PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Álgebra Matricial y Geometría Analítica
Tercera Práctica Calificada
(2017-2)

Indicaciones:

* No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 1 hora y 50 minutos.

Turno 1: 15:00 - 17:00.

---

1. Halle la ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta $L : \{P = (7, 0, 2) + t(2, 2, 1)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$ y pasa por el punto $A(4, -2, 3)$. (3 pts)

2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en $\mathbb{R}^2$ tales que $\text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a} = (4, 3)$ y $\text{Proy}_{\vec{a}}\,\vec{b} = (0, 6)$. Halle los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. (3 pts)

3. Sean $A(3, -1, 6)$, $B(5, -2, 3)$, $C(1, 0, -2)$ y $D(x, 2, 4)$ los vértices de un cuadrilátero $ABCD$. Halle las coordenadas del punto de intersección de sus diagonales y la coordenada faltante del vértice D. (4 pts)

4. Halle la ecuación vectorial de la recta L que pasa por el punto $A(0, 5, -3)$ y es paralela a los planos $\mathcal{P}_1 : 2x + 4y + z - 6 = 0$ y $\mathcal{P}_2 : x + 3y + 2z + 7 = 0$. (3 pts)

5. Considere los vectores $\vec{v}_1 = (4k - 1, 2, 2k - 1)$, $\vec{v}_2 = (k, 1 - 2k, k - 4)$ y $\vec{v}_3 = (-1, 1, 3)$, con $k \in \mathbb{R}$.

   a) Determine todos los valores de k tales que los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes. (2,5 pts)

   b) Tomando el valor $k = -1$, halle el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ y $\vec{v}_1 + \vec{v}_3$. (1,5 pts)

6. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

   a) El vector $w = (-3, 13, 2)$ es combinación lineal de los vectores $u = (-3, 5, -2)$ y $v = (1, 1, 2)$. (1 pt)

   b) Si v_1 y v_2 son vectores ortogonales no nulos en $\mathbb{R}^3$, entonces toda recta L_1 paralela a v_1 intersecta ortogonalmente a toda recta L_2 paralela a v_2. (1 pt)

   c) Si u y v son vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$ tales que $\text{Comp}_u(u+v) > 0$, entonces se cumple que $\text{Comp}_v(u + v) > 0$. (1 pt)

Práctica elaborada por los profesores del curso.

San Miguel, 2 de noviembre del 2017.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

PUCP

09 NOV. 2017

Práctica

Año				Número			
2	0	1	7	6	1	5	4

Código de alumno

GRANADOS SUÁREZ ÁLVARO ALONSO

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica N°: PC 3

Horario de práctica: P-104

Fecha: 2/11/17

Nombre del profesor: P. FERNÁNDEZ

Nota

20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

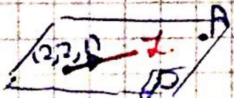
Noviembre 2016

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

el vector dirección de $\mathcal{L}$ también pertenece al plano $\wp$:

(1)



$(2,2,1) \in \mathcal{L} \in \wp$

~~...~~ : ~~(...,3)~~

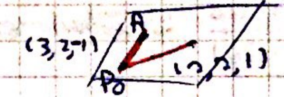
$A \in \wp$

y el punto $L: \{ P = \underbrace{(7,0,2)}_{P_0} + t(2,2,1) ; t \in R \}$

pertenece a $\wp$ y el vector $(2,2,1) \in \wp$

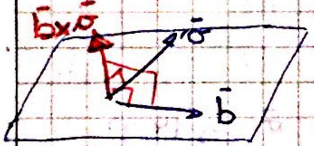
$A: (4,-2,3) \in \wp$

$\vec{AP_0} = P_0 - A = (7,0,2) - (4,-2,3) = (3,2,-1)$



⇒ entonces, tenemos 2 vectores del plano.

$\underbrace{(3,2,-1)}_{\vec{a}}$ y $\underbrace{(2,2,1)}_{\vec{b}}$



$b \times a =$

$(2,2,1) \times (3,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$= (-2-2 ; -[-2-3] ; 4-6)$

$b \times a = (-4, 5, -2)$

pero, la normal del plano es paralela a $\vec{b} \times \vec{a}$

así, $n = b \times a = (-4, 5, -2)$

$\wp: -4x + 5y - 2z + d = 0$; $(4,-2,3) \in \wp$ $\Rightarrow -4(4) + 5(-2) + 3(-2) + d = 0$

$d = 32$

ecuación cartesiana del plano: $\wp: -4x + 5y - 2z + 32 = 0$

tenemos 2 vectores: $(3,2,-1)$ y $(2,2,1)$

ecuación vectorial del plano: $\wp: P = (4,-2,3) + t(3,2,-1) + s(2,2,1)$

p^1

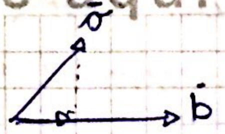
$\cdot 28 \cdot 4$

$+8+0-6+d$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

② $\sigma, b \in \mathbb{R}^2$

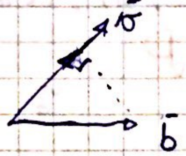


$\text{Proy}_b \sigma = (4,3)$

$\text{Proy}_b \sigma \parallel b \rightarrow b = \alpha(4,3)$

$\boxed{b = (4\alpha, 3\alpha)}$, $\|b\| = 5|\alpha|$

$\dfrac{72\alpha^2\beta}{5\alpha} = 4$



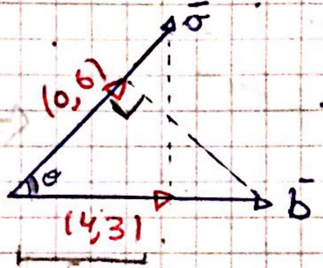
$\text{Proy}_\sigma b \parallel \bar{\sigma}$

$\sigma = \beta(0,6)$

$\sigma = (0, 6\beta)$, $\|\sigma\| = 6|\beta|$

[redacted]

[redacted]



$\cos\theta = \dfrac{\bar{\sigma}\cdot(4,3)}{\|\sigma\| \cdot}$ =

$\cos\theta = \dfrac{(0,6)\cdot(4,3)}{5\cdot 6} = \dfrac{3}{5}$ =

con el vector $\bar{\sigma}$ y $(4,3)$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5} = \dfrac{\bar{\sigma}\cdot(4,3)}{\|\sigma\|\,\|(4,3)\|} = \dfrac{(0,6\beta)\cdot(4,3)}{6\beta\cdot 5} = \dfrac{18\beta}{30\beta} = \dfrac{3}{5}$

$\cos\theta = \dfrac{5}{\|\sigma\|} = \dfrac{5}{6|\beta|} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \beta = \dfrac{25}{18}$ o $\beta = -\dfrac{25}{18}$

$\boxed{\sigma = (0, \tfrac{25}{3})}$ $\sigma = (0, -\tfrac{25}{3})$

$\cos\theta = \dfrac{6^2}{5|\alpha|} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 2$ o $\alpha = -2$

$\boxed{b = (8,6)}$ ✓ $b = (-8, -6)$

$\dfrac{50}{\ 25\ }$ ~~$\dfrac{25}{3}\cdot 20$~~

$\sigma \perp b$

$b \perp c$

$\dfrac{25}{3} \cdot 6$

$\dfrac{50}{\frac{25}{3}\cdot 10}$ =

$\dfrac{3}{5}\cdot(0, -\tfrac{25}{3})$

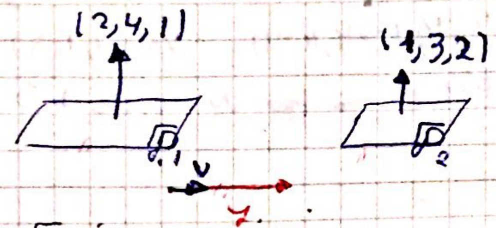
$(0, -5)$

3pts

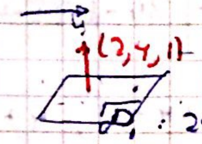
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

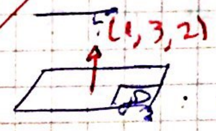
④



$n_1 \cdot V_{\gamma_1} = 0$ $\qquad$ $n_2 \cdot V_{\gamma_1} = 0$



$\mathcal{P}_1 : 2x+4y+z-6=0$



$\mathcal{P}_2 : x+3y+2z+7=0$

entonces, $\gamma_1 \perp (2,4,1)$ $\qquad$ entonces, $\gamma_1 \perp (1,3,2)$

$\therefore \; V \perp (2,4,1)$ $\qquad$ $V \perp (1,3,2)$

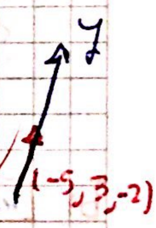
$V \cdot (3,4,1) = 0$ $\qquad$ $V \cdot (1,3,2) = 0$

$\Rightarrow V \parallel (1,3,2) \times (2,4,1)$

PARALELO

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (3-8;\ -[1-4];\ 4-6)$$

$= (-5;\ 3;\ -2)$ es el vector dirección de γ, ya que



3pts

ecuación vectorial de la recta

$$\{\gamma : P = (0,5,-3) + t(-5,3,-2)$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5) $v_1(4k-1; 2, 2k-1)$; $v_2(k, 1-2k, k-4)$ $v_3(-1, 1, 3)$

a) L.I → FORMAN PARALELEPÍPEDOS → PRODUCTO MIXTO ≠ 0

$V_1 \cdot (V_2 \times V_3) \neq 0$

$$V_2 \times V_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ k & 1-2k & k-4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left(3(1-2k)-(k-4); -[3k-(-1)(k-4)]; k-(-1)(1-2k)\right)$$

$$= (3-6k-k+4; -(3k+k-4); k+1-2k)$$

$$= (7-7k, -4k+4; 1-k)$$

$$V_1 \cdot (V_2 \times V_3) = (4k-1, 2, 2k-1) \cdot (7-7k, -4k+4, 1-k)$$

$$(4k-1)7(1-k) + 2(-4)(k-1) + (2k-1)(1-k) \neq 0$$

$$(4k-1)(-7)(k-1) + (-8)(k-1) + (k-1)(1-2k) \neq 0$$

$$(k-1)[(4k-1)(-7) + (-8) + (1-2k)] \neq 0$$

$$(k-1)(-28k+\cancel{7}\cancel{-8}+1-2k) \neq 0$$

$$(k-1)(-30k) \neq 0$$

$$(k-1)k \neq 0$$

$$k \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$$

b) $\boxed{k=-1}$ → $V_1(-5, 2, -3)$ $V_2=(-1, 3, -5)$; $V_3=(-1, 1, 3)$

$V_1 + V_2$

$$(-5, 2, -3) + (-1, 3, -5) = (-6, 5, -8) = \vec{a}$$

$$V_2 + V_3 = (-2, 4, -2) = \vec{b}$$

$$V_3 + V_1 = (-6, 3, 0) = \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (b \times c) \Rightarrow b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+6; -[0-12]; -6+24)$$

$$(6, 12, 18)$$

$$a \cdot (b \times c) = (-6, 5, -8) \cdot (6, 12, 18)$$

$$= |(-36+60-144)| = |-120|$$

$$= 120u^3$$

$(-2)(-1)$

-4

$-2-1$

6
1.8
8
4

36
4

COMPROBAR

$COMP(1,1) = \frac{(-1)}{1}$

$(0,-1)$

$\boxed{-1}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

⑥ a) $(-3,13,2) = c_1(-3,5,-2) + c_2(1,1,2)$

$(-3,13,2) = (-3c_1 + c_2,\ 5c_1 + c_2,\ -2c_1 + 2c_2)$

$-3 = -3c_1 + c_2$ $\qquad +13 = 5c_1 + c_2$ $\qquad 2 = -2c_1 + 2c_2$

$-1 = c_1 - c_2$ $\qquad 1 = -c_1 + c_2$

$12 = 6c_1$ $\qquad 1 = c_2 - c_1$

$c_1 = 2$ $\qquad c_2 = 3$

$-3 = -3(2) + 3$

$-3 = -3$ ✓

Sí hay solución → w sí es combinación lineal

1p

b) $v_1 \perp v_2$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 \neq \bar{0}$, $v_2 \neq \bar{0}$

Contraejemplo: Sea $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,-3,1)$ } $v_1 \perp v_2$

$L_1 = (10,9,5) + t(2,4,6)$ $\quad // v_1$

$L_2 = (6s, -6s, 2s) + (0,0,0)$ $\quad // v_2$

$v_1 : (1,2,3)$ y $v_2 (3,-3,1)$

$v_1 \cdot v_2 = 0 \to v_1 \perp v_2$

$L_1 \cap L_2$: $(10+2t, 9+4t, 6t+5) = (6s, -6s, 2s)$

$10+2t = 6s$ $\qquad 9+4t = -6s$ $\qquad 6t+5 = 2s$

$10+2t = -(9+4t)$ $\qquad 6\left(\frac{-19}{6}\right) + 5 = 2s$

$10+2t = -9-4t$ $\qquad -19+5 = 2s$

$6t = -19$

$t = \frac{-19}{6} \to s = \frac{-11}{3}$ ← Absurdo → $s = -7$

L_1 y L_2 no se cortan, mucho menos se cortarían ortogonalmente

1p

$\text{Proy}_v u = \frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2} v$

$\frac{u \cdot v}{\|v\|} \frac{v}{\|v\|}$

c) u y $v \in \mathbb{R}^2$, $u, v \neq 0$

Si $\text{comp}_u(u+v) > 0 \Rightarrow \frac{(u+v) \cdot u}{\|u\|} > 0$, como $\|u\|$ es > 0, lo paso a multiplicar

$\text{comp}_u v = \frac{(u \cdot v)}{\|u\|}$

$(u+v) \cdot u > 0$

$u \cdot u + u \cdot v > 0$

$\|u\|^2 + u \cdot v > 0$

Pero yo sé que $\|u\|^2 > 0$, entonces $u \cdot v > 0$

F

0,5

Ver $u = (1,2)$, $v = (0,-1)$

y ... $\text{comp}_v(v+u) = \frac{(v+u) \cdot v}{\|v\|} = \frac{v \cdot v + u \cdot v}{\|v\|} = \frac{\|v\|^2 + u \cdot v}{\|v\|}$

$= u \cdot v > 0$, $\frac{\|v\|^2 > 0}{> 0}$

$\text{comp}_v(u+v)$ también es > 0 ←

$\text{comp}_{(1,2)}(1,1) = \frac{3}{\sqrt{5}}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$u = (-1,0)$

$v = (-1,-1)$

$$\text{COMP}_{u}\, u+v = \frac{(-1,0)\cdot(-1,1)}{0} = (1)$$

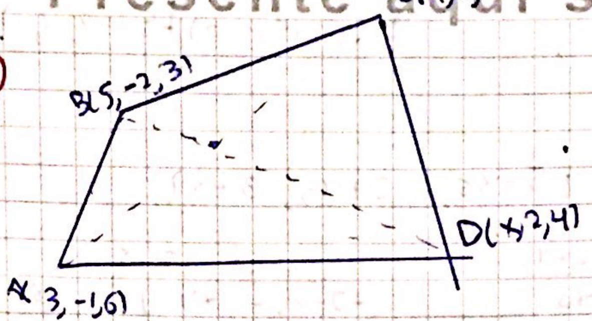
0

Fin

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

(3)



ABCD ES UNA FIGURA PLANA, es decir, NO GENERA UN PARALELEPÍPEDO, o sea, su PRODUCTO mixto es 0.

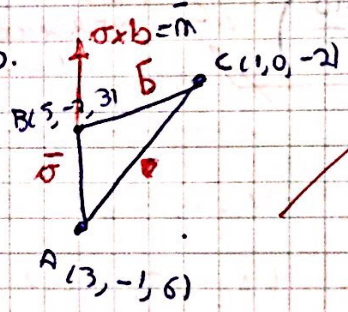
también, los vectores son combinación lineal de otro, ya que son coplanares

$\vec{AB} = (5,-2,3)-(3,-1,6) = (2,-1,-3)$

$\vec{BC} = (1,0,-2)-(5,-2,3) = (-4,2,-5)$

$\vec{CD} = (x,2,4)-(1,0,-2) = (x-1,2,6)$

A, B, C y D FORMAN UN PLANO.



$\vec{AB} = \vec{a} = (2,-1,-3)$

$\vec{BC} = \vec{b} = (-4,2,-5)$

$$\vec{a}\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$= (5+6; -[-10-12]; 4-4)$

$= (11, 22, 0)$

$\mathcal{P}: 11x+22y+D=0$, pero $C(1,0,-2)\in\mathcal{P}$

$11+22(0)+D=0$

$D=-11$

$\mathcal{P}: 11x+22y-11=0$

$\mathcal{P}: x+2y-1=0$

y $D(x,2,4)\in\mathcal{P}$, $x+2.2-1=0 \Rightarrow \boxed{x=-3}$

DIAGONALES: AC y BD

$\vec{AC} = (1,0,-2)-(3,-1,6)$

$= (-2,1,-8)$

vector dirección

$\vec{BD} = (-3,2,4)-(5,-2,3)$

$\vec{BD} = (-8,4,1)$

vector dirección

$L_1: P = (1,0,-2)+t(-2,1,-8)$

$L_2: P = (5,-2,3)+s(-8,4,1)$

$L_1 \cap L_2$: ↳ (Parte de atrás

Margin notes: P.M = 0; l.d; 3-2-1; 5-4-1; 1.(; -3+4=1

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$L_1: P = (1, 0, -2) + t(-2, 1, -8)$; $L_2: P = (5, -2, 3) + s(-8, 4, 1)$

$\exists$ un punto P:

$(1-2t, t, -2-8t) = (5-8s; -2+4s; 3+s)$

$\boxed{1-2t = 5-8s}$ $\boxed{t = -2+4s}$ $\boxed{-2-8t = 3+s}$

$8s - 2t = 4$

$4s - t = 2$

$4s - (-2+4s) = 2$

$\underline{2 = 2}$

$t+2 = 4s$

$t = -2+4s$

$-2-8(-2+4s) = 3+s$

$-2+16-32s = 3+s$

$11 = 33s$

$s = 1/3$

$t = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

Reemp.

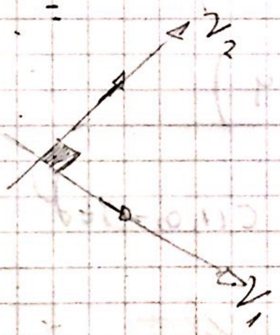
$= \left(1 - 2\left(-\frac{2}{3}\right); -\frac{2}{3}, -2-8\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

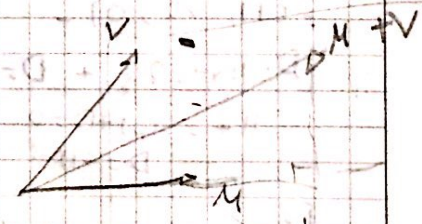
$= \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, +\frac{10}{3}\right)$ ← punto de intersección de las diagonales.

$v_1 \perp v_2 \rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$ $\begin{cases} v_1 : (1, 2, 3) \\ v_2 : (3, -3, 1) \end{cases}$

$L \parallel v_1 : (50, 9, 5) + t(2, 4, 6)$

$L \parallel v_2 : (6s, -6s, 2s) + (1, 1, \ldots$





$Proy_{u}^{u+v} = \frac{(u+v) \cdot u}{\|u\|} \frac{u}{\|u\|}$

$\|u\|^2 + u \cdot v > 0$

$\frac{(u+v) \cdot u}{\|u\|} > 0 \rightarrow$

$u \cdot v + \|v\|^2$

$\frac{(u+v) \cdot v}{\|v\|} > 0$