ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN PARCIAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horarios: 101; 102;103;104; 105; 106; 107; 108; 109; 110; 111; 122; A123
Turno: 8:00-11:00 **Duración:** 180 minutos

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- El examen consta de 6 preguntas.
- Puede utilizar calculadoras siempre que no sean programables ni gráficas. No puede usar apuntes de clase ni libros.
- **Justifique sus respuestas.**

1. Considere el cuadrilátero de vértices consecutivos A, B, C y D. Se sabe que:
   - $A(-8;5), B(-2;6)$ y $C(2;1)$.
   - El punto medio del segmento $\overline{BD}$ es $N(-3;3)$.

   Se pide lo siguiente:

   a) Halle las coordenadas del vértice D. (0,5 puntos)
   b) Calcule el área del triángulo ADC. (1,5 puntos)

2. Determine para qué valores de β la gráfica de la siguiente ecuación:
$$x^2 + y^2 + 4x - 12y + 20\beta = 0$$
   Corresponde a:
   a) Una circunferencia
   b) Un solo punto
   c) El conjunto vacío

   (2 puntos)

3. Considere los vectores
$$\vec{b} = (6; -2; 4),\ \vec{j} = (0; 1; 0) \text{ y } \vec{k} = (0; 0; 1).$$
   Sea $\vec{a}$ un vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\vec{a}\| = 3$. Si se cumple la siguiente igualdad
$$(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{u} - 3(\vec{u} - \vec{b}) = (6\vec{j} \cdot (\vec{j} + \vec{k}))\vec{b},$$
   Halle el vector $\vec{u}$. (3 puntos)

4. Considere la parábola $\mathcal{P}: (x-4)^2 = -12(y-8)$, la elipse $\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$ y la hipérbola $\mathcal{H}$.

   Se sabe que:

   - Los vértices de $\mathcal{E}$ son los focos de $\mathcal{H}$.
   - Los extremos del lado recto de $\mathcal{P}$ son los vértices de $\mathcal{H}$.

   Se pide lo siguiente:

   a) Halle la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$. (2,5 puntos)

   b) Esboce el gráfico de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{H}$ en un mismo plano, mostrando la ubicación del vértice de $\mathcal{P}$, los centros de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$, así como las asíntotas de $\mathcal{H}$. (1,5 puntos)

5. Considere la hipérbola cuya ecuación es

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y + \frac{5}{2} - k = 0,$$

   donde k es una constante.

   Se pide lo siguiente:

   a) Si se sabe que un vértice de la hipérbola tiene coordenadas $V\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, halle el valor de k. (1 punto)

   b) Considere $k = 3$ y responda lo siguiente.

   b_1) Halle las coordenadas del centro y la ecuación del eje focal de la hipérbola en el sistema $X - Y$. (3 puntos)

   b_2) Grafique la hipérbola en el plano $X - Y$, mostrando la ubicación del centro, del vértice V y del eje focal. (1 punto)

6. Considere:

   - La parábola $\mathcal{P}: 4(x+1) = (y+2)^2$. $V(-1,-2)$
   - El punto F, foco de la parábola $\mathcal{P}$.
   - Un punto R que se desplaza sobre la parábola $\mathcal{P}$.
   - El punto Q en la recta $\mathcal{L}: x + y - 2 = 0$, tal que $\overline{RQ}$ *es* perpendicular a la recta $\mathcal{L}$.

   Se pide lo siguiente:

   a) Halle las coordenadas del foco de $\mathcal{P}$ y grafique en un mismo plano la parábola $\mathcal{P}$ y la recta $\mathcal{L}$. (1,5 puntos)

   b) Halle una ecuación del lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo cuyos vértices son F, R y Q. (2,5 puntos)

Examen elaborado por los profesores del curso
Coordinadora de teoría: Prof. Cecilia Gaita

San Miguel, 19 de mayo del 2022

EXAMEN PARCIAL DE AMGA

SOLUCIONARIO TURNO 1

1. Considere el cuadrilátero de vértices consecutivos A, B, C y D. Se sabe que:
   - $A(-8; 5), B(-2; 6)$ y $C(2; 1)$.
   - El punto medio del segmento $\overline{BD}$ es $N(-3; 3)$.

   Se pide lo siguiente:

   a) Halle las coordenadas del vértice D. (0,5 puntos)
   b) Calcule el área del triángulo ADC. (1,5 puntos)

Solución:

a) Como N es punto medio de BD, si $D(x; y)$:

$$-3 = \frac{-2+x}{2}; \qquad 3=\frac{6+y}{2}$$

Luego, D(-4; 0).

b) Para hallar el área del triángulo ADC se necesita la longitud de la base, por ejemplo,

d(A; C)=$2\sqrt{29}$

y la altura que sería la distancia de D a la recta AC:

La pendiente de la recta AC es $m_{AC} = -\frac{2}{5}$ La ecuación de la recta AC es $2x + 5y - 9 = 0$,

$$d(D; \overleftrightarrow{AC}) = \frac{|2(-4) + 5(0) - 9|}{\sqrt{29}} = \frac{17}{\sqrt{29}}$$

La altura del triángulo ADC es $\frac{1}{2}(2\sqrt{29}).(\frac{17}{\sqrt{29}}) = 17$.

2. Determine para qué valores de β la gráfica de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4x - 12y + 20\beta = 0$$

   Corresponde a:

   a) Una circunferencia
   b) Un solo punto
   c) El conjunto vacío

(2 puntos)

Solución

Reescribimos la ecuación:

$$(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 40 - 20\beta$$

a) Para $\beta < 2$ la ecuación corresponde a una circunferencia.
b) Para $\beta = 2$ la ecuación corresponde a un solo punto.
c) Para $\beta > 2$ la ecuación corresponde al conjunto vacío.

3. Considere los vectores

$$\vec{b} = (6; -2; 4),\ \vec{j} = (0; 1; 0) \text{ y } \vec{k} = (0; 0; 1).$$

Sea $\vec{a}$ un vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\vec{a}\| = 3$.

Si se cumple la siguiente igualdad

$$(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{u} - 3(\vec{u} - \vec{b}) = (6\vec{j} \cdot (\vec{j} + \vec{k}))\vec{b},$$

Halle el vector $\vec{u}$. (3 puntos)

Solución:

Como $6\vec{j} \cdot (\vec{j} + \vec{k}) = 6$
$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 9$,
Al reemplazar en la ecuación, se tiene:
se tiene $6\vec{u} - 3\vec{b} = 0$,
de donde obtenemos $\vec{u} = (3; -1; 2)$.

4. Considere la parábola $\mathcal{P}: (x-4)^2 = -12(y-8)$, la elipse $\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$ y la hipérbola $\mathcal{H}$.
Se sabe que:

- Los vértices de $\mathcal{E}$ son los focos de $\mathcal{H}$.
- Los extremos del lado recto de $\mathcal{P}$ son los vértices de $\mathcal{H}$.

Se pide lo siguiente:

a) Halle la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$. (2,5 puntos)

b) Esboce el gráfico de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{H}$ en un mismo plano, mostrando la ubicación del vértice de $\mathcal{P}$, los centros de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$, así como las asíntotas de $\mathcal{H}$. (1,5 puntos)

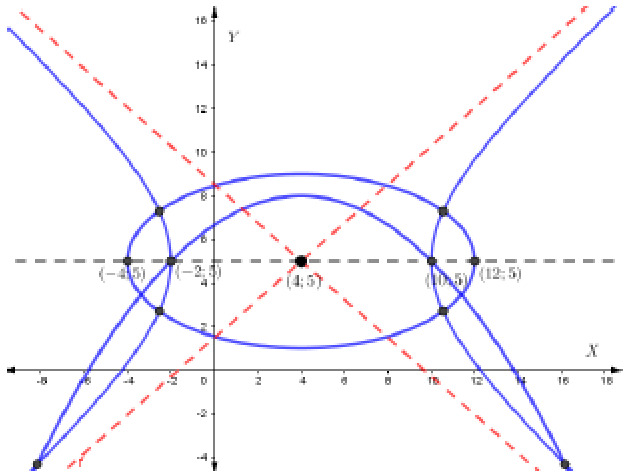
Solución:

a)En la elipse identificamos el centro (4; 5), sus vértices (12; -5) y (-4; 5)
De la parábola identificamos el vértice (4; 8), su foco (4; 5), la longitud del lado recto y los extremos del lado recto: (-2; 5) y (10; 5).

Para la hipérbola reconocemos el centro (4; 5), a=6, b=$2\sqrt{7}$.
Luego, su ecuación es

$$\frac{(x-4)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{28} = 1$$

b)La gráfica de las cónicas es:



5. Considere la hipérbola cuya ecuación es

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y + \tfrac{5}{2} - k = 0,$$

donde k es una constante. Se pide lo siguiente:

a) Si se sabe que un vértice de la hipérbola tiene coordenadas $V\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, halle el valor de k. (1 punto)

b) Considere $k = 3$ y responda lo siguiente.
b1) Halle las coordenadas del centro y la ecuación del eje focal de la hipérbola en el sistema $X - Y$. (3 puntos)
b2) Grafique la hipérbola en el plano $X - Y$, mostrando la ubicación del centro, del vértice V y del eje focal. (1 punto)

Solución:

a) Reemplazando el vértice en la ecuación, se obtiene $k = 3$.

b1)Sea θ el ángulo de rotación, entonces

$$\tan 2\theta = \frac{4}{3}$$

Resolviendo se obtiene que $\tan\theta = {}^{1}\!/_{2}$. Luego, $\cos\theta = {}^{2}\!/_{\sqrt{5}}$ y $\sin\theta = {}^{1}\!/_{\sqrt{5}}$.

Las ecuaciones de rotación son:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}u - \frac{1}{\sqrt{5}}v \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{2}{\sqrt{5}}v \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de la hipérbola,

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y - \tfrac{1}{2} = 0,$$

agrupando y simplificando, obtenemos la ecuación:

$$3(u+1)^2 - 2\left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = 3$$

$$\frac{(u+1)^2}{1} - \frac{\left(v - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

Obtenemos una hipérbola con centro $C\ (-1; \frac{1}{2})$, eje focal $v = \frac{1}{2}$, con

$$a^2 = 1 \quad \text{y} \quad b^2 = \frac{3}{2}$$

Usando las ecuaciones de rotación, obtenemos que las coordenadas del centro, que en el sistema UV son $C(-1;\ \frac{1}{2})$, se transforman en:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}(-1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-1) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

En el sistema XY, las coordenadas del centro son $C(\frac{-5}{2\sqrt{5}}; 0)$.

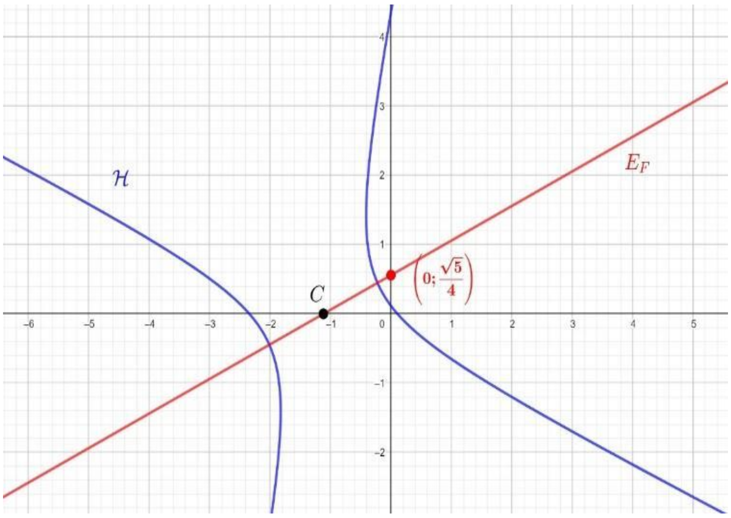
La ecuación del eje focal en el sistema UV es $v = \frac{1}{2}$. Por las ecuaciones de rotación se obtiene que

$$2\left(y - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = x + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Por tanto, la ecuación del eje focal en el sistema XY es:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

b2)Gráfica de la cónica H en el plano XY



6. Considere:

- La parábola $\mathcal{P}: 4(x+1) = (y+2)^2$.
- El punto F, foco de la parábola $\mathcal{P}$.
- Un punto R que se desplaza sobre la parábola $\mathcal{P}$.
- El punto Q en la recta $\mathcal{L}: x + y - 2 = 0$, tal que $\overline{RQ}\ es$ perpendicular a la recta $\mathcal{L}$.

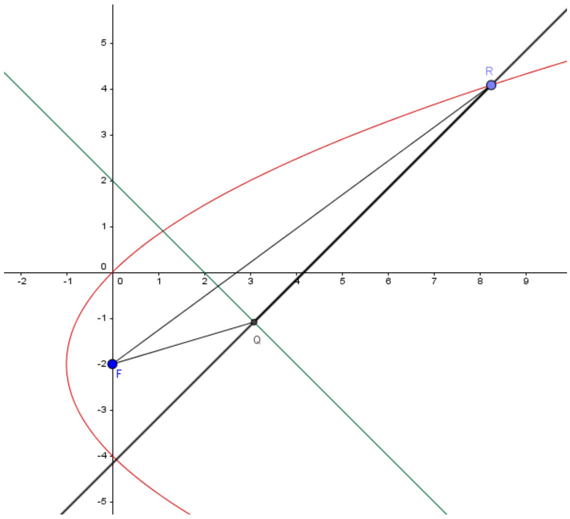
Se pide lo siguiente:

a) Halle las coordenadas del foco de $\mathcal{P}$ y grafique en un mismo plano la parábola $\mathcal{P}$ y la recta $\mathcal{L}$. (1,5 puntos)

b) Halle una ecuación del lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo cuyos vértices son F, R y Q. (2,5 puntos)

Solución.

a) $F(0;\ -2)$



b) Sea $R(x_R; y_R)$ un punto que se desplaza sobre la curva. Entonces, se cumple lo siguiente.

$$4(x_R+1) = (y_R+2)^2 \quad (1)$$

Como Q esta en la recta ℓ tenemos $Q(x_Q; 2 - x_Q)$………(2),

y como también es el pie de la perpendicular trazada desde R, tenemos

$$m_{RQ}.m_\ell = -1 \ \rightarrow \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = 1 \rightarrow \frac{y_R - (2 - x_Q)}{x_R - x_Q} = 1 \rightarrow \ x_Q = \frac{x_R - y_R + 2}{2} \ldots\ldots.(3)$$

Por otra parte, sea $G(x; y)$ el baricentro del triángulo formado por R, Q y F, entonces tenemos:

$$(x; y) = \left(\frac{x_R + x_Q + 0}{3}; \frac{y_R + 2 - x_Q - 2}{3}\right) \rightarrow \begin{cases} x_R + x_Q = 3x \\ y_R - x_Q = 3y \end{cases} \ldots(4)$$

De (3) y (4):

$$x_R = \frac{9x + 3y - 2}{4} \ \wedge \ y_R = \frac{3x + 9y + 2}{4}$$

Reemplazando en (1):

$$L.G:\ 4\left(\frac{3x + 9y + 2}{4} + 1\right) = \left(\frac{9x + 3y - 2}{4} + 2\right)^2$$