

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA
SEMESTRE ACADÉMICO 2024-1

Horarios: 0101 al 0116.

Duración: 110 minutos

Elaborada por todos los profesores.

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, calculadoras, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

1. Sea la función $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$, donde a, b y d son constantes reales. La gráfica de f pasa por el punto $(1; 4)$ y tiene como asíntotas a las rectas $\mathcal{L}_1 : x = 4$ y $\mathcal{L}_2 : y = 5$.

- Determine la regla de correspondencia de f . (2.0 puntos)
- Esboce la gráfica de f , indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordinados. (2.0 puntos)
- ¿Es f decreciente? Justifique. (1.0 punto)

2. Sea a una constante real y sea f la función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-3} & , \quad x < 2 \\ a + \sqrt{4x-8} & , \quad x \geq 2. \end{cases}$$

- Para $a = -4$, esboce la gráfica de f , indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordinados. (2.5 puntos)
- Para $a = -4$, determine las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica. (0.5 puntos)
- Determine todos los valores de a tales que f sea creciente. Justifique. (1.0 punto)

3. Sea la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2^{x+1} & , \quad x < 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 & , \quad x \geq 0. \end{cases}$$

- Esboce la gráfica de f , indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas. (3.0 puntos)
- Halle el rango de la función f . (1.0 punto)
- ¿Es f decreciente en $]-\infty; 2[$? Justifique. (1.0 punto)

4. Una compañía fabrica un determinado tipo de accesorios de iluminación para casas. La función

$$Q(t) = k(16^{-0.125t}), t \geq 0$$

donde k es una constante real, modela la cantidad de accesorios disponibles para la venta t semanas después de lanzar una campaña publicitaria. Además, se sabe que inicialmente se dispone de 40000 unidades para la venta. Asimismo, la siguiente campaña debe realizarse cuando la cantidad de accesorios disponibles sea la cuarta parte de la inicial.

- a) Halle el valor de la constante k . (1.0 punto)
- b) Halle la cantidad de accesorios de iluminación disponibles para la venta dos semanas después del lanzamiento de la campaña. (1.0 punto)
- c) ¿Cuánto tiempo después del inicio se lanzará la siguiente campaña? (1.0 punto)

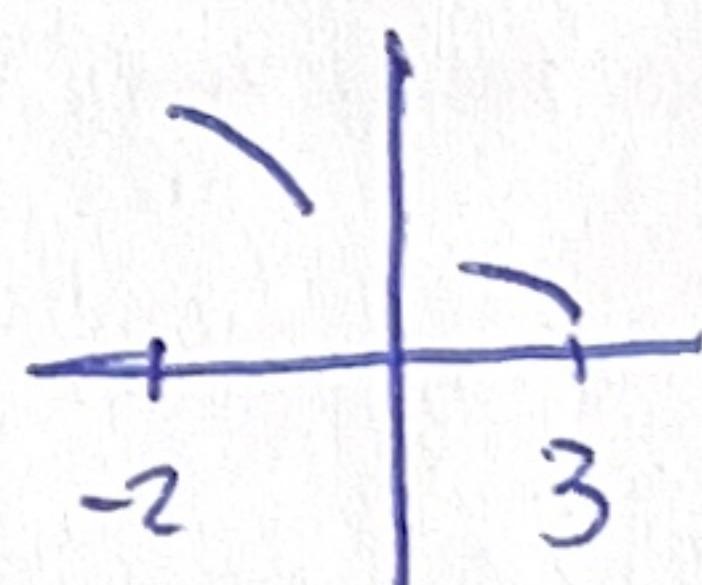
5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

- a) La función f definida por $f(x) = 3x^2(e^x - e^{-x})$, $-1 < x < 1$, es una función impar. (1.0 punto)
- b) La función $f(x) = \frac{3x-1}{x+1} + 3^{2x}$, $x < -1$, es creciente. (1.0 punto)
- c) Si f es una función decreciente con dominio $[-2; 3]$ entonces su rango es $Ran(f) = [f(3); f(-2)]$. (1.0 punto)

$$f \quad -2 < 3$$

$$f(-2) > f(3)$$

San Miguel, 30 de mayo de 2024.



Año

Número

Práctica

2024

1028

Código de alumno

Gastebo Marchán Juan Antonio

Apellidos y nombres del alumno (letra imprenta)

Firma del alumno

Curso: FUCAL

Práctica N°:

3

Horario de práctica:

102

Fecha:

30/05/24

Nombre del profesor:

R. Ramos

Nota

20

Número entero

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido:
(iniciales)

A. C.

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - redacción, claridad de expresión, corrección gramatical, ortografía y puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$x \neq d \\ x \neq -d$$

$$y + \frac{1}{4}$$

$$\frac{5-17}{1-4} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$bc > ad$$

$$-17 > -20$$

(

$$\frac{15+2}{5} = 3$$

$$3,4$$

$$(5,8)$$

1) $f(x) = \frac{ax+b}{x+d} \rightarrow$ Pasa por el (1; 4)

a) $\text{AV: } x = -d \rightarrow \text{AV: } x = 4 \rightarrow 4 = -d \rightarrow d = -4$
 $\text{AH: } y = a \rightarrow \text{AH: } y = 5 \rightarrow a = 5$

$$F(x) = \frac{5x+b}{x-4}, x \neq 4$$

$$f(1) = \frac{5(1)+b}{1-4} = 4$$

$$\frac{5+b}{-3} = 4$$

$$5+b = -12$$

$$b = -17 \uparrow y$$

b)

$$f(x) = \frac{5x-17}{x-4}, x \neq 4$$

$$\text{AV: } x = 4$$

$$\text{AH: } y = 5$$

$$F(0) = \frac{5(0)-17}{0-4} = \frac{17}{4}$$

Intercepto eje y

$$(0; \frac{17}{4})$$

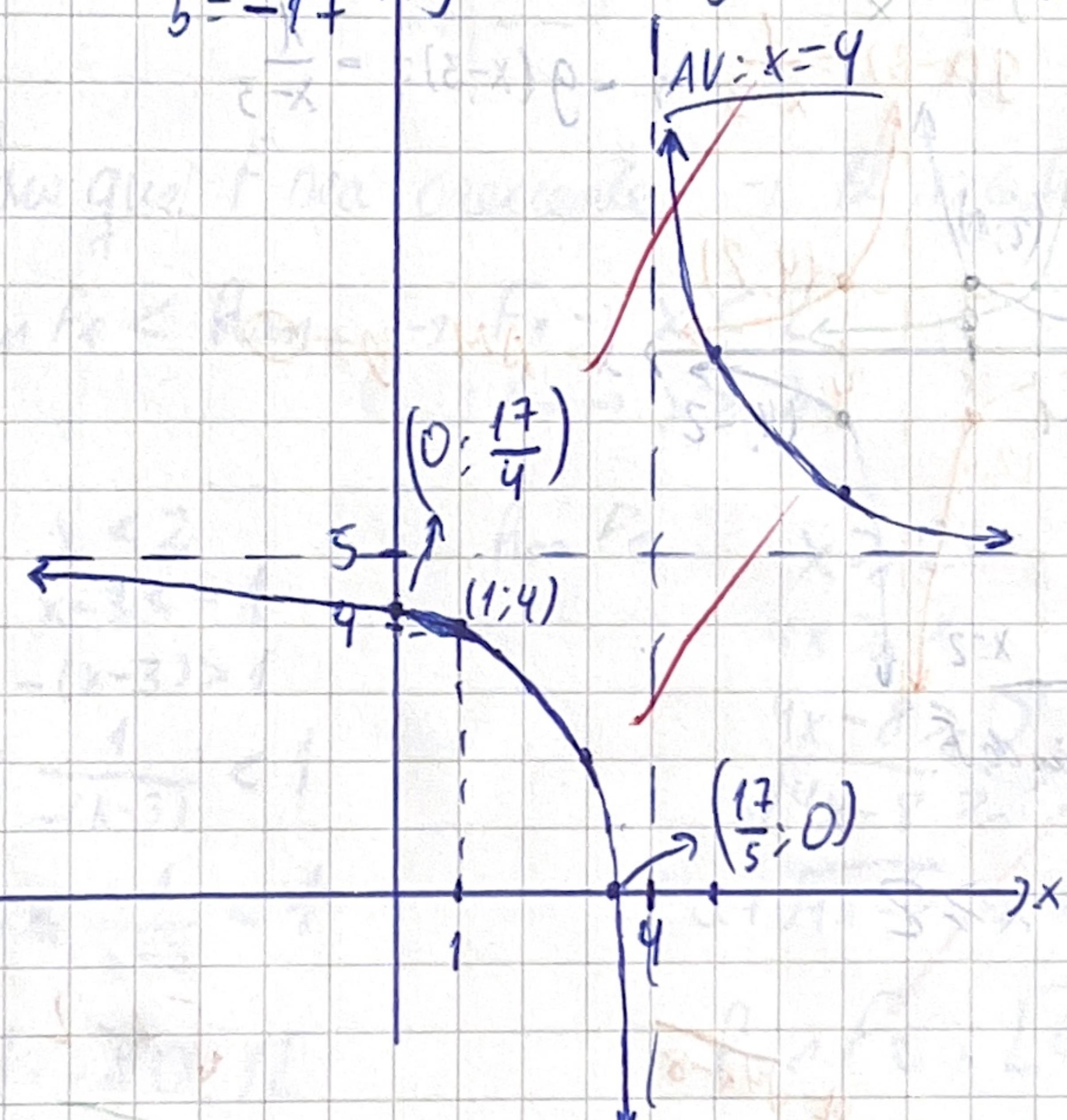
Intercepto eje x

$$\frac{5x-17}{x-4} = 0; x \neq 4$$

$$5x-17=0$$

$$x = \frac{17}{5}$$

$$(\frac{17}{5}; 0)$$



2/2

c) Para que f sea decreciente

Para todo $a, b \in \text{Dom } f \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$a < b \rightarrow F(a) > F(b)$$

Si $a = 1$
 $b = 5$

$$\rightarrow a < b$$

$$1 < 5$$

$$F(1) = \frac{5-17}{1-4} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$F(5) = \frac{25-17}{5-4} = 8$$

$$F(1) > F(5)$$

$$4 > 8$$

1/1

No se cumple que $F(a) > F(b)$ Para todo $a < b$ donde $a, b \in \text{Dom } F$

F no es decreciente

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

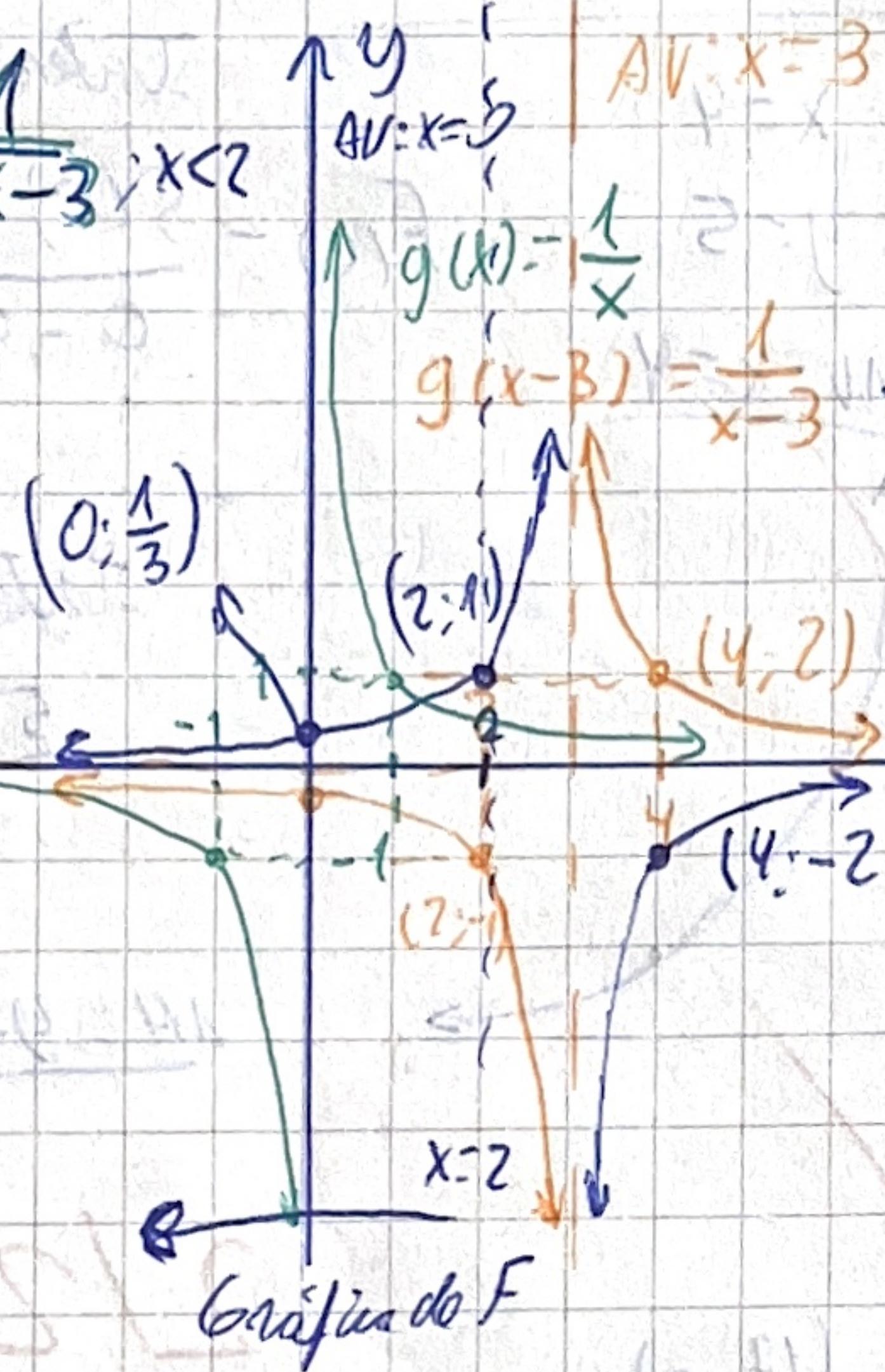
2:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-3} & ; x < 2 \\ a + \sqrt{4x-8} & ; x \geq 2 \end{cases}$$

a) $a = -4$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-3} & ; x < 2 \\ -4 + \sqrt{4x-8} & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{x-3} ; x < 2$$



$$f_2(x) = -4 + \sqrt{4x-8} ; x \geq 2$$

$$\sqrt{4x-8} - 4 = 0$$

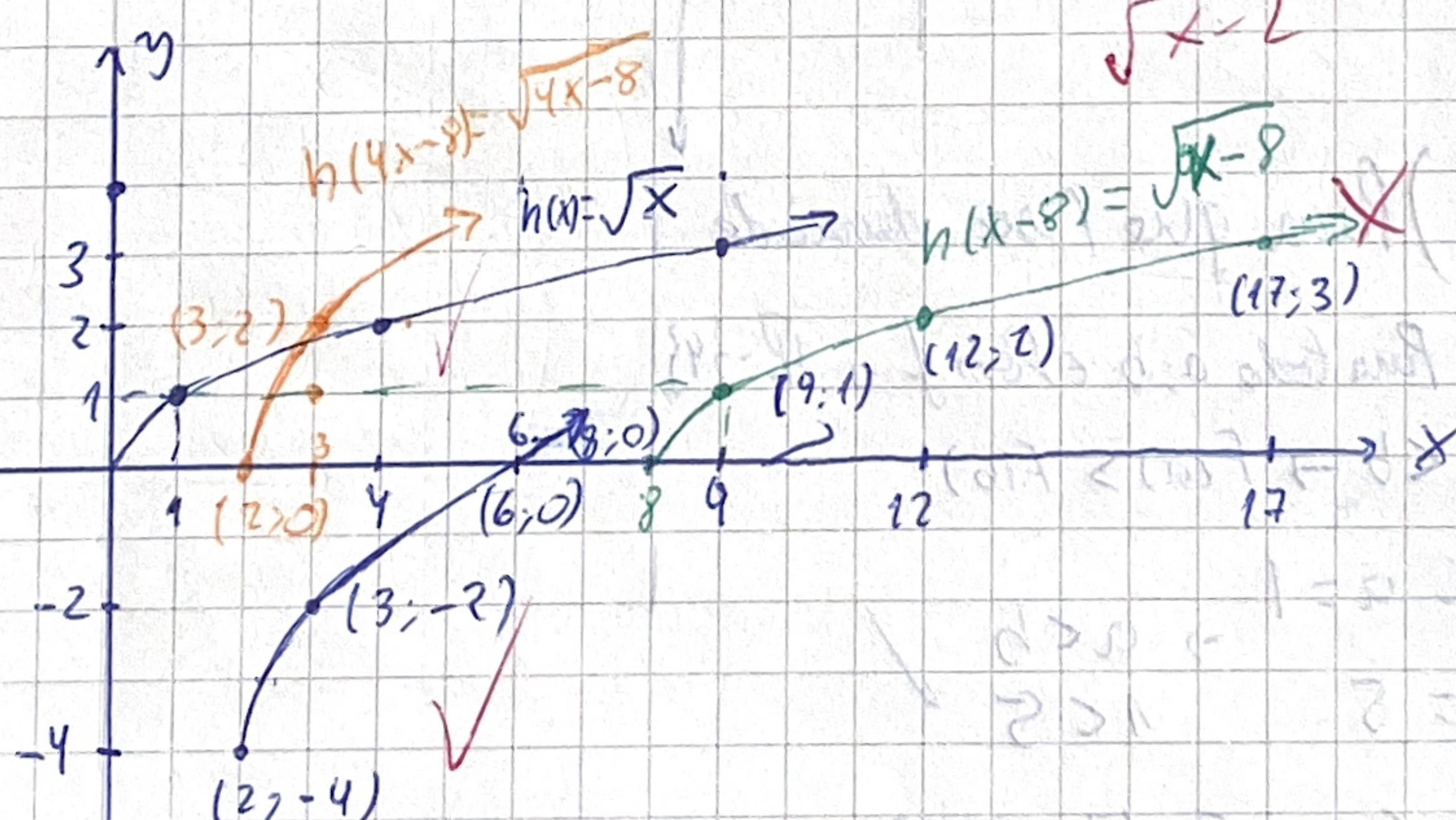
$$\sqrt{4x-8} = 4$$

$$4x-8 = 16$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

$$(6, 0)$$



$$\sqrt{x-2}$$

$$\frac{17}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4}$$

Presente aquí su trabajo

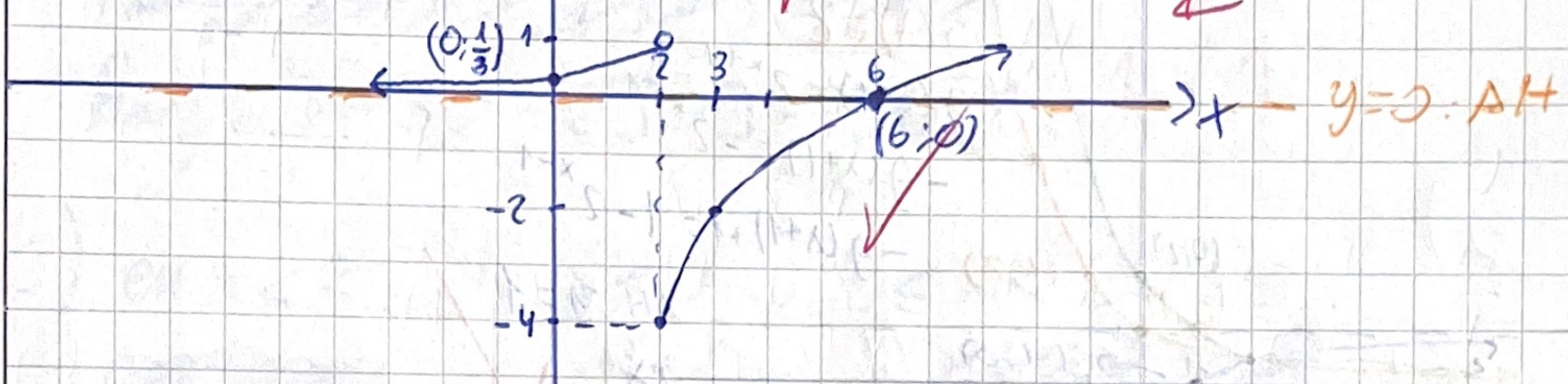
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

a)

Interceptos:

$$\text{Eje } y: (0; \frac{1}{3})$$

$$\text{Eje } x: (6; 0)$$



c) Para que F sea creciente $\rightarrow a, b \in \text{Dom } f \rightarrow a < b \rightarrow F(a) < F(b)$

$$\text{Para } F_1 < \text{Para } F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow x < 2$$

$$F_2 \rightarrow x > 2$$

Punto f.

$$x < 2$$

$$x-3 < -1$$

$$-(x-3) > 1$$

$$0 < \frac{1}{-(x-3)} < 1$$

$$0 < \frac{-1}{x-3} < 1$$

$$\text{Para } f_1: [0; 1]$$

$$\text{Para } F_2$$

$$x > 2$$

$$4x > 8$$

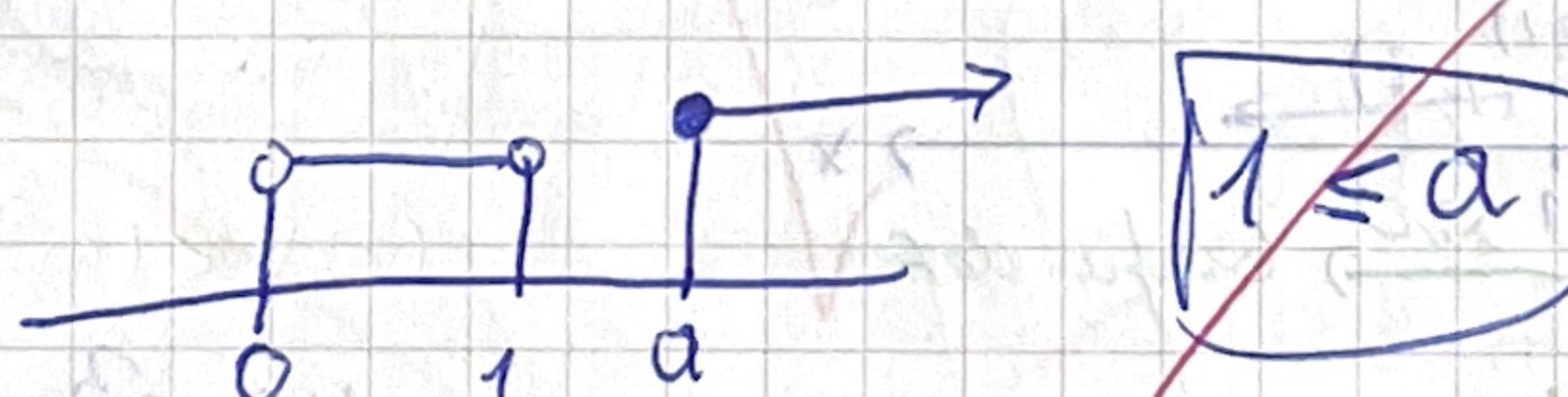
$$4x - 8 > 0$$

$$\sqrt{4x-8} \geq 0$$

$$\alpha + \sqrt{4x-8} > \alpha$$

$$\text{Para } F_2: [\alpha; +\infty]$$

Para que F sea creciente $\rightarrow \text{Para } F_1 < \text{Para } F_2$



Para que F sea creciente; $\alpha > 1$

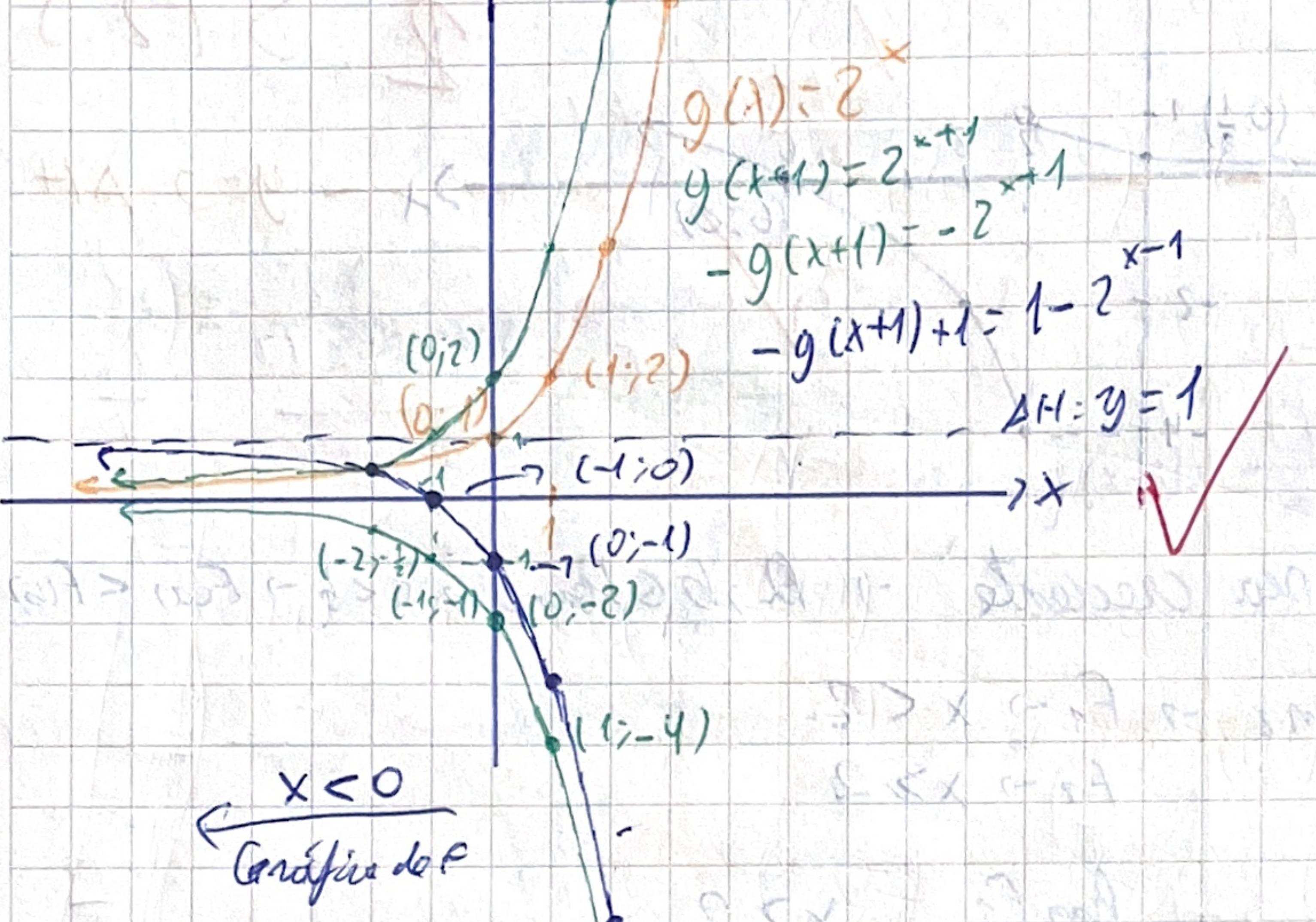
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

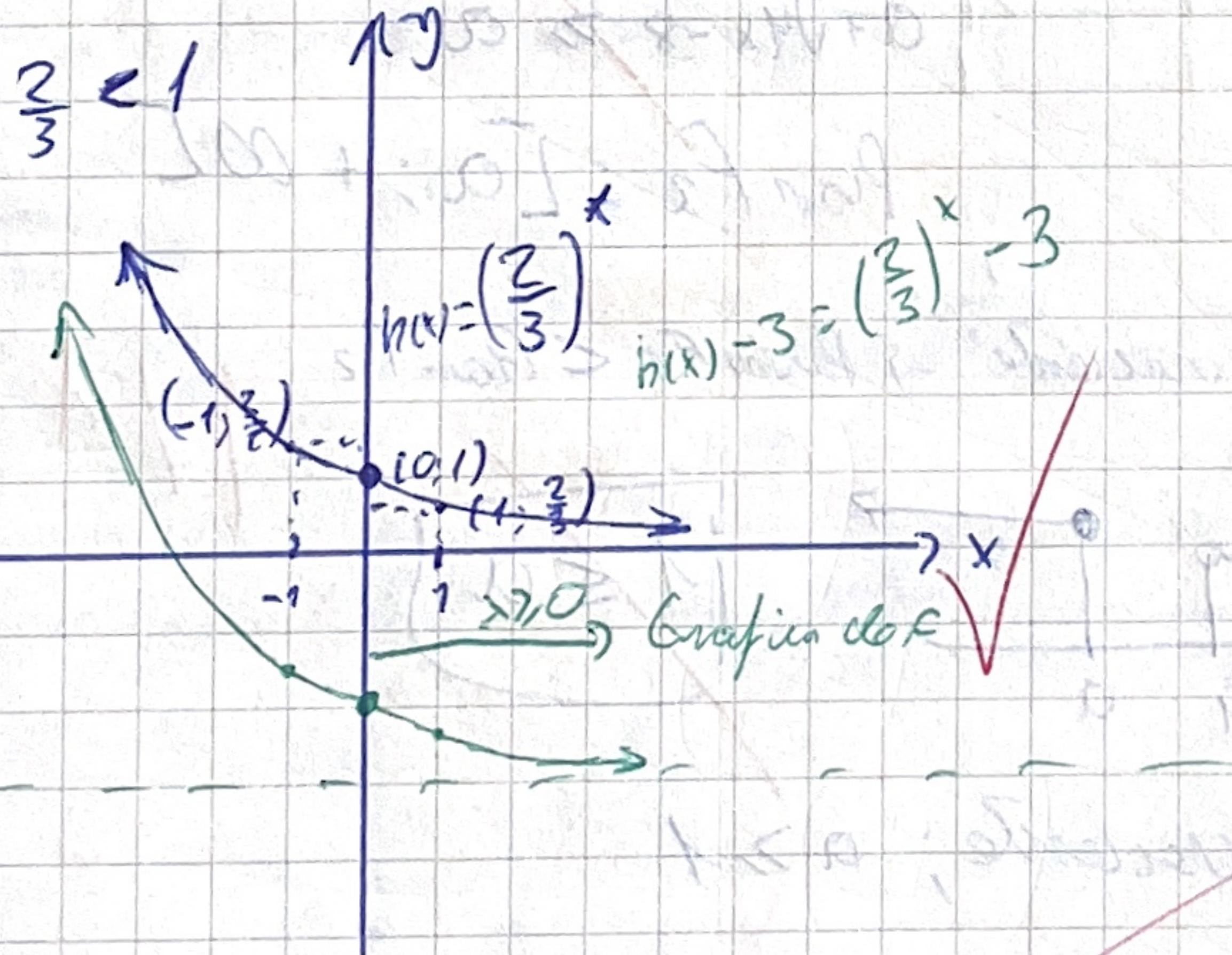
3r

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 - 2^{x+1}, & x < 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_1(x) = 1 - 2^{x+1} \quad x < 0$$



$$f_2(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 : x \geq 0$$



$$\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

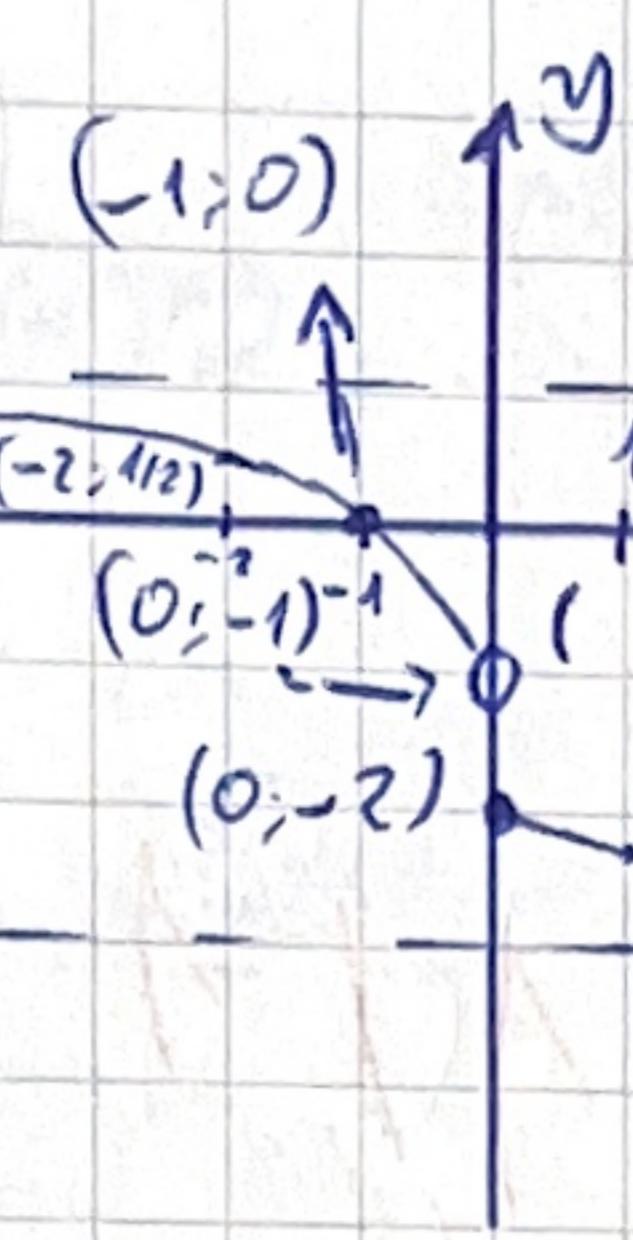
$$(-2)^{-x+1}$$

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$3 = \frac{27}{9}$$

$$4 - 27$$

$$- \frac{23}{9}$$



$$AH: y = 1$$

Interceptos:

$$\text{Eje } y: (0; 1)$$

$$\text{OP: } (0; -2)$$

$$\text{Eje } x:$$

$$(-1; 0)$$

$$AH: y = -3$$

~~b) $f(x) = 2^x + 1$~~

$$\text{Ranf: }]-3; -2] \cup]-1; 1[$$

$$c) \text{ en } x < 2 \rightarrow x < 0 \vee 0 < x < 2$$

~~F_1~~

$$x+1 < 1$$

~~F_2~~

~~$x+1 < 3$~~

$$0 < 2^{x+1} < 2$$

~~F_3~~

$$0 > -2^{x+1} > -2$$

~~F_4~~

$$1 > 1 - 2^{x+1} > -1$$

$$\text{Ranf: }]-1; 1[$$

$$1 \geq \left(\frac{2}{3}\right)^x \Rightarrow \frac{4}{9}$$

$$-2 \geq \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 \Rightarrow \frac{4}{9} - 3$$

$$\text{Ranf: }]-\frac{23}{9}; -2[$$

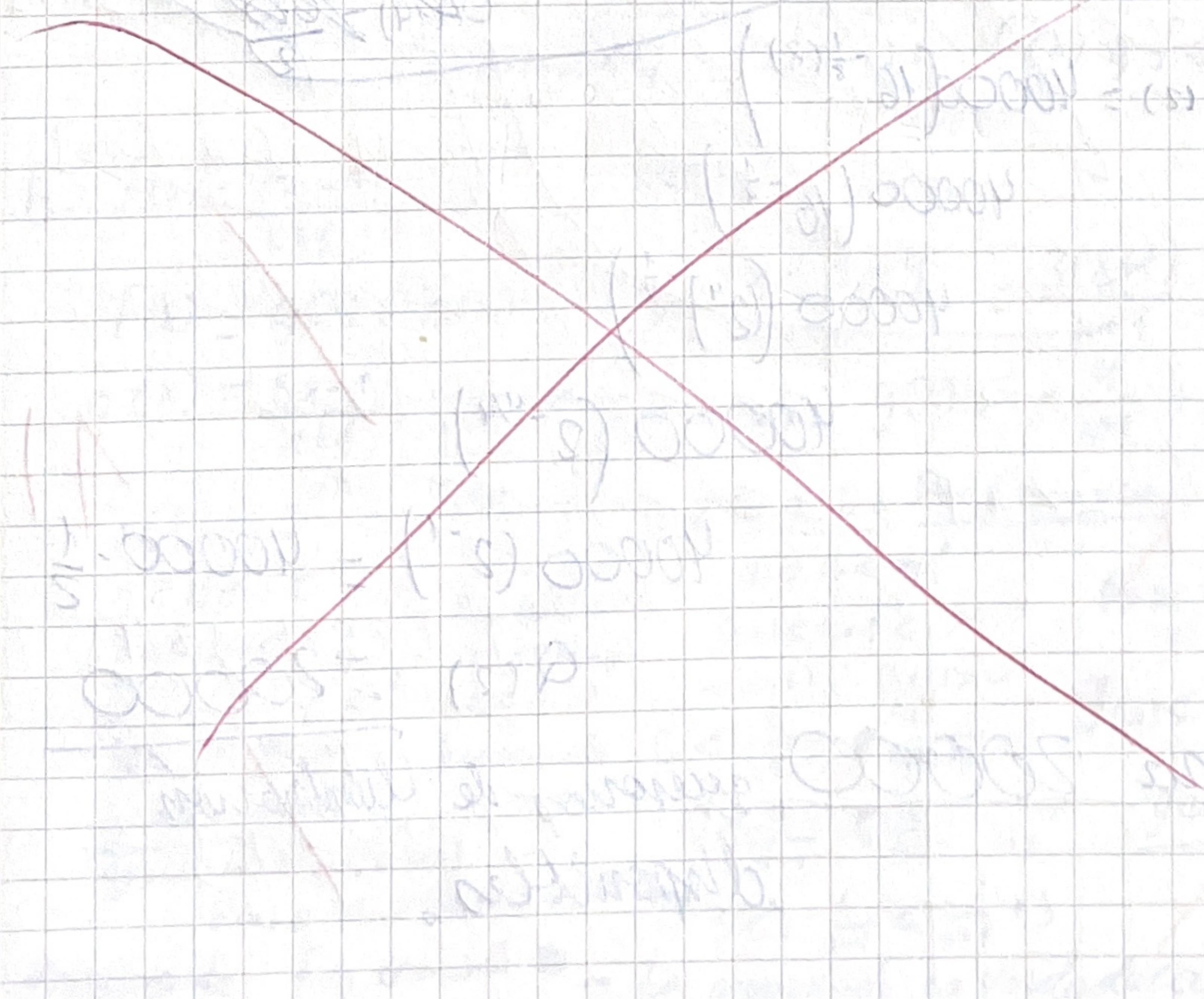
Para que sea decreciente en $x < 2$

~~$F_1 > F_2$~~

$$\begin{array}{c} F_2 \\ \hline -\frac{23}{9} & -2 & -1 & 1 \end{array}$$

Se amplia, F es decreciente

$$\text{en }]-\infty; 2[$$



Presente aquí su trabajo

$$4: \text{a)} Q(t) = K(16^{-\frac{1}{8}t}), \quad t \geq 0$$

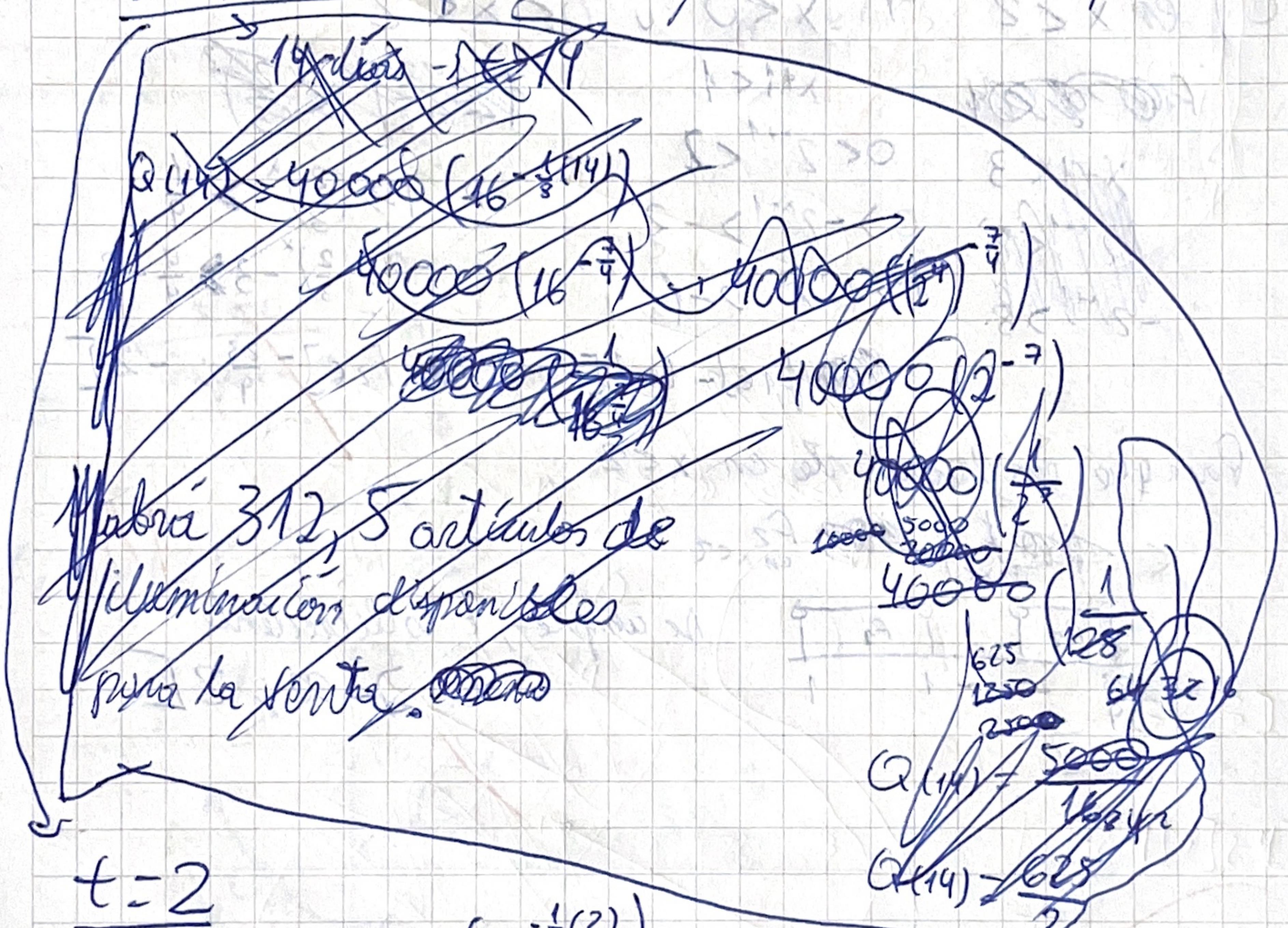
$$Q(10) = 40000 = K \cdot 16^{-\frac{1}{3}(10)}$$

$$40000 = k - 1$$

$$\underline{K = 4000 \text{ P}}$$

$$Q(t) = 40000 \left(16 - \frac{1}{8}t \right), \quad t \geq 0$$

b) Tres reuniones después del lanzamiento de la campaña



$$t=2$$

$$Q_{12} = 4000 \alpha \left(16^{-\frac{1}{8}} (2) \right)$$

$$400000 \left(16^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$40000 \left((2^4)^{-\frac{1}{4}} \right)$$

$$400000 \left(2^{-\frac{4}{d}}\right)$$

$$40000 \cdot (2^{-1}) = 40000 \cdot \frac{1}{2}$$

$$Q(2) = 20000$$

fabrizó 20000 accesorios de iluminación disponibles.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\begin{array}{r} \underline{4000001128} \\ 384 \quad \quad \quad 312, \\ \hline 160 \\ 320 \\ 256 \\ \hline \end{array}$$

128-3 (120 +8) 3

$$0.125 \times 8 = 1.00$$

$$\begin{array}{r} \underline{125} \\ \times 842 \\ \hline 1000 \\ 1000 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$\frac{14}{8} \geq \frac{7}{1}$$

$$2^5 = 32$$

64

128

625) 2
05 312,5

$$0,125(w+4)$$

$$1,25 + 0,5$$

1,75

16

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)^2 \quad \frac{1}{16}$$

C) Inicial = 40000

$$\frac{1}{4} \text{ parte} = \frac{40000}{4} = 10000$$

$$Q(t) = 10000 \cdot 40000 \phi(16^{-\frac{1}{8}t})$$

$$\frac{1}{4} = 16^{-\frac{t}{8}}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\right)^{-\frac{t}{8}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4^{\frac{2t}{8}}}$$

$$1 = \frac{t}{4}$$

$$4 = t$$

La siguiente compañía se someterá a los 4 desarrollos al inicio.

Si $f(x) = 3x^2(e^x - e^{-x})$, $-1 < x < 1 \rightarrow$ Domínio numérico

a) $-f(-x) = -(3(-x)^2(e^{-x} - e^{-(x)}))$, $-1 < x < 1$

$$-f(-x) = -3x^2(e^{-x} - e^x)$$
, $-1 < x < 1$

de proposición $-f(-x) = 3x^2(e^x - e^{-x})$, $-1 < x < 1$

es Verdadera

$$f(x)$$

$-f(-x) = f(x) \rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ f(x) impar

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x+1} + 3^{2x}$; $x < -1$

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow \frac{3x+3-4}{x+1} = \frac{3(x+1)}{x+1} - \frac{4}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{3x-1}{x+1}; x < -1 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow g(x) = -\frac{4}{x+1} + 3; x < -1$$

$$h(x) = 3^{2x}; x < -1 \Rightarrow$$
 Acum a, b \in Dom f tales que:

$$a < b < -1$$

$$2a < 2b < -2$$

$$3^{2a} < 3^{2b} < 3^{-2}$$

$$h(a) < h(b)$$

$$g(a) < g(b)$$

$$g(a) + h(a) < g(b) + h(b)$$

$$f(a) < f(b)$$

$$\text{F(x) creciente}$$

$$\text{Para todo } a < b$$

$$a, b \in \text{Dom } f$$

$$h(a) < h(b)$$

$$\text{h es creciente}$$

$$g(a) < g(b)$$

$$g(a) + h(a) < g(b) + h(b)$$

$$f(a) < f(b)$$

$$\text{F(x) creciente}$$

$$a < b < -1$$

$$a+1 < b+1 < 0$$

$$-(a+1) > - (b+1) > 0$$

$$0 < \frac{1}{-(a+1)} < \frac{1}{-(b+1)}$$

$$0 < -\frac{4}{a+1} < -\frac{4}{b+1}$$

$$\text{g es creciente}$$

$$g(a) < g(b)$$

$$g(a) + h(a) < g(b) + h(b)$$

$$f(a) < f(b)$$

$$\text{F(x) creciente}$$

$$\text{Para todo } a < b$$

$$a, b \in \text{Dom } f$$

$$g(a) < g(b)$$

$$\text{g es creciente}$$

$$f(a) < f(b)$$

$$\text{F(x) creciente}$$

$$f(a) < f(b)$$

$$\text{F(x) creciente}$$

$$f(a) < f(b)$$

$$\text{F(x) creciente}$$

F(x) creciente \rightarrow la proposición es Verdadera

Presente aquí su trabajo

c) f es decreciente: ~~para todo $a < b$ es $f(a) > f(b)$~~

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

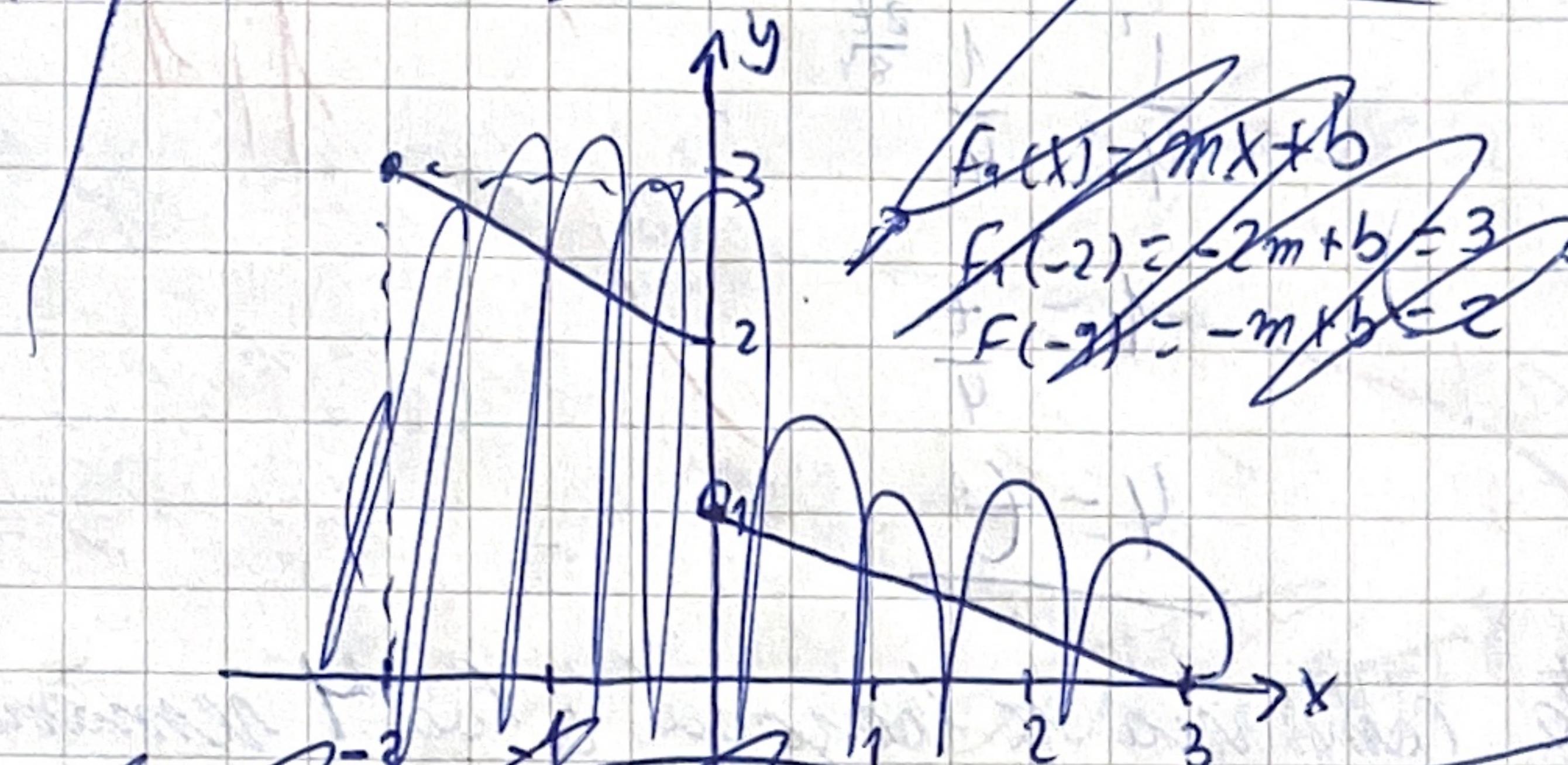
$$-2 \leq x \leq 3$$

$$f(-3) > f(0) > f(3)$$

$$\text{Dom } f: [F(-3), F(3)]$$

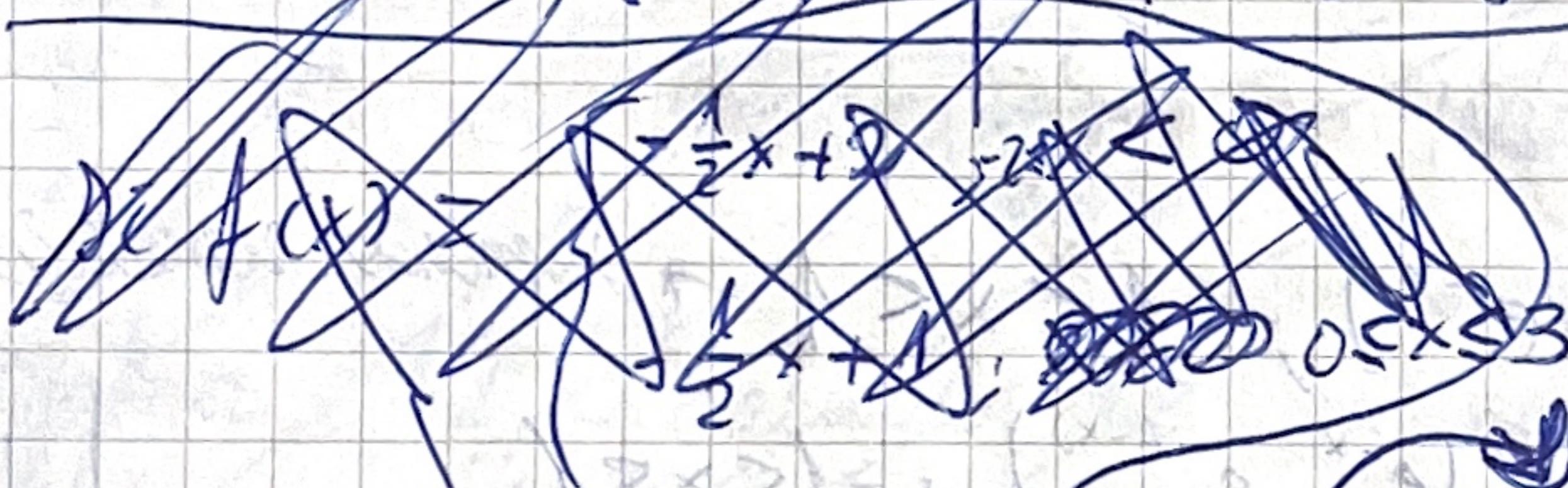
$$f(3) \leq f(x) \geq f(-3)$$

la proposición es Verdadera



$$\begin{aligned} f(x) &= mx + b \\ f(-2) &= -2m + b = -3 \\ f(-3) &= -m + b = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 + 2m &= -2 \\ m &= -1 \\ -m + b &= -2 \\ b &= -1 \end{aligned}$$



f es decreciente con domino $[-2; 3]$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 1 &= -2 \\ 3 &= \frac{1}{2}x \\ 6 &= x \end{aligned}$$

$$\text{Dom } f: [-2; 1] \cup [2; 4]$$

\neq

$$\text{Dom } f: [F(3); F(2)]$$

la proposición es

$$\text{D: } f(x) = \begin{cases} -x+2 & ; -2 \leq x < 0 \\ -x+1 & ; 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \text{falsa}$$

✓ 1/1

$$\text{Dom } f: [-2; 1] \cup [2; 4]$$

\neq

$$[F(3); F(-2)]$$

