PUCP
Estudios Generales Ciencias

Fundamentos de Cálculo

Segunda Práctica Calificada

Semestre Académico 2024-1

Horarios: 0101 al 0116.

Duración: 110 minutos

Elaborada por todos los profesores.

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, calculadoras, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Sea la función $f(x) = 4 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$.

   a) Determine el dominio implícito de f. (1 punto)

   b) Grafique f, indicando las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados. (2 puntos)

2. Considere las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 4x^2 - 8x - 12, x < 0, \qquad g(x) = \sqrt{-3x + 21}, -12 \leq x \leq -7.$$

   a) Esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de los puntos de interseccion de la gráfica con los ejes coordenados. (1 punto)

   b) Usando transformaciones, esboce la gráfica de la función g, indicando la secuencia de transformaciones necesarias para llegar a la gráfica. (3 puntos)

   c) Halle $\dfrac{g}{f}$. (1 punto)

   d) Halle $g \circ f$. (2 puntos)

3. Sea $f : [-2; 2] \to \mathbb{R}$ una función impar que cumple las siguientes condiciones:

   - Para $x \in]0; 3/2[$, f se define por $f(x) = x + 1$.
   - Para $x \in [3/2; 2]$, f se define por $f(x) = a + \sqrt{2x - x^2}$, donde a es una constante real positiva.
   - El valor máximo de la función f es $2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Halle:

   a) El valor de la constante a. (2.5 puntos)

---

b) La función f. (2.5 puntos)

4. El porcentaje de carga $P(t)$ de la batería de un celular disminuye conforme pasa el tiempo de encendido t (medido en horas). Se está experimentando con un nuevo modelo de batería para celulares y se tiene la siguiente información:

- Comenzando con el celular cargado completamente $P(t)$ se modela con la función lineal $at+b$ durante las primeras 25 horas de encendido, momento en el cual se llega al 50 % de la carga.
- Desde la hora 25 de encendido hasta que la batería se agota $P(t)$ se modela con la función $c+d\sqrt{t}$, además se sabe que luego de 36 horas desde el inicio se registró que el celular contaba con 30 % de batería restante.

Halle la función $P(t)$. (3 puntos)

5. Justifique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Existe un número real m tal que la función $f(x)=mx^2+(m+1)x+1/2$ es positiva para todo $x\in\mathbb{R}$. (1 punto)

b) Si $f(x)=x^2+3x$ siendo $-3<x\leq 0$ entonces el valor máximo de f es 0. (1 punto)

San Miguel, 2 de mayo de 2024.

PUCP

Año: 2024

Número: 1028

Código de alumno

Práctica

Castelo Marchán Juan Antonio

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FUCAL

Práctica Nº: 2

Horario de práctica: H-102

Fecha: 02/05/24

Nombre del profesor: R. Ramos

Nota: 18

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) A. M. A.

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1.- $f(x) = 4 - \sqrt{12+4x-x^2}$

a) 3.0

Dom f: $12+4x-x^2 \geq 0$

$-x^2+4x+12 \geq 0$

$x^2-4x-12 \leq 0$

$x \quad -6 \mid 2x$

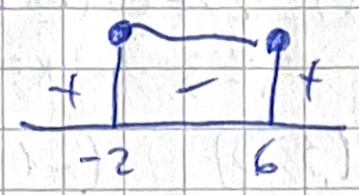
$x \quad 2 \mid -6x$

$-4x$

$(x-6)(x+2) \leq 0$

P.C:

$\begin{cases} x=6 \\ x=-2 \end{cases}$



Ley de signos:

$x-6$	−	−	+
$x+2$	−	+	+

Dom f: $[-2;6]$

b) $y = 4 - \sqrt{12+4x-x^2}$

$y-4 = -\sqrt{12+4x-x^2}$

En $x \in [-2;6]$

$-\sqrt{12+4x-x^2} \leq 0$

$y-4 \leq 0$

$\boxed{y \leq 4}$

$\sqrt{12+4x-x^2} = 4-y$

$\sqrt{\ }^2 = (y-4)^2$

$(2\sqrt{3})^2$

$4 \cdot 3$

$4-2\sqrt{3}$

$2(2-\sqrt{3})$

$0,6$

$y-4 = -\sqrt{12+4x-x^2}$

$(y-4)^2 = 12+4x-x^2$

$(y-4)^2 + x^2 - 4x = 12$

$(y-4)^2 + x^2 - 4x + 4 = 16$

$(y-4)^2 + (x-2)^2 = 16$

$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$

Circunferencia radio = 4

$C(2;4)$

$\boxed{y \leq 4}$

Parte de abajo de la circunferencia

Interceptos con el eje x

$0 = 4 - \sqrt{12+4x-x^2}$

$\sqrt{12+4x-x^2} = 4$

$-x^2+4x+12 = 16$

$0 = x^2-4x+4$

$0 = (x-2)^2$

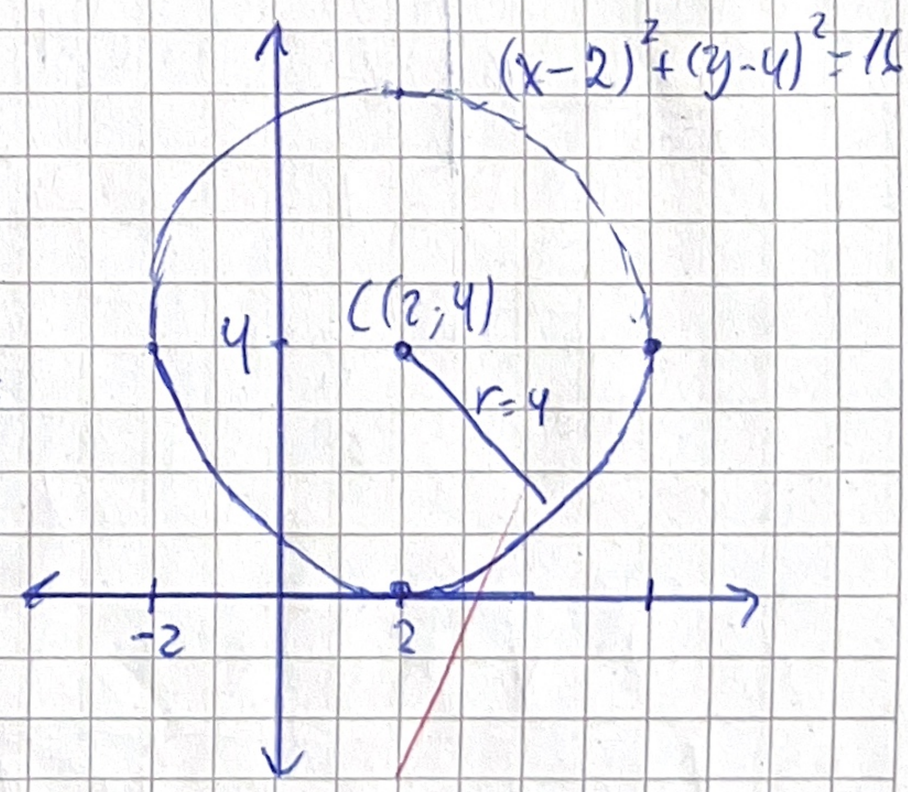
$x = 2 \rightarrow (2;0)$

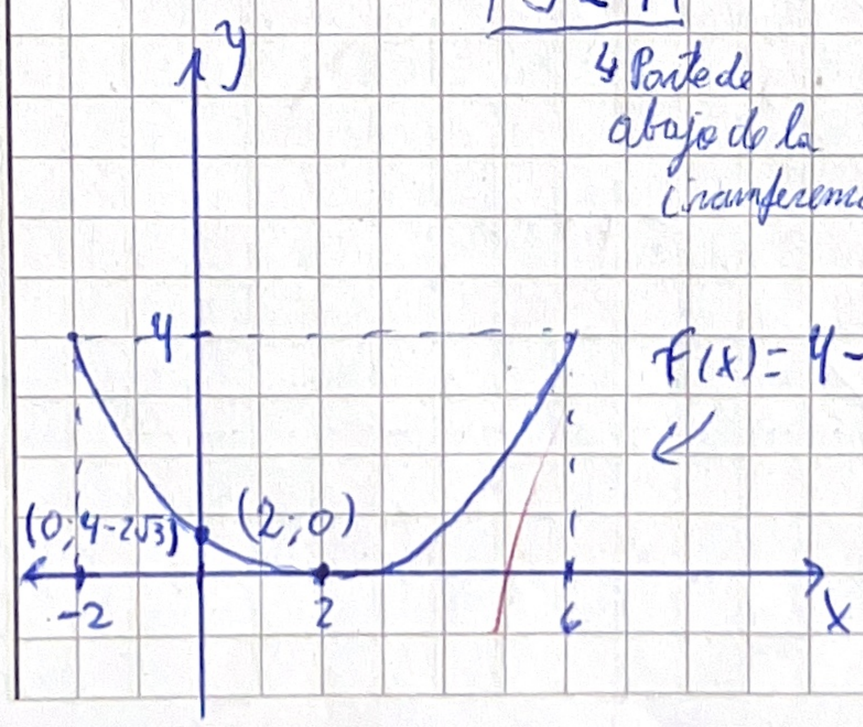
Interceptos con el eje y $\rightarrow x=0$

$y-4 = -\sqrt{12}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$y = 4-2\sqrt{3} \rightarrow (0; 4-2\sqrt{3})$





$f(x) = 4 - \sqrt{12-4x-x^2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2- $f(x) = 4x^2 - 8x - 12 \; ; \; x < 0$

$g(x) = \sqrt{-3x+21} \; , \; -12 \leq x \leq -7$

2) 1.0

2a) 1.0

a) $f(x) = 4(x^2 - 2x - 3) \; ; \; x < 0$

$= 4(x^2 - 2x + 1 - 4) \; ; \; x < 0$

$= 4((x-1)^2 - 4)$

$f(x) = 4(x-1)^2 - 16$

$a > 0$ se abre hacia arriba

$V(1; -16)$

$4x^2 - 8x - 12$

$2x \quad -6 \mid -12x$

$2x \quad 2 \mid +4x$

$-8x$

$f(x) = (2x-6)(2x+2)$

$x = 3 \qquad x = -1$

$(3;0) \qquad (-1;0)$

$4(x^2 - 2x + 1) - 16$

$4x^2 - 8x + 4 - 1$

$4x^2 - 8x - 12$

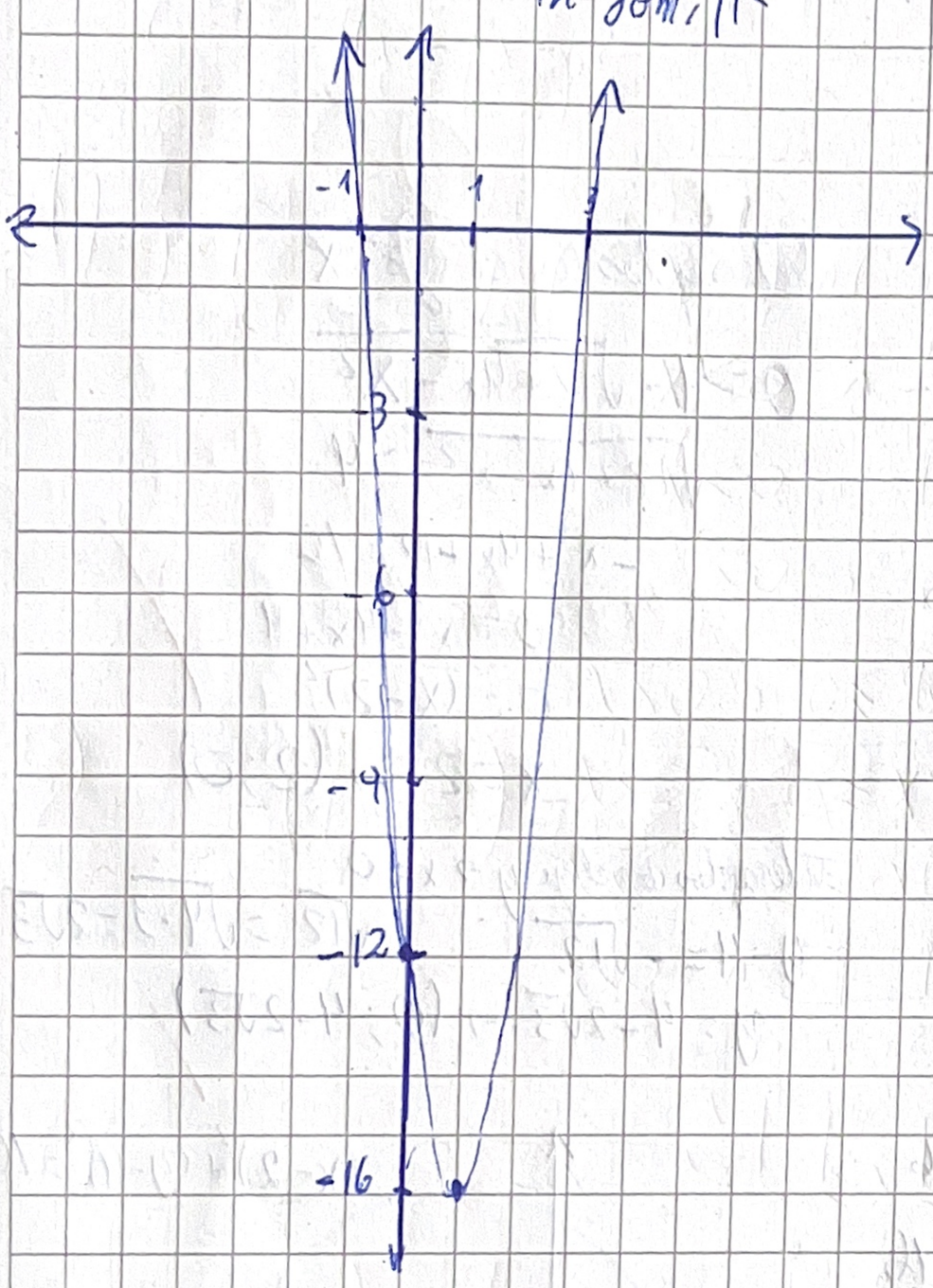
$2x \quad -6 \mid -12x$

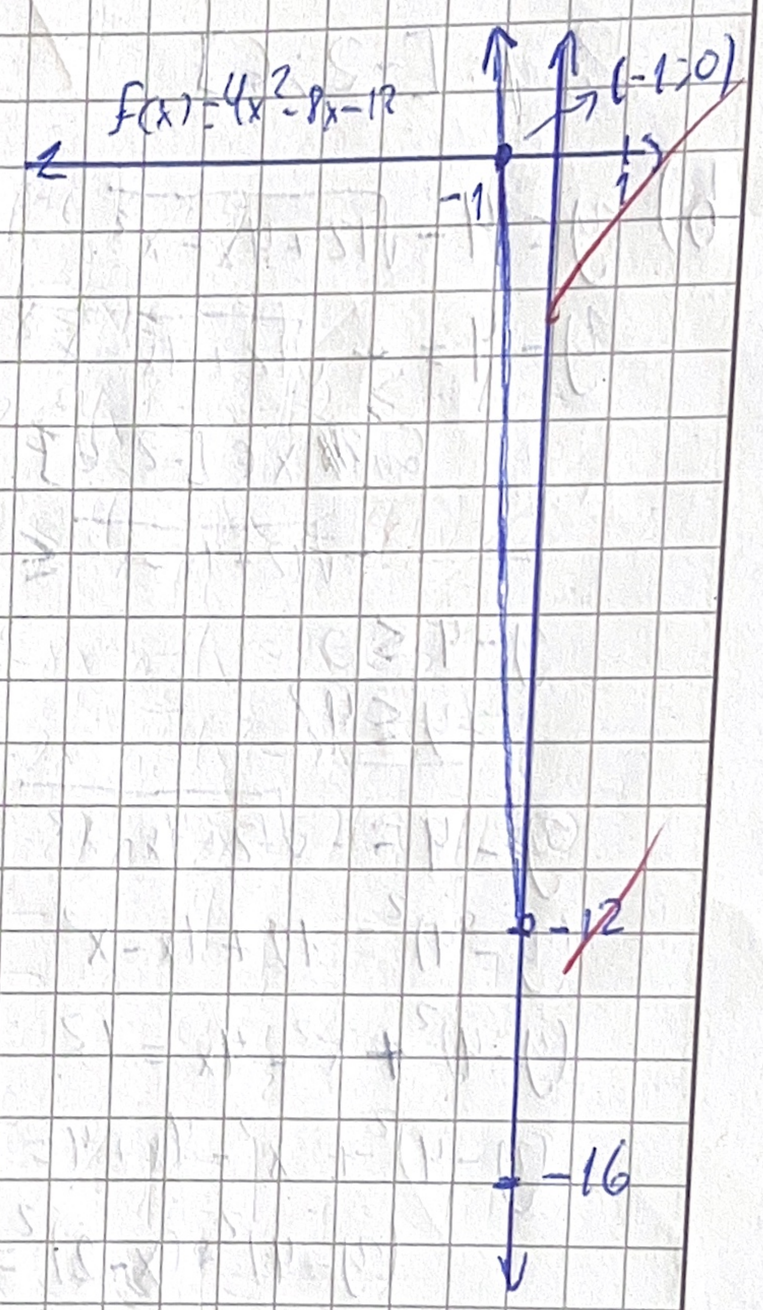
$2x \quad 2 \mid +4x$

$-8x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Como el Dom f: $x < 0$





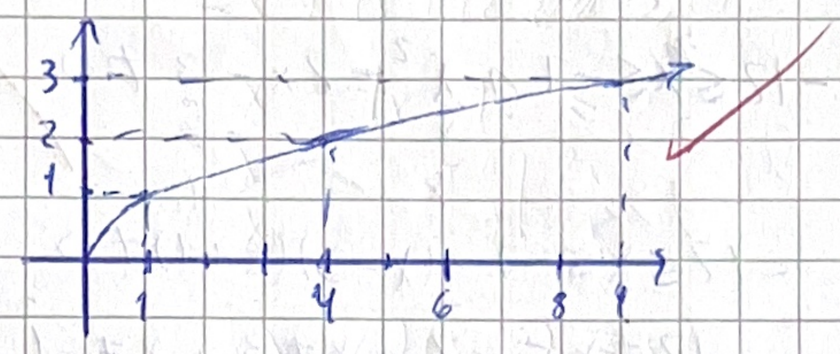
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

b) $g(x)=\sqrt{-3x+21}$; $-12 \leq x \leq -7$

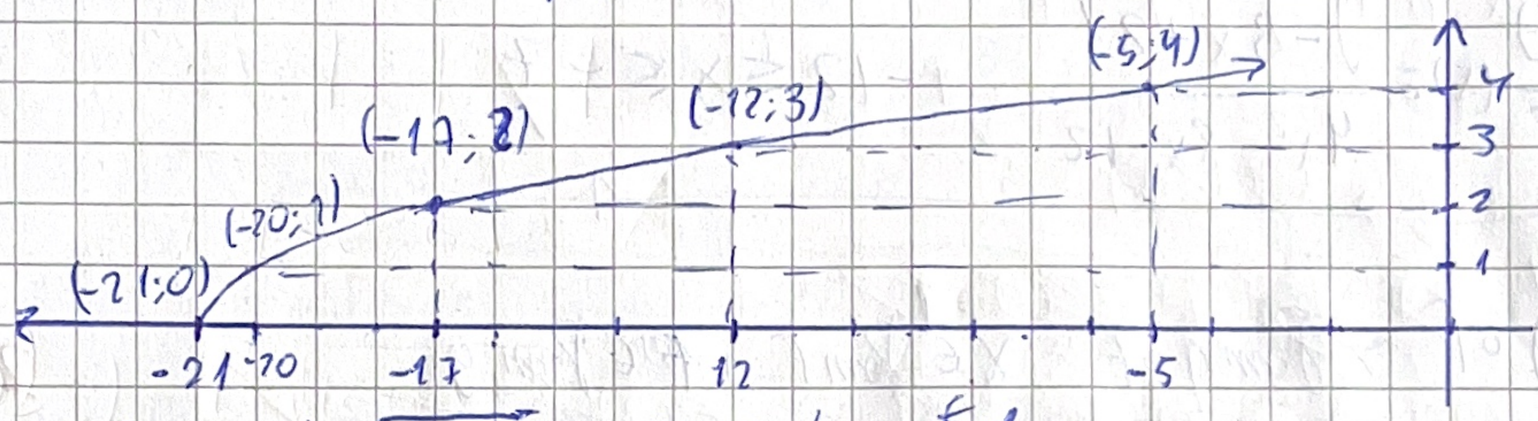
2b) 3,0

$h(x)=\sqrt{x}$



$h(x+21)=\sqrt{x+21}$

Desplazamiento horizontal

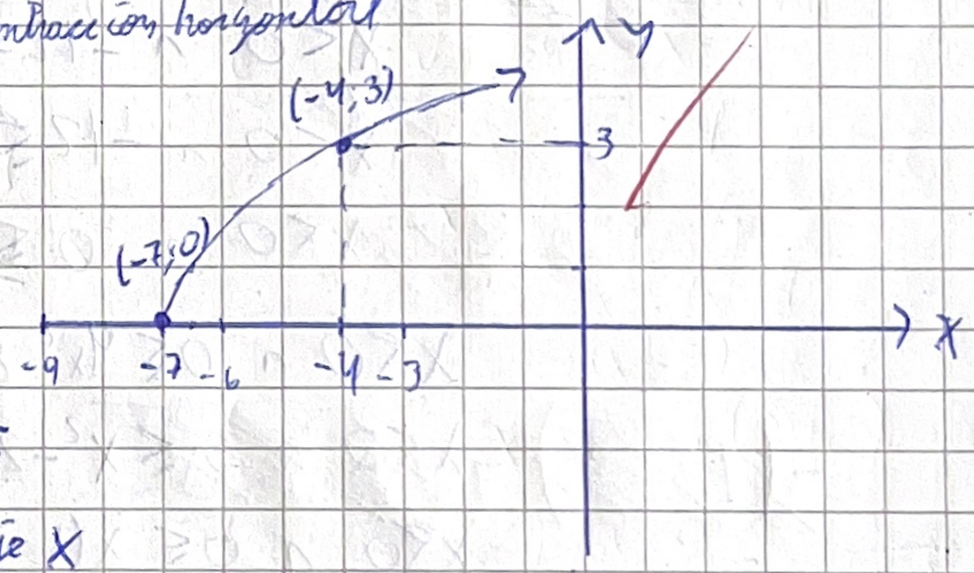


$h(3x+21)=\sqrt{3x+21}$ → contracción horizontal

De multiplican las x por $\frac{1}{3}$

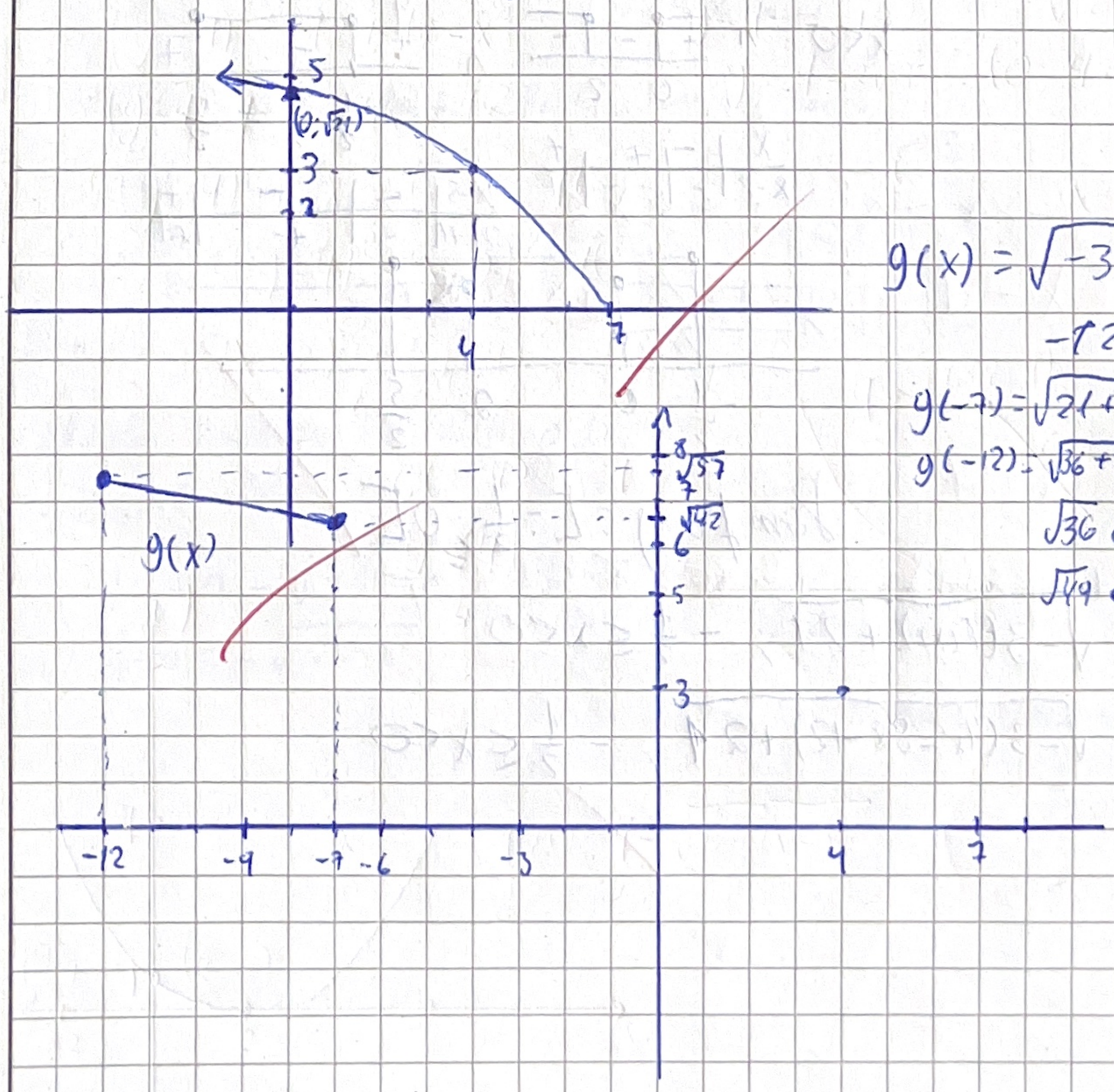
$(-21;0) \to (-7;0)$

$(-12;3) \to (-4;3)$



$h(-3x+21)=\sqrt{-3x+21}$

Reflexión en el eje x



$g(x)=\sqrt{-3x+21}$;

$-12 \leq x \leq -7$

$g(-7)=\sqrt{21+21}=\sqrt{42}$

$g(-12)=\sqrt{36+21}=\sqrt{57}$

$\sqrt{36}<\sqrt{42}<\sqrt{49}$

$\sqrt{49}<\sqrt{57}<\sqrt{64}$

$x+21 \geq 0$

$x \geq -21$

$-3x+21 \geq 0$

$21 \geq 3x$

$7 \geq x$

$x \leq 7$

$20 \overset{3}{\underset{2}{\underset{6,6}{}}}$

$g(0)=\sqrt{-3(0)+21}$

$\sqrt{21}$

$4<\sqrt{21}<5$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) $\frac{g}{f} \to Dom\,\frac{g}{f} = Dom\,g \cap Dom\,f \cap f \neq 0$ 2c) 1.0

$-12 \leq x \leq -7 \cap x < 0 \cap 4x^2 - 8x - 12 \neq 0$

$-12 \leq x \leq -7 \cap x^2 - 2x - 3 \neq 0$

$x \quad -3$

$x \quad 1$

$-12 \leq x \leq -7 \cap (x-3)(x+1) \neq 0$

$-12 \leq x \leq -7 \cap x \neq 3 \cap x \neq -1$

$Dom\,\frac{g}{f} = Dom\,f \cap Dom\,g : [-12; -7]$

$\frac{g}{f}(x) = \frac{\sqrt{-3x+21}}{4x^2-8x-12} ; -12 \leq x \leq -7$

d) $g \circ f \to Dom\,g \circ f : x \in Dom\,f \cap f \in Dom\,g$ 2d) 2.0

$x < 0 \cap -12 \leq f(x) \leq -7$

$x < 0 \cap -12 \leq 4x^2 - 8x - 12 \leq -7$

$x < 0 \cap 0 \leq 4x^2 - 8x \leq 5$

$x < 0 \cap 0 \leq 4x^2 - 8x \cap 4x^2 - 8x \leq 5$

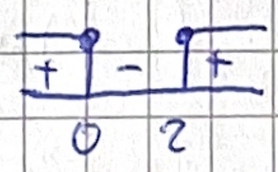
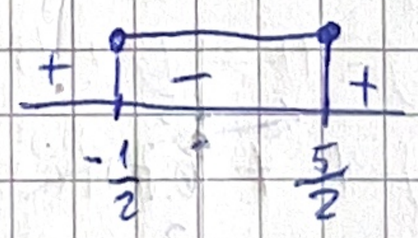
$x < 0 \cap 0 \leq x^2 - 2x \cap 4x^2 - 8x - 5 \leq 0$

$x < 0 \cap 0 \leq x(x-2) \cap (2x-5)(2x+1) \leq 0$

$4x^2 - 8x - 5$

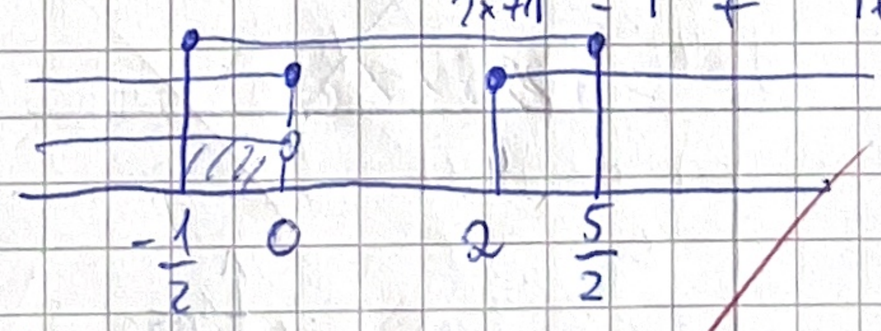
$2x \quad -5 \mid -10x$

$2x \quad 1 \mid +2x$

$x < 0 \cap$  $\cap$ 

x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$

$2x-5$	$-$	$-$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$



$Dom\,f \circ g : [-\frac{1}{2}; 0[$

$g(f(x)) = \sqrt{-3(f(x)) + 21} ; -\frac{1}{2} \leq x < 0$

$g \circ f(x) = \sqrt{-3(4x^2 - 8x - 12) + 21} ; -\frac{1}{2} \leq x < 0$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

3) 5.0

3; $f:[-2;2]\to\mathbb{R}$ → impar → $f(x)=-f(-x)$
→ $f(0)=0$

$x\in\,]0;\frac{3}{2}[\,: f(x)=x+1$

$x\in[\frac{3}{2};2]: f(x)=a+\sqrt{2x-x^2}$, $a>0$

$$f(x)=\begin{cases} x+1; & 0<x<\frac{3}{2} \\ a+\sqrt{2x-x^2}; & 3/2\leq x\leq 2 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$f(x)=x+1$; $0<x<\frac{3}{2}$

$f(x)=-f(-x)=-((-x)+1)$; $0>x>-\frac{3}{2}$

$f(x)=x-1$; $-\frac{3}{2}<x<0$

$f(x)=a+\sqrt{2x-x^2}$; $\frac{3}{2}\leq x\leq 2$

$f(x)=-f(-x)=-(a+\sqrt{2(-x)-(-x)^2}$; $-\frac{3}{2}\geq x\geq -2$

$f(x)=-a-\sqrt{-2x-x^2}$; $-2\leq x\leq -3/2$

$$f(x)=\begin{cases} -a-\sqrt{-2x-x^2}; & -2\leq x\leq -3/2 \\ x-1; & -3/2<x<0 \\ 0; & x=0 \\ x+1; & 0<x<3/2 \\ a+\sqrt{2x-x^2}; & 3/2\leq x\leq 2 \end{cases}$$

Rango de f: Ran f_1 ∪ Ran f_2 ∪ Ran f_3 ∪ Ran f_4 ∪ Ran f_5

en $-3/2<x<0$; $x=0$; $0<x<\frac{3}{2}$

$-\frac{5}{2}<x-1<-1$ | Ran $f_3=\{0\}$; $1<x+1<\frac{5}{2}$

Ran f_2: $]-\frac{5}{2};-1[$; Ran f_4: $]1;\frac{5}{2}[$

El valor máximo está en f_1 o f_5

$-2\leq x\leq -\frac{3}{2}$

$y=-a-\sqrt{-2x-x^2}$ $\quad y+a\leq 0$

$y+a=-\sqrt{-2x-x^2}$ $\quad y\leq -a$

↓

Si $a>0$

$y\leq -a<0$

$y<0$

El valor máximo de $f(x)$ es $\frac{4+\sqrt{3}}{2}>0$

∴ el valor máximo está en $f_5(x)=$

$a+\sqrt{2x-x^2}$

$3<4 \leftrightarrow$

$\sqrt{3}<2 \leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{3}}{2}<1 \leftrightarrow$

$2<2+\frac{\sqrt{3}}{2}<3$

$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{4+\sqrt{3}}{2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

$y = a + \sqrt{2x - x^2}$

$y - a = \sqrt{2x - x^2} \rightarrow \sqrt{2x-x^2} \geq 0$

Con $x \in [3/2; 2]$

$y - a \geq 0$

$y \geq a$

$2 < 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 3$

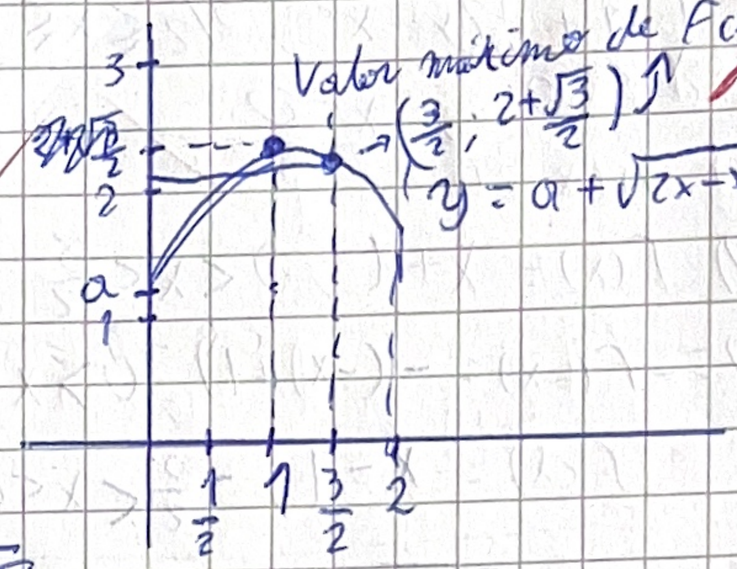
$(y-a)^2 = 2x - x^2$

$(y-a)^2 + x^2 - 2x = 0$

$(y-a)^2 + x^2 - 2x + 1 = 1$

$(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$

Circunferencia de radio 1



$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a + \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a + \sqrt{3 - \frac{9}{4}} = \frac{4+\sqrt{3}}{2}$

$a + \sqrt{\frac{12}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{4+\sqrt{3}}{2}$

$a + \sqrt{\frac{3}{4}} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{a = 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{-2x - x^2} & ; -2 \leq x \leq -3/2 \\ x - 1 & ; -3/2 \leq x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ x + 1 & ; 0 < x < 3/2 \\ 2 + \sqrt{2x - x^2} & ; 3/2 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \square 3$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \square 1$

$\sqrt{3} \quad 2$

$3 < 4$

$\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{4+\sqrt{3}}{4}$

$1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{4+\sqrt{3}}{2} = a + 1$

$\frac{4+\sqrt{3}}{2} - 1 = a$

$\frac{4+\sqrt{3}-2}{2} = a$

$\frac{\sqrt{3}+2}{2} = a$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = a$

$2 + \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$

$2 + \sqrt{3 - \frac{9}{4}}$

$2 + \sqrt{\frac{3}{4}}$

$2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

5) a) $\exists m \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = mx^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}$ es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$

Para que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$m > 0 \rightarrow$ parábola abierta hacia arriba

$\Delta < 0$, no existen soluciones

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \rightarrow b = m+1$

$a = m$

$c = \frac{1}{2}$

$(m+1)^2 - 4(m)(\frac{1}{2}) < 0$

$(m+1)^2 < 2m$

$-2m + m^2 + 2m + 1 < 0$

$m^2 + 1 < 0$

Absurdo

En $\mathbb{R}$ y $m > 0$

$m^2 \geq 0$

$m^2 + 1 \geq 1 > 0$

$m^2 + 1 > 0$ en $\mathbb{R}$

La proposición es falsa

b) Si $f(x) = x^2 + 3x$; $-3 < x \leq 0 \rightarrow$ Valor máximo de f es 0

$f(x) = x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$

$f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$

Dom f: $-3 < x \leq 0$

$-\frac{3}{2} < x + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$

$0 \leq (x + \frac{3}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4} \leq (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} \leq 0$

Ran $f(x)$: $[-\frac{9}{4} ; 0]$

Valor mínimo: $y = -\frac{9}{4}$

Valor máximo: $y = 0$

La proposición es V.

$m > 0$

$\Delta < 0$

$b^2 - 4(a)(c)$

$(m+1)^2 - 4(m)(\frac{1}{2}) < 0$

$m^2 + 2m + 1 - 2m < 0$

$m^2 + 1 < 0$

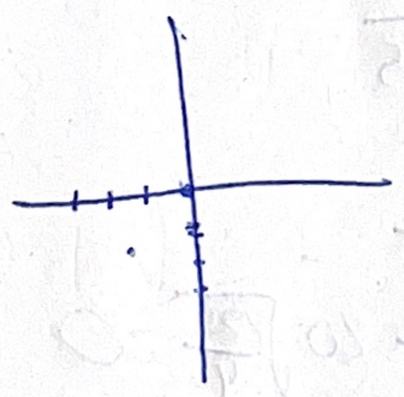
$\frac{-(m+1)}{2m} >$

5) 2.0

$x^2 + 3x$

$x(x+3)$

$0 \quad -3$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$y = P(t)$

4) 3.0

~~cuando~~

en $0 \leq t \leq 25$

$P(t) = at + b$

$P(0) = b \rightarrow P(0) = 100 \rightarrow b = 100$

$P(25) = 25a + 100 = 50$

$25(a+4) = 50$

$a + 4 = 2$

$a = -2$

$P(t) = -2t + 100 \; ; \; 0 \leq t \leq 25$

en $t \geq 25$

$P(t) = c + d\sqrt{t}$

$P(25) = 50 = c + d\sqrt{25}$

$50 = 5d + c \rightarrow c = 50 - 5d$

$P(36) = 30 = c + d\sqrt{36}$

$30 = 6d + c \rightarrow c = 30 - 6d$

$50 - 5d = 30 - 6d$

$d = -20$

$c = 30 - 6(-20)$

$c = 30 + 120$

$c = 150$

$P(t_F) = 0 = 150 - 20\sqrt{t}$

$20\sqrt{t} = 150$

$\sqrt{t} = \frac{150}{20}$

$t = \left(\frac{15}{2}\right)^2$

$t = \frac{225}{4}$

$P(t) = 150 - 20\sqrt{t} \; ; \; 25 \leq t \leq t_F$

$$P(t) = \begin{cases} -2t + 100 \; ; \; 0 \leq t \leq 25 \\ 150 - 20\sqrt{t} \; ; \; 25 < t \leq \frac{225}{4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 15 \cdot 15 \\ \hline 15 \\ \hline 75 \\ \hline 225 \end{array}$$

100-

$150 - 20\sqrt{\frac{225}{4}} = 0$

$150 - 20\left(\frac{15}{2}\right) = 0$

$150 - 150 = 0$