Fundamentos de Cálculo

Primera Práctica Dirigida - Soluciones propuestas

Semestre Académico 2021 -1

Problemas Obligatorios

1. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

   a) $\dfrac{(x^2-2x-3)(2x-5)}{x-3} \geq 0.$

   Solución:
   Factorizando
   $$\frac{(x^2-2x-3)(2x-5)}{x-3} \geq 0 \iff \frac{(x-3)(x+1)(2x-5)}{x-3} \geq 0.$$
   $$\boxed{C.S. =]-\infty,-1] \cup \left[\frac{5}{2},+\infty\right[- \{3\}.}$$

   b) $x-1 < \sqrt{x^2-4}.$

   Solución:
   Restricción por la raíz cuadrada: $x^2-4 \geq 0 \iff x \in C.Rest =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[.$
   Para los valores en el $C.Rest$, analizamos:

   i) $x-1<0$: Cumplen todos los valores en $]-\infty,1[\cap C.Rest.$ $\quad C.S_i =]-\infty,-2]$

   ii) $x-1=0$: No cumple. $\quad C.S_{ii} = \emptyset$

   iii) $x-1>0$: Para los valores en $[2,+\infty[$, podemos elevar al cuadrado y resolver:
   $x^2-2x+1 < x^2-4 \iff x > \frac{5}{2}.$ $\quad C.S_{iii} =]5/2,+\infty[.$

   Finalmente
   $$\boxed{C.S =]-\infty,-2] \cup]5/2,+\infty[.}$$

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Justifique la veracidad de la siguiente proposición:

   Es necesario que $x<y$ para que $x^3+x<y^3+y$.

   Solución:
   Se pide demostrar $x^3+x<y^3+y \Rightarrow x<y$.
   Podemos demostrar la contrarrecíproca: $\quad x \geq y \Rightarrow x^3+x \geq y^3+y.$
   Como $x \geq y \Rightarrow x^3 \geq y^3$; al sumar $x^3+x \geq y^3+y.$

   Obs: También pudo usar demostración directa:
   $x^3+x<y^3+y \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+1)<0$, pero $x^2+xy+y^2+1 = (x+y/2)^2+3/4>0$, luego $x<y$.

---

1. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

a) $\left(\dfrac{x^2-x+4}{2-x}+x\right)\sqrt{\dfrac{|x|-1}{x^2-9}} \geq 0.$

Solución:

Restricción por la raíz cuadrada: $\dfrac{|x|-1}{x^2-9} \geq 0$. Para resolver analizamos por zonas:

I) $x<0$: Resolver $\dfrac{-x-1}{x^2-9} = -\dfrac{(x+1)}{(x+3)(x-3)} \geq 0 \wedge x<0.$ $C.R._I =]-\infty,-3[\cup[-1,0[.$

II) $x \geq 0$: Resolver $\dfrac{x-1}{x^2-9} = \dfrac{(x-1)}{(x+3)(x-3)} \geq 0 \wedge x \geq 0.$ $C.R._{II} = [0,1]\cup]3,+\infty[.$

Luego, para cumplir la restricción debemos trabajar en $C.Rest =]-\infty,-3[\cup[-1,1]\cup]3,+\infty[.$

Analizamos:

i) Valores donde $\sqrt{} = 0$: $x=-1$, $x=1$ son soluciones. $C.S._i = \{-1,1\}.$

ii) Para x en $]-\infty,-3[\cup]-1,1[\cup]3,+\infty[$ se tiene $\sqrt{} > 0$, luego el problema se reduce a

$$\frac{x^2-x+4}{2-x}+x \geq 0 \iff -\frac{(x+4)}{x-2} \geq 0 \iff -4 \leq x < 2.$$

Intersectando con el caso analizado $C.S_{ii} = [-4,3[\cup]-1,1[.$

Finalmente $\boxed{C.S = [-4,3[\cup[-1,1].}$

b) $\dfrac{1}{|x-4|} < \dfrac{1}{2|x|-4}.$

Solución:

Analizamos en casos o zonas por el Valor Absoluto:

I) $\underline{x<0}$: Resolver $\dfrac{1}{(-x+4)} < \dfrac{1}{(-2x-4)} \wedge x<0.$

$$-\frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{2(x+2)} < 0 \iff \frac{x+8}{2(x-4)(x+2)} > 0$$

$C.S._I =]-8,-2[.$

II) $\underline{0 \leq x < 4}$: Resolver $\dfrac{1}{(-x+4)} < \dfrac{1}{(2x-4)} \wedge 0 \leq x < 4.$

$$-\frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{2(x-2)} < 0 \iff \frac{3x-8}{2(x-4)(x-2)} > 0$$

$C.S._{II} =]2,8/3[.$

III) $\underline{x \geq 4}$: Resolver $\dfrac{1}{(x-4)} < \dfrac{1}{(2x-4)} \wedge x \geq 4.$

$$\frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{2(x-2)} < 0 \iff \frac{3x}{2(x-4)(x-2)} < 0$$

$C.S._{III} = \emptyset.$

Finalmente

$$\boxed{C.S. =]-8,-2[\cup\left]2,\frac{8}{3}\right[.}$$

c) $3-x \geq \sqrt{x^2-\frac{x}{2}+2}$.

Solución:
Restricción por la raíz cuadrada: $x^2-\dfrac{x}{2}+2 \geq 0$, se cumple para todo x, luego $C.Rest = \mathbb{R}$.
Para que tenga sentido la desigualdad necesitamos que $3-x \geq 0$. $Rest_2 =]-\infty,3]$.
Para $x \in]-\infty,3]$ podemos elevar al cuadrado y resolver: $(3-x)^2 \geq x^2-\frac{x}{2}+2 \iff x \leq \frac{14}{11}$.
$C.S =]-\infty,3] \cap \left]-\infty,\frac{14}{11}\right]$. Finalmente $\boxed{C.S = \left]-\infty,\dfrac{14}{11}\right]}$.

d) $\left(2\sqrt{4x^2-25}+5-4x\right)(x^4-6x^3+9x^2) \geq 0$.

Solución:
Restricción raíz cuadrada: $4x^2-25 \geq 0$, se cumple para x en $C.Rest = \left]-\infty,-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2},+\infty\right[$.
Tenemos que resolver $\left(2\sqrt{4x^2-25}+5-4x\right)x^2(x-3)^2 \geq 0$.

- Para $x=3$ se cumple la desigualdad. Para $x=0$ no, por la restricción.
- Para $x \neq 3$, $x \neq 0$, se tiene $x^2(x-3)^2 > 0$, luego basta analizar $\left(2\sqrt{4x^2-25}+5-4x\right) \geq 0$.

$$2\sqrt{4x^2-25}+5-4x \geq 0 \iff 2\sqrt{4x^2-25} \geq 4x-5.$$

Analizamos

i) $4x-5<0$: Cumplen todos los valores con $x<\frac{5}{4}$ en $C.Rest$. $C.S_i =]-\infty,-5/2]$

ii) $4x-5 \geq 0$: Para los valores en $\left[\frac{5}{4},+\infty\right[\cap C.Rest$, puede elevar al cuadrado y resolver: $4(4x^2-5) < (4x-5)^2 \iff x \geq \frac{25}{8}$. $C.S_{ii} = \left[\frac{25}{8},+\infty\right[$.

Finalmente $\boxed{C.S = \left]-\infty,-\dfrac{5}{2}\right] \cup \{3\} \cup \left[\dfrac{25}{8},+\infty\right[}$.

2. Encuentre los valores de la constante real a que hacen que el conjunto solución de

$$x^3+(a-1)x-a \leq 0$$

sea un intervalo.

Solución:

Factorizando se llega a la inecuación $(x-1)(x^2+x+a) \leq 0$.
Analicemos cuántas raíces reales tiene el factor cuadrático según los valores de a:

- Si $a>\frac{1}{4}$, tenemos $x^2+x+a>0$ para todo x real. Se reduce a $x-1 \leq 0$. $C.S. =]-\infty,1]$.
- Si $a=\frac{1}{4}$, tenemos $x^2+x+a = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, queda la inecuación $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$. $C.S. =]-\infty,1]$.
- Si $a<\frac{1}{4}$, la cuadrática tiene dos raíces reales diferentes: $x_1 = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{1-4a}}{2}$.
  Cuando $a=-2$: $x_1=-2$, $x_2=1$, la inecuación queda $(x-1)^2(x+2) \leq 0$. $C.S. =]-\infty,-2] \cup \{1\}$.
  Cuando $a \neq -2$ la inecuación tiene 3 raíces reales diferentes y el C.S. será la unión de intervalos disjuntos.

Finalmente podemos ver que el C.S. es un solo intervalo sólo para todos los $\boxed{a \geq \dfrac{1}{4}}$.

3. En cada caso, halle el dominio implícito de la función f dada su regla de correspondencia:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{mx^2 - m^2x + m - x}}$, donde $m < -1$ es una constante real.

Solución:
Por la raíz y el denominador $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : mx^2 - m^2x + m - x > 0\}$.
$mx^2 - m^2x + m - x > 0 \iff (mx-1)(x-m) > 0 \iff \left(x - \frac{1}{m}\right)(x-m) < 0$ pues $m < 0$.

$$\boxed{Dom(f) = \left]m, \frac{1}{m}\right[.}$$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{k-x}}{x + \sqrt{x-k^2}}$, donde k es una constante real con $\frac{1}{2} < k < 1$.

Solución:
Tenemos las restricciones

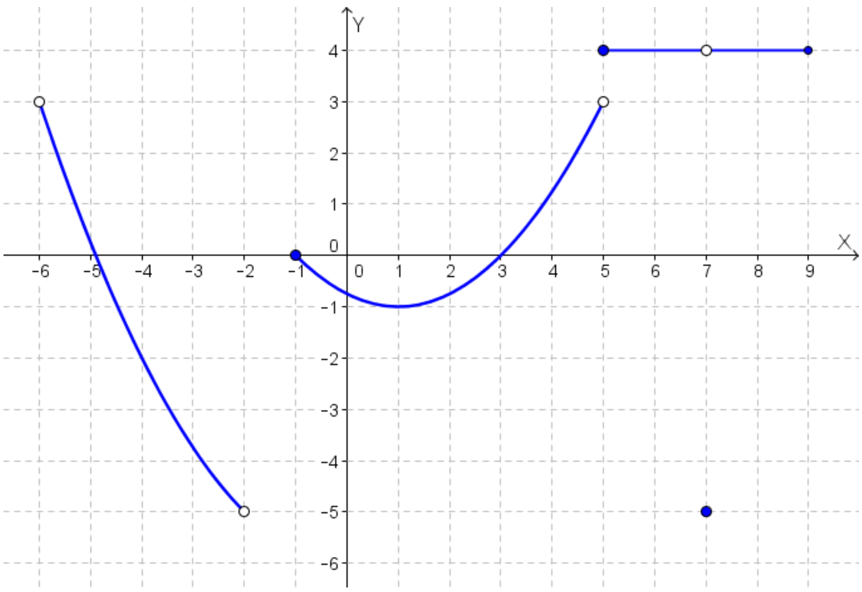
$$k - x \geq 0 \quad \wedge \quad x - k^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x + \sqrt{x-k^2} \neq 0.$$

$$(x \leq k \ \wedge \ x \geq k^2) \quad - \{x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{x-k^2} = 0\}.$$

Notamos que para que $x + \sqrt{x-k^2} = 0$ tendría que cumplirse que $x \leq 0$ y $(\sqrt{x-k^2})^2 = (-x)^2$, lo que nos lleva a la cuadrática $x^2 - x + k^2 = 0$ pero por ser $\frac{1}{2} < k < 1$ esta cuadrática nunca se hace 0.
Además como $\frac{1}{2} < k < 1$, se tiene $k^2 < k$, de donde el dominio resulta:

$$\boxed{Dom(f) = [k^2, k].}$$

4. Se muestra la gráfica de una función f.



a) Encuentre el dominio y rango de la función f.
Respuesta: $Dom(f) =]-6,-2[\cup [-1,9]$; $Ran(f) = [-5,3[\cup \{4\}$.

b) Determine, si existen, el valor máximo de f y el valor mínimo de f e indique para qué valores de x se obtienen.

Respuesta:

Valor máximo es 4 y se obtiene para todo $x \in [5,9]-\{7\}$.

Valor mínimo es -5 y se obtiene para $x=7$.

c) Halle los valores de x tales que $-2 \leq f(x) < 4$.

Respuesta: $]-6,-4] \cup [-1,5[$.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Existe $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 2$, tal que $x^2 - 3x + a > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Falso.

Para todo a con $-2 < a < 2$, el discriminante de la cuadrática en x es $9-4a > 0$ y el coeficiente de x^2 es positivo, luego $x^2 - 3x + a \leq 0$ para $x \in \left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{9-4a}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-4a}}{2}\right]$.

b) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple que $y^2 > xy - x$.

Solución: Verdadero.

Existe $x = 1$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple $y^2 - (1)y + (1) > 0$, luego $y^2 > (1)y - (1)$.

Obs: En general cumple cualquier $x \in]0,4[$.

c) Una condición necesaria para $1 \leq x^2 + x$ es que $x \geq 1$ o $x \leq -1$.

Solución: Falso.

En primer lugar lo que se pedía analizar es: Si $1 \leq x^2 + x$ entonces $x \geq 1$ o $x \leq -1$.

Puede dar un contraejemplo como: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces cumple $x^2 + x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \geq 1$ pero $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

d) Para todo $x < 0$ existe $y < 0$ tal que $xy > 1$.

Solución: Verdadero.

Para todo $x < 0$ existe $y = \frac{2}{x} < 0$ tal que $xy = 2 > 1$.

6. Demuestre que la siguiente proposición es verdadera:

$$\text{Es suficiente que } 5x^2 \leq y + 1 \text{ para que } 10|x| \leq y + 6.$$

Solución:

Usando contradicción o reducción al absurdo: Si asumimos $5x^2 \leq y + 1 \land 10|x| > y + 6$.
Tendríamos $5x^2 \leq y + 1 \land y + 1 < 10|x| - 5$, entonces $5x^2 < 10|x| - 5$, de donde $5x^2 - 10|x| + 5 < 0$ pero esto es $5(|x|-1)^2 < 0$ que es absurdo en $\mathbb{R}$.

San Miguel, 22 de abril de 2021.