ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN PARCIAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2022-2

Horarios: **TODOS** Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación. - Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad. - Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos. - Tome las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos; de tener alguna emergencia, comuníqueselo a su jefe de práctica. - Si desea retirarse del aula y dar por concluida su evaluación, deberá haber transcurrido la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.
INDICACIONES:
- **Puede utilizar calculadoras siempre que no sean programables ni gráficas.** - **No puede usar apuntes de clase ni libros.** - **El examen consta de 6 preguntas. Debe justificar sus respuestas.** - **Puede responder las preguntas en el orden que desee, sólo asegúrese de colocar en la parte superior de cada página el número de la pregunta que está resolviendo.**

Pregunta 1

Considere la curva cuya ecuación es

$$5x^2 + 26xy + 5y^2 - (14\sqrt{2})x + (50\sqrt{2})y - 38 = 0$$

a) Encuentre las ecuaciones de rotación que permiten identificar la curva. (0,5 puntos)

b) Identifique de qué tipo de cónica se trata y halle las coordenadas de su centro en el sistema XY. (2 puntos)

c) Grafique la cónica en el sistema XY, señalando la ubicación de su centro y de su eje focal. (1 punto)

Pregunta 2

Sobre los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ se sabe lo siguiente

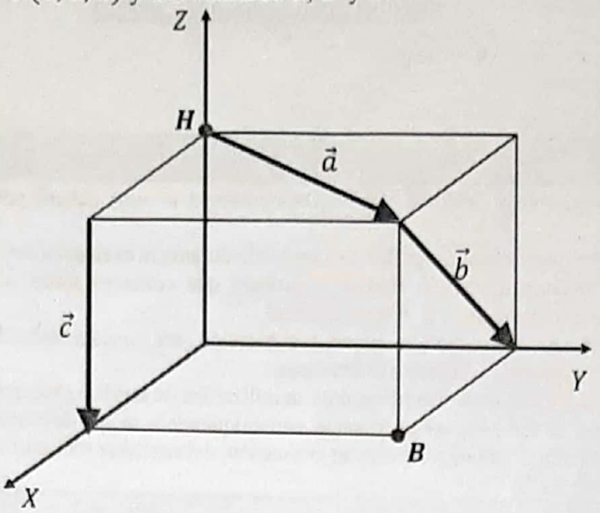
- $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$ y $\|\vec{b}\| = 2$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}$
- $\vec{w} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

a) Calcule $\|\vec{w}\|$. (1,5 puntos)

b) Si además se sabe que $\vec{w}$ es paralelo y de sentido opuesto al vector $(-1; 2; 6)$, halle $\vec{w}$. (0,5 puntos)

Pregunta 3

En la siguiente figura se muestra un paralelepípedo con aristas paralelas a los ejes de coordenadas, los puntos $H(0;\ 0;\ 4)$ y $B(4; 6; 0)$ y los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.



a) Halle las componentes de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. (1,5 puntos)

b) Calcule el resultado de la siguiente operación (1,5 puntos)

$$(\vec{b}+\vec{c}) \times (\vec{a} \times 4\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}) + \|\vec{c}\|(\vec{a}+\vec{b}).$$

Pregunta 4

Dada la siguiente ecuación en las incógnitas x e y:

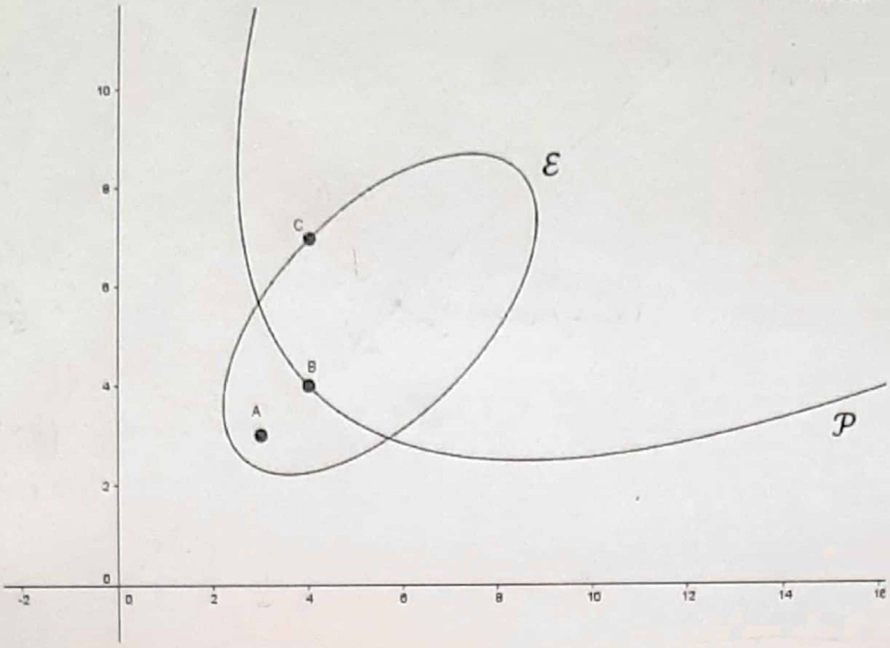
$$9x^2 + ky^2 - 54x - 63 = 0,$$

Determine, en cada uno de los siguientes casos, los valores que debe tomar k para que la ecuación represente:

a) Elipses cuyo eje focal es el eje X. (1,5 puntos)
b) Hipérbolas y encuentre las coordenadas de sus vértices. (1 punto)
c) Dos rectas y halle las ecuaciones de dichas rectas. (1 punto)

Pregunta 5

Considere una elipse $\mathcal{E}$ y una parábola $\mathcal{P}$, cuyas gráficas se muestran a continuación:



Si además se sabe que

- $A(3; 3)$ es un foco de $\mathcal{E}$.
- $B(4; 4)$es el vértice de $\mathcal{P}$ y está en eje focal de $\mathcal{E}$.
- $C(4; 7)$ es un extremo del eje menor de $\mathcal{E}$.
- El lado recto de $\mathcal{P}$ contiene al eje menor de $\mathcal{E}$,

halle las ecuaciones de la elipse $\mathcal{E}$ y de la parábola $\mathcal{P}$. (4 puntos)

Pregunta 6

Considere lo siguiente

- La recta $\mathcal{L}$ pasa por los puntos $(6; -5)$ y $(6; 5)$.
- Un punto P se mueve de modo que su distancia al punto $C(-3; 4)$ siempre es 3 unidades.
- Desde el punto P se traza una recta que corta perpendicularmente a $\mathcal{L}$ en el punto R.
- Los puntos de trisección del segmento $\overline{PR}$ son A y B, siendo B el punto más cercano a R.

a) Halle la ecuación del lugar geométrico descrito por B. (3 puntos)
b) Grafique el lugar geométrico hallado en a), ubicando su centro y eje focal. (1 punto)

Examen elaborado por los profesores del curso
Coordinadora de teoría: Prof. Cecilia Gaita
San Miguel, 10 de octubre del 2022

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

PUCP

Año: 2022 Número: 2910

Código de alumno

Primer examen

Fernández Vega Betsabe Aracely

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: A-101

Fecha: 10/10/2022

Nombre del profesor: R. Quispe

Nota

19

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$x = u\cos\theta - v\,\mathrm{Sen}\theta$

$y = u\,\mathrm{Sen}\theta + v\cos\theta$

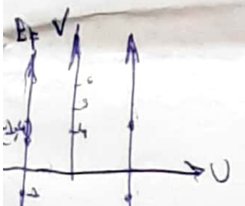
$u = x\cos\theta + y\,\mathrm{Sen}\theta$

$v = y\cos\theta - x\,\mathrm{Sen}\theta$

$\cancel{10u^2+5v^2-5+10uv+10u^2}$

$$\frac{5u^2+5v^2-10uv+5u^2+5v^2+10uv}{2}$$

$$\frac{10u^2+10v^2}{2}$$



$H \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Presente aquí su trabajo

1. $5x^2+26xy+5y^2-(14\sqrt{2})x+(50\sqrt{2})y-38=0$

$A=5 \quad B=26 \quad C=5 \quad \rightarrow \theta=\pi/4 \rightarrow \mathrm{Sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underbrace{A=5 \quad C=5}_{=}$ $\qquad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

0,5

$x = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$

$y = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ } ecuaciones de rotación

Reemplazamos:

$$5\frac{(u-v)^2}{2} + \cancel{26}^{13}\frac{(u^2-v^2)}{\cancel{2}} + 5\frac{(u+v)^2}{2} - 14\cancel{\sqrt{2}}\frac{(u-v)}{\cancel{\sqrt{2}}} + 50\cancel{\sqrt{2}}\frac{(u+v)}{\cancel{\sqrt{2}}} = 38$$

$$\underbrace{\frac{5(u^2+v^2-2uv)}{2} + \frac{5(u^2+v^2+2uv)}{2}}_{} + 13u^2 - 13v^2 - 14u + 14v + 50u + 50v = 38$$

$$5u^2 + 5v^2 + 13u^2 - 13v^2 + 36u + 64v = 38$$

$$18u^2 - 8v^2 + 36u + 64v = 38$$

$$18(u^2+2u+1-1) - 8(v^2-8v+16-16) = 38$$

$$18(u+1)^2 - 18 - 8(v-4)^2 + 128 = 38$$

$$18(u+1)^2 - 8(v-4)^2 = -72 \quad \ldots \div 18$$

2,0

$(u;v)$

$$8(v-4)^2 - 18(u+1)^2 = 72$$

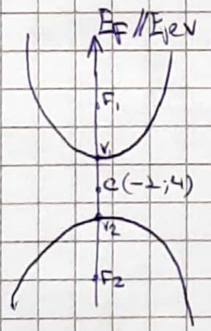
$$\frac{(v-4)^2}{\frac{72}{8}} - \frac{(u+1)^2}{\frac{72}{18}} = 1$$

Es una hipérbola $\leftarrow$

$$\frac{(v-4)^2}{9} - \frac{(u+1)^2}{4} = 1$$

$a=3 \quad b=2$

$c=\sqrt{13}$



Centro en uv: $(-1;4)$

eje focal // eje v

E_F: $u=-1$

Entonces:

$x = -1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-5}{\sqrt{2}}$

$y = -1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

1,0

Centro en XY: $\left(\frac{-5}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$u=-1 = x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$-1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \ldots \times\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} = x + y \rightarrow$ Eje focal en XY:

E_F: $x+y+\sqrt{2}=0$

Presente aquí su trabajo

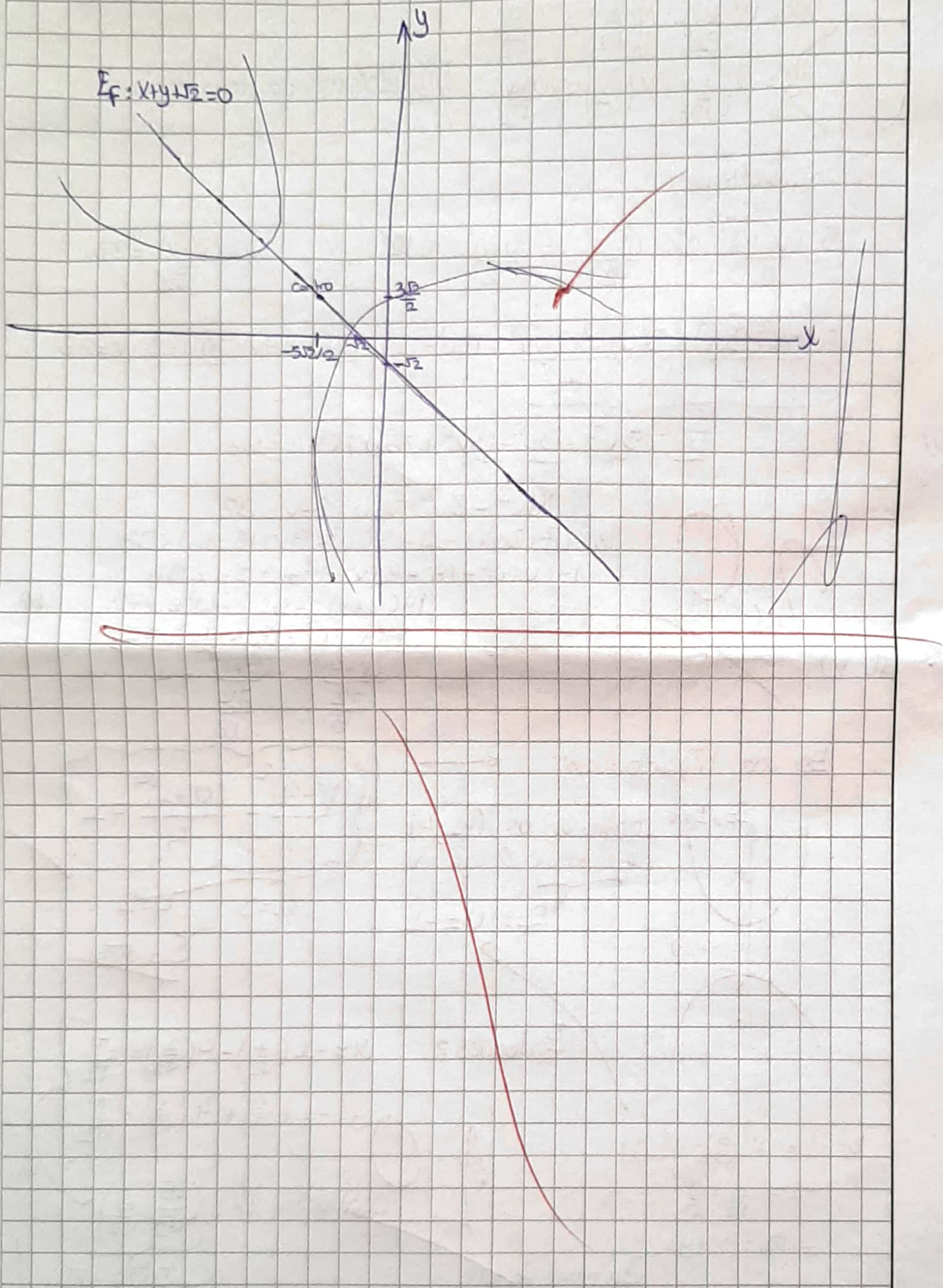
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Graficamos la hipérbola en xy

→ centro en xy : $\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2} ; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

→ E focal en xy : $x+y+\sqrt{2}=0$ →

x	y
0	$-\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$	0



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\vec{a}\cdot\vec{a} = \|a\|^2 = 2$

$\vec{b}\cdot\vec{b} = 4$

$\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \vec{a}\cdot\vec{b}$

$2(\vec{a}\cdot\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b}$

$\vec{w} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

$w_1 = 2a_1 - 3b_1$

$\sqrt{(2a_1-3b_1)^2+(2a_2-3b_2)^2+(2a_3-3b_3)^2}$

Presente aquí su trabajo

2)

$a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 2$

$b_1^2+b_2^2+b_3^2 = 4$

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \qquad \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

$\vec{w} = (2a_1-3b_1; 2a_2-3b_2; 2a_3-3b_3)$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(2a_1-3b_1)^2+(2a_2-3b_2)^2+(2a_3-3b_3)^2}$

$= \sqrt{4a_1^2+4a_2^2+4a_3^2+9b_1^2+9b_2^2+9b_3^2-12a_1b_1-12a_2b_2-12a_3b_3}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{\underbrace{4(2)}_{8}+\underbrace{9(4)}_{36}-\underbrace{12\left(\frac{1}{4}\right)}_{-3}} \rightarrow \|\vec{w}\| = \sqrt{41}$ //

1,5

b)

$\vec{w} = m(1;-2;-6) \rightarrow \vec{w} = (m; -2m; -6m)$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(1m)^2+(-2m)^2+(-6m)^2} = \sqrt{m^2+4m^2+36m^2}$

$\underbrace{\|\vec{w}\|}_{\sqrt{41}} = \sqrt{41}\,m$

$\boxed{m=1}$

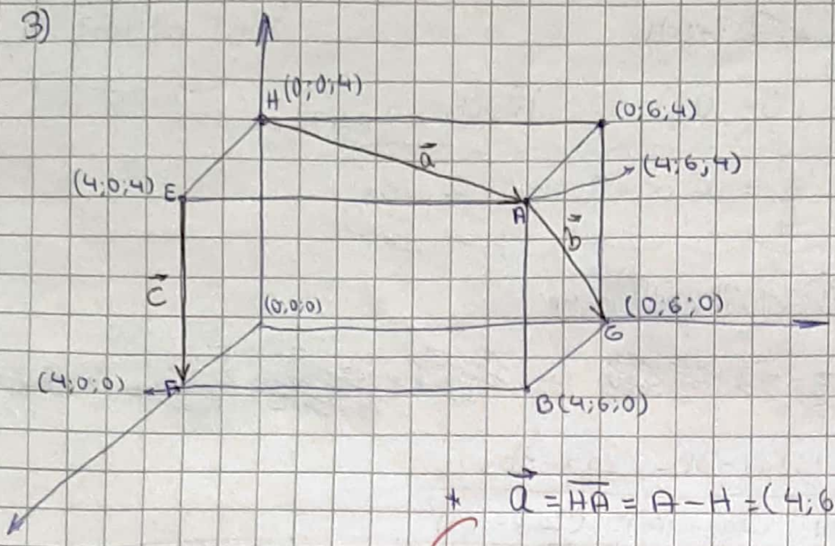
1,5

$\therefore \vec{w} = (1; -2; -6)$ //

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3)



$* \ \vec{a} = \overline{HA} = A - H = (4;6;4) - (0;0;4)$

$\vec{a} = (4;6;0)$

$* \ \vec{b} = \overline{AG} = G - A = (0;6;0) - (4;6;4)$

$\vec{b} = (-4;0;-4)$

$* \ \vec{c} = \overline{EF} = F - E = (4;0;0) - (4;0;4)$

$\vec{c} = (0;0;-4)$

$\vec{a} \cdot (4;6;0)$

$4\vec{a} \ (16;24;0)$

b)

$(\vec{b}+\vec{c}) \times (\underbrace{\vec{a} \times 4\vec{a}}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}) + \|\vec{c}\|(\vec{a}+\vec{b})$

$\underbrace{\underbrace{(\vec{b}+\vec{c})}_{(-4;0;-8)} \times (0;0;0)}_{0\,+} + \underbrace{(0)(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})}_{0} + 4(0;6;-4)$

$(\theta - 0; -(0-0); \overset{0}{\overbrace{4(24)-6(16)}})$

$+ (0;24;-16)$

$\therefore (0;24;-16)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

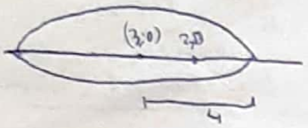
$b<a$

$\frac{144}{k} < 16$

$9<k$

$k>9$

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-0)^2}{12}$ $a=4$ $\to 2\sqrt{3}=b$



$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-0)^2}{\frac{144}{-k}}$

4)

$$9x^2+ky^2-54x=63$$

$$k(y-0)^2+9(\underbrace{x^2-6x+9-9}_{9((x-3)^2-9)})=63$$

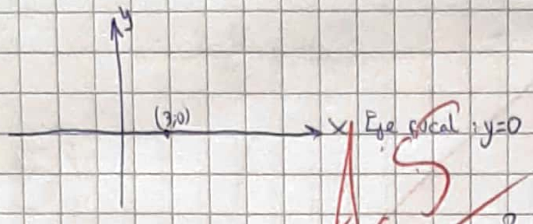
$$k(y-0)^2+9(x-3)^2-81=63$$

$$k(y-0)^2+9(x-3)^2=144$$

$$\frac{(y-0)^2}{\frac{144}{k}}+\frac{(x-3)^2}{16}=1$$

Centro (3;0)

a) $\mathcal{E}$; eje focal en eje X → $y=0$



1,5

para ello:

$$\frac{(x-h)^2}{\underset{a=4}{a^2}}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad b^2=\frac{144}{k}$$

$a^2=b^2+c^2$

$a>b$ y c → $\frac{144}{k}<16$ → $k>9$

los valores que toma k son $]9;+\infty[$

b)

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-0)^2}{\frac{144}{k}} = 1$$ → para que sea hipérbola debe ser una resta

→ $\frac{144}{k}<0$ → $\boxed{k<0}$

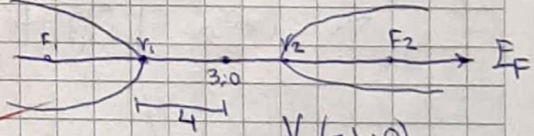
así lograríamos obtener

$$\underbrace{\frac{(x-3)^2}{16}}_{a^2}-\frac{(y-0)^2}{\underbrace{\frac{144}{-k}}_{(-)}}=1$$ → hipérbola de centro (3;0) eje focal // eje x

$a^2=16$

$\boxed{a=4}$

1,0



$V_1(-1;0)$

$V_2(7;0)$

∴ k debe ser menor a cero ($]-\infty;0[$) y así los vértices serían $V_1(-1;0)$ y $V_2(7;0)$

Presente aquí su trabajo

c) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-0)^2}{\frac{144}{k}} = 1$

$\rightarrow 16 = \frac{144}{k} \rightarrow k = 9$

$k=0$

k tiene que ser 9

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\cancel{(x-3)^2 + y^2 = 16}$

$1 - \frac{y^2 k}{144} = 0$

$144 = y^2 k$

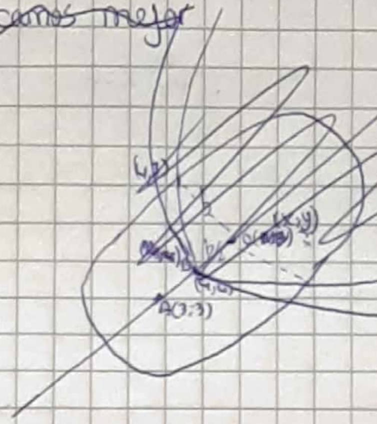
12(11)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$9 = b^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{5b^2}{4}$ $\quad OB = \frac{b}{2}$

~~Graficamos mejor~~



Eje focal $x=y$ $\quad O(x;y) = (x;x)$

$d(O;C) = 2\,d(O;B)$

$(x-4)^2 + (x-7)^2 = 4(x-4)^2 + 4(x-4)^2$

$(x-7)^2 = 7(x-4)^2$

$x^2 - 14x + 49 = 7x^2 - 56x + 112$

$0 = 6x^2 - 42x + 63$

$0 = 2x^2 - 14x + 21$

$\boxed{x = \frac{7+\sqrt{7}}{2}}$ $\quad x = \frac{7-\sqrt{7}}{2}$

~~centro $\left(\frac{7+\sqrt{7}}{2}; \frac{7+\sqrt{7}}{2}\right)$~~

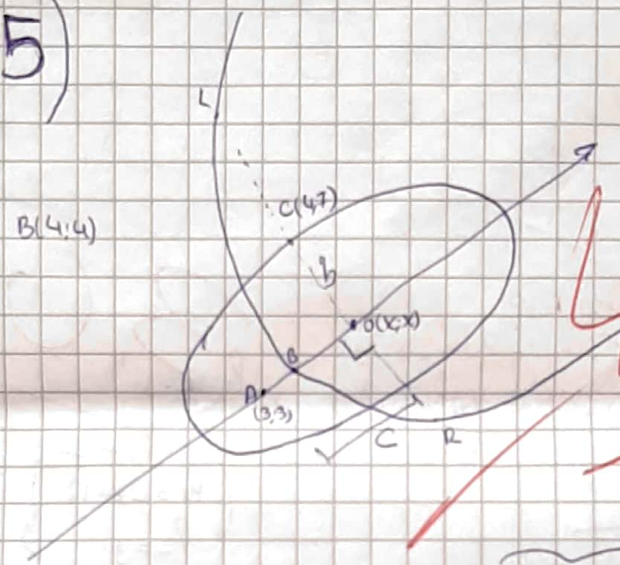
$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$b = 5{,}155$

$\frac{14 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{2}$

$\frac{-(-14) \pm \sqrt{14^2 - 4(2)(21)}}{4}$

5)



Eje focal $x=y$

B(4;4)

40

$m_{AB} = 1 \Leftrightarrow m_{OC} = -1$

$-1 = \frac{x-7}{x-4}$

$4 - x = x - 7$

$\frac{11}{2} = x$

centro $\left(\frac{11}{2}; \frac{11}{2}\right)$

$F_1(3;3)$

$F_2(a;a)$

$(a-3)^2 + (a-3)^2 = \frac{25}{2}$

$\frac{5}{4} + 3 = a$

$\frac{17}{4} = a$

$b = \sqrt{\left(\frac{11}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{11}{2}-7\right)^2}$

$b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$c = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ $\quad a = \sqrt{17}$

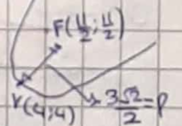
$\frac{9}{2} + \frac{25}{2} = \frac{34}{2}$

$b^2 = \frac{9}{2}$

$c^2 = \frac{25}{2}$

$F_2\left(\frac{17}{4}; \frac{17}{4}\right)$

P:



$\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right) \leftarrow (b;b)$

$m = -1$

$D: y - \frac{5}{2} = -1\left(x - \frac{5}{2}\right)$

$D: x + y - 5 = 0$

$\sqrt{(4-b)^2 + (4-b)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$2(4-b)^2 = \frac{9}{2}$

$4 - b = \frac{3}{2}$

$\boxed{b = \frac{5}{2}}$

$d(P;F) = d(P;D)$

$\mathcal{E}: \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{\left(x-\frac{17}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{17}{4}\right)^2} = 2\sqrt{17}$

$d(P;F_1) + d(P;F_2) = 2a$

$\frac{2y-5}{2} = -1\left(\frac{2x-5}{2}\right)$, $\underbrace{\ }_{5-2x}$

$2x + 2y - 10 = 0$

$x + y - 5 = 0$

$\mathcal{P}: \sqrt{\left(x-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$

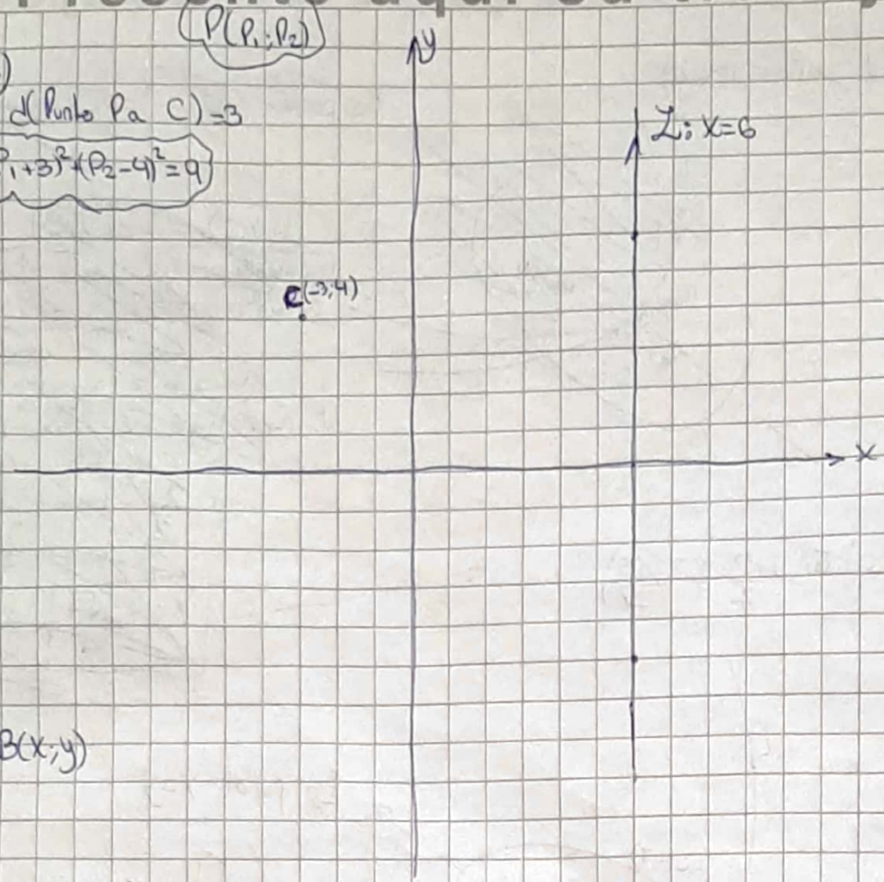
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

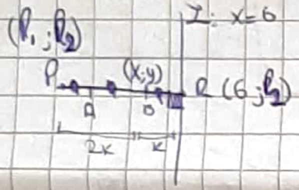
6) $P(P_1;P_2)$

d(Punto P a C) = 3

$\boxed{(P_1+3)^2+(P_2-4)^2=9}$



$B(x;y)$



$P+2R=3B$

$(P_1;P_2)+(12;2P_2)=(3x;3y)$

$(P_1;y)+(12;2y)=(3x;3y)$

$P_2=y$

$\frac{P_1+12}{3}=x$

$P_1=3x-12$

$P_2=y$

3.0

$\rightarrow \sqrt{(P_1+3)^2+(P_2-4)^2}=3$

$\sqrt{(3x-12+3)^2+(y-4)^2}=3$

$(3x-9)^2+(y-4)^2=9 \Rightarrow 9(x-3)^2+(y-4)^2=9$

$(3(x-3))^2$

$\frac{(x-3)^2}{1}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

∴ La ecuación del LG

Eje focal: $x=3$

→ Graficamos el lugar geométrico

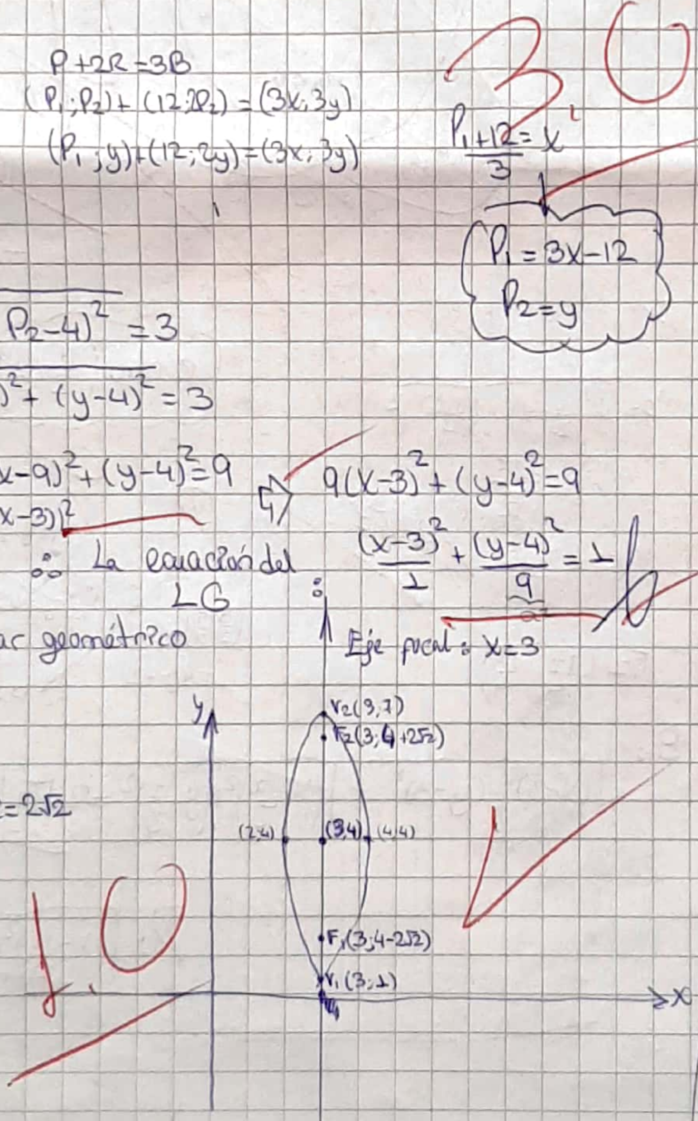
Centro: $(3;4)$

eje focal // eje y

$a^2=9 \rightarrow a=3$

$b^2=1 \rightarrow b=1$

$> c=2\sqrt{2}$



1.0

En E: $a^2=b^2+c^2$

H: $c^2=a^2+b^2$