Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Solución de Tercera Práctica Dirigida

Semestre Académico 2021-1

Horario: Todos.

Indicaciones:

Los estudiantes deberán subir a PAIDEIA un archivo(**en formato PDF**) donde se muestre la solución detallada de los ejercicios 6 y 7. Dicho archivo se podrá subir desde las 00:00 horas del día sábado 05 de junio hasta las 23:59 horas del día lunes 07 de junio.

---

1. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$. Analice cuál de las siguientes operaciones tiene sentido; en aquellas en las que su respuesta sea afirmativa, simplifique la expresión usando propiedades.

   a) $\vec{a}\times\left(\|\vec{b}\times\vec{c}\|^2\right)\vec{c}+\vec{a}\times\left[\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)+\vec{b}\times\vec{a}\right]$

   b) $\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{a}\bullet\vec{b}}\right)\bullet\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)\right]$, siendo $\vec{a}\bullet\vec{b}\neq 0$

   Solución.

   a) Como $\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)\in\mathbb{R}$ y $\vec{b}\times\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, entonces $\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)+\vec{b}\times\vec{a}$ no tiene sentido.

   b)
$$\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{a}\bullet\vec{b}}\right)\bullet\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\frac{1}{\|\vec{a}\|}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)\right]=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\bullet\left[(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\right]}{(\vec{a}\bullet\vec{b})\|\vec{a}\|}=0$$

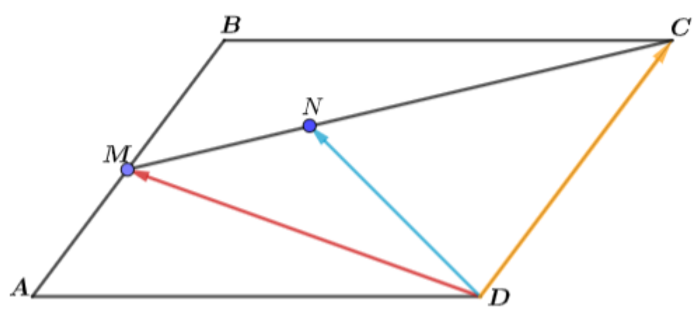
2. En el paralelogramo $ABCD$, M es punto medio de AB y N un punto sobre MC tal que $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{NC}}=\dfrac{1}{2}$.

   a) **Empleando vectores**, demuestre que $\overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DM})$.

   b) Si $M(-2;2)$, $N\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$, la abscisa de B es negativa, $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{29}$ y el vector $\overrightarrow{AD}$ es paralelo al vector $\vec{v}=(10;-4)$, halle las coordenadas de los vértices A, B, C y D.

   Solución:

   a) Una representación gráfica es la siguiente

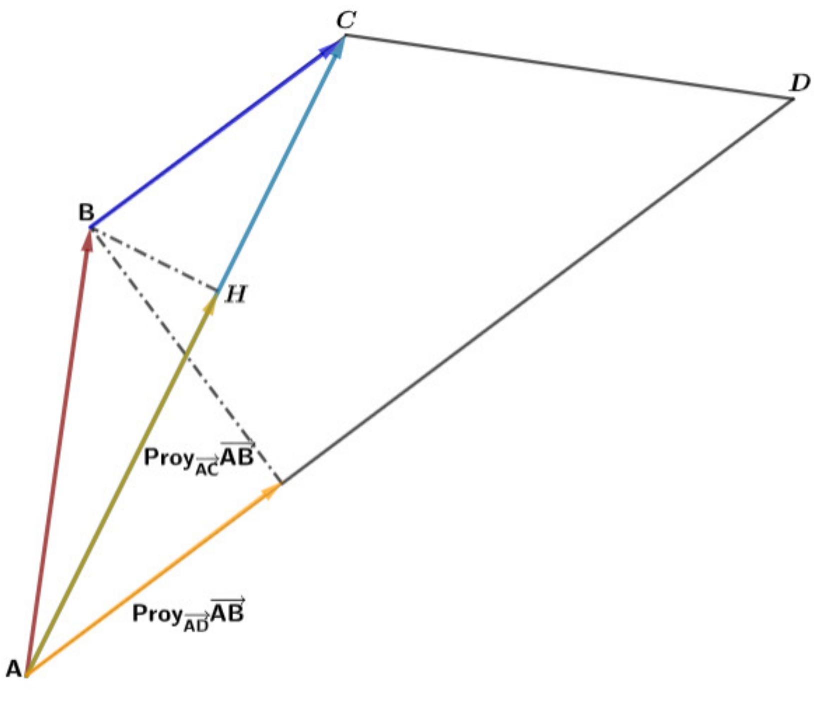


- $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$. Además, como $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NM}$, se tiene $\overrightarrow{NM} = \dfrac{\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DC}}{2}$
- Como $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NM}$, tenemos $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DN} + \dfrac{\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DC}}{2}$, de donde resulta $\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DM})$.

b) - Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{MN} = \left(-2; \dfrac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{MN}$, obtenemos $C(4;1)$.
- Como el vector $\overrightarrow{AD}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{v}$, se tiene $\overrightarrow{AD} = t(10;-4)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Asimismo, teniendo en cuenta $||\overrightarrow{BC}|| = ||\overrightarrow{AD}|| = \sqrt{29}$, obtenemos $t = \dfrac{1}{2}$ o $t = -\dfrac{1}{2}$. Para $t = \dfrac{1}{2}$ obtenemos $B(-1;3)$, que cumple con la condicón del problema.
- Como M es punto medio del segmento $\overline{AB}$, obtenemos $A(-3;1)$.
- Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AD} = (5;2)$, resulta que las coordenadas del punto D son $(2;-1)$.

3. En un trapecio $ABCD$ con lados paralelos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, $H(-4;-2)$ es el pie de la perpendicular trazada desde el vértice B sobre AC, $\overrightarrow{AB} = (1;7)$, $Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = (3;6)$, $Proy_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB} = (4;3)$ y $||\overrightarrow{AD}|| = 15$ unidades. Halle las coordenadas de los vértices A, B, C y D.

Solución:
Una representación gráfica es la siguiente



- Como $\overrightarrow{AH} = Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = (3;6)$, se tiene $A(-7;-8)$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, de donde $\overrightarrow{HB} = (-2;1)$. Así, $B(-6;-1)$.
- El vector $\overrightarrow{BC}$ es paralelo al vector $Proy_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}$, luego

$$\overrightarrow{BC} = tProy_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}, \text{ para algún } t \in \mathbb{R}.$$

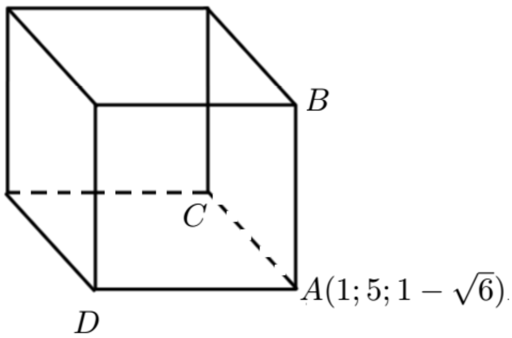
De donde, $\overrightarrow{BC} = (4t;3t)$.

- Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, se tiene $\overrightarrow{AC} = (1+4t; 7+3t)$.
- El vector $\overrightarrow{AC}$ es ortogonal al vector $\overrightarrow{HB}$, de donde se obtiene $t = 1$. Esto es, $\overrightarrow{AC} = (5;10)$.
- Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AC} = (5;10)$ obtenemos $C(-2;2)$.
- El vector $\overrightarrow{AD}$ es paralelo al vector $Proy_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}$, luego

$$\overrightarrow{AD} = sProy_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}, \text{ para algún } s \in \mathbb{R}.$$

  De donde, $\overrightarrow{AD} = (4s; 3s)$.
- Teniendo en cuenta que $||\overrightarrow{AD}|| = 15$, obtenemos $s = 3$. Luego, como $\overrightarrow{AD} = (12;9)$ se tiene $D(5;1)$.

4. El volumen del cubo que se muestra en la figura es 64 u^3.



Si las aristas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelas a los vectores $\overrightarrow{u} = (-\sqrt{6}; -\sqrt{6}, -2)$ y $\overrightarrow{v} = (3; -1; -\sqrt{6})$, respectivamente,

a) halle las coordenadas del vértice B,

b) halle el valor de

$$\left\| \left(3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) \times \left(4\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AC}\right) \right\|.$$

Solución.

a) Como el volumen del cubo es 64u^3 entonces la longitud d sus arista es $\ell = 4$ u.
De otro lado, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (4; -12; 4\sqrt{6})$. Así $\overrightarrow{AB} = \kappa(1; -3; \sqrt{6})$, entonces

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}\| = \|(\kappa; 3-\kappa; \kappa\sqrt{6})\| &= 4 \\ |\kappa| &= 1 \\ \kappa &= \pm 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{AB} = (1-3; \sqrt{6})$, de donde $B(2;2;1)$ o $B(0;8;2-\sqrt{6})$. Según la gráfica elegimos $B(2;2;1)$.

b) Simplificamos el producto vectorial del módulo, es decir

$$\left(3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) \times \left(4\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AC}\right) = 11\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left\|\left(3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\times\left(4\overrightarrow{AD}-5\overrightarrow{AC}\right)\right\| &= \left\|11\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right\| = 11\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\operatorname{sen}(\phi)\\ &\quad \text{donde } \phi=\frac{\pi}{2} \text{ es el ángulo formado por } \overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{AD}\\ &= 11(4)(4)=176\end{aligned}$$

5. Considere las rectas

$$\mathscr{L}_1 : P=(1,0,-1)+t(1,2,2), t\in\mathbb{R}.$$
$$\mathscr{L}_2 : P=(-1,3,6)+r(2,-3,1), r\in\mathbb{R}.$$

a) ¿El punto $P_0(-3,-8,-9)$ pertenece a $\mathscr{L}_1$?, ¿la recta $\mathscr{L}_3 : P=(-3,-8,-9)+s(-2,-2,-4), s\in\mathbb{R}$ coincide con la recta $\mathscr{L}_1$?

b) Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P_0(-3,-8,-9)$ y es paralela al eje Z.

c) Verifique que las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son alabeadas (es decir, no se intersecan y no son paralelas).

d) Halle las coordenadas de los puntos A en $\mathscr{L}_1$ y B en $\mathscr{L}_2$ tal que la recta que pasa por A y B sea perpendicular tanto a $\mathscr{L}_1$ como a $\mathscr{L}_2$.

Solución.

a) Un punto cualquiera de $\mathscr{L}_1$ tiene la forma $P=(1+t,2t,-1+2t)$ con $t\in\mathbb{R}$. Para ver si P_0 es uno de ellos analizamos si la igualdad $(1+t,2t,-1+2t)=(-3,-8,-9)$ tiene algún t como solución. Ello equivale al sistema de ecuaciones lineales $1+t=-3 \wedge 2t=-8 \wedge -1+2t=-9$. Como $t=-4$ es solución del sistema, entonces concluimos que se cumple $P_0\in\mathscr{L}_1$.

   Notemos que los vectores dirección $\overrightarrow{d_1}=(1,2,2)$ y $\overrightarrow{d_1}=(-2,-2,-4)$ no son paralelos, por lo tanto $\mathscr{L}_1\neq\mathscr{L}_3$.

b) Un vector dirección para $\mathscr{L}$ es $\vec{d}=(0,0,1)$. Luego, una ecuación vectorial de $\mathscr{L}$ es $P=(-3,-8,-9)+t(0,0,1), t\in\mathbb{R}$.

c) – Notemos que los vectores dirección $\overrightarrow{d_1}=(1,2,2)$ y $\overrightarrow{d_2}=(2,-3,1)$ no son paralelos, lo cual demuestra que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no son paralelas.

   – Falta probar que las rectas no se intersecan. Para ello igualamos un punto genérico de cada una, lo cual se expresa como

$$(1+t,2t,-1+2t)=(-1+2r,3-3r,6+r),$$

   lo cual conduce el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} t-2r &= -2 && (1)\\ 2t+3r &= 3 && (2)\\ 2t-r &= 7. && (3)\end{aligned}$$

   Resolviendo por ejemplo (2) y (3), obtenemos $t=3, r=-1$. Pero al reemplazar dichos valores en (1) comprobamos que no satisfacen dicha ecuación. En conclusión, las rectas no se intersecan.

d) Los puntos A y B tienen la forma genérica $A = (1+t, 2t, -1+2t)$ y $B = (-1+2r, 3-3r, 6+r)$. Se cumple, por ejemplo, que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{d_1} = (1,2,2)$ y $\overrightarrow{d_2} = (2,-3,1)$. Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = (8,3,-7)$. La igualdad $\overrightarrow{AB} = s(\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2})$, para algún $s \in \mathbb{R}$ se expresa como

$$(-1+2r)-(1+t) = 8s \wedge (3-3r)-2t = 3s \wedge (6+r)-(-1+2t) = -7s,$$

que se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -t+2r-8s &= 2 \\ 2t+3r+3s &= 3 \\ -2t+r+7s &= -7. \end{aligned}$$

Resolviendo dicho sistema se obtiene $r = \frac{9}{61}$, $t = \frac{120}{61}$.
Los puntos buscados son $A = \left(\frac{181}{61}, \frac{240}{61}, \frac{179}{61}\right)$ y $B = \left(\frac{-43}{61}, \frac{156}{61}, \frac{375}{61}\right)$.

6. Sean los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$, con $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ unitarios y perpendiculares entre sí, y $\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

a) Calcule el área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Halle $(2\overrightarrow{u} \times 3\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$.

c) Halle la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{w}$ sobre $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

Solución:

a) $||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}|| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

b) Aplicando propiedades del producto vectorial, se tiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{v} \\ &= \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} \\ &= 2\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Luego,

$$(2\overrightarrow{u} \times 3\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = (2\overrightarrow{u} \times 3\overrightarrow{v}) \cdot (2\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 12||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||^2 = 12.$$

c) Tenemos

$$Proy_{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}} \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})}{||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||^2} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}.$$

7. Los vértices de un tetraedro son los puntos $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$ y $D(3;-4;-3)$. Halle la altura $\left\|\overrightarrow{DE}\right\|$ y el volumen del tetraedro.

Solución.

Hallamos los vectores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1;-1;1) \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1;1;1) \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (2;-5;4) \end{aligned}$$

Luego,

$$\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \overrightarrow{AD} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = (2;-5;4) \bullet (-2;0;2) = -12.$$

Así, el volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = 2\mathrm{u}^3.$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{3}\mathrm{A}_b \times \mathrm{h} \Leftrightarrow 2 &= \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|\ \mathrm{h}}{6} \\ 12 &= \|(-2;0;2)\|\mathrm{h} \\ 12 &= \sqrt{8}\mathrm{h} \\ \mathrm{h} &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

San Miguel, 07 de junio de 2021.