ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII **PUCP**

Año: 2023 Número: 5085

Código de alumno

Primer examen

Choccelahua Marcañaupa Fran

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Fran

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H102

Fecha: 09 / 10 / 2023

Nombre del profesor: Norma Rubio

Nota

19

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$X = u\cos\theta - v\,\text{sen}\theta$

$Y = v\cos\theta + u\,\text{sen}\theta$

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$

$2\,\text{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

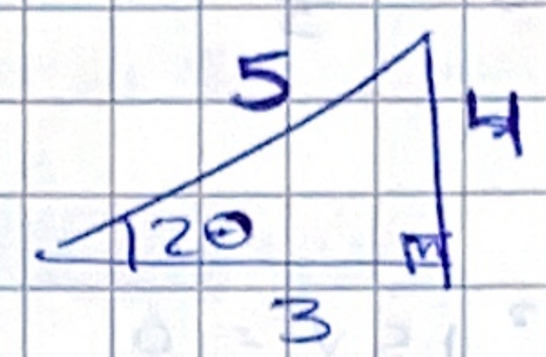
$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

(1) $\mathcal{C}: 17x^2 + 12xy + 8y^2 - K = 0$

→ Vemos: $A = 17$; $B = 12$; $C = 8$; $A \neq C$

⟹ θ: ángulo de rotación

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{12}{17-8} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$



→ $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$

· reemplazamos: · $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{2}{\sqrt5}$

· $\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{1}{\sqrt5}$

(2)

→ Ec. de rotación:

$x = u\frac{2}{\sqrt5} - v\frac{1}{\sqrt5}$

$y = v\frac{2}{\sqrt5} + u\frac{1}{\sqrt5}$

⟹ $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt5}(2u - v) \\ y = \frac{1}{\sqrt5}(u + 2v) \end{cases}$

· reemplamos en $\mathcal{C}$:

· $17x^2 = 17\left(\frac{1}{\sqrt5}(2u-v)\right)^2 = \frac{17}{5}(4u^2 + v^2 - 4uv)$

· $12xy = 12\left(\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2(2u-v)(u+2v)\right) = \frac{12}{5}(2u-v)(u+2v) = \frac{12}{5}(2u^2 + 4uv - uv - 2v^2$

· $8y^2 = 8\left(\frac{1}{\sqrt5}(u+2v)\right)^2 = \frac{8}{5}(u^2 + 4v^2 + 4uv)$

· $-k = -k$

Luego:

$\frac{68}{5}u^2 + \frac{17}{5}v^2 - \frac{68}{5}uv$

$\frac{24}{5}u^2 + \frac{36}{5}uv - \frac{24}{5}v^2$

$\frac{8}{5}u^2 + \frac{32}{5}v^2 + \frac{32}{5}uv$

$-k$

Vemos: $-\frac{68}{5}uv + \frac{36}{5}uv + \frac{32}{5}uv = 0$

· el término mixto se elimina en el sistema uv.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

→ Tenemos : $\frac{1}{5}u^2(68+24+8) + \frac{17}{5}v^2 - \frac{24}{5}v^2 + \frac{32}{5}v^2 - k = 0$

$20u^2 + 5v^2 - k = 0$

$20u^2 + 5v^2 = k$.

1.5

Ecuación que nos permite identificar una cónica $\Rightarrow$ $\frac{u^2}{k/20} + \frac{v^2}{k/5} = 1$

~~representa una elipse~~

$68 + 24 + 8 = 100$

$17 + 32 = 49$, $49 - 24 = 25$

(b) Si $k=0$ $\Rightarrow$ $20u^2 + 5v^2 = 0$

$20u^2 = -5v^2$

$-4\underset{(\geq 0)}{u^2} = \underset{(\geq 0)}{v^2}$ ← no representa ningún lugar geométrico.

~~Nos representa 2 rectas~~.

0.5

Correcto, es porque se trata de un punto $(0;0)$

(c) Se sabe que $\mathcal{E}$ es elipse ; eje mayor $= 2a = 4$

$\Rightarrow a = 2$

De lo anterior : $\frac{u^2}{k/20} + \frac{v^2}{k/5} = 1$ Pero : $\left(\frac{k}{5} > \frac{k}{20}\right)$

1.25

$\Rightarrow \frac{k}{5} = a^2 = 4$

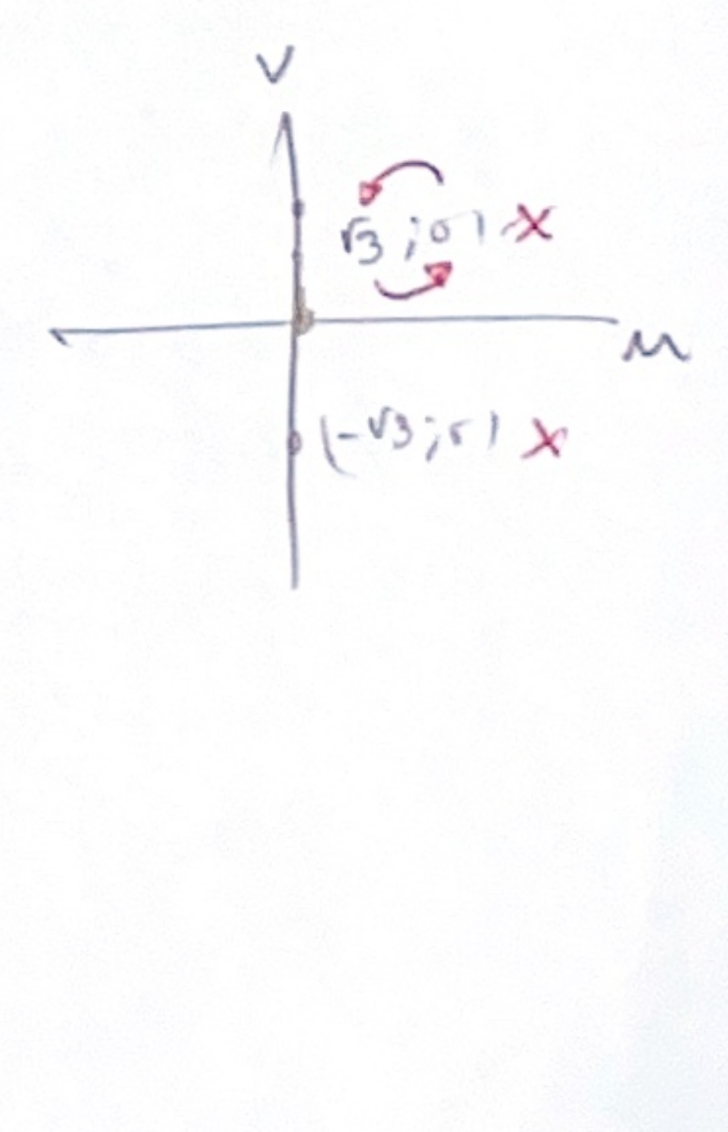
$\rightarrow k = 20$

$\Rightarrow u^2 + \frac{v^2}{4} = 1$

← Se tiene una $\mathcal{E}$. Centro $(0;0)$ en uv.

- eje focal // eje v
  → $\mathcal{L}_{focal}$: $u = 0$
- $a = 2 \wedge b = 1$
  $\Rightarrow c = \sqrt{3}$ ✓

$u = 1 + c^2$



en uv

$\Rightarrow$ $C(0;0) \rightarrow F_1(\sqrt{3};0)$ ✗ es $F_1(0;\sqrt{3})$

$F_2(-\sqrt{3};0)$ $F_2(0;-\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ en XY :

F_1: $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\sqrt{3})$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(+\sqrt{3})$

F_2: $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\sqrt{3})$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{3})$

Error

$\Rightarrow F_1 : \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$ ✗ $F_2 : \left(\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}; \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$ ✗

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

② → $\mathcal{L}$: $m = \frac{3-0}{0-3} = -1 \Rightarrow \mathcal{L}: (x-3)\cdot -1 = y-0$

$-x+3 = y$

$0 = y + x - 3$

→ Para la Circunferencia:

Tenemo el Centro $(C_x; C_y)$ ∧ el radio $= 2\sqrt{2}$

Ademas $\mathcal{L}$ es tangente a la $\mathcal{C}$ en $(0;3)$

$\Rightarrow \cancel{2\sqrt{2} = |0+3-3|}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2} = \frac{|C_x + C_y - 3|}{\sqrt{2}} \rightarrow 4 = \underbrace{|C_x + C_y - 3|}$

• $7 = C_x + C_y$

ó • $-1 = C_x + C_y$

• Pero en la gráfica observamos que el Centro está en el IIC donde las abscisas son negativas.

$\mathcal{C}: (x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = 8$

a) 3.0

• el punto $(0;3) \in \mathcal{C} \rightarrow C_x^2 + (3 - C_y)^2 = 8$

$C_x^2 + 9 + C_y^2 - 6C_y = 8$

2 + 5 = 7

4 + 4 = 0

• Si $C_x + C_y = 7$ ∧ $C_x^2 + (3 - C_y)^2 = 8$

Cumple $\Rightarrow C_x = 2$ ∧ $C_y = 5$ } NO Cumplen

Pero: $C_x < 0$ $C_x = -2$ ∧ $C_y = 9$

• Si $C_x + C_y = -1$ ∧ $C_x^2 + (3 - C_y)^2 = 8$

Cumple que $C_x < 0$ $\Rightarrow \boxed{C_x = -2 \wedge C_y = 1}$

Además, el gráfico nos da una cierta aproximación de los valores.

• reemplazando:

$\mathcal{C}: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

- el Centro de $\mathcal{C}$ = al Centro de la $\mathcal{E}$
  - Centro de $\mathcal{E}$: $(-2;1)$
- Además uno de sus Focos es $(-6;1)$
  $\Rightarrow d(C;F) = c$
  $\Rightarrow c = 4$
- eje menor: $2b = 8$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$
  $b = 4$ $\quad a^2 = 16+16$
  $a^2 = 32$

→ Vemos que $\mathcal{L}_{focal}$ es horizontal

$\Rightarrow \mathcal{E}: \dfrac{(x+2)^2}{32} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

ⓐ $\mathcal{L}$: $x + y - 3 = 0$ ✓

$\mathcal{C}$: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$ ✓

$\mathcal{E}$: $\dfrac{(x+2)^2}{32} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$ ✓

ⓑ 1

Región $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 8 \\ \dfrac{(x+2)^2}{32} + \dfrac{(y-1)^2}{16} \leq 1 \end{cases}$ ✓ ✓ ✓

$-2+1-3 \quad 0$
$-4 \quad \geq 0$

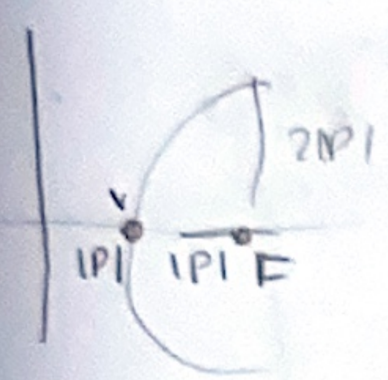
$(-6+2)^2 + (1-1)^2 = 8$
$16 \quad 0 >$

$\dfrac{4}{32} + \dfrac{4}{16} \quad 1$
$\dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{8}$
$\dfrac{3}{8} < 1$

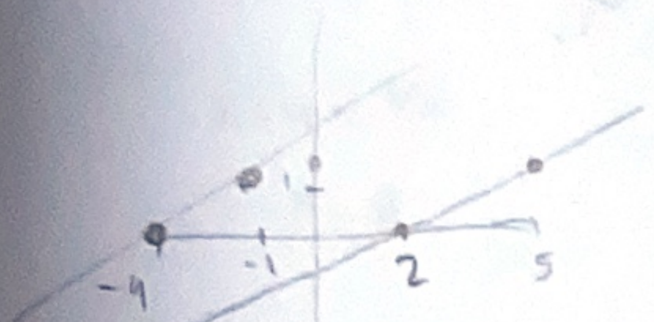
$\dfrac{4}{32} + \dfrac{1}{16}$

$\dfrac{6}{32} < 1$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$x-2=3y$



$8-12-2=0$

$8=12+4$

$|x-20|$ $|x-14|$

$x-20=2(x-14)$, $20-x=2(x-14)$

$x-20=2x-28$ $20-x=2x-28$

$8=x$ ∨ $x=16$

$p=2$ ∨ $p=\frac{2}{3}$

$F(8;2)$ $F(16;\frac{14}{3})$

$V(8;4)$ $V(16;\frac{20}{3})$

$\frac{14}{3}-\frac{20}{3}=(\frac{6}{3})^2$

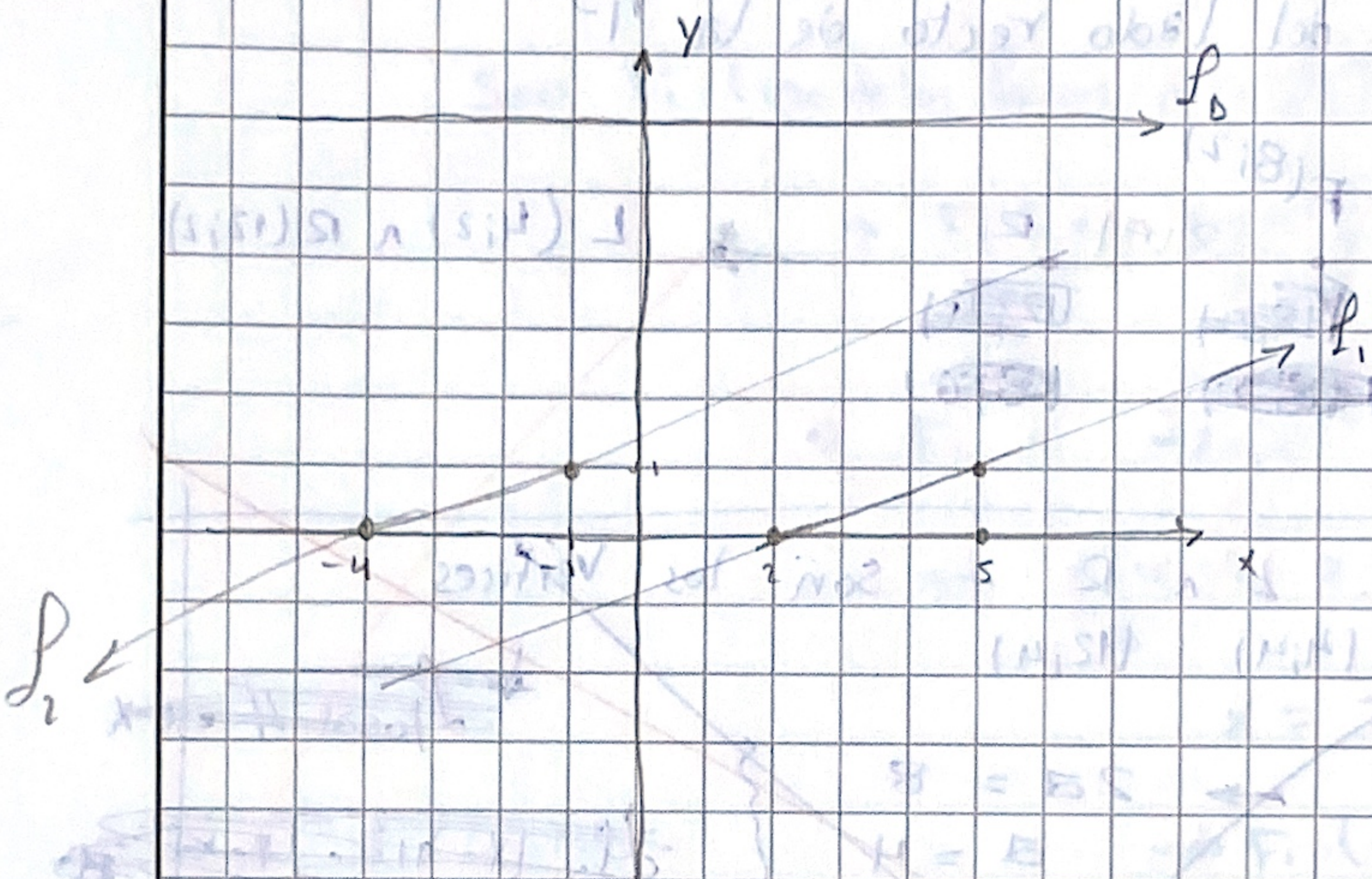
Presente aquí su trabajo

(3) $\mathcal{L}_D: y=6$ de $\mathcal{P}$ → $\mathcal{L}_{focal}$ es ~~horizontal~~ Vertical

(a)

~~$\mathcal{P}: (y-k)^2=4|p|(x-h)$~~ → $\mathcal{P}: (x-h)^2=4|p|(y-k)$

- Sea F el foco de $\mathcal{P}$
  → $F\in\mathcal{L}_1: x-3y-2=0$
- Sea V el Vértice de $\mathcal{P}$
  → $V\in\mathcal{L}_2: x-3y+4=0$
- Esboso de la gráfica



- Si $\mathcal{L}_{focal}$ es vertical y $(V),(F)\in\mathcal{L}_f$
  → V ∧ F tienen la misma abcisa.

- Sea $F(x;\frac{x-2}{3})$ ∧ $V(x;\frac{x+4}{3})$ ∧ $\mathcal{L}_D: y-6=0$

→ $d(F;\mathcal{L}_D)=2|p|$ ∧ $d(V;\mathcal{L}_D)=|p|$

$|\frac{x-2}{3}-6|=2|p|$ ∧ $|\frac{x+4}{3}-6|=|p|$

→ $|x-20|=6|p|$ ∧ $|x-14|=3|p|$

$2|x-14|=6|p|$

→ $|x-20|=2|x-14|$

- $x-20=2(x-14)$ ∨ $20-x=2(x-14)$
  $x-20=2x-28$ ∨ $20-x=2x-28$
  $8=x$ ∨ $16=x$
  → $|p|=2$ → $|p|=\frac{2}{3}$

- $F(8;2)$ ∨ $F(16;\frac{14}{3})$
  $V(8;4)$ $V(16;\frac{20}{3})$

Pero: $d(F;V)=|p|$

→ $|4-2|=|p|$ $|\frac{20}{3}-\frac{14}{3}|=|p|$

$|p|=2$ $|\frac{6}{3}|=|p|$

$2=|p|$

✓ cumple ~~no~~ cumple. X

$|p|=2$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

⟹ tenemos que: $F(8;2) \wedge V(8;4)$

∴ el F se encuentra por debajo del V

$\rightarrow p < 0$

$|p| = 2$

$p = -2 \rightarrow 4p = -8$

∴ $\boxed{\mathcal{P}: (x-8)^2 = -8(y-4)}$

• Sea $\overline{LR}$ extremos del lado recto de la $\mathcal{P}$ $(L \wedge R)$

$L \quad 2|p| \quad F(8;2) \quad 2|p| \quad R$

$\rightarrow L(4;2) \wedge R(12;2)$

• Para la hipérbola: $L \wedge R$ son los vértices
$(4;4) \quad (12;4)$

$\rightarrow 2a = 8$

$a = 4$

~~$\mathcal{L}_{focal} \parallel$ eje x~~

~~$\mathcal{H}: \frac{(x-h)^2}{16} - \frac{(y-k)^2}{b^2}$~~

• Además: F_1 (Foco 1 de la $\mathcal{H}$) $\in \mathcal{L}_2$ ∧ ~~$\mathcal{L}_{focal}$~~

~~$\rightarrow F_1\left(x; \frac{x+4}{3}\right) \rightarrow \frac{x+4}{3} = 4$~~

~~$\Rightarrow x = 8$~~

~~∴ $F_1(8;4)$~~

• $\mathcal{L}_{focal} \parallel$ eje y $\rightarrow \mathcal{H}: \frac{(y-k)^2}{16} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

• V es punto medio → mediatriz de $\overline{LR}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_f: x = 8$

$2|p| = 4$

4.0

$x - 3y + 4 = 0$

$\left(x; \frac{x+4}{3}\right) = 4$

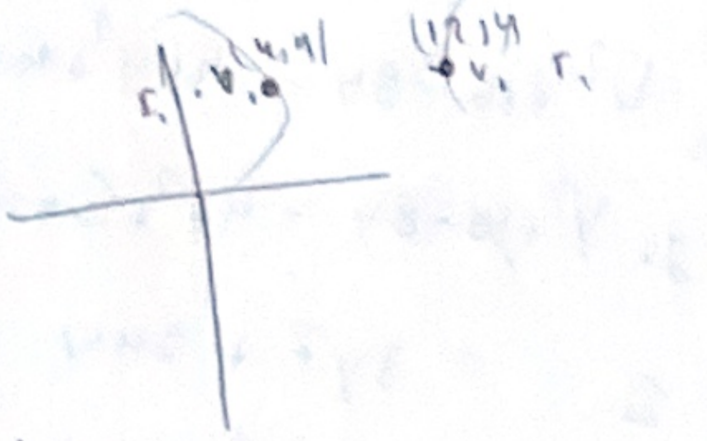
$\frac{(4-h)^2}{16} - \dots = 1$

$(4-h)^2 = 16$

$4 - h = -4$

$h = 0$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$\frac{x+4}{3} = 4$

$x+4 = 12$

$x = 8$

$\left(x ; \frac{x+4}{3}\right)$

$\frac{x+4}{3} = 2$

$x+4 = 6$

$x = 2$

$(2 ; 2)$

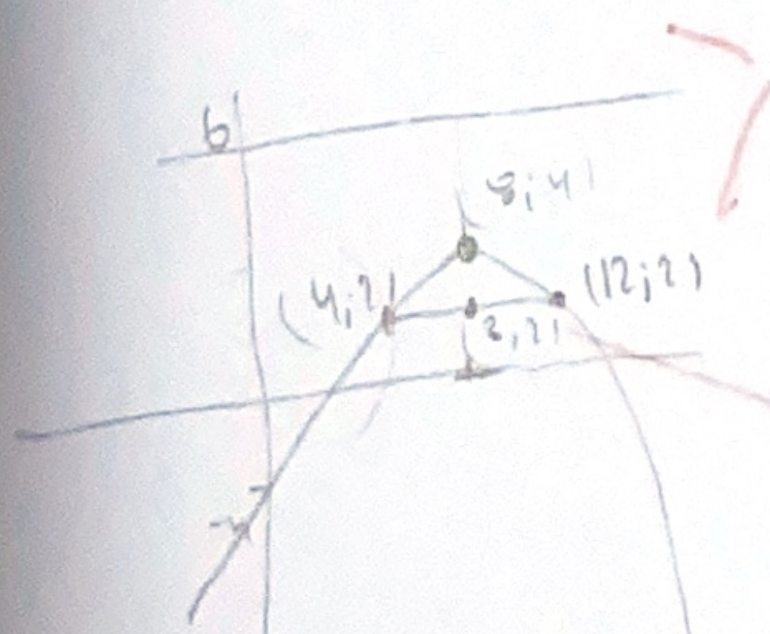
$y = 0$

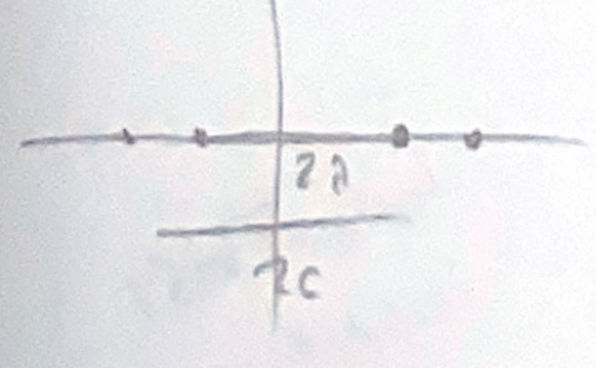
$\left|\frac{x+4}{3}\right| = 2$

$x+4 = 6$

$x = -10$

$x = 2$





Presente aquí su trabajo

(b)

- Para la hipérbola, $L(4;2) \wedge R(12;2)$ son Vertices

$\rightarrow$ eje focal // eje X.

$\rightarrow$ Y es mediatriz de $\mathcal{L}_{focal} \rightarrow$ eje menor : $\mathcal{L}_{eje\ menor} : x = 8$.

$\rightarrow$ eje focal: $y = 2$: $\mathcal{L}_{focal}$

- Sabemos que :

Sea F_1 (uno de los focos de la $\mathcal{H}$) $\in \mathcal{L}_2$

$\rightarrow F_1\left(x ; \frac{x+4}{3}\right)$

$\Rightarrow F_1 \in \mathcal{L}_{focal}$

$\Rightarrow \frac{x+4}{3} = 2$

$x = 2$

$\Rightarrow F_1(2;2)$

$\Rightarrow d(F_1; C_e) = c \quad ; \quad C_e = (8;2)$

$c = 6$

.F de P es el centro de la $\mathcal{H}$. ($\in \mathcal{L}_{eje\ menor}$) y es punto medio de $\overline{LR}$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$36 = 16 + b^2$

$\rightarrow b^2 = 20$

$\left\{ \begin{array}{l} \overline{LR} = d(V_1 V_2) \\ 8 = 2a \\ 4 = a \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H} : \frac{(x-8)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{20} = 1}$$

Presente aquí su trabajo

(4) $d(P;A) = 2\,|P;L|$ $\left\{ \begin{array}{l} \cdot P(x;y) \quad A(1;4) \\ \cdot L: \; y+2=0 \end{array}\right.$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} = 2\dfrac{|y+2|}{1}$ ✓

$(x-1)^2+(y-4)^2 = 4(y+2)^2$

$x^2+1-2x+y^2+16-8y = 4(y^2+4+4y)$

$x^2+y^2-2x-8y+17 = 4y^2+16+16y$

$x^2-3y^2-2x-24y+1=0$

$(x-1)^2-3(y^2+8y+16-16)=0$

$(x-1)^2-3(y+4)^2=-48$

$3(y+4)^2-(x-1)^2=48$

(a) $\dfrac{(y+4)^2}{16}-\dfrac{(x-1)^2}{48}=1$

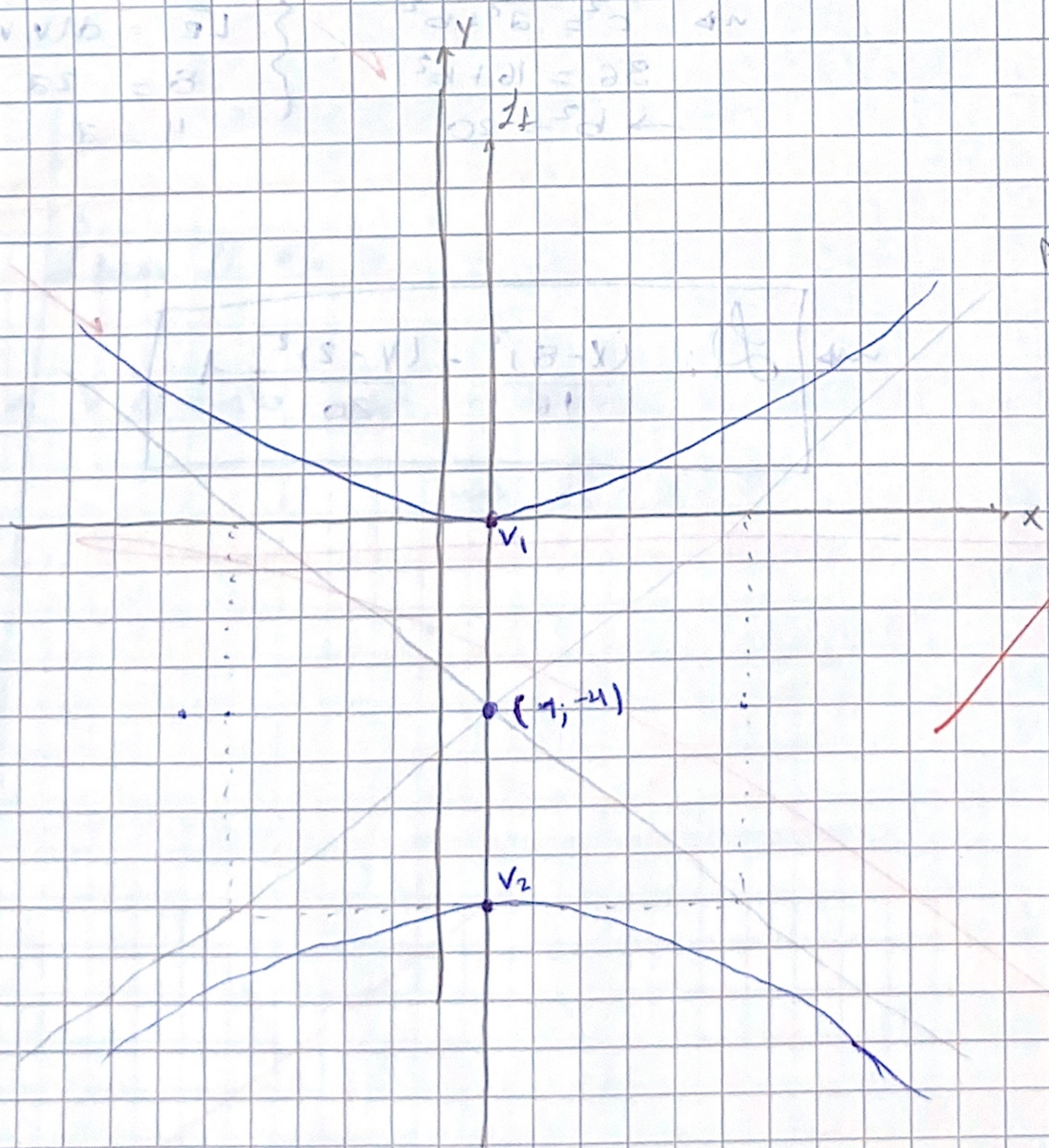
1.5

(b) El lugar geometrico hallado es una hipérbola de Centro $(1;-4)$; eje focal // eje y

$\cdot\, a=4$; $b=4\sqrt{3}$

Asintotas

2.5



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$y^2+16-8y = 4(y^2+4+4y)$

$y^2+16-8y = 4y^2+16+16y$

$= 3y^2+24y$

$= 3(y^2+8y)$

$= 3(y^2+8y+16-16)$

$= 3(y+4)^2-48$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

(5) (a) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} + 5\vec{c} = \|\vec{b}\|\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$\underbrace{(-12+12)}_{0}\vec{a}$ $\quad 5(4;2) = 5\vec{u} - \frac{1}{2}(3;4)$

$\rightarrow (20;10) + (\frac{3}{2};2) = 5\vec{u}$

$(\frac{43}{2};12) = 5\vec{u}$

$\rightarrow \vec{u} = (\frac{43}{10};\frac{12}{5})$

1.0

(b) se tiene: $B(0;m;1)$ y $E(1;-2;m)$; $m>0$

$\rightarrow \vec{EB} = \vec{B} - \vec{E}$
$= (0;m;1) - (1;-2;m)$

$\vec{EB} = (-1;m+2;1-m)$

$\|\vec{EB}\| = \sqrt{1+(m+2)^2+(1-m)^2}$

$\sqrt{66} = \sqrt{1+m^2+4+4m+1+m^2-2m}$

$66 = 6+2m^2+2m$
$60 = 2m^2+2m$
$30 = m^2+m$
$30 = m(m+1)$

0.5

$\rightarrow m = 5 > 0$ $\qquad$ ∴ (b₁) $m = 5$

$\Rightarrow B(0;5;1)$; $E(1;-2;5)$

también tenemos: $A(1;1;1)$

- Del gráfico: $\vec{AD} = \vec{BC}$; $\vec{AD}$ es $\parallel$ $(2;3;5)$

$\|\vec{AD}\| = \|\vec{BC}\|$ $\qquad \rightarrow \vec{AD} = \lambda(2;3;5)$; $\lambda>0$ mismo sentido
$\|\vec{AD}\| = 2\sqrt{38}$

2.0

$\rightarrow \sqrt{(2\lambda)^2+(3\lambda)^2+(5\lambda)^2} = 2\sqrt{38}$

$\lambda\sqrt{4+9+25} = 2\sqrt{38}$

$\lambda\sqrt{38} = 2\sqrt{38} \Rightarrow \lambda = 2$

$\rightarrow \vec{AD} = (4;6;10)$

(0;5;1)-(1;-2;5)
-1;7;-4
1 49 16
66

$|2\lambda| \sqrt{2^2+3^2+5^2}$
4+9+25
$\lambda\sqrt{38}$

EA = A − E
1;1;1 − 1;−2;5
0 3 −4

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b2) • $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

$= (0;5;1) - (1;1;1)$

$\boxed{\vec{AB} = (-1;4;0)}$

• $\boxed{\vec{AD} = (4;6;10)}$

• $\vec{EA} = \vec{A} - \vec{E}$

$= (1;1;1) - (1;-2;5)$

$\boxed{\vec{EA} = (0;3;-4)}$

b3) Expresar $\vec{EC}$ en función de : $\vec{AB}$; $\vec{AD}$ y $\vec{EA}$

• Vemos que : $\vec{AB} = \vec{DC}$

$\rightarrow \vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DC}$

$\therefore \vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{AB}$

0,5