ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

SEGUNDA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2019 -2

Horario: Todos.

Duración: 110 minutos

Elaborada por todos los profesores.

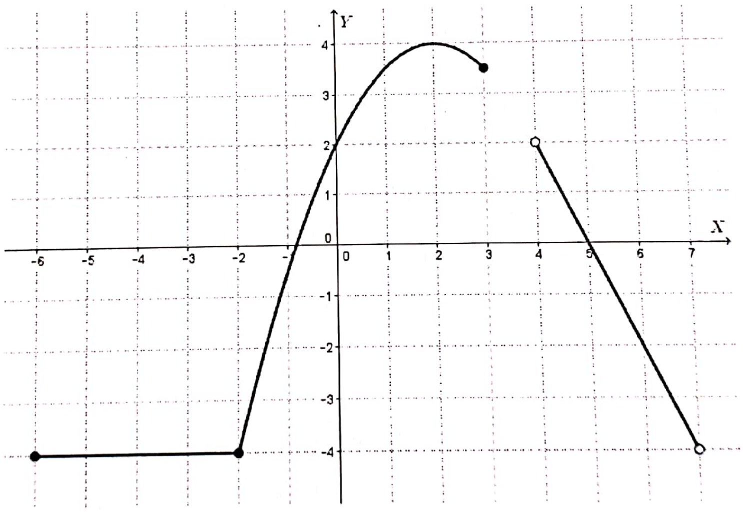
ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. La gráfica de la función f está formada por dos segmentos y parte de una parábola, como se muestra a continuación:



Halle la regla de correspondencia de f, indicando su dominio. (3 puntos)

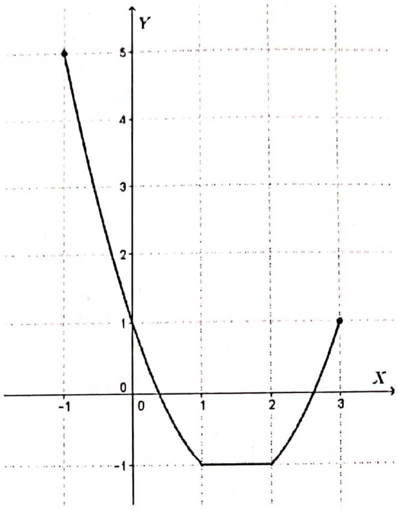
2. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Dadas las funciones definidas por $f(x)=x^2$, $x<0$ y $g(x)=x|x|$, $x\in\mathbb{R}$; entonces $(f-g)(x)>0$ en todo su dominio. (1 punto)

b) Si f y g son funciones pares, ambas con dominio $\mathbb{R}$, entonces la función h definida por $h(x)=(f\circ g)(x)+(fg)(x)$ es par. (1 punto)

c) Si f y g son funciones cuyos dominios son iguales y el rango de ambas es $[-1,1]$, entonces el rango de la función $f+g$ es $[-2,2]$. (1 punto)

3. A continuación se muestra la gráfica de la función f.



Esboce la gráfica de la función g definida por $g(x) = 2 - f(2-x)$. (3 puntos)

4. Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \left|1 - x^2\right|, \ -3 \leq x \leq 1,$$

$$g(x) = x + 1.$$

Halle el dominio y la regla de correspondencia de $\dfrac{f}{g}$, y esboce su gráfica. (3 puntos)

5. Sean las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 3 - \sqrt{1-(x-2)^2}, 1 \leq x \leq 3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x + 2, \ -1 < x < 2.$$

a) Halle el dominio y la regla de correspondencia de $f \circ g$ y haga un esbozo de su gráfica. (2.5 puntos)

b) Haga un esbozo de la gráfica de la función h que cumple:

- h es **impar** con $Dom(h) = [-3, 3]$.
- $h(x) = f(x)$ cuando $1 \leq x \leq 3$.
- La parte de la gráfica que corresponde a $-1 < x < 1$ es un segmento horizontal. (2.5 puntos)

6. Esboce la gráfica de la región en el plano representada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{16} < 1 \\ 2x + 7 \ \leq \ y \ \leq \ 2x + 15 \end{cases}$$

(3 puntos)

San Miguel, 5 de octubre de 2019.

ENTREGADO

14 OCT. 2019

Práctica

Año				Número			
2	0	1	9	6	1	1	4

Código de alumno

AIQUIPA CARRASCO JERRY FERNANDO

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FUCAL

Nota

20

Práctica Nº: 2

Horario de práctica: P-101

Fecha: 05 / 10 / 2019

Nombre del profesor: JESUS ZAPATA

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) JS

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-(x-2)^2+4$

$-2x+b=y$
$4 \quad 2$

$b=10$

$-2x+10$

$\frac{-(x-2)^2+4}{2}$

$\frac{-(-2-2)^2+4}{2}$

Presente aquí su trabajo

Unidades

1)
$$f(x)=\begin{cases} -4 \;; & -6 \leq x \leq -2 \quad \dots ① \\ \frac{-(x-2)^2+4}{2} \;; & -2 \leq x \leq 3 \quad \dots ② \\ -2x+10 \;; & 4 < x \leq 7 \quad \dots ③ \end{cases}$$

3.0

① Función constante $y=-4$

② Función cuadrática de vértice $(2,4)$, como esta hacia abajo, queda de la forma $y=-a(x-2)^2+4$, $a>0$. Reemplazando en un valor: $(-2,-4)$:

$$-4=-a(-2-2)^2+4 \Rightarrow 8=16a \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+4$$

③ Función lineal: $m=\frac{2-(-4)}{4-7}=-2$.

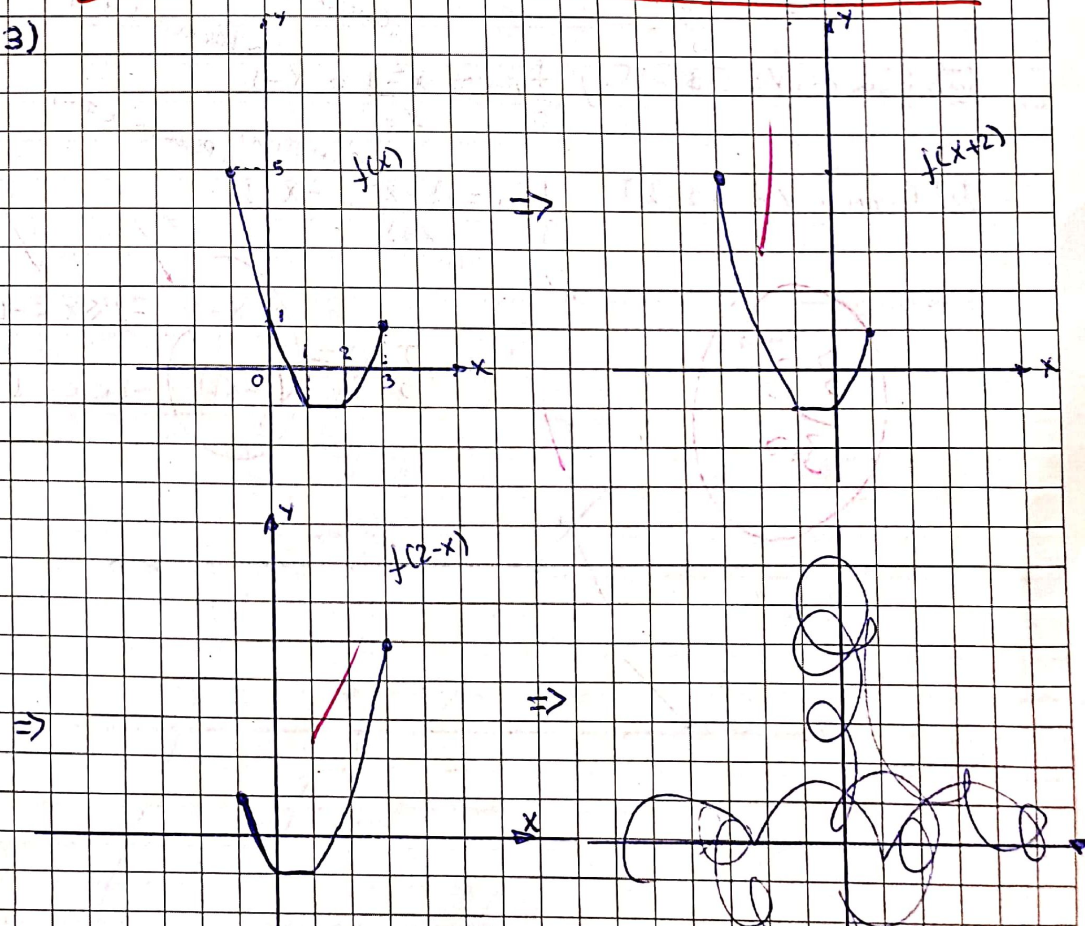
Tiene la forma $y=-2x+b$. Reemplazando en un punto: $(4;2)$

$$\Rightarrow 2=-2(4)+b$$
$$10=b$$

$\therefore \; y=-2x+10$.

* Para los tres, el dominio se restringe según la gráfica.

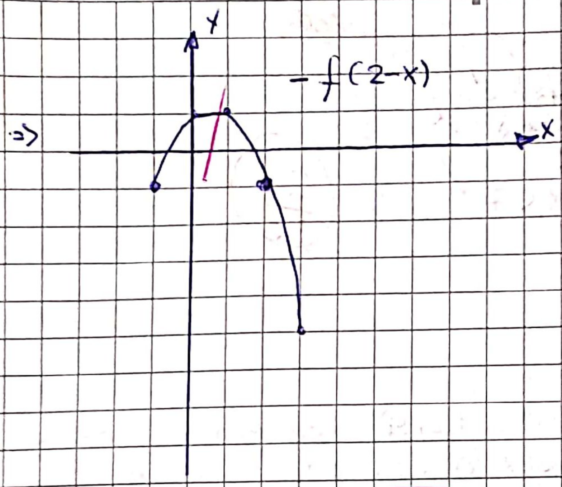
3)

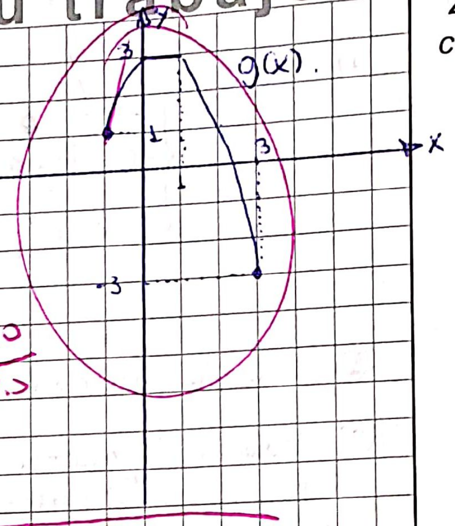


Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\Rightarrow$





$\frac{3.0}{3.0}$

4) $f(x) = |1-x^2|,\ -3 \le x \le 1$

$g(x) = x+1,\ x \in \mathbb{R}$

$\frac{f}{g} \Rightarrow Dom\,\frac{f}{g} \Rightarrow Dom\,f \cap (Dom\,g;\ g(x) \neq 0)$

$\mathbb{R} \cap (x \in [-3,1];\ \underbrace{x+1 \neq 0}_{x \neq -1})$

$\underbrace{\mathbb{R} \cap (x \in [-3,-1[\cup]-1,1]}$

$x \in [-3,-1[\cup]-1,1]$

$\therefore\ Dom\,\frac{f}{g} : [-3,-1[\cup]-1,1]$

$\Downarrow$

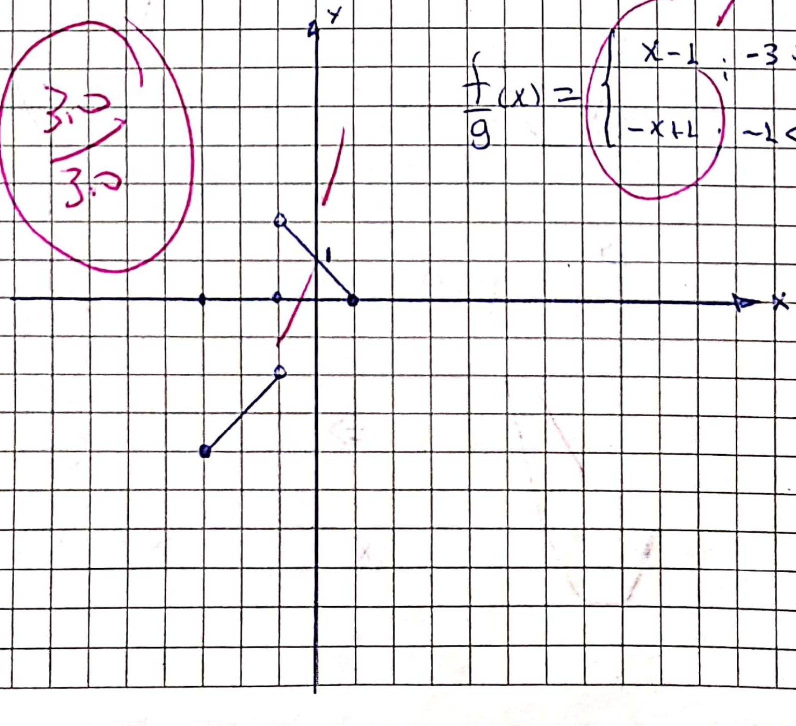
$\frac{f}{g}(x) = \frac{|1-x^2|}{x+1};\ x \in [-3,-1[\cup]-1,1]$

(I) Cuando $x \in [-3,-1[$; $\frac{f}{g}(x) = \frac{\overbrace{x^2-1}^{(x+1)(x-1)}}{x+1} = x-1$ ← porque $x \neq -1$

(II) Cuando $x \in]-1,1]$; $\frac{f}{g}(x) = \frac{\overbrace{1-x^2}^{-(1+x)(1-x)}}{x+1} = -x+1$ ← porque $x \neq -1$

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} x-1 ; & -3 \le x < -1 \\ -x+1 ; & -1 < x \le 1 \end{cases}$$

$\frac{3.0}{3.0}$

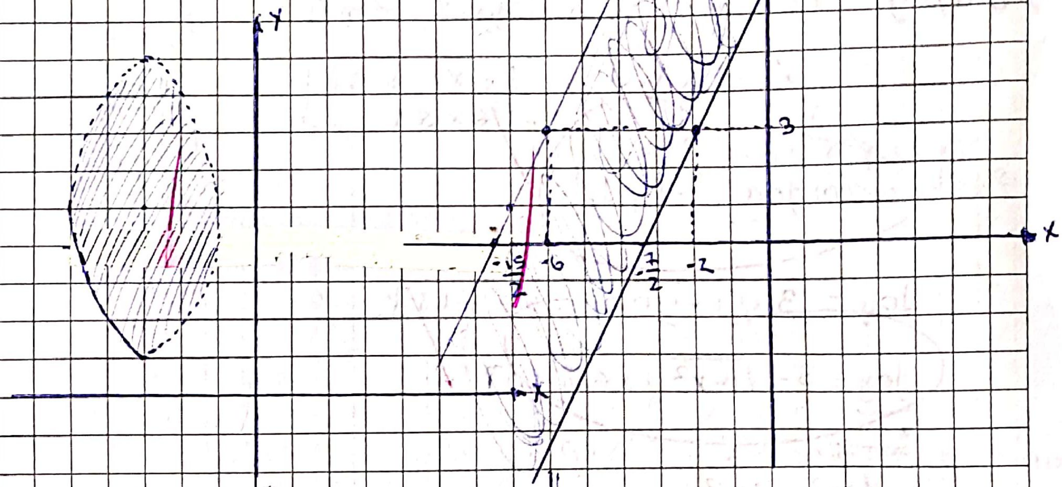


Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

⑥ $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} < 1$ // $2x+7 \leq y \leq 2x+15$.

$2x+7 \leq y \wedge y \leq 2x+15$.



Para graficar la elipse, se usa el punto $(-3,5)$ como centro, luego, cuando $x=-3$, $y = \pm 4 + 5$ ($y = 1 \vee 9$). Cuando $y=5$, $x = \pm 2 - 3$ ($x = -1 \vee -5$). Lo demás es llenar la línea que compone la elipse. Como el punto $(-3,5)$ cumple con $\frac{(-3+3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} < 1$, entonces todos los puntos dentro de él, componen su lugar en la inecuación.

Para $2x+7 \leq y \Rightarrow$ Lineal.

$y=0,\ x=-\frac{7}{2}$

$y=3,\ x=-2$

} Dos puntos de paso

Para $2x+15 \geq y \Rightarrow$ Lineal

$y=0,\ x=-\frac{15}{2}$

$y=3,\ x=-6$

} Dos puntos de paso

Luego, el punto $(-5,0)$ cumple con ambos

$2(-5)+7 \leq 0 \leq 2(-5)+15$

$-3 \leq 0 \leq 5$; el área comprendida por las dos rectas es lo que corresponde

$-10+7 \leq 0 \leq -10+15$

$-3 \leq 0 \leq 5$

$(y-5)^2 = 16$

$y = \pm 4 + 5$

$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} < 1$

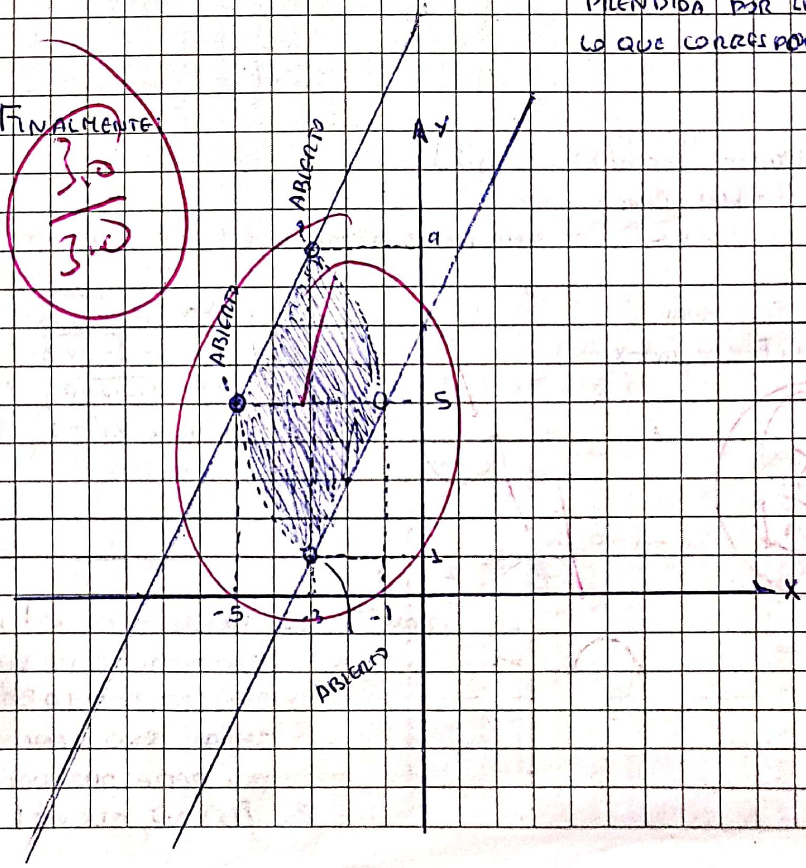
$\frac{9}{4} + \frac{25}{16}$

$\frac{(-4+3)^2}{4} + \frac{(4-5)^2}{16} < 1$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$

Finalmente:

$\frac{3,0}{3,0}$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5) a) $f(x) = 3 - \sqrt{1-(x-2)^2}$, $1 \leq x \leq 3$ y $g(x) = x+2$, $-1 < x < 2$

Dom fog: $x \in \text{Dom } g(x) \wedge g(x) \in \text{Dom } f(x)$.

$\left\{ x \in -1 < x < 2 \wedge \begin{matrix} 1 \leq x+2 \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{matrix} \right\}$ $]-1, 1]$

Dom fog: $]-1, 1]$

$f \circ g = 3 - \sqrt{1-(x+2-2)^2}$, $x \in]-1,1]$.

$f \circ g = 3 - \sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1,1]$

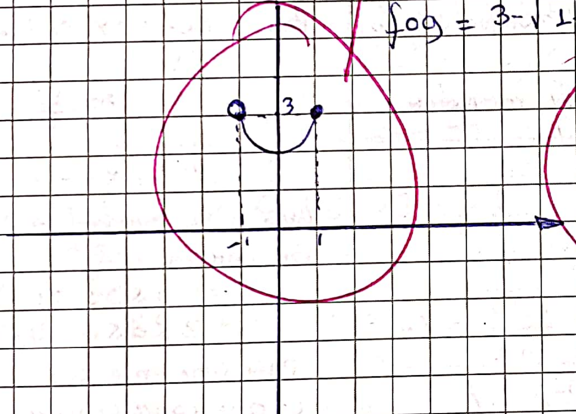
$y = 3 - \sqrt{1-x^2}$.

$3 - y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 3 - y \geq 0$
$3 \geq y$

$(y-3)^2 = 1 - x^2$

$x^2 + (y-3)^2 = 1$, $3 \geq y$

$f \circ g = 3 - \sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1,1]$.



2,5/2,5

$x(x($

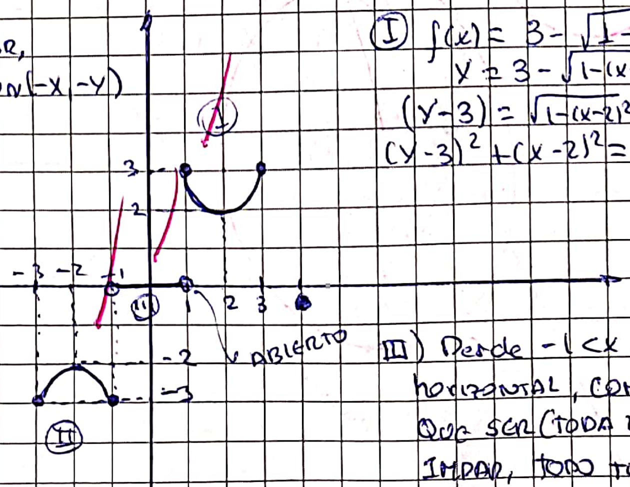
b) → h impar $\text{Dom}(h) = [-3,3]$
→ $h(x) = f(x)$ cuando $1 \leq x \leq 3$
→ Desde $-1 < x < 1$, es una linea horizontal

Si $f(x) = x$, $x \in$

(II) Para que sea impar, dado un (x,y), existe un $(-x,-y)$

(I) $f(x) = 3 - \sqrt{1-(x-2)^2}$, $1 \leq x \leq 3$
$y = 3 - \sqrt{1-(x-2)^2}$
$(y-3) = \sqrt{1-(x-2)^2}$, $3 \geq y$
$(y-3)^2 + (x-2)^2 = 1$, $3 \geq y$

2,5/2,5



III) Desde $-1 < x < 1$, es horizontal, como tiene que ser (toda la gráfica) impar, todo tiene que ser reflejado por el origen, $f(x) = 0$, $-1 < x < 1$

Presente aquí su trabajo

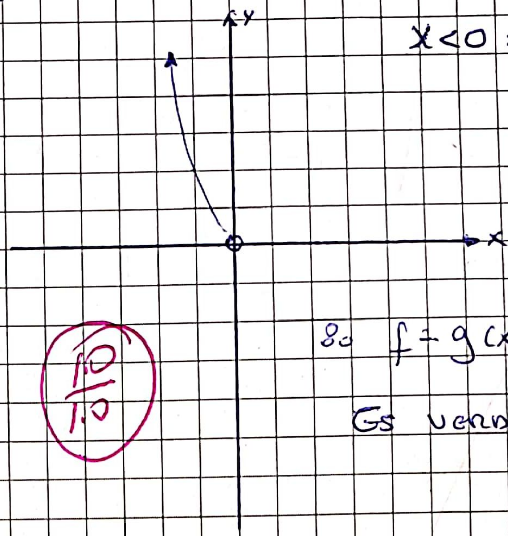
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

② ⓐ $f(x) = x^2,\ x<0$ $\quad g(x) = x|x|,\ x\in\mathbb{R}$

Dom $f-g(x)$: $(x<0 \wedge x\in\mathbb{R}) \Rightarrow x<0$

$f-g(x) = x^2 - x|x|$

$x<0 \Rightarrow f-g(x) = x^2 - x(-x)$
$= x^2+x^2 = 2x^2$



$\therefore\ f-g(x)>0$ en todo su dominio

Es verdadero

10/10

ⓑ $f, g \Rightarrow$ Pares $\Rightarrow f(-x) = f(x)$
$g(-x) = g(x)$ $\}\ x\in\mathbb{R}$

$h(x) = f(g(x)) + f(x)\times g(x) \Rightarrow$ Par.

$h(-x) = f(g(-x)) + f(-x)\times g(-x)$

$h(-x) = f(g(x)) + f(x)\times g(x)$

Son iguales!

$\therefore\ \underbrace{h(-x) = h(x)}_{\text{PAR}}$ (Es verdadero)

10/10

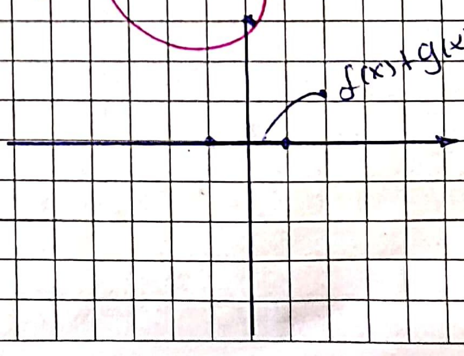
ⓒ Dom f = Dom g.
Ran f = Ran g = $[-1,1]$

Solución: Es falso, pues si:

$f(x) = x,\ x\in[-1,1]$
$g(x) = -x,\ x\in[-1,1]$ $\}$ Ran $[-1,1]$

$f(x)+g(x) = 0,\ x\in[-1,1]$

$f(x)+g(x)=0$, el rango no es $[-2,2]$!



10/10

$x^2+|x|$

$x,\ -x$

$f(x) = 2x$