PUCP

Estudios
Generales Ciencias

Fundamentos de Cálculo

Cuarta Práctica Calificada

Semestre Académico 2024 -1

Horarios: 101 al 116.

Duración: 110 minutos

Elaborada por todos los profesores.

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, calculadoras, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Determine el dominio implícito de la función f, definida por: (2 puntos)

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_3(x^2 - 2x)}$$

2. Sea a un parámetro real positivo.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \log_5(x-1) - 1 & , \quad \dfrac{6}{5} \le x < 6 \\ 3a + \operatorname{sen}(\dfrac{\pi x}{2}) & , \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

a) Para $a = 1$, justifique que f es inyectiva. (2.5 puntos)

b) Para $a = 1$, grafique f^{-1}, la inversa de f. (2 puntos)

c) Encuentre los valores de a para los cuales f posee inversa. (2.5 puntos)

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4^x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{4-x}{1-x} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Justifique que f es inyectiva. (2 puntos)

b) Halle la función inversa de f y grafique. (3 puntos)

4. Halle la regla de correspondencia y esboce la gráfica de la función f que cumple las siguientes condiciones: (4 puntos)

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- f es impar.

$]0,1]$

- Para $x \in \cancel{[0;1]}$, f se define por $f(x) = \dfrac{1+\cos(\pi x)}{2}$.
- Para $x \in]1;+\infty[$, f se define por $f(x) = ln\,(4x^2 - 4x + 1)$.

5. Justifique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

   a) Existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\log_3(x) + \log_5(x+2) = 2$. (1 punto)

   b) La función definida por $f(x) = \operatorname{sen}(-x^2 + 6x - 2)$; $x \in [0;1]$ es creciente (1 punto)

San Miguel, 13 de junio de 2024.

Año

2	0	2	4

Número

1	0	2	8

Código de alumno

Práctica

RECLAMO

Gastelo Marchán Juan Antonio

Apellidos y nombres del alumno (letra imprenta)

Firma del alumno

Curso: FUCAL

Práctica Nº: 4

Horario de práctica: P102

Fecha: 13 / 06 / 24

Nombre del profesor: R. Ramos

Nota

18

Número entero

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) FBH

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - redacción, claridad de expresión, corrección gramatical, ortografía y puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1: $f(x) = \sqrt{1 - \log_3(x^2 - 2x)}$

$1 - \log_3(x^2 - 2x) \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 2x > 0$

$1 \geq \log_3(x^2 - 2x) \qquad x(x-2) > 0$

$3^1 \geq 3^{\log_3(x^2-2x)}$

$3 \geq x^2 - 2x$

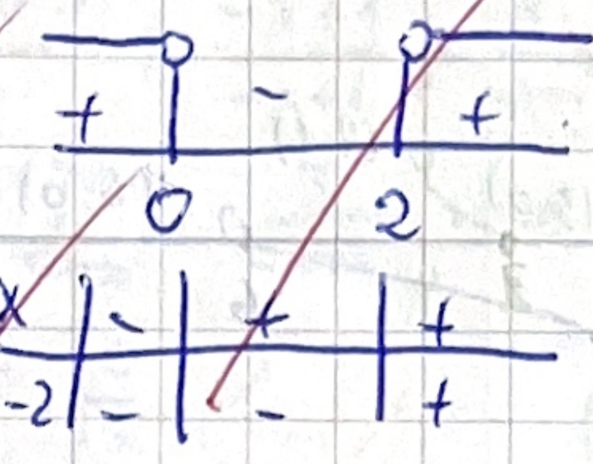
$0 \geq x^2 - 2x - 3$

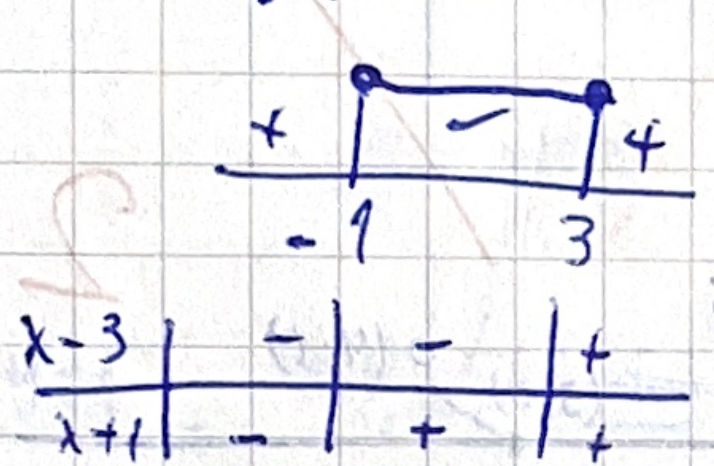
$x \quad -3 \quad -3x$

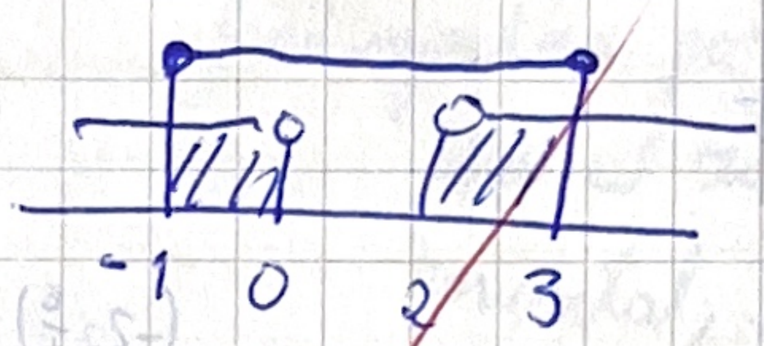
$x \quad 1 \quad +x$

$-2x$

$0 \geq (x-3)(x+1)$







2/2

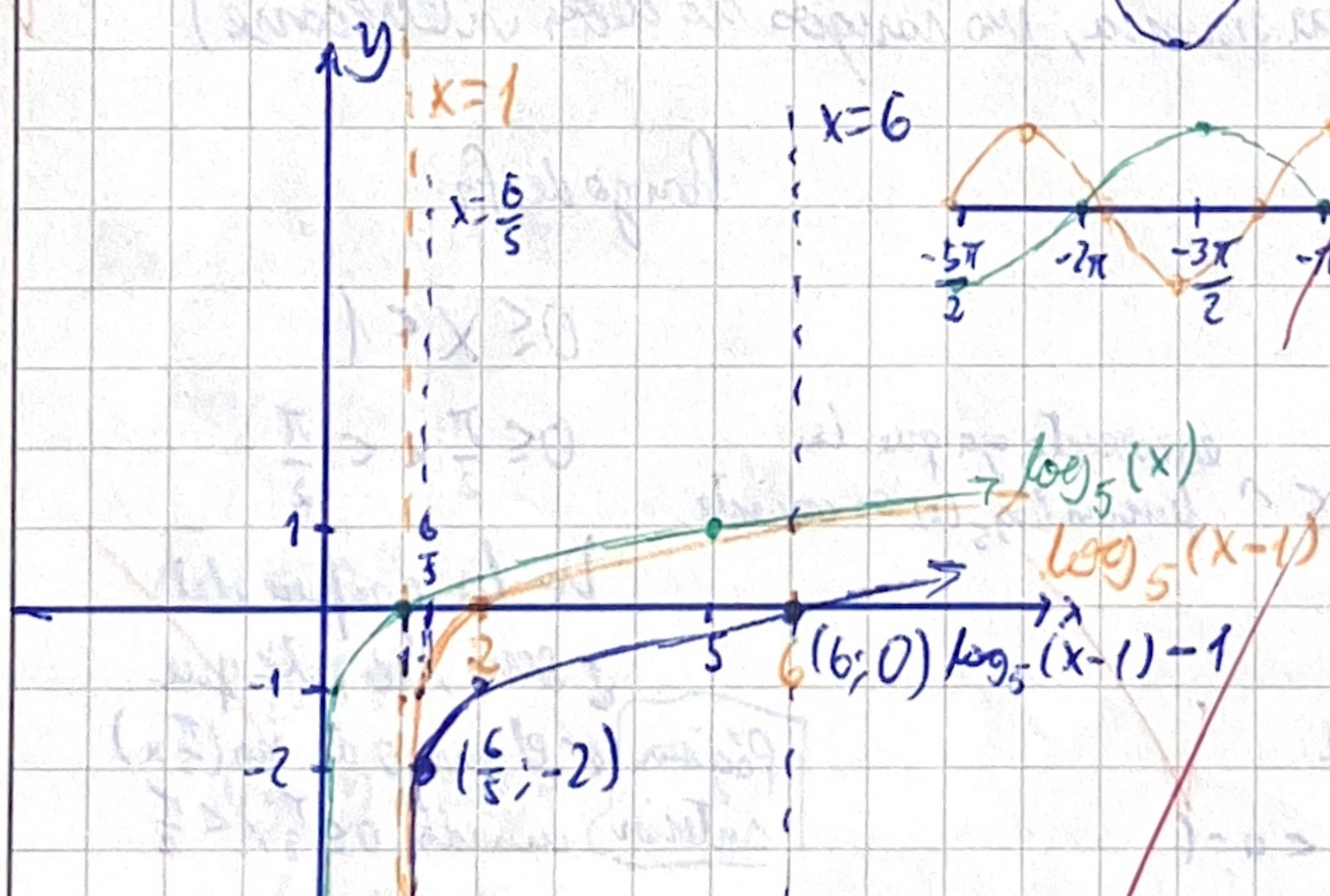
$\mathrm{Dom}\, f: [-1; 0[\cup]2; 3]$

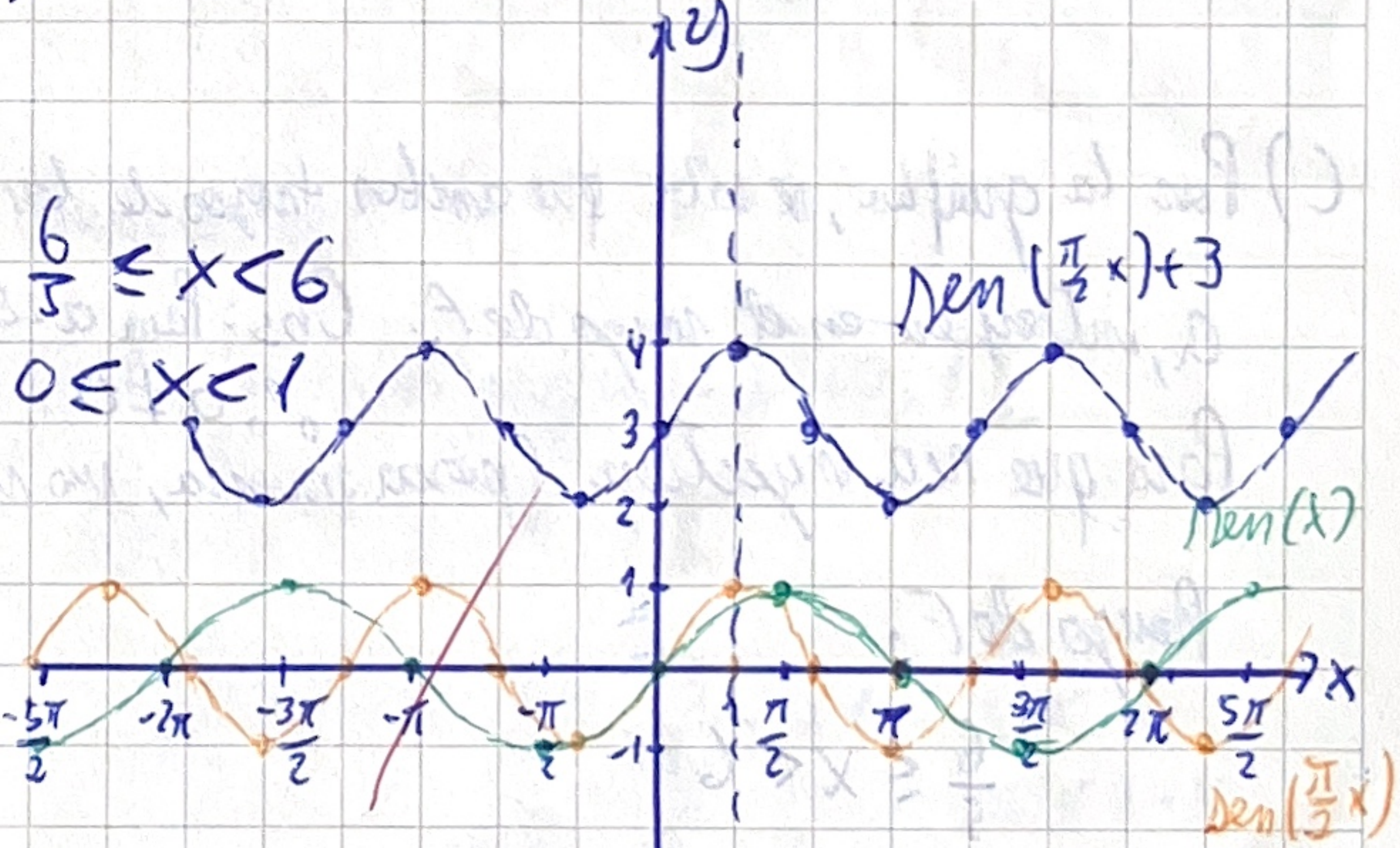
2:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \log_5(x-1) - 1 ; & \frac{6}{5} \leq x < 6 \\ 3a + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) ; & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad ; \quad a > 0$$

a) $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \log_5(x-1) - 1 ; & \frac{6}{5} \leq x < 6 \\ 3 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) ; & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$





2.5/2.5

$f(6) = \log_5(6-1) - 1$

$= \log_5 5 - 1$

$= 1 - 1$

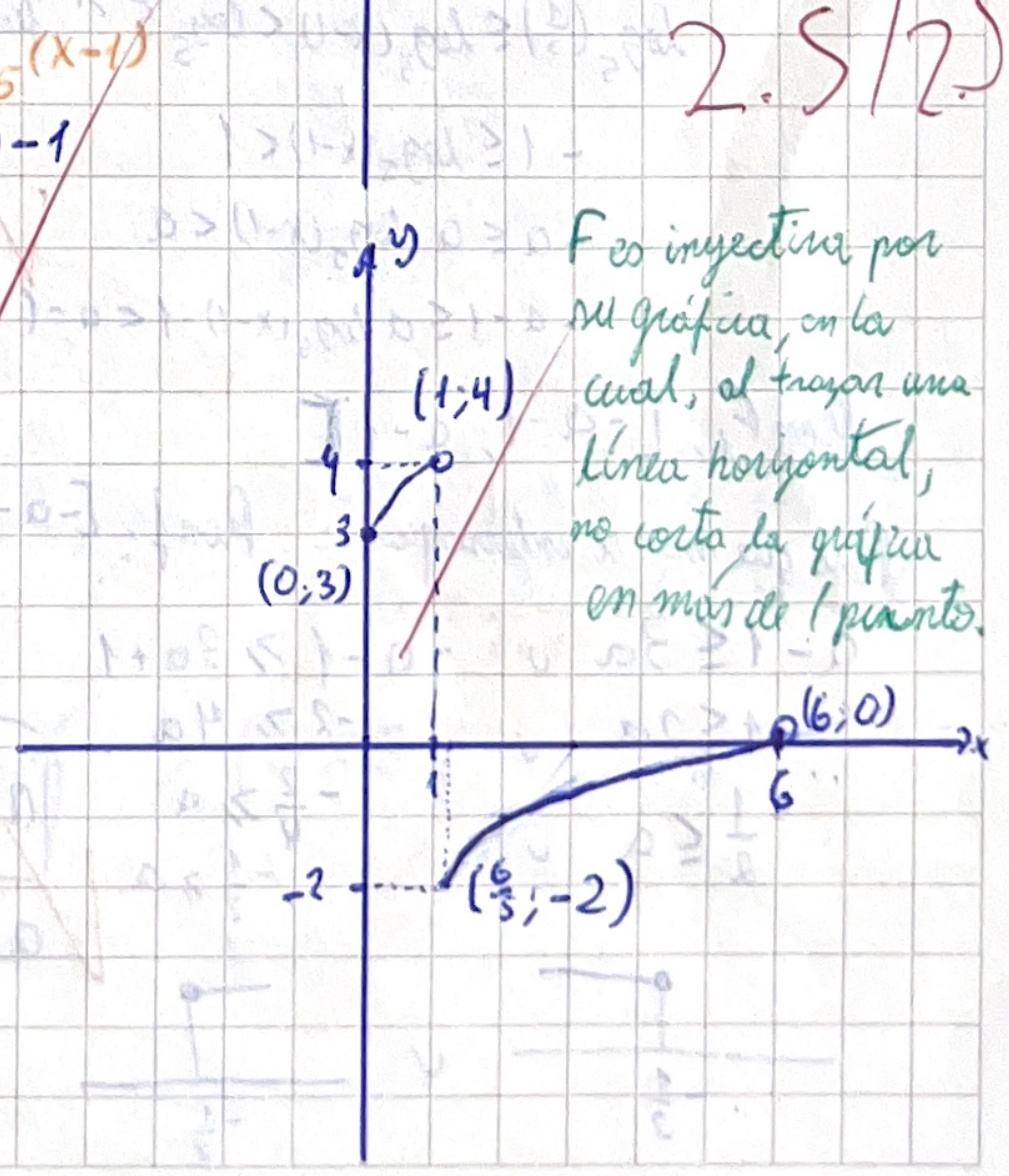
$f(6) = 0 \to (6; 0)$ punto abierto

$f(\frac{6}{5}) = \log_5(\frac{6}{5} - 1) - 1$

$\log_5(1/5) - 1$

$-1 - 1$

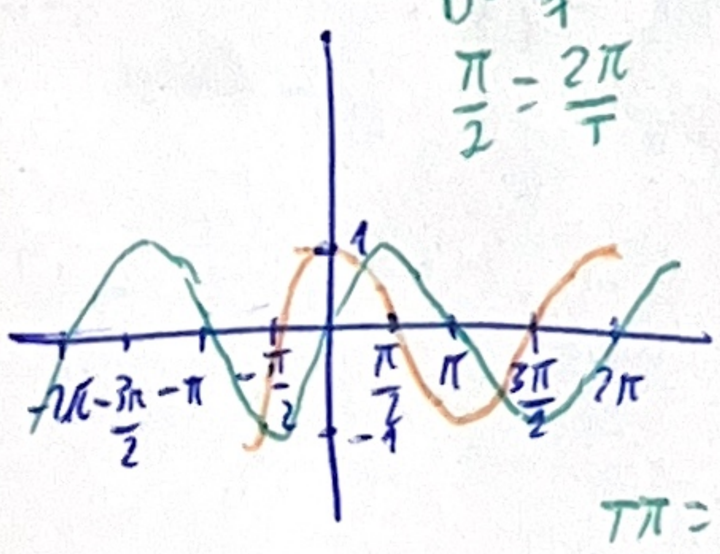
$f(\frac{6}{5}) = -2 \to (\frac{6}{5}; -2)$



F es inyectiva por su gráfica, en la cual, al trazar una línea horizontal, no corta la gráfica en más de 1 punto.

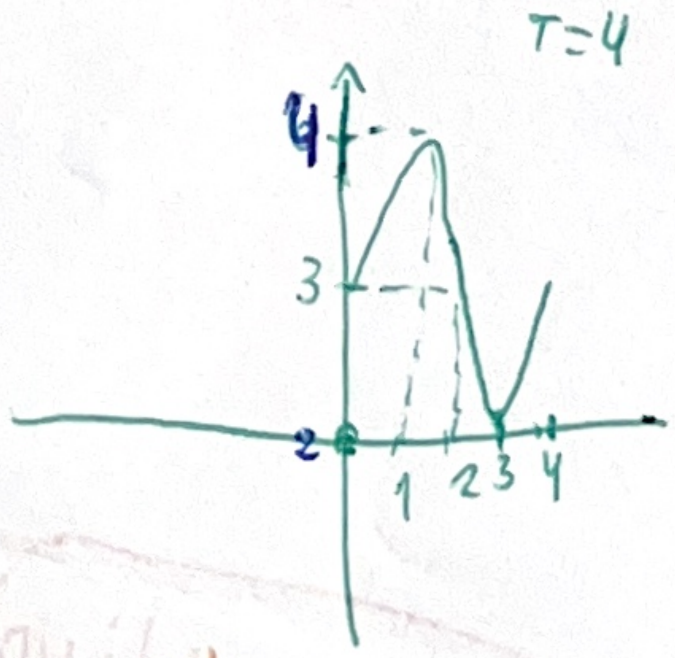
$B = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T}$

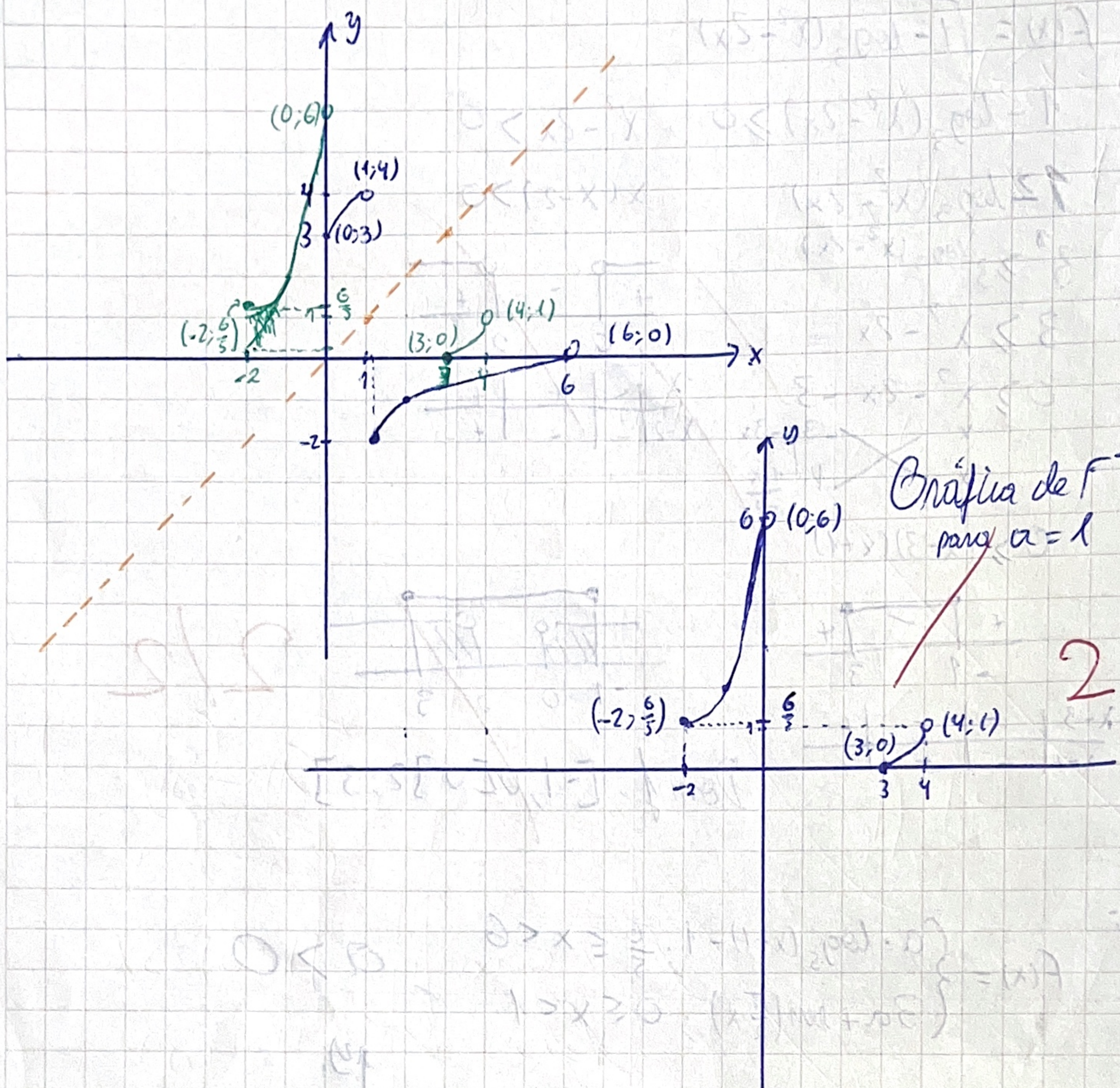


$T\pi = 4\pi$

$T = 4$



Presente aquí su trabajo



c) Por la gráfica, se sabe que ambos trozos de la función son inyectivos.
a, interfiere en el rango de f. Obs: Para $a=0$, f_1 es igual a -1, una función constante, por lo que no será inyectiva
$\therefore a \neq 0$
Para que sea inyectiva (posea inversa, sus rangos no deben intersecarse.)

Rango de f_1

$\frac{6}{5} \leq x < 6$

$\frac{1}{5} \leq x-1 < 5$

$\log_5(\frac{1}{5}) \leq \log_5(x-1) < \log_5 5$ — es correcto ya que la función $\log_5(x)$ es creciente.

$-1 \leq \log_5(x-1) < 1$

$-a \leq a \cdot \log_5(x-1) < a$

$-a-1 \leq a\log_5(x-1)-1 < a-1$

Ran f_1: $[-a-1; a-1[$

Rango de f_2:

$0 \leq x < 1$

$0 \leq \frac{\pi}{2}x < \frac{\pi}{2}$

De la gráfica del seno, se sabe que el rango de $\text{sen}(\frac{\pi}{2}x)$ cuando $0 \leq \frac{\pi}{2}x < \frac{\pi}{2}$ es

Página anterior

$0 \leq \text{sen}(\frac{\pi}{2}x) \leq 1$

$3a \leq \text{sen}(\frac{\pi}{2}x) + 3a \leq 1+3a$

Ran f_2: $[3a; 3a+1[$

Para que no se intersequen: Ran f: $[-a-1; a-1[\cup [3a; 3a+1[$

$a-1 \leq 3a \quad \vee \quad -a-1 \geq 3a+1$

$-1 \leq 2a \quad \vee \quad -2 \geq 4a$

$-\frac{1}{2} \leq a \quad \vee \quad -\frac{2}{4} \geq a$

$-\frac{1}{2} \geq a$

$-\frac{1}{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{2}$

$\boxed{a \in \mathbb{R}}$

~~Nunca inyectiva y poseerá inversa~~

$a \neq 0$

Será inyectiva (poseerá inversa) para $a \neq 0$.

a es positivo

2/2.5

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

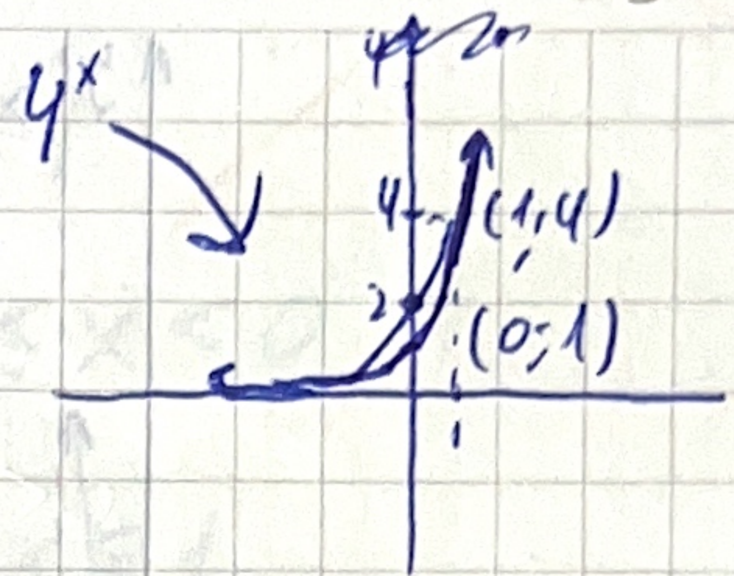
3) 5.0

$$\frac{4-3}{1-3}=\frac{1}{2}$$

3)

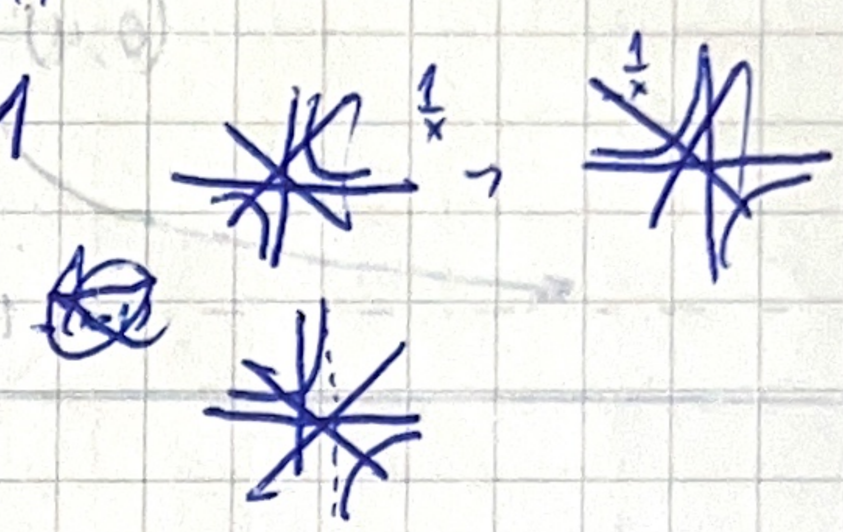
$$F(x)=\begin{cases} 4^x & ; 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{4-x}{1-x} & ; x>1 \end{cases}$$

a)



$F_2(x)=\dfrac{-x+4+1-1}{-x+1}=\dfrac{-x+1+3}{-x+1}=\dfrac{-x+1}{-x+1}+\dfrac{3}{-x+1}$; $x\neq 1$

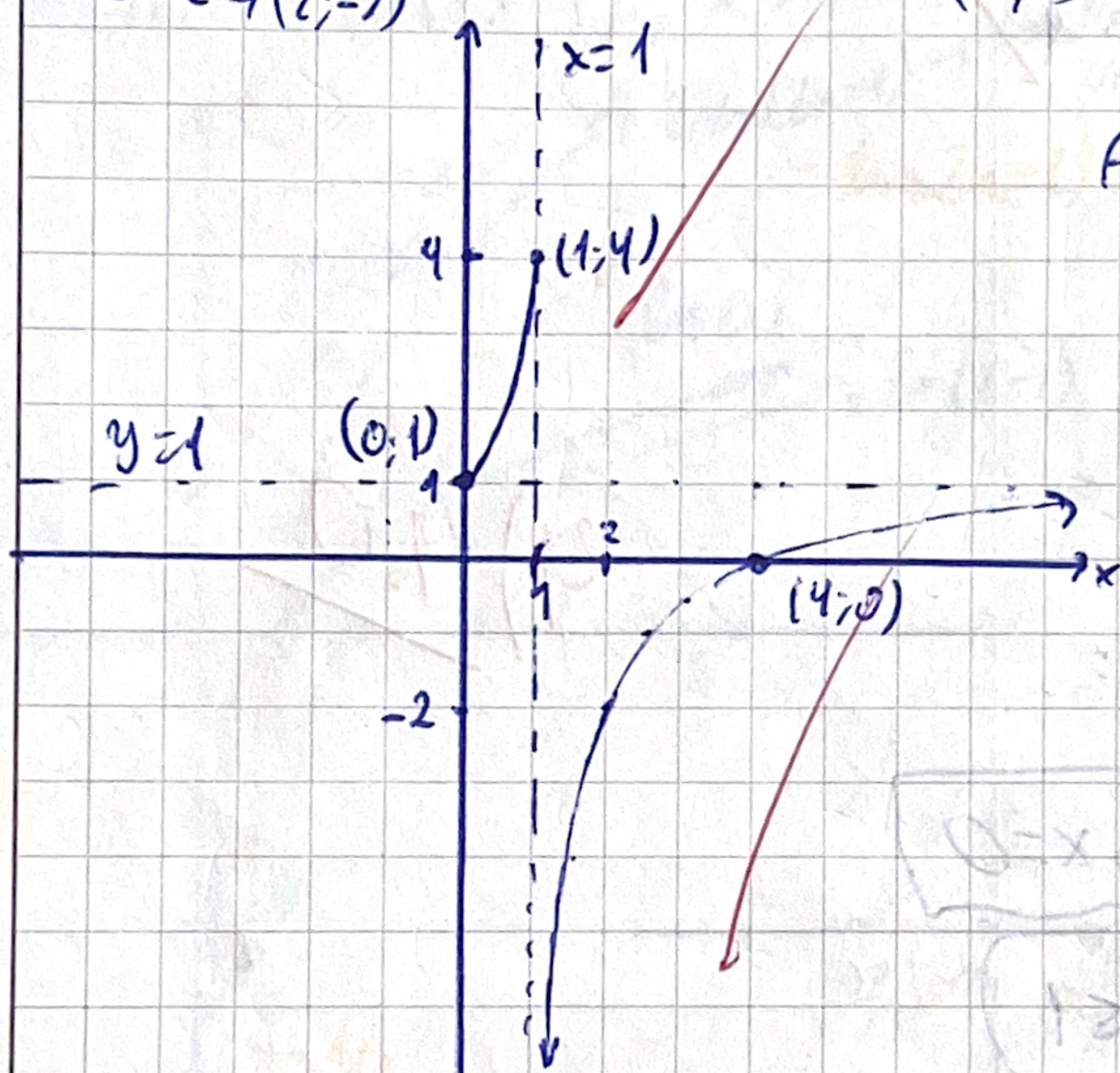
$F_2(x)=\dfrac{-x+4}{-x+1}$; $x>1 \to$ $bc=-4$, $ad=-1$, $ad>bc$ $\quad \dfrac{3}{-x+1}+1$



$F_2(2)=\dfrac{2}{-1}=-2 \to (2;-2)$

$\boxed{\begin{array}{l} AV: x=1 \\ AH: y=1 \end{array}}$

$F_2(4)=\dfrac{4-4}{1-4}=\dfrac{0}{-3}=0$
(4;0)



F es inyectiva por su gráfica, en la cual al trazar una recta horizontal, no corta a la gráfica en más de 1 punto.

b) Hallar el rango de F → Dominio de F^{-1}

Rango de F_1:

$F_1(x)=4^x ; 0\le x\le 1$

$1\le 4^x \le 4$

Dom F_1^{-1}: $[1;4]$

Despejar:

$F_1(x)=4^x$

$y=4^x$

$\log_4 y=\log_4 4^x$

$\log_4 y = x$

$y=\log_4 x$

$F_1^{-1}(x)=\log_4 x ; 1\le x\le 4$

Rango de F_2 → Del gráfico: $]-\infty;1[$

Dom F_2^{-1}: $]-\infty;1[$

$\dfrac{4-x}{1-x}=F_2(x)=y=\dfrac{3}{-x+1}+1$; $x<1$
$0<1-x$

$\left(\frac{1}{3}\right)y-1=\dfrac{3}{1-x}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{1}{1-x}$

$\dfrac{3}{y-1}=1-x$

$x=1-\dfrac{3}{y-1}$

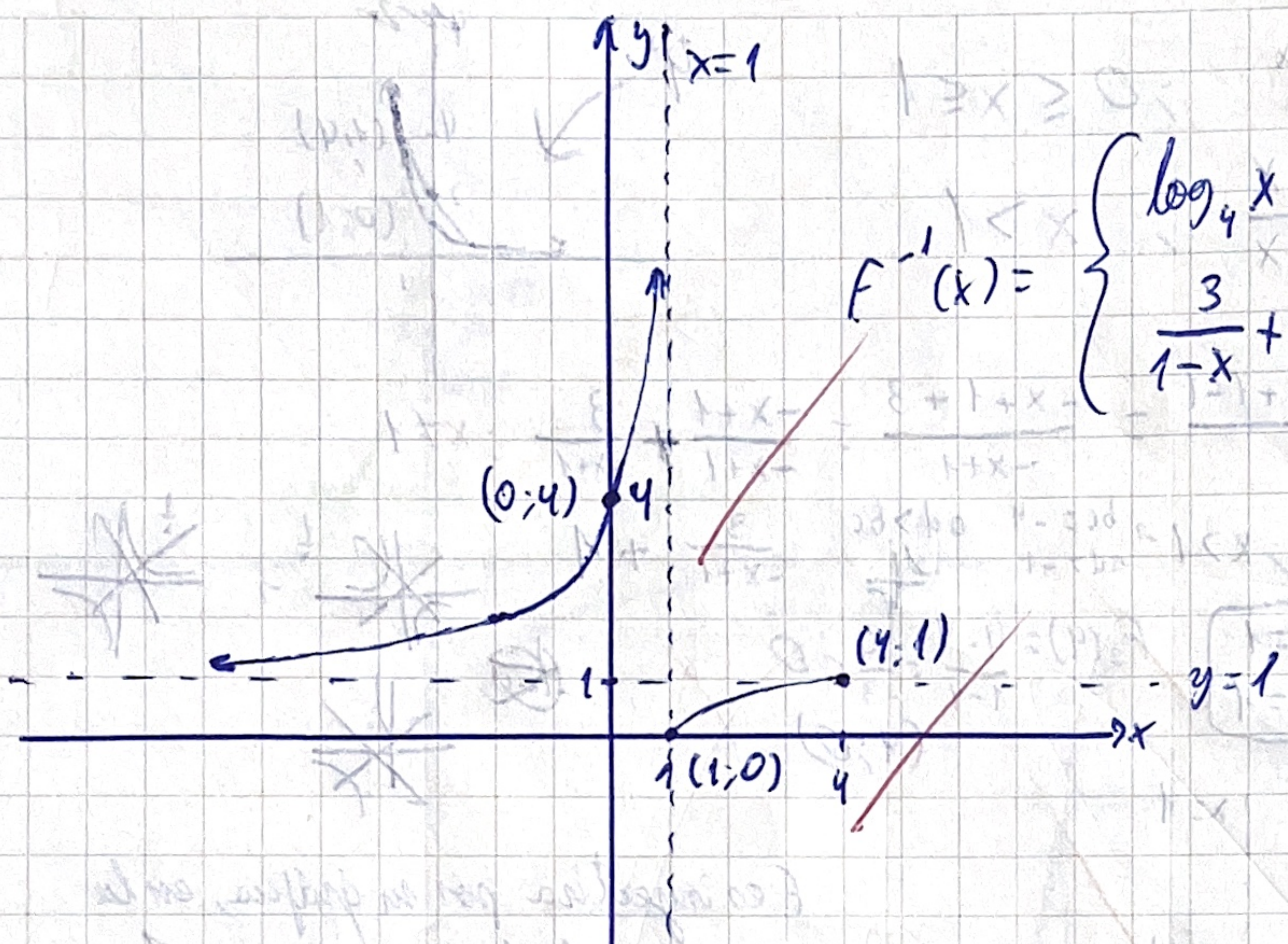
$x=\dfrac{3}{1-y}+1 \to y=\dfrac{3}{1-x}+1$

$F_2^{-1}(x)=\dfrac{3}{1-x}+1 ; x<1$

$$F^{-1}(x)=\begin{cases} \log_4 x & ; 1\le x\le 4 \\ \dfrac{3}{1-x}+1 & ; x<1 \end{cases}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$$F^{-1}(x)=\begin{cases}\log_4 x \ ; \ 1\leq x\leq 4\\ \dfrac{3}{1-x}+1 \ ; \ x<1\end{cases}$$

4) 4,0

4=

$F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Dom $=\mathbb{R}$

$F(x)=-F(-x) \to F$ es impar:

$x\in\ ]0;1]$ $\quad \boxed{F(x)=0 \ ; \ x=0}$

$$\boxed{F(x)=\frac{1+\cos(\pi x)}{2} \ ; \ 0<x\leq 1}$$

$$F(x)=-F(-x)=-\left(\frac{1+\cos(\pi(-x))}{2}\right) ; \ -1\leq x<0$$

$$\boxed{F(x)=\frac{-1-\cos(-\pi x)}{2} \ ; \ -1\leq x<0}$$

$x\in\ ]1;+\infty[$

$F(x)=\ln(4x^2-4x+1) \quad x>1$

$F(x)=\ln((2x-1)^2) \ ; \ x>1$

$F(x)=2\ln(|2x-1|) \ ; \ x>1$

$\boxed{F(x)=2\ln(2x-1) \ ; \ x>1}$ $\quad x>1$

$2x>2$

$F(x)=-F(-x)=-(2\ln(2(-x)-1) \ ; \ x<-1$ $\quad 2x-1>1>0$

$|2x-1|=2x-1$

$$\boxed{F(x)=-2\ln(-2x-1) \ ; \ x<-1}$$

$4x^2-4x+1=$

$=4(x^2-x+\frac{1}{4})=$

$=4((x^2-x+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}))$

$=4(x-\frac{1}{2})^2$

$=2^2(x-\frac{1}{2})^2$

$=(2\cdot(x-\frac{1}{2}))^2$

$=(2x-1)^2$

$4x^2-4x+1$

$2x \quad -1$

$2x \quad -1$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

34
34
32

e^{-1} $\frac{17}{10}$ $\frac{10}{17}$ $\frac{1}{e}$ $\frac{1}{1{,}7}$

10

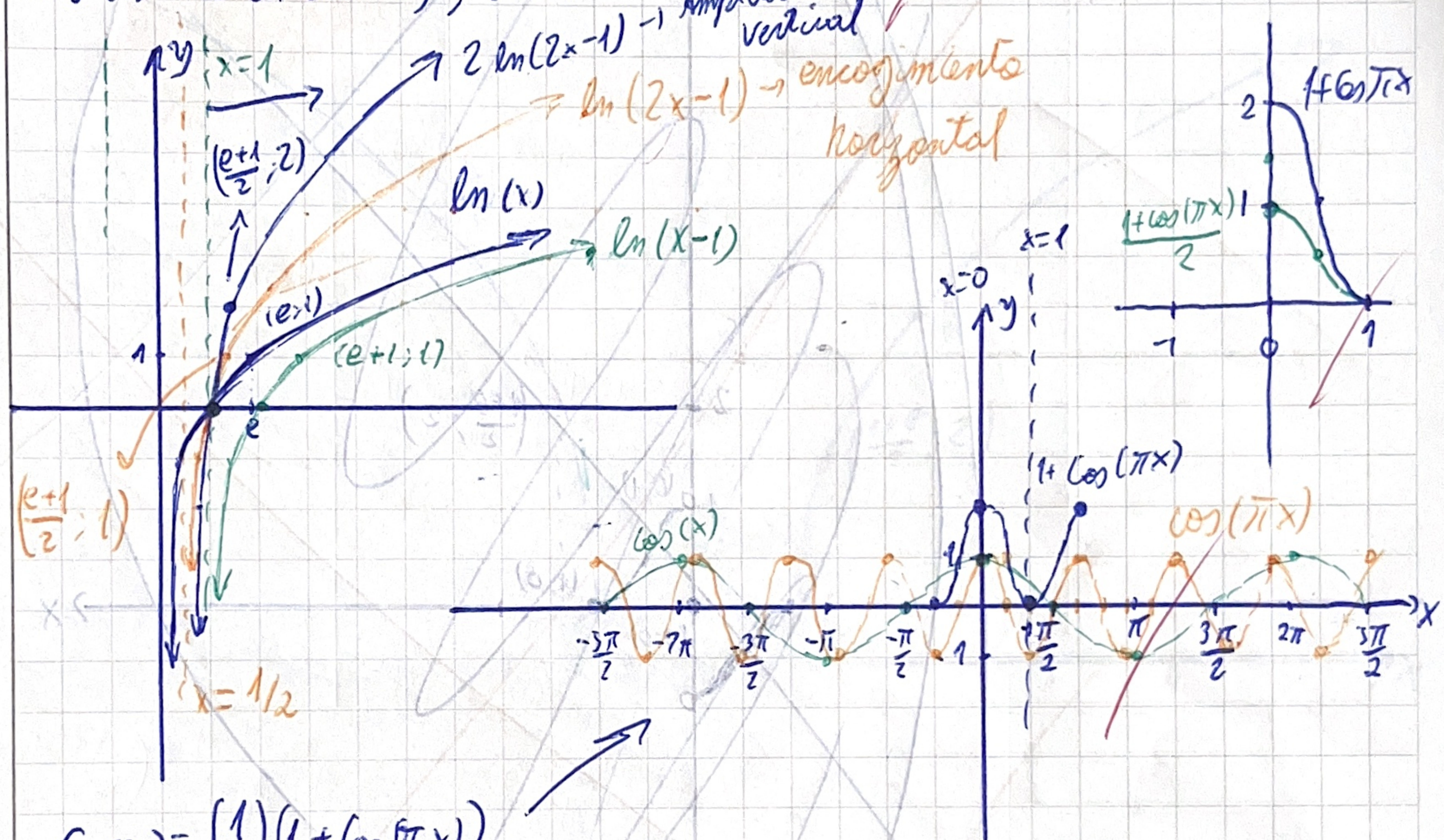
100 | 17 / 0,4

1,4
0,7

2,7
1,35

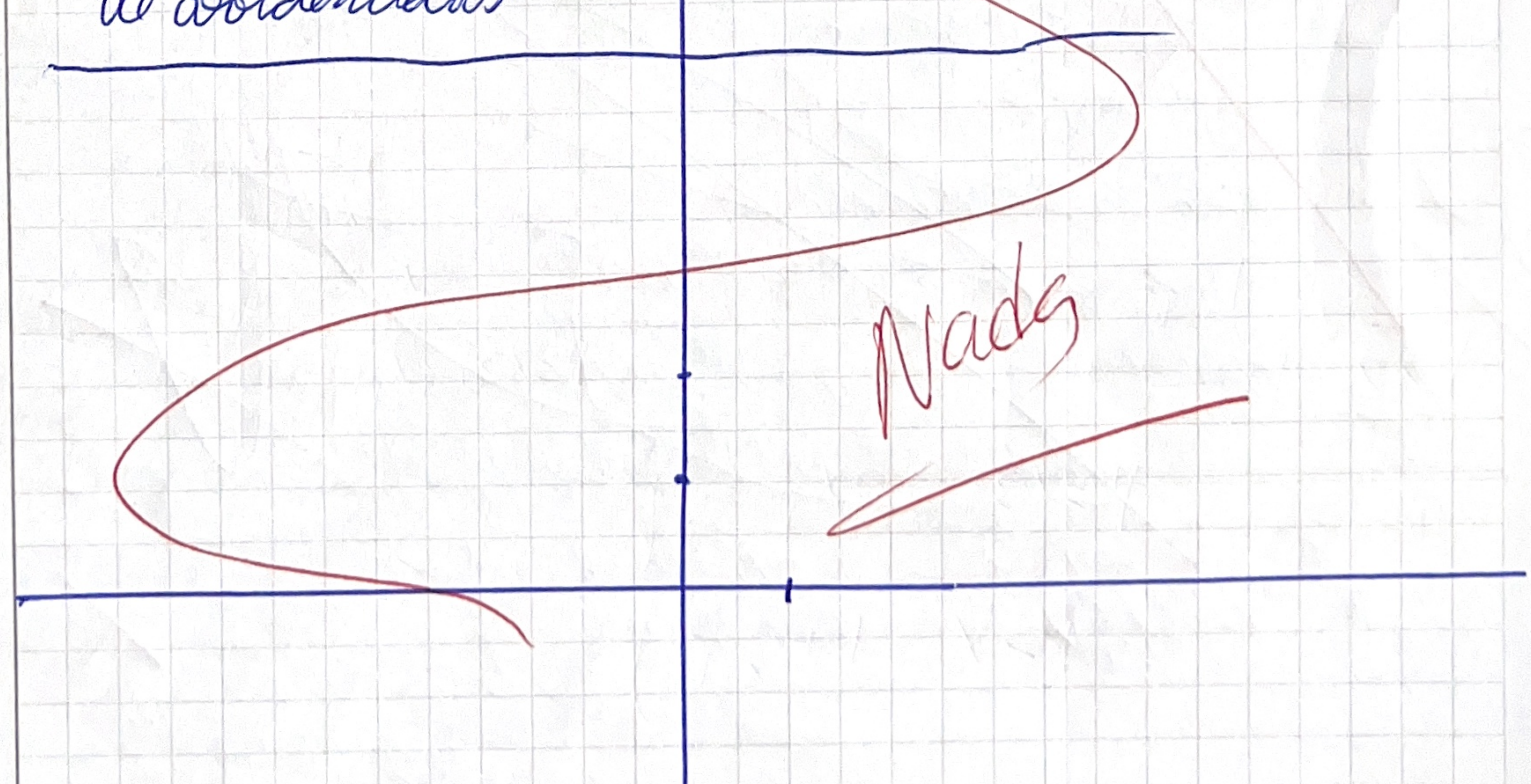
$$f(x)=\begin{cases} -2\ln(-2x-1); & x<-1 \\ \dfrac{-1-\cos(-\pi x)}{2}; & -1\leq x<0 \\ \dfrac{1+\cos(\pi x)}{2}; & 0<x\leq 1 \\ 0; & x=0 \\ 2\ln(2x-1); & x>1 \end{cases}$$

$f_5(x)=2\ln(2x-1)$; $x>1$



$f_3(x)=\left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos(\pi x))$

F es impar, así que la gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas



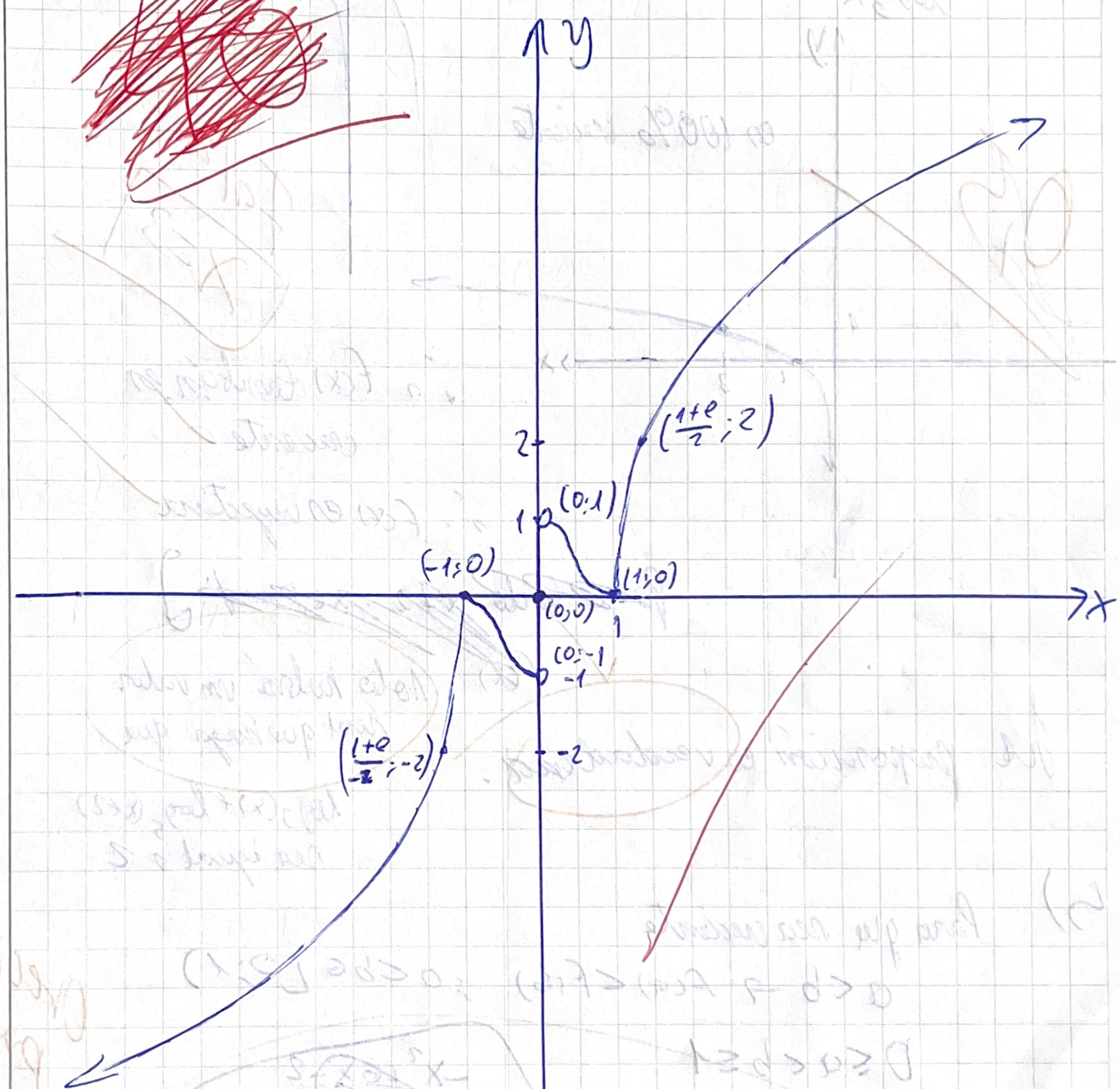
Nada

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

4_T

ya calificado



P5 Presente aquí su trabajo

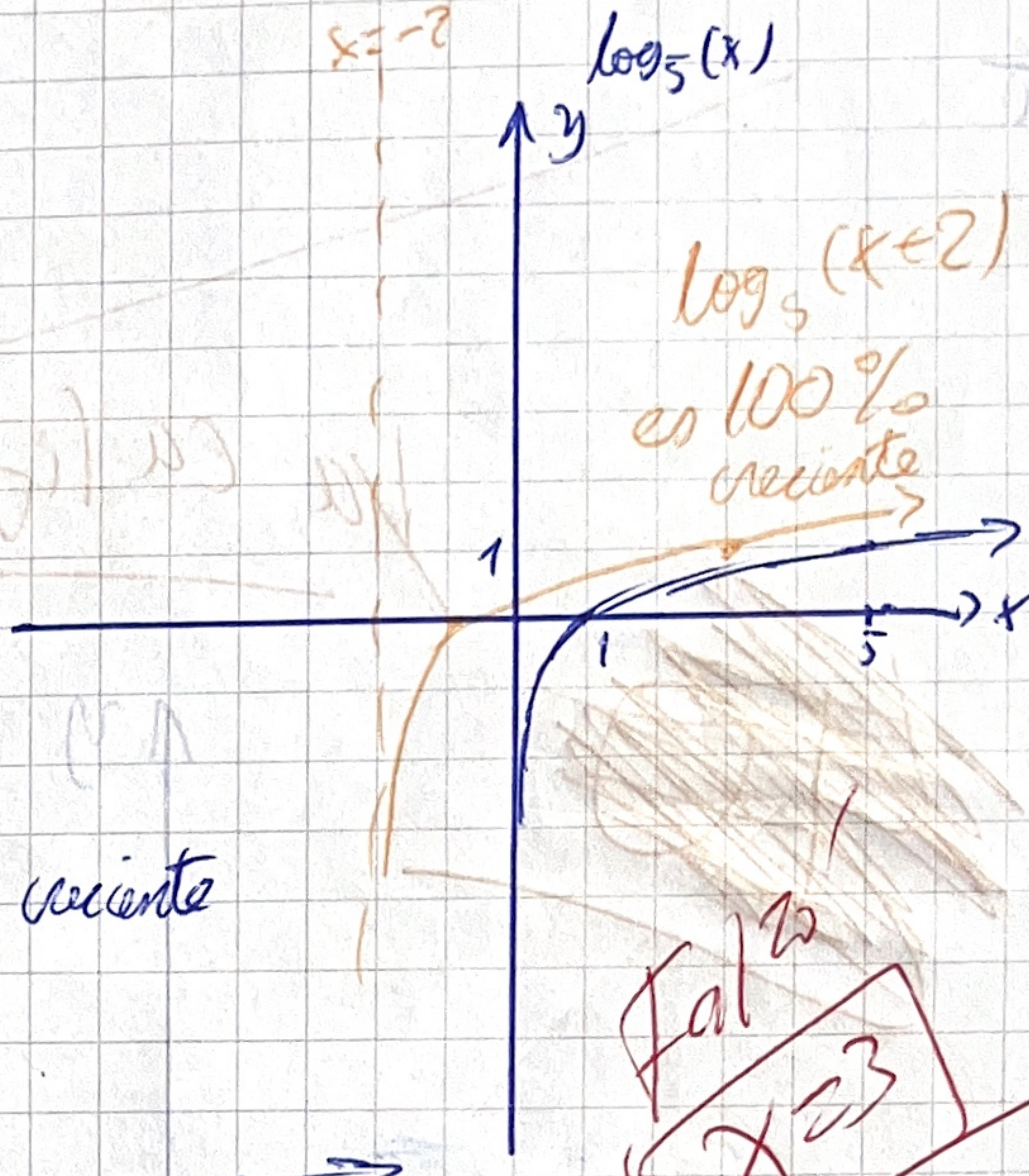
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

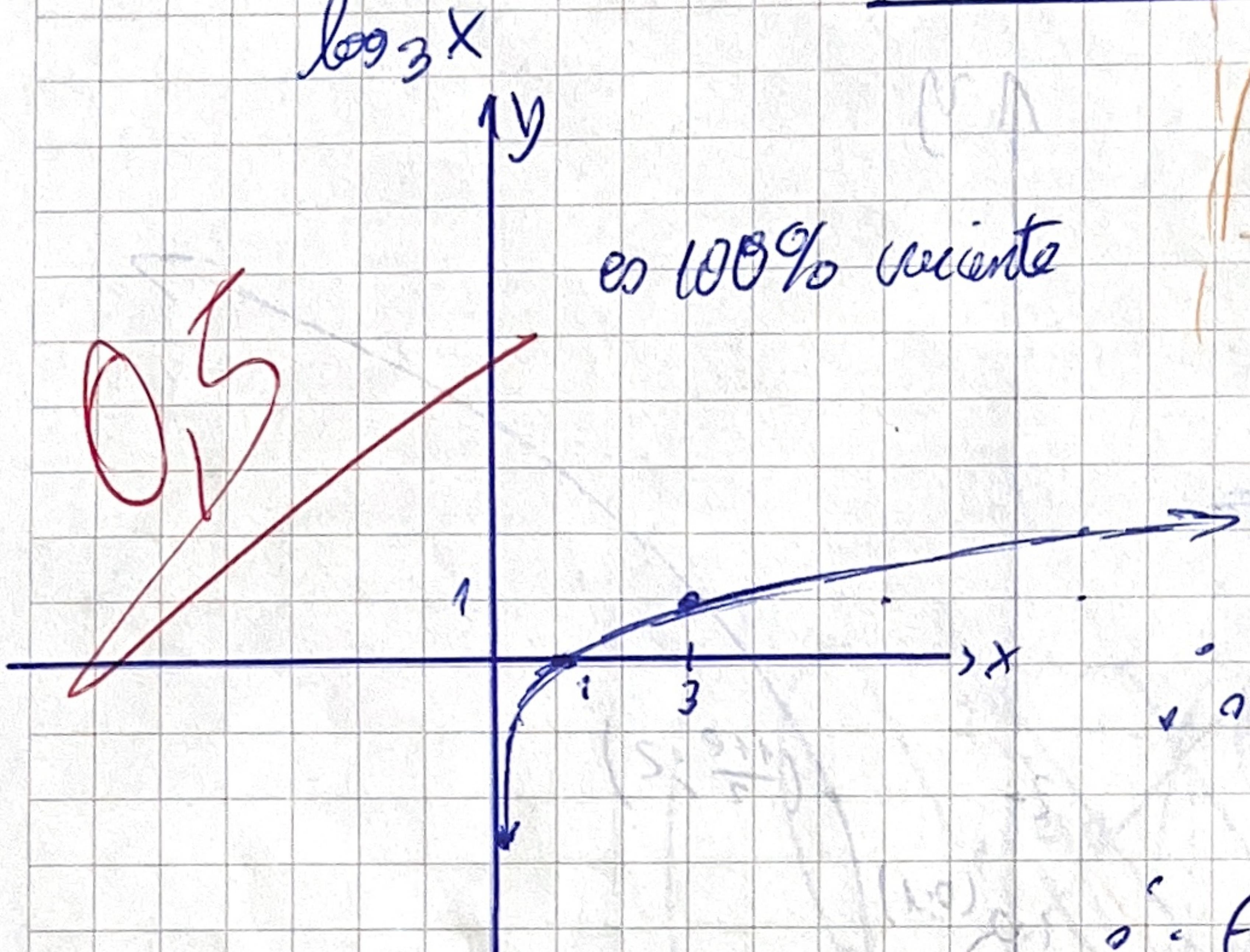
$S: F(x) = \log_3(x) + \log_5(x+2)$

a) $F(x) = g(x) + h(x)$

$g(x) = \log_3(x)$

$h(x) = \log_5(x+2)$





0,5

∴ f(x) también es creciente

∴ f(x) es inyectiva

~~para todo x≥2 , x pertenece~~]

f(x) solo habrá un valor real que haga que $\log_3(x) + \log_5(x+2)$ sea igual a 2

La proposición es verdadera.

6 - 2 + 1

b) Para que sea creciente

$a < b \to F(a) < F(b) \; ; a < b \in [0;1)$

$0 \le a < b \le 1$

$-x^2 + 6x - 2$

$-3 \le a-3 < b-3 \le -2$

$-(x^2 - 6x - 2)$

$0 \le (a-3)^2 < (b-3)^2 \le 9$

$-(x^2 - 6x + 9 - 11)$

$-(x-3)^2 + 11$

$0 \ge -(a-3)^2 > -(b-3)^2 \ge -9$

$11 \ge -(a-3)^2 + 11 > -(b-3)^2 + 11 \ge 2$

$\operatorname{sen}(-(a-3)^2 + 11) > \operatorname{sen}(-(b-3)^2) + 11$

$a = 0$

$b = \frac{\pi}{4}$

$> \operatorname{sen}(0) = 0$

$-x^2 + 6x - 2 = u$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$F(x) = \operatorname{sen} u$

Por la gráfica: es creciente

0,0

Anulado

Creciente solo por tramos

$\frac{\pi}{4}$

f es función compuesta