PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Algebra Matricial y Geometría Analítica
Solución PC1
(2017-1)

---

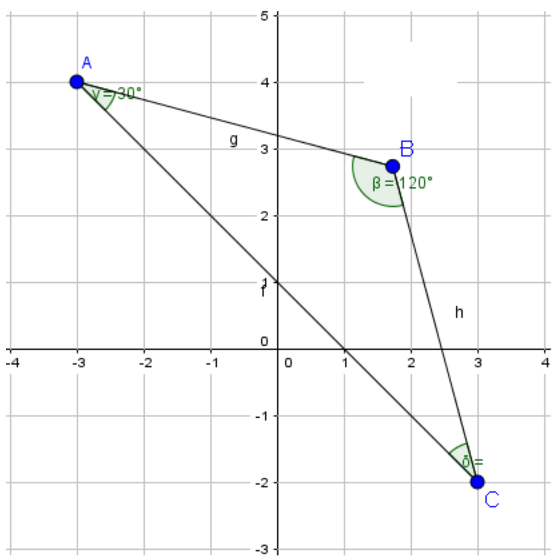
1. Los puntos $A(-3,4)$ y $C(3,-2)$ son vértices de un triángulo isósceles ABC con $\widehat{B} = 120°$. Sabiendo que el vértice B se encuentra en el primer cuadrante, halle las coordenadas de dicho vértice. (4 pts)

Solución.-

- La mediatriz del segmento $\overline{AC}$ es la recta $L_{AC} : -x + y = 1$.Como el punto B pertence a la recta L_{AC}, se tiene $B(b, b+1)$.
- El triángulo AMC, donde M es la altura relativa al vértice B, es notable de 30º y 60º, entonces

$$\begin{aligned} d(A,B) = 2\sqrt{6} \longleftrightarrow (b+3)^2 + (b-3)^2 &= 24 \\ b = \sqrt{3} \quad \vee \quad b = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

- De este modo, $B(\sqrt{3}, \sqrt{3}+1)$.



OTRA FORMA

La pendiente del segmento $\overline{AC}$ es $m_{\overline{AC}} = -1$. Como el triángulo ABC es isósceles, tenemos $\angle BAC = \angle ACB = \pi/6$. Considerando m la pendiente del segmento $\overline{AB}$, se tiene

$$\tan(\pi/6) = \left|\frac{m+1}{1-m}\right| \longleftrightarrow m = \sqrt{3} - 2 \quad \text{o} \quad m = -2 - \sqrt{3}$$

Luego, las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados AB y AC son

$$L_{AB}: y-4=(\sqrt{3}-2)(x+3) \quad \text{y} \quad L_{BC}: y+2=-(\sqrt{3}+2)(x-3)$$

Finalmente, intersectando las rectas L_{AB} y L_{BC} hallamos $B(\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$.

2. Considere las rectas $L: x-y+1=0$ y $L': 3x+3y-5=0$.

   a) Halle la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos P del plano cartesiano tales que $d(P,L)=3d(P,L')$. (1,5 pts)

   Solución.- Sea $P(x,y)$ un punto arbitrario del lugar geométrico.

   - Se tiene

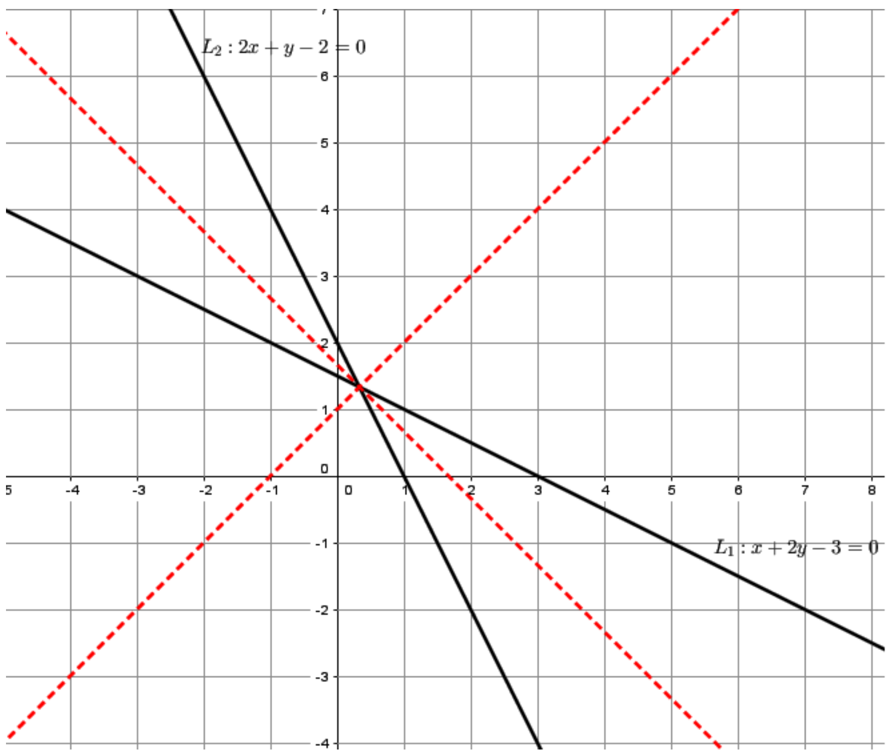
   $$\begin{aligned} d(P,L)=3d(P,L') \longleftrightarrow \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} &= 3\frac{|3x+3y-5|}{3\sqrt{2}} \\ |x-y+1| &= |3x+3y-5| \end{aligned}$$

   Por tanto, el lugar geométrico es:

   $$L.G: \ x+2y-3=0 \quad \vee \quad 2x+y-2=0$$

   b) Grafique el lugar geométrico obtenido en el item anterior. (2,5 pts)

   Solución.-



3. Sea L la recta con ecuación $\sqrt{3}x-y+1=0$ y sea L' una recta que pasa por el punto $A(0,4)$. Sabiendo que dichas rectas forman un ángulo de 60°, halle la ecuación de la recta L'. ¿Cuántas soluciones existen? (4 pts)

   Solución.- Sea m' la pendiente de la recta L'. De los datos, la pendiente de la recta L es $m=\sqrt{3}$. Para hallar m' tenemos

- $$\tan(\pi/3) = \left|\frac{m-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}m}\right|$$

- Como $\tan(\pi/3) = -\sqrt{3}$, se tiene

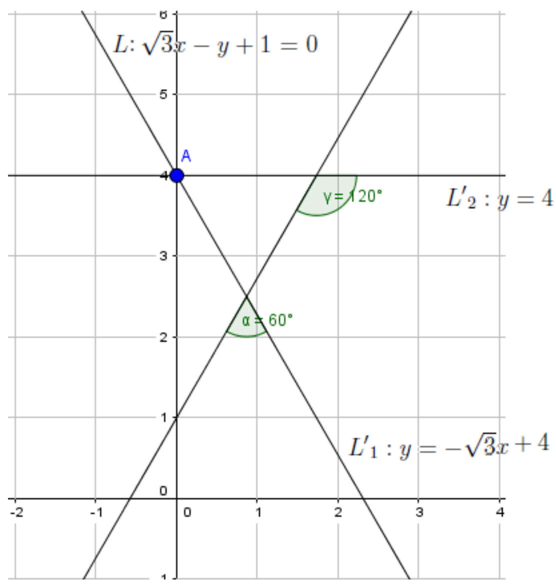
$$-\sqrt{3} = \frac{m-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}m} \quad \vee \quad \sqrt{3} = \frac{m-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}m}$$

- Resolviendo obtenemos

$$\longleftrightarrow m = -\sqrt{3} \quad \vee \quad m = 0$$

- Las ecuaciones de las rectas que cumplen la condición son:

$$L'_1 : y = -\sqrt{3}x + 4 \quad \text{o} \quad L'_2 : y = 4$$



4. Considere los puntos $A(-2,3)$, $B(4,3)$ y la recta $L : y = -2$.

   a) Halle la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta L. (2 pts)

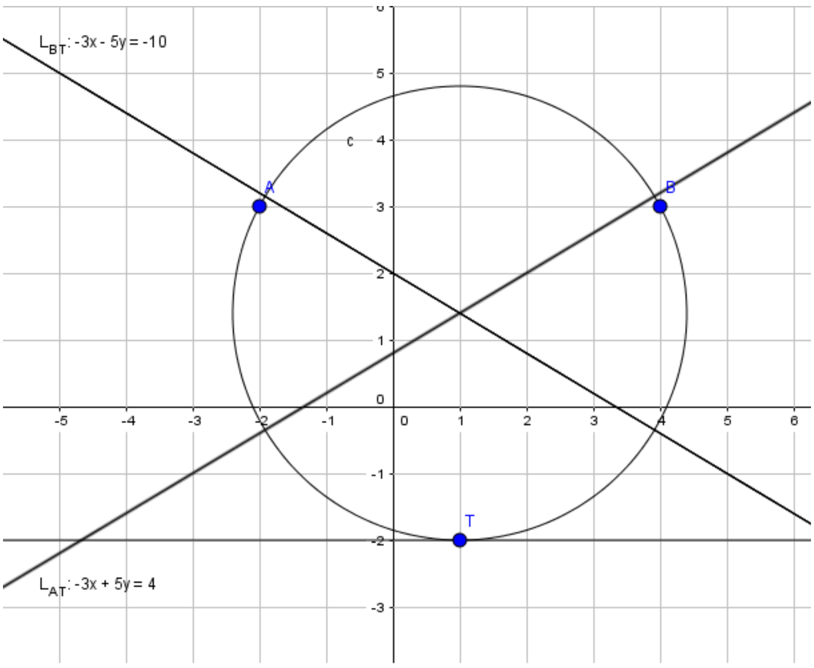
   Solución.- Sean $C(h,k)$ y r el centro y el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$, respectivamente.

   - La mediatriz del segmento horizontal $\overline{AB}$ pasa por el centro $C(h,k)$. Como las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$ son $(1,3)$, se concluye que $h = 1$.
   - De la intersección de dicha mediatriz con la recta L se obtiene el punto $T(1,-2)$.
   - Las ecuaciones de las mediatrices relativas a los segmentos $\overline{AT}$ y $\overline{BT}$ son:

$$L_{\overline{AT}} : -3x + 5y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad L_{\overline{BT}} : 3x + 5y - 10 = 0.$$

- El centro de la circunferencia es el punto de intersección de $\begin{cases} L_{\overline{AT}} : -3x + 5y - 4 = 0 \\ L_{\overline{BT}} : 3x + 5y - 10 = 0, \end{cases}$ Resolviendo el sitema, obtenemos $C(1, \frac{7}{5})$. Además, el radio de la circunferencia es $r = d(C, A) = \frac{\sqrt{289}}{5}$
- De este modo,

$$\mathcal{C} : (x-1)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{289}{25}$$



b) Sea $\mathcal{P}$ la parábola que pasa por los puntos A y B y cuya recta directriz es L. Sabiendo que su vértice V se encuentra en el primer cuadrante, halle la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$. (2 pts)

Solución.-

- La parábola es de la forma $\mathcal{P} : (x-h)^2 = 4p(y-k)$.
- Por simetría, el eje focal debe ser la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, por tanto el eje focal tiene ecuación

$$x = 1$$

- El foco de $\mathcal{P}$ es de la forma $F(1, a), a \in \mathbb{R}$. Por definición de parábola,

$$d(B,F) = d(B,L) \longleftrightarrow \sqrt{9 + (3-a)^2} \;=\; 5$$
$$a = -1 \;\text{ y }\; a = 7$$

- Como el vértice debe estar en el primer cuadrante, elegímos $a = 7$. Por tanto $F(1, 7)$. Como el vértice es punto medio de $F(1, 7)$ y $T(1, -2)$, se obtiene $V(1, \frac{5}{2})$ y $p = \frac{9}{2}$. Finalmente, la ecuación de la parábola es:

$$\mathcal{P} : (x-1)^2 = 18(y - \frac{5}{2})$$

5. Sabiendo que los puntos $A(-2,0)$ y $B(2,4)$ son los extremos del lado recto de una parábola $\mathcal{P}$, halle el vértice de dicha parábola. ¿Cuántas soluciones existen? (4 pts)

Solución.

- De los datos, el foco de la parábola es $F(0,2)$ y la longitud del lado recto es $LR = 4\sqrt{2}$
- El eje focal de la parábola es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, es decir, $L : y+x-2 = 0$.
- Como el vértice de la parábola pertenece al eje focal, se tiene $V(a, 2-a)$
- En el triángulo rectángulo AFB, recto en F, tenemos que el segmento $\overline{VB}$ mide $\sqrt{10}$
- Reemplazando $V(a, 2-a)$ en la ecuación $d(V,B) = \sqrt{10}$, obtenemos

$$a = 1 \quad \text{o} \quad a = -1$$

- Por lo tanto, existen dos parábolas de vértices $V(1,1)$ y $V(-1,3)$.

Turno 19:00 - 21:00
Coordinador de práctica: Elton Barrantes R.
San Miguel, 27 de abril del 2017.