

Año

Número

2	0	2	2	3	4	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

Código de alumno

Primer examen

Nicó Espinoza, Alessandra Nadine

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H = 120.2

Fecha: 19/05/22

Nombre del profesor: A. Castillo

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horarios: 112; 113; 114; 115; 116; 117; 118; 119; 120; 121; 124; 125; B101; B102; B103
Turno: 11:30-14:30 **Duración:** 180 minutos

ADVERTENCIAS:

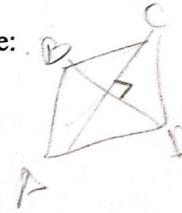
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- El examen consta de 6 preguntas.
- Puede utilizar calculadoras siempre que no sean programables ni gráficas. No puede usar apuntes de clase ni libros.
- Justifique sus respuestas.

✓1. Consideré el cuadrilátero de vértices consecutivos A, B, C y D . Se sabe que:

- $A(-7; -5), B(-3; 2)$ y $D(2; -8)$.
- Las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares.
- Los lados \overline{AB} y \overline{CD} son paralelos.



Se pide lo siguiente:

- a) Halle la ecuación de la recta que contiene a la diagonal \overline{AC} . (1 punto)
 b) Halle las coordenadas del vértice C . (1 punto)

✓2. Determine para qué valores de α la gráfica de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 50\alpha = 0$$

Corresponde a:

- a) Una circunferencia
 b) Un solo punto
 c) El conjunto vacío

$x=0 \wedge y=0$

(2 puntos)

✓3. Consideré los vectores

$$\vec{a} = (3; -1; -1), \vec{i} = (1; 0; 0) \text{ y } \vec{k} = (0; 0; 1).$$

Sea \vec{b} un vector de \mathbb{R}^3 tal que $\|\vec{b}\| = 2$. Si se cumple la siguiente igualdad

$$(\vec{a} \cdot (\vec{i} - \vec{k}) + \vec{b} \cdot \vec{b})\vec{v} - 3(\vec{v} - \vec{a}) = 2\vec{a},$$

Halle el vector \vec{v} .

(3 puntos)

4. Considere la elipse $\mathcal{E}: \frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$, la circunferencia $\mathcal{C}: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$ y la hipérbola \mathcal{H} .

Se sabe que:

- Los vértices de \mathcal{E} son los focos de \mathcal{H} .
- La recta tangente a \mathcal{C} en el punto $(3; 8)$ contiene a un vértice de \mathcal{H} .

Se pide lo siguiente:

- ✓ a) Halle la ecuación de la hipérbola \mathcal{H} . (2,5 puntos)
- ✓ b) Esboce el gráfico de \mathcal{E} , \mathcal{C} y \mathcal{H} en un mismo plano, mostrando la ubicación de sus centros, así como de las asintotas de \mathcal{H} . (1,5 puntos)

5. Considere la parábola cuya ecuación es

$$5x^2 - 30xy + 45y^2 + 74\sqrt{10}x - 142\sqrt{10}y + k = 0,$$

(xy)

donde k es una constante.

Se pide lo siguiente:

- a) Si el vértice de la parábola tiene coordenadas $V\left(\frac{5}{2}\sqrt{10}; \frac{5}{2}\sqrt{10}\right)$, halle el valor de k . (1 punto)
- b) Considera $k = 450$.
 - b₁) Halle las coordenadas del foco y la ecuación del eje focal de la parábola en el sistema $X - Y$. (3 puntos)
 - b₂) Grafique la parábola en el plano $X - Y$, mostrando la ubicación del vértice, foco y el eje focal. (1 punto)

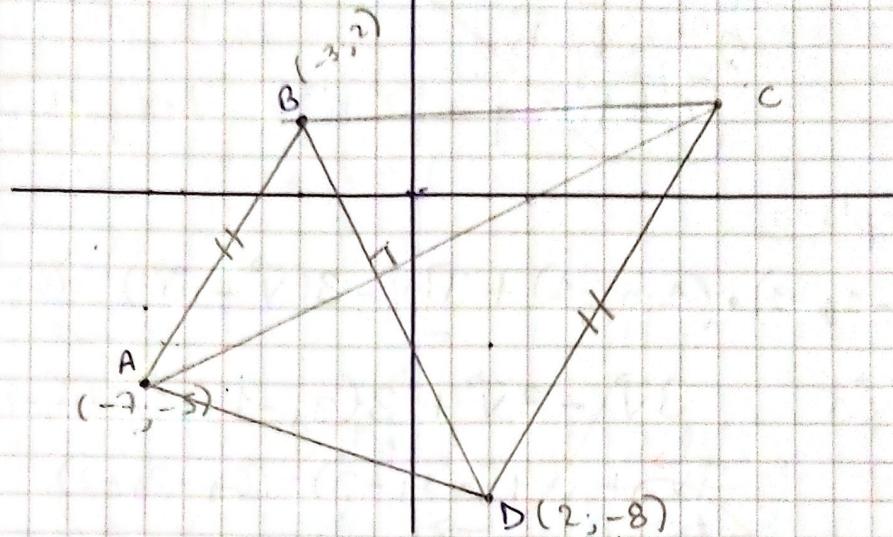
6. Considere:

- La hipérbola \mathcal{H} de ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.
- Un punto P que se desplaza sobre la hipérbola \mathcal{H} .
- El punto Q en la recta $\mathcal{L}: x + y - 1 = 0$, tal que \overline{PQ} es perpendicular a la recta \mathcal{L} .

Se pide lo siguiente:

- ✓ a) Halle las coordenadas de los focos de \mathcal{H} y grafique en un mismo plano la hipérbola \mathcal{H} y la recta \mathcal{L} . (1,5 puntos)
- ✓ b) Halle la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto M , punto medio del segmento \overline{PQ} . (2,5 puntos)

1)



$$\rightarrow C(c_1, c_2)$$

$$\rightarrow m_{AC} = \frac{c_2 + 5}{c_1 + 7}$$

$$\bullet \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

$$m_{AC} \cdot m_{BD} = -1 \rightarrow m_{BD} = -\frac{10}{5} = -2.$$

$$\hookrightarrow \frac{c_2 + 5}{c_1 + 7} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 2c_2 + 10 &= c_1 + 7 \\ 3 &= c_1 - 2c_2 \dots (I) \end{aligned}$$

• Hallamos m_{AC}

$$m_{AC} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow m_{AB} = m_{CD}$$

$$m_{AB} = \frac{7-(-5)}{4-(-1)} =$$

$$m_{CD} = \frac{c_2 + 8}{c_1 - 2} = \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} 11c_2 + 32 &= 7c_1 - 14 \\ 46 &= 7c_1 - 11c_2 \dots (II) \end{aligned}$$

Sistema de Ecuaciones:

$$\begin{aligned} G &= 2c_1 - 4c_2 \uparrow (-) \\ 4G &= 7c_1 - 4c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4G &= 5c_1 \\ 8 &= c_1 \wedge c_2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

b)

$$C(8; \frac{5}{2}) /$$

~~A C AC~~

$$-5 = -\frac{1}{2} + b$$

$$-\frac{3}{2} = b$$

a)

$$\Rightarrow L_{AC}: y = \frac{x-3}{2}$$

$$\Rightarrow x - 2y - 3 = 0$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

3. $\frac{\text{Datos}}{\|\vec{b}\| = 2}$

(*) Producto punto

$$\begin{aligned} \|\vec{b}\| &= \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} \\ 2 &= \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} \\ 4 &= \boxed{\vec{b} \cdot \vec{b}} \end{aligned}$$

Reemplazo

$$[(3; -1; -1) \cdot (1; 0; -1) + 4] \vec{v} - 3(\vec{v} - \vec{a}) = (6; -2; -2)$$

$$8\vec{v} - 3\vec{v} + 3(3; -1; -1) = (6; -2; -2)$$

$$5\vec{v} + (9; -3; -3) = (6; -2; -2)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{-3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5} \right)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{b}\| &= \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} \\ 4 &= \boxed{\vec{b} \cdot \vec{b}} \end{aligned}$$

$$(1; 0; 0) - (0; 0; 1)$$

$$(1; 0; -1)$$

$$(3; -1; -1) - (1; 0; -1)$$

$$3 - 0 + 1$$

$$4$$

$$(6; -2; -2) - (9; -3; -3)$$

$$(-3; 1; 1)$$

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

4)

$$\text{Círculo: } \frac{(x+4)^2}{4^2} + \frac{(y-5)^2}{8^2} = 1$$

$$C_c: (-4; 5) \quad L_F \parallel L_y$$

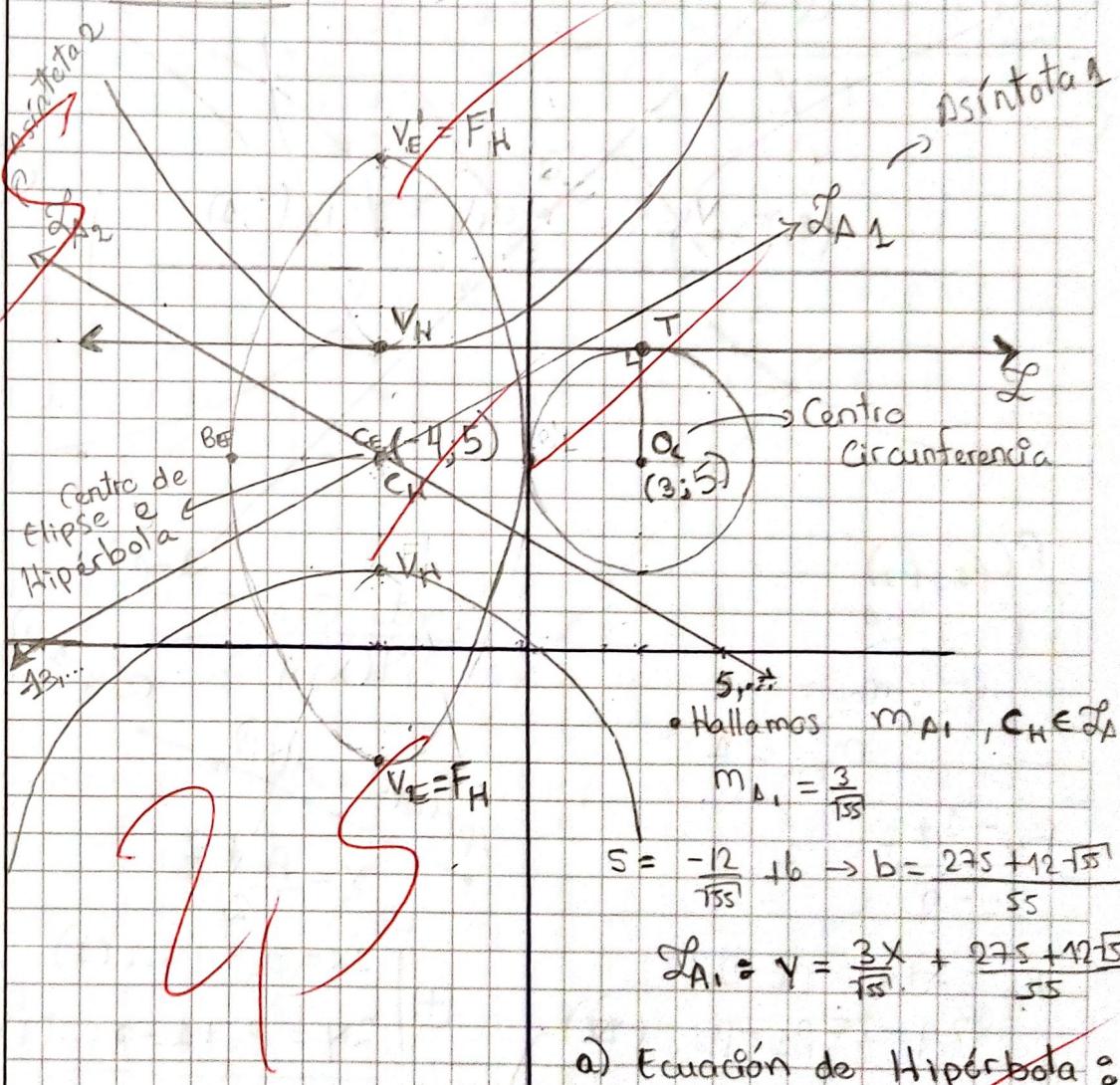
$$a = 8$$

$$b = 4$$

$$\text{Círculo: } (x-3)^2 + (y-5)^2 = 3^2$$

$$O_c(3; 5) \quad r = 3$$

Gráficas



Hallamos $m_{A_1}, C_H \in L_A_1$

$$m_{A_1} = \frac{3}{155}$$

$$S = -\frac{12}{155} + b \rightarrow b = \frac{275 + 12\sqrt{55}}{55}$$

$$L_{A_1}: y = \frac{3}{155}x + \frac{275 + 12\sqrt{55}}{55}$$

a) Ecación de Hipérbola:

$$\text{Hiperbola: } \frac{(y-5)^2}{a^2} - \frac{(x+4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{Hiperbola: } \frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(x+4)^2}{55} = 1$$

$$C_H = (-4; 5) \quad L_F \parallel L_y$$

$$c = 8$$

$$a = 3$$

$$b = \sqrt{55}$$

$$\bullet L_{A_2}, m_{A_2} = -\frac{3}{155}$$

$$S = \frac{12}{155} + b \rightarrow b = \frac{275 - 12\sqrt{55}}{55}$$

$$\Rightarrow L_{A_2}: y = -\frac{3}{155}x + \frac{275 - 12\sqrt{55}}{55}$$

Presente aquí su trabajo

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f: \frac{x^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \\ L: x + y - 1 = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} A = (0; 1) \\ B = (1; 0) \end{array} \right\} \in \mathcal{L}$$

*Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)*

Ecuaciones

$\rightarrow Q$

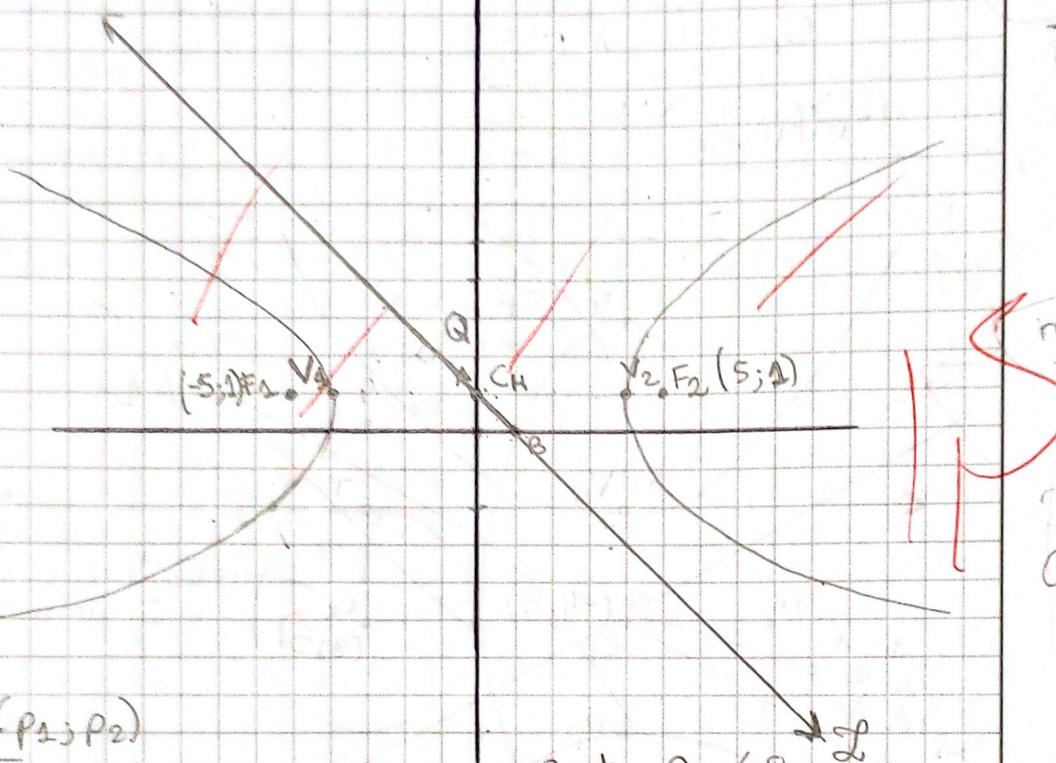
Pontos

$$y = -x + 1$$

$$\overline{PQ} \perp L$$

Q : pie de b
per perpendicular

$$m_{pq} = 1$$



$$P(p_1, p_2)$$

PQ ⊥ RS

$$m_{\bar{Q}} \cdot m_Q = -1$$

$$\frac{P_2 - 1 + q}{P_2 - q} = 1$$

$$P_2 - 1 + q = P_1 - q$$

$$2g-1 = p_1 - p_2 \text{, (IV)}$$

Reemplazo en (II)

$$2y = p_2 + 1 - \frac{x-y+1}{2}$$

$$1 \times 2y - 1 + \frac{x-y+1}{2} = p_2$$

$$4y - 2 + x - y + 1 = p_2$$

$$\frac{3y+x-1}{2} = p_2$$

Punto Genérico

$$M(x; y)$$

$$P(P_1, P_2) \rightarrow M(X^{\text{reg}})$$

$$(1) \quad 2X = p_1 + q_1 \dots (I)$$

$$\text{II} \quad 2N = P_2 + 1 - q \dots \text{II}$$

$$2q - 1 = p_1 - p_2$$

$$2x + 2y + 2g = 2d_1 + 1 + 1$$

$$x+y-1 = p_1 - q \dots$$

$$2X = P_A +$$

$$3x+y-1=2p_1$$

$$\frac{3x+y-1}{2} = p_1 \wedge q = \frac{x-y+1}{2}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$\Rightarrow P_1 = \frac{3x + y - 1}{2}$$

$$P_2 = \frac{3y + x - 1}{2}$$

Dato:

$$P(P_1; P_2) \in \mathcal{H}$$

$$(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x+y-1}{2} \right)^2$$

$$16$$

$$\left(\frac{3y+x-1}{2} - 1 \right)^2 = 1$$

$$9$$

2
1

S

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

2)

a)

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 50\alpha = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 8y + 16) - 16 - 50\alpha = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 + 50\alpha$$

$$\rightarrow 25 + 50\alpha > 0$$

$$\alpha > -\frac{1}{2}$$

b)

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 + 50\alpha$$

$$25 + 50\alpha < 0$$

$$\alpha < -\frac{1}{2}$$

b)

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 50\alpha = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 + 50\alpha$$

$$25 + 50\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Ecuación
 $XY \rightarrow UV$

b.) Halla $F(UV)$

\downarrow

XY

b.) Halla $L_F(UV)$

\downarrow
 XY

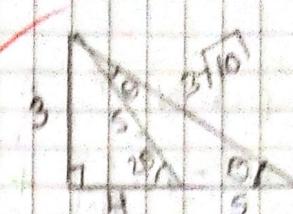
$$\begin{cases} X = u \cos \theta - v \sin \theta \\ Y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = x \cos \theta + y \sin \theta \\ V = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

5)

b) $K = 450$

$$\tan 20^\circ = \frac{-30}{-10} = \frac{3}{1}$$



$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$X = u \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - v \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$Y = \frac{u}{\sqrt{10}} + v \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Reemplazo:

$$* 5X^2 = 5 \left(\frac{9u^2}{10} - \frac{6uv}{10} + \frac{v^2}{10} \right) = \frac{9u^2}{2} - 3uv + \frac{v^2}{2}$$

$$* -30XY = -30 \left(\frac{3u^2}{10} - \frac{uv}{10} + \frac{9uv}{10} - \frac{3v^2}{10} \right) = -9u^2 - 24uv + 9v^2$$

$$* 45Y^2 = 45 \left(\frac{u^2}{10} + \frac{6uv}{10} + \frac{9v^2}{10} \right) = \frac{9u^2}{2} + 27uv + \frac{81v^2}{2}$$

$$* 74\sqrt{10}X = 222u - 74v$$

$$* -142\sqrt{10}Y = -142u - 426v$$

$$* K = 450$$

$$m_{VF} =$$

$$L_F: v = 5$$

$$V = \frac{x}{\sqrt{10}} + y \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$(xy)$$

$$L_F: \frac{-x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} = 5$$

2

$$9u^2 - 50v^2 + 80uv - 500v + 450 = 0$$

$$9/50(v^2 - 10v + 25) - 1250 + 450 + 80u = 0$$

$$50(u-5)^2 = 800 - 80u$$

$$P: (v-5)^2 = -\frac{8}{5}(u-10)$$

$$L_F \parallel L_u$$

$$\nabla(10; 5)$$

$$Ap = -\frac{8}{5}$$

$$P = -\frac{2}{5}$$

$$F = \left(\frac{48}{5}; 5 \right)$$

$$X = \frac{48}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{5}{\sqrt{10}} = 7,53$$

$$Y = \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 7,78$$

$$F \left(\frac{48}{5}; 5 \right)$$

$$F(7,53; 7,78)$$

$$b_2$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

- b₁) • Hallamos $\angle F$ en (UV)

$$\angle F : V = 5$$

$$V = -X \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + Y \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow \angle F$ en (XY)

$$\angle F : \frac{-X \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} + \frac{3Y \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = 5$$

$$-\frac{\sqrt{10}X}{10} + \frac{3\sqrt{10}Y}{10} = 5$$

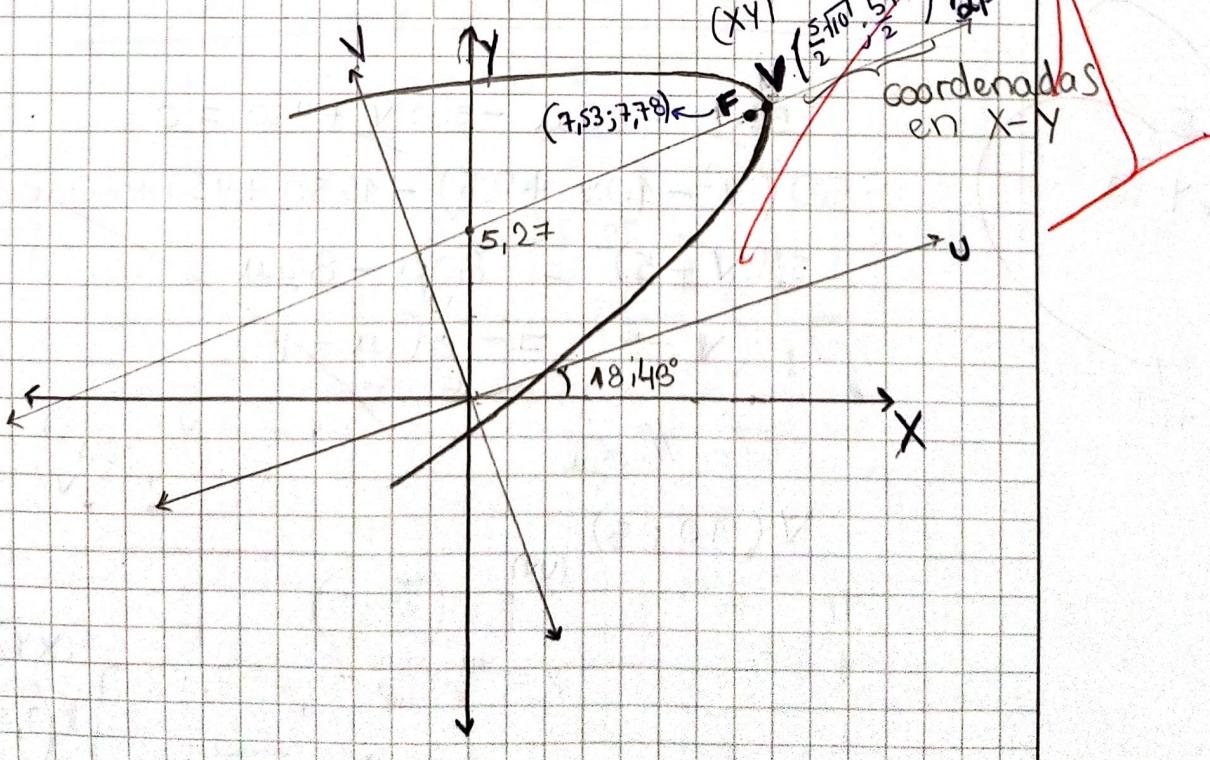
$$3\sqrt{10}Y - \sqrt{10}X = 50$$

b₂) $\begin{array}{l} (UV) \\ V = (10; 5) \end{array}$

$\begin{array}{l} (XY) \\ X = 10 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{25\sqrt{10}}{10\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \end{array}$

$$\begin{array}{l} (XY) \\ V = \left(\frac{5\sqrt{10}}{2}, \frac{5\sqrt{10}}{2} \right) \end{array}$$

$$Y = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{25\sqrt{10}}{10\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$



Presente aquí su trabajo

5)

a) (XY)

$\Rightarrow (UV), K = 450$

$$V\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}; \frac{5\sqrt{10}}{2}\right) \quad \left\{ \quad V(10; 5)$$

$$\frac{5\sqrt{10}}{2} = 10 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \quad \checkmark$$

$$\frac{5\sqrt{10}}{2} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

\Rightarrow Como en b) nos dan $K=450$,
se verifica que en este caso
también tomaría dicho valor.

$\therefore K = 450 \checkmark$