ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Tercera Práctica Calificada

Semestre Académico 2019 -1

Duración: 110 minutos

Elaborado por los profesores del curso.

Horarios: del H-116 al H-B126

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

1. Sea el cuadrado $ABCD$ con $A(0,2,6)$ y centro en $M(-\sqrt{2},2,2)$. Si el vértice D se encuentra en la recta
$$\mathscr{L}: P=(0,2,6)+t(-\sqrt{2},1,-1),\ t\in\mathbb{R},$$
halle:
   a) Las coordenadas de los vértices C y D. (2 Pts.)
   b) El volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ donde $E=(1,3,7)$. (2 Pts.)

2. Halle el punto simétrico a $M(2,2,2)$ respecto al plano $\mathscr{P}: x+y-2z-6=0$. (3 Pts.)

3. Dados los planos
$$\mathscr{P}_1: 2x+3y+z-6=0,\quad \mathscr{P}_2: 4x-5y-z+2=0$$
y el punto $N(5,-1,-3)$, halle:
   a) La ecuación vectorial de $\mathscr{L}_2$ que resulta de la intersección de $\mathscr{P}_1$ con $\mathscr{P}_2$. (1.5 Pts.)
   b) La ecuación vectorial de la recta $\mathscr{L}_1$ que pasa por N y es paralela a $\mathscr{L}_2$. (1 Pto.)
   c) La distancia de $\mathscr{L}_1$ a $\mathscr{L}_2$. (1.5 Pts.)

Continúa ⋯

4. Sean la recta y el plano

$$\mathscr{L} : P = (-1,2,0) + t(3,-1,4), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{P} : 3x + y - z + 2 = 0.$$

Halle:

a) Las coordenadas del punto de intersección de $\mathscr{L}$ con $\mathscr{P}$. (1 Pto.)

b) La ecuación del plano $\mathscr{P}_1$ que contiene a $\mathscr{L}$ y es perpendicular a $\mathscr{P}$. (2 Pts.)

c) La distancia del punto $Q(2,3,5)$ al plano $\mathscr{P}_1$. (1 Pto.)

5. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) Dados la recta y el plano (2 Pts.)

$$\mathscr{L} : P = t\overrightarrow{v}, \ t \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{P} : Ax + By + Cz = 0$$

si se cumple que $\overrightarrow{v} \cdot (A,B,C) = 0$ entonces $\mathscr{L}$ está contenida en $\mathscr{P}$.

b) La ecuación (2 Pts.)

$$(x,y,z) = (2,1,-3) + t(1,1,-1) + r(2,1,1), \quad t,r \in \mathbb{R}$$

se puede transformar en una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

dónde A, B, C y D son constantes y por lo tanto corresponde a un plano.

c) Si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ tales que (1 Pto.)

$$Proy_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} = Proy_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$$

entonces $||\overrightarrow{a}|| = ||\overrightarrow{b}||$.

Roy Sánchez Gutiérrez

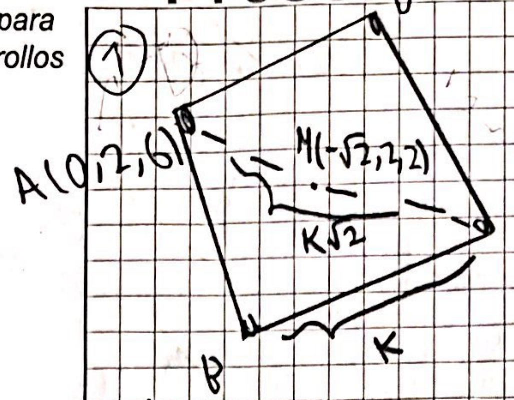
Coordinador de Prácticas:

San Miguel, 3 de junio del 2019

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1



M → punto medio

$\|\vec{AM}\| = \|\vec{MC}\|$

y

$\vec{AM} = \vec{MC}$

a) Por vectores

- $\vec{AM} = \vec{MC}$

$(-\sqrt{2},2,2)-(0,2,6) = C-(-\sqrt{2},2,2)$

$2(-\sqrt{2},2,2)-(0,2,6) = C$

$C = (-2\sqrt{2},2,-2)$

propiedad cuadrado

- $\|\vec{AC}\| = \|\vec{AD}\|\cdot\sqrt{2}$

$\vec{AC} = (-2\sqrt{2},0,-8)$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2+(-8)^2}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{64+8}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$6\cancel{\sqrt{2}} = \|\vec{AD}\|\cdot\cancel{\sqrt{2}}$

$\|\vec{AD}\| = 6$

Si $\vec{AD} \in \mathcal{L}: P = (0,2,6)+t(-\sqrt{2},1,-1)$

$\vec{AD} \parallel (-\sqrt{2},1,-1)$

$\vec{AD} = \alpha(-\sqrt{2},1,-1)$

$\|\vec{AD}\| = |\alpha|\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(1)^2+(-1)^2} = 6$

$2|\alpha| = 6$

$|\alpha| = 3$

(I) $\alpha = 3$

$\vec{AD} = (-3\sqrt{2},3,-3)$

$D-A = (-3\sqrt{2},3,-3)$

$D = (-3\sqrt{2},5,3)$

Por $\vec{DC} = (\sqrt{2},3,5)$

$\|\vec{DC}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(3)^2+(5)^2} = \sqrt{36}$

$\|\vec{DC}\| = 6$ ✓

$D = (-3\sqrt{2},5,3)$

(II) $\alpha = -3$

$\vec{AD} = (3\sqrt{2},-3,3)$

$D-A = (3\sqrt{2},-3,3)$

$D = (3\sqrt{2},-1,9)$

Por $DC = (5\sqrt{2},-3,11)$

$\|\vec{DC}\| = \sqrt{(5\sqrt{2})^2+(-3)^2+(11)^2}$

$\|\vec{DC}\| = \sqrt{50+9+121}$

$\downarrow$ 6

$\|\vec{DC}\| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \neq 6$

no cumple

b) Si $\vec{AB} = \vec{DC}$

$B-A = C-D$

$B = A+C-D$

$B = (0,2,6)+(-2\sqrt{2},2,-2)-(-3\sqrt{2},5,3)$

$B = (\sqrt{2},-1,1)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\vec{AB} = B - A = (\sqrt{2},-1,1) - (0,2,6) = (\sqrt{2},-3,-5)$

$\vec{AD} = D - A = (-3\sqrt{2}, 3, -3)$

$\vec{AE} = E - A = (1,3,7) - (0,2,6) = (1,1,1)$

$V_{\text{paralelepípedo}} = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$

$|(\sqrt{2},-3,-5)\cdot((-3\sqrt{2},3,-3) \times (1,1,1))|$

$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} -3\sqrt{2} & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} -3\sqrt{2} & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\hat{k} \leftarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$6\hat{i} - (3-3\sqrt{2})\hat{j} + (-3\sqrt{2}-3)\hat{k}$

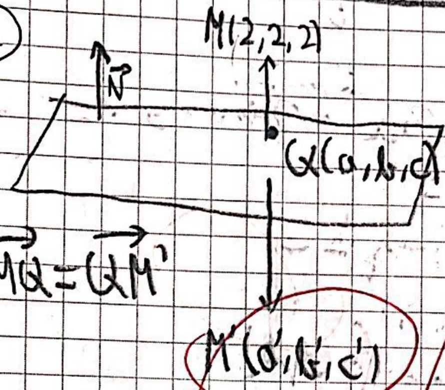
$(6, 3\sqrt{2}-3, -3\sqrt{2}-3)$

$V = |(\sqrt{2},-3,-5)\cdot(6, 3\sqrt{2}-3, -3\sqrt{2}-3)|$

$V = |6\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 9 + 15\sqrt{2} + 15|$

$V = (24 + 12\sqrt{2})\, u^3$

(2)



$P: x+y-2z-6=0$

$\hookrightarrow \vec{N} = (1,1,-2)$

$Q \rightarrow$ punto del plano

$\hookrightarrow \vec{MQ} \rightarrow$ vector paralelo a $\vec{N}$

$\vec{MQ} = \vec{QM'}$

$\vec{MQ} = (a-2, b-2, c-2)$

$\vec{MQ} \parallel \vec{N}$

$a-2 = \alpha \qquad a = \alpha+2$

$b-2 = \alpha \qquad b = \alpha+2$

$c-2 = -2\alpha \qquad c = 2-2\alpha$

$d(M,Q) = \dfrac{|2+2-2(2)-6|}{\sqrt{1^2+1+(-2)^2}}$

$d(M,Q) = \dfrac{6}{\sqrt{6}}$

$\|\vec{MQ}\| = \sqrt{6} \qquad \vec{MQ} = (\alpha, \alpha, -2\alpha)$

$\sqrt{\alpha^2+\alpha^2+(-2\alpha)^2} = \sqrt{6}$

$6\alpha^2 = 6$

$\alpha^2 = 1$

$\alpha = 1 \rightarrow Q(3,3,0) \rightarrow 3+3-2(0)-6 = 0$ ✓

$\alpha = -1 \rightarrow Q(1,1,4) \rightarrow 1+1-2(4)-6 = -12 \neq 0$ X (no pertenece al plano)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$Q = (3,3,0)$

Por punto simétrico

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QM'}$

$(1,1,-2) = M' - Q$

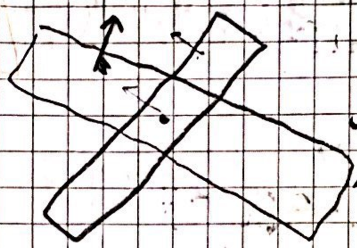
$(1,1,-2) + (3,3,0) = M' \rightarrow \boxed{M' = (4,4,-2)}$

punto simétrico

③ $\pi_1: 2x+3y+z-6=0$

$N(5,-1,-3)$

a) $\pi_2: 4x-5y-z+2=0$



Punto intersección

$\pi_1: 2x+3y+z=6$

$\pi_2: 4x-5y-z=-2$) +

$6x-2y=4$

$3x-y=2$

$3x=2+y$

$\boxed{x=a}$

$3a=2+y \rightarrow \boxed{y=3a-2}$

En $2x+3y+z=6$

$2a+3(3a-2)+z=6$

$2a+9a-6+z=6$

$\boxed{z=12-11a}$

Coordenadas posibles del punto de intersección $\rightarrow (a, 3a-2, 12-11a)$

$(a,3a-2,12-11a) = (0,-2,12)+(a,3a,-11a)$

en recta $\rightarrow \underline{r_2: (0,-2,12)+t(1,3,-11),\ t\in\mathbb{R}}$

b) $r_1 \rightarrow N \in r_1$

$r_1 \parallel r_2 \rightarrow (1,3,-11) \parallel r_1$

$N=(5,-1,-3)$

$\boxed{r_1: (5,-1,-3)+\lambda(1,3,-11),\ \lambda\in\mathbb{R}}$

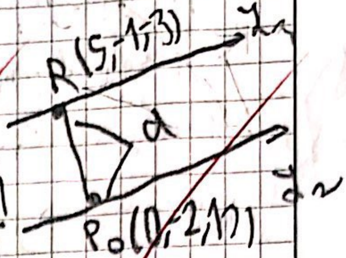
Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

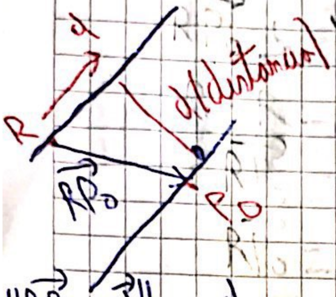
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) $L_1 = (5,-1,3) + r(1,3,-11)$

$L_2 = (0,-2,12) + t(1,3,-11)$



Fórmula $d = \dfrac{\|\vec{RP_0} \times (1,3,-11)\|}{\|(1,3,-11)\|}$



$\vec{RP_0} = (-5,-1,15)$

$\dfrac{\|\vec{RP_0} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = d$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5 & -1 & 15 \\ 1 & 3 & -11 \end{vmatrix} \rightarrow (-34,-40,-14)$$

$$d = \frac{\|(-34,-40,-14)\|}{\|(1,3,-11)\|}$$

$$\sqrt{(-34)^2 + (-40)^2 + (-14)^2} = \sqrt{1156 + 1600 + 196}$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{2952}$$

$$\sqrt{1^2 + 3^2 + (-11)^2} = \sqrt{131}$$

$$\boxed{d = \frac{\sqrt{2952}}{\sqrt{131}}}$$

4) $L: P = (-1,2,0) + t(3,-1,4),\ t \in R$

$\rho: 3x + y - z + 2 = 0$

a) Intersección

$P(\text{recta}) = (-1+3t,\ 2-t,\ 4t)$

Reemplazando en plano

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

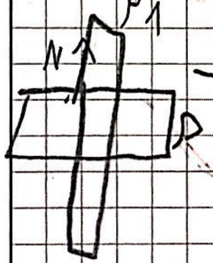
$$3(-1+3t)+(2-t)-4t+2=0$$
$$-3+9t+2-t-4t+2=0$$
$$4t+1=0$$
$$t=-\frac{1}{4}$$

- $-1+3t=-1-\frac{3}{4}=-\frac{7}{4}$
- $2-t=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$
- $4t=4\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$

Coordenadas $\left(-\frac{7}{4},\frac{9}{4},-1\right)$

b) $P_1 \rightarrow$ contiene a $L \rightarrow P_1 \parallel (3,-1,4)$

$\rightarrow$ perpendicular a P



$\rightarrow$ paralelo a $\vec{N}$ de P

$\vec{N}$ de $P=(3,1,-1)$

$\vec{N_1}$ (normal del plano 1)

$$(3,-1,4)\times(3,1,-1)$$

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\hat{k}$$

$$-3\hat{i}-(-15)\hat{j}+6\hat{k}$$
$$(-3,15,6)$$

Punto de paso de plano P_1 (P_0) $\rightarrow (-1,2,0)$

Ecuación $\rightarrow \vec{P_0P}\cdot\vec{N_1}=0$

$$(x+1,y-2,z)\cdot(-3,15,6)=0$$
$$-3x-3+15y-30+6z=0$$
$$-3x+15y+6z-33=0$$

Ecuación $\rightarrow P_1:\ \boxed{x-5y-2z+11=0}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) $d(Q, P_1)$ $\longrightarrow \frac{|2(1) - 5(2) - 2(2) + 11|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-2)^2}} = 0$

$Q = (2, 3, 5)$

$P_1: x - 5y - 2z + 11 = 0$ $\quad d = \frac{|2 - 10 - 4 + 11|}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$

$2 - 15 - 10 + 11$

$\frac{|-12|}{\sqrt{30}} = \frac{12}{\sqrt{30}}$

$\frac{12}{\sqrt{30}}$

5) a) $r: P = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$

$P: Ax + By + Cz = 0$

$\downarrow$

$\vec{N} = (A, B, C)$

Si $\vec{v} \cdot (A, B, C) = 0 \rightarrow r$ está contenida en P

$\downarrow$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$r: P = (v_1 t, v_2 t, v_3 t)$

Pero $\vec{v} \cdot (A, B, C) = 0$

Por tanto $(v_1 A + v_2 B + v_3 C) = 0$

- Hallando distancia de un punto P (de recta r) al plano

$d(P, P) = ? \rightarrow \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$P = (v_1 t, v_2 t, v_3 t)$

$$\frac{|Av_1 t + Bv_2 t + Cv_3 t|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$\downarrow$ $\quad 0 \rightarrow$ condición

$$\frac{|t\overbrace{(Av_1 + Bv_2 + Cv_3)}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \rightarrow \frac{|t(0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Sí la distancia del punto de la recta L al plano es 0, todos sus puntos están contenidos en P

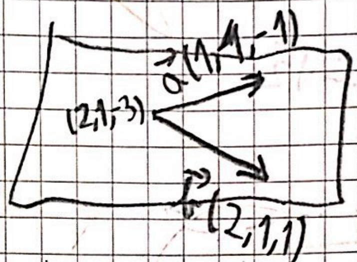
Por tanto, L está contenida en P

(Verdadero)

b) $(x,y,z) = (2,1,-3) + t(1,1,-1) + r(2,1,1),\ t,r \in R$

Se puede transformar

Ecuación vectorial del plano



Hallando normal

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,-1)$$

$P_0 = (2,1,-3)$

$\vec{N} = (2,-3,-1)$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$$

$$(x-2, y-1, z+3) \cdot (2,-3,-1) = 0$$

$$2x - 4 - 3y + 3 - z - 3 = 0$$

$$2x - 3y - z - 4 = 0$$

Sí se puede transformar a ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$

(Verdadero)

c) $Proy_{\vec{a}}\vec{b} = Proy_{\vec{b}}\vec{a}$, entonces $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$

Si $\vec{a} = (2,1,2)$

$\vec{b} = (-1,0,1)$

$(2,1,2)\cdot(-1,0,1) = -2+0+2 = 0$

$$Proy_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(2,1,2)\cdot(-1,0,1)}{\|(2,1,2)\|^2} \cdot (2,1,2)$$

$$\frac{0}{\|(2,1,2)\|^2} \cdot (2,1,2) = (0,0,0)$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\cdot\vec{b} = \frac{(0,0,0)}{\|(-1,0,1)\|}\cdot(-1,0,1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (0,0,0)$$

$$(0,0,0)$$

$$\text{Proy}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a} = (0,0,0)$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-1)^2+0+(1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{a}\| \neq \|\vec{b}\|$$

$\downarrow$

Contraejemplifico respuesta

$\boxed{\text{(Falso)}}$