

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN PARCIAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2023-1

Turno 1

Horarios: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 119, 120, 121, 122

Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Tome las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos; de tener alguna emergencia, comuníquese a su jefe de práctica.
- Si desea retirarse del aula y dar por concluida su evaluación, deberá haber transcurrido la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- Puede usar calculadoras no programables ni gráficas.
- No puede usar apuntes de clase ni libros.
- El examen consta de 5 preguntas. Debe justificar sus respuestas.
- Puede responder las preguntas en el orden que desee, sólo asegúrese de colocar en la parte superior de cada página el número de la pregunta que está resolviendo.

Pregunta 1

Considere la siguiente ecuación

$$x^2 + 2x + k^2(y - 1)^2 + 1 - k = 0.$$

Analice qué forma tiene su gráfica en cada uno de los siguientes casos:

- a) $k = -1$. (1 punto)
- b) $k = 0$. (1 punto)
- c) $k > 1$. (2 puntos)

Pregunta 2

Considere la cónica \mathcal{C} cuya ecuación es la siguiente:

$$\mathcal{C}: x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y + 45 = 0$$

- a) Mediante una rotación adecuada de los ejes de coordenadas, demuestre que dicha ecuación corresponde a una parábola. (2 puntos)
- b) Halle las coordenadas del vértice de \mathcal{C} y la ecuación de su eje focal en el sistema XY . (1 punto)
- c) Grafique la cónica \mathcal{C} en el sistema XY , mostrando su vértice y eje focal. (1 punto)

Pregunta 3

Considere el triángulo ABC , donde:

- El vértice B tiene coordenadas $(2; 6)$.
 - La recta $\mathcal{L}: y = 3$ contiene a la altura del triángulo, trazada desde el vértice A .
 - El punto $O(4; 3)$ es el ortocentro (punto de intersección de las alturas del triángulo).
 - La recta que pasa por los puntos O y C tiene pendiente $\frac{5}{3}$.
- a) Halle las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC . (2,5 puntos)
- b) Describa con un sistema de inecuaciones el interior del triángulo ABC con su frontera. (1,5 puntos)

Pregunta 4

Considere los lugares geométricos siguientes:

- \mathcal{C} es la circunferencia de ecuación $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 74$.
 - \mathcal{L} es la recta $x + 3 = 0$.
 - \mathcal{H} es la hipérbola que tiene una asíntota con pendiente $-\frac{4}{3}$ y cuyos focos son los puntos de intersección de \mathcal{C} y \mathcal{L} .
 - \mathcal{E} es la elipse cuyos extremos del eje menor son los focos de \mathcal{H} y que tiene un vértice en el centro de \mathcal{C} .
- a) Halle la ecuación de \mathcal{H} . (2 puntos)
- b) Halle la ecuación de \mathcal{E} . (2 puntos)

Pregunta 5

- a) Considere los vectores

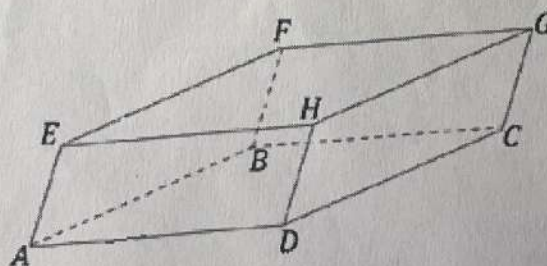
$$\vec{a} = (5; -2), \vec{b} = (1; 2), \vec{c} = (-2; 8) \text{ y } \vec{w} = (m; n), \text{ con } n > 0.$$

Se sabe que el vector \vec{w} es ortogonal al vector \vec{b} y que $\left\| \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \right\| = \|\vec{w}\|$.

Halle el vector \vec{w} .

(2 puntos)

- b) En la figura se muestra un paralelepípedo $ABCD - EFGH$



Si se sabe que $A(2; 0; 1)$, $D(1; 3; 2)$, $\overrightarrow{AH} = (-4; 6; 4)$ y $\overrightarrow{DC} = (-10; 0; 0)$, halle las coordenadas de B, C, E, F, G y H ; explique cómo las obtiene. (2 puntos)

Año			Número				
2	0	2	3	1	9	7	9

Código de alumno

Primer examen

CORRALES ALAMAN ALVARO MATIAS
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

[Firma]
Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: 11 - 113

Fecha: 15/03/23

Nombre del profesor: E. BARRANTES

Nota
20

E.B.R.
Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

1)

$$x^2 + 2x + k^2(y-1)^2 + 1 - k = 0$$

a) $k = -1$ $x^2 + 2x + (-1)^2(y-1)^2 + 1 - (-1) = 0$

$$x^2 + 2x + (y-1)^2 + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + (y-1)^2 + 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = -1$$

L.G. = \emptyset No existe gráfica porque el resultado de la suma dos números elevados al cuadrado es mayor igual que 0. $y-1$ es menor que 0

b) $k = 0$

$$x^2 + 2x + (0)^2(y-1)^2 + 1 - (0) = 0$$

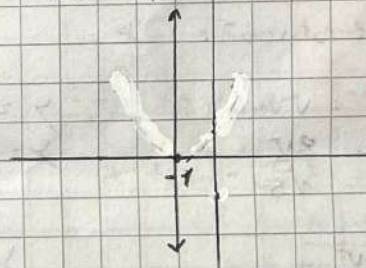
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

→ Recta



~~Recta~~

c) $k > 1$

$$x^2 + 2x + k^2(y-1)^2 + 1 - k = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + k^2(y-1)^2 + 1 - k = 0$$

$$(x+1)^2 + k^2(y-1)^2 + 1 - k = 0$$

$$(x+1)^2 + k^2(y-1)^2 - k = 0$$

$$(x+1)^2 + k^2(y-1)^2 = k$$

$\div k$

$$\frac{(x+1)^2}{k} + k(y-1)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{k} + \frac{(y-1)^2}{k^{-1}} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{k} + \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{k}} = 1$$

Centro
(-1, 1)

Restricción $k > 0$

Dado $\Rightarrow k > 1$ entonces sí existe

Es elipse.

$$(x+1)^2 + k^2(y-1)^2 - k = 0$$

$$(x+1)^2 + k(k(y-1)^2 - 1) = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + k^2(y^2 - 2y + 1) - k = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + k^2y^2 - 2yk^2 + k^2 - k = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + (ky)^2 - 2yk^2 + k^2 - k = 0$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = 0$$

$$|x+1| = 0$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x = -1$$

$$(x+1)^2 + 4(y-1)^2 - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 2$$

$$\frac{(x+1)^2}{2} + 2(y-1)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2) C: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y + 45 = 0$

A \neq C

$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$

$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{-3}$

$-6\tan\theta = 4 - 4\tan^2\theta$

$4\tan^2\theta - 6\tan\theta - 4 = 0$

$2\tan^2\theta - 3\tan\theta - 2 = 0$

$\frac{2\tan\theta}{\tan\theta} \times \frac{1}{-2}$

$(2\tan\theta + 1)(\tan\theta - 2) = 0$

$\tan\theta = -\frac{1}{2} \quad \tan\theta = 2$

x

v

$\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

Ejes de rotación:

$x = u\cos\theta - v\sin\theta$

$x = \frac{u}{\sqrt{5}} - \frac{2v}{\sqrt{5}}$

$y = u\sin\theta + v\cos\theta$

$y = \frac{2u}{\sqrt{5}} + \frac{v}{\sqrt{5}}$

$x = \frac{u-2v}{\sqrt{5}}$

$y = \frac{2u+v}{\sqrt{5}}$

$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y + 45 = 0$

$\left(\frac{u-2v}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{u-2v}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\sqrt{5}\left(\frac{u-2v}{\sqrt{5}}\right) - 18\sqrt{5}\left(\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\right) + 45 = 0$

$\frac{u^2 - 4uv + 4v^2}{5} + 4\left(\frac{2u^2 - 3uv - 2v^2}{5}\right) + 4\left(\frac{4u^2 + 4uv + v^2}{5}\right) + 6u - 12v - 36u - 18v + 45 = 0$

$\frac{1}{5}(u^2 - 4uv + 4v^2 + 8u^2 - 12uv - 8v^2 + 16u^2 + 16uv + 4v^2) - 30u - 30v + 45 = 0$

$\frac{1}{5}(25u^2 - 30u - 30v + 45) = 0$

$5u^2 - 30u - 30v + 45 = 0$

$u^2 - 6u - 6v + 9 = 0$

$u^2 - 6u + 9 - 6v + 9 = 0$

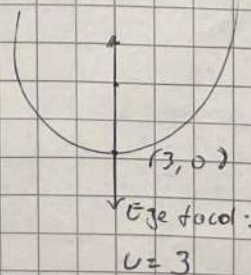
$(u-3)^2 - 6v + 18 = 0$

a) P: $(u-3)^2 = 6v$

V (3, 0) $P = \frac{3}{2}$

En u, v

$4p = 6$
 $p = \frac{3}{2}$



$(u-3)^2 = 6(v-0)$

Centro: (3, 0)

Handwritten notes and scribbles at the bottom right.

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

b) Vértice en u, v $(3, 0)$

Eje de rotación:

$$x = \frac{u - 2v}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{2u + v}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{3 - 2(0)}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{2(3) + 0}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Vértice en xy : $(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}})$

• Eje focal $\Rightarrow u = 3$

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$3 = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}}$$

$$3 = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}$$

$$3\sqrt{5} = x + 2y$$

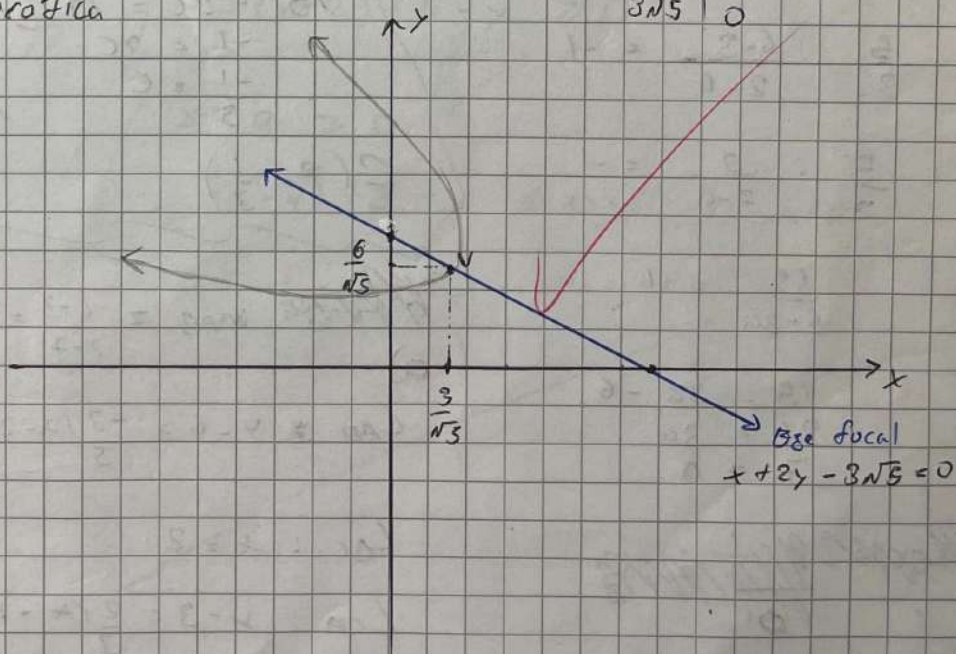
$$0 = x + 2y - 3\sqrt{5}$$

Eje focal en xy :

$$x + 2y - 3\sqrt{5} = 0$$

x	y
0	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$
$3\sqrt{5}$	0

c) Gráfica

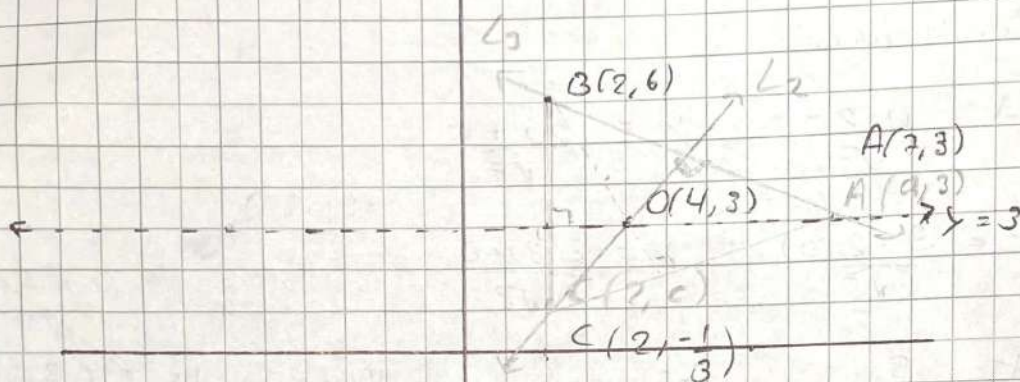


Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva
cálculos y desar
(borrador)

③

BOCETO:



• $h \in L: y=3$
• $A \in L: y=3$

• $O(4,3)$ es ortocentro

• L_2 pasa por $O, C \therefore m_{L_2} = \frac{5}{3}$

~~BA~~ $BA \in L_3$

$\therefore L_2 \perp L_3$

$m_{L_2} \cdot m_{L_3} = -1$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{6-3}{2-4} = -1$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2-4} = -1$$

$$\frac{15}{6-3a} = -1$$

$$15 = 3a - 6$$

$$21 = 3a$$

$$7 = a$$

$$L_2: y-3 = \frac{5}{3}(x-4)$$

$$3y-9 = 5x-20$$

$$L_2: 5x-3y+11=0$$

$C \in L_2$
 $(2, c)$

$$5(2) - 3c + 11 = 0$$

$$10 - 3c = -11$$

$$-1 = -3c$$

$$\frac{-1}{-3} = c$$

$$C(2, -\frac{1}{3})$$

~~MA~~ $m_{AB} = \frac{6-3}{2-7} = -\frac{3}{5}$

a)

$$L_{AB}: y-6 = -\frac{3}{5}(x-2)$$

$$L_{BC}: x=2$$

$$L_{CA}: y-3 = \frac{2}{3}(x-7)$$

$$m_{CA} = \frac{3+\frac{1}{3}}{2-2} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{0}{1}} = \frac{2}{3}$$

$$L_{CA}: y-3 = \frac{2}{3}(x-7)$$

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

$$b) L_{AB}: y - 6 = \frac{-3}{5}(x - 2) \Rightarrow \frac{-3}{5}(x - 2) + 6 - y \geq 0$$

$$L_{BC}: x = 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0$$

$$L_{CA}: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 7) \Rightarrow \frac{2}{3}(x - 7) + 3 - y \leq 0$$

$$O(4, 3) \in \Delta_{ABC}$$

$$L_{AB}: 3 - 6 = \frac{-3}{5}(4 - 2)$$

$$-3 \leq \frac{-6}{5}$$

$$L_{BC}: x = 2$$

$$4 > 2$$

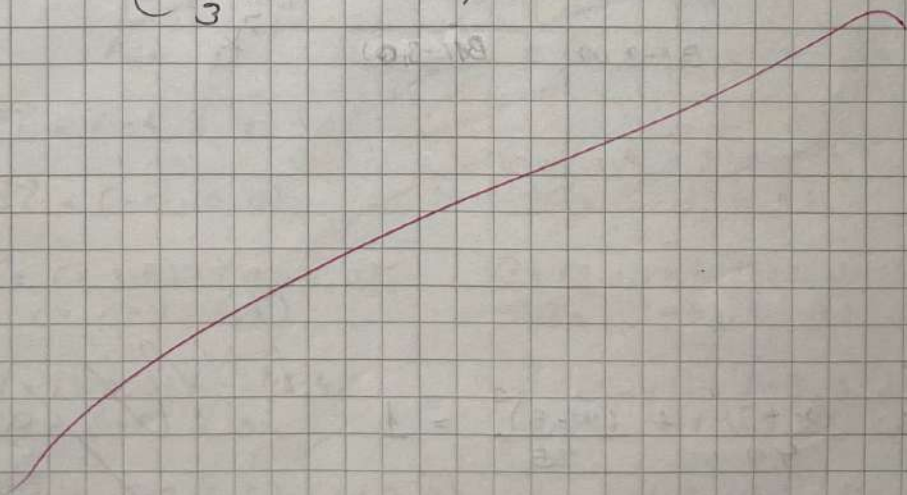
$$L_{CA}: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 7)$$

$$3 - 3 = \frac{2}{3}(4 - 7)$$

$$0 > -2$$

* Con su frontera

$$R = \begin{cases} \frac{-3}{5}(x - 2) + 6 - y \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ \frac{2}{3}(x - 7) + 3 - y \leq 0 \end{cases}$$



Presente aquí su trabajo

④ $C: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 74$ Centro de $C: (4, 5)$

$L: x+3=0$
 $x=-3$

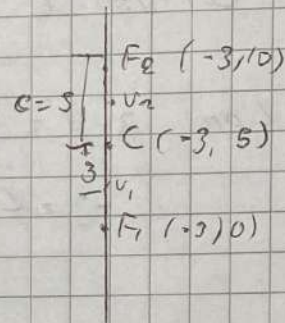
$F_1, F_2 = (-3-4)^2 + (y-5)^2 = 74$
 $49 + y^2 - 10y + 25 = 74$
 $y^2 - 10y = 0$
 $y(y-10) = 0$
 $y=0 \vee y=10$

$F_1(-3, 0)$

$F_2(-3, 10)$

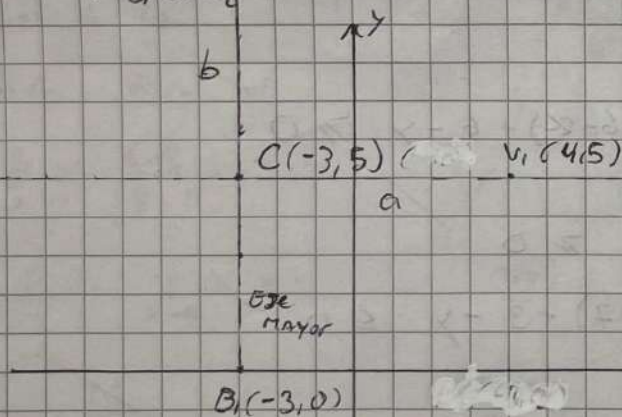
$m_{asintota} = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{3}$

$\rightarrow b=4, a=3$ $C(-3, 5)$
 $c=5$

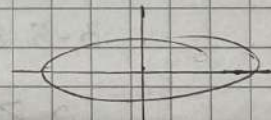


a) $\therefore \frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

Elipse $\rightarrow V_1(4, 5)$ $B_1(-3, 0)$ $B_2(-3, 10)$
 $(-3, 10) B_2$



$a=7$
 $b=5$



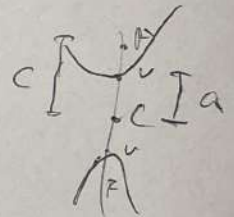
b) $\therefore \frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollo
(borrador)

hipérbola

$-\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

$b=4$
 $a=3$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

5)

$$\vec{a} = (5, -2)$$

$$\vec{b} = (1, 2)$$

$$\vec{c} = (-2, 8)$$

$$\vec{w} = (m, n)$$

$$n > 0$$

$$\vec{w} \perp \vec{b}$$

$$\|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\| = \|\vec{w}\|$$

$$\vec{w} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\|(5, -2) + \frac{1}{2}(-2, 8)\| = \|\vec{w}\|$$

$$(m, n) \cdot (1, 2) = 0$$

$$\|(5, -2) + (-1, 4)\| = \|\vec{w}\|$$

$$m + 2n = 0$$

$$m = -2n$$

$$\|(4, 2)\| = \|\vec{w}\|$$

$$m = -2(2)$$

$$m = -4$$

$$\|(4, 2)\| = \|(m, n)\|$$

$$a) \vec{w} = (-4, 2)$$

$$\sqrt{16 + 4} = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$20 = m^2 + n^2$$

$$20 = (-2n)^2 + n^2$$

$$20 = 4n^2 + n^2$$

$$20 = 5n^2$$

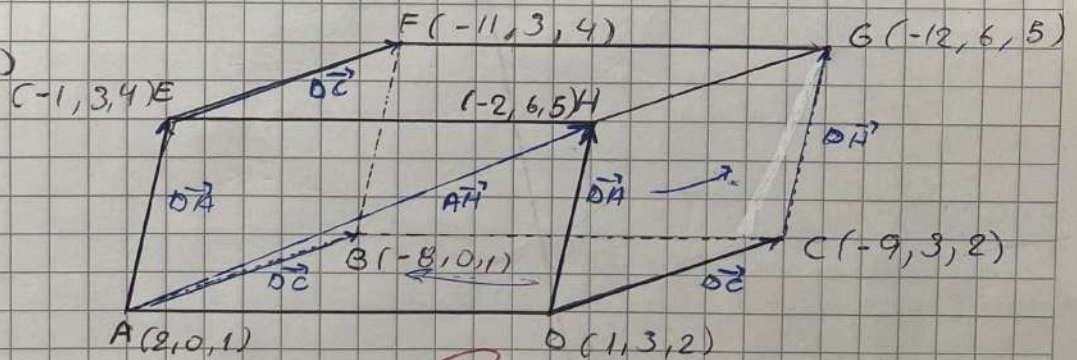
$$4 = n^2$$

$$\sqrt{4} = n \vee n = -2$$

$$n > 0$$

$$n = 2$$

b)



$$\vec{AH} = (-4, 6, 4)$$

$$\vec{DC} = (-10, 0, 0)$$

$$G = (-9, 3, 2) + (-3, 3, 3)$$

$$G = (-12, 6, 5)$$

$$C = (1, 3, 2) + (-10, 0, 0)$$

$$C = (-9, 3, 2)$$

$$B = (2, 0, 1) + (-10, 0, 0)$$

$$B = (-8, 0, 1)$$

$$H = (2, 0, 1) + (-4, 6, 4)$$

$$H = (-2, 6, 5)$$

$$E = (2, 0, 1) + (-3, 3, 3)$$

$$E = (-1, 3, 4)$$

$$\vec{FH} = (-2, 6, 5) - (1, 3, 2)$$

$$\vec{FH} = (-3, 3, 3)$$

$$F = (-1, 3, 4) + (-10, 0, 0)$$

$$F = (-11, 3, 4)$$