ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII
PUCP

Año 2023 Número 5085
Código de alumno

Segundo examen

Choccelahua Marcañaupa Fran
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Fran
Firma del alumno

Curso: FUCDL

Horario: 102

Fecha: 30 / 11 / 2023

Nombre del profesor: Wilson Diaz

Nota
20

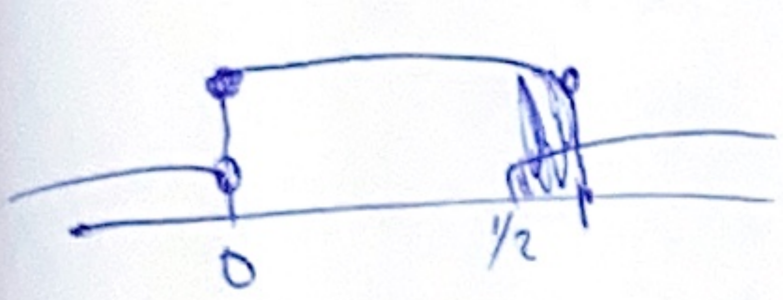
Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



① Dom f :

ⓐ $-1 \le \dfrac{2e^{2x}-5}{3} \le 1 \quad \wedge \quad 2x^2 - x > 0$

$-3 \le 2e^{2x}-5 \le 3 \quad \wedge \quad x(2x-1) > 0$

$2 \le 2e^{2x} \le 8$

$1 \le e^{2x} \le 4$

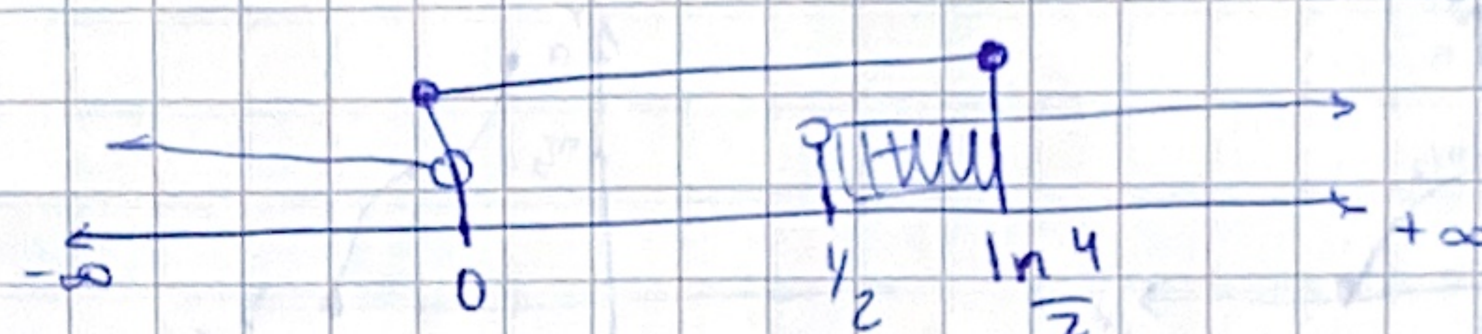
$\ln 1 \le 2x \le \ln 4$

$\dfrac{\ln 1}{2} \le x \le \dfrac{\ln 4}{2}$

$0 \le x \le \dfrac{\ln 4}{2} \quad \wedge$

$0 \le x \le \frac{1}{2} . \ln 4 \quad \wedge$

$x \in \langle -\infty ; 0 \rangle \cup \langle \frac{1}{2} ; +\infty \rangle$



$\therefore$ Dom f : $\langle \frac{1}{2} ; \frac{\ln 4}{2}]$

4

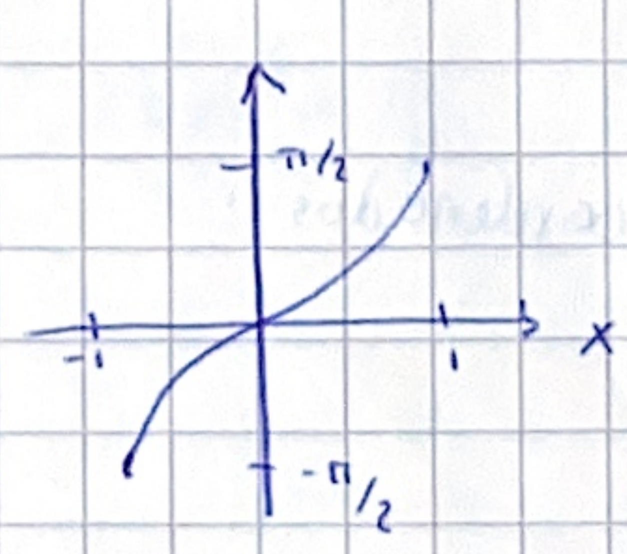
ⓑ

sea : $f(x) = h(x) + g(x)$

donde: $\boxed{h(x) = \arcsin\left(\dfrac{2e^{2x}-5}{3}\right)}$

$\boxed{g(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - x)}$

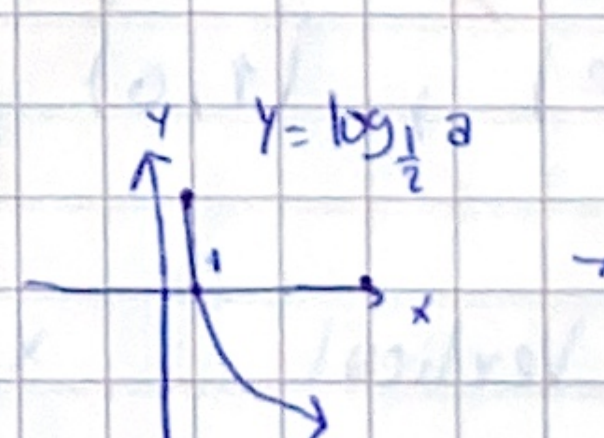
$\rightarrow h(x) = \arcsin(\alpha) \;,\; -1 \le \alpha \le 1 \qquad \{ \alpha = \dfrac{2e^{2x}-5}{3}$



(creciente)

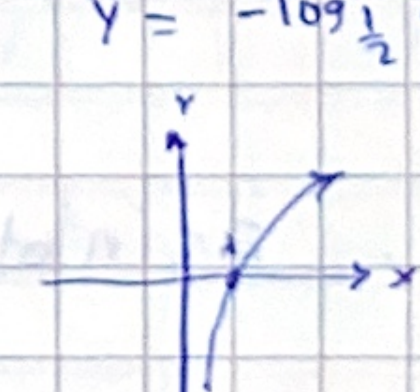
$\rightarrow g(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(a) \;;\; \{ a = 2x^2 - x.$

$y = \log_{\frac{1}{2}} a$



$\rightarrow$

$y = -\log_{\frac{1}{2}} a$



(creciente)

$\therefore$ Vemos que

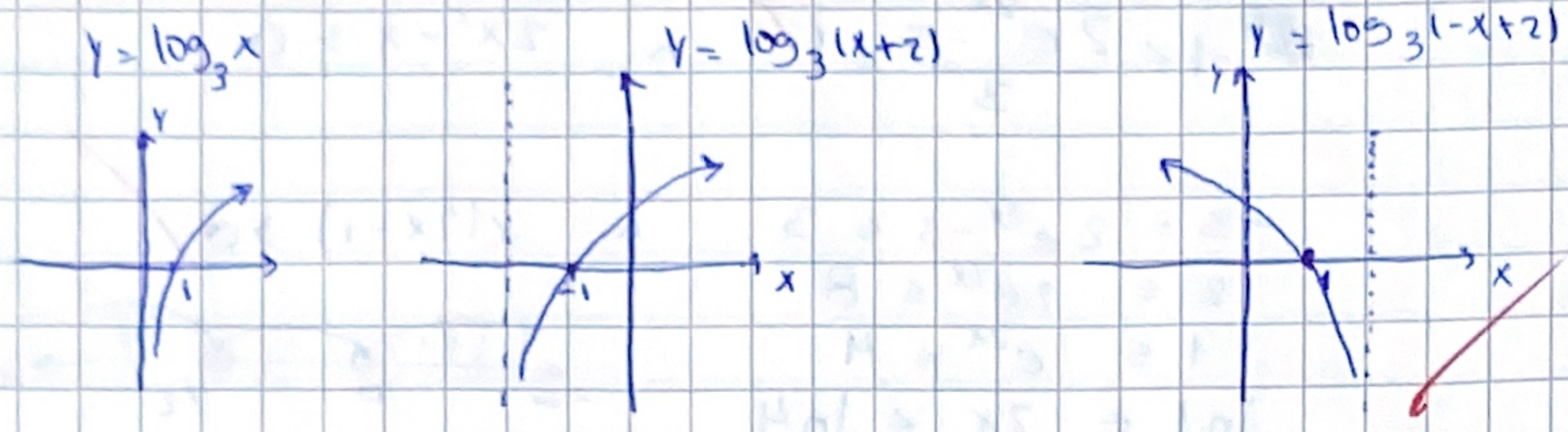
f(x) es la suma de funciones crecientes

$\Rightarrow$ f(x) es creciente.

Presente aquí su trabajo

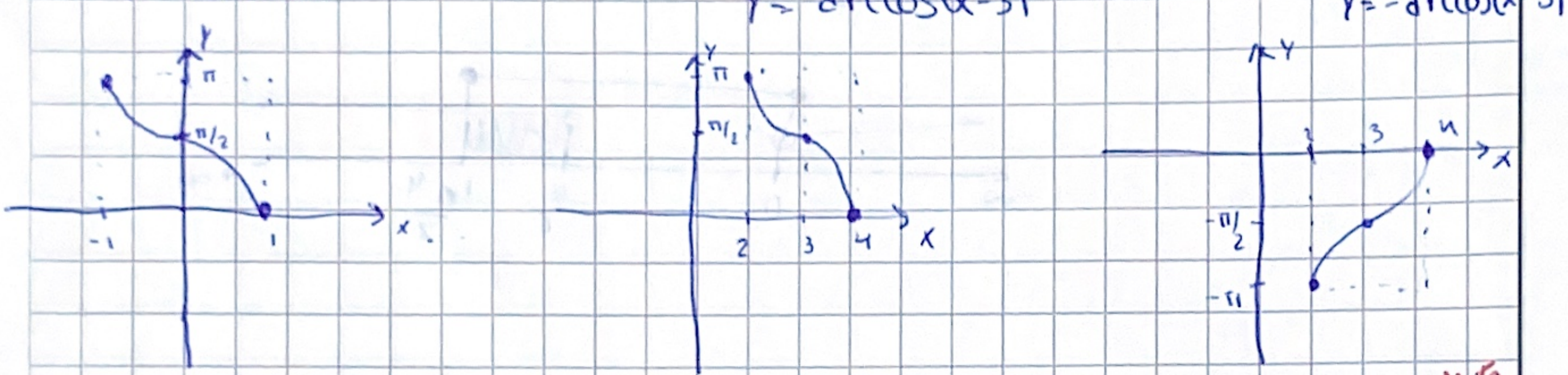
(2) (a) Sea $f_1(x) = \log_3(-x+2)$; $-1 \le x < 2$

$y = \log_3 x$ $\quad$ $y = \log_3(x+2)$ $\quad$ $y = \log_3(-x+2)$



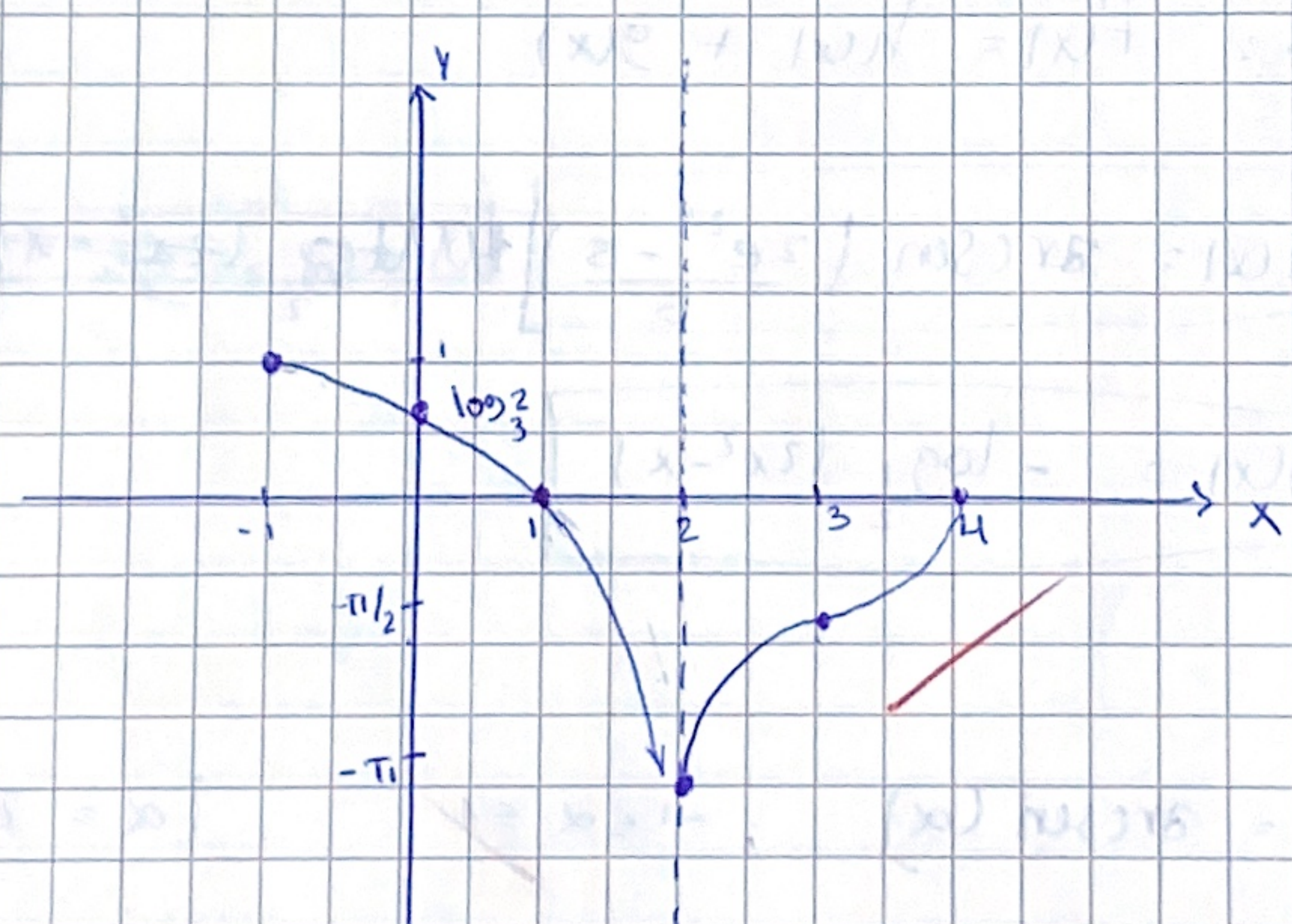
Sea $f_2(x) = -\arccos(x-3)$; $2 \le x < 4$

$y = \arccos x$ $\quad$ $y = \arccos(x-3)$ $\quad$ $y = -\arccos(x-3)$



4.5

Unimos las gráficas acotando con su dominio:

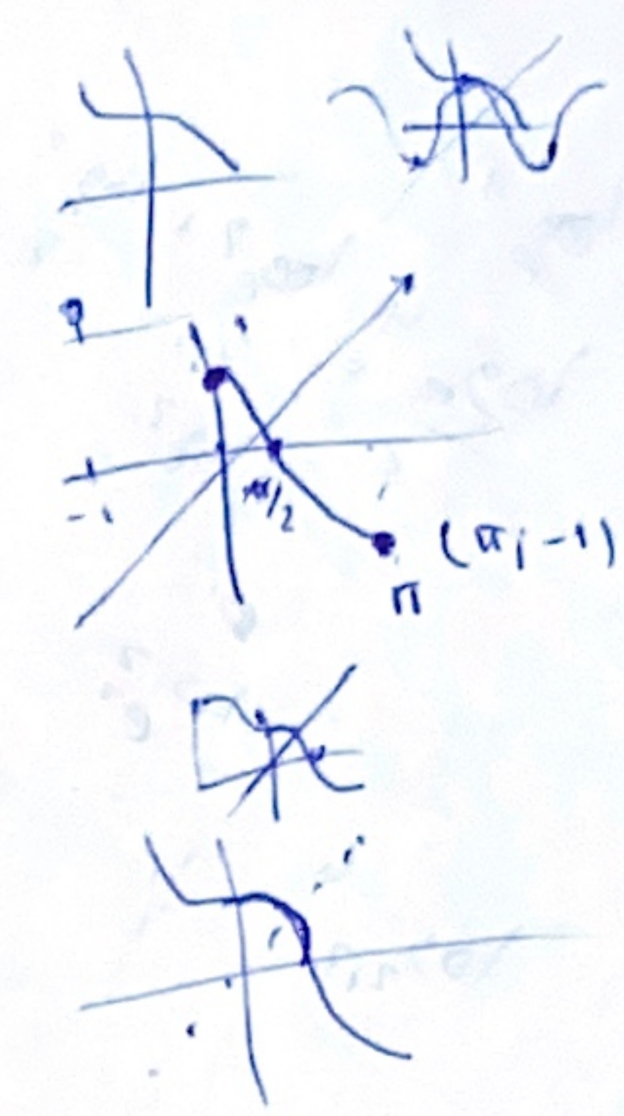


Puntos de intersección con los ejes coordenados:

$(0; \log_3 2)$; $(1;0)$; $(4;0)$

asíntota vertical: $x = 2$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$y = \log_3(1+2) = \log_3 3 = 1$

$y = \log_3(2) = \log_3 2$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

(b)

- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$

- $\lim_{x \to 2} f(x)$ → $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\pi$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

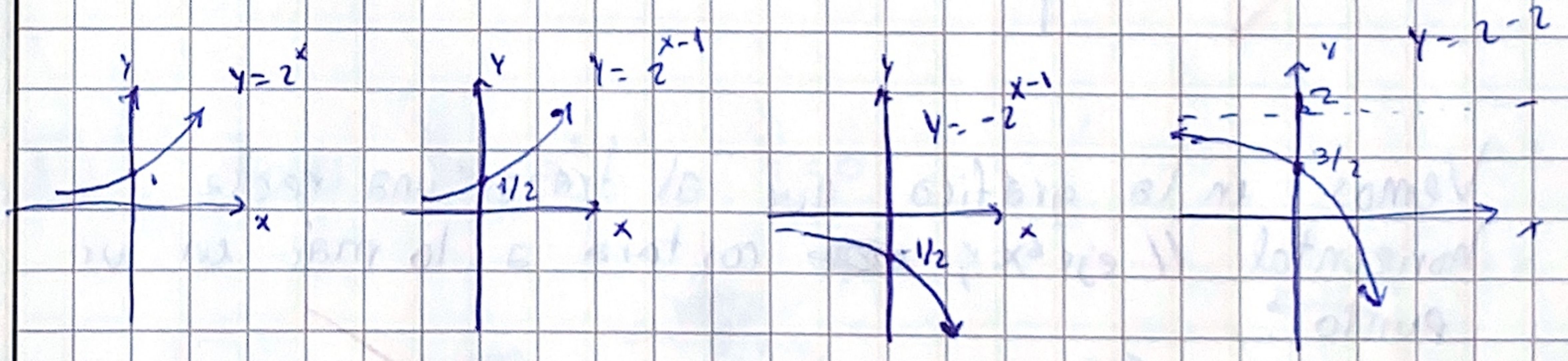
→ $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe o no está definido

- $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 0$

(3) Cuando $a = 2$

(a)

sea: $f_1(x) = 2 - 2^{x-1}$; $x < 0$

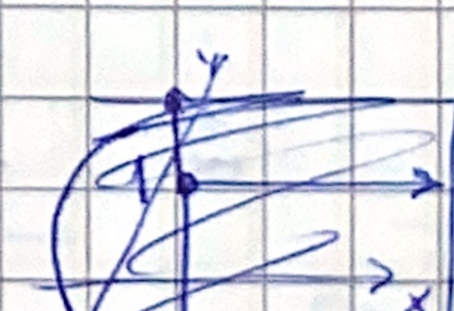


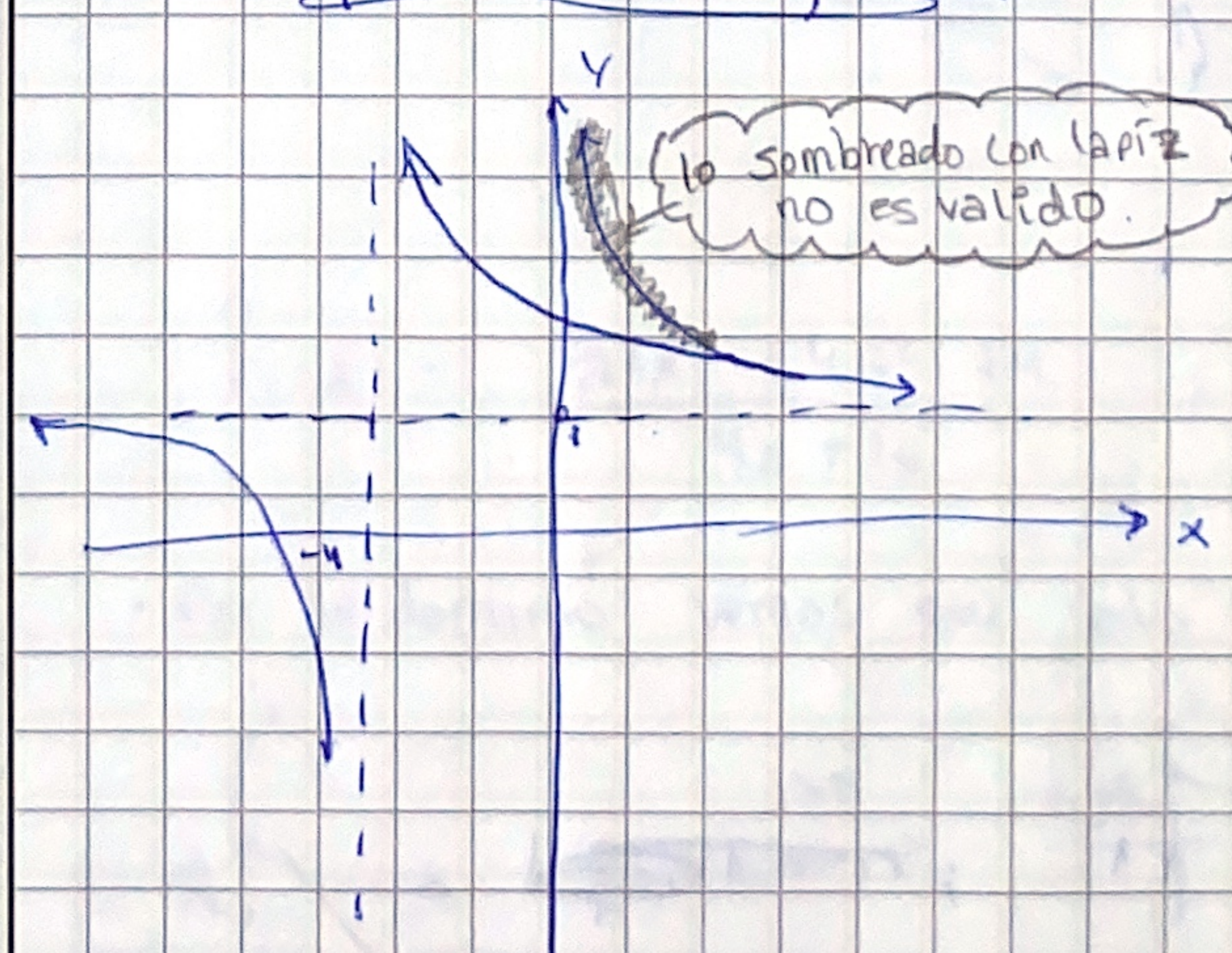
$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

sea $f_2(x) = \dfrac{4x + 20}{4x + 16}$; $x \geq 0$

$4(4)+4$

~~f(x) = 1 , x ≥ d~~





A.H: $y = 1$

- A.V: $x = -4$

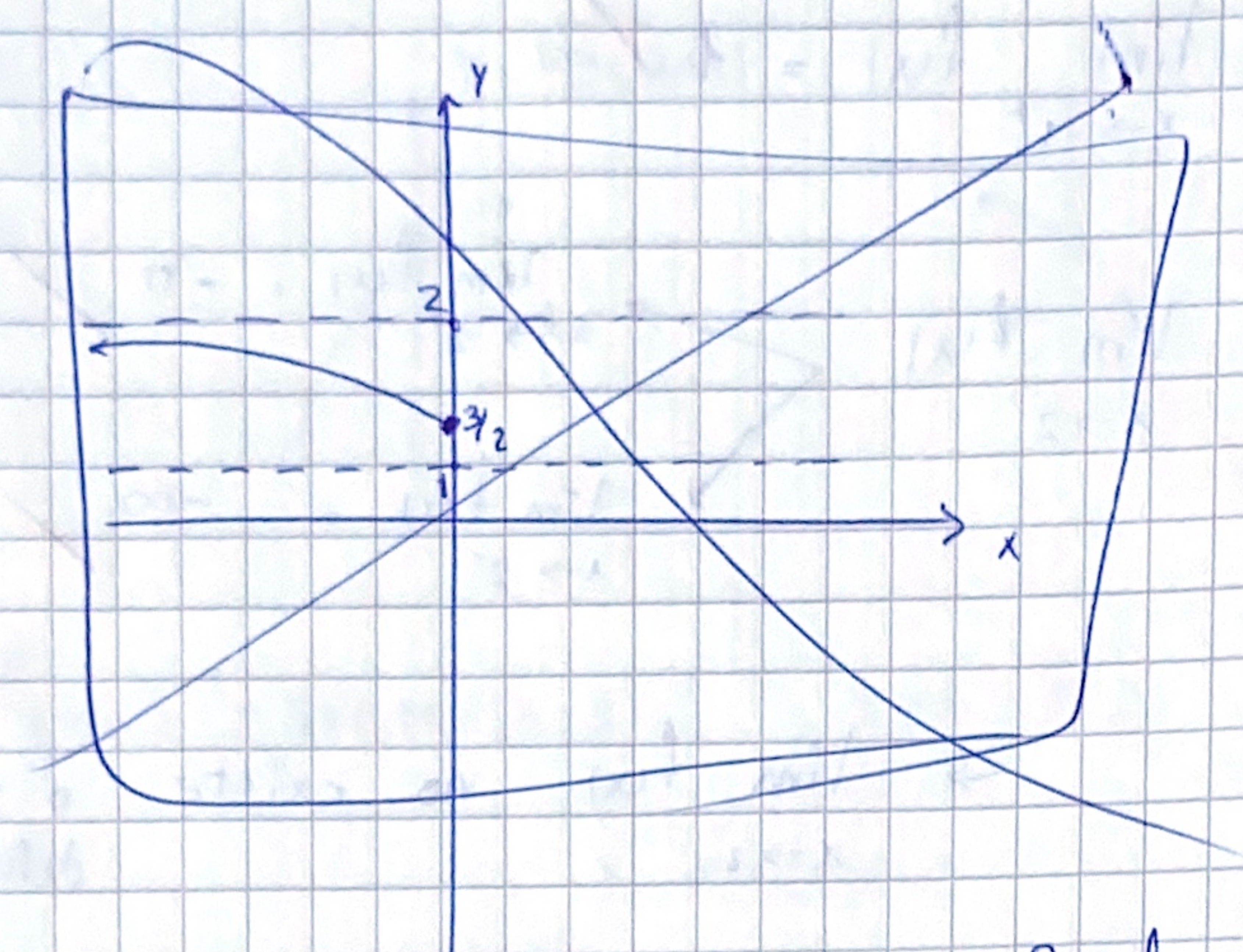
$\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$, $2\ \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{5}{4}$

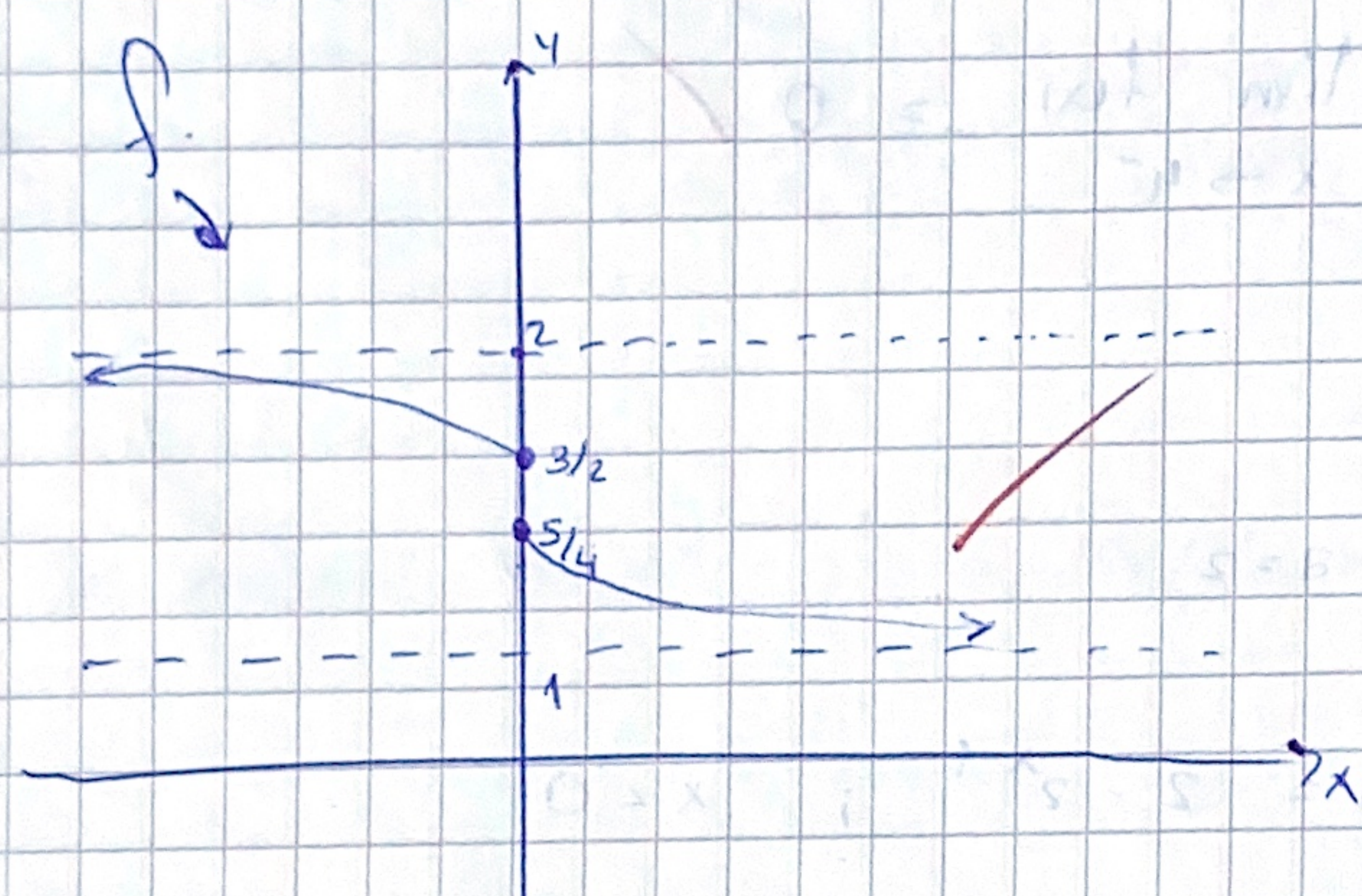
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

» Unimos las gráficas tomando en cuenta su dominio:



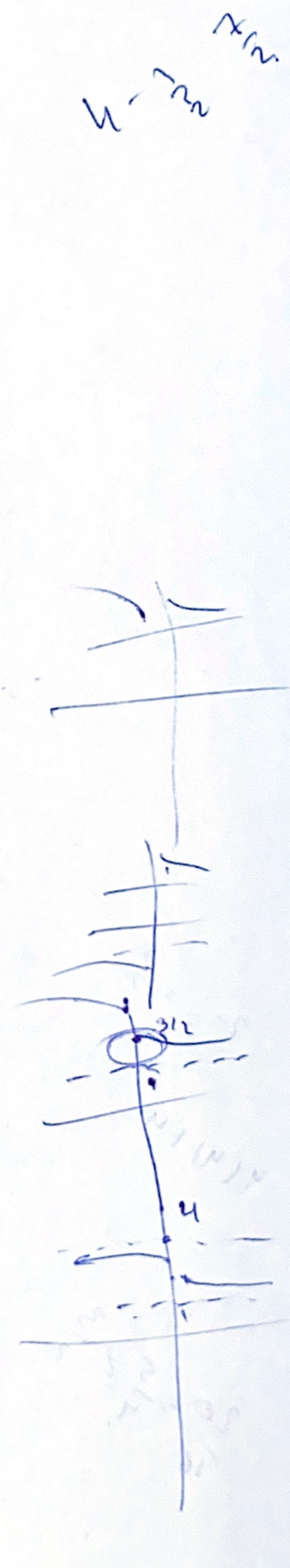
· $Ran f: \langle 1 ; \frac{5}{4}] \cup [\frac{3}{2} ; 2\rangle$



∴ Vemos en la gráfica que al trazar una recta horizontal // eje X, cortará a lo más en un punto.

Además $Ran f_1 \cap Ran f_2 = \emptyset$

∴ f es inyectiva, por tanto tiene inversa.



» Hallamos la inversa de f:

→ $f_1(x) = 2 - 2^{x-1}$

$y = 2 - 2^{x-1}$

$2^{x-1} = 2 - y$

$x - 1 = \log_2(2-y)$

$x = \log_2(2-y) + 1$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$f_1^{-1}(x) = \log_2(2-x) + 1$;

$\frac{3}{2} \leq x < 2$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$\rightarrow \quad f_2(x) = \dfrac{4x+20}{4x+16}$

$y = \dfrac{4x+20}{4x+16}$

$(4x+16)y = 4x+20$

$4xy + 16y - 4x = 20$

$4x(y-1) + 16y = 20$

$4x(y-1) = 20 - 16y$

$4x = \dfrac{20-16y}{y-1}$

$x = \dfrac{20-16y}{4y-4}$

$f_2^{-1}(x) = \dfrac{20-16x}{4x-4} \quad ; \quad 1 < x \le \dfrac{5}{4}$

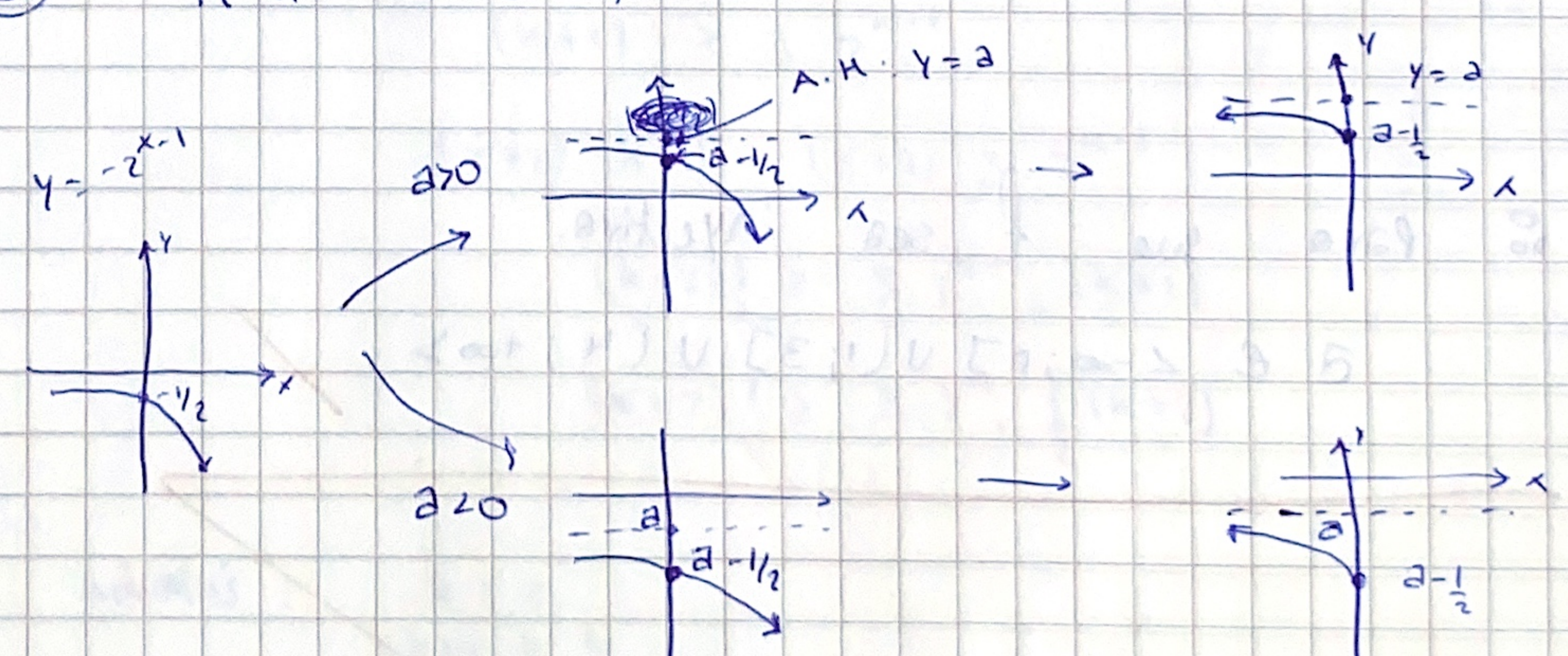
$\therefore \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_2(-x+2)+1 & ; \quad \frac{3}{2} \le x < 2 \\ \dfrac{20-16x}{4x-4} & ; \quad 1 < x \le \frac{5}{4} \end{cases}$

$\dfrac{a^2(x+1)+4}{4x+16}$

$\dfrac{a^2}{4} = y \cdot$ A.H

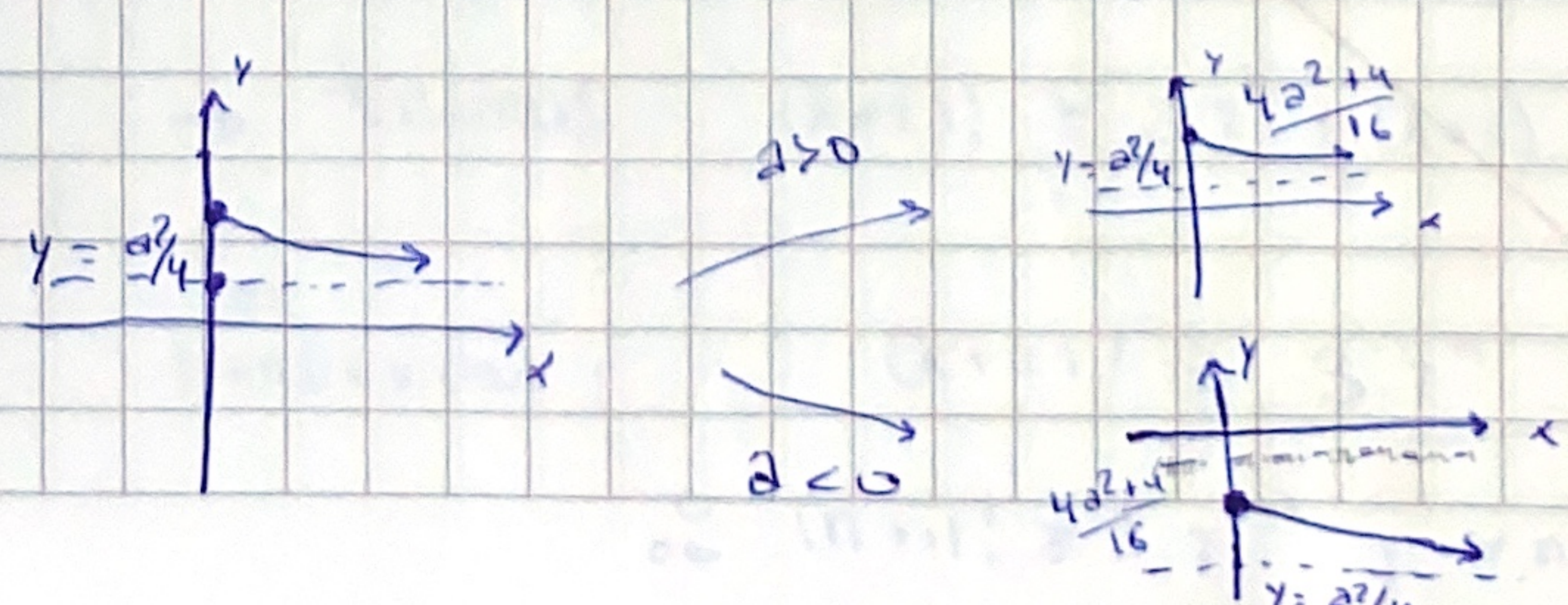
$x = 4 \cdot$ A.V

(b) $\quad f_1(x) = a - 2^{x-1} \quad ; \quad x < 0$



$f_2(x) = \dfrac{a^2x + 4a^2 + 4}{4x+16} \quad ; \quad x \ge 0$

• Por su dominio vemos que solo tendra A.H : $y = \dfrac{a^2}{4}$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Por tanto. Vemos que f será inyectiva

siempre que :

(Punto de corte con el eje y)

$\Rightarrow$ $a - \frac{1}{2} \geq \frac{4a^2+4}{16}$

$a - 1/2 \geq \frac{a^2+1}{4}$

$4a - 2 \geq a^2+1$

$0 \geq a^2-4a+3$

$(a-1)(a-3) \leq 0 \rightarrow a \in [1; 3]$

1 3

$\Rightarrow$ las asintotas :

$y = \frac{a^2}{4} \geq y = a$

$\frac{a^2}{4} \geq a$

$a^2 \geq 4a$

$a^2-4a \geq 0$

$a(a-4) \geq 0$

$-\infty$ 0 4 $+\infty$

$a \in \langle -\infty; 0] \cup [4; +\infty\rangle$

1 3 4

5.0

$\therefore$ para que f sea inyectiva.

$a \in \langle -\infty; 0] \cup [1; 3] \cup [4; +\infty\rangle$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$K \geq 2$

$K+2 \geq 4$

$\left(\frac{K+2}{2}\right) \geq 2$

$3\left(\frac{K+2}{2}\right) \geq 3.2$

$2^K . (\ ) > 2^K.3.2$

Presente aquí su trabajo

4) Dq' $\forall n \geq 2;\ n \in \mathbb{Z}$.

$$(n+1)! \geq 3 . 2^{n-1}$$

- E. base : Comprobamos que cumple para

$n = 2 \rightarrow \quad 3! \geq 3 . 2^1$

$6 \geq 6$ (✓) cumple

- E. Inductiva

• H.I : asumimos que cumple para

$n = K \rightarrow \quad (K+1)! \geq 3 . 2^{K-1}$; $\forall K \geq 2;\ K \in \mathbb{Z}$.

• T.I : Demostramos que cumple para

$n = K+1 \rightarrow \quad (K+2)! \geq 3 . 2^K$

→ De la H.I sabemos que:

$$(K+1)! \geq 3 . 2^{K-1}$$

$$(K+2) . (K+1)! \geq (K+2)\ 3 . 2^{K-1}$$

$$(K+2)! \geq 3 . 2^{K-1} . (K+2)$$

$$(K+2)! \geq 3 . 2^K . \frac{1}{2}(K+2)$$

Además : $K \geq 2$

$(K+2) \geq 4$

$\frac{1}{2}(K+2) \geq 2$

$3 . 2^K . \frac{1}{2}(K+2) \geq 3 . 2^K . 2$

→ a su ves $3 . 2^K . 2 \geq 3 . 2^K \rightarrow 3 . 2^K . \frac{1}{2}(K+2) \geq 3 . 2^K$

→ tenemos : $(K+2)! \geq 3 . 2^K . \frac{1}{2}(K+2) \geq 3 . 2^K$

Por transitividad : $(K+2)! \geq 3 . 2^K$

$\therefore (n+1)! \geq 3 . 2^{n-1}$; $\forall n \geq 2;\ n \in \mathbb{Z}$.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) $\sum_{k=1}^{n+1} \left(k + \frac{2^{k+1}}{3} + \binom{n+2}{k} \cdot 3^{k-2}\right)$

$\rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} (k)}_{\text{I}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2^{k+1}}{3}\right)}_{\text{II}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} \cdot 3^{k-2}}_{\text{III}}$

I $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

4,5

II $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k+1}}{3} = \sum_{k=1}^{n+1} 2^k \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n+1} 2^k$

$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

$\binom{n}{0} a^n \cdot b^0 = a^n$
a^n.

$\rightsquigarrow \frac{2}{3}\left(\frac{2^{n+1+1}-1}{2-1} - 2^0\right) = \frac{2}{3}\left(2^{n+2}-1-1\right) = \frac{2}{3}(2^{n+2}-2)$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$.

III $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} \cdot 3^{k-2} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} \cdot 3^k \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^2} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} 1^{n+2-k} \cdot 3^k$

$\frac{n+2!}{0!\, n+2!}$

$\rightsquigarrow \frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} 1^{n+2-k} \cdot 3^k + \binom{n+2}{n+2} \cdot 3^{n+2} + \binom{n+2}{0} \cdot 3^0 - \binom{n+2}{n+2} 3^{n+2} - \binom{n+2}{0} 3^0\right)$

$\rightsquigarrow \frac{1}{9}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} 1^{n+2-k} \cdot 3^k}_{(1+3)^{n+2}} - 3^{n+2} - 1\right)$

$\rightsquigarrow \frac{1}{9}\left(4^{n+2} - 3^{n+2} - 1\right)$

∴ tenemos: I + II + III

$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{2}{3}(2^{n+2}-2) + \frac{1}{9}\left(4^{n+2} - 3^{n+2} - 1\right)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$|\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}| + \cos\frac{2\pi}{2}$

$1 + \cos\pi$

-1

0

$(x-4)^2 \; ; \; x \geq 2$

$V(4,0)$

$x > 2$.

$(2,2)$ $(-3;0)$

$f(x) = a(x-4)^2 + 0$

$4 = a(2-4)^2$

$a = 1$

(5) 2.0

(b) $f(x) = |\text{sen}(x)| + \cos(2x)$

$f(-x) = |\text{sen}(-x)| + \cos(2(-x))$

$f(-x) = |-\text{sen}\,x| + \cos(-2x)$

$f(-x) = \underbrace{|\text{sen}\,x| + \cos(2x)}_{f(x)}$

$\therefore f(x) = f(-x) \rightarrow f$ es par.

Además: si la gráfica de f pasa punto $(\frac{\pi}{2}; 0)$

$\rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Calculamos $f(\frac{\pi}{2}) = |\text{sen}\,\frac{\pi}{2}| + \cos(2.\frac{\pi}{2})$

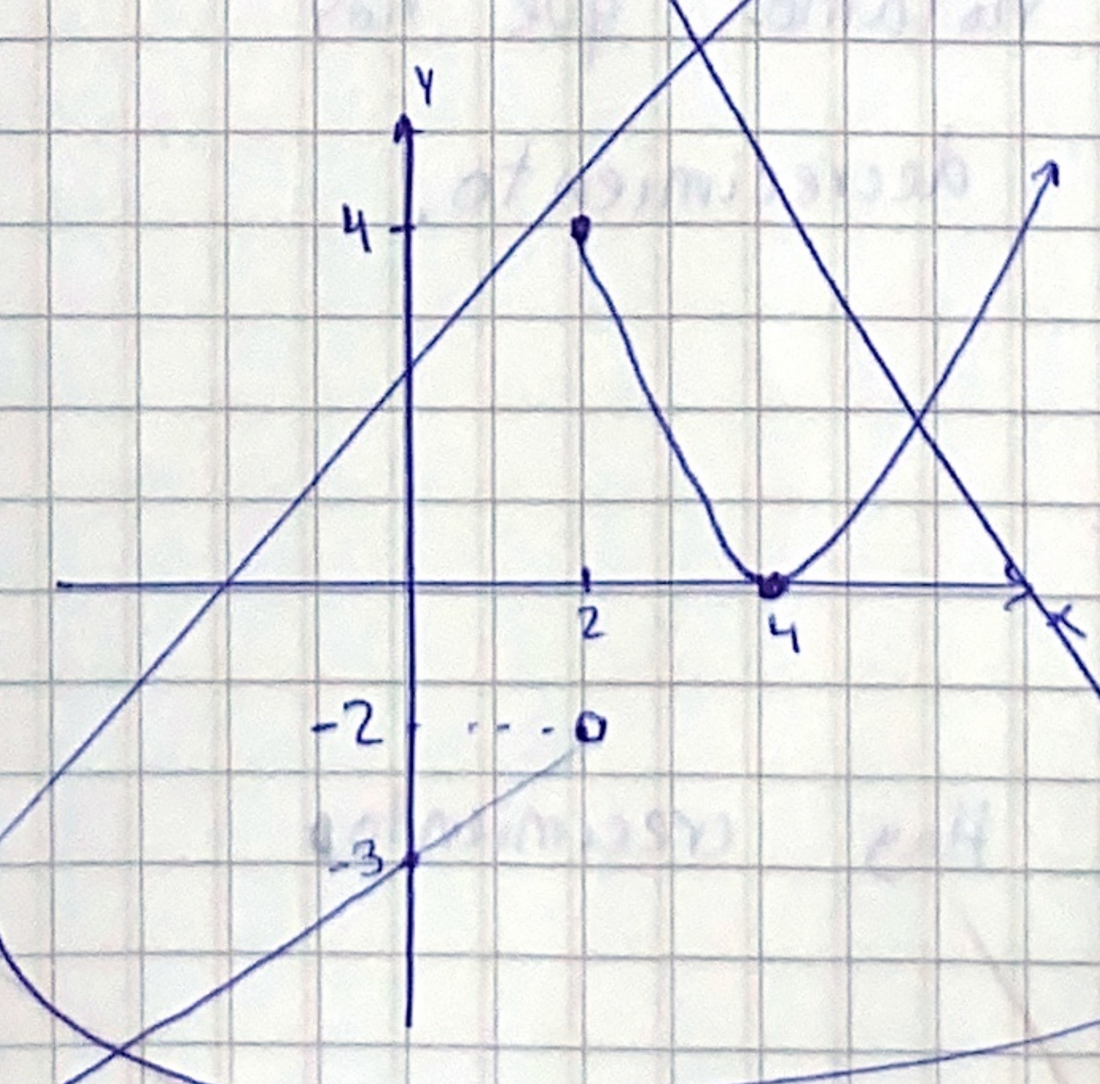
$= |1| + \cos\pi$

$= 1 + (-1)$

$f(\frac{\pi}{2}) = 0$ (✓)

$\rightarrow$ (b) VERDADERO.

(a) Sea $f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 \; ; & x \geq 2 \\ -\frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \; ; & x < 2 \end{cases}$

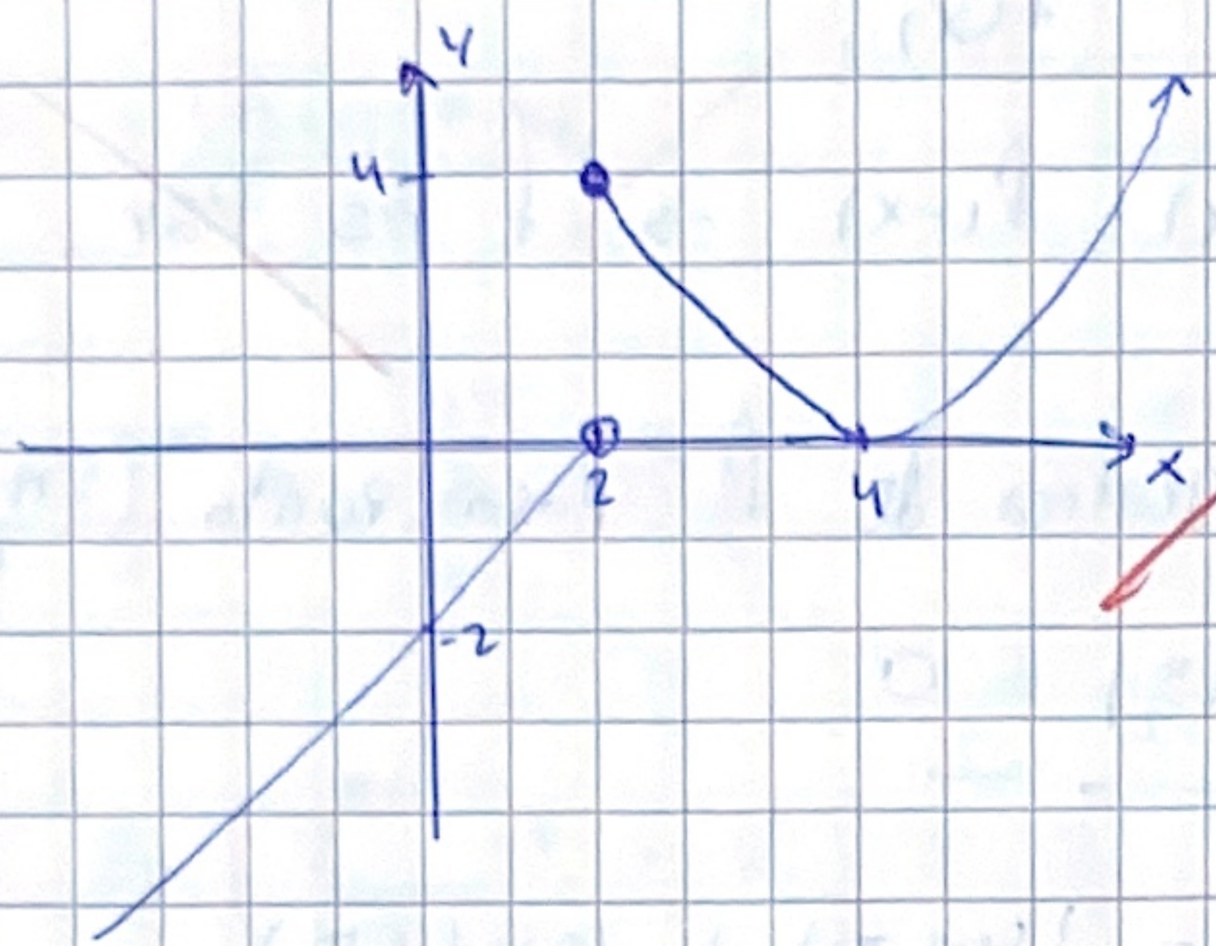


Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

a)

Sea $f_{(x)} = \begin{cases} (x-4)^2 & ; \; x \geq 2 \\ x-2 & ; \; x < 2 \end{cases}$



Vemos que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_{(x)} = -\infty$

Pero, no es creciente ni decreciente; ya que tomando los puntos $(2;4)$ y $(4;0)$

$x_1 = 2 < x_2 = 4$

$\rightarrow (2-4)^2 > (4-4)^2$

$4 > 0$

notamos que hay decrecimiento.

y los puntos $(0;-2)$ y $(2;0)$

$x_1 = 0 < x_2 = 2$

$0-2 \quad 2-2$

$-2 < 0$

Hay crecimiento.

$\therefore$ a) FALSO.

FIN