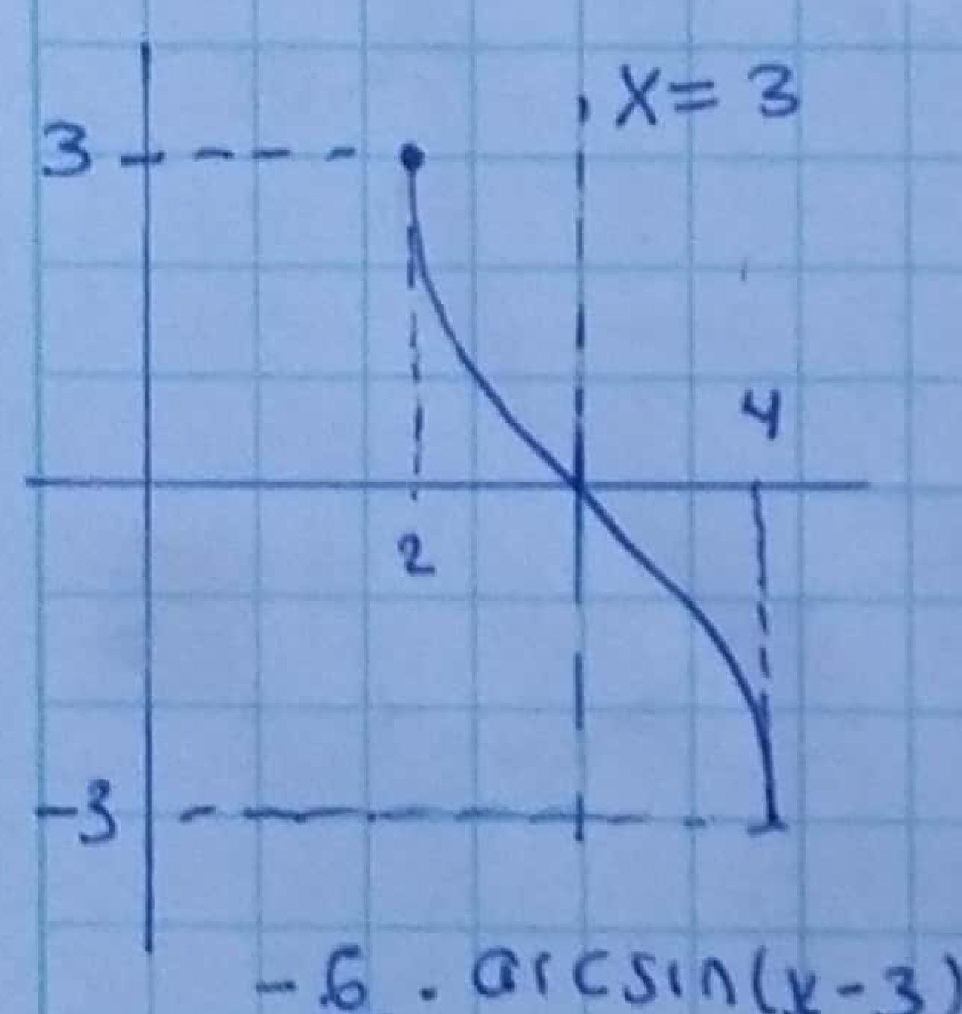


$\Rightarrow$

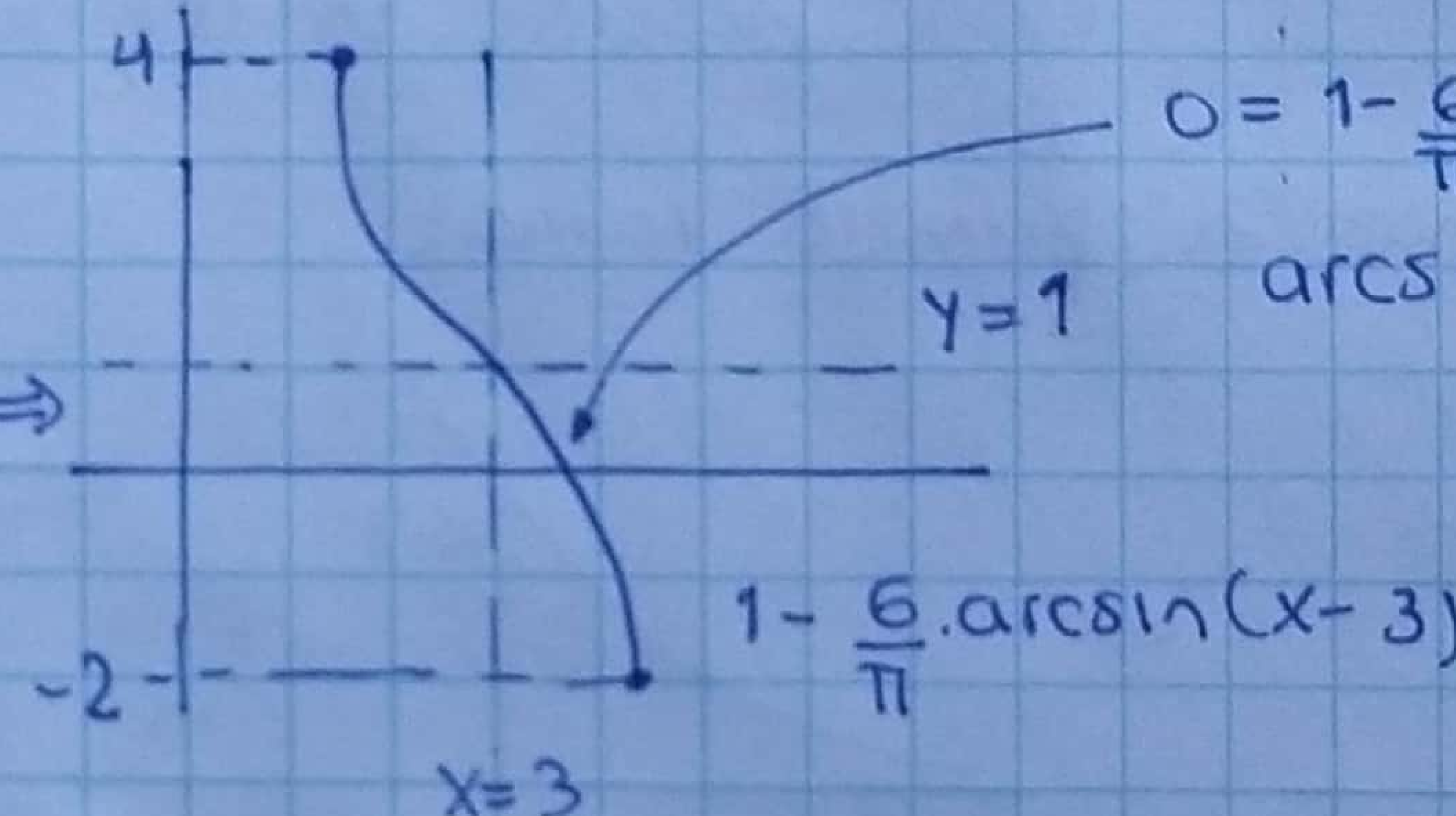


$\Rightarrow$





$\Rightarrow$

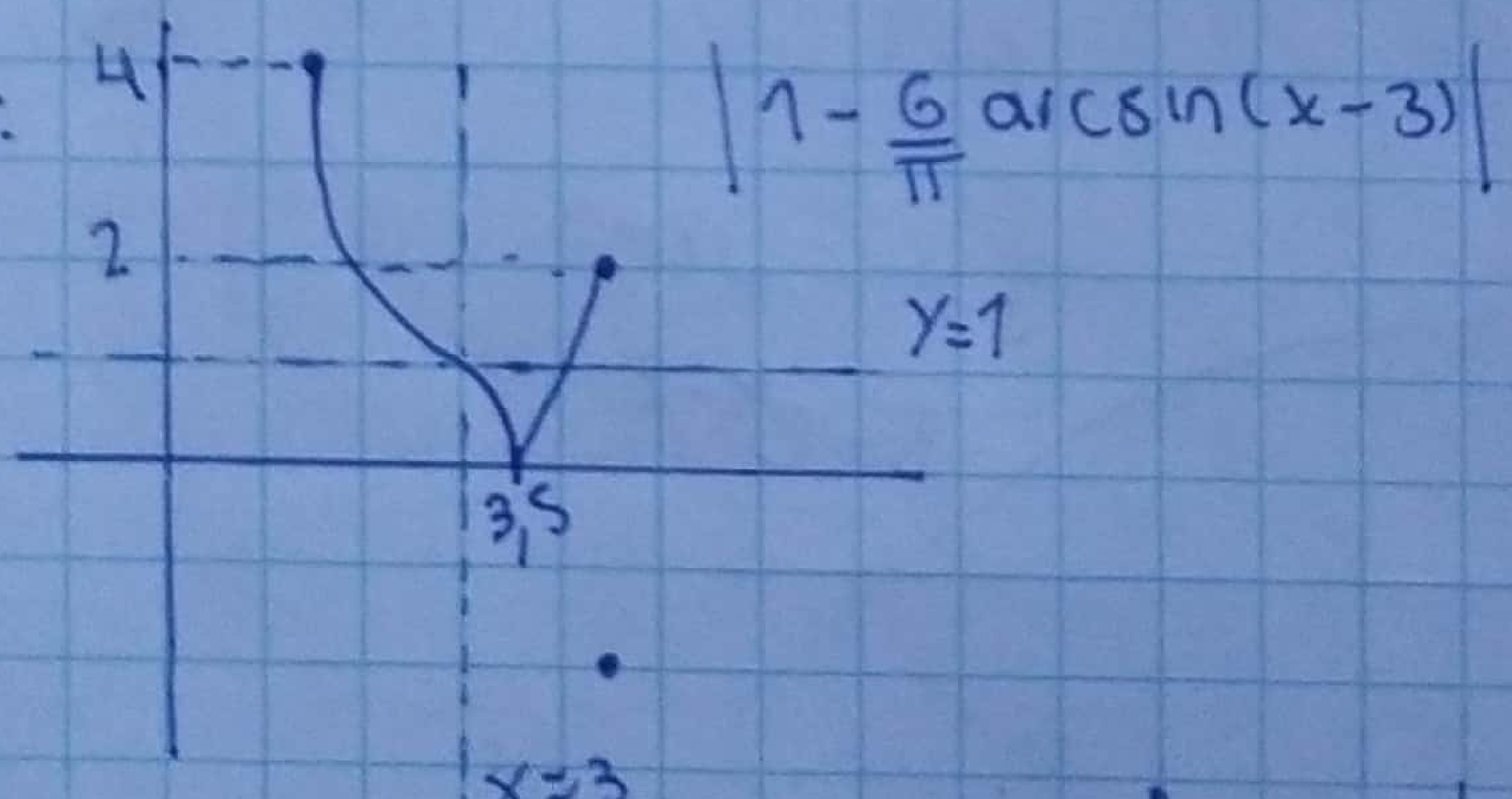


$$0 = 1 - \frac{6}{\pi}\cdot\arcsin(x-3)$$

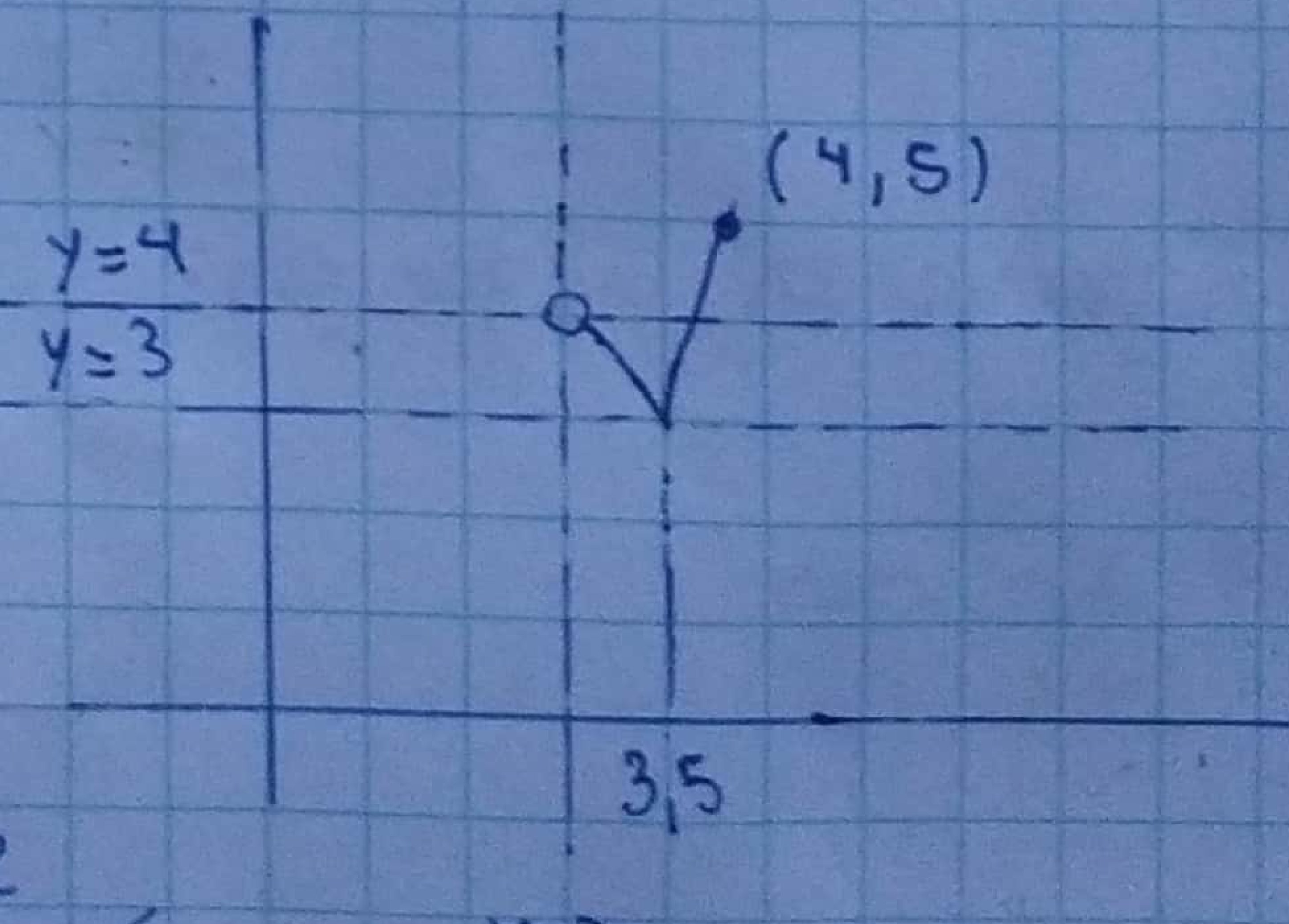
$$\arcsin(x-3) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 3{,}5$$

∝ Finalmente:

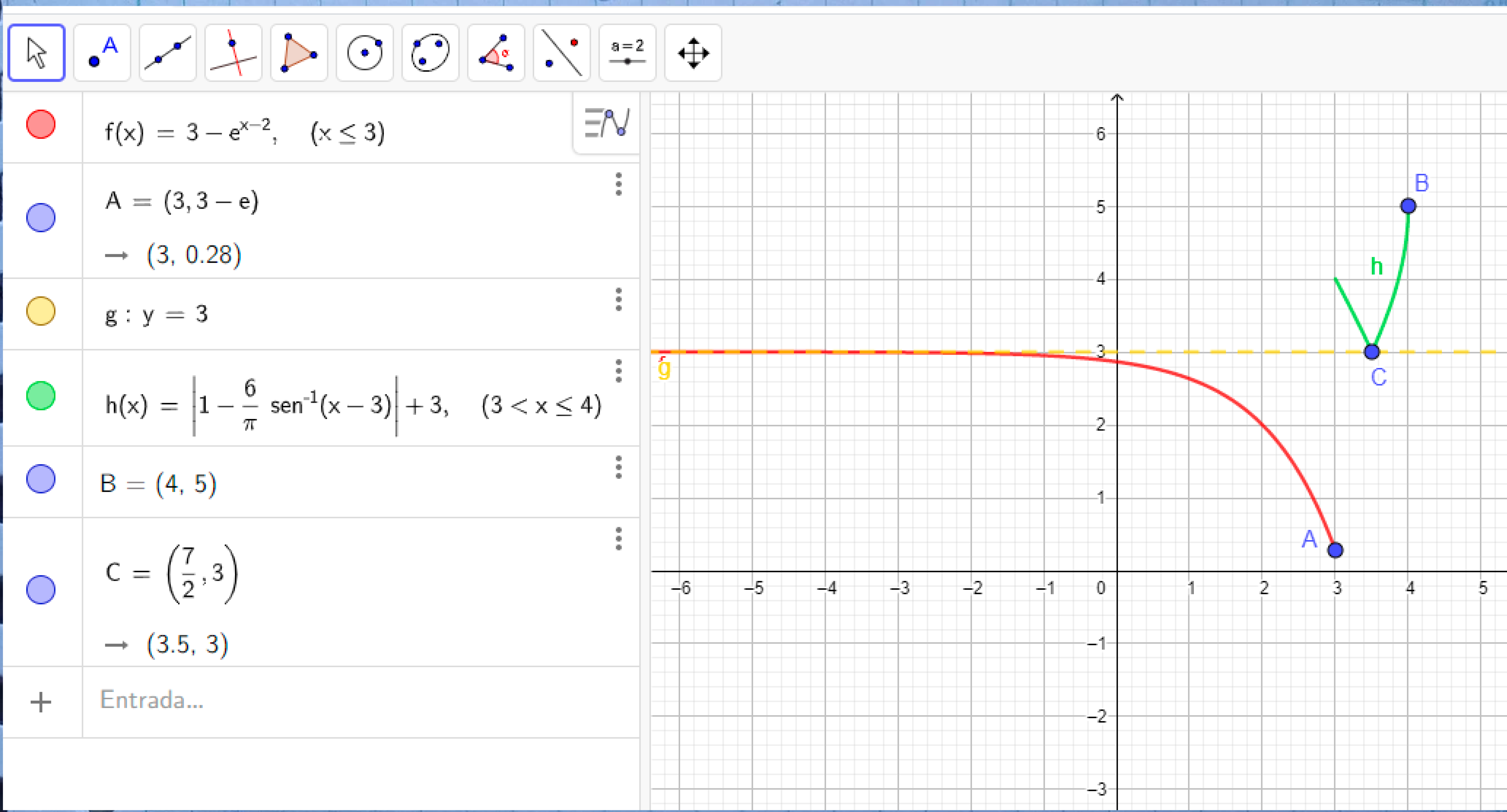


Acotando en el dom para
a = 3 y realizando
⇒ la última transformación



* Notemos que de
3,5 a 4 la función
es inyectiva.

En conclusión la gráfica de f será:



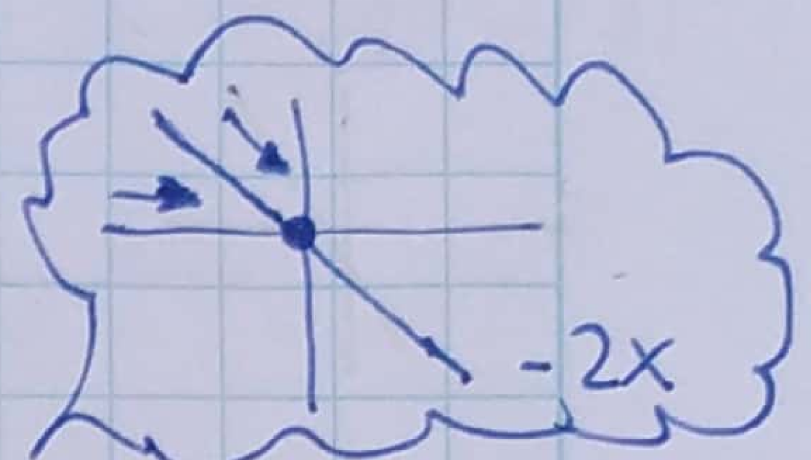
Podemos observar que el $\operatorname{Ran} f = [3 - e, 5]$

Ahora, notemos que para tener a f inyectiva, la rama verde debería ser inyectiva. Además, bastaría solo con eso, ya que en Ran de la función roja es $[3-e, 3[$ y de la verde $[3, 5]$.

Conclusión, se necesitará $\left|1 - \frac{6}{\pi} \arcsin(x-3)\right| + 3$ definida en $]3{,}5 ; 4]$; es decir, $\underline{a = 3{,}5}$

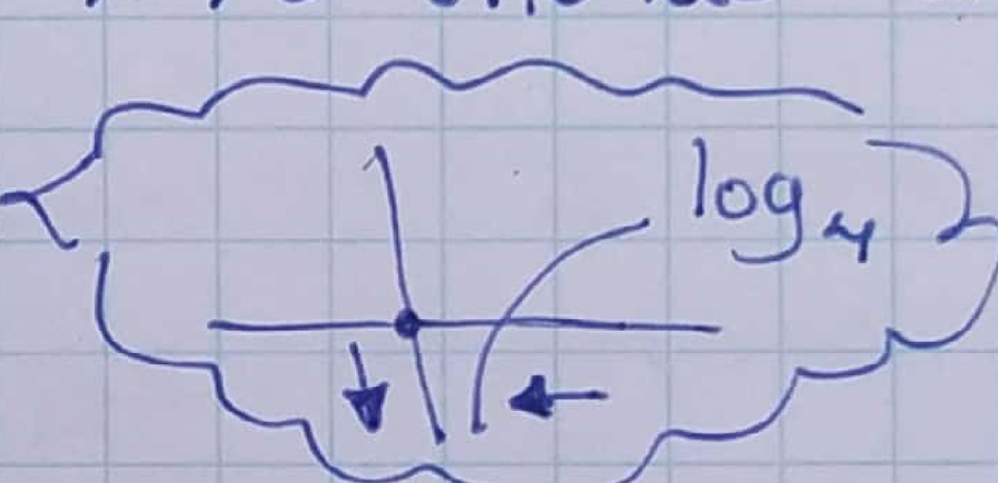
2. La función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3-\log_4(-2x) & , x<0 \\ \frac{8}{\pi}.\arctan(x)+3 & , x\geq 0 \end{cases}$$



* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3-\log_4(-2x)$; tenemos que si $x\to 0^-$ entonces $-2x \to 0^+$

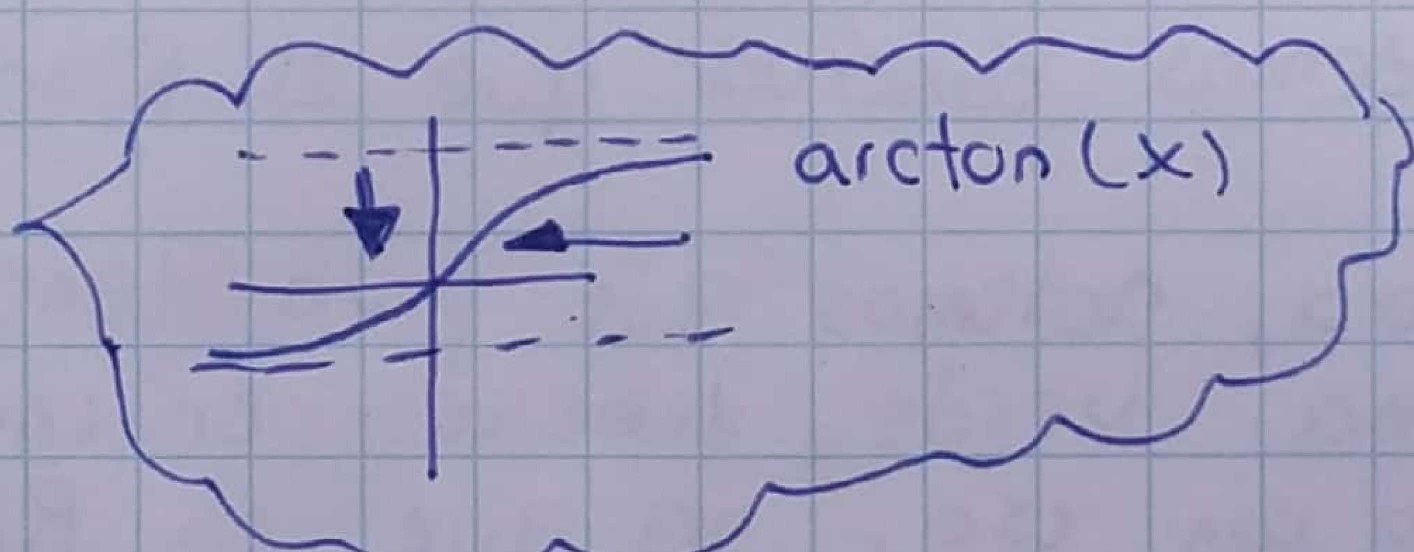
Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} 3-\log_4(0^+)$



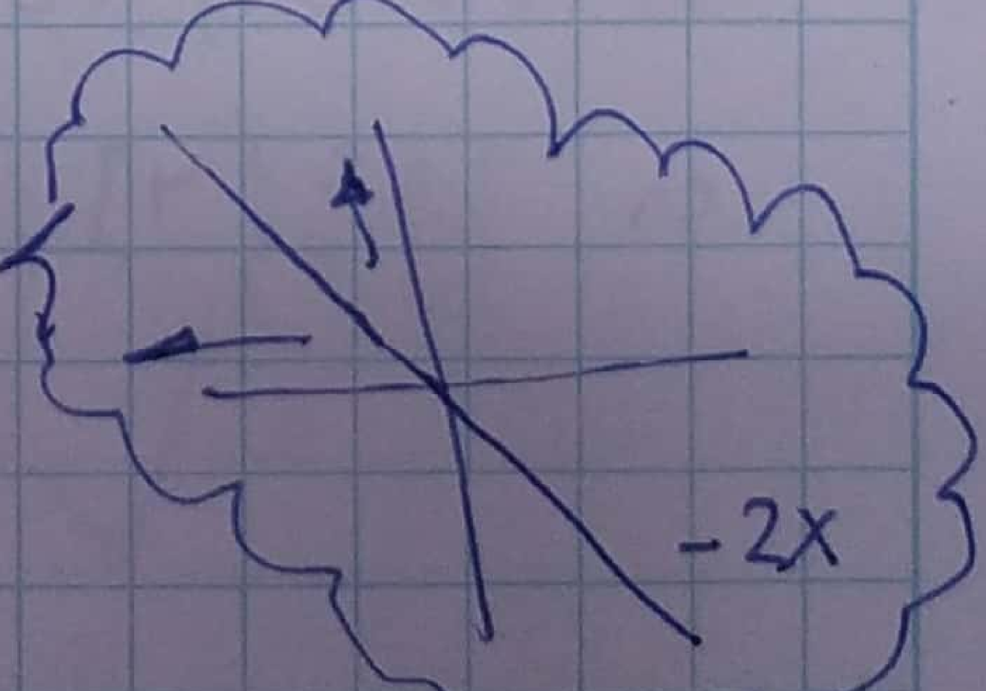
$\lim\limits_{x\to 0^-} 3-(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} 3+\infty = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8}{\pi}.\arctan(x)+3$



$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8}{\pi}\cdot 0^+ + 3 = \lim\limits_{x\to 0} 0+3 = 3$

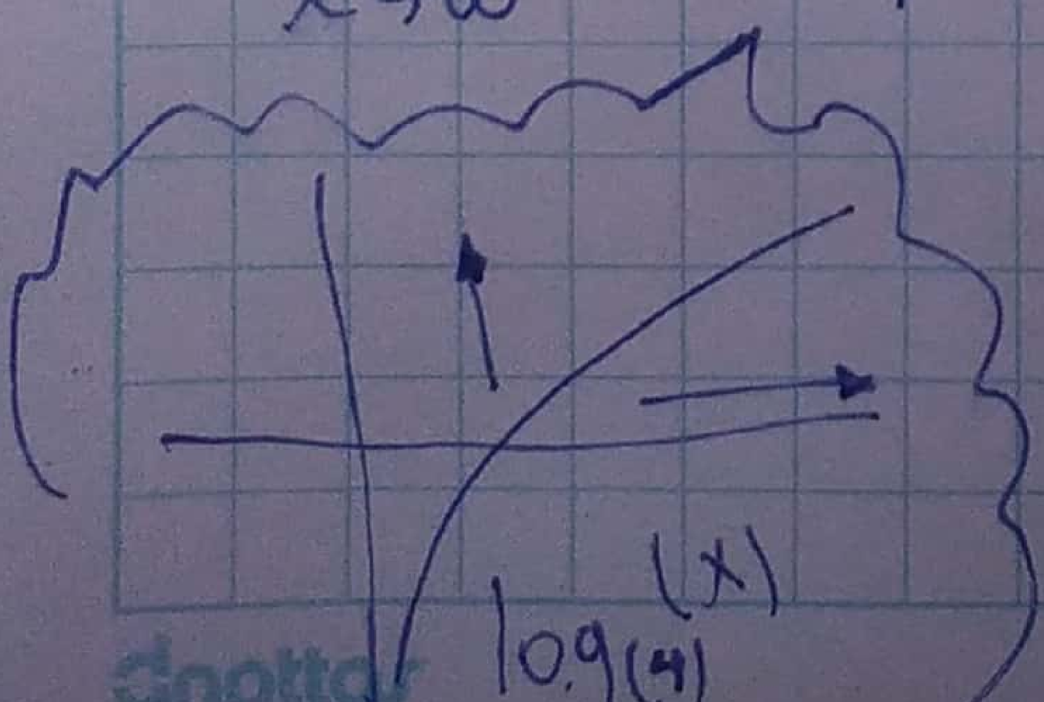


* $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 3-\log_4(-2x)$

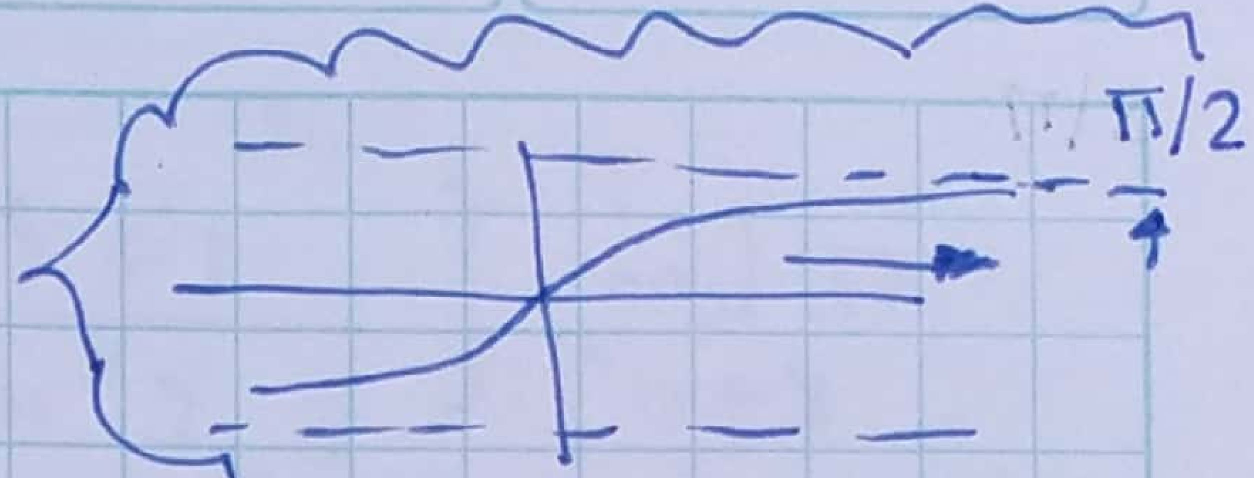
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \infty} 3-\log_4(+\infty) = \lim\limits_{x\to -\infty} 3-(+\infty)$

$= -\infty$

si $x\to -\infty$ entonces $-2x \to +\infty$



* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\pi}\arctan(x)+3$

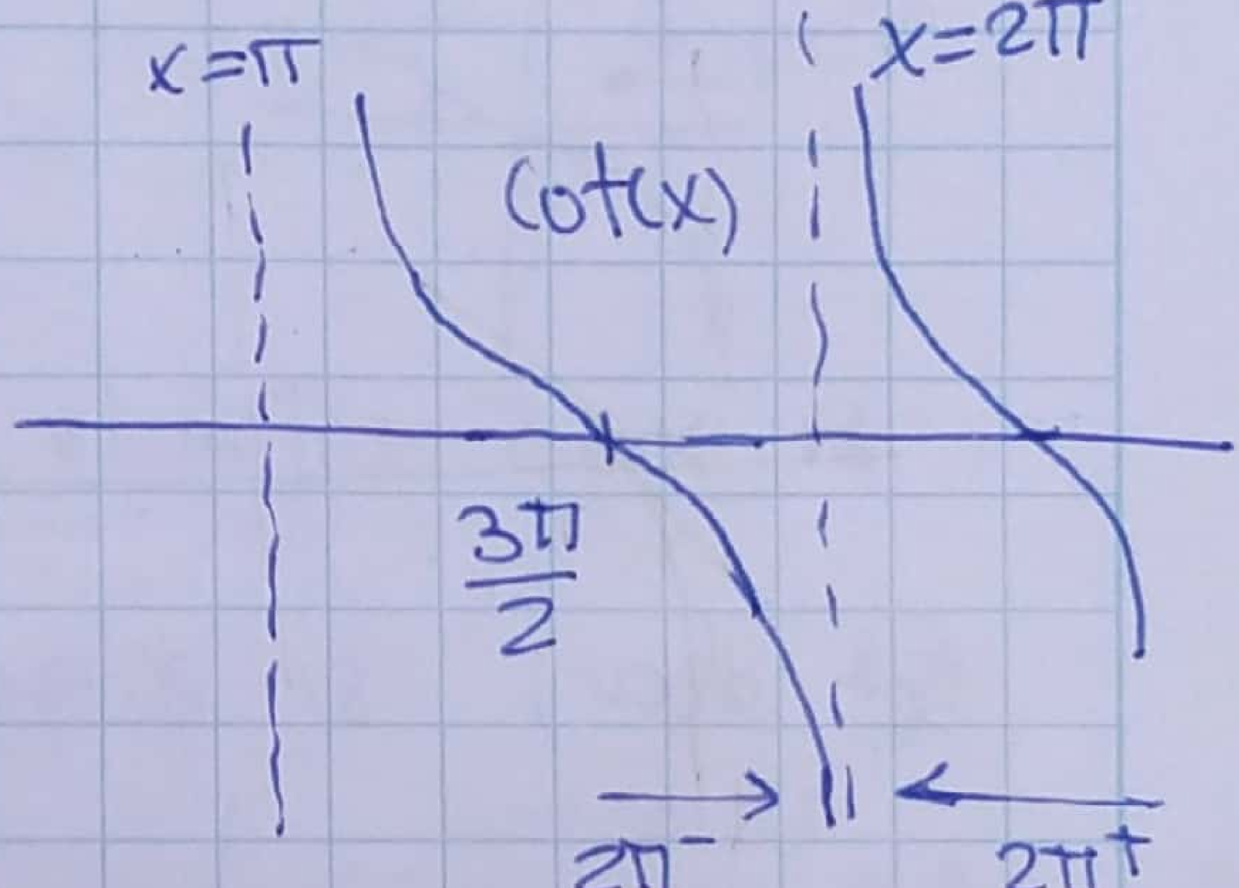


Notemos que si $x\to+\infty$ entonces $\arctan(x)\to\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}+3 = 7$

3. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to2\pi^+}(1-2\cot(x))$ OJO:

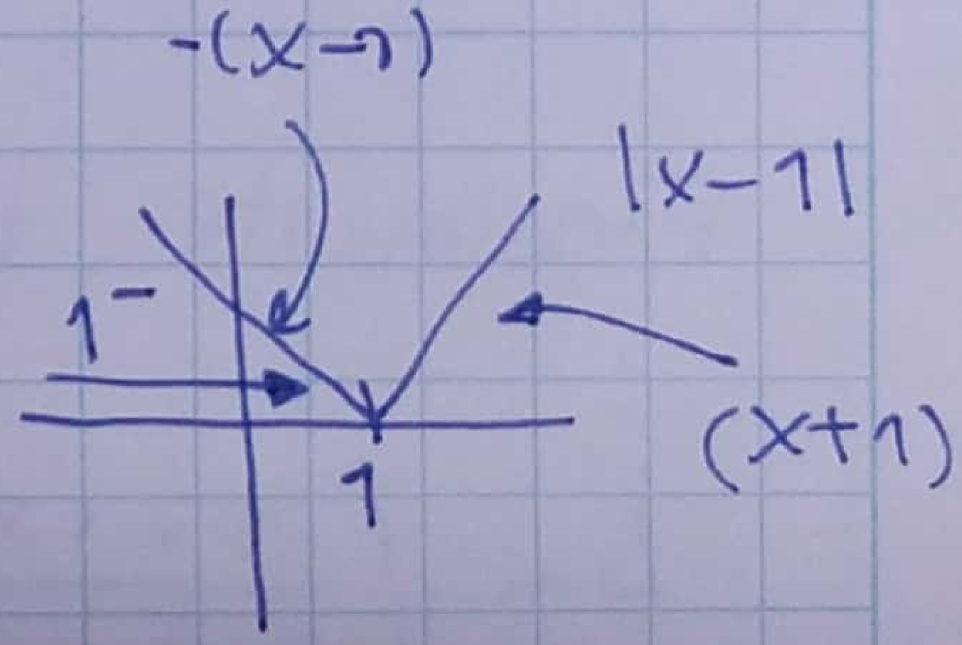


Si $x\to2\pi^+$ entoces $\cot(x)\to+\infty$

$\lim_{x\to2\pi^+}(1-2(+\infty)) = \lim_{x\to2\pi^+} 1-\infty$

$= -\infty$

b) $\lim_{x\to1^-}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2x-2}}+\frac{|x-1|}{3x-3}\right]$ * OJO:

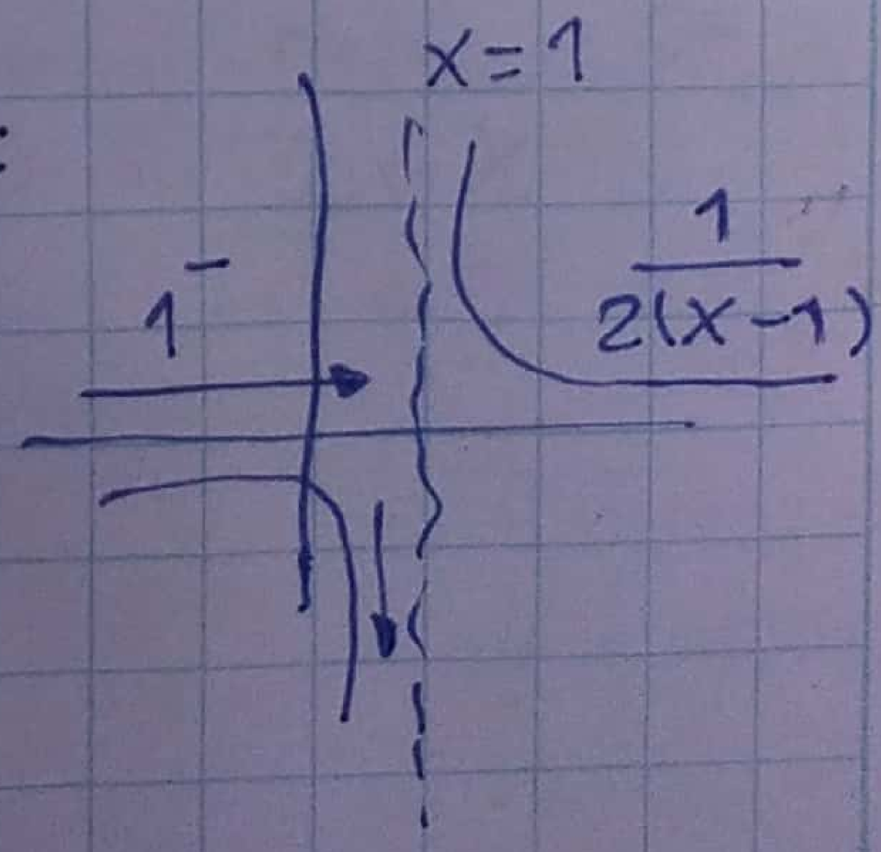


Si $x\to1^-$ entonces $|x-1| = -(x-1)$

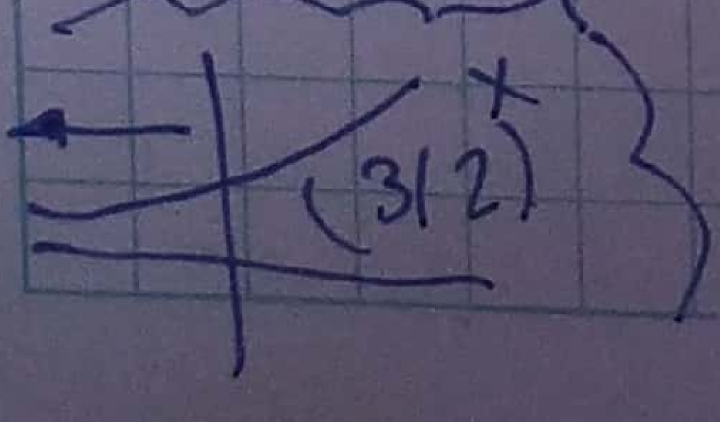
$\Rightarrow \lim_{x\to1^-}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2(x-1)}}_{\text{si } x\to1^-}}+\frac{\cancel{-(x-1)}}{3\cancel{(x-1)}}\right]$

entonces $\frac{1}{2(x-1)}\to-\infty$

* OJO:



$\Rightarrow \lim_{x\to1^-}\left[(3/2)^{-\infty}-1/3\right]$



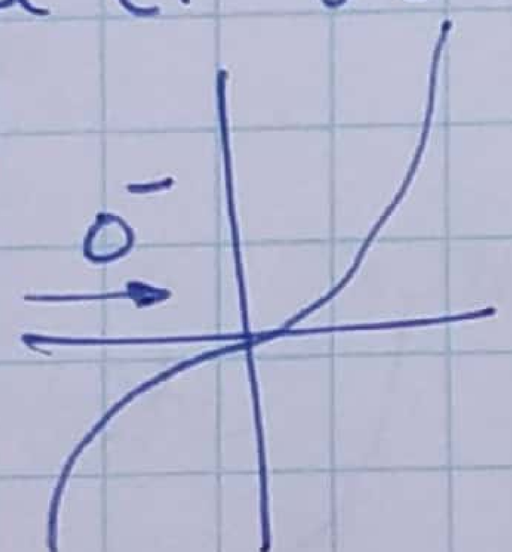
$\Rightarrow \lim_{x\to1^-} 0-1/3 = -1/3$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left[\dfrac{1+(x-1)^4}{2 \cdot e^x \cdot \arcsin(x^3)} \right]$, En el numerado tenemos un polinomio, es decir,

si $x \to 0^-$, $\underbrace{1+(x-1)^4}_{1+(0-1)^4} \to 2$

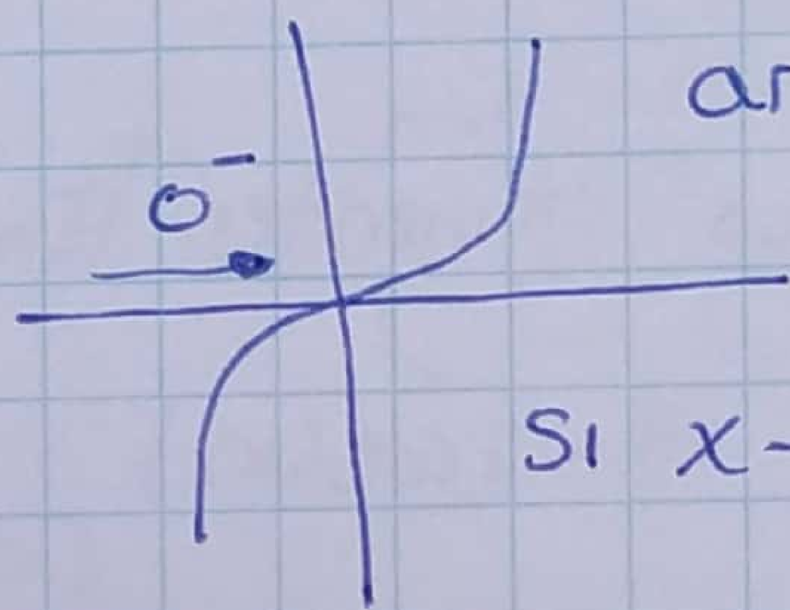
Para el denominador tenemos,

x^3:



si $x \to 0^-$ entonces $x^3 \to 0^-$

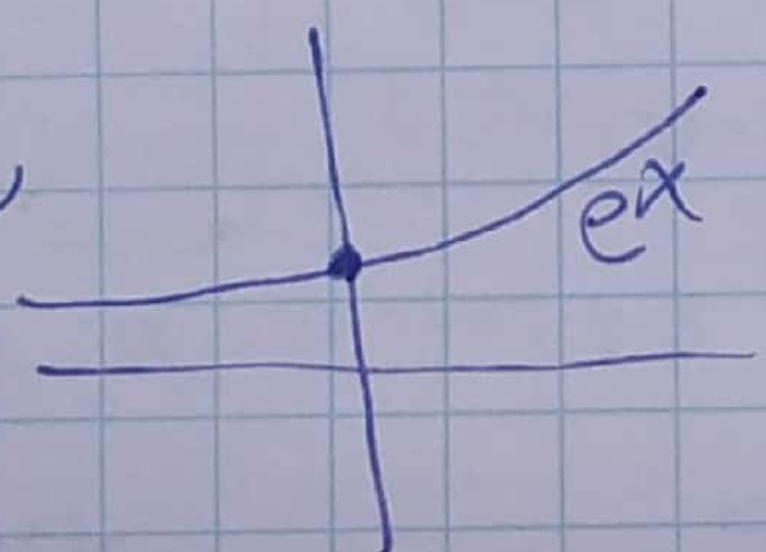
$\Rightarrow$



si $x \to 0^-$ entonces $\arcsin(x) \to 0^-$

Es decir, si $x \to 0^-$ entonces $\arcsin(x^3) \to 0^-$

Además,



si $x \to 0^-$ entonces $e^x \to 1^-$

Finalmente tendríamos

$$\lim_{x \to 0^-} \left[\frac{1+(x-1)^4}{2 \cdot e^x \cdot \arcsin(x^3)} \right] = \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1^- \cdot 0^-} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = A^{x^{2021} + 200x^{1821} + 1}$

donde $0 < A < 1/2$. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Sea $g(x) = x^{2021} + 200x^{1821} + 1$

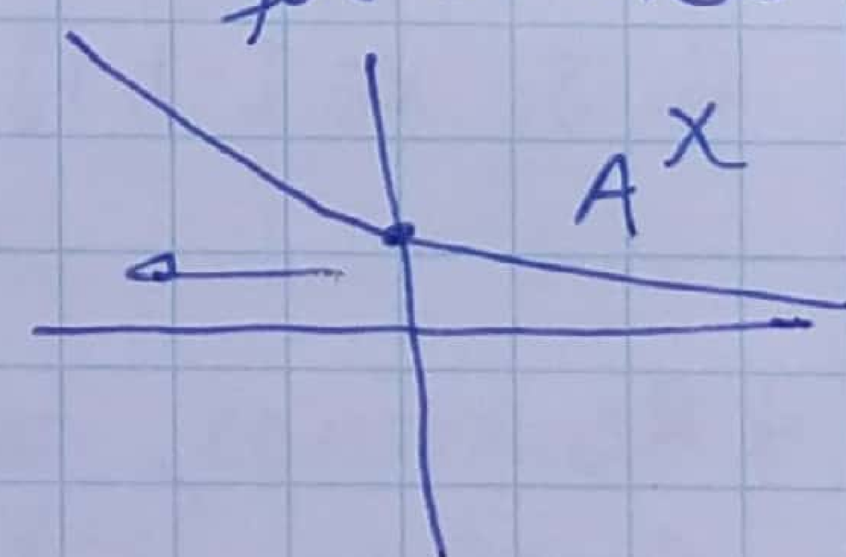
Ahora, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^{2021}\left(1 + \cancel{\frac{200}{x^{200}}}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{x^{2021}}}^{\,0}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} x^{2021} \leftarrow$ impor

$= \underline{-\infty}$

Ahora, $\lim\limits_{x \to -\infty} A^{g(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} A^{-\infty}$

Notemos que si $A \in \left]0, 1/2\right[$



Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} A^{-\infty} = \underline{+\infty}$

5. Esboce la gráfica de la región limitada por:

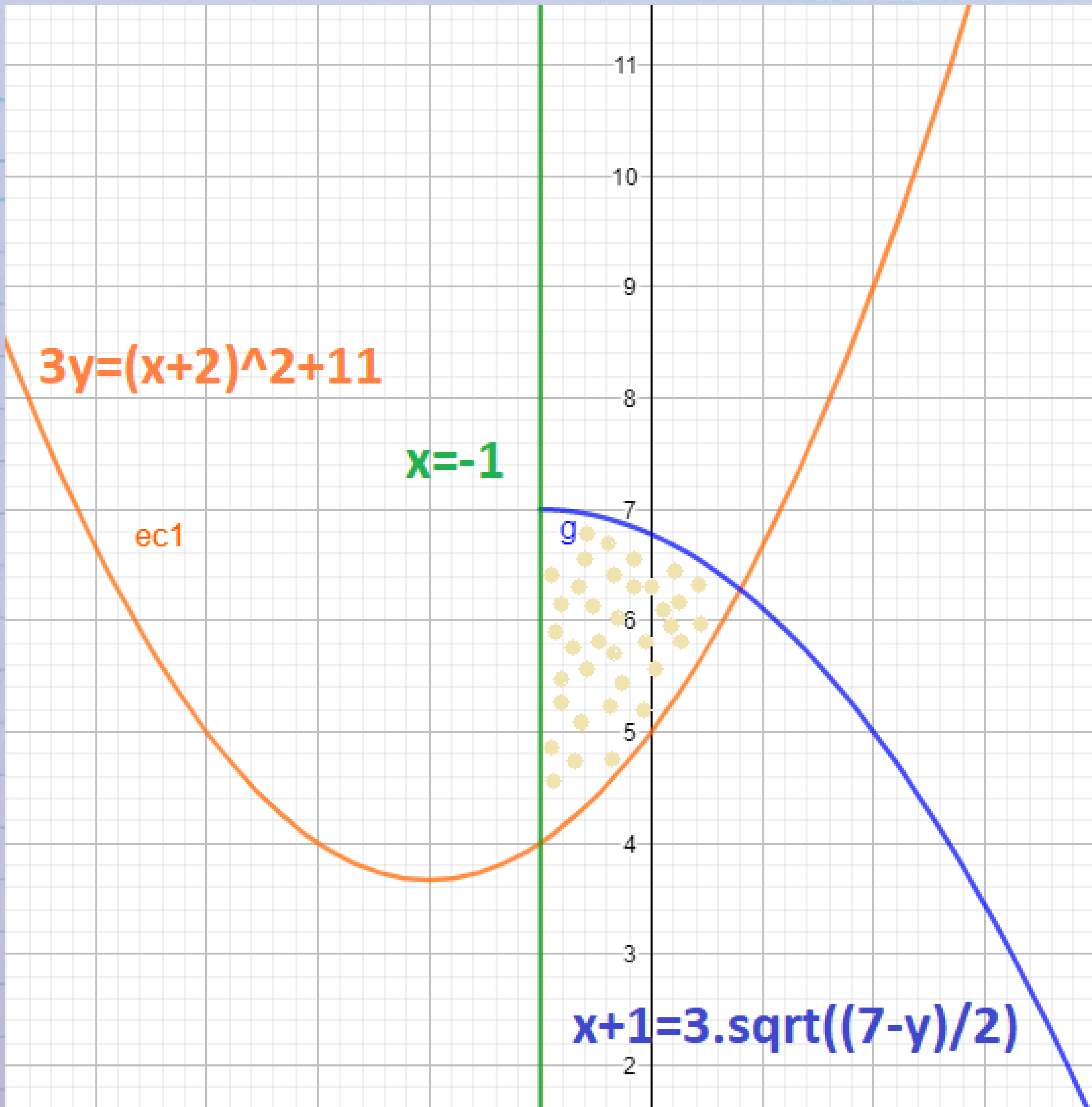
$\mathcal{C}_1$: $3y = (x+2)^2 + 11 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + \frac{11}{3}$ (Parabola)

$\mathcal{C}_2$: $x+1 = 3\sqrt{\frac{7-y}{2}} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{9} = \frac{7-y}{2} \Rightarrow -\frac{2}{9}(x+1)^2 + 7 = y$, $y<7$

(Parabola con restricción)

$\mathcal{C}_3$: $x = -1$ (Recta vertical)

* Las gráficas de parabolas y rectas no suponen mayor dificultad, por lo tanto no se muestra el proceso.



6. Si $x \in [-1,1]-\{0\} \Rightarrow \dfrac{\tan(\arctan(x))}{x} = \dfrac{\text{sen}(\arcsin(x))}{\cos(\arccos(x))}$

* Recordemos, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\tan(\arctan(x)) = x$, en específico se cumplira $\forall x \in [-1,1]-\{0\}$

Además, $\sin(\arcsin(x)) = x$ $\forall x \in [1,1]$ y

$\cos(\arccos(x)) = x$ $\forall x \in [1,1]$

Entonces, $\forall x \in [1,1]-\{0\}$: $\dfrac{\tan(\arctan(x))}{x} = 1$

y $\dfrac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arccos(x))} = 1$. Por lo tanto,

$$\frac{\tan(\arctan(x))}{x} = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arccos(x))}$$

VERDAD

b) Si $x \in [-1, 1] - \{0\} \rightarrow \dfrac{\arctan(\tan(x))}{x} = \dfrac{\arcsin(\sin(x))}{\arccos(\cos(x))}$

Recordemos, $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\arctan(\tan(x)) = x$, es específico se cumplirá para $x \in [-1, 1] - \{0\}$

Además, $\forall \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\arcsin(\sin(x)) = x$

$$\forall x \in [0, \pi] \ \arccos(\cos(x)) = x$$

TENGAMOS MUCHO CUIDADO CON LOS DOMINIOS:

En este caso, $\arccos(\cos(x)) = x$ solo para $x \in [0, \pi]$
si hacemos $-u = x$, $\arccos(\cos(-u)) = -u$, $u \in [-\pi, 0]$

par

$\hookrightarrow \arccos(\cos(u)) = -u$, $u \in [-\pi, 0]$

Entonces, para el dom $[-1, 1] - \{0\}$ tendríamos

$$\arccos(\cos(x)) = \begin{cases} x & , 1 > x > 0 \\ -x & , 0 > x > -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\exists x \in [0, -1]$ tq la condición no se cumpla por ejemplo, $x = -\pi/6$

CONTRAEJEMPLO:

$$\frac{\arctan(\tan(-\pi/6))}{-\pi/6} = \frac{\arcsin(\sin(-\pi/6))}{\arccos(\cos(-\pi/6))}$$

$$\frac{-\pi/6}{-\pi/6} = \frac{-\pi/6}{-(-\pi/6)}$$

$$1 = -1 \quad \text{(Contradicción)}$$

Conclusión, la proposición es FALSA.

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $\lim_{x \to 0} f(x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} [f(x)]^2$ existe

Contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x^2) = \begin{cases} x^2 & , x^2 \geq 0 \\ x^2+1 & , x^2 < 0 \end{cases}$$

$$f(x^2) = x^2 \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x^2) = 0$$

Sin embargo, $f^2(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ (x+1)^2 & , x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} f^2(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \to 0^-} f^2(x) = 1$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} f^2(x)$ NO EXISTE

$\therefore$ La proposición es falsa