ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horario: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 122, A123

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realize gráficas (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

---

1. a) Si $B=(b_{ij})$ es una matriz de orden 2×3 tal que $b_{ij}=2i-j^{i+1}$, halle explícitamente las matrices B y B^t. **(1 pt)**

   b) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz B, hallada en el item a). Si X e Y son matrices que cumplen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X-3Y &= A \\ X+Y &= -B^t \end{cases}$$

   halle el producto de las matrices X^t y Y, en ese orden. **(3 pt)**

2. Considere los planos

$$\mathscr{P}_1 : x+2y+3z=4 \quad y \quad \mathscr{P}_2 : x+3y+2z=1.$$

   a) Halle una ecuación de la recta que resulta de intersecar los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$. **(2 puntos)**

   b) Halle una ecuación del lugar geométrico descrito por los puntos $P(x;y;z)$ que equidistan de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$. **(2 puntos)**

   NOTA: Sean el punto $P(x_0;y_0;z_0)$ y el plano $\mathscr{P}: ax+by+cz+d=0$. La distancia del punto P al plano $\mathscr{P}$ es:

$$d(P,\mathscr{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

3. Sean la recta $\mathscr{L} : P = (2;4;6) + t(1;3;0), t \in \mathbb{R}$, y el plano $\mathscr{P} : 3x + 12y - 15z + 9 = 0$. Halle la ecuación del plano $\mathscr{P}_1$ que contiene a $\mathscr{L}$ y es perpendicular al plano $\mathscr{P}$. **(4 puntos)**

4. Considere las rectas

$$\mathscr{L}_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2 : \begin{cases} x &= 3 + \frac{1}{2}t \\ y &= 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z &= 4 - t \end{cases}$$

donde $a \neq 0$ es un valor constante.

a) Analice si existe algún valor de "a" para el cual las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas. En caso exista dicho valor, determine si dichas rectas son coincidentes o son distintas. **(2 puntos)**

b) Analice si existen valores de "a" para los cuales las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ se intersecan en un punto. **(2 puntos)**

5. Considere el plano $\mathscr{P}: 4x - 7y - 4z + 68 = 0$ y la esfera $\mathscr{S}: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 211 = 0$.

a) Halle las coordenadas del centro y el radio de la esfera $\mathscr{S}$. **(1 punto)**

b) Halle las coordenadas del centro de la circunferencia $\mathscr{C}$ que se obtiene al intersecar el plano $\mathscr{P}$ con la esfera $\mathscr{S}$. **(1.5 puntos)**

c) Determine el radio de la circunferencia $\mathscr{C}$, hallada en item b). **(1.5 puntos)**

Coordinador de prácticas: Elton Barrantes

San Miguel, 20 de junio de 2022.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII
PUCP

Práctica

Año				Número			
2	0	2	2	0	4	3	6

Código de alumno

CUEVA CASAS MARYCARMEN
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica Nº: 4

Horario de práctica: 103-1

Fecha: 20 / 06 / 22

Nota
20

Nombre del profesor: J. YUCRA

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) R. C.

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

fC

$2-4=-2$

$2-9=-7$

$4-8$

Presente aquí su trabajo

① a) $b_{ij} = 2i - j^{i+1}$

$C_{11} = 2(1) - 1^{(1+1)} = 1$
$C_{12} = 2(1) - 2^{1+1} = -2$
$C_{13} = 2(1) - 3^{1+1} = -7$
$C_{21} = 2(2) - 1^{2+1} = 3$
$C_{22} = 2(2) - 2^{2+1} = -4$
$C_{23} = 2(2) - 3^{2+1} = -23$

1p

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & -4 & -23 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \\ -7 & -23 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

b) $2x - 3y = A$

$(x + y = -B^t)\,3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3p

$2x - \cancel{3}y = A$
$3x + \cancel{3}y = -3B^t$

$5x = A - 3B^t$

$$5x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \\ -7 & -23 \end{pmatrix}$$

$$5x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 21 & 69 \end{pmatrix}$$

$$5x = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 10 & 15 \\ 28 & 70 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -2 \\ 2 & 3 \\ \frac{28}{5} & 14 \end{pmatrix}$$

$x + y = -B^t$

$y = -B^t - x$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 7 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -2 & -3 \\ -\frac{28}{5} & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 \\ \frac{7}{5} & 9 \end{pmatrix}$$

Presente aquí su trabajo

$x^t\, y$

$$x^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 2 & \frac{28}{5} \\ -2 & 3 & 14 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

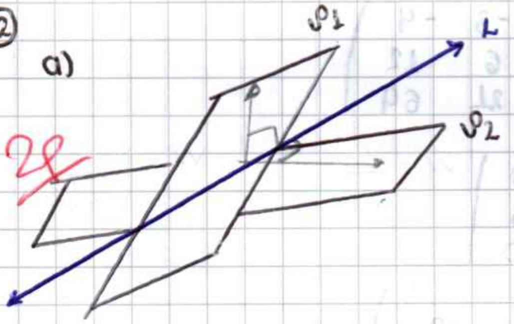
$$y = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 \\ \frac{7}{5} & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

sí es posible

- $C_{11} = \frac{4}{25} + 0 + \frac{196}{25} = 8$
- $C_{12} = \frac{1}{5} + 2 + \frac{252}{5} = \frac{263}{5}$
- $C_{21} = \frac{8}{5} + 0 + \frac{98}{5} = \frac{106}{5}$
- $C_{22} = 2 + 3 + 126 = 131$

$$\begin{pmatrix} 8 & \frac{263}{5} \\ \frac{106}{5} & 131 \end{pmatrix}$$

② a)



2/2

$\wp_1 = x + 2y + 3z = 4$

$\wp_2 = x + 3y + 2z = 1$

$\vec{n_1} = (1, 2, 3)$

$\vec{n_2} = (1, 3, 2)$

$\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ = vector dirección L

$$\begin{matrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

- $4 - 9 = -5$
- $-(2-3) = 1$
- $3 - 2 = 1$

$\vec{v} = (-5, 1, 1)$

$\wp_1 \cap \wp_2$ $\quad \cancel{x} + 2y + 3z - 4 = \cancel{x} + 3y + 2z - 1$

$y - z + 3 = 0$

$y = z - 3$

$y = 1$

$z = 4$

$x = -10$

$L = (-10, 1, 4) + t(-5, 1, 1) \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-\frac{1}{5} \quad -2$

$2 \quad 3 \quad = x$

$\frac{28}{5} \quad 14$

$y = -\frac{4}{5} \quad -1$

$0 \quad 1$

$\frac{7}{5} \quad 9$

$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$

$n_1 \times n_2$ = vector dirección

$x = 1$

$x + 3y + 2z - 1$

$y - z + 3 = 0$

$y = z - 3$

$y = 1$

$z = 4$

$\boxed{\begin{matrix} y = 1 \\ z = 4 \end{matrix}}$

$x = -10$

$x + 2 + 12 = 4$

$x + 14 = 4$

$x + 3 + 8 = 1$

$x + 11 = 1$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$\frac{|x+2y+3z-4|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{x+3y+2z-1}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}}$

$(2+t)\,;\ 4+3t\,;\ 6$

$3(2+t)+12(4+3t)-15(6)+9=0$

$6+3t+48+36t-90+9=0$

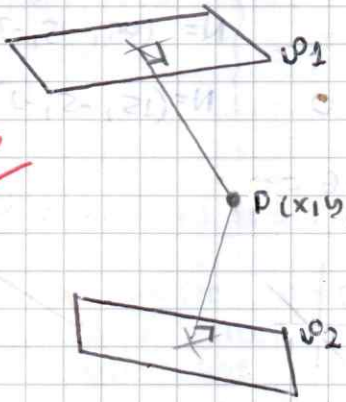
$39t-27=0$

$t=\frac{27}{39}$

$n_2 \times v_1$

+	-	+
3	12	-15
1	3	0

b)



2p

$d(P,\wp_1) = d(P,\wp_2)$

$$\frac{|x+2y+3z-4|}{\cancel{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}} = \frac{|x+3y+2z-1|}{\cancel{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}}$$

$|x+2y+3z-4| = |x+3y+2z-1|$

(I) $x+2y+3z-4 = x+3y+2z-1$

(II) $x+2y+3z-4 = -x-3y-2z+1$

$\cancel{x}+2y+3z-4 = \cancel{x}+3y+2z-1$

$y-z+3=0$

$\begin{cases} x+2y+3z-4 = -x-3y-2z+1 \\ 2x+5y+5z-5=0 \end{cases}$

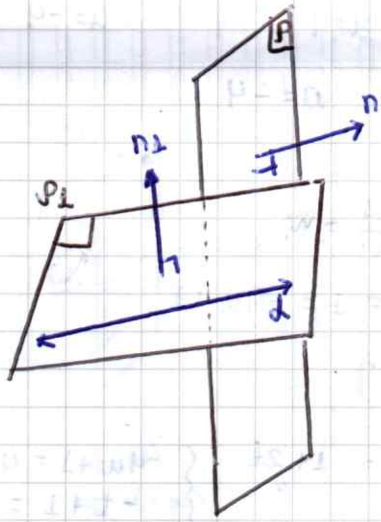
$y-z+3=0$

$2x+5y+5z-5=0$

(3) $\mathscr{L} = (2,4,6) + t\,(1,3,0)$

$\wp = 3x+12y-15z+9=0$

4p



- como $\wp_1$ y $\wp$ son perpendiculares $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ $\measuredangle 90°$
- además $\vec{v_1}$ de $\mathscr{L}$ y $\vec{n_1}$ también forman $\measuredangle 90°$

¿$\mathscr{L}$ interseca a $\wp$?

$P\,(2+t\,;\ 4+3t\,,\ 6)$

$\wp = 3x+12y-15z+9=0$

$3(2+t)+12(4+3t)-15(6)+9=0$

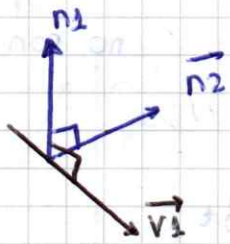
$6+3t+48+36t-90+9=0$

$39t-27=0$

$t=\frac{-27}{39}$

$\mathscr{L}$ sí interseca a P

$\vec{n_2}\times\vec{v_1} = \vec{n_1}$



+	-	+
3	12	-15
1	3	0

- $0-(-45)=45$
- $-(0-(-15))=-15$
- $9-12=-3$

$\vec{n_1} = (45,-15,-3)$

Ecuación del plano

$\wp_1 = (P-P_0)\cdot N = 0$

Presente aquí su trabajo

$\wp_1 = ((x,y,z)-(2,4,6)) \cdot N = 0$ $N = (45,-15,-3)$

$\wp_1 = (x-2; y-4; z-6) \cdot (15,-5,-1) = 0$ $N = (15,-5,-1)$

$15x - 30 + (-5y) + 20 - z + 6 = 0$

$15x - 5y - z - 4 = 0$

$\wp_1 = 15x - 5y - z - 4 = 0$

④ a)

$d_1 = \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-1}{a}$ $\vec{V_1} = (2,8,a)$

2P

$d_2 = (3,1,4) + t\left(\frac{1}{2}, 2, -1\right)$ $\vec{V_2} = \left(\frac{1}{2}, 2, -1\right)$

$d_1 \parallel d_2 \rightarrow \vec{V_1} \parallel \vec{V_2}$

$(2,8,a) = d\left(\frac{1}{2}, 2, -1\right)$

$2 = d\frac{1}{2}$ $\quad 8 = 2d \quad$ $a = -1d$

$d = 4$ $\quad d = 4 \quad$ $a = -4$

$a = -4$

$\frac{x-3}{2} = w$ $\quad \frac{y-4}{8} = w \quad$ $\frac{z-1}{a} = w$

$x = 2w+3$ $\quad y = 8w+4 \quad$ $z = -4w+1$

igualando:

$2w + \cancel{3} = \cancel{3} + \frac{1}{2}t$ $\quad 8w+4 = 1+2t \quad$ $-4w+1 = 4-t$

$2w = \frac{1}{2}t$ $\quad \cancel{2t}+4 = 1+\cancel{2t} \quad$ $-\cancel{t}+1 = 4-\cancel{t}$

$4w = t$ $\quad 4 = 1$ (F) $\quad 1 = 4$ (F)

no son iguales

b) intersecan en 1 punto

2P

$x = 2w+3$ $\quad x = 3 + \frac{1}{2}t$

$y = 8w+4$ $\quad y = 1+2t$

$z = aw+1$ $\quad z = 4-t$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{x-3}{2} = V$

$x = 2V+3$

$y = 8V+4$

$z = -4V+1$

- $2V + \cancel{3} = \cancel{3} + \frac{1}{2}t$

$2V = \frac{1}{2}t$

$4V = t$

- $8V+4 = 1+2t$

$2t+4 = 1+2t$

¿?

- $-4V+1 = 4-t$

$-\cancel{4V}+1 = 4-\cancel{4V}$

$1 = 4$ ¿?

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$N = (4, -7, -4)$

$C_1 - C = d(N)$

$\overrightarrow{CC_1} = d(N)$

$C_1 = d(4,-7,-4) + C$

$4d+2$

$\|\overrightarrow{CC_1}\| = 9$

$(4d, -7d, -4d)^2 = 81$

$(4d)^2 + (-7d)^2 + (-4d)^2 = 81$

$81d^2 = 81$

$d^2 = 1$

$d = +1, -1$

$C_1 (6, -6, -7)$ ✗

$C_1 (-2, 8, 1)$ ✓

$2w + \cancel{3} = \cancel{3} + \frac{1}{2}t$

$2w = \frac{1}{2}t$

$4w = t$

$8w + 4 = 1 + 2t$

$\cancel{2t} + 4 = 1 + \cancel{2t}$

$4 = 1$

(F)

$aw + 1 = 4 - t$

no existe ningun valor para "a" en las cuales la recta L_1 y L_2 se intersequen ya que no existe algún punto que pertenezca a ambas rectas.

(5) $\wp = 4x - 7y - 4z + 68 = 0$

$S = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 211 = 0$

a) $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 + 6z + 9 - 9 - 211 = 0$

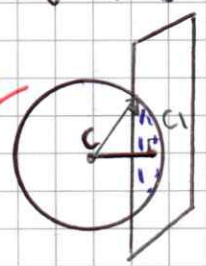
1p

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 225$

$C(2, 1, -3) \wedge r = 15$

b) $\wp \cap S$

1,5p



$C(2, 1, -3)$

$d(C, \wp)$

$$\frac{|4(2) - 7 + 12 + 68|}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 4^2}} = \frac{81}{9} = 9$$

$\|\overrightarrow{CC_1}\| = 9$

$(4d)^2 + (-7d)^2 + (-4d)^2 = 81$

$81d^2 = 81$

$d = +1$ ✗

-1 ✓

$\overrightarrow{CC_1} = d(N)$

$C_1 - C = d(N)$

$C_1 = d(N) + C$

$C_1 = (4d+2 ; -7d+1 ; -4d-3)$

$C_1 \quad (6, -6, -7)$ ✗

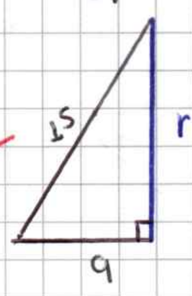
$C_1 \quad (-2, 8, 1)$ ✓

C_1 debe pertenecer al plano

$C_1 = (-2, 8, 1)$

c)

1,5p



r = radio circunferencia

$9^2 + r^2 = 15^2$

$r^2 = 15^2 - 9^2$

$r = 12$