PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Fundamentos de Cálculo
Práctica Calificada N° 1
Semestre académico 2017-1
H-101, H-102, H-104, H-105, H-107, H-108, H-109, H-110, H-111, H-112, H-131, H-132

Indicaciones generales:

- Tiempo de duración: 1 h 50 min.
- No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomados en cuenta en la calificación.

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente su respuesta:

   a) Sea $A = \{2, 4, 11\}$, podemos afirmar que $\exists\, x \in A,\ \forall\, y \in A : x^2 + 3y \geq 80$. **(1.0 punto)**

   b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ con $x \neq -y$, se cumple que $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} \leq x + y$. **(2.0 puntos)**

   c) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\dfrac{x^3}{x^6 + 1} \leq \dfrac{1}{2}$. **(2.0 puntos)**

   d) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe n en $\mathbb{Z}^+$ tal que $a^n \geq a$. **(1.0 punto)**

   e) La negación de **(2.0 puntos)**

   "Si $k^2 \geq 4$ o $k^3 \leq 1$, entonces $k^2 + 2 \geq 3k$ "

   es

   "$k^2 \geq 4$ o $k^3 \leq 1$, y $k^2 + 2 < 3k$".

2. Dada la siguiente proposición para número entero positivo:

   "La desigualdad $n + 3 < (n + 1)^2$ se cumple para todo número entero positivo n mayor o igual a n_0"

   a) Halle el menor número entero positivo n_0 para el cual se cumple la desigualdad. **(1.0 punto)**
   b) Con el valor de n_0 hallado en la parte a), usando inducción matemática, demuestre la proposición. **(3.0 puntos)**

3. Los números a_n, con $n \in \mathbb{Z}^+$, se definen recursivamente por:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 3, \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

   Usando inducción matemática, demuestre que
   a) a_n es un número entero positivo para todo n entero positivo. **(2.0 puntos)**
   b) a_{3n} es múltiplo de 7, para todo n entero positivo. **(3.0 puntos)**

4. Construya, en cada caso, un circuito lógico equivalente a la proposición dada:
   a) $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ **(1.5 puntos)**
   b) $[\sim (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ **(1.5 puntos)**

Elaborado por los profesores del curso
San Miguel, 3 de abril de 2017

45 AÑOS ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS
Formación de excelencia

PUCP

Práctica

Año: 2016 Número: 7373

Código de alumno

Carrasco Fuentes Elena

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

ENTREGADO
17 ABR. 2017

Firma del alumno

Curso: F. Cal

Práctica N°: 1

Horario de práctica: P-132

Fecha: 03/04/17

Nombre del profesor: W. Diaz

Nota
18

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

(1) **Presente aquí su trabajo**

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{x^2-y^2-(x+y)^2}{(x+y)}$

$x^2-y^2-(x^2+2xy+y^2)$

$-2xy$

$x-y \leq x+y$

$-y \leq y$

$x=y$

$x-y=0$

$(x-y)(x+y)=0$

$2x^3 \leq x^6+1$

$0 \leq x^6-2x^3+1$

$0 \leq (x^3-1)^2$

$2x^3 \leq x^6+1$

x^6-2x^3+1

(a) Sea $A=\{2,4,11\}$

Se puede afirmar que $\exists x \in A, \forall y \in A: x^2+3y \geq 80$

Para $y=2$: $x^2+6 \geq 80$ $x=11$

para $y=4$: $x^2+12 \geq 80$ $x=11$

para $y=11$: $x^2+33 \geq 80$ $x=11$

Verdadero: Existe algún $x \in A$ (11) tal que Para todo y (2, 4, 11) se cumple que $x^2+3y \geq 80$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ con $x \neq -y$, se cumple que $x+y \neq 0$

Por Contraejemplo, $\frac{x^2-y^2}{(x+y)} \leq x+y$

Para $x=1$, $y=-4$: $\frac{1-(-4)^2}{1+(-4)} \leq 1-4$

$\frac{1-16}{-3} \leq -3$

$\frac{-15}{-3} \leq -3$ NO

$5 \leq -3$

Falso

(c) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{x^3}{x^6+1} \leq \frac{1}{2}$

* $x \in \mathbb{R}$
* $x^3 \in \mathbb{R}$
* $x^3-1 \in \mathbb{R}$
* $(x^3-1)^2 \geq 0 \wedge \in \mathbb{R}$
* $x^6-2x^3+1 \geq 0$
* $x^6+1 \geq 2x^3$
* $\frac{(x^6+1)}{2(x^6+1)} \geq \frac{2x^3}{2(x^6+1)}$ $\rightarrow x^6+1>0$
* $\frac{1}{2} \geq \frac{x^3}{x^6+1}$

$p = x \in \mathbb{R} \equiv V$

$q = \frac{x^3}{x^6+1} \leq \frac{1}{2} \equiv V$

$p \rightarrow q \equiv V \rightarrow V \equiv V$

Verdadero

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

d) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe n en $\mathbb{Z}^+$ tal que $a^n \geq a$

Si $a^n \geq a$ $\quad n \geq 1$

Probar que ~~$a^{n+1} \geq a$~~

para afirmar que $S = \mathbb{N}$.

~~$a^n \cdot a \geq a \cdot a$~~

~~$a^{n+1} \geq a^2 \geq a$~~

~~$\boxed{a^{n+1} \geq a}$~~

Sea $S = \{ n \in \mathbb{Z}^+ \ y \ a \in \mathbb{R} : a^n \geq a \}$

Si $n \in S$

Si $n+1 \in S$

$\longrightarrow S = \mathbb{N}$

Vea que

$a^1 \geq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

luego $n \geq 1$

Verdadero

Se prueba por inducción.

~~la~~ El valor veritati...

e) " Si $\underbrace{k^2 \geq 4 \text{ o } k^3 \leq 1}_{p}$, entonces $\underbrace{k^2 + 2 \geq 3k}_{q}$ "

$\sim (p \rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

$\therefore$ La negación del enunciado es:

~~Si $k^2 < 4 / k / k^3 > 1$~~

$k^2 \geq 4$ o $k^3 \leq 1$ y $k^2 + 2 < 3k$

$\boxed{\text{Verdadero}}$

(2) Demostrar que:

$n + 3 < (n+1)^2$ se cumple $\forall n \geq n_0$

a) para $n = 1$ $\quad 1 + 3 < (1+1)^2$

$4 < 4$ (NO)

para $n = 2$ $\quad 2 + 3 < (2+1)^2$

$5 < 9$ (Sí)

$n_0 = 2$

b)

* Etapa base:

Verificar que para $n = n_0 = 2$ se cumple:

$n + 3 < (n+1)^2$

$2 + 3 < (2+1)^2$

$5 < 9$

(Sí cumple)

* Etapa Inductiva:

– Hipótesis Inductiva: $\quad n \geq 2$

Supongamos que para $n = m$, se tiene

$m + 3 < (m+1)^2$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

— Tesis Inductiva:

Demostrar que para $n = m+1$, se cumple que: $n \geq 2$

$$(m+1)+3 < (m+1+1)^2$$

m^2+4m+4

* Por H.I:

$$m+3 < (m+1)^2$$

$$m+3+1 < (m+1)^2+1$$

$$m+4 < m^2+2m+2$$

$$m+4 < (m+2)^2-2m-2$$

$$m+4 < (m+2)^2-2(m+1)$$

$$\rightarrow (*)\ m+4 < (m+2)^2 - 2(m+1) < (m+2)^2$$

$$m+4 < (m+2)^2$$

$$(m+1)+3 < (m+1+1)^2$$

l.q.q.d.

Nota: $m+1 \geq 2$
$m \geq 1$
$2m \geq 2$
$2m+2 \geq 4$
$-(2m+2) \leq -4$ (Negativo, por ello (*))

Por tanto $n+3 < (n+1)^2 \ \forall n \geq 1$ queda demostrado

3) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$

a) Demostrar que $a_n > 0$, $n > 0$
$a_n \geq 1$, $n \geq 1$

* ETAPA BASE
para $n_0 = 1$

$$a_1 \geq 1$$

$$1 \geq 1 \text{ (Sí cumple)}$$

* ETAPA INDUCTIVA:
→ HIPÓTESIS INDUCTIVA:
Supongamos que para $n = m$, y $1 \leq k \leq m$ se tiene $n \geq 1$

$$a_k \geq 1 \wedge a_k \in \mathbb{Z}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

* Tesis Inductiva.
Demostrar que para $n=m+1$, se cumple:

$$a_{m+1} \geq 1 \wedge a_{m+1} \in$$

$\longrightarrow$ $a_{m+1} = 3a_m - 2a_{m-1}$

Por H.I $a_m \geq 1$
$3a_m \geq 3$

Por HI $a_{m-1} \geq 1$
$2 a_{m-1} \geq 2$

$3a_m \geq 3$
$2a_{m-1} \geq 2$
$3a_m - 2a_{m-1} \geq 1$

$\hookrightarrow$ $a_{m+1} \geq 1$ Lqqd

Por tanto $a_n \geq 1$ queda demostrado.

Falta probar que es entero

b) Demostrar que $a_{3n} = \overset{\circ}{7}$ $\forall n \geq 1$

* ETAPA BASE:

Para $n=1$ Verificar que:
¿ $a_{3(1)} = \overset{\circ}{7}$?

$\longrightarrow$ $a_3 = 3a_2 - 2a_1$
$a_3 = 3(3) - 2(1)$
$a_3 = 9 - 2$
$a_3 = 7 = \overset{\circ}{7}$ (Sí cumple)

* ETAPA INDUCTIVA:

$\longrightarrow$ HIPÓTESIS INDUCTIVA:

Suponer que para $n=m$, $1 \leq k \leq m$ se tiene $n \geq 1$

$$a_{3k} = \overset{\circ}{7}$$

$\longrightarrow$ Tesis Inductiva:

Demostrar que para. $n=m+1$

$$a_{3m+3} = \overset{\circ}{7}$$

3(m-1)
3m-3
3(m-2)
3m-6

3(m)
3(m-1)

3(m+1)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$\rightarrow \quad a_{3m+3} = 3\underbrace{a_{3m+2}} - 2a_{3m+1}$

$a_{3m+3} = 3(3a_{3m+1} - 2a_{3m}) - 2a_{3m+1}$

$a_{3m+3} = 9a_{3m+1} - \underbrace{6a_{3m}}_{\text{Por H.I } 7^0} - 2a_{3m+1}$

$a_{3m+3} = 7a_{3m+1} - 7^0$

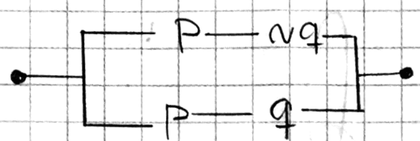
$a_{3m+3} = 7^0 - 7^0$

$\boxed{a_{3m+3} = 7^0}$ lqqd.

Por tanto $a_{3n} = 7^0$ queda demostrado

1,5

4) a) $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

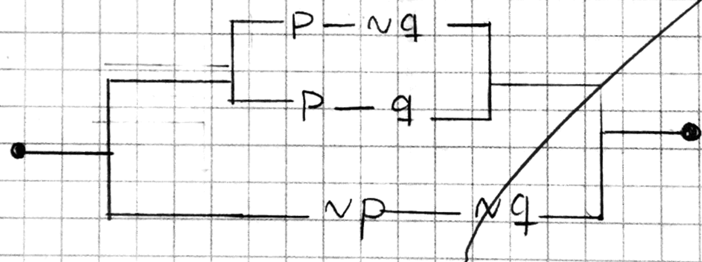


1,5

b) $[\sim(p \rightarrow q) \vee (p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Simplificando $[\sim(\sim p \vee q) \vee (p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$[(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$



1,5