

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA
SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horario: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 122, A123

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

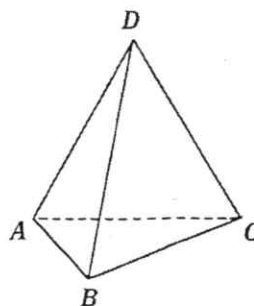
1. Dados los vectores $\vec{a} = (0; -1; 2)$, $\vec{b} = (4; 0; -3)$ y $\vec{c} = (3; 1; 1)$. Si se cumple la siguiente igualdad

$$\frac{1}{5} \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| = \frac{1}{7} \left((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (2\vec{c} - 3\vec{a}) \right) \vec{c} - \frac{1}{8} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{x},$$

halle las componentes del vector \vec{x} .

(3 pt)

2. En el tetraedro $ABCD$, que se muestra en la siguiente figura, se conocen los vértices $A(0; 0; 1)$, $B(1; 3; 1)$ y $C(-3; 1; 1)$.



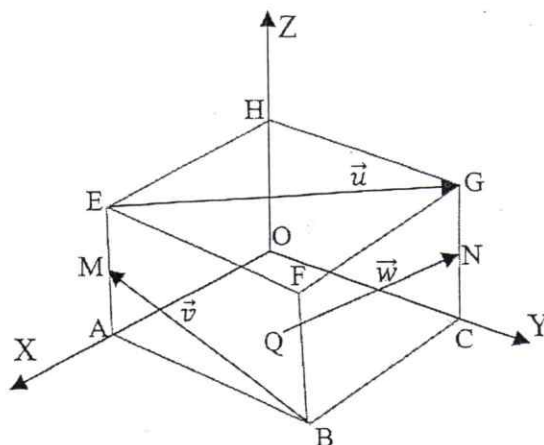
- a) Calcule el área del triángulo ABC .

(2 pt)

- b) Si el vector \vec{AD} es paralelo y tiene el mismo sentido que el vector $\vec{w} = (2; 2; 8)$, y el volumen del tetraedro es $\frac{20}{3} u^3$, determine las coordenadas del vértice D .

(2 pt)

3. En la siguiente figura se muestra un paralelepípedo recto, donde se cumple que $\overrightarrow{CE} = (4; -5; 2)$.



- a) Halle las coordenadas de los vértices C y E. (1.5 pt)
- b) Determine los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , donde Q es centro de la base ABCD, M y N son puntos medios de las aristas \overline{AE} y \overline{CG} , respectivamente. (2.5 pt)
4. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.
- a) Dados los vectores $\vec{a} = (0; -1; 1)$ y $\vec{b} = (1; r; 0)$. Si $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, entonces los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son coplanares para cualquier $r \in \mathbb{R}$. (2 pt)
- b) Si \vec{a} y \vec{b} son vectores de \mathbb{R}^3 , entonces $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))(\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))$. (2 pt)
5. Considere los vectores $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} de \mathbb{R}^3 . Se tiene la siguiente información:
- El vector \vec{b} es paralelo y tiene el mismo sentido que el vector $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$.
 - $\|\vec{b}\| = 25\sqrt{3}$.
 - $\vec{a} = -5\vec{i} + (t-1)\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$.
 - El ángulo que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} mide $\frac{\pi}{2}$.

Se pide lo siguiente:

- a) Halle los vectores \vec{a} y \vec{b} . (2 pt)
- b) Si además, se sabe que $\vec{a} \cdot \vec{c} = 52$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 375$ y $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$, $s, r \in \mathbb{R}$, halle el ángulo formado por los vectores \vec{a} y \vec{c} . (3 pt)

Coordinador de prácticas: Elton Barrantes
San Miguel, 6 de junio de 2022.

Año	Número
2022	0436

Código de alumno

Práctica

CUEVA CASAS MARYCARMEN

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)



Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica N°: 3

Horario de práctica: H-103-1

Fecha: 06 / 06 / 22

Nombre del profesor: J. YUCRA

Nota

20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido:
(iniciales)

E.A

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$\frac{1}{5}$

$$\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}$$

$$2(3, 1, 2) = 2\vec{c}$$

$$(6, 2, 2)$$

$$3(0, -1, 2)$$

$$(0, -3, 6) \quad 3\vec{a}$$

$$2\vec{c} - 3\vec{a}$$

$$(6, 2, 2) - (0, -3, 6)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$(0, -1, 2) \cdot (4, 0, -3)$$

$$0 + 0 + -6$$

$$(-6)$$

①

$$\vec{a} = (0, -1, 2)$$

$$\star \|\vec{b}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\vec{b} = (4, 0, -3)$$

$$\star \vec{a} \times \vec{b} =$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\bullet -1(-3) - 0 = 3$$

$$\bullet -(0 - 4(2))$$

$$-(-8) = 8$$

$$\bullet 0 - (-1)(4) = 4$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, 8, 4)$$

$$\frac{1}{5} \|\vec{b}\| \vec{a} = \frac{1}{5} ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (2\vec{c} - 3\vec{a})) \vec{c} - \frac{1}{8} (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{x}$$

$$\frac{1}{5} \vec{a} = \frac{1}{5} ((3, 8, 4) \cdot (6, 5, 4)) \vec{c} - \frac{1}{8} (-6) \vec{x}$$

$$(0, -1, 2) = \frac{1}{5} (18 + 40 - 16) \vec{c} + \frac{3}{4} \vec{x}$$

$$(0, -1, 2) = 6 \vec{c} + \frac{3}{4} \vec{x}$$

$$(0, -1, 2) = 6(3, 1, 2) + \frac{3}{4} \vec{x}$$

$$(0, -1, 2) = (18, 6, 6) + \frac{3}{4} \vec{x}$$

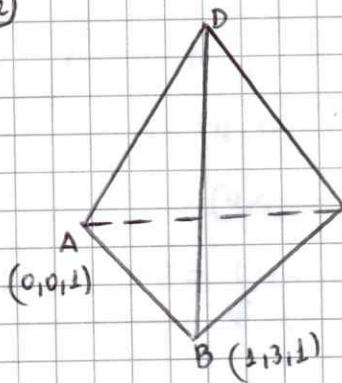
$$(0, -1, 2) - (18, 6, 6) = \frac{3}{4} \vec{x}$$

$$(-18, -7, -4) = \frac{3}{4} \vec{x}$$

$$\vec{x} = \frac{4}{3} (-18, -7, -4)$$

$$\vec{x} = (-24, -\frac{28}{3}, -\frac{16}{3})$$

②



$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (-3, 1, 1) - (0, 0, 1)$$

$$\vec{AC} = (-3, 1, 0)$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, 3, 1) - (0, 0, 1)$$

$$\vec{AB} = (1, 3, 0)$$

a) área $\triangle ABC$

$$\frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AB}\|$$

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = (0, 0, -10)$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bullet 0 - 0 = 0$$

$$\bullet -(0 - 0) = 0$$

$$\bullet -3(3) - 1(1) =$$

$$-9 - 1 = -10$$

$$\frac{1}{2} \|0, 0, -10\|$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \| (0, 0, -10) \|$$

$$\sqrt{0^2 + 0^2 + (-10)^2} = 10$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} (10) = 5 \text{ u}^2$$

b) $\vec{AD} \parallel (2, 2, 8)$

weir

$$\vec{AD} = (2w, 2w, 8w)$$

$$\frac{1}{6} | \vec{AD} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AB}) | = \frac{20}{3}$$

$$\frac{1}{6} | \vec{AD} \cdot (0, 0, -10) |$$

$$\frac{1}{6} | (2w, 2w, 8w) \cdot (0, 0, -10) | = \frac{20}{3}$$

$$| 0 + 0 - 80w | = 40$$

$$| -80w | = 40$$

$$-80w = 40$$

$$w = -\frac{1}{2} \times$$

$$-80w = -40$$

$$w = \frac{1}{2} \checkmark$$

mismo
sentido

$$\vec{AD} = 2\left(\frac{1}{2}\right); 2\left(\frac{1}{2}\right); 8\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{AD} = (1; 1, 4)$$

$$D - A = (1, 1, 4)$$

$$D = (1, 1, 4) + (0, 0, 1)$$

$$D = (1, 1, 5)$$

$$\frac{1}{6} [a, b, c]$$

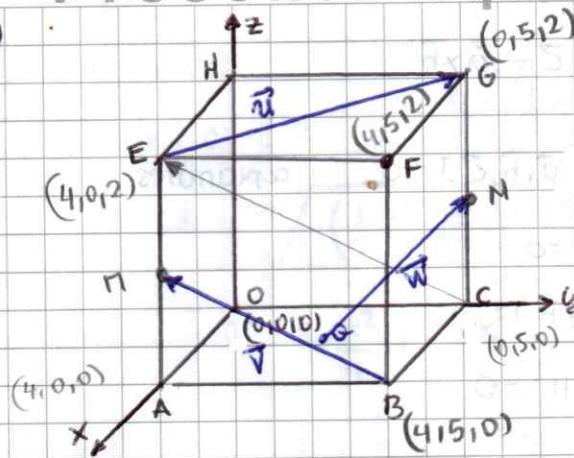
$$a \cdot (b \times c)$$

$$\frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})|$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

③



$$\vec{CE} = (4, 5, 2)$$

$$\vec{CE} = (a, b, c)$$

$$\vec{OF} = (a, -b, c) = (4, 5, 2)$$

$$\vec{OF} = F - (0, 0, 0) = (4, 5, 2)$$

$$F = (4, 5, 2)$$

a) considerando $F(4, 5, 2)$

$$C(0, 5, 0)$$

$$E(4, 0, 2)$$

b) $\vec{u} = G - E$

$$G = (0, 5, 2)$$

$$E = (4, 0, 2)$$

$$\vec{u} = (0, 5, 2) - (4, 0, 2)$$

$$\vec{u} = (-4, 5, 0)$$

$$\vec{w} = N - Q$$

$$N = \frac{G+C}{2} = (0, 5, 1)$$

$$N - Q$$

$$(0, 5, 1) - (2, \frac{5}{2}, 0)$$

$$Q = \frac{A+C}{2} = (2, \frac{5}{2}, 0)$$

$$\vec{w} = (-2, \frac{5}{2}, 1)$$

$$\vec{v} = H - B$$

$$H = \frac{A+E}{2}$$

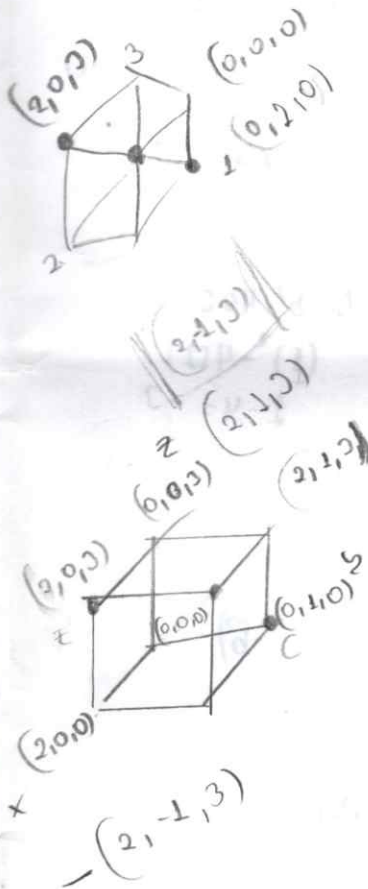
$$H = (4, 0, 1)$$

$$B = (4, 5, 0)$$

$$\vec{v} = (4, 0, 1) - (4, 5, 0)$$

$$\vec{v} = (0, -5, 1)$$

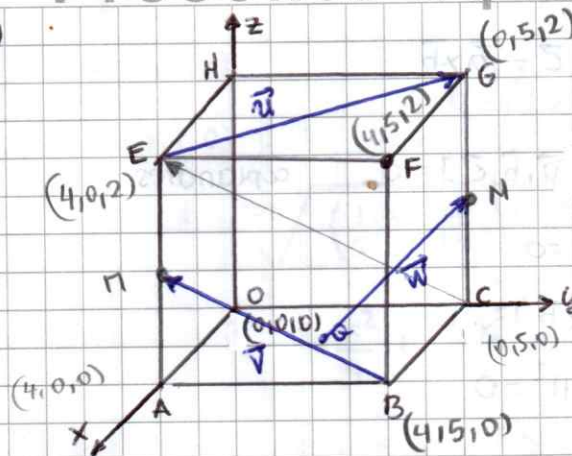
4,0



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

③



$$\vec{CE} = (4, 5, 2)$$

$$\vec{CE} = (a, b, c)$$

$$\vec{OF} = (a, b, c) = (4, 5, 2)$$

$$\vec{OF} = F - (0, 0, 0) = (4, 5, 2)$$

$$F = (4, 5, 2)$$

a) considerando $F(4, 5, 2)$

$$C(0, 5, 0)$$

$$E(4, 0, 2)$$

b) $\vec{u} = G - E$

$$G = (0, 5, 2)$$

$$E = (4, 0, 2)$$

$$\vec{u} = (0, 5, 2) - (4, 0, 2)$$

$$\vec{u} = (-4, 5, 0)$$

$$\vec{w} = N - Q$$

$$N = \frac{G+C}{2} = (0, 5, 1)$$

$$N - Q$$

$$(0, 5, 1) - (2, \frac{5}{2}, 0)$$

$$Q = \frac{A+C}{2} = (2, \frac{5}{2}, 0)$$

$$\vec{w} = (-2, \frac{5}{2}, 1)$$

$$\vec{v} = H - B$$

$$H = \frac{A+E}{2}$$

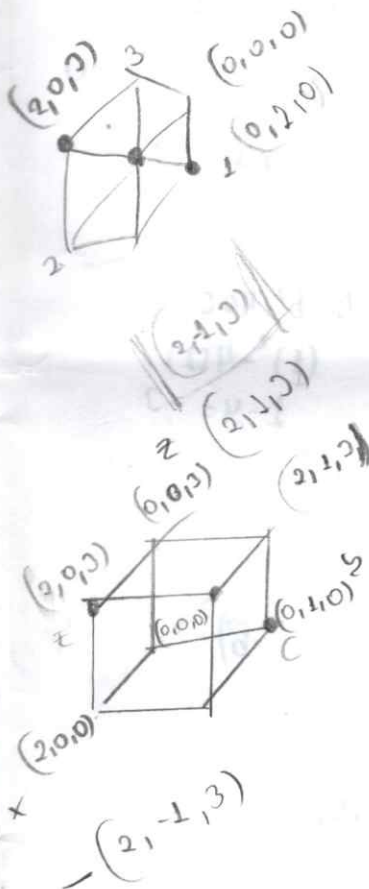
$$H = (4, 0, 1)$$

$$B = (4, 5, 0)$$

$$\vec{v} = (4, 0, 1) - (4, 5, 0)$$

$$\vec{v} = (0, -5, 1)$$

4,0



Presente aquí su trabajo

4) a) $\vec{a} = (0, -1, 1)$

$\vec{b} = (1, r, 0)$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ coplanares

$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = 0$

$\vec{a} \times \vec{b}$

+	-	+	• -r
0	-1	1	• -(0-1) = 1
1	r	0	• 0-(-1) = 1

$\vec{a} \times \vec{b} = (-r, 1, 1)$

$(\sqrt{(-r)^2 + (1)^2 + (1)^2})^2 = 0$

$r^2 + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$0^2 - 4(1)(2)$

$\Delta = -8$

(F)

b) \vec{a} y \vec{b} no pueden ser vectores nulos.

$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))(\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))$

$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = (\underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{número}})(\underbrace{\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{número}})$

$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ porque $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ porque $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
número vector número

no tiene sentido

ya que debemos obtener un vector y 0 no es un vector.

(F)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

a) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = 0$

+	-	+	• r(1) = -r
0	-1	1	• -(-1) = 1
1	r	0	• r-(-1)
			r+1

$\vec{a} \times \vec{b} = (-r, 1, r+1)$

$r^2 + 1 + (r+1)^2 = 0$

$r^2 + 1 + r^2 + 2r + 1 = 0$

$2r^2 + 2r + 2 = 0$

$r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$(1)^2 - 4(1)(1)$

$1 - 4 = -3$

(F)

b) $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2, 2, 0$

$(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$2+2=4$

$\vec{a} \times \vec{b}$

+	-	+
1	1	1
1	1	0

• $0 - 2 = -2$

• $-(0 - 2) = 2$

• $2 - 2 = 0$

$(-2, 2, 0)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$a \cdot c = 52$$

$$-5(5s+5r) + r + 25s$$

$$-25s - 25r + r + 25s$$

$$-24r = 52$$

$$r = -\frac{13}{6}$$

⑤

$$i = (1, 0, 0)$$

$$j = (0, 1, 0)$$

$$b = \left(\frac{1}{3}k, \frac{5}{3}k, \frac{7}{3}k\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}k\right)^2 + \left(\frac{5}{3}k\right)^2 + \left(\frac{7}{3}k\right)^2} = 25\sqrt{3}$$

$$\frac{k^2}{9} + \frac{25k^2}{9} + \frac{49k^2}{9} = 1875$$

$$75k^2 = 1875 (a)$$

$$k^2 = 25$$

$$k = +15 \text{ mismo sentido}$$

$$-15 \times$$

a) halle los vectores \vec{a} y \vec{b}

$$\vec{b} = (5; 25; 35)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} = -5(1, 0, 0) + (t-1)(0, 1, 0)$$

$$\vec{a} = (-5, 0, 0) + (0, t-1, 0)$$

$$\vec{a} = (-5; t-1; 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(-5; t-1; 0) \cdot (5; 25; 35) = 0$$

$$-25 + 25t - 25 + 0 = 0$$

$$25t - 50 = 0$$

$$t = 2$$

$$\vec{a} = (-5, 1, 0)$$

b) $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$

$$\vec{c} = r(-5, 1, 0) + s(5, 25, 35)$$

$$\vec{c} = (-5r; r; 0) + (5s; 25s; 35s)$$

$$\vec{c} = (-5r+5s; r+25s; 35s)$$

$$o \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 52$$

$$(-5, 1, 0) \cdot (-5r+5s; r+25s; 35s) = 52$$

$$-5(-5r+5s) + r + 25s = 52$$

$$+25r - 25s + r + 25s = 52$$

$$26r = 52$$

$$r = 2$$

$$(1, 1, 1) \cdot (2, 2, 0) = 2 + 2 + 0 = 4$$

$$\vec{a} (0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollo
(borrador)

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 375$$

$$r=2$$

$$(5, 25, 35) \cdot (-5r+5s; r+25s; 35s) = 375$$

$$5(-5r+5s) + 25(r+25s) + 35(35s) = 375$$

$$-25r + 25s + 25r + 625s + 1225s = 375$$

$$1875s = 375$$

$$s = \frac{1}{5}$$

$$\vec{c} = (-5r+5s; r+25s; 35s)$$

$$\vec{c} = \left((-5(2) + 5(\frac{1}{5}); 2 + \frac{1}{5}(25); \frac{35}{5} \right)$$

$$\vec{c} = (-9; 7; 7)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\| \|\vec{c}\|} = \frac{(-5, 1, 0) \cdot (-9, 7, 7)}{(\sqrt{26})(\sqrt{179})}$$

$$\frac{45 + 7 + 0}{\sqrt{4654}} = \frac{52}{\sqrt{4654}} \cdot \frac{\sqrt{4654}}{\sqrt{4654}} = \frac{52\sqrt{4654}}{4654}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{52\sqrt{4654}}{4654} \right)$$