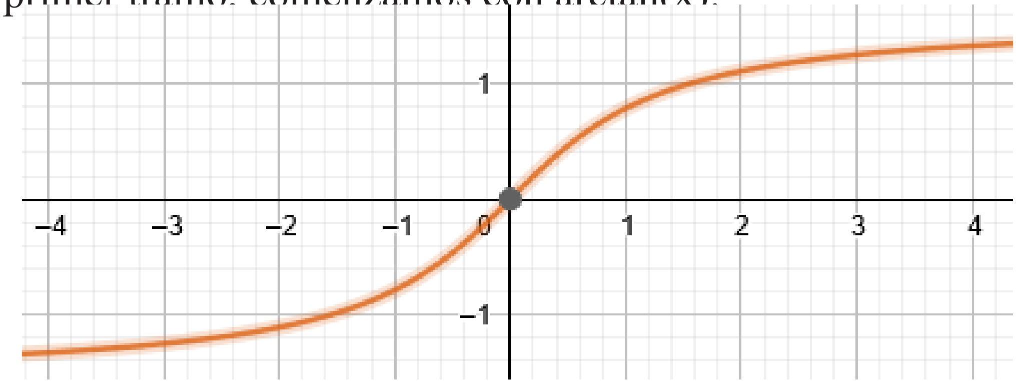
1)

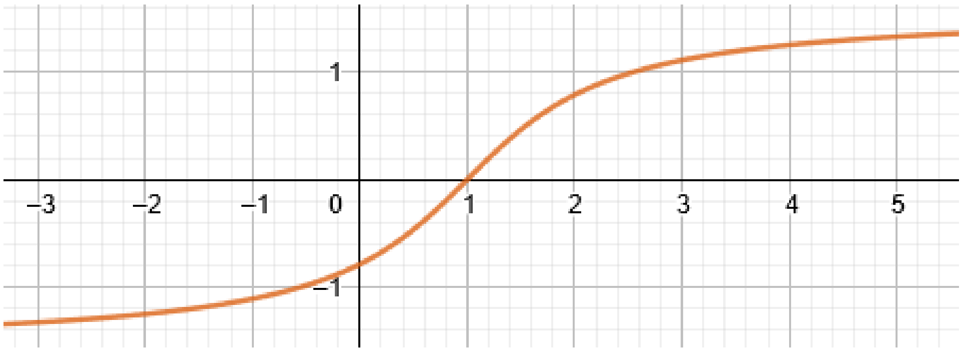
a)

Para el primer tramo, comenzamos con arctan(x):



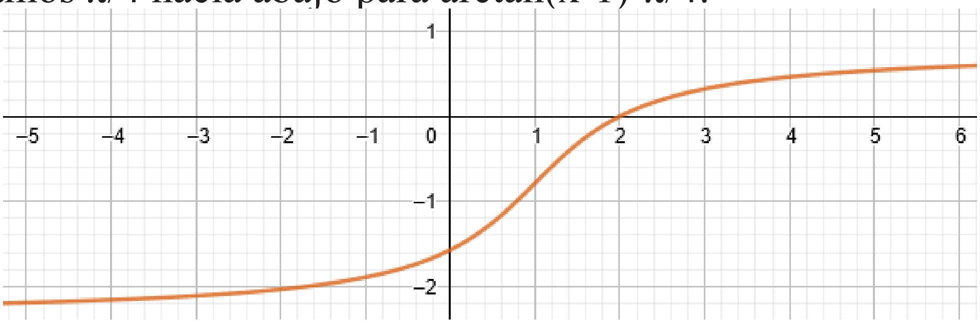
Asíntotas:
$y=\pi/2$
$y=-\pi/2$

Desplazamos 1 unidad a la derecha para arctan(x-1):



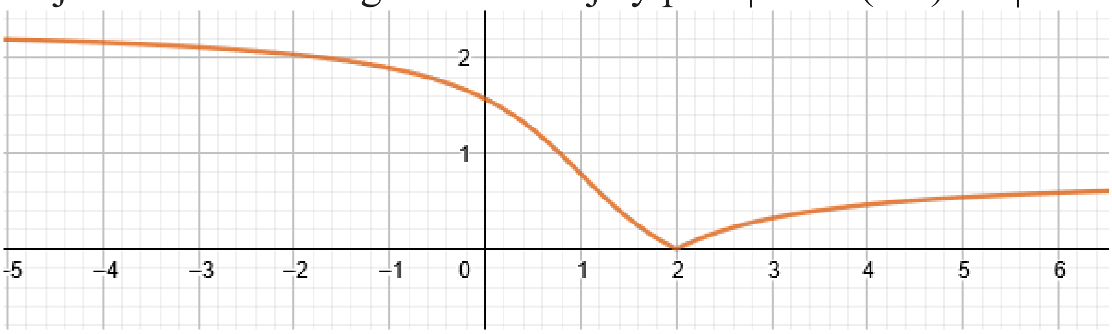
Asíntotas:
$y=\pi/2$
$y=-\pi/2$

Desplazamos π/4 hacia abajo para arctan(x-1)-π/4:



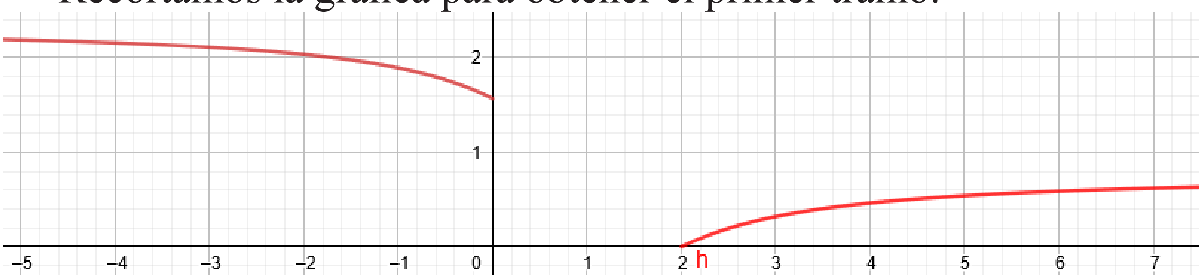
Asíntotas:
$y=\pi/4$
$y=-3\pi/4$

Reflejamos el tramo negativo en el eje y para |arctan(x-1)-π/4|:



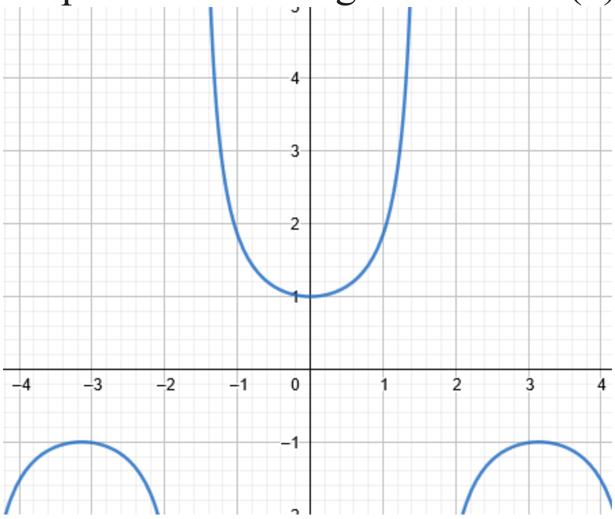
Asíntotas:
$y=\pi/4$
$y=3\pi/4$

Recortamos la gráfica para obtener el primer tramo:



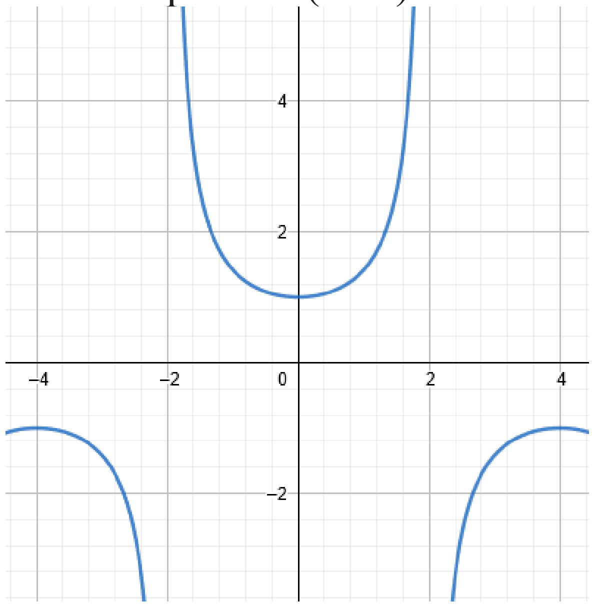
Asíntotas:
$y=\pi/4$
$y=3\pi/4$

Empezamos con la gráfica de sec(x):



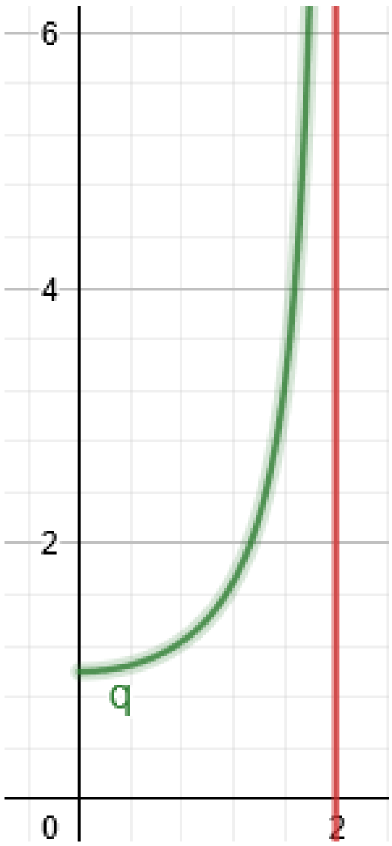
Asíntotas:
x=π(2k+1)/2

Estiramos horizontalmente por un factor π/4 para sec(πx/4):



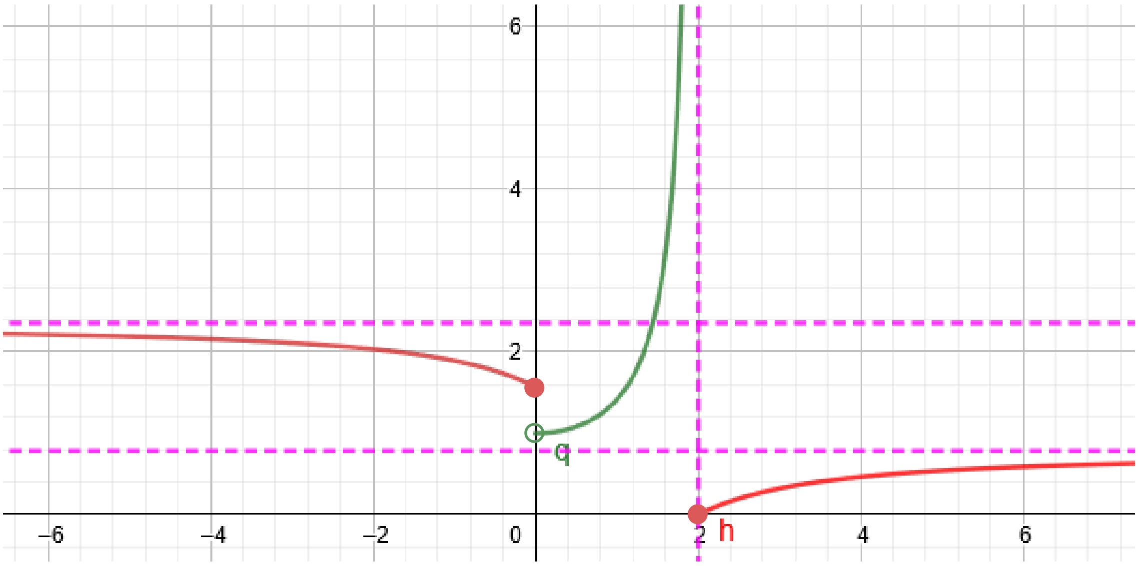
Asíntotas:
x=(2k+1)*2

Recortamos en el dominio dado para obtener el segundo tramo:



Asíntotas:
x=2

Juntamos los gráficos para f(x) e indicamos sus asíntotas:



Asíntotas:
y=π/4
y=3π/4
x=2

Además, vemos que se cruza con los ejes coordenados solo en dos ocasiones:

f(0)=|arctan(-1)-π/4|
f(0)=|-π/2|
f(0)=π/2

(0;π/2)

f(2)=0
|arctan(1)-π/4|=0
|π/4 -π/4|=0
0=0
(2;0)

6) Con ayuda de la gráfica, podemos determinar algunos de los límites:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3\pi/4$ (asíntota)
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \pi/2$ (de los intersectos hallados)
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sec(\frac{\pi}{4}x) = \sec(\pi/2^-) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi/4$ (asíntota)

Pregunta 2:

a) Sea $f(x) = \dfrac{\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)}{1+\log_2(x^2+2x)}$

→ Hallamos su Dominio:

Sabemos, $\arccos(h(x))$ estará bien definida si $|h(x)| \leq 1$

Entonces, $\left|\frac{x+1}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$

$\Rightarrow -2 \leq x+1 \leq 2$

$\Rightarrow -3 \leq x \leq 1 \quad \ldots (\alpha)$

Además, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ estará bien definida si $Q(x) \neq 0$

Entonces, $1 + \log_2(x^2+2x) \neq 0$

$\log_2(x^2+2x) \neq -1 \Rightarrow x^2+2x \neq 2^{-1}$

$\Rightarrow x^2+2x-1/2 \neq 0$

$\Rightarrow (x+1)^2 - 3/2 \neq 0$

$\Rightarrow \left(x+1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(x+1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \; x \neq -1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Teniendo en cuenta la restricción α:

$\therefore x \in [-3, 1] - \{-1+\sqrt{3}/\sqrt{2}, -1-\sqrt{3}/\sqrt{2}\} = \mathrm{Dom} f$

b) Sea $f(x) = \dfrac{1}{2\sin^2(\pi x) - 2\sin(\pi x) + 1}$, $x \in]5/6, 11/6[$

* Primero, $2\sin^2(\pi x) - 2\sin(\pi x) + 1 \neq 0$

$\sin^2(\pi x) + (\sin(\pi x) - 1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

* Segundo, recordemos $a \leq m(x) \leq b \Rightarrow \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{m(x)} \leq \dfrac{1}{a}$

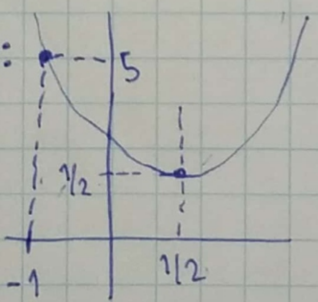
Ahora, hallemos el Rango de $f(x) = \dfrac{1}{2\sin^2(\pi x) - 2\sin(\pi x) + 1}$

Sea $g(x) = 2\sin^2(\pi x) - 2\sin(\pi x) + 1$, $x \in]5/6, 11/6[$

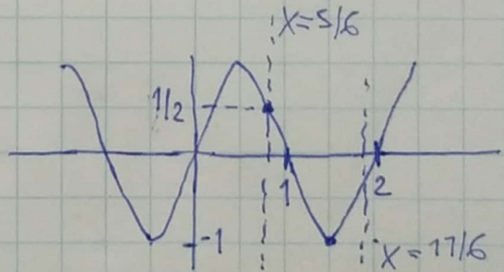
y tengamos $p(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $q(x) = \sin(\pi x)$

Por lo tanto, $g(x) = p(q(x))$

p(x):



q(x):



* si $x \in]5/6, 11/6[\Rightarrow q(x) \in [-1, 1/2[$

Ahora, si $q(x) \in]\frac{1}{2}, -1] \Rightarrow p(q(x)) \in]1/2; 5]$

Entonces, $g(x) \in]1/2, 5] \Rightarrow$

$1/2 < g(x) \leq 5$

$\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{g(x)} < 2$

$1/5 \leq f(x) < 2$

$\text{Ran} f = [1/5, 2[$

CAAS

3)

a) $\lim_{x\to+\infty} (\ln(ax+1) - \ln(x+a))$ $\quad a>0$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{ax+1}{x+a}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{ax}{x+a} + \frac{1}{x+a}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{a}{1+\frac{a}{x}} + \frac{1}{x+a}\right) = \ln\left(\frac{a}{1+\frac{a}{+\infty}} + \frac{1}{\infty+a}\right) = \ln\left(\frac{a}{1}+0\right)$

$= \ln(a)$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{3/x^2} + \ln\left(\frac{9}{x^5-9x^4}\right)\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{3/x^2} + \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{9}{x^4(x-9)}\right)$

$= e^{3/+\infty} + \ln\left(\frac{9}{+\infty(+\infty)}\right)$

$= e^{0} + \ln\left(\frac{9}{+\infty}\right)$

$= 1 + \ln(0^+)$

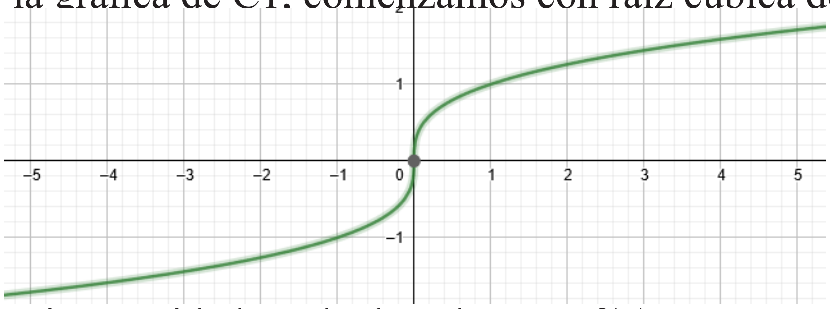
$= 1 + (-\infty) = -\infty$

c) $\lim_{x\to0^+} \frac{\arctan(\ln(x-x^6))}{\operatorname{Sen}(x^4)}$

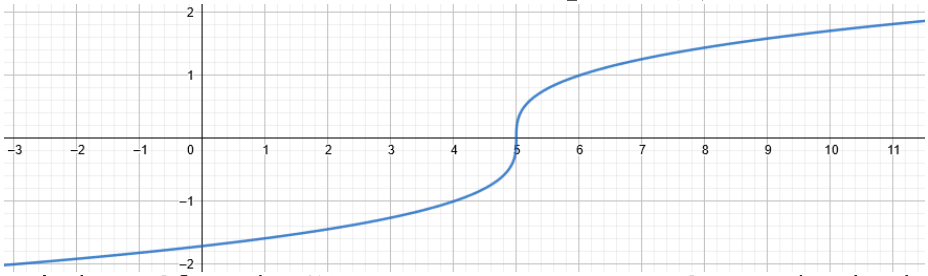
$= \lim_{x\to0^+} \frac{\arctan(\ln(x(1-x^5)))}{\operatorname{Sen}(x^4)} = \lim_{x\to0^+} \arctan(\ln x + \ln(1-x^5)) \cdot \frac{1}{\operatorname{Sen}(x^4)}$

$= \frac{\arctan(-\infty + \ln(1))}{\operatorname{Sen}(0)} = \frac{\arctan(-\infty)}{0^+} = \frac{-\pi/2}{0^+} = -\infty$

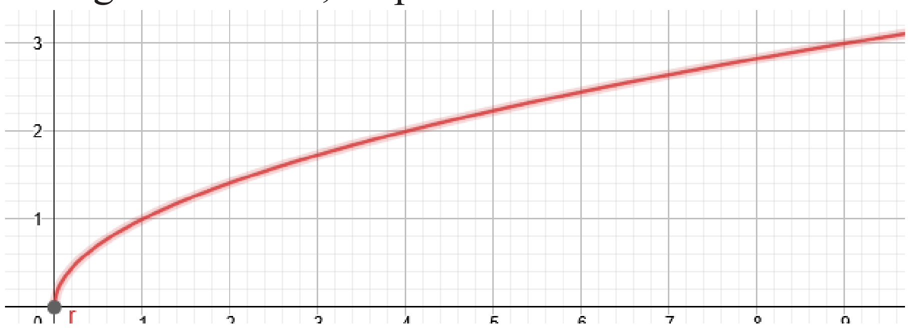
4) Para conseguir la gráfica de C1, comenzamos con raíz cúbica de x



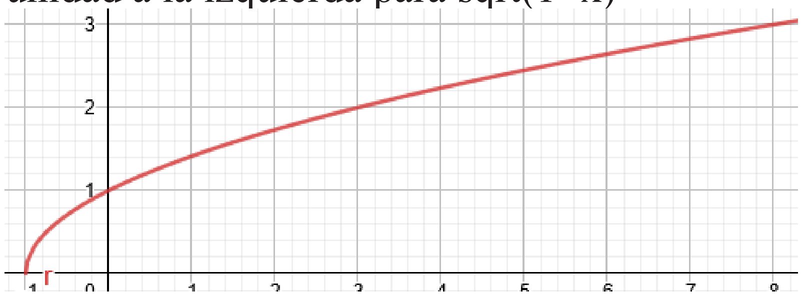
Desplazamos cinco unidades a la derecha para f(x)



Para conseguir la gráfica de C2, empezamos con raíz cuadrada de x

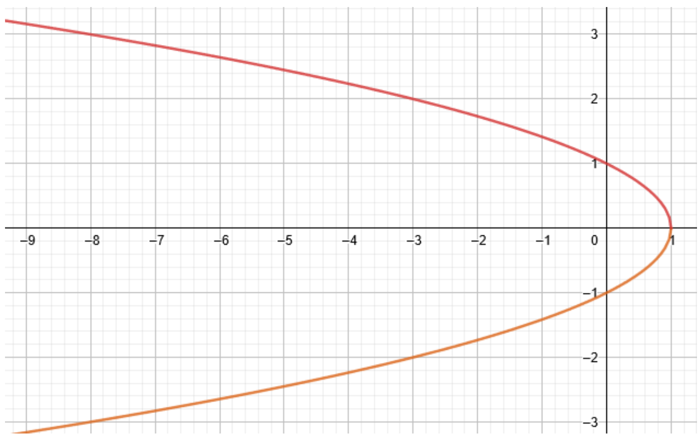


Desplazamos 1 unidad a la izquierda para sqrt(1+x)

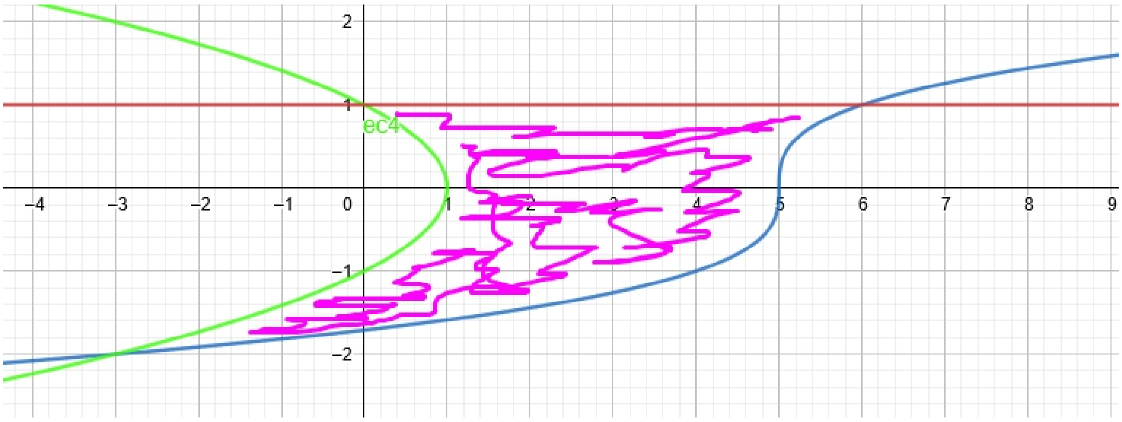


Reflejamos en el eje y para raíz cuadrada de 1-x

Reflejamos en el eje x para la otra rama



Ahora, juntamos todas las gráficas para hallar la región limitada:



CAAS

5)

a) Vemos que la amplitud de cada tramo (periodicidad) es ahora 4 en vez de π.

Es decir
$$4 \cdot |B| = \pi$$
$$|B| = \pi/4 \quad \therefore \quad B<0$$
$$B = -\pi/4$$

Además, vemos que el "cero" original de $\tan(x)$ está ahora en $(1;3)$ en $f(x)$:

$$f(1) = 3$$
$$D + A\tan(Bx + C) = 3$$
$$D + A\tan(0) = 3$$
$$D = 3$$

$$B + C = 0$$
$$-\pi/4 + C = 0$$
$$C = \pi/4$$

Y el intersecto con el eje y nos muestra que:

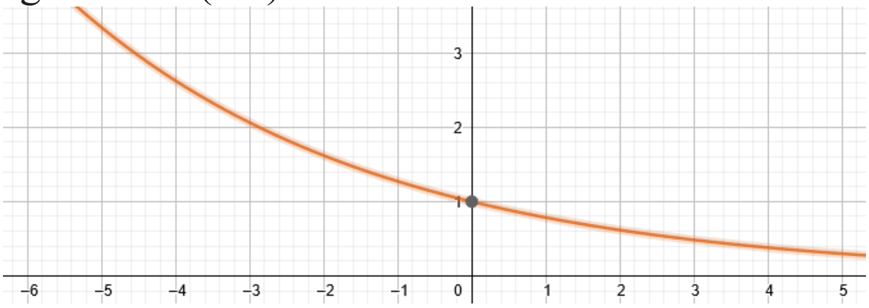
$$f(0) = 5$$
$$A\tan(\pi/4) + 3 = 5$$
$$A = 2$$

Entonces:

$$f(x) = 2\tan\left(-\frac{x\pi}{4} + \pi/4\right) + 3$$

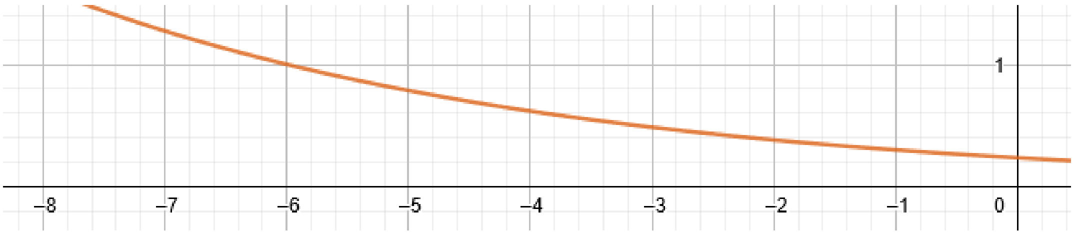
b)

Primero, graficamos el segundo tramo de h(x). Para ello, empezamos con la gráfica de (π/4)^x



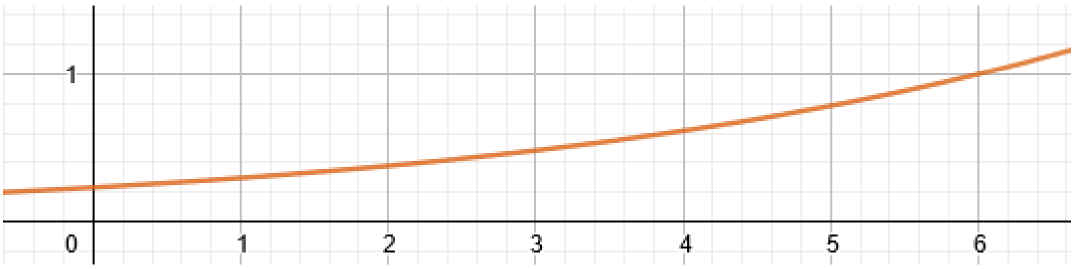
Asíntota:
y= 0

Desplazamos 6 unidades a la izquierda para (π/4)^(x+6)

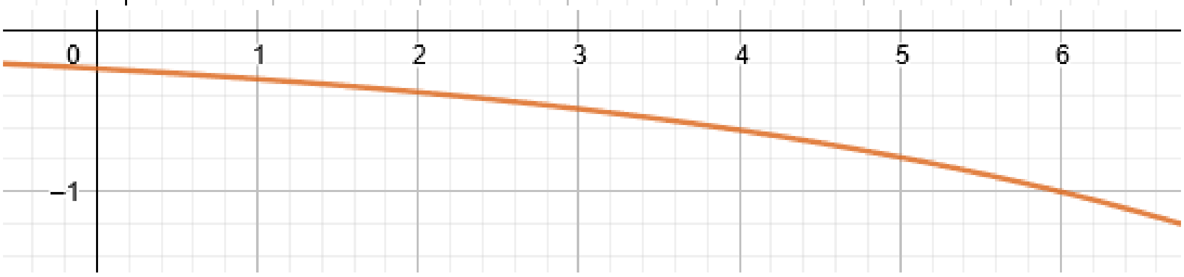


Asíntota:
y= 0

Reflejamos en el eje y para (π/4)^(-x+6)

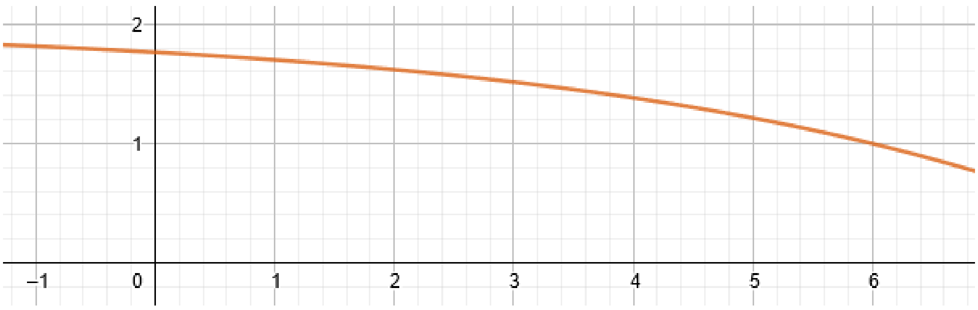


Asíntota:
y= 0



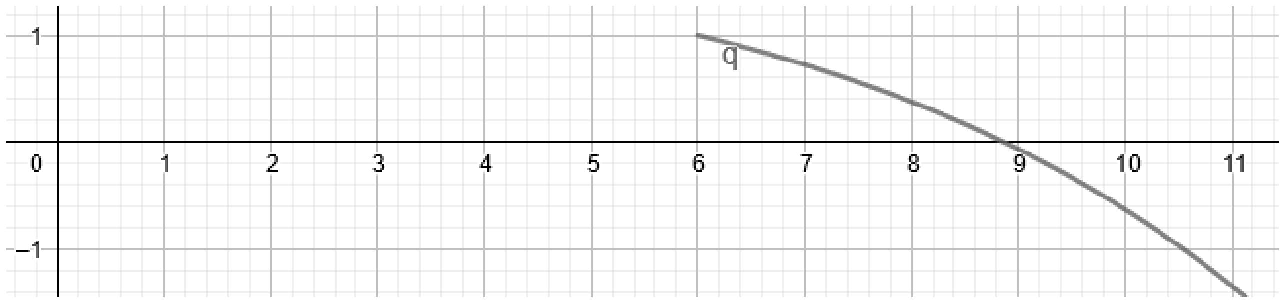
Asíntota:
y= 0

Desplazamos 2 unidades hacia arriba para -(π/4)^(-x+6) +2

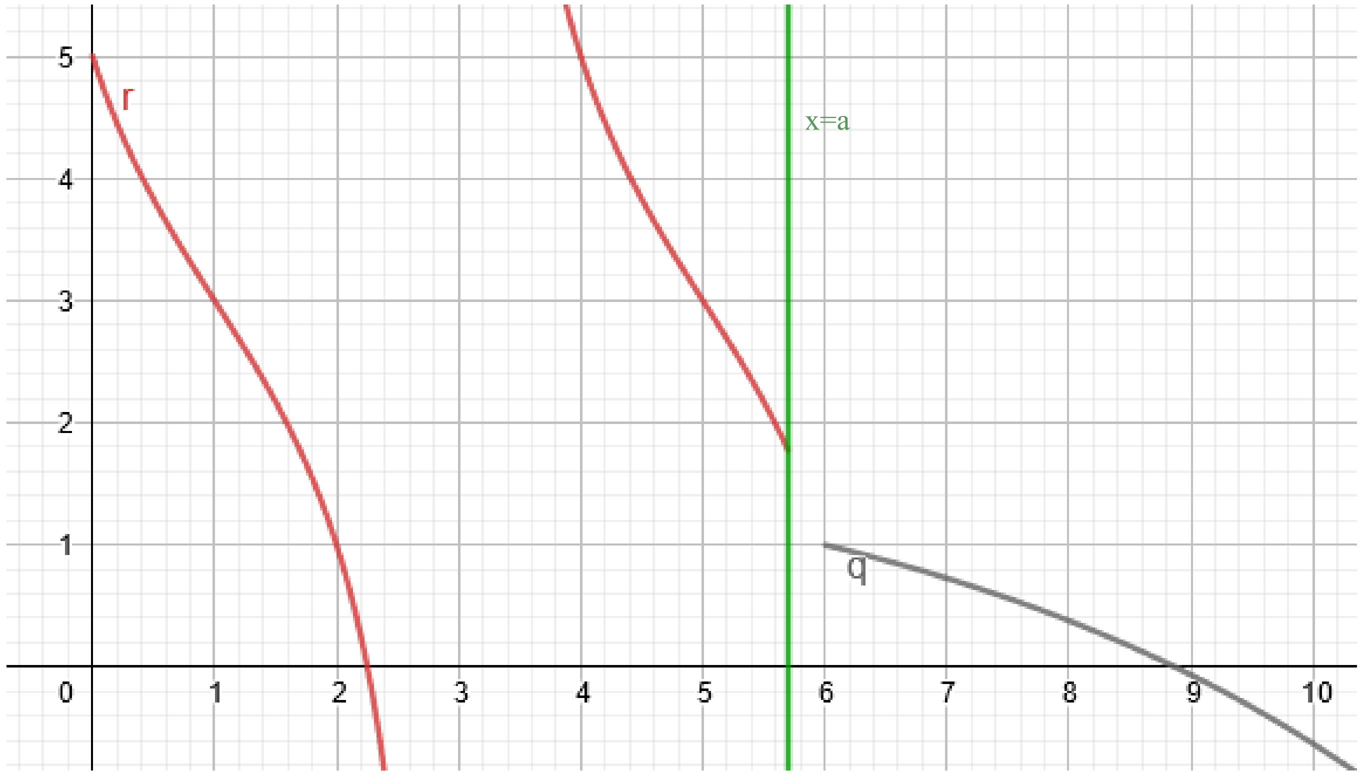


Asíntota:
y= 2

Recortamos en el dominio dado:



Juntamos con el otro tramo que podemos extraer de la gráfica de f(x):



Con ayuda de esta gráfica, vemos que para que h(x) sea inyectiva, los rangos de el tramo rojo y el gris no deben intersectarse. Es decir, el mínimo valor que debe tomar el tramo rojo es 1 y solo en la primera rama.

Entonces:

$$0<a\leq 2$$