ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

Examen Final

Semestre Académico 2019 -2

Horario: Todos. Duración: 180 minutos.

Elaborado por todos los profesores.

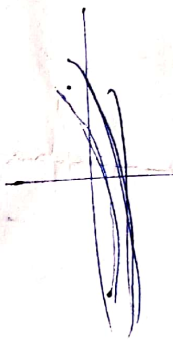
Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

---

1. Considere la función

$$f(x)=\begin{cases} \ln(kx)+1, & \text{si } x<k; \\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}(x-1), & \text{si } 0\le x\le 2. \end{cases}$$



Donde k es una constante real.

a) Para $k=-2$, esboce la gráfica de f y determine su rango. (2 pt)

b) Para $k=-2$, halle f^{-1} y esboce su gráfica. (2 pt)

c) Halle el conjunto de valores de k para los cuales f es inyectiva. (1 pt)

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones: (4 pt)

- f es una función impar.
- Para $x\in\,]0,1[$, $f(x)$ es de la forma $f(x)=a+5b^x$, donde a y b son constantes positivas.
- Para $x\in[1,+\infty[$, $f(x)$ es de la forma $f(x)=2\arctan(1-x)$.
- El rango de f es $]-6,-4[\,\cup\,]-\pi,\pi[\,\cup\,]4,6[$.

Calcule los valores de a, b y esboce la gráfica de f.

3. Calcule los siguientes límites. (2 pt)

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{-\sqrt[3]{x}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

4. a) Calcule la siguiente suma en términos de n. (2.5 pt)

$$\sum_{k=2}^{n}\left[(-2)^{k-1}\binom{n+1}{k+1}+\ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\right].$$

b) Demuestre que (2.5 pt)

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}>\frac{2}{3}n\sqrt{n} \quad \text{para todo entero positivo } n.$$

Sugerencia. Use inducción matemática.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) La función $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, $\frac{3\pi}{2}\leq x<\frac{7\pi}{2}$, posee valor máximo pero no valor mínimo. (F) (1 pt)

b) Si $\lim_{x\to 0} xf(x)=0$ entonces el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe. (F) (1 pt)

c) La función $g(x)=\cos\left(\pi x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, es impar. (V) (1 pt)

d) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si la función $g(x)=[f(x)]^2$, $x\in\mathbb{R}$, es inyectiva entonces f es inyectiva. (V) (1 pt)

$f(x)\times f(x)=\underbrace{g(x)}_{\text{creciente}}$

San Miguel, 02 de diciembre de 2019.