

Primer examen

Año	Número
2023	3720

Código de alumno

Ayay Curo Juan Carlos

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Juan Carlos A

Firma del alumno

Curso: AM6A

Horario: H-105

Fecha: 09/10/2023

Nombre del profesor: H. Llanos

Nota
20

H. Llanos

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Horarios: **TODOS**

Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Tome las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos; de tener alguna emergencia, comuníquese a su jefe de práctica.
- Para retirarse del aula y dar por concluida su evaluación, deberá haber transcurrido al menos la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- Puede usar calculadora no programable ni gráfica.
- No puede usar apuntes de clase ni libros.
- El examen consta de 5 preguntas. Debe justificar sus respuestas.
- Puede responder las preguntas en el orden que desee, sólo indique la pregunta que está resolviendo en la parte superior derecha de la hoja.

Pregunta 1

La curva \mathcal{C} tiene ecuación

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - K = 0.$$

- a) Halle las ecuaciones de rotación que permiten identificar la curva y transforme la ecuación de modo que no tenga término mixto en el nuevo sistema de coordenadas UV . 1,5 puntos
- b) Si $K = 0$, ¿qué representa la ecuación de la curva \mathcal{C} ? 0,5 punto
- c) Si se sabe que la gráfica de \mathcal{C} es una elipse, cuyo eje mayor mide 4 unidades, determine las coordenadas de los focos de \mathcal{C} en el sistema XY . 2 puntos

Pregunta 2

En la Figura 1 se muestra la recta \mathcal{L} , la circunferencia \mathcal{C} y la elipse \mathcal{E} .

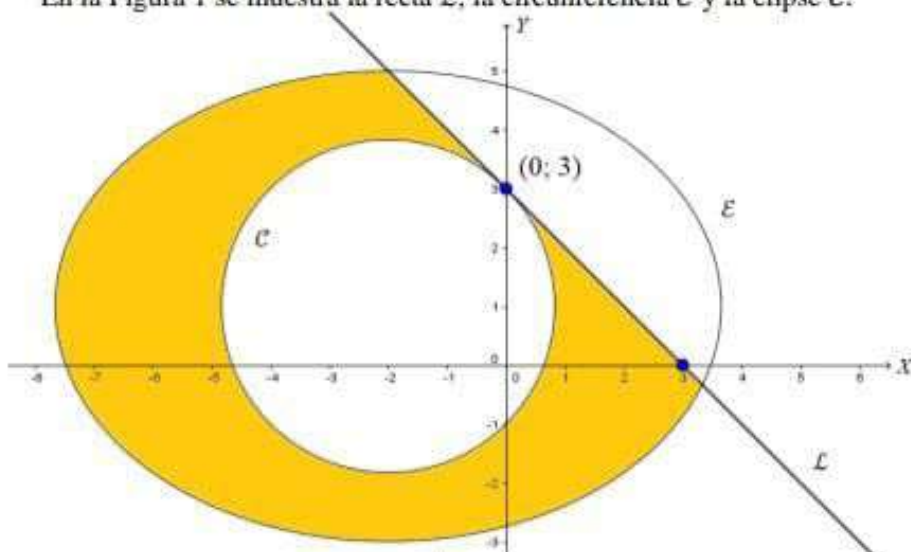


Figura 1

- El radio de \mathcal{C} es $2\sqrt{2}$.
- La recta \mathcal{L} pasa por $(3; 0)$ y es tangente a \mathcal{C} en $(0; 3)$.
- El centro de \mathcal{E} coincide con el centro de \mathcal{C} .
- El punto $(-6; 1)$ es un foco de \mathcal{E} .
- La longitud del eje menor de \mathcal{E} es 8 unidades.

- a) Halle las ecuaciones de \mathcal{L} , \mathcal{C} y \mathcal{E} . 3 puntos
- b) Describa la región sombreada con un sistema de inecuaciones (considere también la frontera). 1 punto

Pregunta 3

Sobre la parábola \mathcal{P} y la hipérbola \mathcal{H} se sabe lo siguiente:

- La recta $y = 6$ es la directriz de \mathcal{P} .
- La recta $\mathcal{L}_1: x - 3y - 2 = 0$ pasa por el foco de \mathcal{P} .
- La recta $\mathcal{L}_2: x - 3y + 4 = 0$ pasa por el vértice de \mathcal{P} y por uno de los focos de \mathcal{H} .
- Los extremos del lado recto de \mathcal{P} son los vértices de \mathcal{H} .

- a) Halle la ecuación de la parábola \mathcal{P} . 2 puntos
- b) Halle la ecuación de la hipérbola \mathcal{H} . 2 puntos

Pregunta 4

Considere la recta $L: y = -2$ y el punto $A(1; 4)$.

- a) Halle una ecuación del lugar geométrico que describen los puntos $P(x; y)$ del plano tales que su distancia al punto A es el doble de su distancia a la recta L . 1,5 puntos
- b) Identifique el lugar geométrico hallado en a) y esboce su gráfica. 2,5 puntos

Pregunta 5

- a) Considere los vectores $\vec{a} = (-4; 3)$, $\vec{b} = (3; 4)$ y $\vec{c} = (4; 2)$.
Halle el vector \vec{u} que satisface la ecuación siguiente:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + 5\vec{c} = \|\vec{b}\| \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

1 punto

- b) En la Figura 2 se muestra un paralelepípedo $ABCDEFGH$.

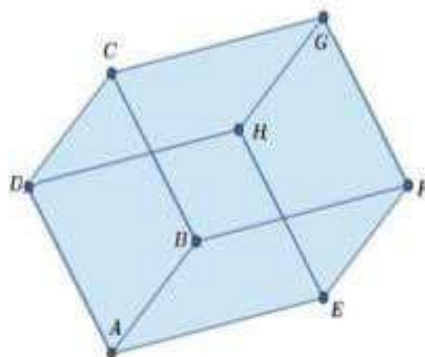


Figura 2

Se sabe que

- Los vértices $B(0; m; 1)$ y $E(1; -2; m)$, con $m > 0$, definen al vector \vec{EB} , tal que $\|\vec{EB}\| = \sqrt{66}$.
- Las coordenadas del vértice A son $(1; 1; 1)$ y el módulo de \vec{BC} es $2\sqrt{38}$.
- El vector \vec{AD} es paralelo y tiene el mismo sentido que el vector $(2; 3; 5)$.

- b1) Halle el valor de m . 0,5 puntos
- b2) Halle los vectores \vec{AB} , \vec{AD} y \vec{EA} . 2 puntos
- b3) Expresé el vector \vec{EC} como suma o resta de los vectores \vec{AB} , \vec{AD} y \vec{EA} . 0,5 puntos

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

1

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - K = 0$$

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{12}{17-8}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{12}{9}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{4}{3}$$

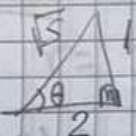
$$3\operatorname{tg}\theta = 2 - 2\operatorname{tg}^2\theta$$

$$2\operatorname{tg}^2\theta + 3\operatorname{tg}\theta - 2 = 0$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{-1}{2}$$

$$2\operatorname{tg}\theta - 1 = 0 ; \operatorname{tg}\theta - 2 = 0$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2} ; \operatorname{tg}\theta = -2$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cos}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} x &= u \operatorname{cos}\theta - v \operatorname{sen}\theta \\ y &= u \operatorname{sen}\theta + v \operatorname{cos}\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x \operatorname{cos}\theta + v \operatorname{sen}\theta \\ v &= -x \operatorname{sen}\theta + v \operatorname{cos}\theta \end{aligned}$$

$$x = u \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - v \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y = u \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + v \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2u - v)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(u + 2v)$$

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - K = 0$$

$$x^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2u - v) \right]^2$$

$$xy = \frac{1}{\sqrt{5}}(2u - v) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(u + 2v)$$

$$x^2 = \frac{1}{5}(4u^2 - 4uv + v^2)$$

$$xy = \frac{1}{5}(2u^2 + 3uv - 2v^2)$$

$$y^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(u + 2v) \right]^2$$

$$y^2 = \frac{1}{5}(u^2 + 4uv + 4v^2)$$

$$\Rightarrow 17 \cdot \frac{1}{5}(4u^2 - 4uv + v^2) + 12 \cdot \frac{1}{5}(2u^2 + 3uv - 2v^2) + 8 \cdot \frac{1}{5}(u^2 + 4uv + 4v^2) - K = 0$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$-K=0$$

$$168V^2 - 68UV + 17V^2 + 24V + 36VV - 24V + 8V + 32VV + 32V$$

5

$$100V^2 + 25V^2 - K = 0$$

$$20V^2 + 5V^2 - K = 0$$

$$20V^2 + 5V^2 = K$$

$$\frac{V^2}{\left(\frac{K}{20}\right)} + \frac{V^2}{\left(\frac{K}{5}\right)} = 1$$

a) 1.5

b)

$$20V^2 + 5V^2 = K ; K=0$$

$$20V^2 + 5V^2 = 0$$

$$4V^2 + V^2 = 0$$

$$V=0 ; V=0$$

$$P(0;0)$$

b) 0.5

Repta: Representa un punto

c) 2.0

$$\frac{V^2}{\left(\frac{K}{5}\right)} + \frac{V^2}{\frac{K}{20}} = 1 \quad C(0,0)$$

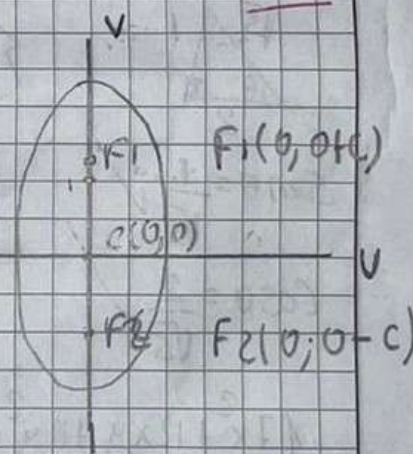
$$2a=4$$

$$a=2$$

$$a^2=4=\frac{K}{5}$$

$$20=K$$

$$\frac{V^2}{4} + \frac{V^2}{1} = 1$$



$$b^2 = \frac{K}{20}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$4 = 1 + c^2$$

$$b^2 = 1$$

$$b=1$$

$$\sqrt{3} = c$$

$$F_1(0; \sqrt{3})$$

$$F_2(0; -\sqrt{3})$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}(2U - V)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(U + 2V)$$

F1:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}[2(0) - \sqrt{3}]$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 + 2\sqrt{3})$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) \text{ en } xy$$

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

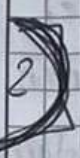
Presente aquí su trabajo

$$F_2: X = \frac{1}{\sqrt{5}} [2(0) - (-\sqrt{3})] \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}} [0 + 2(-\sqrt{3})]$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}; -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \text{ en } Xy$$



a) En la recta L :

$$P_1(0;3)$$

$$P_2(3;0)$$

$$m = \frac{3-0}{0-3}$$

$$m = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 3)$$

$$y = -x + 3$$

①

En la circunferencia C

$$r = 2\sqrt{2}$$

Centro $(h;k)$

Por el punto de tangencia pasa la recta perpendicular
 L que a su vez pasa por el centro

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$P(0;3)$$

$$m_2 \cdot (-1) = -1$$

$$m_2 = 1$$

$$2\sqrt{2} = \frac{|y + x - 3|}{\sqrt{2}}$$

$$L: y - 3 = x$$

$$4 = |h + k - 3|$$

$$C(h,k)$$

$$y = x + 3$$

$$4 = h + k - 3 \quad ; \quad -4 = h + k - 3$$

$$k = h + 3$$

$$7 = h + k \quad -1 = h + k$$

$$h < 0$$

$$7 = h + h + 3$$

$$-1 = h + h + 3$$

$$4 = 2h$$

$$-4 = 2h$$

$$2 = h \quad ; \quad k = 5$$

$$-2 = h \quad , \quad k = 1$$

además

$$h < 0$$

por el gráfico se descarta

$$C(-2;1)$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$C: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8 \quad (2)$$

En la Elipse E

$$C(-2, 1) \quad F(-6, 1)$$

$$2b = 8$$

$$b = 4$$

$$|d(C; F)| = c$$

$$|-2 - (-6)| = c$$

$$4 = c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 16 + 16$$

$$a^2 = 32$$

Observación:

El foco y el

Centro tienen

misma ordenado

por ende el eje

focal es paralelo

al eje x.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$E: \frac{(x+2)^2}{32} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1 \quad (3)$$

b En la elipse punto de prueba C(-2, 1)

$$\frac{(-2+2)^2}{32} + \frac{(1-1)^2}{16} \boxed{=} 1$$

$$0 \leq 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{32} + \frac{(y-1)^2}{16} \leq 1$$

En la Circunferencia: punto de prueba P(2; 0)

$$(2+2)^2 + (0-1)^2 \boxed{=} 8$$

$$17 \boxed{\geq} 8$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 8$$

En la recta L punto de prueba (0, 0)

$$0 \boxed{=} -(0) + 3$$

$$0 \leq 3$$

$$y \leq -x + 3$$

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

Región $\begin{cases} y \leq -x+3 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 8 \\ \frac{(x+2)^2}{32} + \frac{(y-1)^2}{16} \leq 1 \end{cases}$

b) 1,0

3) $f(m, \frac{m-2}{3})$
 $v(a; \frac{a+4}{3})$

Recta directriz horizontal

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$m=a$

punto de intersección de la recta
directriz con el eje focal

$P(a; 6)$

Por punto medio hallando vértice

$$V(\frac{m+a}{2}; \frac{m-2}{3} + 6) = V(a; \frac{a+4}{3})$$

$m=a$

$$V(a; \frac{a+16}{3}) = V(a; \frac{a+4}{3})$$

$$\frac{a+16}{3} = \frac{a+4}{3}$$

$$a+16 = a+4$$

$$8 = a$$

$m=8$

$F(8; 2)$

$V(8; 4)$

$d(V, F) = 4 - 2$

$|PF| = -2$

$P = -2$

$P_1(8-4; 2)$

$P_2(8+4; 2)$

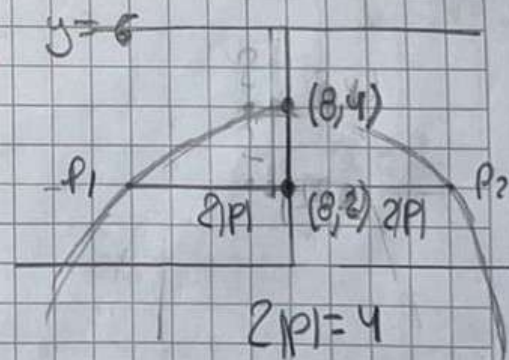
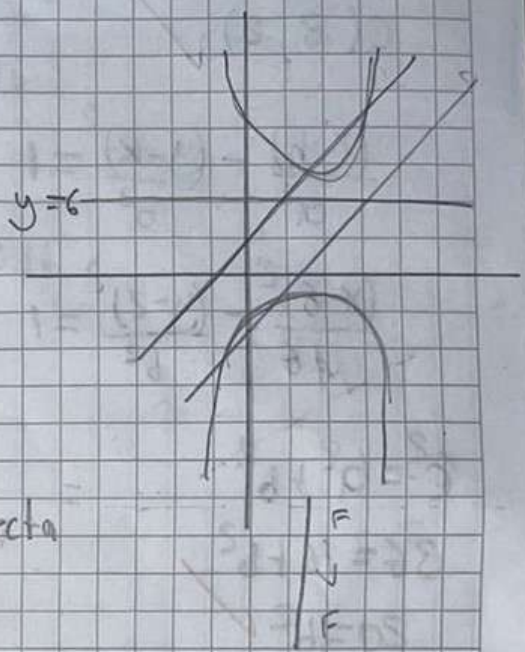
$P_1(4; 2)$

$P_2(12; 2)$

a)

$P: (x-8)^2 = -8(y-4)$

a) 2,0



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

b) Hipérbola \mathcal{H}

$$F(m, m+\frac{4}{3})$$

$$V_1(12; 2), V_2(4; 2)$$

$$C(\frac{12+4}{2}; \frac{2+2}{2})$$

$$|d(C, V)| = a$$

$$C(8, 2)$$

$$|8-12| = a$$

$$4 = a$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$F(8-a; 2)$$

$$F(8+a; 2)$$

$$\frac{(x-8)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{L}_2: x-3y+4=0$$

$$8-a-3(2)+4=0$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$8-a=2$$

$$36 = 16 + b^2$$

$$16 = c$$

$$20 = b^2$$

$$b = 2.0$$

$$c > a$$

$$c > 4$$

$$\mathcal{H}: \frac{(x-8)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

$$C(8-3(2)+4=0)$$

$$C=-6$$

X

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

4)

$$d(P, A) = 2 d(P, L)$$

$$P(x, y) \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = 2 \frac{|y+4|}{\sqrt{1}}$$

$$\Rightarrow 1.5$$

a)

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 4(y^2 + 4y + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 4y^2 + 16y + 16$$

$$x^2 - 2x - 3y^2 - 24y + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3(y^2 + 8y + 16) = -3 \cdot 16$$

$$(x-1)^2 - 3(y+4)^2 = -48$$

$$3(y+4)^2 - (x-1)^2 = 48$$

$$\frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{48} = 1$$

b)

$$\frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{48} = 1$$

Hiperbola

$$C(1, -4)$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4$$

$$b^2 = 48$$

$$b = 4\sqrt{3}$$

$$c^2 = 64$$

$$c = 8$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{4\sqrt{3}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$F_1(1, -4+8)$$

$$F_2(1, -4-8)$$

$$F_1(1, 4)$$

$$F_2(1, -12)$$

$$V_1(1, -4+4)$$

$$V_2(1, -4-4)$$

$$V_1(1, 0)$$

$$V_2(1, -8)$$

Asintotas

$$y+4 = \pm \frac{a}{b} (x-1)$$

$$L_1: y+4 = \frac{1}{\sqrt{3}} (x-1)$$

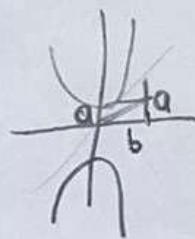
$$y+4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} (x-1)$$

$$B_1(1+4\sqrt{3}, -4)$$

$$B_2(1-4\sqrt{3}, -4)$$

$$C_1(1, -4)$$

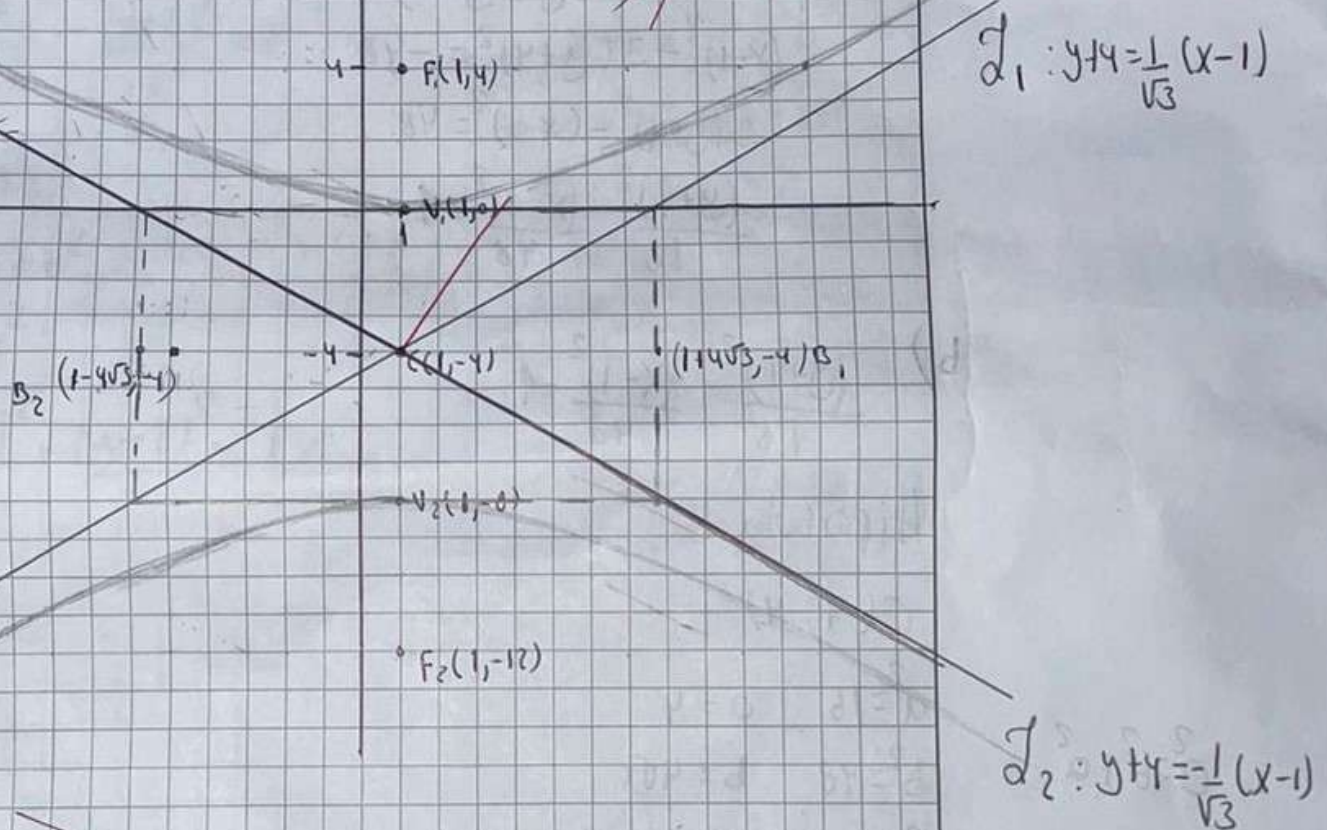
$$L_2:$$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

b) 2.5



Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

5) a) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} + 5 \vec{c} = \frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}$ $\vec{a} = (-4; 3)$
 $(-12; 12) \vec{a} + (20; 10) = 5 \vec{a} - (\frac{3}{2}; 2)$ $\vec{b} = (3; 4)$
 $(20; 10) + (\frac{3}{2}; 2) = 5 \vec{a}$ $\vec{c} = (4; 2)$
 $(\frac{43}{2}; 12) = 5 \vec{a}$
 $(\frac{43}{10}; \frac{12}{5}) = \vec{a}$ \checkmark $\Rightarrow 1, 0$

b) $\vec{EB} = B - E = (-1; m+2; 1-m)$

$\|\vec{EB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (m+2)^2 + (1-m)^2} = \sqrt{66}$

$1 + m^2 + 4m + 4 + 1 - 2m + m^2 = 66$

$2m^2 + 2m = 60$

$m^2 + m - 30 = 0$

$(m+6)(m-5) = 0$

$m = -6 \quad m = 5$

\times $m > 0$

b1)

$m = 5$

$b1) 0, 5$

62)

$\vec{AB} = B - A = (-1; 4; 0)$

$\vec{EA} = A - E = (0; 3; -4)$

$\vec{AD} = D - A = (4; 6; 10)$

$\vec{AD} = r(2; 3; 5)$

$r > 0$

$\vec{AD} = (2r; 3r; 5r)$

$\vec{AD} = (4; 6; 10)$

$\|\vec{BC}\| = \|\vec{AD}\|$

$2\sqrt{38} = \sqrt{4r^2 + 9r^2 + 25r^2}$

$2\sqrt{38} = \sqrt{38} \cdot r$

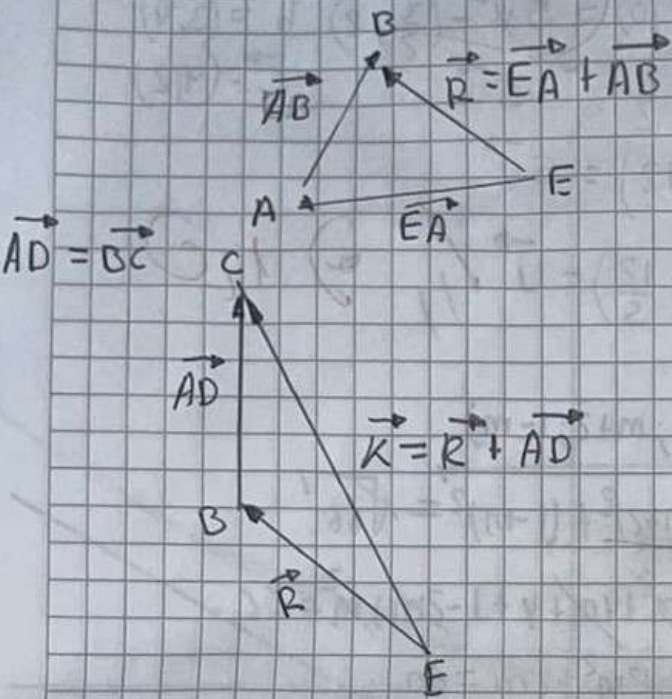
$r = 2$

$b2) 2, 0$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

b3)



$$\vec{EC} = \vec{R} + \vec{AD}$$

$$\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{AD}$$

b3) 0,5

