ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

Año: 2022 Número: 0433
Código de alumno

Práctica

Salinas de Lama Gabriel Alejandro
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Gabriel
Firma del alumno

Curso: F CAL

Práctica Nº: 1

Horario de práctica: 109.1

Fecha: 21/04/22

Nombre del profesor: R. Quispe

Nota
20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) J-A-C-C

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Fundamentos de Cálculo

Primera Práctica Calificada

Semestre Académico 2022 -1

Horarios: 0101, 0102, 0103, 0104, 0105, 0106, 0107, 0108, 0109, 0110, 0111, 0112, 0113, 0114, 0115, 0119.

Elaborada por todos los profesores. Duración: 110 minutos

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo: mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, éstas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación en $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^3-10}{x^2-x} \geq \frac{x^3+10}{x^2+x}.$$

(4 puntos)

2. Halle el conjunto solución de la siguiente inecuación en $\mathbb{R}$:

$$\frac{|x-1|-x^2}{x-1} > -1.$$

(4 puntos)

3. Sea b una constante real. Resuelva la inecuación en $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x-2b} > x-2,$$

en los siguientes casos:

a) $b=\frac{1}{2}$. (3.5 puntos)

b) $b>2$. (2.5 puntos)

4. Justifique la veracidad o falsedad de la proposición:

Existe un triángulo isósceles de área 25 y perímetro 30 tal que su lado desigual mida el doble de su altura relativa a dicho lado desigual.

(2 puntos)

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $2 < x^2 < 3$. (1 punto)

b) Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $x > y$ entonces $5x^{2022} + \dfrac{1}{5x^2} > 5y^2 + \dfrac{1}{5y^{2022}}$. (1 punto)

c) Una condición necesaria para que $1 < y$ o $x > 0$ es que $xy < xy^2$. (1 punto)

d) Para todo $x \neq -2$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $xy + 3 \leq x - 2y$. (1 punto)

San Miguel, 21 de abril de 2022.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1. $\frac{x^3-10}{x^2-x} \geq \frac{x^3+10}{x^2+x} \rightarrow \frac{x^3-10}{x(x-1)} \geq \frac{x^3+10}{x(x+1)}$

$*\ \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$

$\frac{ad-cb}{bd} \geq 0$

$$\frac{(x^3-10)(x+1)-(x^3+10)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{x^4}+x^3-10x-\cancel{10}-\cancel{x^4}+x^3-10x+\cancel{10}}{x(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$x \neq 0$

$$\frac{2x^3-20x}{x(x-1)(x+1)} \geq 0 \rightarrow \frac{2x(x^2-10)}{x(x-1)(x+1)} \geq 0 \rightarrow \frac{\cancel{x}(x+\sqrt{10})(x-\sqrt{10})}{\cancel{x}(x-1)(x+1)} \geq 0$$

4p

P.C:
- $x=-\sqrt{10}$
- $x=\sqrt{10}$
- $x \neq 1$
- $x \neq -1$

$*\ x \neq 0$

Analizando ~~zonas~~ intervalos:

$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad \wedge\ x \neq 0$

$-\sqrt{10} \quad -1 \quad 1 \quad \sqrt{10}$

$C.S =]-\infty;-\sqrt{10}] \cup]-1;0[\cup]0;1[\cup [\sqrt{10};+\infty[$

---

2. $\frac{|x-1|-x^2}{x-1} > -1$

$Z_1 \mid Z_2$

$-\infty \quad 1 \quad +\infty$

Zona 1: $x<1$

$$\frac{1-x-x^2}{x-1} > -1 \rightarrow \frac{\cancel{1}-\cancel{x}-x^2+\cancel{x}-\cancel{1}}{x-1} > 0 \rightarrow \frac{x^2}{x-1} < 0$$

P.C:
$x \neq 0 \rightarrow$ pivote
$x \neq 1$

Analizando ~~zonas~~ intervalos:

pivote

$- \quad - \quad + \quad \wedge\ x<1 \rightarrow C.S_1 =]-\infty;1[- \{0\}$

$0 \quad 1$

Zona 2: $x \geq 1$

$$\frac{x-1-x^2}{x-1} > -1 \rightarrow \frac{x-1-x^2+x-1}{x-1} > 0 \rightarrow \frac{x^2-2x+2}{x-1} < 0$$

$*$ Evaluamos x^2-2x+2:

$\Delta = 4-4.1.2 = -4 < 0$

$a = 1 > 0$

$\therefore\ \forall x: x^2-2x+2 > 0$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{x^2-2x+2}}}{x-1} < 0 \rightarrow \frac{1}{x-1} < 0$$

P.C: $x \neq 1$

4p

Analizando intervalos:

$- \quad + \quad \wedge\ x \geq 1 \rightarrow \emptyset$

1

$C.S_2 = \emptyset$

$\therefore\ C.S_1 \cup C.S_2 \Rightarrow C.S =]-\infty;1[- \{0\}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3. $\sqrt{x-2b} > x-2$

Condiciones: ~~$(x-2b \geq 0 \wedge x-2<0) \vee ($~~

$(x-2b \geq 0 \wedge x-2<0) \vee (x-2b \geq 0 \wedge x-2 \geq 0 \wedge x-2b > (x-2)^2)$

a) $b = \frac{1}{2}$

$(x-1 \geq 0 \wedge x<2) \vee (x-1 \geq 0 \wedge x \geq 2 \wedge x-1 > x^2-4x+4)$

$(1 \leq x < 2) \vee (x \geq 2 \wedge 0 > x^2-5x+5)$

$0 > x^2-5x+5$: P.C: $x \neq \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} \rightarrow x \neq \frac{5+\sqrt{5}}{2} \wedge x \neq \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

Analizando intervalos:

$+ \quad \frac{5-\sqrt{5}}{2} \quad - \quad \frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad + \quad \wedge \; x \geq 2 \rightarrow \left[2; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$

3.5p

$\therefore \; [1; 2[\; \cup \; \left[2; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[\rightarrow C.S = \left[1; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$

b) $b>2$: $\quad b>2$

$-2b < -4$

$x-2b < x-4$ ~~→ hay que~~ $\rightarrow 0 \leq x-2b < x-4$

$\therefore (x-4 \geq 0 \wedge x<2) \vee (x-4 \geq 0 \wedge x \geq 2 \wedge x-4 > x^2-4x+4)$

$(\varnothing) \vee (x \geq 4 \wedge 0 > x^2-5x+8)$

x^2-5x+8: $\Delta = 25-32 = -7<0$, $a = 1 > 0$ $\rightarrow \forall x: x^2-5x+8>0$, no se cumple que: $x^2-5x+8<0$

$\therefore \varnothing \vee (x \geq 4 \wedge \varnothing) \rightarrow C.S = \varnothing$

2.5p

Escaneado con CamScanner

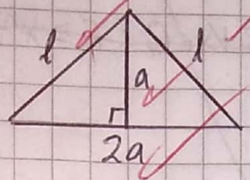
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

4. Argumentación directa.

$2l + 2a = 30u$ $\quad$ $\frac{2a \cdot a}{2} = 25u^2$

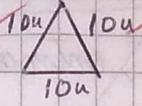
$l + a = 15u \ldots (1)$ $\quad$ $a = 5u \ldots (2)$



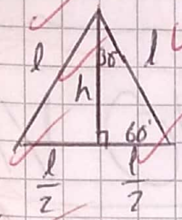
Sustituyendo (2) en (1):

$l + 5 = 15$

$l = 10u \rightarrow$



Sería un triángulo equilátero, pero su altura no puede valer la mitad de su lado:



$h^2 + \frac{l^2}{4} = l^2$

$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2} l \neq \frac{l}{2}}$ $\therefore$ La proposición es falsa.

2p

Además, no tiene ningún lado desigual.

5.

a) $\exists x \in \mathbb{Q} / 2 < x^2 < 3$

~~Existe un $x = \frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$ tal que $2 < \frac{25}{1}$~~

* Continuación de la "a" en la siguiente página

b) Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$. $x > y \rightarrow 5x^{2022} + \frac{1}{5x^2} > 5y^2 + \frac{1}{5y^{2022}}$

Contraejemplo: $x = 1$, $y = +10^{-10} \rightarrow 1 > 10^{-10}$

$5.1 + \frac{1}{5} \overset{>}{\not>} 5.10^{-20} + \frac{1}{5.10^{-20220}}$

$\frac{26}{5} \not> 5.10^{-20} + \frac{10^{20220}}{5}$ $\therefore$ La proposición es F.

1p

c) $1 < y \vee x > 0 \rightarrow xy < xy^2$

Contrarecíproca: $xy \geq xy^2 \rightarrow 1 \geq y \wedge x \leq 0$

Contraejemplo: $x = 1$, $y = 0$

$1.0 \geq 1.0 \rightarrow 1 \geq 0 \wedge 1 \leq 0$ $\therefore$ La proposición es F.

$0 \geq 0$ ✓ $\quad$ ✓ $\quad$ ✗

1p

d) $\forall x \neq -2, \exists y \in \mathbb{R} / xy + 3 \leq x - 2y$

$xy + 3 \leq x - 2y \rightarrow y(x+2) \leq x - 3$

$y \leq \frac{x-3}{x+2}, x \neq -2$

o $y \geq \frac{x-3}{x+2}, x \neq -2$

Existe un $y = \frac{x-3}{x+2}$, $\forall x \neq -2$ ~~donde $x \neq -2$~~

tal que: $\frac{x-3}{x+2} \leq \frac{x-3}{x+2}$ ✓

$\therefore$ La proposición es V.

1p

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5. a) $\exists x \in Q \,/\, 2 < x^2 < 3$

~~Reducción al absurdo:~~ $\sim[\exists x \in Q / 2 < x^2 < 3] \equiv \forall x \notin Q : \cancel{2 \geq x^2 \geq 3}$

$\cancel{\forall x \in Q : 2 \geq x^2 \geq 3 \to 2 \geq 3}$ F

Absurdo

Si lo contrario es F, entonces la proposición ~~original es V.~~

~~$\forall x \in Q$:~~

Reducción al absurdo: $\sim[\exists x \in Q / 2 < x^2 < 3] \equiv \forall x \in Q : 2 \geq x^2 \vee x^2 \geq 3$

Por ~~exhaustividad~~:

- $x \in Q,\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \to 0 \leq x^2 \leq 2$ ✓
- $x \in Q,\ x < -\sqrt{2} \vee x$

$\forall x \in Q : 2 \geq x^2 \vee x^2 \geq 3$

- $2 \geq x^2 ;\ 0 \geq x^2 - 2 \to 0 \geq (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ P.C. $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$

Analizando intervalos:

$+ \quad - \quad +$

$-\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$

$C.S = [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$

- $x^2 \geq 3 :\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

NO VA

5. a) $\exists x \in Q / 2 < x^2 < 3$

Existe un $x = 1{,}7 \in Q$ tal que $2 < 2{,}89 < 3$

$\therefore$ La proposición es V.

1p

$$\begin{array}{r} 1{,}7 \\ \times\ 1{,}7 \\ \hline 119 \\ 17\ \\ \hline 2{,}89 \end{array}$$