Pregunta 1:

$$f(x)=|x-5|+4,\ x\in\mathbb{R} \quad y \quad g(x)=\begin{cases}(x-4)^2, & x\le 4 \dots g_1(x)\\ x-6, & 4<x\le 6 \dots g_2(x)\end{cases}$$

a) $\operatorname{Dom} f-g = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$

Entonces, $\mathbb{R} \cap]-\infty, 6] = \operatorname{Dom} f-g$

$$\Rightarrow \operatorname{Dom} f-g =]-\infty, 6]$$

Tenemos, $f(x)=|x-5|+4,\ x\in\mathbb{R}$

Reescribimos f,

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\ge 5\\ 9-x, & x<5\end{cases} = \begin{cases}x-1, & x>6\\ x-1, & 5\le x\le 6\\ 9-x, & 4<x<5\\ 9-x, & x\le 4\end{cases}$$

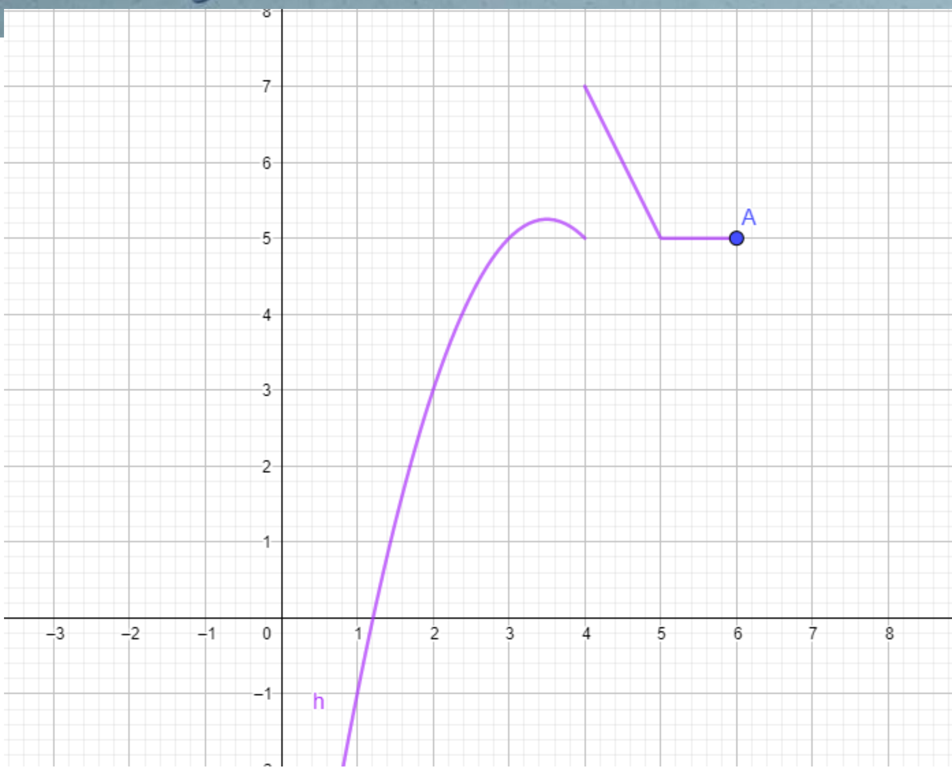
Por lo tanto, $f-g$

$$f-g=\begin{cases}(x-1)-(x-6), & 5\le x\le 6\\ (9-x)-(x-6), & 4<x<5\\ (9-x)-(x-4)^2, & x\le 4\end{cases}$$

Simplificando,

$$f-g=\begin{cases}5, & 5\le x\le 6\\ 15-2x, & 4<x<5\\ -(x-7/2)^2+21/4, & x\le 4\end{cases}$$

Esbozamos su gráfica:



b) $\text{Dom } g\circ f = \{x / \ x \in \text{Dom } f \ \wedge \ f \in \text{Dom } g\}$

$\Rightarrow \text{Dom } g_1 \circ f = \{x / x \in \text{Dom } f \ \wedge \ f \in \text{Dom } g_1\}$

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ |x-5|+4 \leq 4$$

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ |x-5| \leq 0$$

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x = 5 \ \Rightarrow \ \text{Dom } g_1 \circ f = \{5\}$$

$\Rightarrow \text{Dom } g_2 \circ f = \{x / x \in \text{Dom } f \ \wedge f \in \text{Dom } g_2\}$

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge 4 < |x-5|+4 \leq 6$$

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ 0 < |x-5| \leq 2 \ \ldots \ x \neq 5$$

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ -2 \leq x-5 \leq 2$$

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ 3 \leq x \leq 7 \ \Rightarrow \text{Dom } g_2 \circ f = [3,7] - \{5\}$$

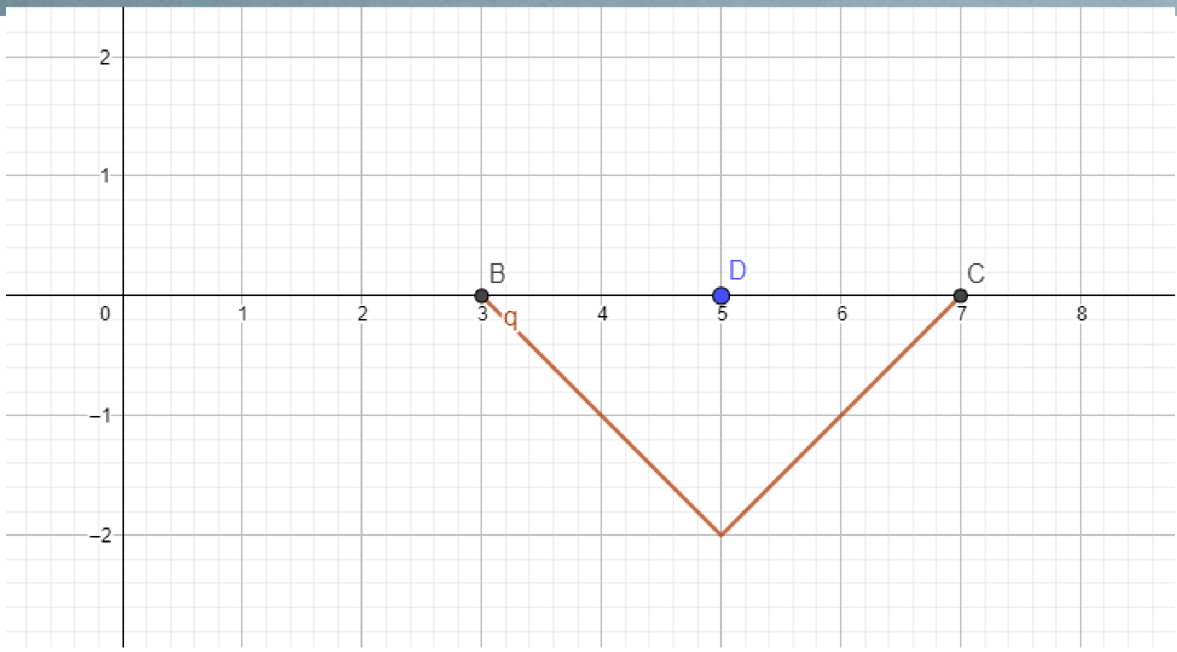
Por lo tanto,

$$g\circ f(x) = \begin{cases} (|x-5|+4) - 6 & , x \in [3,7] - \{5\} \\ ((|x-5|+4) - 4)^2, & x = 5 \end{cases}$$

Simplificando,

$$g\circ f \ (x) = \begin{cases} |x-5| - 2 & , x \in [3,7] - \{5\} \\ 0 & , \ x = 5 \end{cases}$$

Esbozamos su gráfica:



2) Primero identificamos a $g(x)$:

$g(1)=3 \rightarrow |k-(-1)^2|=3 \rightarrow |k-1|=3$ $\nearrow$ $k=4$ ó $k=-2$

$g(k+1)=k+1 \rightarrow |k-(k-1)^2|=k+1 \rightarrow |-k^2+3k-1|=k+1$

Probamos k's:

$|-16+12-1|=5$ $\quad$ $|-4-6-1|=-1$

$5=5$ $\quad$ $11\neq -1$ ✗

$\rightarrow k=4$

$$g(x)=|4-(x-2)^2|$$

Entonces:

$$f(x)=|(2-(x-2))(2+(x-2))| \quad , \quad x>2$$
$$|(4-x)(x)|$$

y

$$f(x)=\sqrt{-4x} \quad , \quad -2\leq x<0$$
$$=2\sqrt{-x}$$

Como $f(x)$ es impar:

- $-|(4+x)(-x)| \quad , \quad x<-2$
- $-2\sqrt{x} \quad , \quad 0<x\leq 2$
- $f(0)=0$

CAAS

Por lo que:

$$f(x)=\begin{cases} -|(4+x)(-x)| & , \quad x<-2 \\ 2\sqrt{-x} & , \quad -2\leq x<0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ -2\sqrt{x} & , \quad 0<x\leq 2 \\ |(4-x)(x)| & , \quad x>2 \end{cases}$$

b) Analizamos en cada intervalo si es posible que se obtenga $f(x)=2$

- El primer intervalo siempre será negativo, así que pasamos.

- El segundo tramo sí puede ofrecer positivos:

$$2\sqrt{-x} = 2$$
$$\sqrt{-x} = 1$$
$$-x = \pm 1 \rightarrow x = -1 \text{ sí está en el tramo } \checkmark$$

- El tercer tramo es solo cero. ;-;

- El cuarto tramo también será siempre negativo.

- El quinto tramo sí lo analizamos.

$$|(4-x)(x)| = 2$$

$$(4-x)(x) = 2 \qquad \vee \qquad -(4-x)(x) = 2$$
$$-x^2+4x-2=0 \qquad\qquad x^2-4x-2=0$$
$$x^2-4x+2=0$$

Si $2<x<4$:

$$4x-x^2-2=0$$
$$x^2-4x+2=0$$
$$(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})=0$$

- $x=2+\sqrt{2}$ está en el dominio

Si $x>4$:

$$x^2-4x-2=0$$
$$(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})=0$$

- $x=2+\sqrt{6}$ está en el dominio

Entonces:

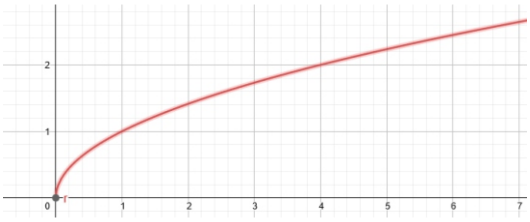
$$\text{Si } x = \{-1;\ 2+\sqrt{2};\ 2+\sqrt{6}\} \rightarrow f(x)=2$$

3) Primero graficamos $x = 1 - y^2$ (también puede hacerse con conceptos de AMGA, pero usaré transformaciones)

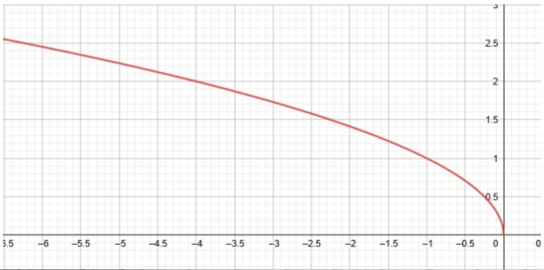
$$y^2 = 1 - x$$

$$y = \pm\sqrt{1-x}$$

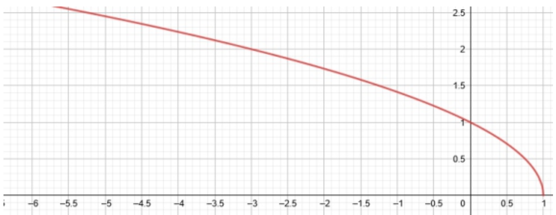
Empezamos con $\sqrt{+x}$



Reflejamos en el eje y para $\sqrt{-x}$



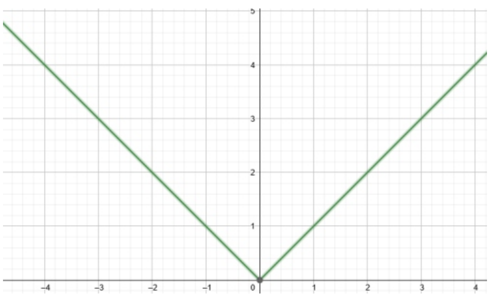
Luego desplazamos para $\sqrt{1-x}$. Tenemos la primera rama



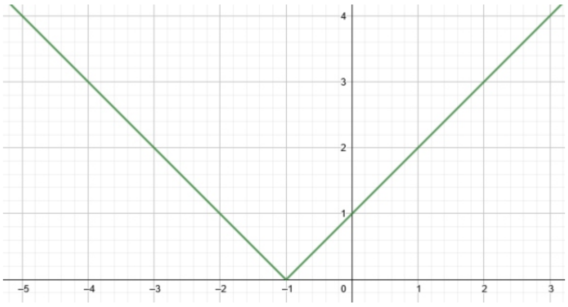
Ahora reflejamos en el eje x para $-\sqrt{1-x}$: la segunda rama.

Ahora, $|x+1| = y$

Empezamos con $|x|$



Desplazamos para $|x+1|$



Ahora, probamos algún valor en las regiones determinadas por las gráficas.

$(-2;0)$ en la primera desigualdad:

$-2 \ ? \ 1-0^2$

$-2 \leq 1$ ✓

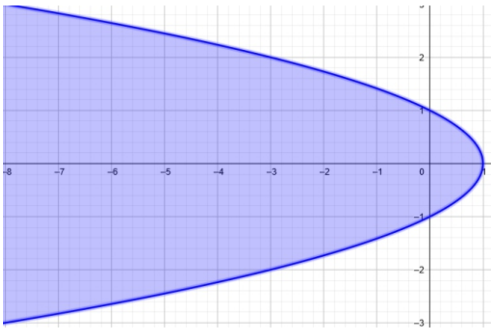
→ La desigualdad incluye el interior de la parábola

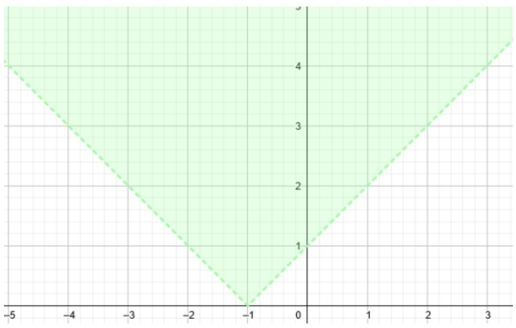
$(-2;0)$ en la segunda desigualdad

$|-2+1| \ ? \ 0$

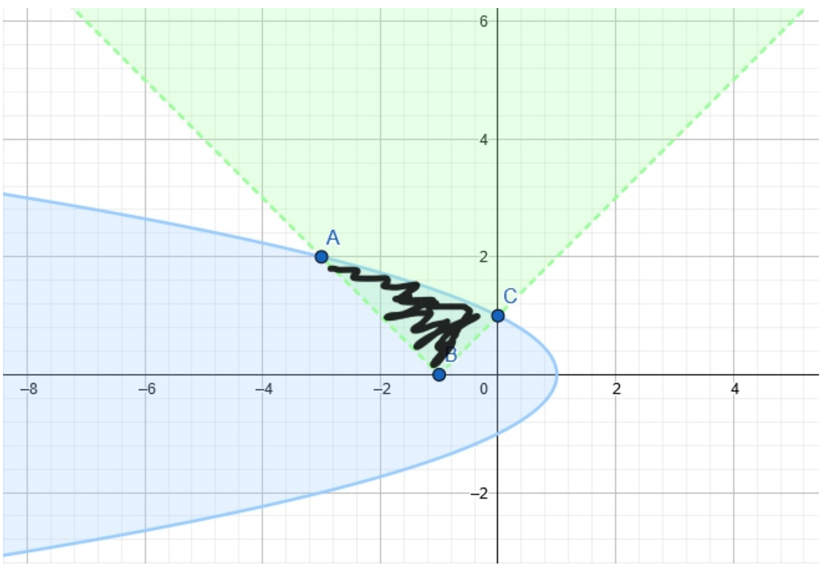
$1 < 0$ ✗

La desigualdad está representada por la abertura





→ Combinamos las regiones para obtener:



CAAS

4)

$$f_1(x) = x+3 \quad , \quad f_2(x) = 12-2x$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad x_1 \leq x < x_2$$

Datos:

- $g(0) = f_1(0) = 3 \rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 3 \rightarrow c = 3$
- El punto de intersección de f_1 y f_2 es:

$$x+3 = 12-2x \qquad y = x+3$$
$$3x = 9 \qquad y = 6$$
$$x = 3$$

$$\rightarrow (3;6)$$

Entonces: $\frac{-b}{2a} = 3$ y $f(3) = 6$

$$-b = 6a \qquad a \cdot 9 + 3b + 3 = 6$$
$$9a + 3b = 3$$
$$3a = 1 - b$$

$$\rightarrow -b = 2 - 2b$$
$$b = 2 \qquad -2 = 6a$$
$$-\cancel{1}/3 = a$$

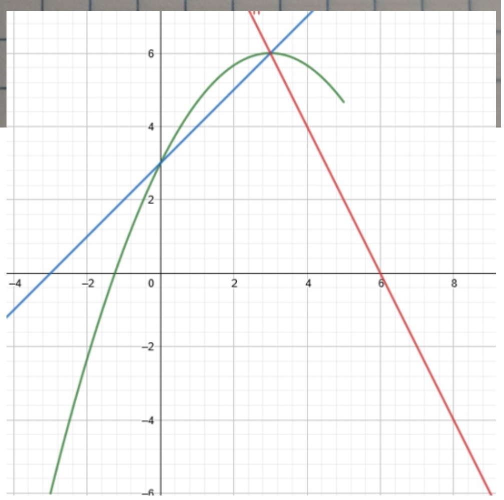
- $f_1(x_1) = 0 \rightarrow x_1 + 3 = 0$
$$x_1 = -3$$

$$f_2(x_2) = 2$$
$$12 - 2x_2 = 2$$
$$10 = 2x_2 \rightarrow 5 = x_2$$

Entonces: $g(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x + 3 \quad , \quad -3 \leq x < 5$

Además: $g(-3) = -6$ "$g(5)$" $= 14/3$ $g(3) = 6 \leftarrow$ vértice

Por lo que $\text{Ran } g = [-6; 6]$



CAAS

PREGUNTA 5

⤳ Hallamos la regla de correspondencia de $f(x)$
(notamos que está conformada por una parábola y una recta)

⤳ parábola

○ De la gráfica vemos que el vértice es $(-1;4)$

○ Escojemos un punto de paso $(-3,0)$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$(x+1)^2 = 4p(y-4)$$

○ reemplazamos el punto de paso

$$(-2)^2 = 4p(-4)$$
$$p = -\frac{1}{4}$$
$$(x+1)^2 = -(y-4)$$
$$\boxed{y = -(x+1)^2 + 4}$$

⤳ recta

○ pendiente $m = \dfrac{(4-0)}{3-1} = 2$

○ punto de paso $(3;4)$

$$\mathcal{L}: (y-4) = 2(x-3)$$
$$\boxed{y = 2x-2}$$

así f sería:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & , \ 1 < x \leq 3 \\ -(x+1)^2+4 & , \ -3 \leq x < 0 \end{cases}$$

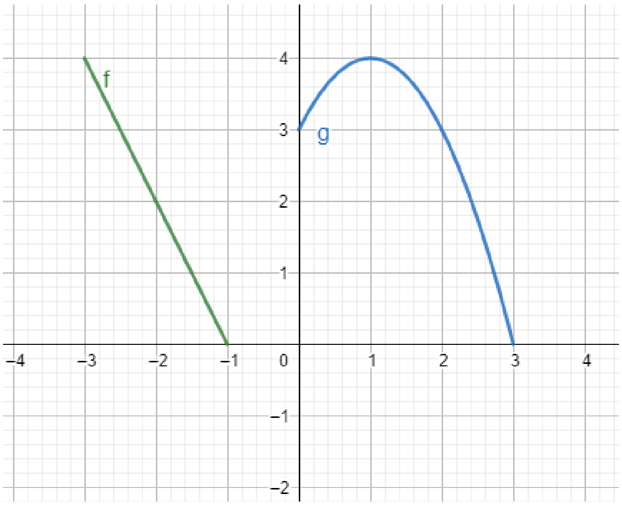
CAAS

○ Procederemos a graficar usando transformaciones

Paso 1

○ $f(-x)$ ⤳ la gráfica es reflejada respecto al eje Y

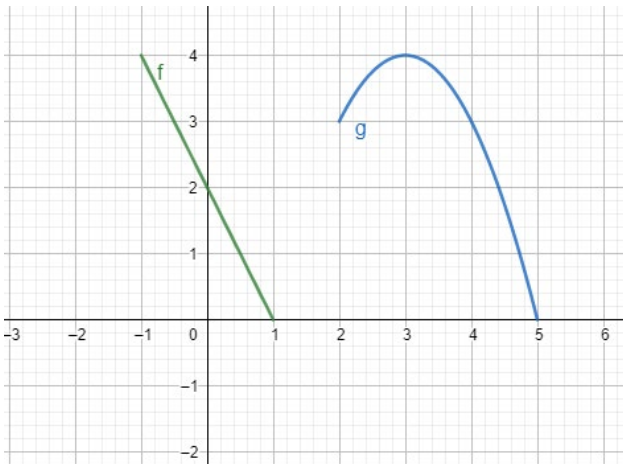
① $2(-x-1)$ ② $-(-x+1)^2+4$ ① ; $-3 \leq -x < 1$
② ; $0 < -x \leq 3$



Paso 2

○ $f(2-x)$ ⤳ la gráfica se traslada 2 unidades a la derecha

① $2(-x+1)$ ② $-(-x+3)^2+4$ ① ; $-1 \leq 2-x < 1$
② ; $2 < 2-x \leq 5$



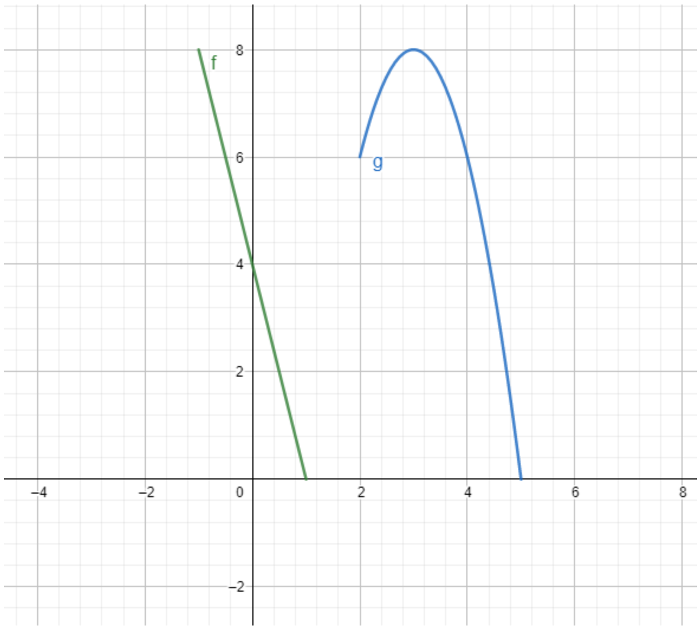
CAAS

Paso 3

○ $2f(2-x)$ ⇝ la gráfica se alarga verticalmente
→ las ordenadas de los puntos de f son multiplicados por 2.

Paso 4

(1) $4(-x+1)$ (2) $-2(-x+3)^2+8$ (1) : $-1 \le 2-x < 1$
(2) : $2 < 2-x \le 5$

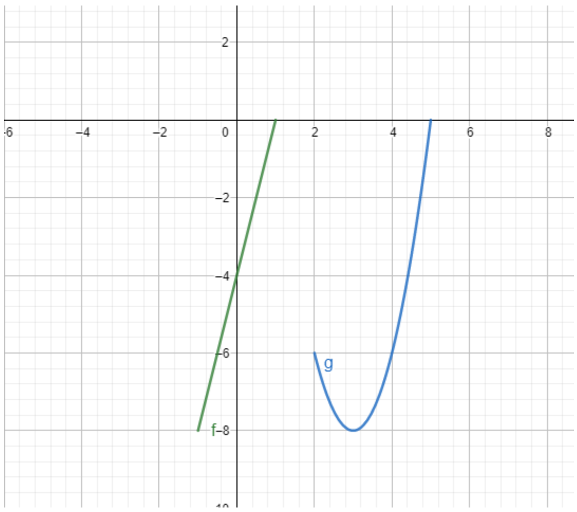


→ las ordenadas de los puntos de f son multiplicados por 2.

Paso 4

○ $-2f(2-x)$ ⇝ la gráfica es reflejada respecto al eje X

(1) $-4(-x+1)$ (2) $2(-x+3)^2-8$ (1) : $-1 \le 2-x < 1$
(2) : $2 < 2-x \le 5$



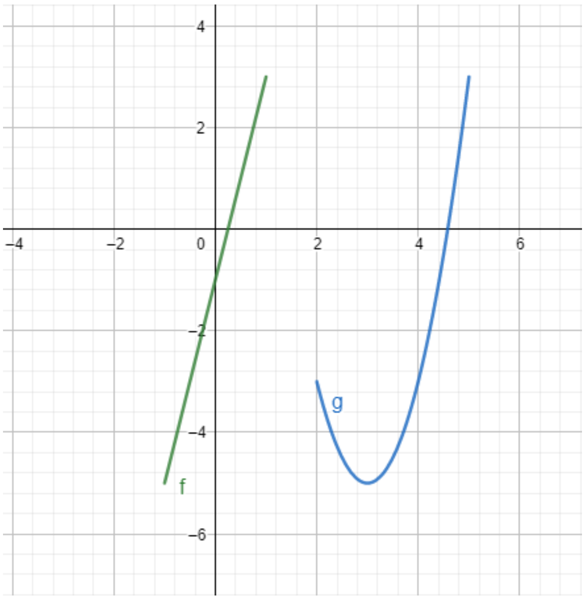
CAAS

al eje x

Paso 5

○ $3-2f(2-x)$ ⇝ la grafica sube 3 unidades

① $3-4(-x+1)$ ② $2(-x+3)^2-5$ ① : $-1 \leq 2-x < 1$ ② : $2 < 2-x \leq 5$



$$g(x) = \begin{cases} 3-4(-x+1) & ; -1 \leq x < 1 \\ 2(-x+3)^2-5 & ; 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Dom g: $[-1;1[\cup]2;5]$

Rango: $[-5;3]$

Pregunta 6:

Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$, $\exists$ g y h funciones con Dom $= \mathbb{R}$

tales que g es función par, h es función impar y se cumple: $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- g es función par: $g(-x) = g(x)$
- h es función impar: $h(-x) = -h(x)$

* OJO: En proposiciones con únicamente cuantificadores existenciales, NO podemos justificar la falsedad con 1 contraejemplo.

Entonces, $f(x) = \underbrace{g(x)}_{par} + \underbrace{h(x)}_{impar}$

Pero, se sabe que para toda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumple:

$$f(x) = f_p + f_i = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Por lo tanto, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Facilmente podemos hallar la regla de correspondencia de algun g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{0 - x}{2} & , x < 0 \\ \dfrac{0 + 0}{2} & , x = 0 \\ \dfrac{x + 0}{2} & , x > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{|x|}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Igualmente para $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Tendremos algun h tal que:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{0 - (-x)}{2} & , x < 0 \\ \dfrac{0 - (-0)}{2} & , x = 0 \\ \dfrac{x - (-0)}{2} & , x > 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

En conclusión, se demuestra que existen dos funciones h y g, tales que h impar, g par y se cumple que $f(x) = h(x) + g(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ La proposición es Verdadera.

<u>OJO:</u> De no saber que $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

—IMPAR—

<u>OJO:</u> $h(0)=0$

$f(0) = g(0) + h(0)$

$\Rightarrow g(0) = 0$

* Se tiene $f(x) = g(x) + h(x)$

Tenemos, $f(x) = g(x) + h(x) = 0$, $x<0$

$f(x) = g(x) + h(x) = x$, $x>0$ ... (α)

$\to g(-x) + h(-x) = 0$, $-x<0$

$g(-x) + h(-x) = 0$, $x>0$

$\downarrow$ par $\quad \downarrow$ impar

$g(x) - h(x) = 0$, $x>0$

$g(x) = h(x)$, $x>0$

Reemplazando en (α): $g(x) + g(x) = x$, $x>0$

$g(x) = g(-x) = \dfrac{-x}{2}$, $-x>0 \longleftarrow \bullet\ g(x) = \dfrac{x}{2}$, $x>0$

$h(x) = -g(-x) = -\dfrac{(-x)}{2}$, $-x>0 \longleftarrow \bullet\ h(x) = \dfrac{x}{2}$, $x>0$

Entonces, g par, $g(x) = \dfrac{|x|}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

h impar, $h(x) = \dfrac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Existe h y g tq $f(x) = g(x) + h(x)$

<u>VERDAD</u>