PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Álgebra Matricial y Geometría Analítica
Cuarta Práctica Calificada
(2017-2)

Indicaciones:

* No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 1 hora y 50 minutos.

Turno 1: 15:00 - 17:00.

---

1. *a*) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ los vectores

$$\vec{v}_1 = (1,1,1)\ ,\ \vec{v}_2 = (-1,2,k)\ ,\ \vec{v}_3 = (1,4,k^2)$$

forman una base de $\mathbb{R}^3$? (3 pts)

   b) Considere los vectores $u = (2,2,2)$ y $v = (a, a+1, a+2)$, con $a \in \mathbb{R}$. Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$ tal que los vectores u, v y w forman una base de $\mathbb{R}^3$. (2 pts)

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Demuestre que $A^3 = 3A^2$. (2 pts)

   b) Halle la solución de la ecuación $A^5 - 3X^T = 2A^4$. (3 pts)

3. *a*) Si $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ es una matriz triangular inferior, demuestre que $\det A$ es igual al producto de los elementos de su diagonal. (2 pts)

   b) Sea $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ una matriz tal que

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} A$. (2 pts)

4. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (4 pts)

CONTINÚA...

5. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

   a) Si A es una matriz simétrica de orden 2 tal que $\mathrm{tr}A = 0$ y $\det A = 0$, entonces $A = 0$. (1 pt)

   b) Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = I$, entonces $A = I$ ó $A = -I$. (1 pt)

Práctica elaborada por los profesores del curso.

San Miguel, 16 de noviembre del 2017.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII | PUCP

NOV. 2017

Práctica

Año: 2017 Número: 6154
Código de alumno

GRANADOS SUÁREZ ÁLVARO ALONSO
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica N°: N° 4

Horario de práctica: P-104

Fecha: 16/11/2017

Nota: 19

Nombre del profesor: PERCY F.

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: J.P
(iniciales)

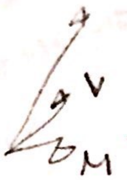
INDICACIONES

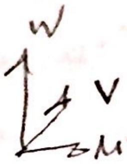
1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Agosto 2017

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)





1 a) $v_1(1,1,1)$ y, $v_2=(-1,2,k)$; $v_3=(1,4,k^2)$

PARA QUE FORMEN UNA BASE,

→ SEAN L. INDEPENDIENTES } det ≠ 0

→ GENEREN $\mathbb{R}^3$

GENERA PARALELEPÍPEDO

Será suficiente que sean L.I

3 pts

$$\det\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&2&k\\1&4&k^2\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2&k\\4&k^2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}-1&k\\1&k^2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}-1&2\\1&4\end{vmatrix} \neq 0$$

$$= (2k^2-4k)-(-k^2-k)+(-4-2)\neq 0$$

$$2k^2-4k+k^2+k-6 \neq 0$$

$$3k^2-3k-6\neq 0$$

$$k^2-k-2\neq 0$$

$$(k-2)(k+1)\neq 0$$

$$k\in\mathbb{R}\setminus\{2,-1\}$$

(LA PARTE RESTANTE ESTÁ ATRÁS)

b) $u=(2,2,2)$; $v=(a,a+1,a+2)$ $\forall a\in\mathbb{R}$

y $\boxed{w=(x,y,z)}$

LINEALMENTE INDEPENDIENTE

$$\det\begin{vmatrix}2&2&2\\a&a+1&a+2\\x&y&z\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow 2\begin{vmatrix}a+1&a+2\\y&z\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a&a+2\\x&z\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a&a+1\\x&y\end{vmatrix}\neq 0$$

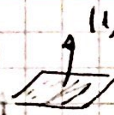
$$(a+1)z-y(a+2)-[az-x(a+2)]+ay-x(a+1)\neq 0$$

$$\cancel{az}+z-\cancel{ay}-2y-\cancel{az}+\cancel{xa}+2x+\cancel{ay}-\cancel{ax}-x\neq 0$$

$$z-2y+2x-x\neq 0$$

$$\boxed{z-2y+x\neq 0} \to \text{vector } (1,-2,1)$$

(1,-2,1)



PERO, OBSERVAMOS LO SIGUIENTE:

$2-2\cdot2+2=0$ $\qquad a+2-2(a+1)+a = 0$

∴ y el vector (1,-2,1) NO CUMPLE CON $z-2y+x\neq 0$, ASÍ QUE ∴ es l. independiente

CONJUNTO GENERADOR

$$\alpha(2,2,2)+\beta(a,a+1,a+2)+\theta(0,0,1)=$$

$$\cancel{(2\alpha+\beta a+\theta,\ 2\alpha+\beta a+\beta-2a,\ 2\alpha+\beta a+2\beta\ \theta)}=$$

$$\cancel{(2\alpha+\beta a,\ 2\alpha+\beta a+\beta}$$

$$(2\alpha+\beta a,\ 2\alpha+\beta a+\beta,\ 2\alpha+\beta a+2\beta+\theta)=(m,n,p)$$

$2\alpha+\beta a=m$ $\qquad \underbrace{2\alpha+\beta a}_{m}+\beta=n$ $\qquad \underbrace{2\alpha+\beta a}+2\beta+\theta=p$

$$\boxed{\beta=n-m}$$

$$m+2(n-m)+\theta=p$$

$$\boxed{\theta=p+2m-3n}$$

$$2\alpha+(n-m)a=m$$

$$\boxed{\alpha=\frac{m-(n-m)a}{2}}$$

entonces el vector (0,0,1) es linealmente independiente y genera $\mathbb{R}^3$

(0,0,1)

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

a)

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 9 & 9 & 9 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = A^2$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 9 & 9 & 9 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{A^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 27 & 27 & 27 \\ -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} = A^3$

$=S$

$3 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 9 & 9 & 9 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{A^2} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 27 & 27 & 27 \\ -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} = 3A^2$

2

entonces:

$A^3 = 3A^2$

b) $A^5 - 3X^T = 2A^4$

$A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 27 & 27 & 27 \\ -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 81 & 81 & 81 \\ -27 & -27 & -27 \end{pmatrix} = A^4$

~~PERO, $A^5 - 3X^T = 2A^4$~~

~~$A^5 - 2A^4 = 3X^T$~~

~~$A^4(A - 2I) = 3X^T$~~

~~$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$~~

~~entonces, $\begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 81 & 81 & 81 \\ -27 & -27 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$~~

3

$\underbrace{\begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 81 & 81 & 81 \\ -27 & -27 & -27 \end{pmatrix}}_{A^4} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 243 & 243 & 243 \\ -81 & -81 & -81 \end{pmatrix} = A^5$

$A^5 - 2A^4 = 3X^T$

$\begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 243 & 243 & 243 \\ -81 & -81 & -81 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 54 & 54 & 54 \\ 162 & 162 & 162 \\ -54 & -54 & -54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 81 & 81 & 81 \\ -27 & -27 & -27 \end{pmatrix} = 3(X^T)$

$X^T = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 27 & 27 & 27 \\ -9 & -9 & -9 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 9 & 27 & -9 \\ 9 & 27 & -9 \\ 9 & 27 & -9 \end{pmatrix}$

27

243
162
121
262
83

243
162
081

81
162
243

81
54

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$6 8 - 3d = 2$

$66 = 3d$

$\boxed{d = 22}$

$c - 16 = 18$

$c = 34$

$-5c + 8\left(\frac{2c-2}{3}\right)$

$-5c + \frac{16c - 16}{3}$

208

$-200 + 8 \cdot 26$

$12 + 34 \cdot 3$

$-5 \cdot 34 + 8 \cdot 22$

$-170 + 176$

$80 - 2$

$78 = 3d$

$-5a + \frac{16a}{3}$

$\frac{16a}{3} - 5a$

170

36

$\frac{a}{3} = 4$

$-5c + 8\left(\frac{2c-2}{3}\right) = 6$

$-5c + \frac{16c - 16}{3}$

$-15c + 16c - 16$

$\frac{c - 16}{3} = 8$

24

102

12

114

12

a)

③ $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$, pero, como es triangular inferior

$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ i & j & k & 0 \\ m & n & r & p \end{pmatrix}$

$\forall A_{mn}$: cofactor

$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + \underbrace{\cancel{a_{12} \cdot A_{12}}}_{0} + \underbrace{\cancel{a_{13} A_{13}}}_{0} + \underbrace{\cancel{a_{14} A_{14}}}_{0}$,

$\det(A) = a_{11} A_{11}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} f & 0 & 0 \\ j & k & 0 \\ n & r & p \end{vmatrix} = f \begin{vmatrix} k & 0 \\ r & p \end{vmatrix} - 0 \, (\;)^{0} + 0 \, (\;)^{0}$

$= f(kp - \cancel{r} \cdot 0)$

$A_{11} = fkp$

pero, $\det(A) = \underset{\sim}{a_{11}} \cdot fkp$

$\det(A) = a \cdot f \cdot k \cdot p$

b)

$A = (a_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 3b \\ 2c - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$2a - 3b = 0 \;\ldots \text{I}$

$2c - 3d = 2 \;\ldots \text{II}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a + 8b \\ -5c + 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$,

$-5a + 8b = 4 \;\ldots \text{III}$

$-5c + 8d = 6 \;\ldots \text{IV}$

de I y III

$2a = 3b$

$-5a + 8b = 4$

$-5a + 8\left(\frac{2a}{3}\right) = 4 \Rightarrow a = 12$

$b = 8$

$\left.\begin{matrix} 2c - 3d = 2 \\ -5c + 8d = 6 \end{matrix}\right\} \quad c = 34, \; d = 22$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 34 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 3 \cdot 34 & 8 + 66 \\ 36 + 34 \cdot 5 & 24 + 110 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 114 & 74 \\ 206 & 134 \end{pmatrix}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

5 a) 2x2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ SIMETRÍA $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$

tr A ⇒ suma de componentes diagonal $\Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow \boxed{a = -d}$

$\det(A) = ad - c^2 = 0$

$ad = c^2$

$-d \cdot d = c^2 \Rightarrow c^2 = -d^2$

$c^2 + d^2 = 0$

$c^2 \geq 0$

$d^2 \geq 0$

$0 = c^2 + d^2 \geq 0$

$c = 0$ y $d = 0 \Rightarrow a = 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1pt

F

b)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^2 = I \to A = I$ o $A = -I$

$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

JUSTIFICACIÓN

$a^2 + bc = 1$

$-\ d^2 + cb = 1$

$a^2 - d^2 = 0$

$(a+d)(a-d) = 0$

$a = d$, $a = -d$

$ac + dc = 0 \Rightarrow a = d$

$ab + bd = 0 \Rightarrow$

$c(a+d) = 0$ { c

$a^2 + bc = 1$

$-\ d^2 + cb = 1$

$ab + bd = b(a+d) = 0$

$ca + dc = c(a+d) = 0$

$a = d$ o $a = -d$

(I) (II)

$b(a+b) \neq 0$

$b(2a) \neq 0$

$a \neq 0$

$b \neq 2$

$c \neq 3$

0,5pt

0pt

Vea para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = I$ pero $A \neq I$ y $A \neq -I$

entonces,

$A = I$ o $A = -I$

NO CUMPLE LA MATRIZ

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

NI ESTA MATRIZ CUMPLE

ASÍ QUE SOLO CUMPLE $A = I$ o $A = -I$

Borrador (margen):

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$1 - 25$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +i & 0 \end{pmatrix}$

$a = 5$

$d = -5$

$24 = bc$

$b \cdot 2(0) = 0$

Presente aquí su trabajo

6.

1 a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{2,-1\} \Rightarrow$ son l.i

$v_1 (1,1,1)$, $v_2 = (-1,2,k)$, $v_3 = (1,4,k^2)$

Generan $\mathbb{R}^3$:

$\alpha(1,1,1) + \beta(-1,2,k) + \theta(1,4,k^2) = (a,b,c)$

$(\alpha - \beta + \theta, \alpha + 2\beta + 4\theta, \alpha + \beta k + \theta k^2) = (a,b,c)$

$\alpha - \beta + \theta = a$ $\qquad$ $\alpha + 2\beta + 4\theta = b$ $\qquad$ $\alpha + \beta k + \theta k^2 = c$

$2\alpha - 2\beta + 2\theta = 2a$

$\beta = \alpha + \theta - a$

$3\alpha + 6\theta = 2a + b$

$\beta = \alpha + 2\theta - \theta - a$

$\alpha + 2\theta = \dfrac{2a+b}{3}$

$\beta = \dfrac{2a+b}{3} - a - \theta$

$\beta = \dfrac{2a+b-3a-3\theta}{3}$

$\beta = \dfrac{b-a-3\theta}{3}$

$\dfrac{2a+b}{3} - 2\theta + \left(\dfrac{b-a-3\theta}{3}\right)k + k^2\theta = c$

$k^2\theta - 2\theta + \dfrac{b-a-3\theta}{3} = c - \left(\dfrac{2a+b}{3}\right)$

$3k^2\theta - 9\theta + b - a = 3c - (2a+b)$

$\theta = (3c - 2a - \cancel{b} + a - \cancel{b})$

$$\boxed{\theta = \left(\frac{3c-a-2b}{3k^2-9}\right)}$$

$$\boxed{\beta = \frac{b-a-3\left(\frac{3c-a-2b}{3k^2-9}\right)}{3}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2a+b}{3} - 2\left(\frac{3c-a-2b}{3k^2-9}\right)}$$

Sí generan $\mathbb{R}^3$

$k \in \mathbb{R} \setminus \{-1,2\}$

$1-2,3$ $2-4,2$

(4) Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{matrix} = \begin{pmatrix}-5&-6&1&0\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix} =$$

$-5A_{11}-6A_{12}+A_{13}+0$

$A_{11}=\cancel{(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}3&4&1\\4&1&2\\1&2&3\end{vmatrix} = 3.-1-4.10+1.7 = -36$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&4&1\\3&1&2\\4&2&3\end{vmatrix} = -(2.-1-4.1+\cancel{1}.(-2)) = +4$

$A_{13}=\cancel{(-1)^4}\begin{vmatrix}2&3&1\\3&4&2\\4&1&3\end{vmatrix} = 2.10-3.1+1.-13 = 4$

$-5.-36-6.+4+1.4 = 180-24+4 = 160$

$-3-40+7$

$-2-4+2$

$3-16$

20

7