ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

ENTREGADO

10 JUN 2019

Práctica

Año	Número
2 0 1 9	0 6 2 0

Código de alumno

Espinoza Zubiate, Gabriel Jesús

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: Álgebra matricial y geometría analítica

Práctica Nº: 3

Horario de práctica: P-123

Fecha: 03 / 06 / 2019

Nombre del profesor: Roy Sánchez

Nota

17

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) JFSS

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracaratula del cuadernillo.

Mayo 2018

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Tercera Práctica Calificada

Semestre Académico 2019 -1

Duración: 110 minutos

Elaborado por los profesores del curso.

Horarios: del H-116 al H-B126

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

---

1. Sea el cuadrado $ABCD$ con $A(0,2,6)$ y centro en $M(-\sqrt{2},2,2)$. Si el vértice D se encuentra en la recta

$$\mathscr{L}: P=(0,2,6)+t(-\sqrt{2},1,-1),\ t\in\mathbb{R},$$

halle:

a) Las coordenadas de los vértices C y D. (2 Pts.)

b) El volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ donde $E=(1,3,7)$. (2 Pts.)

2. Halle el punto simétrico a $M(2,2,2)$ respecto al plano $\mathscr{P}: x+y-2z-6=0$. (3 Pts.)

3. Dados los planos

$$\mathscr{P}_1: 2x+3y+z-6=0,\quad \mathscr{P}_2: 4x-5y-z+2=0$$

y el punto $N(5,-1,-3)$, halle:

a) La ecuación vectorial de $\mathscr{L}_2$ que resulta de la intersección de $\mathscr{P}_1$ con $\mathscr{P}_2$. (1.5 Pts.)

b) La ecuación vectorial de la recta $\mathscr{L}_1$ que pasa por N y es paralela a $\mathscr{L}_2$. (1 Pto.)

c) La distancia de $\mathscr{L}_1$ a $\mathscr{L}_2$. (1.5 Pts.)

Continúa ⋯

4. Sean la recta y el plano

$$\mathscr{L}: P = (-1,2,0) + t(3,-1,4), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{P}: 3x + y - z + 2 = 0.$$

Halle:

a) Las coordenadas del punto de intersección de $\mathscr{L}$ con $\mathscr{P}$. (1 Pto.)

b) La ecuación del plano $\mathscr{P}_1$ que contiene a $\mathscr{L}$ y es perpendicular a $\mathscr{P}$. (2 Pts.)

c) La distancia del punto $Q(2,3,5)$ al plano $\mathscr{P}_1$. (1 Pto.)

5. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) Dados la recta y el plano (2 Pts.)

$$\mathscr{L}: P = t\overrightarrow{v},\ t \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{P}: Ax + By + Cz = 0$$

si se cumple que $\overrightarrow{v} \cdot (A,B,C) = 0$ entonces $\mathscr{L}$ está contenida en $\mathscr{P}$.

b) La ecuación (2 Pts.)

$$(x,y,z) = (2,1,-3) + t(1,1,-1) + r(2,1,1), \quad t,r \in \mathbb{R}$$

se puede transformar en una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

dónde A, B, C y D son constantes y por lo tanto corresponde a un plano.

c) Si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ tales que (1 Pto.)

$$Proy_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} = Proy_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$$

entonces $||\overrightarrow{a}|| = ||\overrightarrow{b}||$.

Roy Sánchez Gutiérrez
Coordinador de Prácticas:

San Miguel, 3 de junio del 2019

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4. $\mathcal{L}: \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-t \\ z = 4t \end{cases}$ $\quad \mathcal{P}: 3x+y-z=-2.$

a) reemplazando x, y y z en $\mathcal{P}$:

$3(-1+3t)+2-t-4t+2=0$

$-3+9t+4-5t=0$

$4t=-1$

$t=-\frac{1}{4}$

$P \in \mathcal{L} \wedge \mathcal{P} = \left(-1+3\left(\frac{-1}{4}\right); 2-\left(\frac{-1}{4}\right); 4\left(\frac{-1}{4}\right)\right)$

$P = \left(\frac{-7}{4}; \frac{9}{4}; -1\right)$

b) vector normal de $\mathcal{P}$: $(3;1;-1) = \vec{n}$.

Vector director de $\mathcal{L}$: $(3;-1;4) = \vec{v}$.

$\mathcal{P}_1: \left(\frac{-7}{4}; \frac{9}{4}; -1\right) + r(3;1;-1) + s(3;-1;4);\ r,s \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} (1)\ x = \frac{-7}{4}+3r+3s \\ (2)\ y = \frac{9}{4}+r-s \\ (3)\ z = -1-r+4s \end{array}\right\}$

sumando (2) y (3):

$y+z = \frac{5}{4}+3s \Rightarrow s = \frac{y+z-\frac{5}{4}}{3}$ (*)

$\longrightarrow$ en (1): $x = \frac{-7}{4}+3r+3\left(\frac{y+z-\frac{5}{4}}{3}\right)$

$\longrightarrow x = \frac{-7}{4}+3r+y+z-\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x-y-z+3}{3} = r$

reemplazando en (3):

$z = -1-\left(\frac{x-y-z+3}{3}\right)+4\left(\frac{y+z-\frac{5}{4}}{3}\right)$

$3z = -3-x+y+z-3+4y+4z-5$

$3z = -9-x+5y+5z$

$\Rightarrow \mathcal{P}_1: x-5y-2z+9=0$

Cálculos en la zona de borrador:

$-\frac{21}{4}+\frac{9}{4}+\frac{4}{4}=-2$

$\frac{30}{4}+\frac{4}{4}=-2$

$-\frac{8}{4}=-2$

$\cos\theta = \frac{(3;1;-1)\cdot(3;-1;4)}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{26}}$

$= \frac{9-1-4}{\sqrt{11\cdot 26}} = \frac{4}{\sqrt{11}\sqrt{26}}$

$\neq 1.$

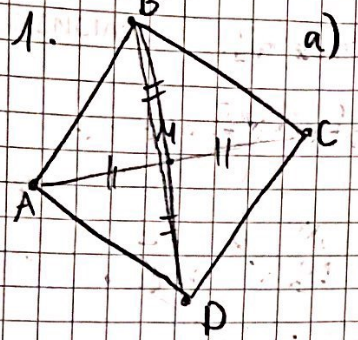
Falta

C

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1.



a) $M = (-\sqrt{2}; 2; 2)$

$A = (0; 2; 6)$, $C = (x_0; y_0; z_0)$

$\to M = \dfrac{A+C}{2}$: $\begin{cases} -\sqrt{2} = \dfrac{0+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -2\sqrt{2} \\ 2 = \dfrac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 2 \\ 2 = \dfrac{6+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow C = (-2\sqrt{2}; 2; -2)$

$\mathcal{L}$ comienza en $A(0;2;6)$ y pasa por D. Por tanto,

$\vec{AD} = t(-\sqrt{2}; 1; -1) = (-\sqrt{2}t; t; -t)$.

$\Rightarrow \mathrm{Proy}_{\vec{AD}} \vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD}$.

$\frac{1}{2} = r = \dfrac{\vec{AM} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|^2}$, $\vec{AM} = (-\sqrt{2}; 0; -4)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \dfrac{(-\sqrt{2}; 0; -4) \cdot (-\sqrt{2}t; t; -t)}{(\sqrt{2t^2 + t^2 + t^2})^2}$

$\frac{1}{2} = \dfrac{2t + 4t}{4t^2} = \dfrac{6}{4t} \Rightarrow 4t = 12$

$t = 3$.

$\Rightarrow D = A + \vec{AD} = (0;2;6) + 3(-\sqrt{2}; 1; -1)$

$= (-3\sqrt{2}; 5; 3)$

4

2

b) $B = D + 2\vec{DM}$; $\vec{DM} = (2\sqrt{2}; -3; -1)$

$= (-3\sqrt{2}; 5; 3) + (4\sqrt{2}; -6; -2)$

$\Rightarrow B = (\sqrt{2}; -1; 1)$ $\quad \vec{AD} = (-3\sqrt{2}; 3; -3)$

volumen: $(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}$. $E = (1; 3; 7)$.

$\Rightarrow \vec{AE} = (1; 1; 1)$, $\vec{AB} = (\sqrt{2}; -3; -5)$

$\Rightarrow (\vec{AB} \times \vec{AD}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{2} & -3 & -5 \\ -3\sqrt{2} & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$= (24; 18\sqrt{2}; -6\sqrt{2})$

$\to (\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot (1;1;1) = (24 + 12\sqrt{2})\, u^3$

$\vec{AM} \cdot \vec{MD} = 0$

$\vec{MD} = (-2\sqrt{2}; 3; 1)$.

$\vec{AM} = (-\sqrt{2}; 0; -4)$

$= 4 - 4 = 0$. ✓

$9 - (5 \cdot -3) = 24$

$-(-3\sqrt{2} - (-3\sqrt{2} \cdot -5)$

$= 18\sqrt{2}$

$\begin{array}{r} 24 \\ -54 \\ 30 \\ \hline 0 \end{array}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$17 = y = -3.$

$x = 0,\ z = 17$

$z = 4x - 5(3x-2) + 2$

$z = -11x + 12$

$z = 6 - 2x - 3(3x-2)$

$z = 12 - 11x$

$z = 6 - 2x - 3y \quad 4 - 6x + 2y = 0$

$z = 4x - 5y + 2 \quad y = 3x$

$6 - 2x - 3y = 4x - 5y + 2$

$4 = 6x - 2y$

$2 = 3x - y$

$y = 3x - 2$

$x = -3 - (-5) = 2$

$-y = -(-2-4) = 6$

$z = (-10 - 12) = -22$

$\to 2(0) + 3(-3) + 17 - 6 = 0$

$2 = 0\ ?$

$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ 4x - 5y + z + 2 = 0 \end{cases}$

$6x - 2y - 4 = 0$

$x = \frac{4 + 2y}{}$

$x = \frac{2 + y}{}$

0

2. normal de $P: (1; 1; -2)$, $M = (2; 2; 2)$

$$d(M; P) = \frac{|2 + 2 - (2 \cdot 2) - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$\to$ vector de P a M: $\alpha(1; 1; -2) = (\alpha; \alpha; -2\alpha) = \vec{n}_M$

$\Rightarrow \|\vec{n}_M\| = \sqrt{6} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + (-2\alpha)^2} = \pm\sqrt{6}\,\alpha.$

$\alpha = -1 \ \vee\ \alpha = 1.$

eligiendo $\alpha = 1$ comprobamos si $M + \alpha(1; 1; -2) \in P$:

$\Rightarrow M + (1; 1; -2) = (3; 3; 0)$

en P: $3 + 3 - \cancel{2 \cdot 0} - 6 = 0$

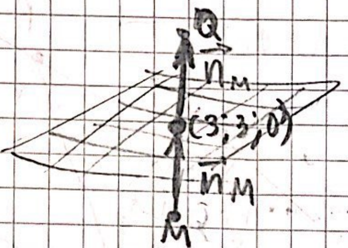
$6 - 6 = 0$

$0 = 0. \qquad \alpha = 1$

$\Rightarrow (3; 3; 0) \in P. \qquad M + 2\vec{n}_M = Q$, donde Q es simétrico a M respecto a P:

$\Rightarrow Q = M + 2\vec{n}_M = (2; 2; 2) + 2(1; 1; -2)$

$= (4; 4; -2)$



3. a) L_2 debe ser ortogonal a los vectores normales de los planos $\vec{n}_1$ para P_1 y $\vec{n}_2$ para P_2:

$\vec{n}_1 \perp P_1 : (2; 3; 1)$, $\vec{n}_2 \perp P_2 : (4; -5; -1)$.

$$\to L \subseteq \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (2; 6; -22) = 2(1; 3; -11).$

Al buscar un punto que $\in P_1 \cap P_2$, hallamos lo sgte.:

$$P_1 \cap P_2 : \begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ 4x - 5y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

$6x - 2y - 4 = 0.$

$3x = y + 2.$

$x = \frac{y + 2}{3}.$ continúa

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

hay infinitas soluciones al sistema. Escogemos arbitrariamente $x=1$, $y=1$ como soluciones para el punto de origen de L_2.

$\Rightarrow$ en P_1: $2(1)+3(1)+z-6=0$

$\Rightarrow$ $z=1$.

$(1;1;1) \in P_1 \cap P_2$.

$\therefore L_2: P=(1;1;1)+t(1;3;-11),\ t\in\mathbb{R}$.

1.

b) si $L_1 \parallel L_2$, el director de L_1 es paralelo a $(1;-3;11)$. además, L_1 pasa por $N(5;-1;-3)$.

$\Rightarrow L_1: P=(5;-1;-3)+r(1;-3;11),\ r\in\mathbb{R}$.

1.0

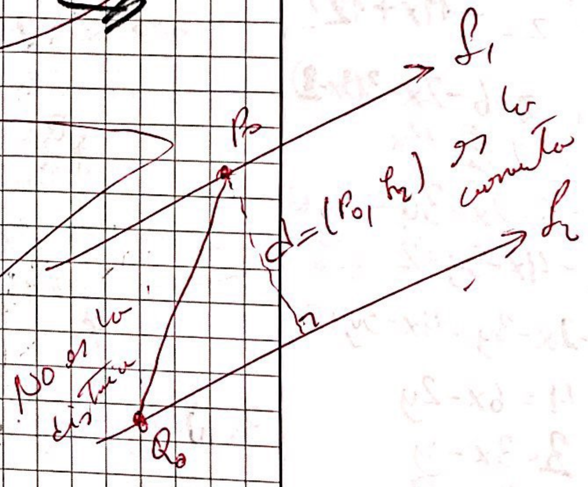
c) $d(L_1;L_2)$, si son paralelas, es igual a $d(P_0;Q_0)$, donde P_0 es el origen de L_2 y Q_0 el origen de L_1.

?

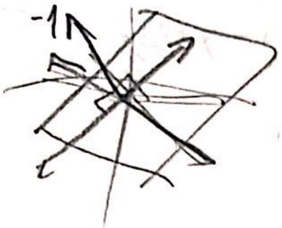
$$\Rightarrow d(P_0;Q_0)=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6u$$

0

Falso



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



Presente aquí su trabajo

5. para que una recta esté contenida en un plano, deben cumplirse dos condiciones:

1. deben compartir un punto de origen. Vemos que L no tiene un punto de origen específico por lo cual uno de sus puntos es $(0;0;0)$ cuando $t=0$.

$$(0;0;0) \in P: A(0)+B(0)+C(0)=0$$
$$0=0.$$

2. el vector normal del plano debe ser ortogonal al director de la recta.

Como vemos que $\vec{v} \perp (A;B;C)$, y este último es normal a P, se cumple esta condición.

$$\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$$
$$\Rightarrow \vec{v}\cdot(A;B;C)=0$$
$$Av_1+Bv_2+Cv_3=0.$$

regresamos a la ecuación de P, donde $x=v_1$, $y=v_2$, $z=v_3$. Aunque se multipliquen las componentes de $\vec{v}$ por el parámetro t, la ecuación del plano dará 0.

Esto indica que todo múltiplo de $\vec{v}$, es decir, todo punto de L, $\in P$.

b) parámetros de la ecuación:

$$\begin{cases} x = 2+t+2r \ldots (1) \\ y = 1+t+r \ldots (2) \\ z = -3-t+r \ldots (3) \end{cases}$$

Sumando (2) y (3): $y+z = -2+2r$

$$r = \frac{y+z+2}{2}$$

Reemplazando en (1): $x = 2+t+\left(\frac{y+z+2}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}$

$$x-y-z-4=t.$$

Reemplazando t y r en (3):

$$z = -3-(x-y-z-4)+\frac{y+z+2}{2}$$

$$2z = -6-2x+2y+\cancel{2z}+8+y+z+2$$

eq: $2x-3y-z=4.$

Comprobamos si el sistema es coherente reemplazando en (1) y (2):

continúa

Presente aquí su trabajo

(2): $y = 1 + (x - y - z - 4) + \left(\frac{y+z+2}{2}\right)$

$2y = 2 + 2x - 2y - 2z - 8 + y + z + 2$

$4 = -4y + 2x + y + z - 2z$

$4 = 2x - 3y - z$ //

(1): $\cancel{x} = 2 + \cancel{x} - y - z - 4 + 2\left(\frac{y+z+2}{2}\right)$

$0 = \cancel{2} - y - z - \cancel{4} + y + z + \cancel{2}$

$0 = 0.$ // ∴ sistema consistente.

V //

c) $Proy_{\vec{a}}\vec{b} = Proy_{\vec{b}}\vec{a}$

$\|Proy_{\vec{a}}\vec{b}\| = \|Proy_{\vec{b}}\vec{a}\|$

$|Comp_{\vec{a}}\vec{b}| = |Comp_{\vec{b}}\vec{a}|$

$\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right|$. $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\| \geq 0 \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow \frac{\|\vec{a}\|}{|\vec{a}\cdot\vec{b}|} = \frac{\|\vec{b}\|}{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}$

$\Rightarrow \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$.

V //

0 0

Falso

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$t = x - y - z - 4$

$r = \frac{y+z+2}{2}$