ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

Examen Parcial

Semestre Académico 2023 -1

Horario: $A101, B101, B102, B103, I101, I102, I103, I104, I105, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122.$

(Turno 2)

Duración: 180 minutos

Elaborado por todos los profesores del curso

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Tome las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos; de tener alguna emergencia, comuníqueselo a su jefe de práctica.
- Si desea retirarse del aula y dar por concluida su evaluación, deberá haber transcurrido la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No puede usar calculadoras ni apuntes de clase ni libros.
- El examen consta de 5 preguntas. Debe justificar sus respuestas.
- Puede responder las preguntas en el orden que desee, sólo asegúrese de colocar en la parte superior de cada página el número de la pregunta que está resolviendo.

---

1. Considere las funciones

$$f(x) = -x^2 - 4x + 4, \quad x \geq -5 \quad \text{y} \quad g(x) = |x+1|, \quad x \geq -8.$$

   a) Halle la regla de correspondencia y el dominio de la función $g \circ f$. (2 puntos)

   b) Grafique la función $g \circ f$, indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados. (2 puntos)

   c) Halle los valores máximo y mínimo de la función $g \circ f$, e indique su rango. (1 punto)

2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{16 - 4(x+2)^2}, & -4 \leq x < 0 \\ 3 - \sqrt{x-4} & 4 < x \leq 13 \end{cases}$$

   Considere la función h que cumple todas las condiciones siguientes:

   - $h(x) = f(x)$, cuando $x \in [-4; 0[\cup]4; 13]$.
   - $\mathrm{Dom}(h) = [-13; 13]$.
   - h es una función impar.

   a) Halle la regla de correspondencia de la función h. con dom (2 puntos)

b) Esboce la gráfica de la función h, indicando puntos de intersección con los ejes coordenados. (3 puntos)

c) ¿Es cierto que la función h es decreciente en el intervalo $[2;13]$? Justifique su respuesta. (1 punto)

3. Analice si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   a) Si x satisface la inecuación $\dfrac{x^2+11}{5-x} \geq 3$ entonces se puede afirmar que $x \in [1;5[$. (1 punto)

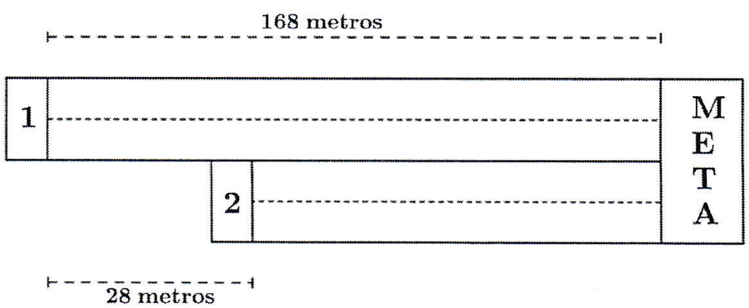
   b) Si las funciones $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son decrecientes, entonces la función producto $f \cdot g$ es creciente. (1 punto)

4. Considere la constante real $a < 5$.

   a) Demuestre que si $x \geq 5$ entonces $x - a > 0$. (1 punto)

   b) Resuelva la inecuación $\sqrt{x-5} \geq |x-a| + a$. (2 puntos)

5. Ana y Bea se ubican en una pista de atletismo que mide 168 metros y tiene forma rectilínea.



Ambas partirán en dirección a la meta, pero lo harán en distintos momentos y desde casillas diferentes; al llegar a la meta se detendrán.

Ana inicia el recorrido desde la casilla 1 y luego de t segundos, su distancia (en metros) a la meta se modela con la función $d(t) = 224 - 28\sqrt{2t+4}$.

Cuando han transcurrido 2 segundos desde que Ana empezó a correr, Bea inicia su recorrido desde la casilla 2 (ubicada a 28 metros de la casilla 1) y lo hace con una rapidez constante de 7 metros por segundo.

   a) ¿Cuánto recorrió Ana luego de 3 segundos de empezar a correr y cuánto le falta para llegar a la meta? (1 punto)

   b) Determine la expresión que modela la distancia a la que se encuentra Ana respecto a la casilla 1, después de t segundos desde que empezó a correr. Halle el dominio de dicha función.(1 punto)

   c) Determine la expresión que modela la distancia a la que se encuentra Bea respecto a la casilla 2, después de t segundos de que Ana empezó a correr. Halle el dominio de dicha función.(2 puntos)

San Miguel, 18 de mayo de 2023.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII | PUCP

11

Primer examen

Año				Número			
2	0	2	3	1	1	6	1

Código de alumno

Jara Quecaño Leonardo
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Horario: 116

Fecha: 18 / 05 / 2023

Nombre del profesor: Mariano González

Nota
20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\log 4$

$x \in D_g,\ g \in D_1$

$-(x^2-4x+4)+8$

$8-(x-2)^2$

$8-(+2)^2$

$8-x^2-4x-4$

$-x^2-4x+4$

$9 \geq a^2$

$-3 \leq a \leq 3$

$9 \leq a^2$

$3 \leq a$

$-3 \geq a$

-6 -5 1 2

7

$-2 \leq 8-(x+2)^2 \leq -1$

$-16 \leq -(x+2)^2 \leq -9$

$9 \leq (x+2)^2 \leq 16$

---

1) a) [redacted] [redacted] [redacted]

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x+1 \leq 0$

$x \leq -1$

[redacted]

Para $g_1 \circ f$:

$\mathrm{Dom}(g_1 \circ f): x \in [-5;+\infty[\ \wedge\ f(x) \in [-1;+\infty[$

$-(x^2+4x+4)+8 \geq -1$

$8-(x+2)^2 \geq -1$

$9 \geq (x+2)^2$

$-3 \leq x+2 \leq 3$

$-5 \leq x \leq 1$

[redacted]

$\mathrm{Dom}(g_1 \circ f) = [-5;1]$

Para $g_2 \circ f$:

$\mathrm{Dom}(g_2 \circ f): x \in [-5;+\infty[\ \wedge\ f(x) \in [-8;-1]$

$-8 \leq 8-(x+2)^2$, $8-(x+2)^2 \leq -1$

$(x+2)^2 \leq 16$, $9 \leq (x+2)^2$

$-4 \leq x+2 \leq 4$, [redacted]

$-6 \leq x \leq 2$, [redacted] 1

$-6 \leq x \leq 2$, $x+2 \geq 3$, $-3 \geq x+2$

$-6 \leq x \leq 2$, $x \geq 1$, $-5 \geq x$

No hay intersección entre esos 4 intervalos

$\therefore \mathrm{Dom}(g_2 \circ f) = \phi$

$\mathrm{Dom}(g \circ f): x \in \mathrm{Dom} f \ \wedge\ f(x) \in \mathrm{Dom}\, g$

$x \in [-5;+\infty[\ \wedge\ -(x^2+4x+4)+8 \in [-8;+\infty[$

$8-(x+2)^2 \geq -8$

$16 \geq (x+2)^2$

$-4 \leq (x+2) \leq 4$

$-6 \leq x \leq 2$

$\mathrm{Dom}(g \circ f) = [-5;2]$

2

[redacted]

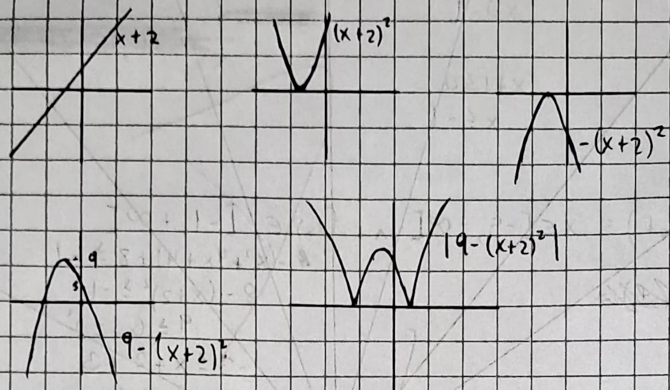
$\therefore (g \circ f)(x) = |8-(x+2)^2+1| = |9-x^2-4x-4| = |5-x^2-4x|$

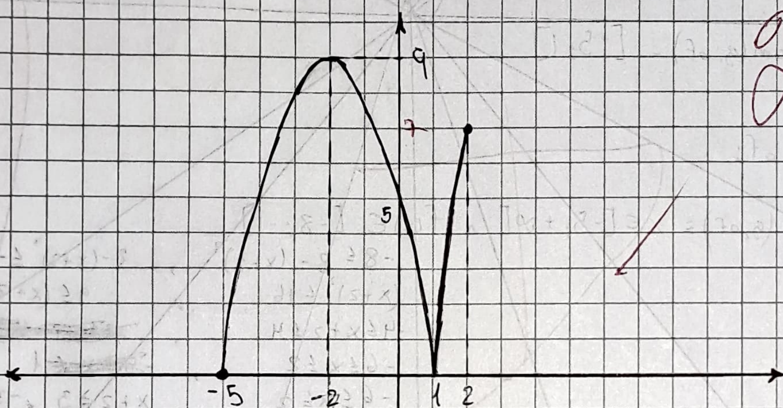
$(g \circ f)(x) = |5-x^2-4x|,\ -5 \leq x \leq 2$

Presente aquí su trabajo

b) $(g\circ f)(x) = |5 - x^2 - 4x|, \quad -5 \leq x \leq 2$

$(g\circ f)(x) = |9 - (x+2)^2|, \quad -5 \leq x \leq 2$





2

$|9 - (0+2)^2| = |9 - 4| = 5$

$|9 - (x+2)^2| = 0$

$9 = (x+2)^2$

$3 = x+2 \quad \vee \quad -3 = x+2$

$1 = x \quad \vee \quad -5 = x$

c)

$\text{Ran}\,(g\circ f) = [0; 9]$

$(g\circ f)(-2) = |9 - (0)^2| = 9$

Máx valor = 9

Mín valor = 0

1

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)

$-(x^2+4x+4)+9$

$9-(x+2)^2$

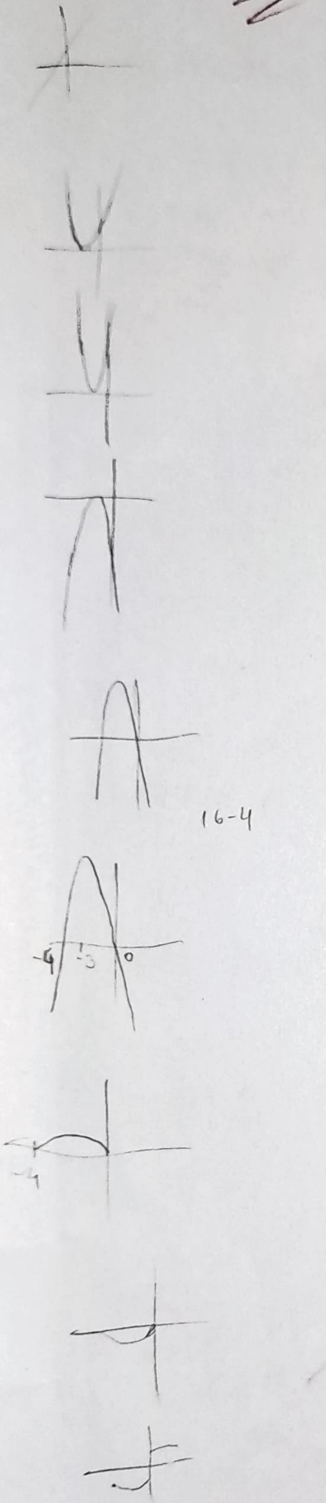
$9-4=5$

$|9-(4)^2|$

$|9-16|$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo



16-4

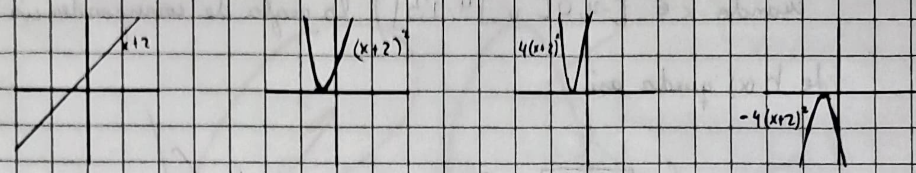
$\sqrt{4+x}-3$

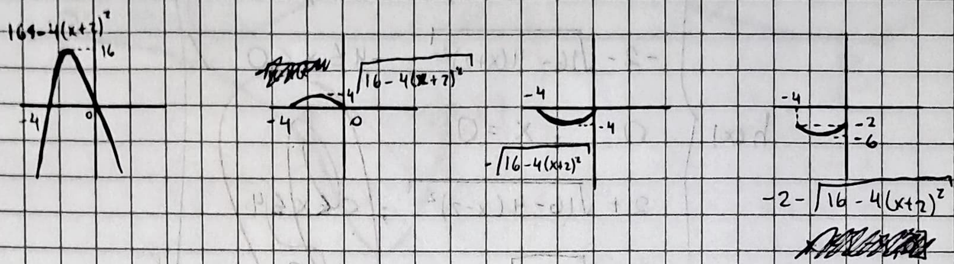
$\sqrt{-x-4}-3$

2)

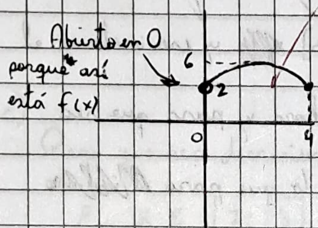
a)

Para f_1:





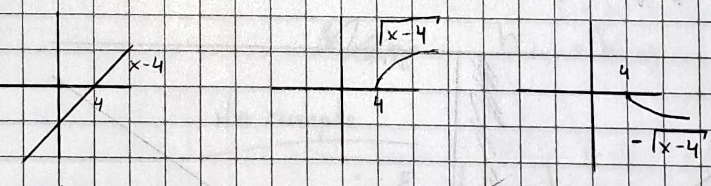
~~Obs~~ Como $h(x)$ es impar una parte de su gráfica se verá así:

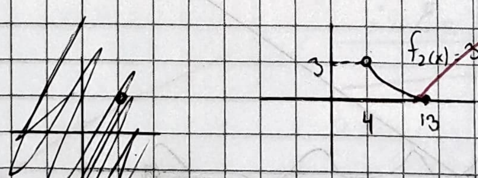


Cuya ecuación se halla modificando la original de la siguiente manera

$$-2-\sqrt{16-4(x+2)^2} \rightarrow \underbrace{2+\sqrt{16-4(x-2)^2}}_{\text{Parte de la ley de correspondencia de } h(x)}$$

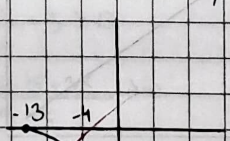
Para f_2:





$f_2(x) = 3-\sqrt{x-4}$, $4 < x \leq 13$

Como $h(x)$ es impar una parte de su gráfica se verá así:



Cuya ecuación se obtiene modificando la original así:

$$3-\sqrt{x-4} \longrightarrow \overbrace{\sqrt{-x-4}-3}^{\text{Parte de la ley de correspondencia de } h(x)}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva cálculos y des (borrado

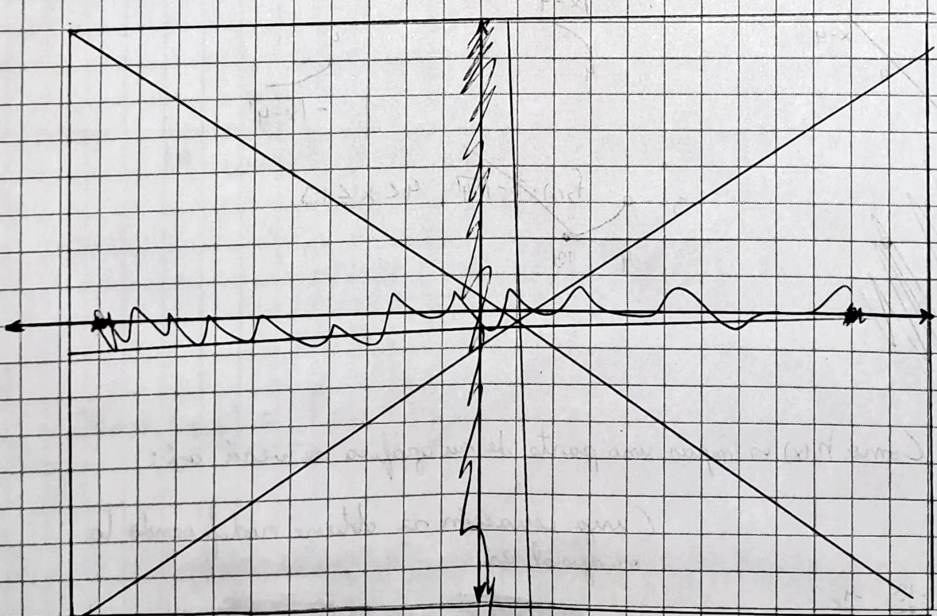
Juntando las ecuaciones (tomando en cuenta que $h(x) = f(x)$ cuando $x \in [-4, 0[\cup]4; 13]$) la regla de correspondencia de $h(x)$ queda así:

$$h(x) \begin{cases} \sqrt{-x-4} - 3 \ ; & -13 \leq x < -4 \\ -2 - \sqrt{16 - 4(x+2)^2} \ ; & -4 \leq x < 0 \\ 0 \ ; & x = 0 \\ 2 + \sqrt{16 - 4(x-2)^2} \ ; & 0 < x \leq 4 \\ 3 - \sqrt{x-4} \ ; & 4 < x \leq 13 \end{cases}$$

2

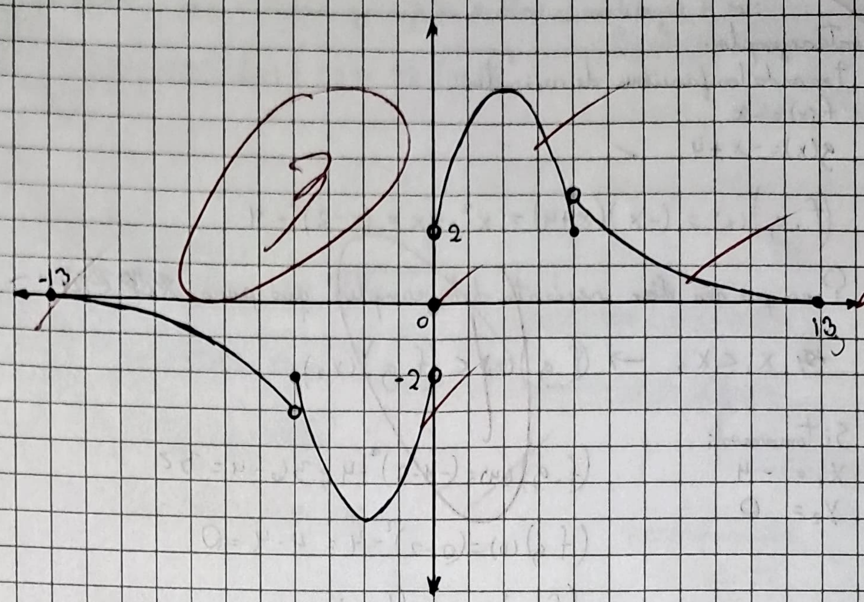
(Se añade una porque el $Dom_h = [-13, 13]$ y eso incluye el 0, que no había sido tomado hasta ahora y para que sea una función impar $f(-x) = -f(x)$ por lo que para el caso de $x = 0$ se puso el punto 0)

b) Uniendo las gráficas principales de la resolución anterior



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo



c)

Para que sea decreciente se cumple: Para $x_1 < x_2 \to h(x_1) > h(x_2)$

En $x \in [2;13]$

Tomamos:

$x_1 = 4$

$x_2 = 5$

$h(4) = 2+\sqrt{16-4(4-2)^2} = 2$

$h(5) = 3-\sqrt{5-4} = 2$

$h(4) = h(5)$

No cumple

$\therefore$ E_2 falso

1

3

a)

$\frac{x^2+11}{5-x} \geq 3$ Si satisface $\to$ $x \neq 5$

$\frac{x^2+11}{5-x} - 3 \geq 0$

$\frac{x^2+11-15+3x}{5-x} \geq 0$

$x^2+3x-4 \geq 0$

$x \quad 4$

$x \quad -1$

$(x+4)(x-1) \geq 0$

Si $x=-5$: $(-1)(-6) \geq 0$, $6 \geq 0$

Si $x=0$: $4(-1) \geq 0$, $-4 \geq 0$

Si $x=2$: $6(1) \geq 0$, $6 \geq 0$

✓ | X | ✓ — -4, 0, 1

$x \in \,]-\infty;-4] \cup [1;+\infty[\; - \{5\}$

↳ x sí está dentro del intervalo $[1;5[$

$x=-5$?

$\therefore$ E_2 ~~verdadero~~ FALSO

0,5

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiv... cálculos y des... (borrado...

b) Contraejemplo:

Tomando las funciones decrecientes:

$f(x) = -x$

$g(x) = -x + 4$

$(f.g)(x) = (-x)(-x+4) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$

Para que sea ~~...~~ creciente debe cumplir que para ~~...~~

$x_1 < x_2 \rightarrow (f.g)(x_1) < (f.g)(x_2)$

Si tomamos:

$x_1 = -4$

$x_2 = 0$

$(f.g)(-4) = (-4-2)^2 - 4 = 36 - 4 = 32$

$(f.g)(0) = (0-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

$(f.g)(-4) > (f.g)(0)$

~~...~~ La función, al tener forma de parábola, no va a cumplir con las características de una función creciente ni decreciente

$\therefore$ Es falso

4) $a < 5$. $a \in \mathbb{R}$

a)

$x \geq 5 \longrightarrow x - a > 0$

$a < 5$

$-a > -5$

$x - a > -5 + x$ ← Si $x \geq 5$, el mínimo valor que puede tomar $(-5+x)$ es 0

$\therefore x - a > 0$

b) ~~...~~ $x \geq 5$ ← $\sqrt{x-5} \geq 0 \rightarrow x - 5 \geq 0$

Si $x \geq 5 \rightarrow x - a > 0$

Como $(x-a)$ es positivo se escribe tal cual con el valor absoluto

$\therefore \sqrt{x-5} \geq x - \cancel{a} + \cancel{a}$

Si x es positivo y mayor o igual que 5 entonces elevar al cuadrado no afecta la desigualdad

~~$\sqrt{x-5}$~~ ~~...~~ $x - 5 \geq x^2$

$x^2 - x + 5 \leq 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4.5}}{2}$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-20}}{2}$ ← Los puntos críticos no pueden ser imaginarios en $\mathbb{R}$

$\therefore x \notin \mathbb{R}$

$C.S = \phi$

$f(x) = -x$

$g(x) = -x + 4$

$(-x)(-x+4)$

$x^2 - 4x$

$(x-2)^2 - 4$

$x - 5 \geq 0$

$a < 5$

$x + a < 5 + x$

$a - x < x - ...$

$x \geq 5 \quad 5 > a$

$x + 5 > 5 + a$

$x - a > 0$

$\sqrt{a} \geq 2$

$a \geq 4$

...

$a < 5$

$-a > -5$

$x - a > -5 + ...$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$224 - 168 = 56$$

$28\times$ $3{,}15\times$ 28 0

$224 \,\lfloor 28$ 224 6 8 0

$\sqrt{10}$

$3{,}2\times 3{,}2 = 64 + 96 = 1024$

$3{,}1\times 3{,}1 = 31 + 93 = 961$

$3{,}13\times 3{,}13 = 939 + 313 + 939 = 97969$

$3{,}14\times 3{,}14 = 1256 + 314 + 942 = 98596$

$3{,}15\times 3{,}15 = 1575 + 315 + 945 = 99225$

$\sqrt{10} = 3{,}15\ldots$

5

La función de la distancia que le falta a Ana en un tiempo t es:

$$d(t) = 224 - 28\sqrt{2t+4}$$

a)

Recorrió:

$$168 - \left(224 - 28\sqrt{2(3)+4}\right)$$

$$= 168 - \left(224 - 28\sqrt{10}\right)$$

$$= 168 - 224 + 28\sqrt{10}$$

$$= \left(28\sqrt{10} - 56\right)\,m$$

Le falta:

$$d_{(3)} = 224 - 28\sqrt{2\cdot 3+4} = \left(224 - 28\sqrt{10}\right)m$$

b)

$$f_{(t)} = 168 - 224 + 28\sqrt{2t+4}$$

$$f_{(t)} = 28\sqrt{2t+4} - 56$$

Cuando llega a la meta se detiene:

$$168 = 28\sqrt{2t+4} - 56$$

$$\cancel{224}^{\,8} = \cancel{28}\sqrt{2t+4}$$

$$8 = \sqrt{2t+4}$$

$$64 = 2t+4$$

$$60 = 2t$$

$$30_s = t$$

← Tiempo máximo

$$f(t) = 28\sqrt{2t+4} - 56 \quad ; \quad 0 \le t \le 30$$

↑ Empieza a correr después de $t=0$. No hay tiempo negativo en esta función

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c)

Bea inicia en $t = 2$

~~Velocidad~~ de Rapidez de Bea: $7\ m/s$

Distancia total que recorre Bea $= 168 - 28 = 140\ m$

Distancia de Bea respecto a la casilla 2

$$B(t) = 7(t-2) = 7t - 14$$

Tiempo máximo:

$$140 = 7(t-2)$$
$$20 = t - 2$$
$$22_s = t$$

2

Si Bea se mantiene en la casilla 2 desde $t = 0s$ entonces la función de la distancia de Bea respecto a la casilla será:

$$B(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 2 \\ 7t - 14, & 2 \le t \le 22 \end{cases}$$