ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

Segunda Práctica Calificada

Semestre Académico 2019 -1

Horario: *17:00 - 19:00* Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

---

1. En cada caso, determine el mayor dominio posible de la función f : (4p)

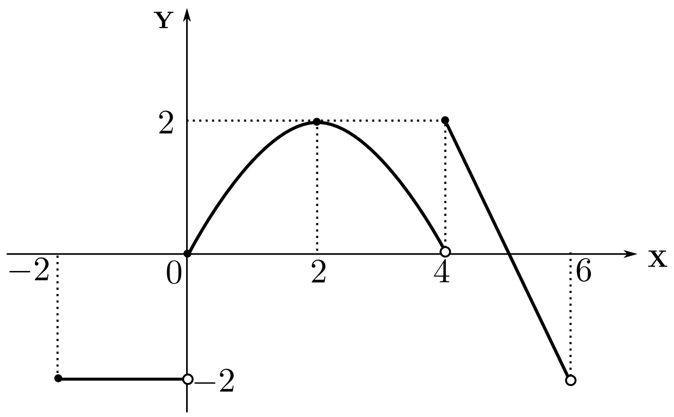
   a) $f(x) = \dfrac{1}{|x+4|+|x-1|-5}$. b) $f(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x^2+2x+1}{|x+1|}}$.

2. Considere las funciones

$$f(x) = |x-2|+1\,,\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & \text{si } x \le 1 \\ x-3, & \text{si } 1 < x \le 3. \end{cases}$$

   Determine el dominio, la regla de correspondencia y realice un esbozo de la gráfica de la función $g \circ f$. (4p)

3. La siguiente figura, formada por segmentos de recta y parte de una parábola, representa la gráfica de una función f :



   a) Indique el dominio, el rango y halle la regla de correspondencia de la función f. (2p)

b) Esboce la gráfica de la función g dada por $g(x) = f(3-x)+1$, e indique su dominio y su rango. (3p)

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuyo rango es el intervalo $]-\infty, 1]$. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) La gráfica de la función f interseca al eje X. (1p)

b) El valor máximo de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(-x)$ es 1. (1p)

c) La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f\big(|x|\big)$ no tiene valor mínimo. (1p)

5. Esboce la gráfica de la región en el plano representada por las siguientes inecuaciones: (4p)

$$\begin{cases} x^2 + y \leq 2x + 3 \\ |x-1| + y > 3\,. \end{cases}$$

San Miguel, 2 de mayo de 2019.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

PUCP

ENTREGADO
13 MAY 2019

Práctica

Año				Número			
2	0	1	9	0	0	1	4

Código de alumno

Velis Jara Alonso de Jesús

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: F.C

Práctica Nº: 2

Horario de práctica: 127

Fecha: 02/05/19

Nombre del profesor: M. Flores

Nota

18

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) MAR

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcridad posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posible.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

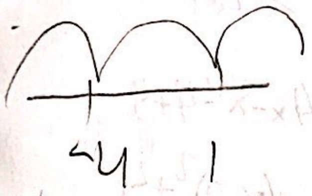
Setiembre 2017

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$|x+4|+|x-1| \neq 5$

$|x+4|+|x-1|-5=0$



$-2x-4+1-5=0$

$-2x=8$

$x=-4$

$-4<x<1$

$0<x+5$

$x+4-x+1=5$

$5=5$

$[-4,1]$

$2x=-8 \quad \phi$

$x=-4$

$(x+1)^2 \leq 2|x+1|$

$-2 \leq |x+1| \leq 2$

$x \leq 1$

$x \geq -3$

$\frac{4+4+1}{3}=$

$2|x+1| \geq (|x+1|)^2$

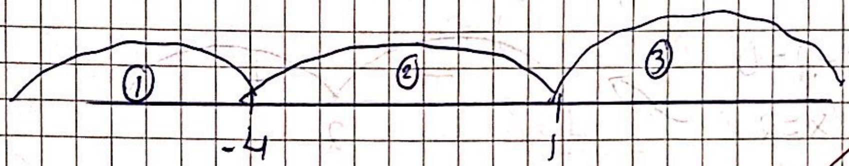
$2 \geq x+1 \geq -2$

$1 \geq x \geq -3$

Pregunta 1

1) a) Restamos a $\mathbb{R}$ los valores de x tal que

$|x+4|+|x-1|=5$



Zona 1: $]-\infty,-4[$

$-2x-3=5 \qquad \mathbb{A}=\phi$

$x=-4$

Zona 2: $[-4,1[$

$x-x+5=5 \qquad \therefore [-4,1[$

$5=5 \quad \mathbb{R}$

Zona 3: $[1,+\infty[$

$2x+3=5 \qquad x=1$

$x=1$

$\rightarrow x \in [-4,1]$

$\therefore \operatorname{dom} f(x) = \mathbb{R} - [-4,1]$

b) $2 \geq \frac{x^2+2x+1}{|x+1|}$

$0 \geq \frac{(x+1)^2-2|x+1|}{|x+1|} \qquad x \neq -1$

siempre es positivo, por ello el numerador debe ser negativo o "0"

$2|x+1| \geq (|x+1|)^2$

$2 \geq |x+1|$

$2 \geq x+1 \geq -2$

$1 \geq x \geq -3$

$1 \neq -1$

$\therefore \operatorname{dom} f(x) = [-3,1] - \{-1\}$

1) 4,0

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 2

completar cuadrados

$$f(x) = |x-2|+1,\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & x \leq 1 \\ x-3, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Para $f(x)$, dividimos la función en dos para eliminar el valor absoluto. Hallamos el punto crítico en $|x-2|$

$x-2=0$

$x=2$

$$|x-2| = \begin{cases} -x+2, & x<2 \\ x-2, & 2 \leq x \end{cases}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & x<2 \ \dots f_1 \\ x-1, & 2 \leq x \ \dots f_2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -(x-2)^2+4 & x \leq 1 \ \dots g_1 \\ x-3, & 1<x\leq 3 \ \dots g_2 \end{cases}$$

Realizamos la composición por partes:

1) $g_1 \circ f_1$ $\quad Dom\ g_1 \circ f_1 = \{x / x \in Dom\ f_1 \wedge f_1 \in Dom\ g_1\}$

$x \in]-\infty, 2[\ \wedge \ -x+3 \leq 1$

$2 \leq x$

ϕ

Como el dominio es vacío, no existe $g_1 \circ f_1$

2) $g_1 \circ f_2$ $\quad Dom\ g_1 \circ f_2 = \{x / x \in Dom\ f_2 \wedge f_2 \in Dom\ g_1\}$

$x \in [2, +\infty[\ \wedge \ x-1 \leq 1$

$x \leq 2$

intersección $\rightarrow x=2$

Regla de correspondencia: $g_1(f_2) = -(x-2-1)^2+4$

$-(x-3)^2+4$

Como solo toma el valor "2", reemplazamos

$-(2-3)^2+4 = \boxed{3}$

$-x+2+1$

$x-2+1$

$4x-x^2-4+4$

$-(x-2)^2+4$

x^2-4x+4

$-x^2+4x$

$x \in]-\infty, 2[$

$-x+3 \leq 1$

$2 \leq x$

$x \in [2, +\infty[$

$x-1 \leq 2$

$x \leq 2$

$x \in$

$-x+3-3$

$g_1(2)$

$-x$

4

$-(x-3)^2+4$

$(2-3)^2$

3

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$1 < -x+3 \le 3$

$-2 < -x \le 0$

$2 > x \ge 0$

$2 \le x$

$1 < x-1 \le 3$

$2 < x \le 4$

$x-1-3$

$x-4$

2) 4,0

Presente aquí su trabajo

3) $g_2 \circ f_1$ $\quad$ $Dom\, g_2 \circ f_1 = \{x / x \in Dom\, f_1 \wedge f_1 \in Dom\, g_2\}$

$x \in]-\infty, 2[\wedge 1 < -x+3 \le 3$

$-2 < -x \le 0$

$x \in]-\infty, 2[\wedge 2 > x \ge 0$

$\boxed{x \in [0,2[}$

Regla de correspondencia:

$g_2(f_1) = -x+3-3 = \boxed{-x}$

4) $g_2 \circ f_2$ $\quad$ $Dom\, g_2 \circ f_2 = \{x / x \in Dom\, f_2 \wedge f_2 \in Dom\, g_2\}$

$x \in [2, +\infty[\wedge 1 < x-1 \le 3$

$\wedge\ 2 < x \le 4$

$x \in]2,4]$

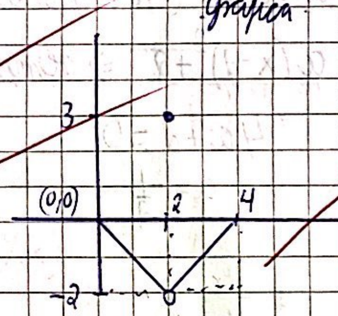
Regla de correspondencia

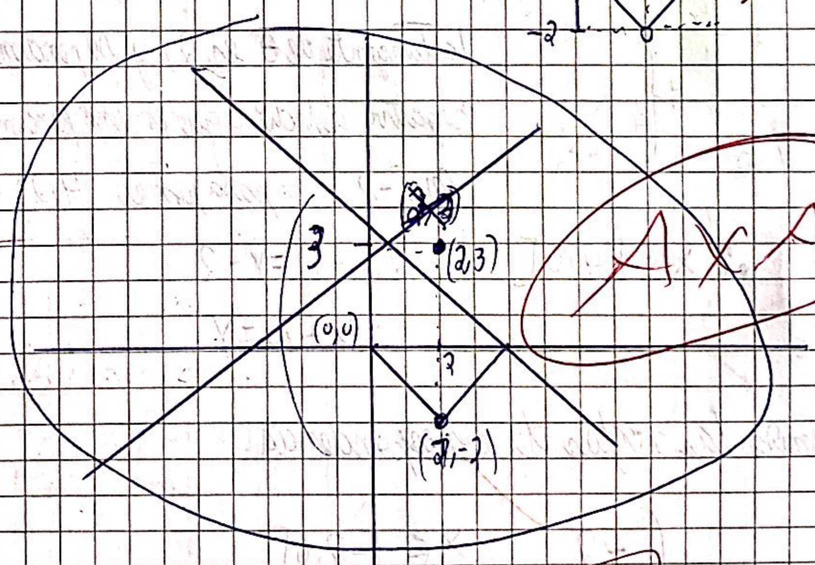
$g_2(f_2) = g_2(x-1) = x-1-3 = \boxed{x-4}$

Juntamos las reglas de correspondencia y dominios hallados

$$g \circ f = \begin{cases} -x, & x \in [0,2[\\ 3, & x = 2 \\ x-4, & x \in]2,4] \end{cases}$$

gráfica:



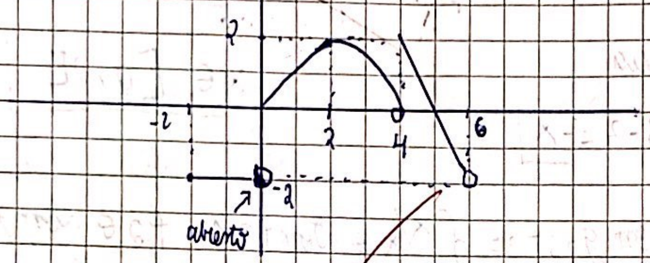


AXA

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 3



a) $Dom\ f(x) = [-2, 6[$

$Ran\ f(x) = [-2, 2]$

Hallamos la regla de correspondencia por tramos

- $x \in [-2, 0[\quad f(x) = -2$

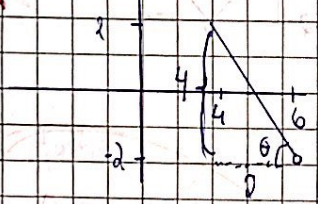
- en $x \in [0, 4[$ es una parábola que pasa por el punto $(0,0)$ y su vértice es $(2,2)$, por lo que tendrá esta forma:

$a(x-2)^2+2$ ⇒ reemplazamos el $(0,0)$

$4a+2=0$

$a=-\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{(x-2)^2}{2}+2$



La tangente de θ es 2, y su pendiente es negativa debido a que es una función decreciente

$m=-2$ y pasa por el $(4,2)$

$\therefore x \in [4,6[$

$-2(x-4) = y-2$

$-2x+10 = y$

Unimos las reglas de correspondencia.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & , x \in [-2,0[\\ -\frac{(x-2)^2}{2}+2 & , x \in [0,4[\\ -2x+10 & , x \in [4,6[\end{cases}$$

$x^2-2x \leq -y+3$

$x^2-2x+1 \leq -y+4$

$(x-1)^2-4 \leq y$

$y > 3-|x-1|$

$-x^2+1$

$-(-x)^2+1$

$-|x|^2+1$

$-x^2+1$

$-2(x-4)=y-2$

$-2x+10=y$

$a(x-2)^2+2$

$4a+2=0$

$a=-\frac{1}{2}$

$-\frac{(x-2)^2}{2}+2$

$-2(x-4)=y-2$

$-2x+8=y-2$

$-2x+10=y$

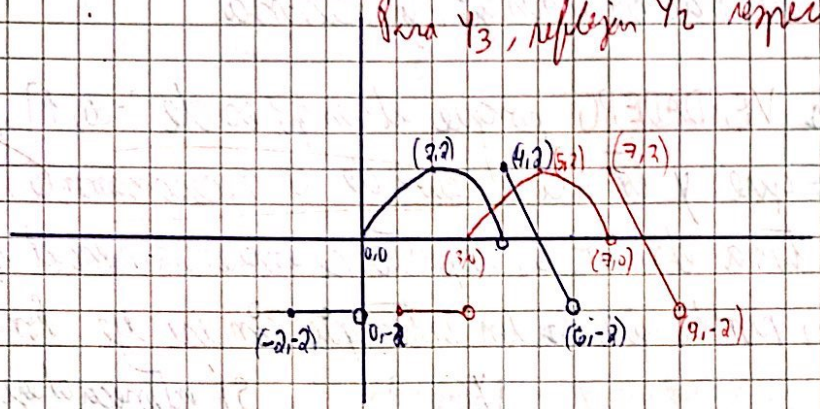
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

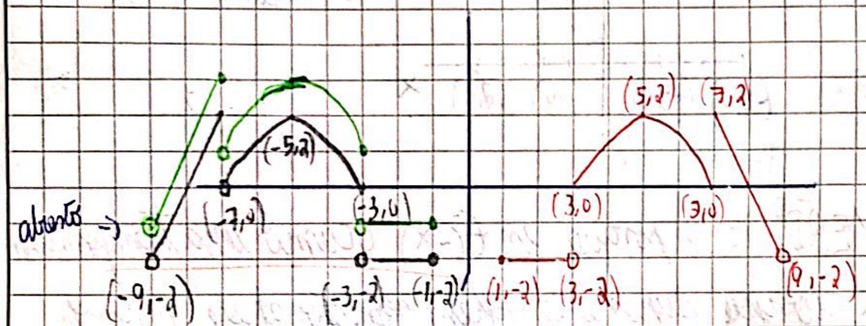
Presente aquí su trabajo

b) Hallaremos $g(x) = f(-(x-3))+1$ mediante las siguientes transformaciones:

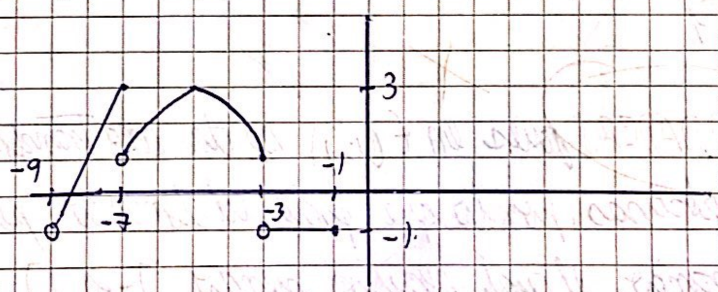
$y_1 = f(x)$ $\quad y_2 = f(x-3)$ $\quad y_3 = f(-(x-3))$ $\quad y_4 = f(-(x-3))+1$

Para y_3, reflejar y_2 respecto a $(x=3)$





Gráfica final ⇒ $y_4 = f(-(x-3))+1 = g(x)$



$\text{Dom } g(x) =]-9;-1]$

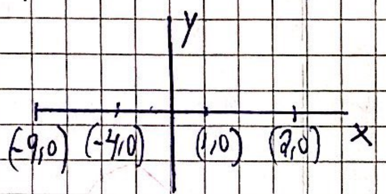
$\text{Ran } g(x) = [-1;3]$

3) 3)

Pregunta 4:

Al momento de hacer transformaciones, es necesario notar que las transformaciones que afectan a "x" modifican el dominio, mas no el rango, y viceversa.

1) Es VERDADERO porque el rango es de $]-\infty, 1]$, por lo que "y" tomará el valor de "0" necesariamente. Cuando "y" toma el valor 0, el punto se encuentra sobre el eje x, por lo que es un intercepto con ese eje. Por ello sí interseca al eje X



2) Es VERDADERO porque en $f(-x)$ ocurrió una transformación en "x" lo que supone un reflejo respecto al eje "y" pero no modifica el rango. Por eso, su máximo valor sigue siendo "1"

3) Es VERDADERO pues en $f(|x|)$ se da una transformación en las abscisas, por lo que afecta al dominio, pero no al rango, el cual seguirá siendo $]-\infty, 1]$. Como va al $-\infty$, no existe un valor mínimo para $h(x) = f(|x|)$

(F) usar contraejemplo !

4) 2,0

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$x^2-2x \leq -y+3$

$x^2-2x+1 \leq -y+4$

$(x-1)^2 \leq -y+4$

$y \leq -(x-1)^2+4$

$4=(x-1)^2$

$2=|x-1|$

$x=3$

$x=-1$

3) 4, 1

Pregunta 5

completamos cuadrados

$$\begin{cases} x^2+y \leq 2x+3 \\ |x-1|+y>3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -(x-1)^2+4 \geq y \\ y>3-|x-1| \end{cases}$$

ponemos x a un lado y "y" al otro

• para la primera ecuación $-(x-1)^2+4$

vértice $=(1,4)$

interceptos con y, cuando $x=0$

$-(0-1)^2+4=3 \quad (0,3)$

interceptos con x, cuando $y=0$

$-(x-1)^2+4=0$

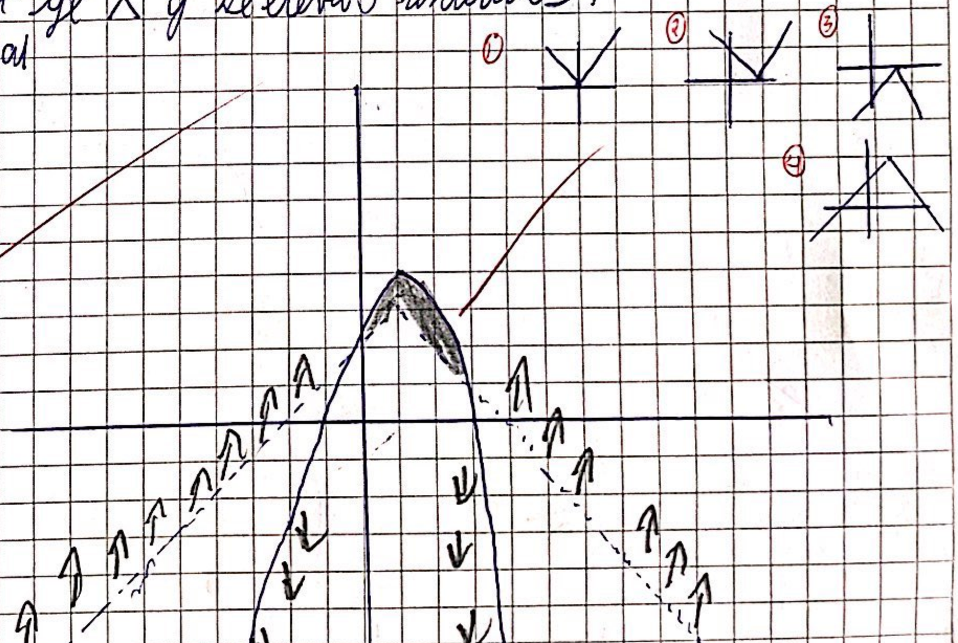
$|x-1|=2$

$x=3 \vee x=-1$

$(3,0)$, $(-1,0)$

• para la segunda ecuación:

función valor absoluto trasladada 1 a la derecha, reflejada respecto al eje X y se eleva 3 unidades.



Scanned with CamScanner