PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERU
ESTUDIOS GENERALES DE CIENCIAS
Fundamentos de Cálculo
Tercera Práctica Calificada
(2017-2)

Indicaciones generales

- Tiempo de duración: 1 hora y 50 minutos.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros ni calculadoras.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente sus respuestas.
   a) Si f es una función creciente en $\mathbb{R}$ y g es inyectiva en $\mathbb{R}$, entonces $f+g$ es creciente en $\mathbb{R}$. (1 punto)
   b) La función inversa de f, definida por $f(x)=x^2-3$, con $1<x<3$, está dada por $f^{-1}(x)=\sqrt{x+3}$ para $x\geq -3$. (1 punto)

2. Dada la función *f*, definida por

$$f(x)=\begin{cases}4-(x+3)^2, & -5\leq x\leq -1\\ |x-2|-3, & -1<x\leq 4\end{cases}$$

   a) Bosqueje la gráfica de la función g definida por $g(x)=-f(x+1)+1$. (3 puntos)
   b) Halle el dominio y el rango de g. (1 punto)

3. Dada la función *f*, definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x-2b+5, & x\leq b\\ x^2-6x+10, & x>b+2\end{cases}$$

   a) Halle el menor valor que puede tomar *b*, para que la función sea inyectiva. (3 puntos)
   b) Grafique f y su inversa f^{-1} en un mismo plano cartesiano. (2 puntos)

4. Sea f una función definida por una expresión polinómica de grado 5 con dominio el intervalo $[-5,+\infty[$, cuya gráfica pasa por el punto $(1,-3)$ y tiene ceros en $x=0$, $x=4$(multiplicidad 2) y $x=-4$ (multiplicidad 2).
   a) Determine la regla de correspondencia de la función f. (2 puntos)
   b) Bosqueje la gráfica de *f*, indicando las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados. (2 puntos)
   c) Indique los intervalos donde $f(x)\geq 0$. (1 punto)

Continúa...

5. De una lámina circular de cartón de 13 cm de radio, se corta un sector circular con un arco de longitud x con el cual se construye un cono circular recto.

   a) Determine el volumen V del cono formado en función de x e indique su dominio y su rango. (2 puntos)

   b) Halle los valores de x tales que $V(x) \leq \frac{5x^2}{12\pi}$. (2 puntos)

Elaborado por los profesores del curso.
Coordinadora de práctica: Iris Flores
San Miguel, 30 de octubre de 2017

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

Año 2017 Número 6057

Código de alumno

ENTREGADO
06 NOV. 2017

Práctica

Valenzuela De la Cruz , César Josue

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FUCAL

Nota

20

Práctica N°: 03

Horario de práctica: H-104

Fecha: 30/ 10/ 17

Nombre del profesor: Fidel J.

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) MCVL

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

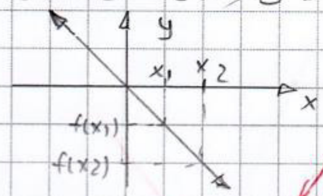
① a) $f(x) = 5x + 3 \rightarrow$ creciente en $\mathbb{R}$. por ser recta con pendiente positiva $\rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ✓

$g(x) = -6x - 3 \rightarrow$ Inyectiva por ser recta; a lo más en un punto puede ser cortado por una recta horizontal.

$f(x_1) = f(x_2)$ ✓

$x_1 = x_2$

$f + g = 5x + 3 - 6x - 3 = -x$ no es creciente.



$x_1 < x_2$ pero $f(x_1) > f(x_2)$ (decreciente)

(V).

b) $f(x) = x^2 - 3$ Dom $1 < x < 3$ (F)

Rango Ran $]-2; 6[$

$1 < x^2 < 9$

$-2 < x^2 - 3 < 6$.

$f^{-1}(x) \rightarrow y = x^2 - 3$

$y + 3 = x^2$

$\sqrt{y+3} = x$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} = y$ $\quad Dom_{f^{-1}(x)} =]-2; 6[$

Par $x \geq -3$ no para $-2 < x < 6$

(1)

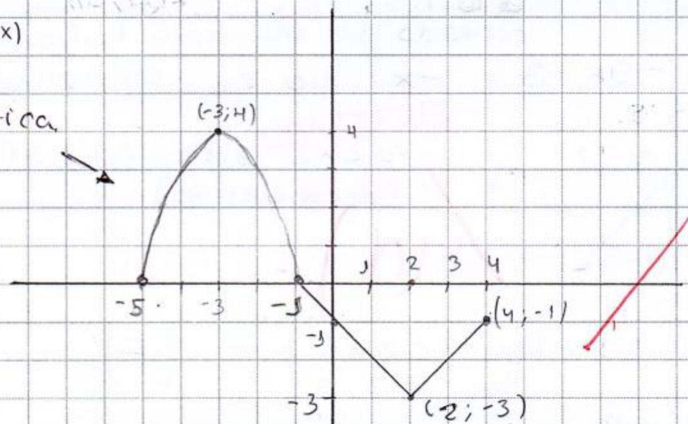
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

② $f(x) = \begin{cases} 4-(x+3)^2 \;; & -5 \le x \le -1 \;\ldots (a) \\ |x-2|-3 \;; & -1 < x \le 4 \;\ldots (b) \end{cases}$

f(x)

Gráfica



i) $-(x+3)^2+4$

$V(-3;4)$ ... (a)

ii) (b)... $|x-2|-3$ $H(x)=|x|$

$H(x-2)-3$

1° 2 derecha

2° 3 abajo

Entonces.

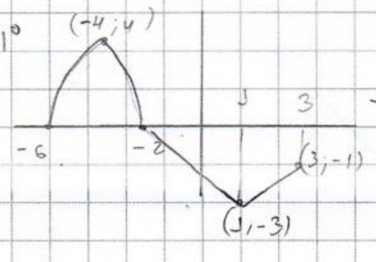
$g(x) = \underset{2°}{-} \underset{1°}{f(x+1)} \underset{3°}{+1}$

1° Traslación izquierda 1u

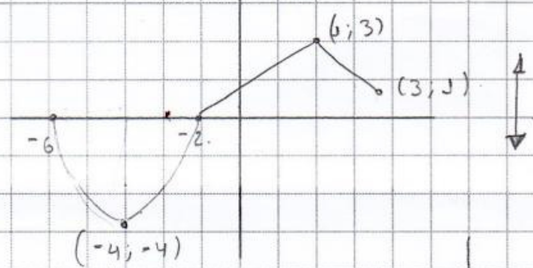
2° reflexion vertical (respecto eje x)

3° Traslación Arriba 1u

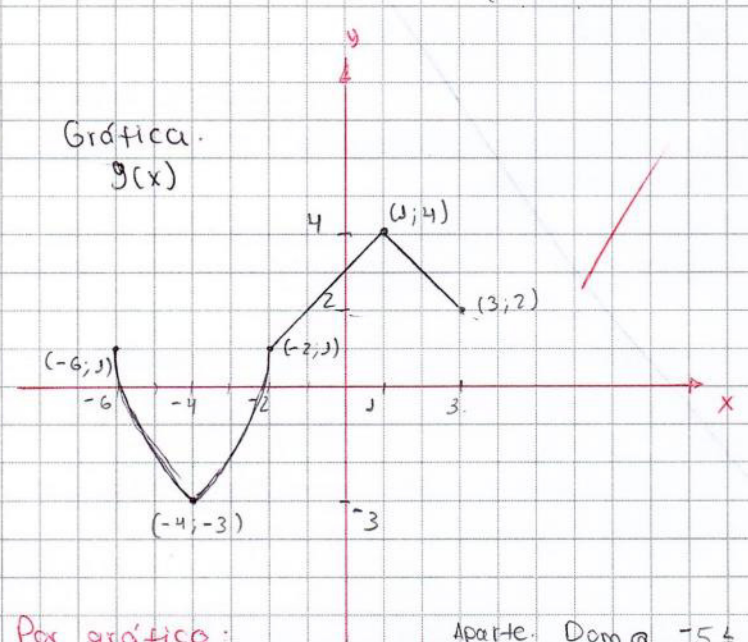
1°



2°



a) Gráfica g(x)



b) Por gráfico:

Dom g = [-6; 3]

Rang = [-3; 4]

Aparte. Dom g

$-5 \le x \le 4$ 1u

$-6 \le x \le 3$ reflexion

$-6 \le y \le 3$ 1u ↑

Domg $-6 \le x \le 3$

Rang $-3 \le f(x) \le 4$ 1u

$-3 \le f(x+1) \le 4$ reflexion

$-4 \le -f(x+1) \le 3$ 1u↑

Rang $-3 \le -f(x+1)+1 \le 4$

(4)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$x = b$

$2b - 2b + 5 = 5$

$(b+2)^2 - 6b - 12 + 10 = 5$

$b^2 + 4b + 4 - 6b - 2 = 5$

$b^2 - 2b - 3 = 0$

$b \quad -3$

$b \quad 1$

$b = 3$

$b = -1$

$2x - 6 + 5$

$2x - 1$

Presente aquí su trabajo

③ $f(x) = \begin{cases} 2x - 2b + 5 & ; \; x \leq b \\ x^2 - 6x + 10 & ; \; x > b + 2 \end{cases}$

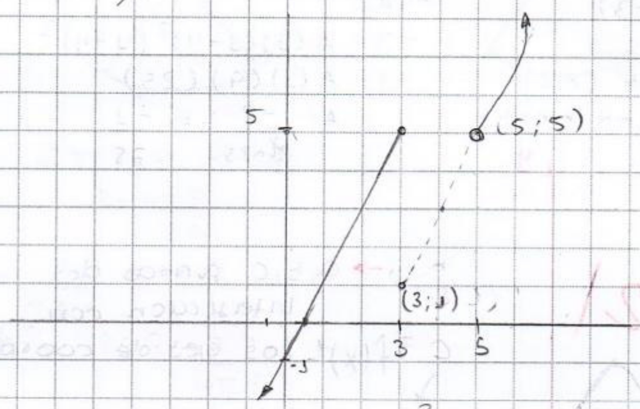
$x^2 - 6x + 10$

$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 10$

$(x - 3)^2 + 1$

$V(3; 1)$

$3 \leq b + 2$



Entonces $2x - 2b + 5 = x^2 - 6x + 10$

$x = b \qquad x = b + 2$

$5 = (b+2)^2 - 6b - 12 + 10$

$5 = b^2 + 4b + 4 - 6b - 2$

$0 = b^2 - 2b - 3$

$b \quad -3 \qquad b = 3$

$b \quad 1 \qquad \boxed{b = -1}$ No cumple

$\therefore \; b = 3$

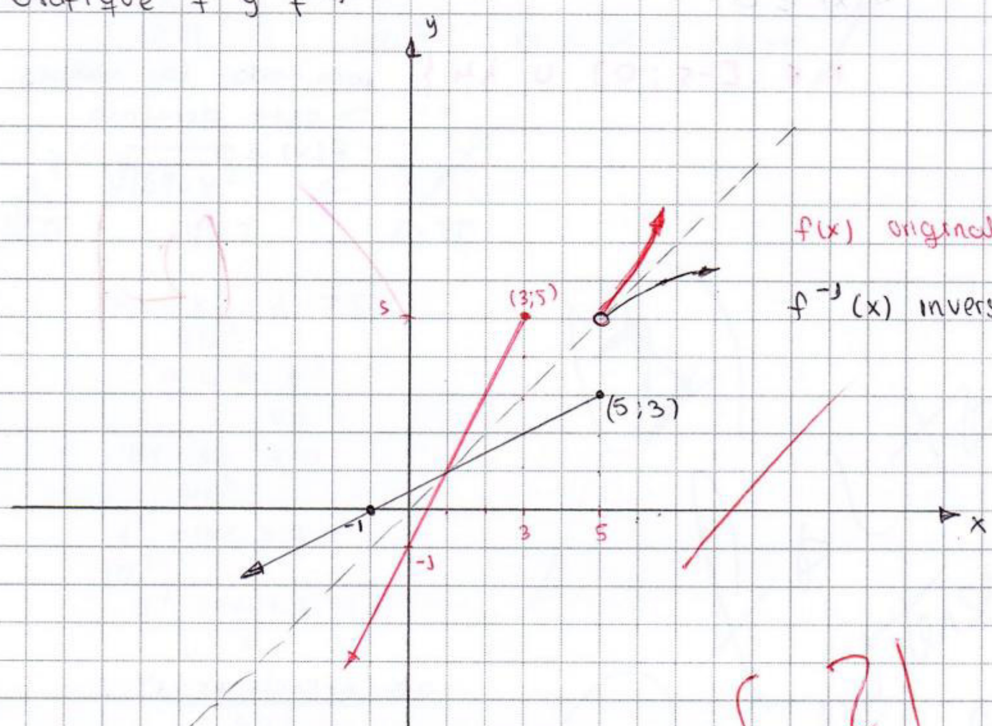
$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; \; x \leq 3 \\ x^2 - 6x + 10 & ; \; x > 5 \end{cases}$

$2x - 1 \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ y = -1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = 1/2 \\ y = 0 \end{matrix}$

a) $b = 3$ mínimo valor para ser $f(x)$ inyectiva.

(3)

b) Grafique f y f^{-1}



$f(x)$ original

$f^{-1}(x)$ inversa

(2)

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(4) f

Grado 5

Dom $[-5;+\infty[$

puntos $(1,-3)$

raíces $x=0$

$x=4 \quad (\times 2)$

$x=-4 \quad (\times 2)$

$f(x)=A(x)(x-4)^2(x+4)^2$

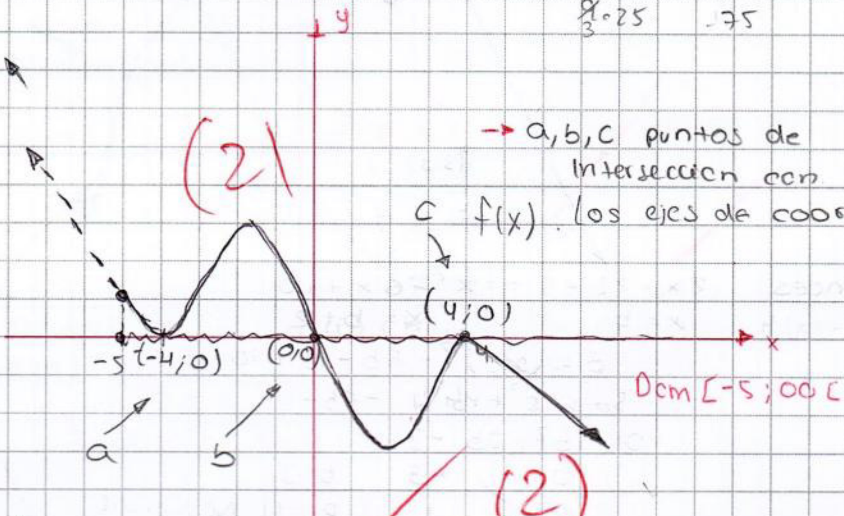
$(1;-3)$

x y

$-3=A(1)(1-4)^2(1+4)^2$

$-3=A(1)(9)(25)$

$A=\dfrac{-3}{\cancel{9}_{3}\cdot 25}=\dfrac{-1}{75}$



(2)

(2)

a) $\dfrac{-1}{75}(x)(x-4)^2(x+4)^2=f(x) \qquad x\in[-5;+\infty[$

$-\dfrac{1}{75}x^5+\dfrac{32}{75}x^3-\dfrac{256}{75}x=f(x)$

$f(x)=\dfrac{-1}{75}x^5+\dfrac{32}{75}x^3-\dfrac{256}{75}x \;,\; x\in[-5;\infty[$

c)

$f(x)\geq 0$

$x\in[-5;0]\cup\{4\}$ para todos los valores en este dominio $f(x)\geq 0$

(2)

$x^2-8x+16$

$x^2+8x+16$

$x^4-\cancel{8x^3}+16x^2$

$+\cancel{8x^3}-64x^2+\cancel{16.8x}$

$+16x^2-\cancel{16.8x}+$

$x^4-32x^2+16.16$

$(x^2-16)^2$

x^5-32x^3+256x

$\dfrac{-1}{75}x^5+\dfrac{32}{75}x^3-\dfrac{256}{75}x$

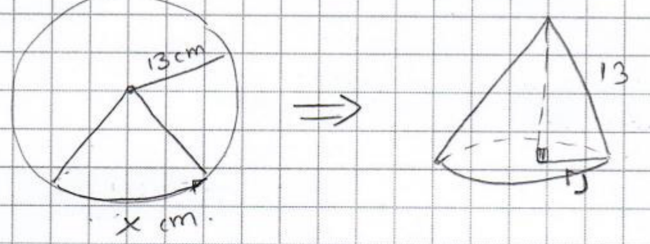
$\begin{array}{r}256\\+31\\\hline -225\end{array}$ $\dfrac{-225}{75}=-3$

$\begin{array}{r}16\\16\\\hline 96\\16\\\hline 256\end{array}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

5



$\therefore\ 2\pi r_J = x \text{ cm}$

$r_J = \dfrac{x}{2\pi} \text{ cm}$

$h^2 + \dfrac{x^2}{4\pi^2} = 169$

$h^2 = 169 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}$

$V_{cono} = \dfrac{1}{3} Ab \cdot h$

$\dfrac{1}{3} \cdot (\pi \cdot r_J^2) \cdot h$

$V_{cono} = \dfrac{1}{3} \cancel{\pi} \cdot \dfrac{x^2}{4\pi^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{169 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

$V_{cono} = \dfrac{x^2}{12\pi} \sqrt{169 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

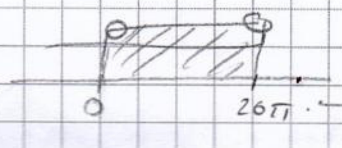
$169 - \dfrac{x^2}{4\pi^2} \geq 0$

$169 \geq \dfrac{x^2}{4\pi^2}$

$169 \cdot 4\pi^2 \geq x^2$

$13 \cdot 2\pi \geq x$

$26\pi \geq x$



(2)

a) $V_{con} = \dfrac{x^2}{12\pi} \sqrt{169 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$ $/\ 0 < x < 26\pi$

b) $\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{12\pi}} \sqrt{169 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}} \leq \dfrac{5\cancel{x^2}}{\cancel{12\pi}}$

$169 - \dfrac{x^2}{4\pi^2} \leq 25$

$144 \leq \dfrac{x^2}{4\pi^2}$

$144 - \dfrac{x^2}{4\pi^2} \leq 0$

$\dfrac{x^2}{4\pi^2} - 144 \geq 0$

$\dfrac{x^2 - 144 \cdot 4 \cdot \pi^2}{4\pi^2} \geq 0$

$\dfrac{(x - 24\pi)(x + 24\pi)}{4\pi^2} \geq 0$

~~24π~~ $\leq x$ $\quad -24\pi \quad 24\pi$

(2)

Falta intersectar con $x \in \langle 0; 26\pi \rangle$

Dom x = $x \in\ ]-\infty; -24\pi] \cup [24\pi; +\infty[$

Rpta $[24\pi; 26\pi\rangle$