ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

Tercera Práctica Calificada - Soluciones propuestas

Semestre Académico 2022 -1

Turno 1: 3 - 5 p.m.

---

1. El número N de personas contagiadas por una pandemia en un cierto país se puede modelar por $N(t) = 243\left(\frac{4}{3}\right)^t$, donde $t \geq 0$ es el número de días transcurridos desde el día inicial.

   a) ¿Cuál era el número de personas contagiadas en el día inicial? (1.0 p)

   Solución:
   $N(0) = 243$ personas contagiadas.

   b) ¿Cuántos días transcurrieron desde el día inicial hasta tener 1024 personas contagiadas? (2.0 p)

   Solución:
   Deemos resolver $N(t) = 243\left(\frac{4}{3}\right)^t = 1024 \iff \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1024}{243} = \iff t = \log_{4/3}\left(\frac{1024}{243}\right) = 5$ días.

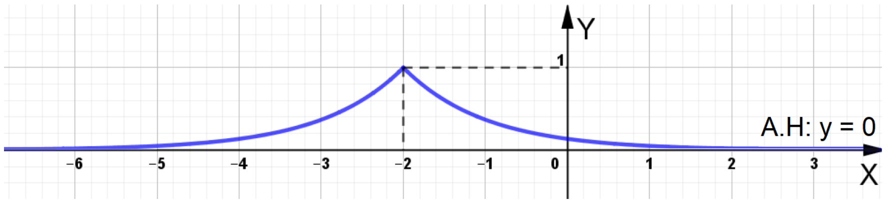
2. Sea la función f definida por

$$f(x) = e^{-|x+2|}$$

   a) Grafique la función f, indicando las ecuaciones de sus asíntotas (en caso existan). (2.5 p)

   Solución:

$$f(x) = e^{-|x+2|}\begin{cases} e^{x+2}, & x < -2, \\ e^{-(x+2)}, & x \geq -2. \end{cases}$$



   b) Indique los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente. (1.0 p)

   Solución:
   f es creciente en $]-\infty, -2]$ y f es decreciente en $[-2, +\infty[$.

c) Halle los valores de x que cumplan la inecuación: $f(x) < \dfrac{1}{e}$. (1.5 p)

Solución:
$e^{-|x+2|} < \dfrac{1}{e} \iff -|x+2| < -1 \iff |x+2| > 1 \iff x < -3 \vee x > -1.$

3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(1+e^x), & x \leq 0, \\ \dfrac{x+2}{x+1}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Encuentre el rango de f. (2.0 p)

Solución:
Para el primer tramo cuando $x \leq 0$, $u = 1+e^x$ toma todos los valores en $]1,2]$, luego $y = \log_2(u)$ toma todos los valores en $]0,1]$. Luego $Ran(f_1) =]0,1]$.
Para el segundo tramo puede graficarse $y = \dfrac{x+2}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$, $x > 0$. Este tramo es decreciente con asíntota $y = 1$ y rango $Ran(f_2) =]1,2[$.
Finalmente $Ran(f) = Ran(f_1) \cup Ran(f_2) =]0,2[$.

b) Justifique que la función f es inyectiva. (1.5 p)

Solución:
El primer tramo es creciente por ser composición de funciones crecientes en el dominio dado, luego f_1 es inyectiva.
El segundo tramo es decreciente, luego f_2 es inyectiva.
Además se cumple que $Ran(f_1) \cap Ran(f_2) =]0,1] \cap]1,2[= \emptyset$.
Luego, f es inyectiva.

c) Halle la función inversa f^{-1}, indicando su dominio. (1.5 p)

Solución:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2^x - 1), & 0 < x \leq 1 \\ -1 + \dfrac{1}{x-1}, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

$Dom(f^{-1}) = Ran(f) =]0,2[$.

4. Esboce la gráfica de la región limitada por las curvas

$$\mathscr{C} : x = 1 + \sqrt{-7 - y^2 + 8y}; \quad \mathscr{L} : y = x$$

indicando las coordenadas de los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ con $\mathscr{L}$. (3.0 p)

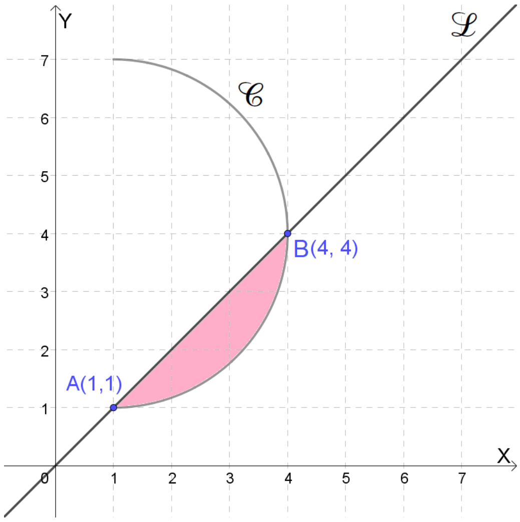
Solución:
$\mathscr{C}$ es una semicircunferencia $\mathscr{C}$: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$, $x \geq 1$.
$\mathscr{L}$ es la recta que pasa por el origen.

Para hallar los puntos de intersección se resuelve el sistema

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{-7 - y^2 + 8y} \\ y = x. \end{cases}$$

Resolviendo $(x-1)^2 = -7 - x^2 + 8x,\ x \geq 1 \iff x^2 - 5x + 4 = 0,\ x \geq 1.$
De donde $x = 1$ ó $x = 4$, luego como $y = x$ los puntos son $A(1,1)$, $B(4,4)$.

La región pedida es



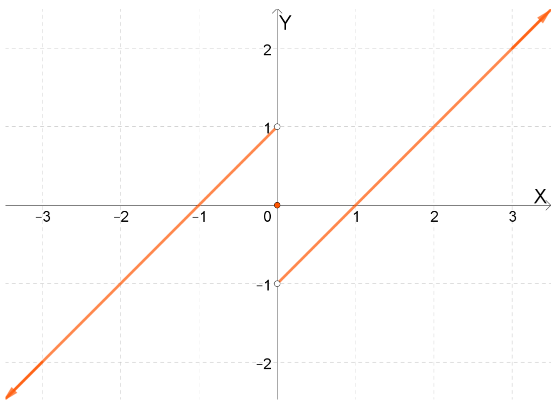
5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

 a) El dominio (implícito) de la función $f(x) = x^2 + |x| - \log_5(-1 + e^{x+4})$ es $[-3, +\infty[$. (2.0 p)

 Solución:
 Falso.
 $Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \wedge -1 + e^{x+4} > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x + 4 > 0\} =]-4, +\infty[.$

 b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar y f es creciente en $]0, +\infty[$ entonces f es creciente. (1.0 p)

 Solución:
 Falso.
 Contraejemplo: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0. \end{cases}$



c) Si f y $f+g$ son funciones crecientes, entonces g es una función creciente. (1.0 p)

Solución:

Falso.

Contraejemplo: $f(x)=x$, $g(x)=1$, $(f+g)(x)=x+1$. Cumple que f y $f+g$ son crecientes pero g no es creciente.

San Miguel, 9 de junio de 2022.