PUCP

Estudios Generales Ciencias

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Cuarta Práctica Calificada

Semestre Académico 2024 -1

Horario: $A101, B101, B102, B103, I101, I102, I103, I104, I105, 117, 118, 119, 120, 121$

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión del punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. Considere la esfera y el plano cuyas ecuaciones son: $(-2a, -a, 2a)$ $(4, 2, -4)$

$$\mathcal{S}: (x+2a)^2+(y+a)^2+(z-2a)^2=4 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}: 2x+y+2z+1=0.$$

   a) Determine el valor de $a>0$ para el cual la esfera y el plano son tangentes. Además, halle las coordenadas del punto de tangencia. (2.5 puntos)

   b) Para $a=-2$, verifique que el plano $\mathcal{P}$ es secante a la esfera $\mathcal{S}$. Además, halle el radio de la circunferencia que resulta de intersecar la esfera $\mathcal{S}$ y el plano $\mathcal{P}$. (2.5 puntos)

2. Considere las esferas $S_1: (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$ y S_2. Se sabe lo siguiente:

   - La distancia entre los centros de S_1 y S_2 es 3 unidades. $(2, 1, 3)$
   - El radio de la esfera S_2 es $2\sqrt{6}$ unidades.
   - La segunda coordenada del centro de la esfera S_2 es positiva.

   a) Justifique que S_1 y S_2 se intersecan en una circunferencia $\mathscr{C}$. (1 punto)

   b) Si se sabe que el punto $C_0\left(3;0;\frac{5}{2}\right)$ es el centro de la circunferencia $\mathscr{C}$, halle la ecuación de S_2. (3 puntos)

   c) Halle la ecuación del plano que contiene a la circunferencia $\mathscr{C}$. (1 punto)

3. Considere el siguiente determinante $\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix} = 4.$

   Calcule

$$\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ m & n & 3p \\ x+m & y+n & 3z+3p \end{vmatrix}.$$

(2 puntos)

4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Verifique que $A^2 = 4A$ y $A^3 = 16A$. **(2.5 puntos)**

b) Resuelva la ecuación matricial

$$A^5 - 15A^3 = 3Y^t + 4A.$$

(2.5 puntos)

5. a) Justificando su respuesta, analice el valor de verdad de la siguiente afirmación:
Existe una única matriz B de orden 2×2, no nula, tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1.5 puntos)

b) Sea A una matriz de orden 3×3, I la matriz identidad y a, b números reales no nulos. Si $B = aA + bI$, demuestre que $AB = BA$. **(1.5 puntos)**

San Miguel, 17 de junio de 2024.

$A(aA + bI) = (aA + bI)A$

$aA^2 + bA = aA^2 + bA$

37

Año Número

2	0	2	4		2	3	4	1

Código de alumno

Práctica

Ruiz Rodríguez Miguel Fabrizio

Apellidos y nombres del alumno (letra imprenta)

Firma del alumno

Curso: Amga

Práctica N°: 4

Horario de práctica: H118

Fecha: 17/06/24

Nombre del profesor: Omar Cárdenas

Nota

20

Número entero

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) J.Y.A

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - redacción, claridad de expresión, corrección gramatical, ortografía y puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1. $C(-2a; -a, 2a)$
$r = 2$

a) Para que sean tangentes:

$d(C, P) = r$

$$\frac{|2(-2a) + 1(-a) + 2(2a) + 11|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 2$$

$|-4a - a + 4a + 11| = (2)(3)$

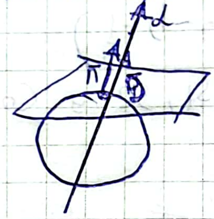
$|a - 11| = 6$

$a - 1 = 6$
$a = 7$

$a - 1 = -6$
$a = -5$

Pero $a > 0$: $a = 7$

Para hallar el punto de tangencia



$\mathcal{L} \cap P$ = Punto de tangencia (P)

$\mathcal{L}: P = (-14, -7, 14) + (2, 1, 2)m;\ m \in \mathbb{R}$

↳ el vector dirección de la recta es paralelo al vector normal del plano; $\vec{n} = K\vec{D}$; si $K = 1$
$(2, 1, 2) = \vec{D}$

~~$\mathcal{L} \cap P = (-14+2m, -7+$~~

$P \in \mathcal{L} \cap P = (-14+2m, -7+m, 14+2m)$

Reemplazando en el plano:

$2(-14+2m) + (-7+m) + 2(14+2m) + 11 = 0$

$m = \frac{2}{3}$

$$P = \left(-\frac{38}{3}, -\frac{19}{3}, \frac{46}{3}\right)$$

2,5

$-14 \ -7 \ 14$

b) Si $a = -2$ ~~(-14)~~ $C(4, 2, -4)$

Para que el plano sea secante a la esfera:

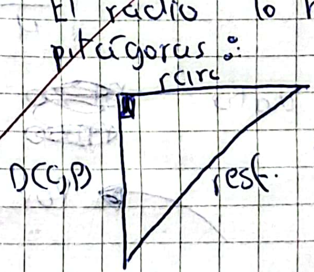
$d(C, P) < r$

$$\frac{|2(4) + 1(2) + 2(-4) + 11|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} < 2$$

$1 < 2$

$d(C, P) = 1$
↓
obtenido de la demostración de que es secante

El radio lo hallamos mediante pitágoras:

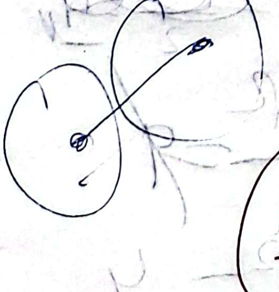


$r_{esf}^2 = D(C, P)^2 + r_{circ}^2$

$4 = 1 + r_{circ}^2$

$\sqrt{3} = r_{circ}$

2,5



5.0 / 5.0 TOTAL

2. $S1: (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 6$
$C_1(2, 1, 3)$ $\quad r_1 = \sqrt{6}$

Por datos:
$\|\overline{C_1C_2}\| = 3$
$r_2 = 2\sqrt{6}$

La distancia entre los centros

Para demostrar que S1 y S2 se intersectan en una circunferencia $r_2 - r_1 < \|\overline{C_1C_2}\| < r_1 + r_2$

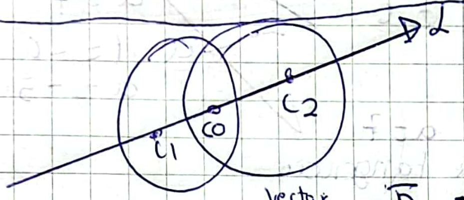
Presente aquí su trabajo

$2\sqrt{6}-\sqrt{6} < 3 < 2\sqrt{6}+\sqrt{6}$

$\sqrt{6} < 3 < 3\sqrt{6}$ Aproximando: $\sqrt{6} \cong 2{,}45$

$2{,}45 < 3 < 7{,}34$ si se cumple, por lo cual son secantes y se intersectan en una circunferencia.

Además necesitamos la ecuación de la esfera S2.



$C_1 = (2,1,3)$

$C_0 = (3, 0, \frac{5}{2})$

vector dirección de la recta $= \vec{D} = \overline{C_1C_0} = (1, -1, -\frac{1}{2})$

1P

b) Por la recta L pasa el centro de S1, S2 y Co

$\therefore L = (2,1,3) + m(1; -1; -\frac{1}{2})$; $m \in \mathbb{R}$ 1P

El punto $C_2 \in L$

$C_2 = (2+m, 1-m, 3-\frac{m}{2})$ 1P

Además $\|\overline{C_1C_2}\| = 3$ $\quad \overline{C_1C_2} = (\cancel{2}+m-\cancel{2}, \cancel{1}-m-\cancel{1}, \cancel{3}-\frac{m}{2}-\cancel{3})$

$\overline{C_1C_2} = (m, -m, -\frac{m}{2})$

$\sqrt{(m)^2+(-m)^2+(-\frac{m}{2})^2} = 3$

$\sqrt{\frac{4m^2}{4}+\frac{4m^2}{4}+\frac{m^2}{4}} = 3$

$\sqrt{\frac{9m^2}{4}} = 3$

$\frac{\cancel{3}}{2}|m| = \cancel{3}$

$|m| = 2$

$m=2 \vee m=-2$

Pero por dato

$1-m>0$

$m-1<0$

$m<1$

Por lo tanto $m = -2$

$\therefore C_2(0, 3, 4)$

1P

La esfera 2:

$S2: x^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 24$

c) Necesitamos también el plano que contiene a S2

$S1 \cap S2 =$ plano

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$(1, -1, -0{,}5)$

$(1, -1, -\frac{1}{2})$

$2+m-2=m$

$-2, 2, +1)$

$\sqrt{4m^2+4m^2+\frac{m^2}{4}} = 3$

$\sqrt{\frac{9m^2}{4}}$

$3|m| = 2$

$\frac{3|m|}{2} = \cancel{3}$

$m=2 \vee m=-2$

$2-$

$3-$

$\frac{4m^2}{4} = 9$

$m^2 = 4$

$m=2 \vee m=-$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$S1: (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$

$S2: x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

$\cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}-2y+1+\cancel{z^2}-6z+9-6=\cancel{x^2}-24+\cancel{y^2}-6y+9+\cancel{z^2}-8z+16$

$-4x-2y-6z+8=-6y-8z+1$

$0=4x-4y-2z-7$

18

$4x+4y+8z+7=0$

$4x-4y-2z-7=0$

3) $\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix}=4$

2

$\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ m & n & 3p \\ x+m & y+n & 3z+3p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ m & n & 3p \\ x & y & 3z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ m & n & 3p \\ m & n & 3p \end{vmatrix}$

$=3\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m & n & p \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix}=12$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-6z+9=6$

$x^2+y^2-6y+9+z^2-8z+16=-24$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-6z+9=6$

$-x^2-y^2+6y-9-z^2+8z-16=-24$

$-4x+4+\cancel{y^2}-2y+1+\cancel{z^2}-6z+9-\cancel{y^2}+6y-9-\cancel{z^2}+8z-16=0$

$4x+4y+2z+\underbrace{14-25+18}_{7}=0$

4) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Verificamos:

$A^2=4A$

$A\cdot A=4A$

$A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$A\cdot A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 32 & 16 & 16 \\ -16 & -8 & -8 \end{pmatrix}$

$4A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 32 & 16 & 16 \\ -16 & -8 & -8 \end{pmatrix}$

Reemplazando: $A\cdot A=4A$, se logra demostrar

$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 32 & 16 & 16 \\ -16 & -8 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 32 & 16 & 16 \\ -16 & -8 & -8 \end{pmatrix}$

2,5

Verificamos: $A^3=16A$

$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 32 & 16 & 16 \\ -16 & -8 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 16 & 16 \\ 128 & 64 & 64 \\ -64 & -32 & -32 \end{pmatrix}$

$16A=\begin{pmatrix} 32 & 16 & 16 \\ 128 & 64 & 64 \\ -64 & -32 & -32 \end{pmatrix}$

Reemplazando $A\cdot A^2=16A$, se logra demost.

$\begin{pmatrix} 32 & 16 & 16 \\ 128 & 64 & 64 \\ -64 & -32 & -32 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 16 & 16 \\ 128 & 64 & 64 \\ -64 & -32 & -32 \end{pmatrix}$

Presente aquí su trabajo

$$A^5 - 15A^3 = 3y^t + 4A$$

$$A^5 = A \cdot A \cdot A^3$$

$$A \cdot A \cdot A^3 - 15IA^3 = 3y^t + 4A$$

$$(A^2 - 15I)A^3 = 3y^t + 4A$$

~~Reemplazando con lo ya obtenido en Ita~~

$$A^2 - 15I = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 32 & 16 & 16 \\ -16 & -8 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 15I = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 32 & 1 & 16 \\ -16 & -8 & -23 \end{pmatrix}$$

2,5

$$(A^2 - 15I)(A^3)$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 32 & 1 & 16 \\ -16 & -8 & -23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & 16 & 16 \\ 128 & 64 & 64 \\ -64 & -32 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 16 \\ 128 & 64 & 64 \\ -64 & -32 & -32 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en ec:

$$\begin{pmatrix} 32 & 16 & 16 \\ 128 & 64 & 64 \\ -64 & -32 & -32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -4 & -4 \\ -32 & -16 & -16 \\ 16 & 8 & 8 \end{pmatrix} = 3y^t$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 12 & 12 \\ 96 & 48 & 48 \\ -48 & -24 & -24 \end{pmatrix} = 3y^t$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 32 & 16 & 16 \\ -16 & -8 & -8 \end{pmatrix} = y^t$$

$$y = \begin{pmatrix} 8 & 32 & -16 \\ 4 & 16 & -8 \\ 4 & 16 & -8 \end{pmatrix}$$

3,0 / 3,0 TOTAL

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Falso, puesto que al menos existen 2.
La primera opción es que $B = I_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\frac{1}{Adj(A)} =$$

$$\frac{1}{|A|} Adj(A)$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a+0c \quad b+0d$

$4a+2c \quad 4b+2d$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$a+4b \quad 2b$

$c+4d \quad 2d$

$a = a+4b$

$0 = -b$

$b = 2b$

$0 = 0$

$4a+2c = c+4d$

$2d = 2d$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

+ -

$B = aA + bI$

$|AB - BA|$

$|A(B - B)A|$

La segunda opción es que $B = A^{-1}$.
Primero confirmamos su existencia.

$|A| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$

$Adj(A) = (Cof(A))^t$

$M_{11} = 2$
$M_{12} = 4$
$M_{21} = 0$
$M_{22} = 1$

$Cof(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{pmatrix}$

$Cof(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.5p.

$(Cof(A))^t = Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = I_2$

b)

$AB = BA$, pero $B = aA + bI$; $a, b \in \mathbb{R}$
$a, b \neq 0$

$A(aA + bI) = (aA + bI)A$

$aA^2 + bA = aA^2 + bA$

$\therefore$ La proposición es verdadera

1.5P