ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

Solucionario - Tercera Práctica Calificada
Semestre Académico 2023 -1

Horario: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115.

(Turno 1)
Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

---

1. Considere la función polinómica $f(x) = -\frac{1}{6}(x+1)^2(x-1)^3(x+2)$.

   a) Halle las raíces de f e indique sus respectivas multiplicidades. (1 punto)

   b) Determine las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados. (1 punto)

   c) Esboce la gráfica de f. (2 puntos)

   d) Halle los valores de x para los cuales se cumple $f(x) > 0$. (1 punto)

   Solución:

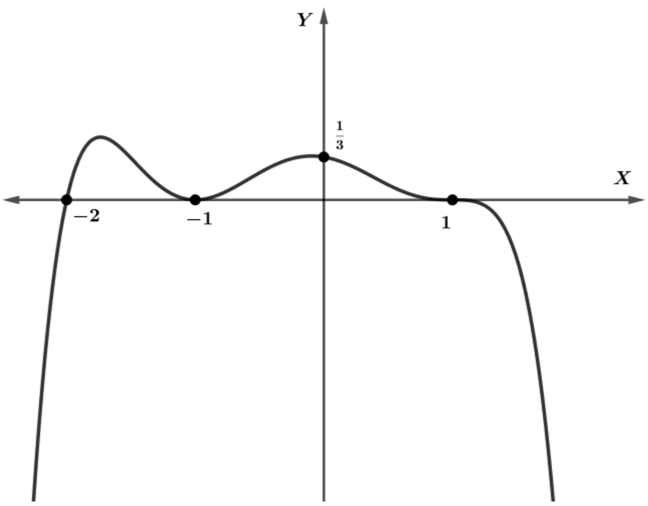
   a) Las raíces de f y sus respectivas multiplicidades

   $$\begin{array}{rcc} x=-2 & \text{de multiplicidad} & 1 \\ x=-1 & \text{de multiplicidad} & 2 \\ x=1 & \text{de multiplicidad} & 3 \end{array}$$

   b) Los puntos de intersección con los ejes son los siguientes

   $$(-2;0), \quad (-1;0), \quad (1;0) \quad \text{y} \quad \left(0;\frac{1}{3}\right)$$

   c) La gráfica de f es la siguiente



   d) El conjunto de valores de x que cumplen $f(x) > 0$ es $]-2;1[-\{-1\}$.

2. Considere la función racional $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

   a) Halle las ecuaciones de las asíntotas de la función f. (1 punto)

   b) Determine las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados. (1 punto)

   c) Grafique la función f. (2 puntos)

   Solución:

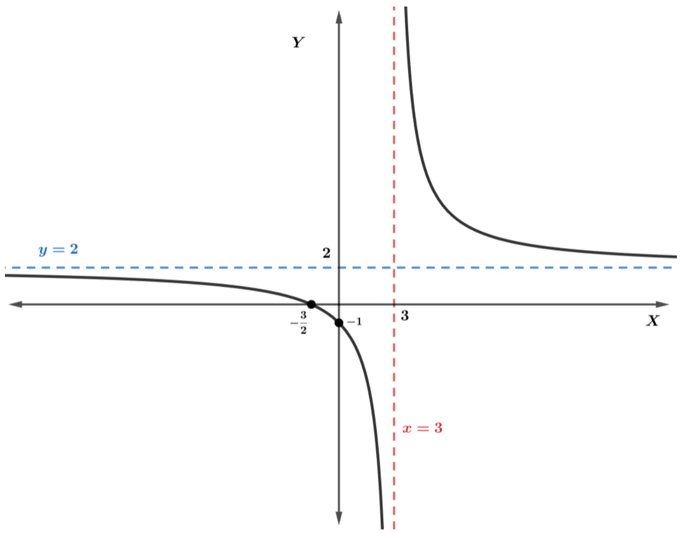
   a) Las ecuaciónes de las asíntotas son

$$\mathscr{L}_1 : x = 3 \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2 : y = 2$$

   b) Las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes son los siguientes

$$\left(-\frac{3}{2}; 0\right) \quad \text{y} \quad (0; -1)$$

   c) La gráfica de f es la siguiente



3. Sea a una constante real, considere la función

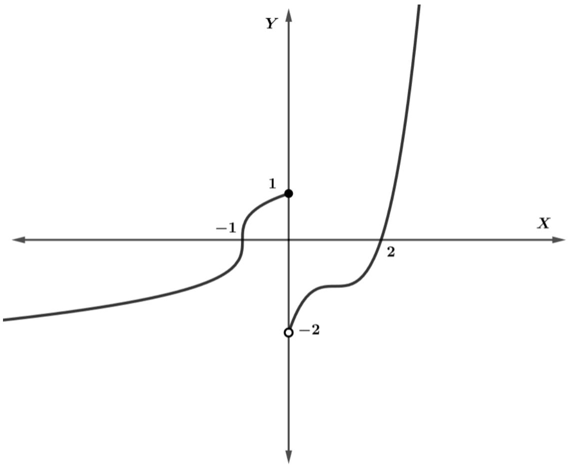
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{1/3}, & x \leqslant 0 \\ (x-1)^3 + a, & x > 0 \end{cases}$$

   a) Si $a = -1$, grafique la función f e indique las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados. (3 puntos)

   b) Halle los valores de a para los cuales la función f es creciente. (1 punto)

   Solución:

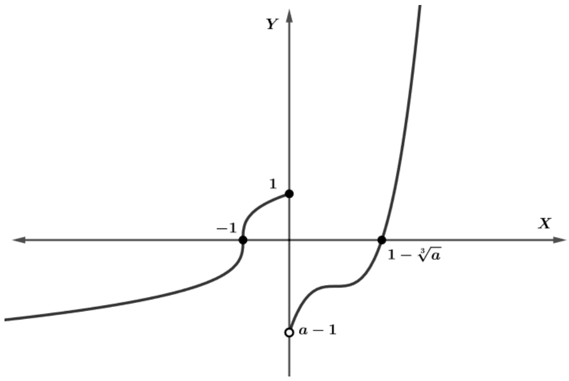
   a) La gráfica de f es la siguiente



Las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes son los siguientes

$$(-1;0), \quad (2;0) \quad \text{y} \quad (0;1)$$

b) Como podemos observar en la gráfica



f es creciente en el intervalo $]-\infty;0]$ y en el intervalo $]0;+\infty[$.
Entonces, f es creciente si $a-1 \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad a \geqslant 2$.

4. Considere la función $f(x) = x^3 + x^{1/3} + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

   a) Demuestre que f es una función creciente. (2 puntos)

   b) ¿ Es cierto que $f(-1) > -1$? Justifique su respuesta. (1 punto)

   c) Halle el conjunto de valores de x que satisfacen $f(x) < -1$. (2 puntos)

Solución:

a) **Forma 1:** La función f es creciente pues es suma de funciones crecientes, $f(x) = g(x) + h(x)$. Por ejemplo, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x^{1/3} + 1$ son funciones crecientes.
Forma 2 Podemos demostrar que f es creciente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad a < b \quad &\Longrightarrow \quad a^3 < b^3 \quad \wedge \quad a^{1/3} < b^{1/3} \\ &\Longrightarrow \quad a^3 + a^{1/3} < b^3 + b^{1/3} \\ &\Longrightarrow \quad a^3 + a^{1/3} + 1 < b^3 + b^{1/3} + 1 \\ &\Longrightarrow \quad f(a) < f(b) \end{aligned}$$

b) $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^{1/3} + 1 = -1$. Por lo tanto, $f(-1) > -1$ es Falso.

c) Para hallar los valores de x que satisfacen $f(x) < -1$ debemos saber que sucede en los siguientes casos:

- Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = -1$, entonces $x = -1$ no satisface la condición.
- Si $x > -1$, como f es creciente, entonces $f(x) > f(-1) = -1$.
- Si $x < -1$, como f es creciente, entonces $f(x) < f(-1) = -1$.

Por lo tanto, el conjunto de valores de x que satisface $f(x) < -1$ es $]-\infty; -1[$

5. Demuestre la veracidad de la siguiente proposición:

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función polinómica de grado 3 cuyas únicas raíces reales son 0 y 3, entonces $f(4)f(-1) < 0$. (2 puntos)

Solución:

Si f es una función polinómica con las caracteristicas mencionadas se tiene las siguientes posibilidades

$$f(x) = ax^2(x-3) \quad \text{ó} \quad f(x) = ax(x-3)^2, \quad \text{con } a \neq 0$$

Entonces,

$$f(-1) = -4a \quad \text{y} \quad f(4) = 16a \quad \Longrightarrow \quad f(4)f(-1) = -64a^2.$$

o

$$f(-1) = -16a \quad \text{y} \quad f(4) = 4a \quad \Longrightarrow \quad f(4)f(-1) = -64a^2.$$

En cualquiera de los dos casos, se tiene $f(4)f(-1) < 0$. Por lo tanto, es verdadero.

San Miguel, 1 de junio de 2023.