PUCP
Estudios
Generales Ciencias

Fundamentos de Cálculo

Examen Parcial - Soluciones

Semestre Académico 2024 - 1

Horarios: A101, B101, B102, B103, I101 al I105, 0117 al 0121. **(Turno 2)**

1. a) Determine el dominio (implícito) de la función (2,5 pt)

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x}{2-x^2-x}}+\frac{x^2-x}{|x^2+4x+5|-2}.$$

b) Esboce la gráfica de la función (1,5 pt)

$$g(x)=-2(x+2)(x-1)^3(x+1)^4.$$

2. Sean

$$f(x)=(x+1)^{\frac{4}{5}}-2,\ -2\le x\le 5, \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases}\sqrt{27-18x-9x^2}-1, & -3\le x<0;\\ \dfrac{x+11}{2}, & x>0.\end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de la función f. (1 pt)

b) Esboce la gráfica de la función g. (2 pt)

c) Halle la función $f+g$. (2 pt)

3. Sean

$$f(x)=1-\sqrt{3x-5},\ 2\le x\le 10, \qquad \text{y} \qquad g(x)=\frac{x^2}{3}-2x+6,\ x\ge 3.$$

a) Esboce la gráfica de la función f. (1,5 pt)

b) Esboce la gráfica de la función g. (1 pt)

c) Halle la función $f\circ g$. (2 pt)

d) Halle el rango de la función $f\circ g$. (1,5 pt)

4. Una función f cumple las siguientes condiciones: (3 pt)

- El dominio de f es $]-6,6[$.
- El rango de f es $[0,7]$.
- f es una función par.
- Para $x\in[0,3]$, la gráfica de f es un segmento de recta.
- Para $x\in]3,6[$, $f(x)=-x^2+bx+c$, donde b y c son constantes.
- La gráfica de f pasa por los puntos $(1,2)$, $(3,0)$ y $(-4,6)$.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Para todo $a\in\mathbb{R}$, existe $x<0$ tal que $x^2-2x-a^2<0$. (1 pt)

b) Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función impar y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función, entonces la función $g\circ f$ es impar. (1 pt)

Año 2024 Número 2341

Código de alumno

Primer examen

Ruiz Rodríguez, Mycel Fabrizio

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: Fundamentos de Cálculo

Horario: H-118

Fecha: 16/05/24

Nombre del profesor: I. Diaz

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

P1

1) a) $\dfrac{2x}{2-x^2-x} \geq 0$

Restricción: $2-x^2-x \neq 0$

$-x^2-x+2 \neq 0$

$(-x+1)(x+2) \neq 0$

$x \neq 1; -2$

$\dfrac{2x}{(-x+1)(x+2)} \geq 0$

$\dfrac{2x}{(x-1)(x+2)} \leq 0$

Puntos referencia $= -2, 0, 1$

$CS\,I =]-\infty; -2[\;\cup\; [0; 1[$

Continuación de la 1a en P8

$|x^2+4x+5| - 2 \geq 0$

$x^2+4x+4+1 \,|-2 \geq 0$

$|(x+2)^2+1| - 2 \geq 0$

$(x+2)^2+1-2 \geq 0$

$(x+2)^2-1 \geq 0$

$x^2+4x+4-1 \geq 0$

$x^2+4x+3 \geq 0$

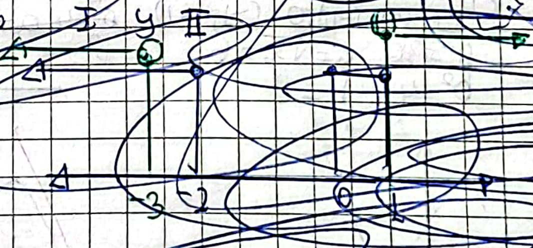
$(x+3)(x+1) \geq 0$

Puntos ref $= -3, -1$

$(x+2)^2+1 \geq 1 > 0$ siempre positivo, por lo que su valor abs sigue siendo el mismo número.

$CS\,II =]-\infty; -3] \cup [-1; +\infty[$

Intersectando I y II



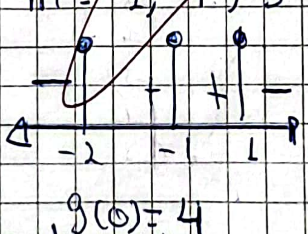
$CS =]-\infty; -3[$

1) b) $g(x) = -2(x+2)(x-1)^3(x+1)^4$

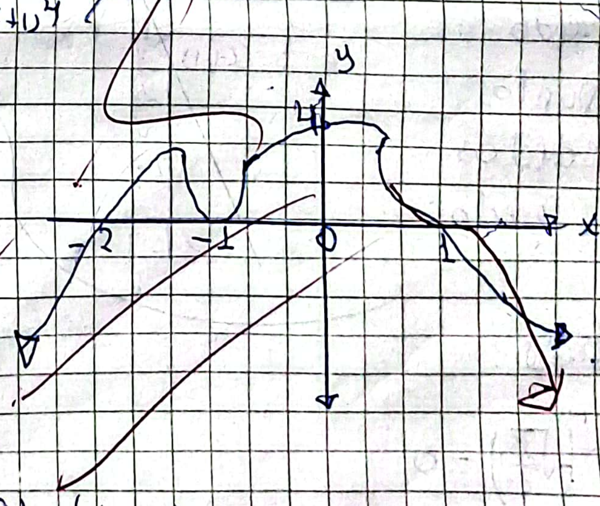
$n = -2 < 0$

$r = -2; -1; 1$

$m = 1; 4; 3$



$g(0) = 4$



Interceptos con ejes:

Eje x $(-2;0)$; $(-1;0)$, $(1;0)$

Eje y $(0;4)$

$(-x+1)(x+2)$

$-x^2-2x+x+2$

$-x^2-x+2$

$-2(2)(-1)(1)$

4

$-2(x+2)(x+1)(x-1)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2)

a) $f(x) = (x+1)^{\frac{4}{5}} - 2$; $-2 \leq x \leq 5$

Centro de simetría : $(-1; -2)$

$\frac{4}{5} = \frac{m}{n}$ = n impar ; $\alpha < 1$ m par

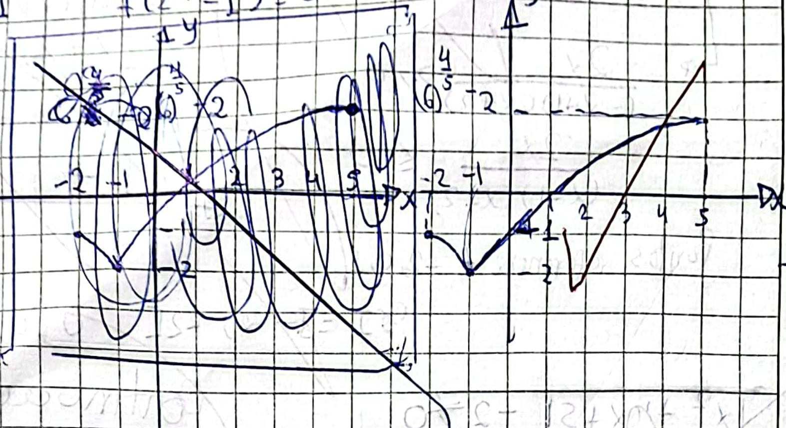
$f(-2) = -1$ $\quad f(5) = (6)^{\frac{4}{5}} - 2$

$f(0) = -1$ $\quad f(2^{\frac{5}{4}} - 1) = 0$

Int ejes

Eje y : $(0; -1)$

Eje x : $(2^{\frac{5}{4}} - 1; 0)$



$(0+1)^{\frac{4}{5}} - 2$

$\sqrt[5]{(1)^4} - 2$

-1

$6^{\frac{4}{5}} - 2$

$(y+1)^2 = -9(1) + 36$

$y = \sqrt{27} - 1$

$-9x^2 - 18x - 9 + 36$

27

b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{27 - 18x - 9x^2} - 1 & ; -3 \leq x < 0 \quad \therefore g_1(x) \\ \frac{x+11}{2} & ; x > 0 \quad \therefore g_2(x) \end{cases}$

Por AMGA:

$g_1(x) = y = \sqrt{27 - 18x - 9x^2} - 1$ $\quad y \geq -1$

$(y+1)^2 = 27 - 18x - 9x^2$

$(y+1)^2 = -9(x+1)^2 + 36$

$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{36} = \frac{36}{36} \longrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1$

Elipse con centro $(-1; -1)$

$a^2 = 36$ $\quad a = \sqrt{36} = 6$

$b^2 = 4$ $\quad b = 2$

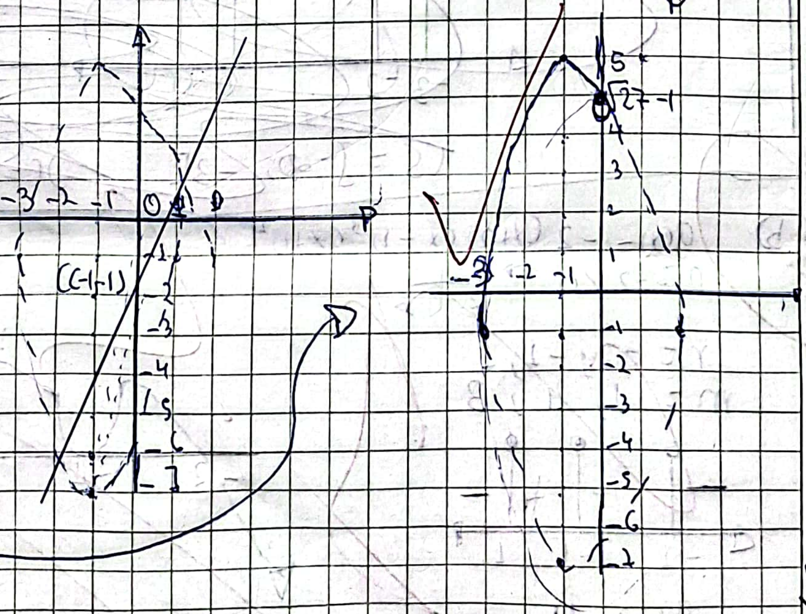
$f(-3) = -1$

$f(0) = \sqrt{27} - 1$

$\boxed{\text{Aproximando } \sqrt{27} \text{ a } 5,\ldots}$

$f(0) = 4,\ldots$

Tomando los puntos pedidos queda:



$-9x^2 - 18x + 27$

$-9(x^2 + 2x - 3)$

$-9(x^2 + 2x + 1 - 1 - 3)$

$-9[(x+1)^2 - 4]$

$-9(x+1)^2 + 36$

$27 - 18(-3) - 9(-3)^2$

$\sqrt{27 - 18(-3) - 9(-3)^2} - 1$

$\sqrt{81} - 81 - 1$

f(0):

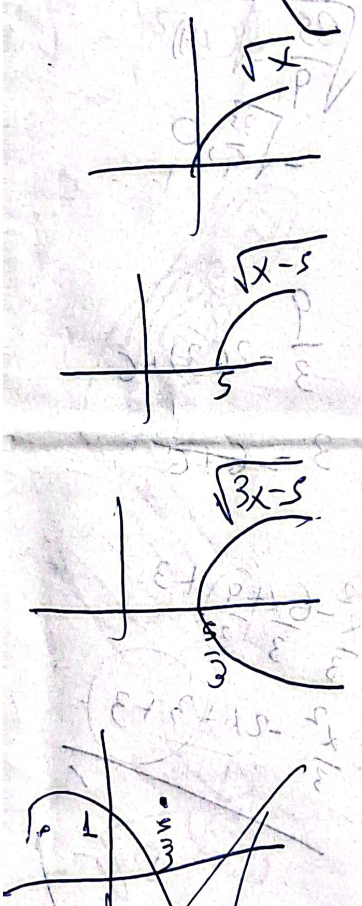
$f\left(\sqrt{\frac{35}{9}}\right) = 0$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-9(x+1)^2 + 36$
$-9x^2 - 18x - 9 + 36$
$-9x^2 - 18x + 27$

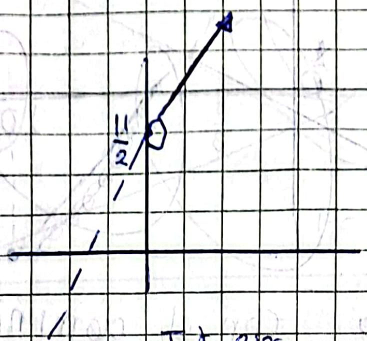
$(y-1)^2 = \left(-\sqrt{3x-5}\right)^2$
$(y-1)^2 = 3x-5$
$(y-1)^2 = 3\left(x-\frac{5}{3}\right)$
$V\left(\frac{5}{3}, 1\right)$



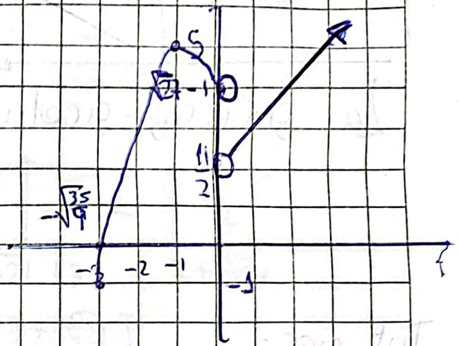
$1-\sqrt{3(10)-5}$
$1-10$ [sic]

$g_2(x) = \frac{x+11}{2}$ $\quad m = \frac{1}{2}$ $\quad g_2(0) = \frac{11}{2}$

P3



Finalmente toda la gráfica:



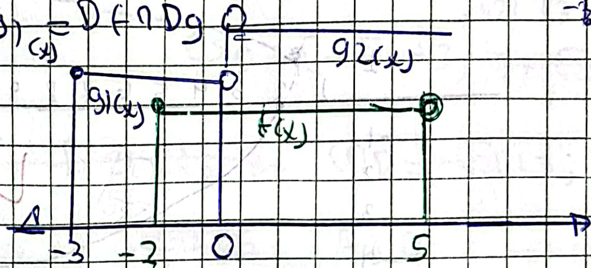
Int ejes

Int eje x: $\left(-\sqrt{\frac{35}{9}}, 0\right)$

Int eje y: $\nexists$

() f+g =

1° $Dom(f+g)_{(x)} = Df \cap Dg$



$\therefore D(f+g)_{(x)} = [-2; 0[\cup]0, 5]$

2° Regla de corresp: $(f+g)_{(x)} = \begin{cases} f+g_1 & -2 \le x < 0 \\ f+g_2 & 0 < x \le 5 \end{cases}$

5

$$(f+g)_{(x)} = \begin{cases} (x+1)^{\frac{4}{5}} - 2 + \sqrt{27-18-9x^2} - 1 ; & -2 \le x < 0 \\ (x+1)^{\frac{4}{5}} - 2 + \frac{x+11}{2} ; & 0 < x \le 5 \end{cases}$$

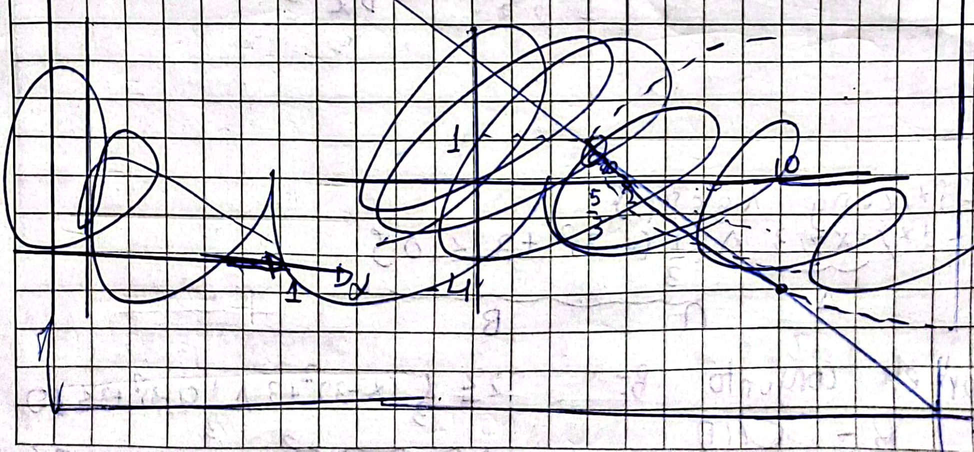
3) $f(x) = 1 - \sqrt{3x-5}$; $2 \le x \le 10$

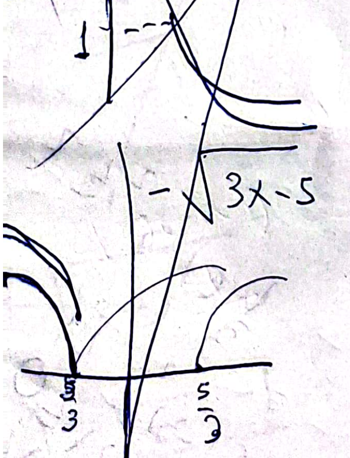
a) Por AMGA

$y = 1 - \sqrt{3x-5}$; $y \le 1$ $\quad f(2) = 0$ $\quad f(10) = -4$

~~$(y-1)^2 = \left(-\sqrt{3x-5}\right)^2$~~
~~$(y-1)^2 = 3x-5$~~
~~$(y-1)^2 = 3\left(x-\frac{5}{3}\right)$~~ → Parábola a la derecha

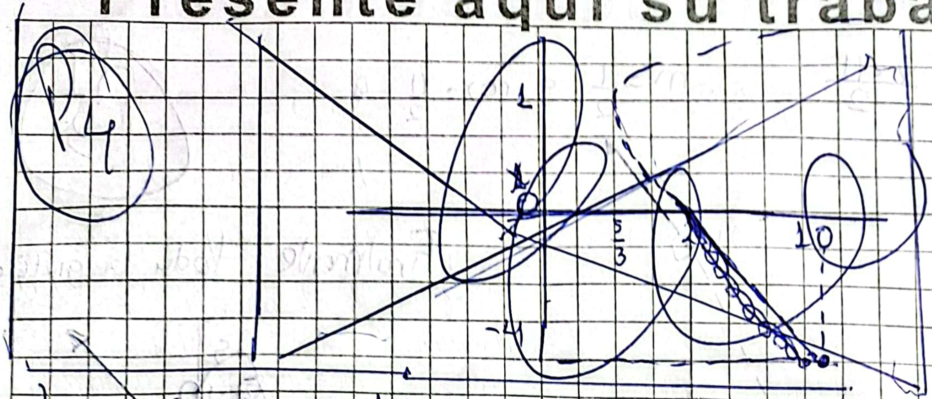
→ $(y-1)^2 = 3\left(x-\frac{5}{3}\right)$ $\quad V\left(\frac{5}{3}; 1\right)$



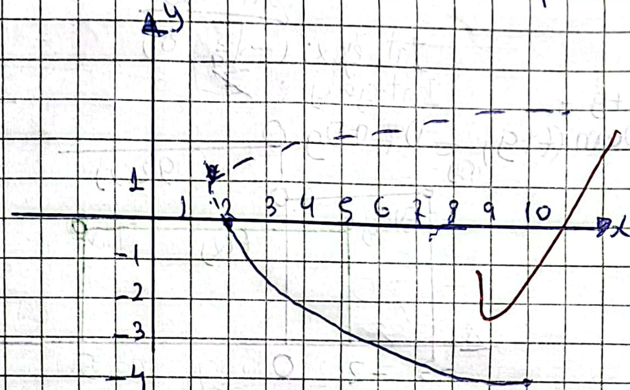


Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



La gráfica, acotando con el dominio quedaría:



Int ejes:

Eje x: (+2, 0)

Eje y = ∄

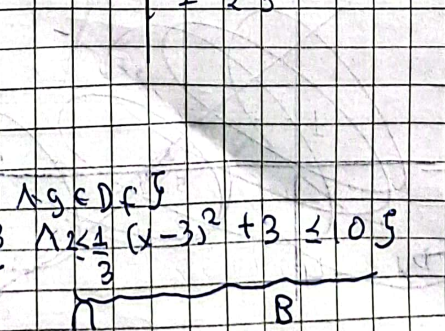
b) Gráfica de g

$g(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 6 \; ; \quad x \geq 3$

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(\frac{1}{3})} = \frac{2}{2(\frac{1}{3})} = 3$

$k = f(h) = f(3) = 3$

$g(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 3 \qquad V(3;3) \qquad f(3) = 3$



Int ejes = ∄

c) fog

1° $D_{fog} = \{x / x \in D_g \wedge g \in D_f\}$

$= \{x / \underbrace{x \geq 3}_{A} \wedge \underbrace{2 \leq \frac{1}{3}(x-3)^2 + 3 \leq 10}_{B}\}$

$\cap$

Para hallar el conjunto B: $\underbrace{2 \leq \frac{1}{3}(x-3)^2 + 3}_{C} \wedge \underbrace{\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3 \leq 10}_{D}$

B = C ∩ D

$(2)^2 = \left(\sqrt{-9(x+1)^2 + 36}\right)^2$

$-35 = -9(x+1)^2$

$\sqrt{\frac{35}{9}} = \sqrt{(x+1)^2}$

$-\sqrt{\frac{35}{9}}, 0$

$\frac{9}{3} - 2(3) + 6$

$3 - \cancel{6+6}$

$\frac{x^2}{3} - \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} + 3$

$\frac{x^2}{3} - 2x + 3 + 3$

$\frac{1}{3}(x-3)^2 \geq 7$

$(x-3)^2 \geq 21 \leq 0$

$(x-3-\sqrt{21})(x-3+\sqrt{21}) \leq 0$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\alpha: 3+\sqrt{21}=0$

$=-\sqrt{21}+3$

$x^2-6x-12$

$1-\sqrt{2}$

$1-\sqrt{(3-3)^2+4}$

$1-2=-1$

$C: 3(2) \le \left(\frac{1}{3}(x-3)^2+3\right)3$

$6 \le (x-3)^2+9$

$-3 \le (x-3)^2$

$(x-3)^2 \ge -3$

$CS_C = \mathbb{R}$

$D: 3\left(\frac{1}{3}(x-3)^2+3\right) \le (10)3$

$(x-3)^2+9 \le 30$

$(x-3)^2 \le 21$

~~$x^2-6x+9-21 \le 0$~~

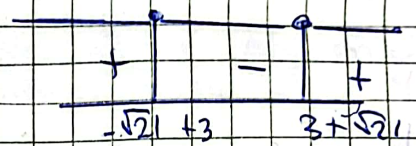
~~$x^2-6x-12 \le 0$~~

$\cap$

$(x-3)^2-\sqrt{21}^2 \le 0$

$(x-3-\sqrt{21})(x-3+\sqrt{21}) \le 0$

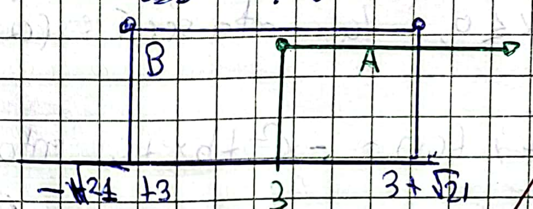
P referencia $= 3+\sqrt{21}; -\sqrt{21}+3$



$CS_D = [-\sqrt{21}+3; 3+\sqrt{21}]$

~~$C \cap D = [-21+\sqrt{3}; 3+$~~ $C \cap D = [-\sqrt{21}+3; 3+\sqrt{21}] = B$

Intersectando A y B



$A \cap B = D\,fog = [3; 3+\sqrt{21}]$

2° Regla de corresp: $fog = 1-\sqrt{3(g(x))-5}$ $\quad 3 \le x \le 3+\sqrt{21}$

$fog = 1-\sqrt{3\left[\frac{1}{3}(x-3)^2+3\right]-5}$

$fog = 1-\sqrt{(x-3)^2+4}$

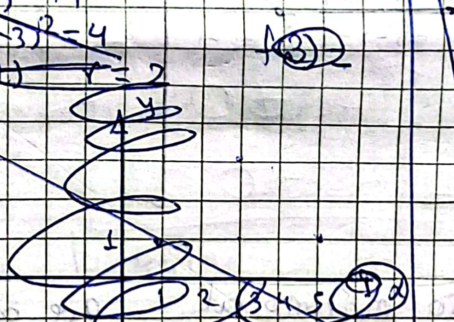
d) ~~Por GRÁFICA~~

~~$y = 1-\sqrt{(x-3)^2+4}$~~ ; $y \le 1$

~~$(y-1)^2 = (x-3)^2+4$~~

~~$(y-1)^2-(x-3)^2 = 4$~~

~~$V(3;1)$~~ $r = 2$



$4 \le (x-3)^2+4 \le 25$

$2 \le \sqrt{(x-3)^2+4} \le 5$

$-5 \le -\sqrt{(x-3)^2+4} \le -2$

$-4 \le -\sqrt{(x-3)^2+4}+1 \le -1$

$-4 \le fog \le -1$

~~Rango fog~~

$R_{fog} = [-4; -1]$

d) Analíticamente:

$3 \le x \le 3+\sqrt{21}$

$0 \le x-3 \le \sqrt{21}$

$0 \le (x-3)^2 \le 21$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4) $D_f =]-6,6[$

$R_f = [0,7]$

f es par ; Def de f par: $f(x) = f(-x)$

Para $x \in [0,3]$ es recta

Forma $f(x) = mx + b$

Además $f(1) = 2$ Tabulando $f(1) = 2 = m + b$

$f(3) = 0$ $f(3) = 0 = 3m + b \to -3m = b$

Reemplazando:

$2 = m - 3m$

$2 = -2m$

$m = -1$

$b = 3$

La recta será

$f(x) = -x + 3$

Por definición de función par, $f(x) = f(-x)$, para el tramo $-3 \leq x \leq 0$, la recta será : $f(x) = x + 3$

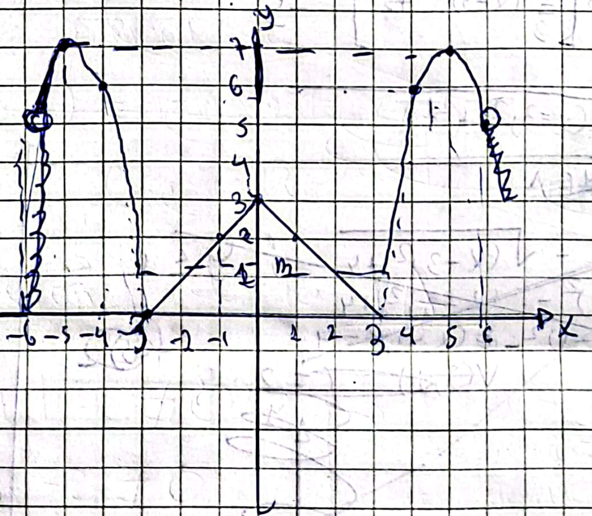
Para $x \in]3,6[$; $f(x) = -x^2 + bx + c$; entonces por definición de f par, $f(x) = f(-x)$; para el tramo $-6 < x < -3$, la función será $f(x) = -x^2 - bx + c$ $h = \frac{-b}{2a} = \frac{(-b)}{2(-1)} = -\frac{b}{2}$

$f(-4) = 6 = -(4)^2 - b(4) + c = 6$ $K = f(h) = \frac{b^2+4c}{4}$

$c - 4b = 22$

Gráfica:

(Para guiarme)



Como el punto máximo al que debe llegar mi función es 7, el vértice será $(h, 7)$

Pero tengo que $\frac{b^2-4c}{4} = 7$ $c - 4b = 22$

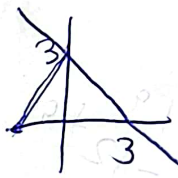
$2 = m(1) + b$

$0 = 3m + b$

$2 = -2m$

$-1 = m$

$f(0) = 3$



$3(-1) + b$

$b = 3$

$f(-3) =$

$-(x^2 + 10x + 25) + 25 - 18$

$-(x+5)^2 + 7$

$V(-5, 7)$

$-\left(\frac{-b}{2}\right)^2 - b\left(\frac{-b}{2}\right) + c$

$-\frac{b^2}{4} + \frac{2b^2}{4} + \frac{4c}{4}$

$-(-x)^2 + b(-x) + c$

$-(x + \frac{b}{2})^2 + \frac{b^2 + 4c}{4}$

$-x^2 - bx - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2+4c}{4}$

$-x^2 - bx + c$

$f(x) = f(-x) =$

$f(4) = f(-4)$

$-(x + \frac{b}{2})^2 + \frac{b^2+4c}{4}$

$-x^2 - bx + c$

$x^2 + bx + c$

$x = \frac{-b}{2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$b^2-4c=28$; $c-4b=22$

$c=22-4b$

P7

$b^2-4(22-4b)=28$

$b^2-88+16b=28$

$b^2+16b-60=0$

$b \quad -10$

$b \quad -6$

$(b-10)(b-6)=0$

$b=10 \quad \vee b=6$

Para saber a quien tomar, se analizará la gráfica hecha; ahí nos percatamos que el vértice está en un punto ~~más arriba de 4.~~ más a la izq. de -4.

$h=-\frac{b}{2} = h=-\frac{10}{2}=-5$

$h=-\frac{6}{2} = h=-3$

Por lo que $b=10$

$c=22-4(10)$

$c=22-40$

$c=-18$

La regla de correspondencia sería

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & 0\le x\le 3 \\ x+3 & -3\le x\le 0 \\ -x^2+10x-18 & 3<x<6 \\ -x^2-10x-18 & -6<x<-3 \end{cases}$$

3

5) $\forall a\in\mathbb{R}, \exists x<0;\ x^2-2x-a^2<0$

$x^2-2x<a^2$

$a^2>x^2-2x$

Si, y es x^2-2x+1

se puede llevar a la forma: $x^2-2x<a^2$

$a^2>x^2-2x$

Continuación en P9

$22\times4 = 88$

$88-28=60$

$f(1)=f(-2)$

$-1+3=-1+3$

$40-22=18$

$-1+3=2$

$-16-10(-4)-18$

$40-34=6$

$-1+2=1$

$x^2-2x+1<a^2+1$

$(x-1)^2<(+)$

$2\ne0$

$-2+3=1$

$-9+30-18=3$

$-1+2=1$

x^2-2x+1

$-9+30-18$

$30-27=3$

18

y esto es verdadero porque:

$a^2+1>0$

$a^2 \geq 0$

$1+a^2 \geq 1 > 0$

Por lo tanto la proposición es verdadera

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (impar)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función

$g(f(x))$ = impar

$-g(f(x)) = g(-f(x))$

$g(f(x)) = -g(-f(x))$

~~Falso, si f(x) fuera impar:~~

~~$g(f(x)) = -g(-f(x))$~~

~~$g(f(x)) = -g(f(-x))$ → y la definición dice~~

~~$g(f(x)) = -g(-f(x))$~~

~~que no es lo mismo que decir $-g(f(-x))$~~

~~$-g(f(x)) = g(-f(x))$~~

Supongamos que:

$g(x) = x+3$

$f(x) = x+5$

$g \circ f = g(f(x)) = g(x+5) = x+5+3 = x+8$

y debería ser igual a

$-g(-x-5) = -[-x-5+3] = x+2$

y no lo son; por lo que la proposición es falsa

1) Continuación de la 1A

$|x^2+4x+4+1| - 2 \neq 0$

$|(x+2)^2+1| - 2 \neq 0$

$(x+2)^2 \geq 0$

$(x+2)^2+1 \geq 1 > 0$

Este número siempre será POSITIVO, por lo que su valor absoluto se mantiene

$(x+2)^2 + 1 - 2 \neq 0$

$(x+2)^2 - 1 \neq 0$

$x^2+4x+3 \neq 0$

$(x+3)(x+1) \neq 0$

$x \neq -1; -3$ ~~$x \neq -1; 3$~~

Intersectando → $C.S =]-\infty; -2[\cup [0; 1[- \{-1; -3\}$

Dom $f =]-\infty; -3[\cup]-3; -2[\cup [0; 1[$

cálculos y desarrollos (borrador)

$f(x)$ = impar

$f(-x) = -f(-x)$

$g(x)$ impar,

$g(x) = -g(-x)$

$g(f(x)) = -g(-f(-x))$

$g(f(x)) = -g(f(x))$

$f(x) = x+3$

$g(x) = x+5$

$x+3+5$

$g \circ f = x+8$

$g(f(x)) = 8$

$-g(-f(x)) = [x-3+5]$

$-x+3-5$

$x-2$

$(x+2)^2+1-2$

$(x+3)(x+1)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pg

5b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impar
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función

¿$g \circ f$ = impar?

~~Casos~~ ~~Si f fuera impar~~

Contraejemplo: Si f fuera impar: $f(x) = -f(-x)$
$-f(x) = f(-x)$

$g(f(x)) =$

$\to g(f(x)) = -g(-f(x))$

Debería cumplirse:
$$g(f(x)) = -g(f(-x))$$

Definamos

$$g(x) = \begin{cases} x & x>0 \dots g_1 \\ 0 & x=0 \dots g_2 \\ -x & x<0 \dots g_3 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x+2 & x>0 \dots f_1 \\ 0 & x=0 \dots g_2 \\ -x-2 & x<0 \dots g_3 \end{cases}$$

Para $g_1 \circ f_1$

$g(f(x)) = x+2$

$-[g(f(-x)] = -[-x+2] = x-2$

y $x+2 \neq x-2$

Por lo que la proposición es FALSA

1

5a) Continuación

~~$(x-1)^2 < a^2 + 1$~~

~~$\to (x-1)^2 \geq 0$~~

~~$\to$ Si $x-1=0$, pero cualquier otro número será mayor que 0~~

~~$x=1$~~

~~$\sqrt{(x-1)^2 - 1} < \sqrt{a^2}$~~

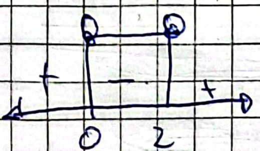
~~$|a| > \sqrt{(x-1)^2 - 1}$~~

$a^2 > x^2 - 2x$ → Pd. Se tiene que dar a "a" un valor: $a=0$

$a^2 > x(x-2)$

Como $a^2 \geq 0$, se busca que $x(x-2)$ sea negativo, para que se cumpla la condición

$x(x-2) < 0$ P. ref = 0, 2



CS =]0,2[

y todos los números contenidos ahí son POSITIVOS, por lo cual no existe ningún $x<0$ que satisface, la proposición es FALSA.

0,5

$g \begin{cases} x \\ 0 \\ -x \end{cases}$

$f \begin{cases} x+2 \\ 0 \\ -x-2 \end{cases}$

$x+2 = -[$

$f(x) = -f(-x)$

$g(f(x)) = -g(-f(x))$

=

$f(x) = x+3$

$g(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$g \circ f =$

$x+3 = -[-x-3]$

=

$x = -0,1$

$x = 0,5$

$(-1,1)^2 < ?$

$g(f(x)) = -g(-f(x))$

=

$g(f(x)) = 1+3 = 4$

$= g[-f(x)] = [-3-1] = 4$