ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

EXAMEN PARCIAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2019-1

Horario: Todos. Duración: 180 minutos.

Elaborado por todos los profesores.

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

1. Determine el mayor dominio posible de la función f cuya regla de correspondencia es (2 pt)

$$f(x)=\frac{\sqrt{|4x-12|-x^2}}{4+\sqrt{4-|x|}}.$$

2. Sean f y g las funciones definidas por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & \text{si } -1\le x<0;\\ \sqrt{x}+2, & \text{si } x\ge 0.\end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=x-2+|x|,\ -4<x<3.$$

a) Esboce la gráfica de f e indique su rango. (1.5 pt)

b) Halle el dominio y la regla de correspondencia de la función $g\circ f$. (1.5 pt)

c) Esboce la gráfica de $g\circ f$, indicando sus intersecciones con los ejes coordenados. (1.5 pt)

d) Encuentre el conjunto solución de la ecuación $g(f(x))=-2$. (0.5 pt)

3. Halle la regla de correspondencia de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones: (4 pt)

- f es una función impar.
- Para $x\in\,]0,2[$, la gráfica de f es una semicircunferencia con centro $(1,1)$ y radio 1.
- Para $x\in[2,+\infty[$, $f(x)$ es de la forma $f(x)=\dfrac{ax}{bx-1}$, con a y b constantes.
- La gráfica de f pasa por el punto $(2,4)$.
- La recta $L: y=2$ es una asíntota de la gráfica de f.
- $\dfrac{1}{2}$ pertenece al rango de f.

4. Sea a una constante real. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + (1-a)x^2 - ax, & \text{si } x < -1; \\ 2 - x, & \text{si } x \geq a^2 + a\,. \end{cases}$$

a) Haga un esbozo de la gráfica de f cuando $a = -2$, indicando sus intersecciones con los ejes coordenados. (2 pt)

b) Encuentre el menor valor de a para el cual la gráfica de f interseca al eje Y. (1 pt)

c) Encuentre el conjunto de todos los valores de a para los cuales la gráfica de f interseca al eje X. (2 pt)

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones impares entonces la función $g \circ f$ es impar. (1 pt)

b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $(f(x))^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces el rango de f es $\mathbb{R}$. (1

c) Si el rango de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $[0, +\infty[$ y el rango de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $[0, +\infty[$ entonces el rango de la función $f + g$ es $[0, +\infty[$. (1 pt)

d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función polinómica de grado 6 y sus raíces reales son -1, 2 y 4 con multiplicidades 1, 2 y 3 respectivamente, entonces $f(0)f(5) < 0$. (1 pt)

San Miguel, 13 de mayo de 2019.