PUCP
Estudios
Generales Ciencias

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Tercera Práctica Calificada
Semestre Académico 2024 -1

Horario: $A101, B101, B102, B103, I101, I102, I103, I104, I105, 117, 118, 119, 120, 121$

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

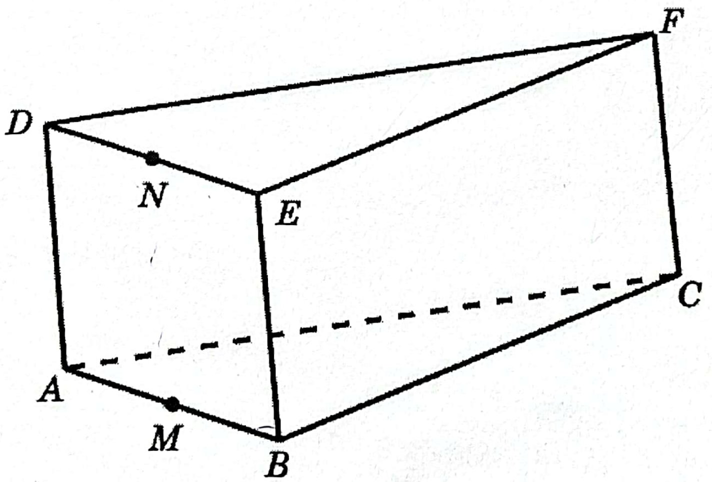
Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión del punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. En la siguiente figura se muestra un prisma triangular recto



$$\begin{array}{ccc} -3 & 7 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline -4 & 6 & 2 \end{array}$$

donde $A(1;1;1), B(1;4;2)$, $C(-3;7;3)$ y $N\left(0;\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ es punto medio del segmento $\overline{DE}$.

a) Halle las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$, si se sabe que M y N son puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, respectivamente. (1 punto)

b) Halle el volumen del prisma triangular $ABCDEF$. (2 puntos)

c) En el triángulo ABC, halle el pie de la altura trazada desde el vértice B. (2 puntos)

$\mathscr{P}: 2x+y-z+16=0$

2. Sea el plano ~~$\mathscr{P}: 2x+y-z=0$ y la~~ recta $\mathscr{L}: P=(0;0;4)+t(-4;-2;2), t \in \mathbb{R}$.

   a) Halle las coordenadas del punto T que resulta de intersecar $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$. **(1.5 puntos)**

   b) Halle las coordenadas del punto R que se encuentra en la recta $\mathscr{L}$, cuya tercera coordenada es menor que 6, y tal que su distancia al punto T es $\sqrt{6}$ unidades. **(2 puntos)**

   c) Halle la ecuación del plano que pasa por el punto R y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}$. **(1.5 puntos)**

3. Dadas las rectas

$$\mathscr{L}_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$$

y

$$\mathscr{L}_2: P=(1;1;1)+t(-4;-6;k), t \in \mathbb{R}.$$

   a) Determine, en caso existan, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que dichas rectas sean paralelas. **(1.5 puntos)**

   b) Para $k=4$, calcule la distancia entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. **(3.5 puntos)**

P plano con L_1 y paralelo a L_2
/ Normal $\vec{V_1} \times \vec{V_2}$
/ Punto paso L_1 para d
✓ Dist punto al plano.

4. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

   - $\|\vec{a}\| = 3\|\vec{b}\|$.
   - El ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es 45°.
   - $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{2}$.

   a) Halle el módulo del vector $\vec{b}$. **(1.5 puntos)**

   b) Si además se cumple que

$$\vec{c} = \left(2\vec{b}+\vec{a}\right) \times \left(\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{a}\right),$$

   calcule $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$. **(3.5 puntos)**

San Miguel, 03 de junio de 2024.

Año				Número			
2	0	2	4	2	3	4	1

Código de alumno

37

Práctica

Ruiz Rodriguez, Miguel Fabrizio

Apellidos y nombres del alumno (letra imprenta)

Firma del alumno

Curso: AM6A

Práctica N°: 3

Horario de práctica: 118

Fecha: 3 / 06 / 24

Nombre del profesor: C. Cárdenas

Nota

19

Número entero

Josep

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) J.Y.A.

INDICACIONES

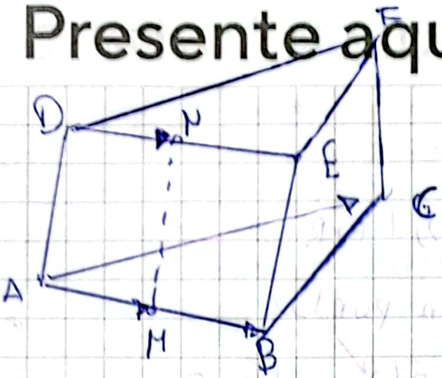
1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - redacción, claridad de expresión, corrección gramatical, ortografía y puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

TOTAL $\frac{5.0}{5.0}$

1)



$A(1, 1, 1)$
$B(1, 4, 2)$
$C(-3, 7, 3)$
$N(0, \frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

a) $\vec{AM} = \vec{MB}$

$M = \frac{A+B}{2}$

$M = \frac{(1,1,1)+(1,4,2)}{2} = (1; 2,5; 1,5)$ ✓ 0.5p

$\vec{AM} = (1; 2,5; 1,5) - (1,1,1) = (0; 1,5; 0,5)$

$\vec{AM} = \vec{DN}$

$\vec{AM} = N - D$

$D = N - \vec{AM}$

$D = (0; 1,5; 4,5) - (0; 1,5; 0,5)$

$D = (0, 0, 4)$

Entonces $\vec{MN} = N - M = (0; 1,5; 4,5) - (1; 2,5; 1,5) = (-1, -1, 3)$ ✓ 0.5p

b) $\frac{|[\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}]|}{2}$ ✓ 0.5p

$\vec{AD} = (0,0,4) - (1,1,1) = (-1, -1, 3)$

$\vec{AB} = B - A = (1,4,2) - (1,1,1) = (0, 3, 1)$ ✓ 0.5p

$\vec{AC} = C - A = (-3,7,3) - (1,1,1) = (-4, 6, 2)$

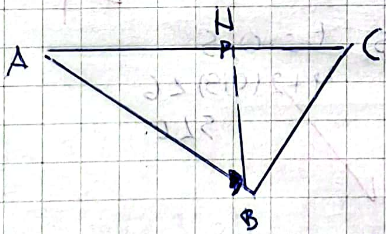
$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (0, 4, 12)$
$+ \quad - \quad +$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, -4, 12)$ ✓ 0.5p

$\frac{|(-1, -1, 3) \cdot (0, -4, 12)|}{2} = 20\ u^3$ ✓ 0.5p

$-3 \quad 7 \quad 3$
$-1 \quad -1 \quad -1$
$-4 \quad 6 \quad 2$

c)



$\text{Proy}_{\vec{AC}}\vec{AB} = \vec{AH}$ ✓ 0.5p

$\text{Proy}_{\vec{AC}}\vec{AB} = H - A$

$\text{Proy}_{\vec{AC}}\vec{AB} + A = H$ ✓

$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AC}\|^2}(\vec{AC}) + A = H$

$\frac{20}{56}(\vec{AC}) + A = H$

$\frac{5}{14}(-4, 6, 2) + (1, 1, 1) = H$ ✓ 1p

$\left(-\frac{3}{7}, \frac{22}{7}, \frac{12}{7}\right) = H$ ✓ 0.5p

5.0/5.0

Presente aquí su trabajo

2. $\mathcal{P}: 2x+y-z+16=0$

$\mathcal{L}: P=(0,0,4)+t(-4,-2,2),\ t\in\mathbb{R}$

a) Intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ (un punto)

$T=P_1 \in \mathcal{L}\cap\mathcal{P}: (0-4t, 0-2t, 4+2t)\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Reemplazando en $\mathcal{P}$:

$2(-4t)+(-2t)-(4+2t)+16=0$

$t=1$

1.5p

$\therefore P_1=(-4,-2,6)=T$

b) $R\in\mathcal{L}_1: (0-4t, 0-2t, 4+2t)\ ;\ 4+2t<6\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$\|\vec{RT}\|=\sqrt{6}$ $\quad\vec{RT}=T-R=(-4;-2,6)-(-4t,-2t,4+2t)\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$T-R=(4t-4, 2t-2, -2t+2)\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$\sqrt{(4t-4)^2+(2t-2)^2+(2t-2)^2}=\sqrt{6}$

$\cancel{2^2(2t-2)^2}$

$\sqrt{(2(2t-2))^2+(2t-2)^2+(2t-2)^2}=\sqrt{6}$

$\sqrt{6(2t-2)^2}=\sqrt{6}$

$\cancel{\sqrt{6}}\,|2t-2|=\cancel{\sqrt{6}}$

$2t-2=1 \quad\vee\quad 2t-2=-1$

$t=1{,}5 \quad\quad t=0{,}5$

Para decidir el valor de T:

$4+2t<6$

2p.

Si $t=1{,}5$

$4+2(1{,}5)<6$

$7<6$

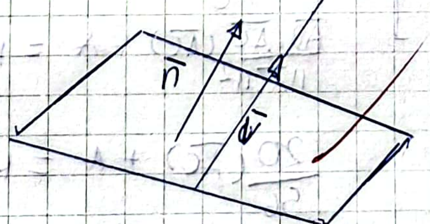
Si $t=0{,}5$

$4+2(0{,}5)<6$

$5<6$

$\therefore t=0{,}5 \ \wedge\ R(-2,-1,5)$

c) Si el plano es perpendicular a la recta:



$\bar{n}=k\bar{v};\ k\in\mathbb{R}$

donde $\bar{n}$ es la normal del plano y $\bar{v}$ el vector dirección de la recta.

El vector dirección de $\mathcal{L}$ es $\bar{v}=(-4,-2,2)$

$\bar{n}=k(-4;-2,2);\ k\in\mathbb{R}$

Si $k=1$

$\bar{n}=(-4;-2,2)$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-8-2-4-2+16$

$-10\ -1$

$~~\ell~~\ 2-2t)$

$6-(4+2t$

$-4-(-4t$

$-4+4t$

$-2-(-2t$

$2t-2$

$6-(4+2t$

$-2t+2$

$(-2,-1,1)$

$-2,-1,5$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\rho:\ -4x - 2y + 2z + d = 0$

Para obtener "d" se reemplaza por el punto de paso $R(-2, -1, 5)$

$$-4(-2) - 2(-1) + 2(5) + d = 0$$
$$d = -20$$

1.5p

$$\rho:\ -4x - 2y + 2z - 20 = 0$$

3) $L_1:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} = (1; -1, 0) + m(2; 3; -1);\ m \in \mathbb{R}$

TOTAL $\frac{4.0}{5.0}$

$L_2:\ P = (1, 1, 1) + t(-4; -6, k);\ t \in \mathbb{R}$

a) Para ser paralelas $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \vec{0}$, donde $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son los vectores dirección de las rectas L_1 y L_2

$$\vec{v_1} = (2, 3; -1)$$
$$\vec{v_2} = (-4; -6, k);\ k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & k \end{vmatrix} = (3k - (-6)(-1),\ 2k - (-1)(-4),\ 0)$$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (3k - 6, 4 - 2k, 0) = (0, 0, 0);\ k \in \mathbb{R}$$

1.5p

Pd. Eso se hace justificando que no sean paralelas ni secant

$3k - 6 = 0 \qquad 4 - 2k = 0$

$k = 2 \qquad 2 = k$

$-12 + 12 = 0$

Entonces si $k = 2$; $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \vec{0}$ y dichas rectas serán paralelas.

b) Para $k = 4$ (Falta justificar que para $K = 4$ las rectas L_1 y L_2 son alabeadas)

$$\vec{v_1} = (2, 3, -1) \qquad \vec{v_2} = (-4; -6, 4)$$

Primero, encontrar el plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2.

Su normal será $\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (6, 4, 0) = (6; -4, 0)$

2.5p

$6x - 4y + d = 0$; reemplazando con el punto de paso de L_1

$$6(1) - 4(-1) + d = 0$$
$$d = -10$$
$$6x - 4y - 10 = 0$$
$$3x - 2y - 5 = 0$$

Dist entre rectas: Dist. del punto de paso de L_2 al plano que contiene a L_1

$$D = \frac{|3(1) - 2(1) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

5.0/5.0 TOTAL

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4) $\frac{\|\bar{a}\|}{\|\bar{b}\|} = \frac{3k}{k}$; $\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$

$k \geq 0$

porque el módulo de un vector ≥ 0

$\cos 45° = \frac{12\sqrt{2}}{3k \cdot k}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{3k^2}$

$k^2 = 8$; ~~$k = \pm 2\sqrt{2}$~~

$|k| = \sqrt{8}$; Pero $k \geq 0$

Entonces $\|\bar{b}\| = k = \sqrt{8}$

1.5p

b) $\bar{c} = (2\bar{b} + \bar{a}) \times (\bar{b} + \frac{3}{2}\bar{a})$

$\bar{c} = \cancel{2\bar{b}\times\bar{b}} + 2\bar{b} \times \frac{3}{2}\bar{a} + \bar{a}\times\bar{b} + \cancel{\bar{a}\times\frac{3}{2}\bar{a}}$

$\bar{c} = 3\bar{b}\times\bar{a} - \bar{b}\times\bar{a} = 2\bar{b}\times\bar{a}$

Pide $\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = -2(\bar{b}\times\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{a}) = -2\|\bar{b}\times\bar{a}\|^2$

$= -2\|\bar{a}\|\|\bar{b}\| \operatorname{sen} 45°$

$P = -2\|\bar{b}\times\bar{a}\|^2 = -2[(3\sqrt{8})(\sqrt{8})(\operatorname{sen}45)]^2 = -576$

$\|\bar{a}\|\|\bar{b}\| \operatorname{sen}\theta$

$-2\,\bar{a}\times\bar{b}$

$\|\bar{a}\|$

3.5p