PUCP
Estudios
Generales Ciencias

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Cuarta Práctica Calificada

Semestre Académico 2024-1

Horario: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión del punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

---

1. Considere la esfera y el plano cuyas ecuaciones son:

$$\mathcal{S}:(x-a)^2+(y+a)^2+(z-2a)^2=9 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}: 2x+2y+z+1=0.$$

   a) Determine el valor de $a<0$ para el cual la esfera y el plano son tangentes. Además, halle las coordenadas del punto de tangencia. (2.5 puntos)

   b) Para $a=2$, verifique que el plano es secante a la esfera. Además, determine el radio de la circunferencia que resulta de intersecar la esfera y el plano. (2.5 puntos)

2. Considere las esferas $\mathcal{S}_1$ con centro $C_1(0;0;5)$ y $\mathcal{S}_2$ con centro $C_2(0;0;-1)$. Se sabe que el punto $A(0;3;1)$ pertenece a ambas esferas.

   a) Justifique que las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se intersecan en una circunferencia $\mathcal{C}$. (2 puntos)

   b) Halle la ecuación del plano que contiene a la circunferencia $\mathcal{C}$. (1 punto)

   c) Halle las coordenadas del centro de la circunferencia $\mathcal{C}$. (2 puntos)

3. Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) Verifique que $A^2=7A$ y que $A^3=49A$. (2.5 puntos)

   b) Resuelva la ecuación matricial

$$A^5-48A^3=2X^t+45A.$$

(2.5 puntos)

4. Considere el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5.$$

Calcule $\begin{vmatrix} 2a & m+x & x \\ 2b & n+y & y \\ 2c & p+z & z \end{vmatrix}$. (2 puntos)

5. a) Justificando su respuesta, analice el valor de verdad de la siguiente afirmación:
Existe una única matriz A de orden 2×2, no nula, tal que

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

(1.5 puntos)

b) Si A es una matriz cuadrada de orden 3 tal que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad, demuestre que

$$\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]^2 = \frac{1}{2}(I-A).$$

(1.5 puntos)

San Miguel, 17 de junio de 2024.

PUCP Estudios Generales Ciencias

19

Año: 2024 Número: 1028

Código de alumno

Práctica

Gostelo Marchán Juan Antonio

Apellidos y nombres del alumno (letra imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica N°: 4

Horario de práctica: 102

Fecha: 17/06/24

Nombre del profesor: E. Bornantes

Nota

20

Número entero

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: GGE
(iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - redacción, claridad de expresión, corrección gramatical, ortografía y puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

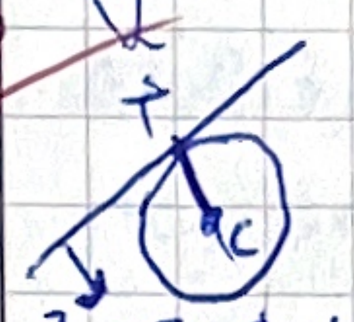
$$\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\2&2&1\end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$

2,5

1. $S: (x-a)^2+(y+a)^2+(z-2a)^2=9$ $\quad a<0$

a) $P: 2x+2y+z+1=0$ $\quad C(a;-a;2a)$ $\quad r=3$



$\vec{n}=(2;2;1)$ $\quad d(C;T)=r \quad T\in P \quad ; T\in \mathcal{L}$

$\mathcal{L}: P(a;-a;2a)+t(2;2;1);\ t\in\mathbb{R}$

$T(a+2t;-a+2t;2a+t)$

$$\sqrt{(a+2t-a)^2+(2t-a+a)^2+(2a+t-2a)^2}=3$$

$(2t)^2+(2t)^2+(t)^2=9$

$4t+4t^2+t^2=9$

$9t^2=9$

$t^2=1$

$|t|=1$

$t=1 \vee t=-1$;

$T_1(a+2;-a+2;2a+1) \vee T_2(a-2;-a-2;2a-1)$

Si el punto de tangencia fuera T_1

$2(a+2)+2(2-a)+2a+1+1=0$

$2a+4-2a+4+2a+2=0$

$2a+10=0$

$2a=-10$

$a=-5$; $a<0$ ✓

Si el punto de tangencia fuera T_2

$2(a-2)+2(-a-2)+2a-1+1=0$

$2a-4-2a-4+2a=0$

$2a-8=0$

$2a=8$

$a=4$; $a>0$ ✗

El valor de $a<0$ tal que la esfera y el plano son tangentes es $a=-5$

El punto de tangencia es

$T_1(-5+2;-(-5)+2;2(-5)+1)$

$T(-3;7;-9)$

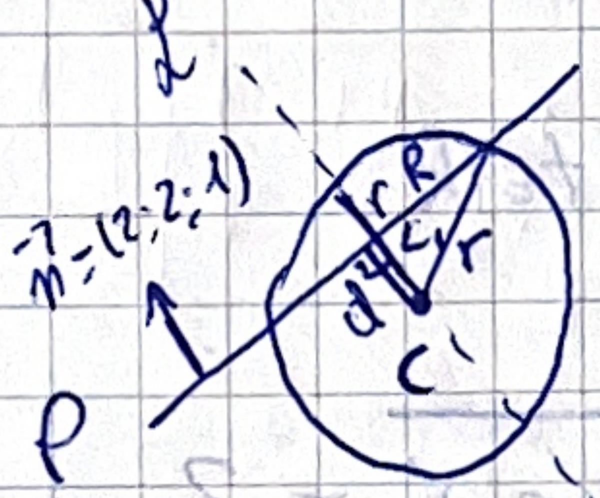
Presente aquí su trabajo

b) $a = 2$

$S: (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 = 9 \to C(2;-2;4)$, $r = 3$

2.5

$P: 2x+2y+z+1=0$



Si fueran secantes, se debe cumplir

$d(C;P) < r$

$$\frac{|2(2)+2(-2)+4+1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} < 3$$

$$\frac{5}{\sqrt{9}} < 3$$

$$\frac{5}{3} < 3 \to \frac{5}{3} < \frac{9}{3}$$

$5 < 9$

Son secantes ya que se cumple $d(C;P) < r$

$L: P=(2;-2;4)+t(2;2;1);\ t\in\mathbb{R}$

$C_1 \in L \wedge C_1 \in P$

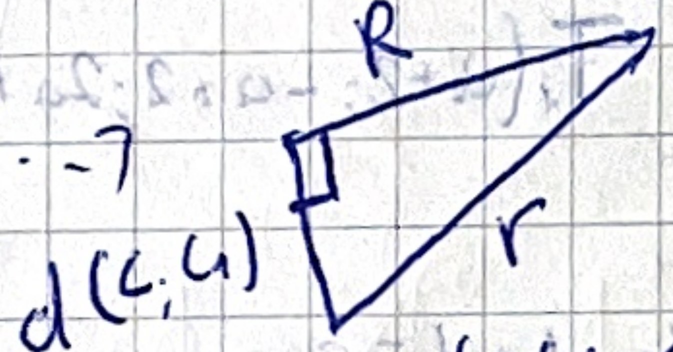
$C_1(2+2t;\ -2+2t;\ 4+t)$

$2(2+2t)+2(-2+2t)+4+t+1=0$

$\cancel{4}+4t-\cancel{4}+4t+t+5=0$

$9t=-5$

$t=-\frac{5}{9}$



$C_1\left(\frac{8}{9};\ -\frac{28}{9};\ \frac{31}{9}\right)$

$(d(C;C_1))^2 + R^2 = r^2$

$d(C;C_1) = \sqrt{\left(\frac{8}{9}-2\right)^2+\left(-\frac{28}{9}+2\right)^2+\left(\frac{31}{9}-4\right)^2}$

$\frac{25}{9} + R^2 = 9$

$(d(C;C_1))^2 = \left(-\frac{10}{9}\right)^2+\left(-\frac{10}{9}\right)^2+\left(-\frac{5}{9}\right)^2$

$R^2 = 9 - \frac{25}{9}$

$\frac{100}{81}+\frac{100}{81}+\frac{25}{81} = \frac{225}{81} = \frac{25}{9}$

$R^2 = \frac{56}{9} \to R = \frac{\sqrt{56}}{3}$

Radio de la circunferencia que resulta de intersecar la esfera y el plano. $\to$ $\boxed{R = \frac{2\sqrt{14}}{3}}$

8

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2,494438258

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2- $S_1 \to C_1(0;0;5) \to S_1: x^2+y^2+(z-5)^2=(r_1)^2$

a) $S_2 \to C_2(0;0;-1)$ $S_2: x^2+y^2+(z+1)^2=(r_2)^2$

$r_1>0 \to |r_1|=r_1$
$r_2>0 \to |r_2|=r_2$

$A(0;3;1) \in C_1$ $(0)^2+3^2+(1-5)^2=(r_1)^2$ $\wedge$ $(0)^2+(3)^2+(1+1)^2=(r_2)^2$

$A(0;3;1) \in C_2$

$9+(-4)^2=(r_1)^2$ $\qquad$ $9+2^2=r_2^{\,2}$

$9+16=(r_1)^2$ $\qquad$ $9+4=r_2^{\,2}$

$25=(r_1)^2$ $\qquad$ $13=r_2^{\,2}$

$5=r_1$ $\qquad$ $\sqrt{13}=r_2$

$S_1: x^2+y^2+(z-5)^2=25$

$S_2: x^2+y^2+(z+1)^2=13$

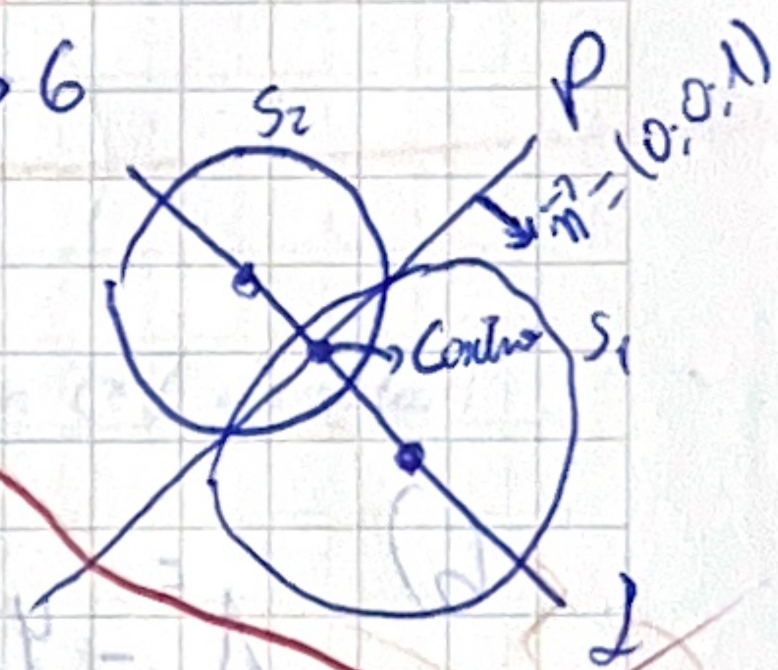
$d(C_1;C_2)=\sqrt{0^2+0^2+(5+1)^2}=6$

$r_1+r_2=5+\sqrt{13}\approx 8{,}6$

$r_1+r_2>d(C_1;C_2)$

$5+\sqrt{13}>6$

∴ Al intersecar ambas esferas, resultará una circunferencia C



b) $S_1: x^2+y^2+z^2-10z+25=25$

$S_2: x^2+y^2+z^2+2z+1=13$

$\cancel{0+0+0-12z+26}=38$ $P: -12z+24=12$

$\cancel{P: -12z-12=0}$ $\qquad$ $P: -12z=-12$

$\cancel{P: 12z+12=0}$ $\qquad$ $P: z=1$

$\cancel{P: z+1=0}$ $\qquad$ $P: z-1=0 \to$ Ecuación del plano que contiene a C.

Centro ∈ P
Centro ∈ L

$-10z=0$
$+2z=+12$
$-12z=-12$
$z=$
$z=1$

c) $L: P=(0;0;5)+t(0;0;1);\ t\in\mathbb{R}$

Centro $= C(0;0;5+t)$

$C \in P \to$ $5+t-1=0$

$t=1-5$

$t=-4$

$C(0;0;1)$ ← Centro de la circunferencia C

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

2.5

$7A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 7 \\ 28 & 56 & 28 \\ -14 & -28 & -14 \end{bmatrix} \longrightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 7 \\ 28 & 56 & 28 \\ -14 & -28 & -14 \end{bmatrix}$

$a_{11} = (1)(1) + (2)(4) + (1)(-2)$
$= 7$
$a_{12} = (1)(2) + (2)(8) + (1)(-4)$
$= 14$
$a_{13} = (1)(1) + (2)(4) + 1(-2)$
$= 7 \ldots$

$\boxed{A^2 = 7A}$

$A^2 \cdot A = 7A \cdot A$ $\quad (KA)(B) = K(A \cdot B)$

$A^3 = 7(A \cdot A)$

$A^3 = 7(A^2) \rightarrow A^2 = 7A$

$A^3 = 7(7A)$

$\boxed{A^3 = 49A}$

2.5 b) $A^5 - 48A^3 = 2X^t + 45A$; $A^5 = A^2 \cdot A^3$

$48A^3 \rightarrow A^3 = 49A$

$= 48(49A)$

$48A^3 = \boxed{2352A}$

$A^5 = 7A \cdot 49A$

$A^5 = 343A^2$

$A^5 = 343(7A)$

$\boxed{A^5 = 2401A}$

$2401A - 2352A - 45A = 2X^t$

$\frac{4A}{2} = \frac{2X^t}{2}$

$(2A)^t = (X^t)^t \rightarrow (X^t)^t = X$

$(2A)^t = X \rightarrow X = 2 \cdot A^t$

$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 8 & 16 & 8 \\ -4 & -8 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow (2A)^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 4 & 16 & -8 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} = X$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \cdot A^t \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 4 & 16 & -8 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 4 & 16 & -8 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

$-1 \quad 3 \quad 2$
$7 \quad -1 \quad 0$
$5 \quad 1 \quad 0$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4.- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

$A = \begin{vmatrix} 2a & m+x & x \\ 2b & n+y & y \\ 2c & p+z & z \end{vmatrix}$

2.0

$C2: C2 - C3$

$A = \begin{vmatrix} 2a & m & x \\ 2b & n & y \\ 2c & p & z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix}$ $\boxed{\begin{vmatrix} 2a & m+x & x \\ 2b & n+y & y \\ 2c & p+z & z \end{vmatrix} = 10}$

$|A| = |A^t|$

$A = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow A = 2 \cdot 5 = 10$

5.- ~~$B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$~~ Existe una única matriz A de orden 2×2 no nula tal que

$(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(A)$

1.5

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Existe $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ~~tal que~~ tal que $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Se cumple $A_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A_2$

∴ No existe una única matriz A de orden 2×2 no nula tal que $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A$, ya que existen por lo menos 2 que cumplen la condición

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

∴ La proposición es falsa.

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 9 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$

$\begin{matrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}$

$(B)D = D(B)$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

D

Calcule $\begin{vmatrix} 2a & m+x & x \\ 2b & n+y & y \\ 2c & p+z & z \end{vmatrix}$.

a) *Justificando su respuesta, anali*

Existe una única matriz A de or

i A es una matriz cuadrada de

te

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b)

$$\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]^2 = \frac{1}{2}(I-A) \quad ; \quad A^2 = I$$

$$\frac{1}{2}(I-A)\cdot\frac{1}{2}(I-A) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}(I-A)(I-A) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}((I-A)(I-A)) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}((I+(-A))(I+(-A))) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}(I(I+(-A))+(-A)(I+(-A))) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}(I\cdot I + I(-A)+(-A)(I)+(-A)(-A)) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}(I-A-A+(-A)^2) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{2}(I-A) = \frac{1}{4}(I-2A+A^2), \quad A^2 = I$$

$$\frac{1}{4}(I-2A+I) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}(2I-2A) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{4}(2)(I-A) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{2}{4}(I-A) = \frac{1}{2}(I-A)$$

$$\frac{1}{2}(I-A) = \frac{1}{2}(I-A)$$

1,5

∴ Demostrado que

$$\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]^2 = \frac{1}{2}(I-A)$$