PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERU
ESTUDIOS GENERALES DE CIENCIAS
Fundamentos de Cálculo
Tercera Práctica Calificada-Solución
(2017-2)

---

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente sus respuestas.
   a) Si f es una función creciente en $\mathbb{R}$ y g es inyectiva en $\mathbb{R}$, entonces $f+g$ es creciente en $\mathbb{R}$. (1 punto)
   b) La función inversa de f, definida por $f(x)=x^2-3$, con $1<x<3$, está dada por $f^{-1}(x)=\sqrt{x+3}$ para $x\geq -3$. (1 punto)

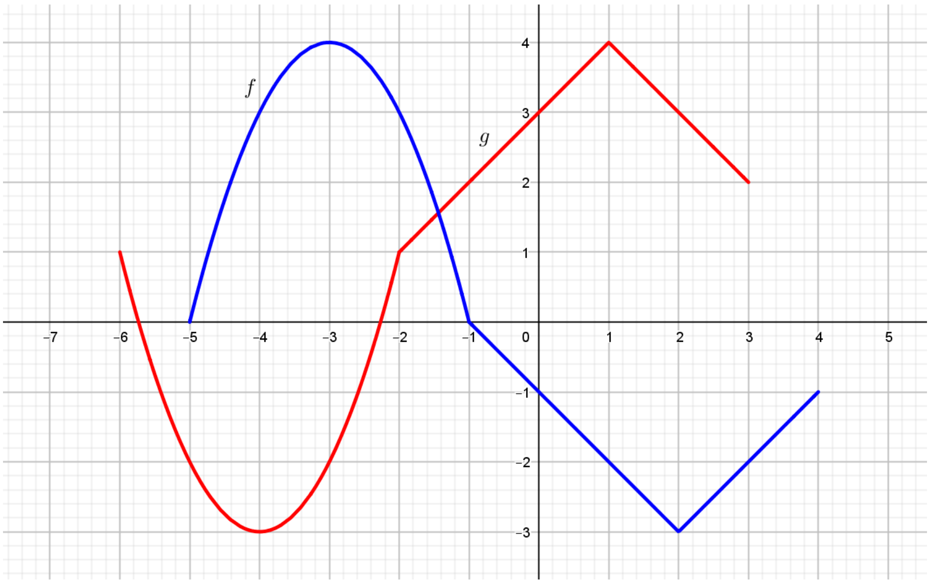
   Solución:
   a) Falso, basta considerar $f(x)=x$ y $g(x)=-x$.
   b) Falso, $Dom(f^{-1})=\,]-2,6[$

2. Dada la función f, definida por

$$f(x)=\begin{cases}4-(x+3)^2\,, & -5\leq x\leq -1\\ |x-2|-3, & -1<x\leq 4\end{cases}$$

   a) Bosqueje la gráfica de la función g definida por $g(x)=-f(x+1)+1$. (3 puntos)
   b) Halle el dominio y el rango de g. (1 punto)

   Solución:
   a) Usando transformaciones de funciones.



También pueden definir

$$g(x)=-f(x+1)+1=\begin{cases}(x+4)^2-3\,, & -6\leq x\leq -2\\ 4-|x-1|, & -2<x\leq 3\end{cases}$$

y luego graficar.

b) $Dom(g) = [-6,3]$ y $Ran(g) = [-3,4]$

3. Dada la función f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2b + 5, & x \leq b \\ x^2 - 6x + 10, & x > b + 2 \end{cases}$$

a) Halle el menor valor que puede tomar b, para que la función sea inyectiva. (3 puntos)

b) Grafique f y su inversa f^{-1} en un mismo plano cartesiano. (2 puntos)

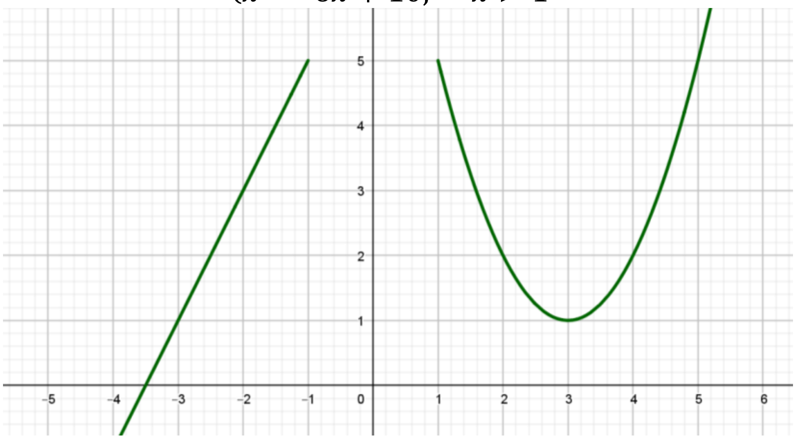
Solución:

a) El máximo valor para la primera rama es 5. Ahora, determinemos el mínimo valor de la segunda rama

$$x^2 - 6x + 10 = 5 \leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

- Si $x > 1$, es decir $b + 2 = 1 \leftrightarrow b = -1$. Se tendría

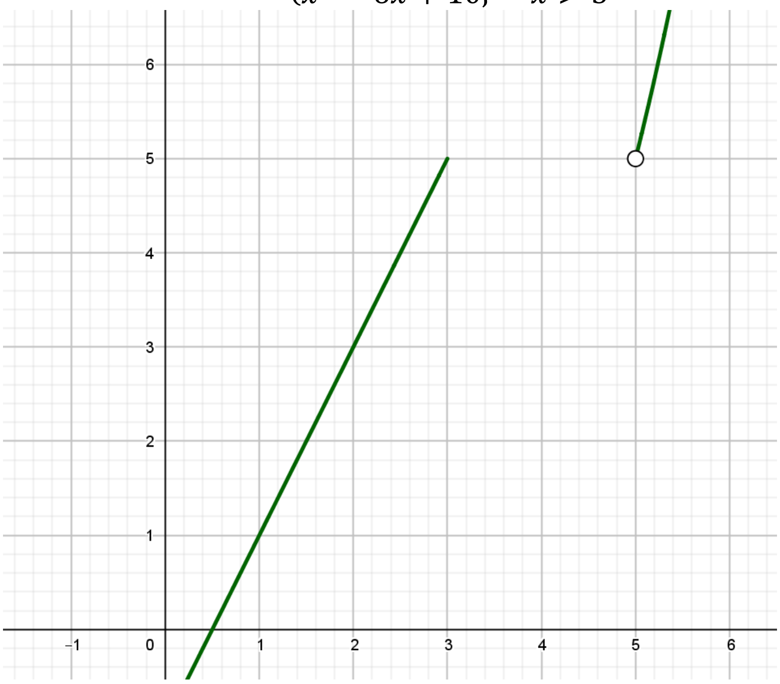
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 7, & x \leq -1 \\ x^2 - 6x + 10, & x > 1 \end{cases}$$



que no es inyectiva.

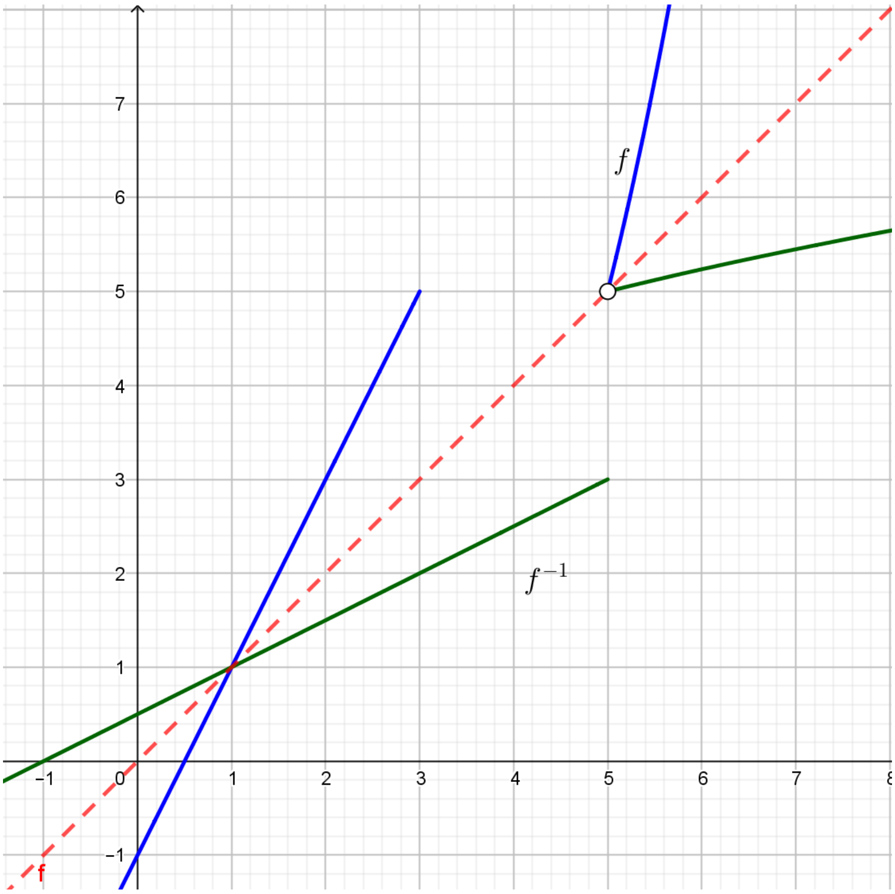
- Si $x > 5$, es decir $b + 2 = 5 \leftrightarrow b = 3$. Se tendría

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 3 \\ x^2 - 6x + 10, & x > 5 \end{cases}$$



es inyectiva. Por lo tanto, el menor valor que puede tomar b es 3.

b)



4. Sea f una función definida por una expresión polinómica de grado 5 con dominio el intervalo $[-5, +\infty[$, cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3)$ y tiene ceros en $x = 0$, $x = 4$(multiplicidad 2) y $x = -4$ (multiplicidad 2).

   a) Determine la regla de correspondencia de la función f. (2 puntos)

   b) Bosqueje la gráfica de f, indicando las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados. (2 puntos)

   c) Indique los intervalos donde $f(x) \geq 0$. (1 punto)

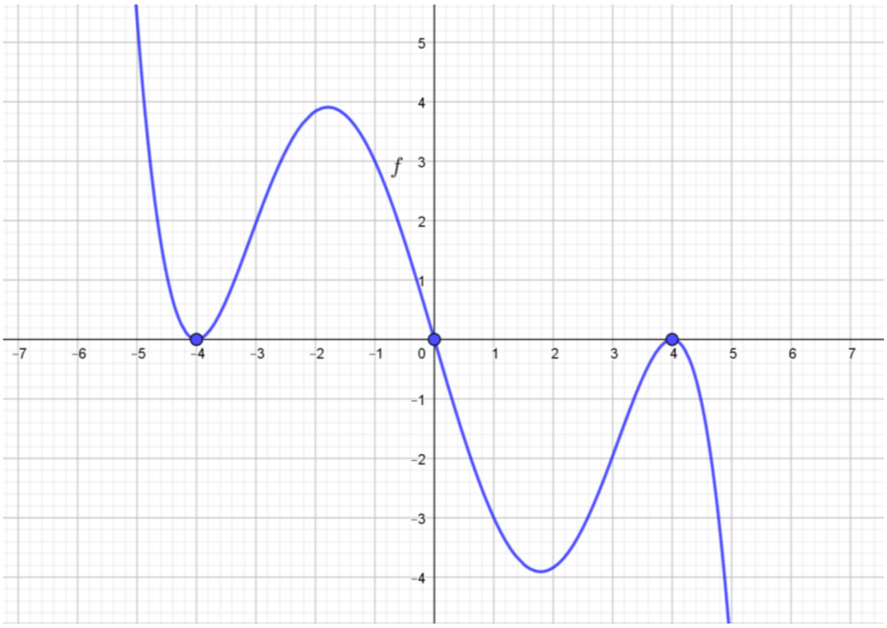
Solución:

a) $f(x) = ax(x-4)^2(x+4)^2$

Como $(1, -3) \in G(f) \leftrightarrow a = -\frac{3}{225}$. Luego,

$$f(x) = -\frac{3}{225}x(x-4)^2(x+4)^2, x \geq -5$$

b) Puntos de intersección con los ejes coordenados: $(-4; 0), (0; 0), (4; 0)$



c) $f(x) \geq 0 \leftrightarrow -5 \leq x \leq 0 \cup \{4\}$

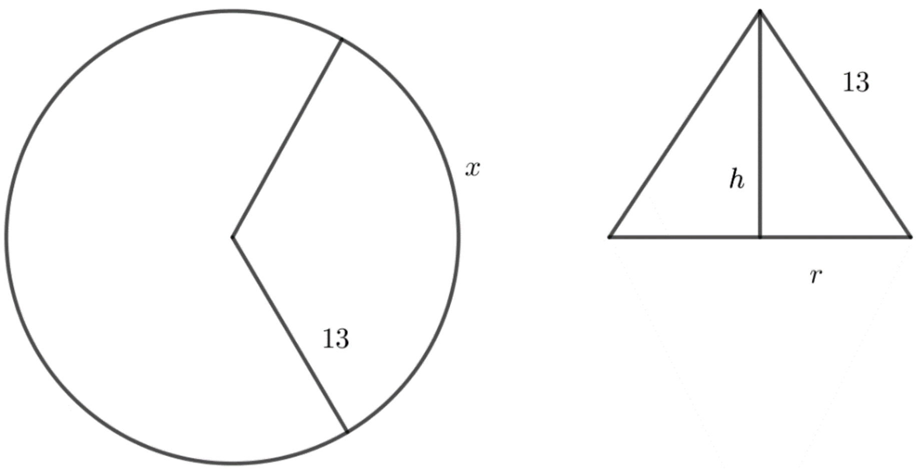
5. De una lámina circular de cartón de 13 cm de radio, se corta un sector circular con un arco de longitud *x* con el cual se construye un cono circular recto.

   a) Determine el volumen *V* del cono formado en función de *x* e indique su dominio. (2 puntos)

   b) Halle los valores de *x* tales que $V(x) \leq \frac{5x^2}{12\pi}$. (2 puntos)

Solución:

a)



De la figura $r = \frac{x}{2\pi}$, $h = \sqrt{169 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$. Luego,

$$V(x) = \frac{x^2}{12\pi}\sqrt{169 - \frac{x^2}{4\pi^2}}, \qquad 0 < x < 26\pi$$

b) $\frac{x^2}{12\pi}\sqrt{169 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \leq \frac{5x^2}{12\pi} \leftrightarrow \frac{x^2}{12\pi}\left(\sqrt{169 - \frac{x^2}{4\pi^2}} - 5\right) \leq 0$

$$\sqrt{169 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \leq 5 \leftrightarrow \frac{x^2}{4\pi^2} - 144 \geq 0 \leftrightarrow (x + 24\pi)(x - 24\pi) \geq 0$$

de donde $x \in \,]-\infty, -24\pi] \cup [24\pi, +\infty[$. Por lo tanto,

$$x \in (]-\infty, -24\pi] \cup [24\pi, +\infty[) \cap]0{,}26\pi[\,=\, [24\pi, 26\pi[$$

Coordinadora de práctica: Iris Flores

San Miguel, 30 de octubre de 2017