FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA

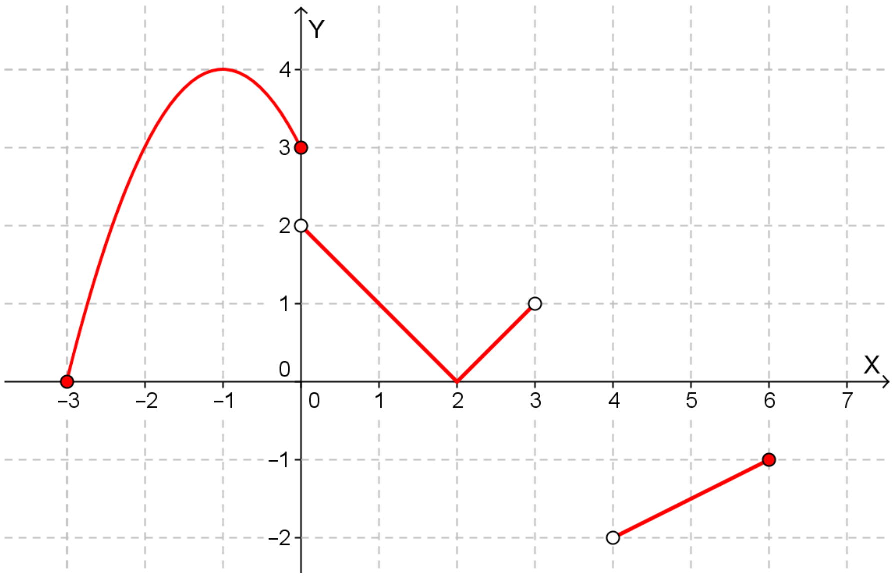
SEMESTRE ACADÉMICO 2020 - 2

Horario: Todos. Elaborada por todos los profesores.

INDICACIONES:
El desarrollo de TODOS los ejercicios siguientes debe realizarse a mano detallando sus procedimientos, colocando sus datos en cada hoja utilizada, y presentarse las imágenes de sus soluciones compiladas en un único archivo Word o PDF en la TAREA correspondiente a la PC1. El puntaje máximo obtenible es 20 puntos. El plazo de entrega es hasta las 4:00 p.m.

---

1. Dada la gráfica de la función f.



   a) Halle el dominio y rango de f. (1 p.)

   b) Determine, si existen, el valor máximo y mínimo de f e indique para qué valor(es) de x se alcanzan. (1.5 p.)

   c) Encuentre el conjunto de todos los valores de x tales que $-1 \leq f(x) \leq 3$. (1.5 p.)

2. Sea $b > 1$ una constante real. Halle el conjunto solución de

$$\frac{x}{x+b} \leq x.$$

(3 p.)

3. Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

   a) $\dfrac{x^2 - |x-2|}{|x-1|+4} \geq 0\,.$ (3 p.)

   b) $1 + 3x > \sqrt{3x^2 + x}\,.$ (3 p.)

4. Halle el dominio implícito de la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-4}}}.$$

(3 p.)

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{x}{y} = 1$. (1 p.)

   b) Si $a > 1$ entonces $x^2 + 2x + a > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (1 p.)

   c) Una condición necesaria para que $x \geq \dfrac{1}{2}$ es que $2x^3 - x^2 + 2x - 1 > 0$. (1 p.)

   d) Si $0 < a < 7$ y $x^2 - a < 7$, entonces $|x^2 - a| < 7$. (1 p.)

San Miguel, 26 de setiembre del 2020.

MARCO ESPADA RODRIGUEZ 20206358

PRÁCTICA 1 FCAL

1) a.

$$\text{Dom} f = [-3;3[\cup]4,6]$$

1

$$\text{Ran} f =]-2;-1] \cup [0;4]$$

b) $\text{máximo valor} = \{4\}$; cuando $x = -1$

1.5

$\text{mínimo valor} = \emptyset$

1.5

c) $-1 \leq f(x) \leq 3 \iff x \in [-3;-2] \cup [0;3[\cup \{6\}$

2. $b > 1$

$$\frac{x}{x+b} - x \leq 0$$

$$\frac{x - x^2 - bx}{x+b} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + bx - x}{x+b} \geq 0$$

3

$$\frac{x(x+b-1)}{x+b} \geq 0$$

$$\begin{cases} 1-b<0 \\ -b<-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow C.S =]-b;1-b] \cup [0;\infty^{+}[$

MARCO ESPADA RODRIGUEZ 20206358

3

a) analizando el numerador

$|x-1|+4 > 4 > 0$ { será diferente de cero

entonces: $x^2 - |x-2| \geq 0$

$|x-2| \leq x^2$

$(x^2 \geq 0) \wedge (-x^2 \leq x-2 \leq x^2)$

$x \in \mathbb{R} \wedge ((x+2)(x-1) \geq 0) \wedge (x^2 - x + 2 \geq 0)$

$x \in \mathbb{R} \wedge$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad 1$

$\Delta = -7 < 0$

$\wedge\ x^2 - x + 2 > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

3

$\Rightarrow x \in\ ]-\infty; -2] \cup [1; \infty^+[$

b) $\sqrt{3x^2+x} < 3x+1$

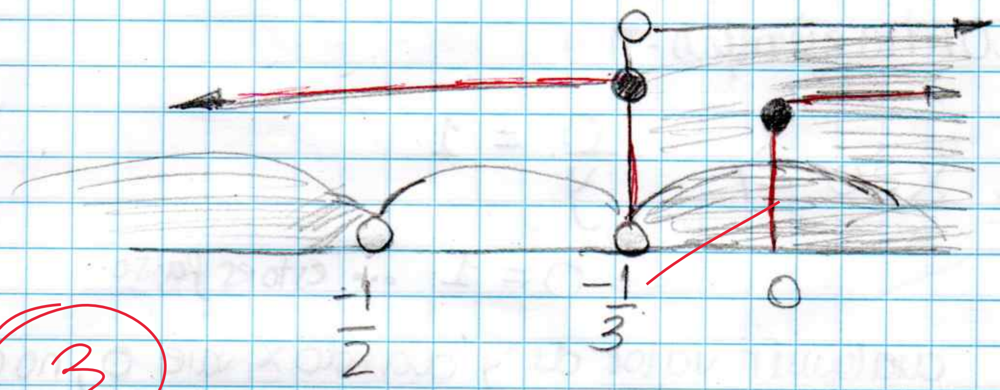
$(3x^2 + x \geq 0) \wedge (3x+1 > 0) \wedge (3x^2 + x < 9x^2 + 6x + 1)$

$(x(3x+1) \geq 0) \wedge x > -\frac{1}{3} \wedge ((3x+1)(2x+1) > 0)$

sigue ⇓

MARCO ESPADA RODRIGUEZ 20206358

$x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[0; \infty^{+}\right[\wedge x > -\frac{1}{3} \wedge x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}; \infty^{+}\right[$



3

$\therefore \ C.S = \left[0; \infty^{+}\right[$

4 se cumple:

$$\frac{x-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}} \geq 0$$

para que esta bien definido

$$(x-2 \geq 0) \wedge (x-4 \geq 0) \Rightarrow x \geq 4$$

luego

sabemos que: $-2 > -4 \quad \ldots +x$

$$\underbrace{x-2}_{+} > \underbrace{x-4}_{+} \quad \ldots \sqrt{\ }$$

$$\sqrt{x-2} > \sqrt{x-4}$$

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x-4} > 0$$

3

se cumple:

$$\frac{x-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-4}} \geq 0, \text{ siempre y cuando } (x \geq 4)$$

$\therefore \ \mathrm{Dom}\, f = \left[4; \infty^{+}\right[$

Standford

MARCO ESPADA RODRIGUEZ 20206358

5) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} = 1$

a)

contraejemplo:

1

si $x = 0 \Rightarrow \frac{0}{y} = 1$

$0 = 1$ ... esto es falso

cualquier valor de y cuando x vale 0, no cumplirá la igualdad.

Rpta: proposición falsa.

b) si $a > 1 \longrightarrow x^2 + 2x + a > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

$a > 1$ ... (-1)

$-a < -1$ ... x4

$-4a < -4$ ... +4

1

$4 - 4a < 0 \longrightarrow x^2 + 2x + a > 0$

$\Delta = 4 - 4a$

$\Delta < 0$

ya que se cumple el trinomio positivo

$x^2 + 2x + a > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ proposición verdadera

MARCO ESPADA 20206358

c.

$$x \geq \frac{1}{2} \longrightarrow 2x^3 - x^2 + 2x - 1 > 0$$

contraejemplo:

1

$x = \frac{1}{2}$ ya $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 > 0$$

$$\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{1} - \cancel{1} > 0$$

$0 > 0$ ... falso.

Rpta: proposición falsa.

d)

si $0 < a < 7 \wedge x^2 - a < 7 \longrightarrow |x^2 - a| < 7$

(M. ABSURDO)

supongamos que no se cumple es decir:

si $0 < a < 7 \wedge x^2 - a < 7 \longrightarrow |x^2 - a| \geq 7$

si $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $a = 1$, $x = 2$ ya que $0 < 1 < 7 \wedge 2^2 - 1 < 7$

$\Rightarrow |2^2 - 1| \geq 7$

1

$3 \geq 7$ ¡absurdo!

Rpta: Proposición verdadera

Standford