ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

EXAMEN PARCIAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2023-2

Horario: Todos. Elaborado por todos los profesores.

INDICACIONES:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.
- El desarrollo de **todos** los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando todos sus procedimientos**. En particular, si hace uso de la forma de la gráfica de una función, debe justificar con los contenidos vistos en clase cómo obtuvo dicha forma.

---

1. a) Halle el dominio implícito de la función (2 pt)

$$f(x) = \frac{1}{|x^2-4|} - \frac{x}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

b) Halle el conjunto solución de la siguiente desigualdad (2 pt)

$$\frac{x+4}{2x+1} > x.$$

2. Sean

$$f(x) = \sqrt{3-x},\ x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -2x^2+x+1, & 0 < x \leq 2; \\ \dfrac{4-2x}{3}, & -4 \leq x < 0. \end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de la función f. (1 pt)

b) Halle la función $\dfrac{f}{g}$. (2 pt)

c) Halle la función $f \circ g$. (2 pt)

d) Halle el rango de $f \circ g$. (1 pt)

3. Sea $f :]-13, 13[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes condiciones: (4 pt)

- f es una función impar.
- Para $x \in]0,4[$, la gráfica de f es una semicircunferencia con centro $(2,2)$ y radio 2.
- Para $x \in [4,13[$, $f(x)$ es de la forma $f(x) = 2 - \sqrt{x-k}$, donde k es una constante real.
- El gráfico de f pasa por el punto $(-5,-1)$.
- 3 pertenece al rango de f.

Encuentre el valor de k y luego con este valor encontrado halle la función f.

4. Sea $a \in [0,4]$ una constante. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8x - 12, & x < a; \\ x(x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$$

a) Para $a = 0$, esboce la gráfica de f e indique su rango. (2 pt)

b) Encuentre todos los posibles valores de a para que el rango de f sea $\mathbb{R}$. (2 pt)

5. Justifique la veracidad o la falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Para que se cumpla que $(2x-3)^{\frac{2}{3}} \leq 1$ es suficiente que $1 < x < 2$. (1 pt)

b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función polinómica de grado 4 tal que todas sus raíces son 0, 2 y 4 entonces $f(1)f(3) < 0$. (1 pt)

San Miguel, 12 de octubre de 2023.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

PUCP

Año | Número
2022 | 0239

Código de alumno

Primer examen

AVILA ARAUCO TATIANA MIRELLA

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FUCAL

Horario: 108

Fecha: 12 / 10 / 23

Nombre del profesor: J. FLORES

Nota

19

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1).

a). $f(x) = \dfrac{1}{|x^2-4|} - \dfrac{x}{\sqrt{7x-10-x^2}}$

$|x^2-4| \neq 0 \quad \wedge \quad 7x-10-x^2 \geq 0$

$|x^2-4| = 0$

$|(x-2)(x+2)| = 0$

$|x-2|\,|x+2| = 0$

$x = 2 \qquad x = -2$

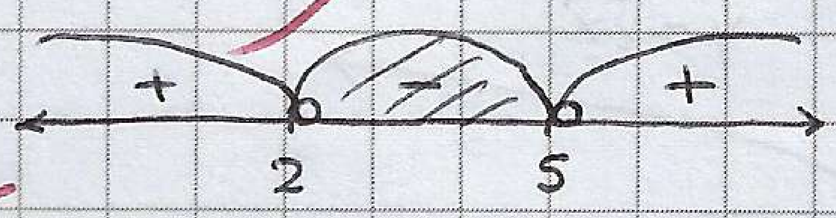
$\rightarrow x \neq 2 \quad \wedge \quad x \neq -2$

pero como está en el denominador:

$7x-10-x^2 > 0$

$x^2-7x+10 < 0$

$(x-5)(x-2) < 0$



$x \in \,]2;5[$

$D(f) = \,]2;5[$

2

b). $\dfrac{x+4}{2x+1} > x$

$\dfrac{x+4}{2x+1} - x > 0$

$\dfrac{x+4-x(2x+1)}{2x+1} > 0$

$\dfrac{\cancel{x}+4-2x^2-\cancel{x}}{2x+1} > 0$

$\dfrac{-2x^2+4}{2x+1} > 0$

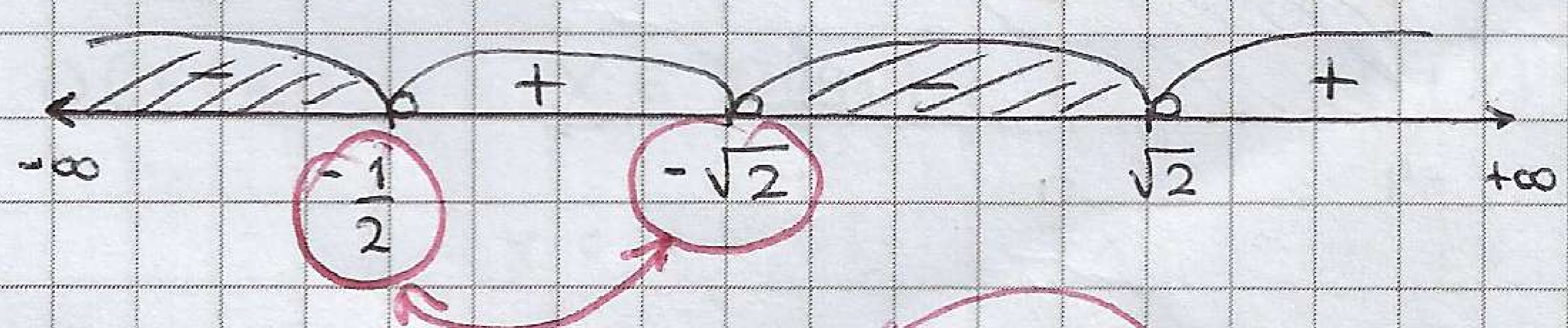
$\dfrac{2x^2-4}{2x+1} < 0$

$\dfrac{2(x^2-2)}{2x+1} < 0$

$\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x+1} < 0$

2

Puntos de referencia: $x = \sqrt{2} \qquad x = -\sqrt{2} \qquad x = -\frac{1}{2}$



$C.S. = \,]-\infty; -\tfrac{1}{2}[\; \cup \;]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$

Obs: $-\sqrt{2} < -\frac{1}{2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2.

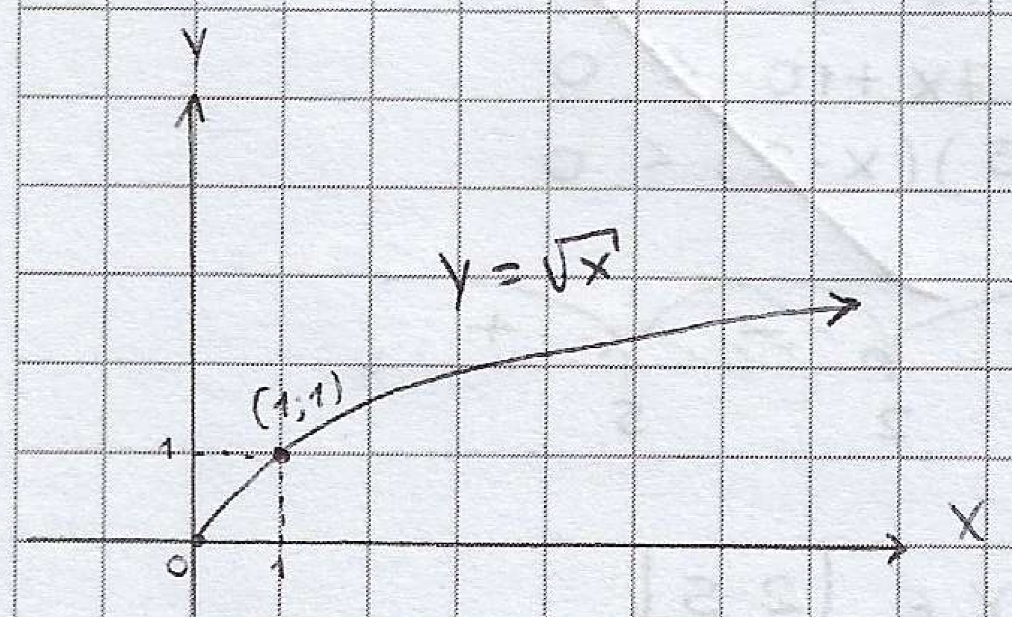
a). $f(x) = \sqrt{3-x}\,, \quad x \leq 1$

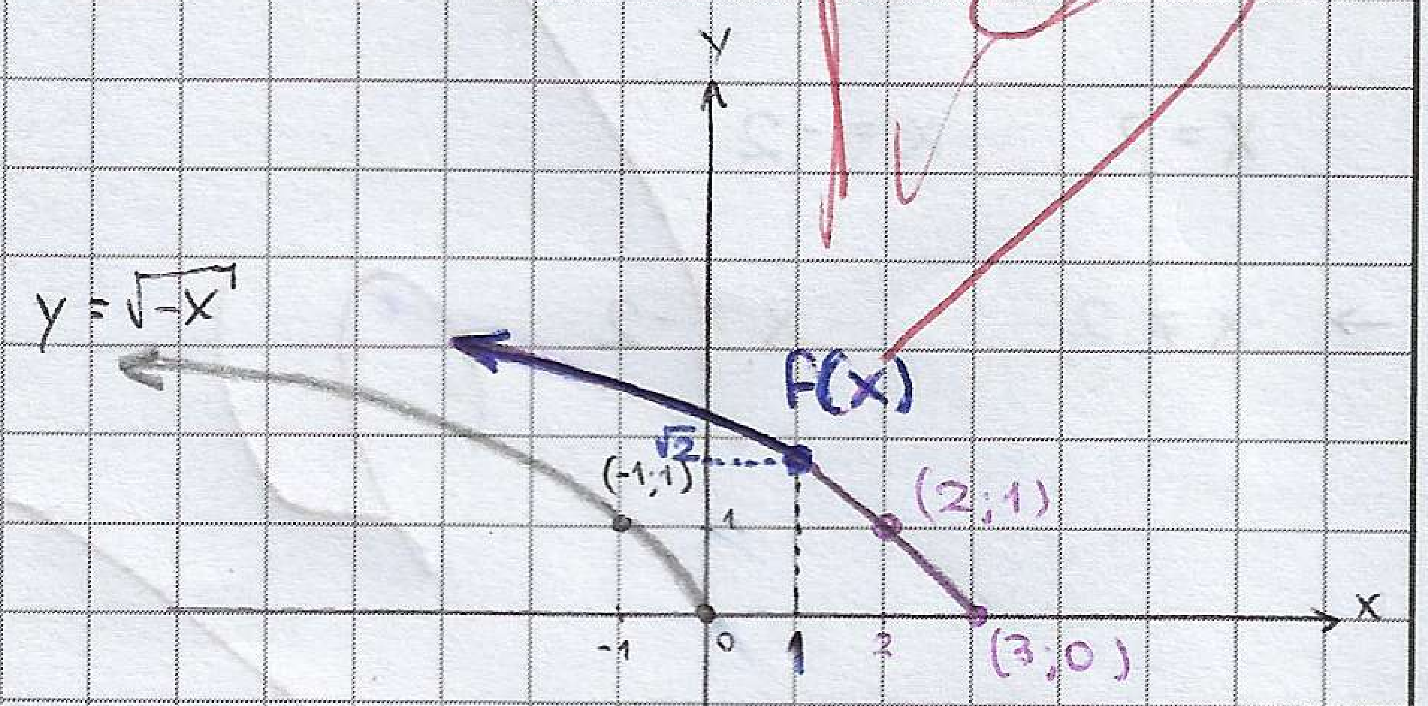
x	y
1	$\sqrt{2}$

✓ $y = \sqrt{x}$

✓ $y = \sqrt{-x}$

✓ $y = \sqrt{3-x} \rightarrow y = \sqrt{-(x-3)}$



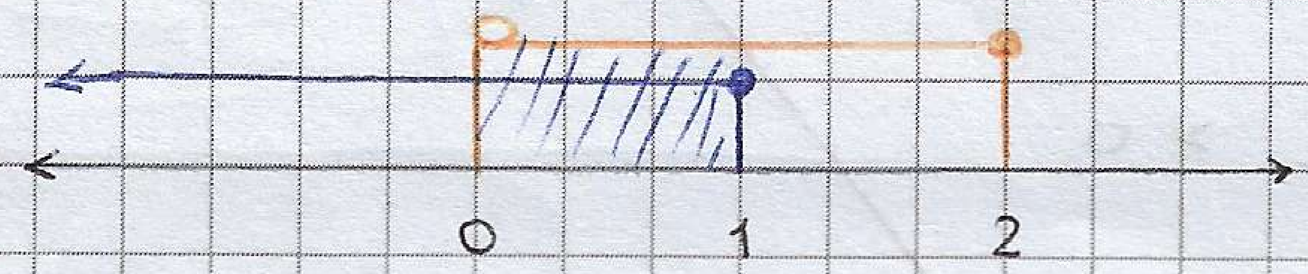


Respuesta : Gráfica en azul.

b). $\dfrac{f}{g}$:

• $\dfrac{f}{g_1}$: ✓ $D\left(\dfrac{f}{g_1}\right) = \{ D(f) \cap D(g_1) - \{ g_1(x) = 0 \} \}$

$]-\infty;1] \cap]0;2] - \{-2x^2+x+1 = 0\}$



$g_1(x) = 0$

$-2x^2+x+1 = 0 \qquad \rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 1$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$2x \quad +1$

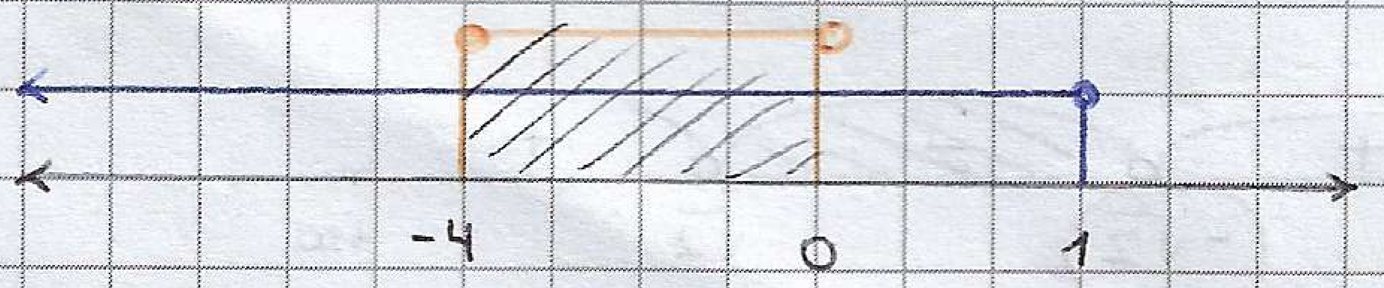
$x \quad -1$

$(2x+1)(x-1) = 0$

$x = -\frac{1}{2} \qquad x = 1 \qquad \therefore D\left(\dfrac{f}{g_1}\right) =]0;1[$

✓ $\dfrac{f}{g_1} = \dfrac{\sqrt{3-x}}{-2x^2+x+1}$

• $\dfrac{f}{g_2}$: ✓ $D\left(\dfrac{f}{g_2}\right) =]-\infty;1] \cap [-4;0[- \left\{ \dfrac{4-2x}{3} = 0 \right\}$



$\dfrac{4-2x}{3} = 0 \qquad \rightarrow x \neq 2$

$2x-4 = 0 \qquad \therefore D\left(\dfrac{f}{g_2}\right) = [-4;0[$

$x = 2$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

✓ $\dfrac{f}{g_2} = \dfrac{\sqrt{3-x}}{\frac{4-2x}{3}}$

2,0

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3-x}}{-2x^2+x+1} & ; \quad 0 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3-x}}{\frac{4-2x}{3}} & ; \quad -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

c). $\underline{\underline{fog}}$:

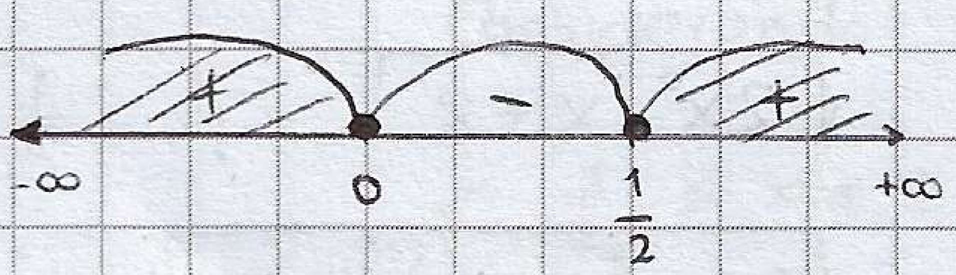
✓ $D(fog_1) = x \in D(g_1) \quad \wedge \quad g_1(x) \in D(f)$

$x \in]0;2] \quad \wedge \quad -2x^2+x+1 \leq 1$

$-2x^2 + x \leq 0$

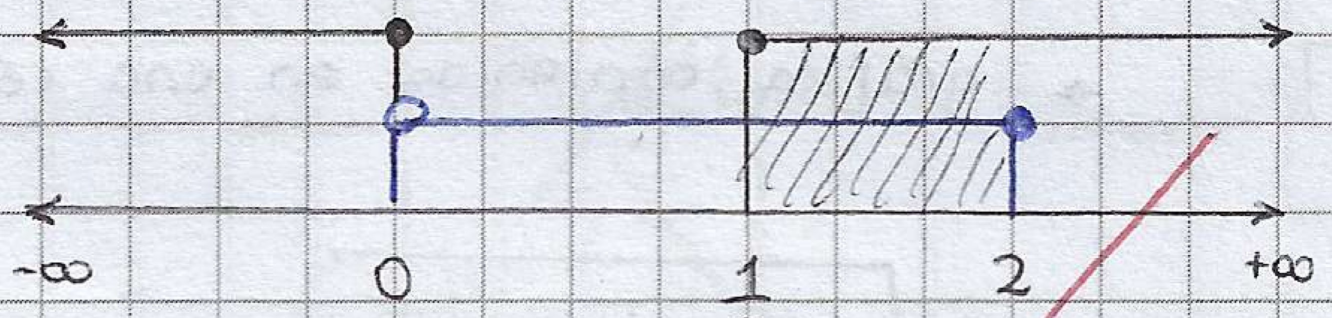
$2x^2 - x \geq 0$

$x(2x-1) \geq 0$



$]-\infty;0] \cup [\frac{1}{2};+\infty[$

Intersectando:



$D(fog_1) = [\frac{1}{2};2]$

✓ $fog_1 = f(g_1(x))$

$f(x) = \sqrt{3-x}$

$f(g_1(x)) = \sqrt{3-(-2x^2+x+1)}$

$f(g_1(x)) = \sqrt{2x^2-x+2}$

• $\underline{\underline{fog_2}}$:

✓ $D(fog_2) = x \in D(g_2) \quad \wedge \quad g_2(x) \in D(f)$

$x \in [-4;0[\quad \wedge \quad \dfrac{4-2x}{3} \leq 1$

$\dfrac{4-2x}{3} - 1 \leq 0$

$\dfrac{4-2x-3}{3} \leq 0$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Continuación:

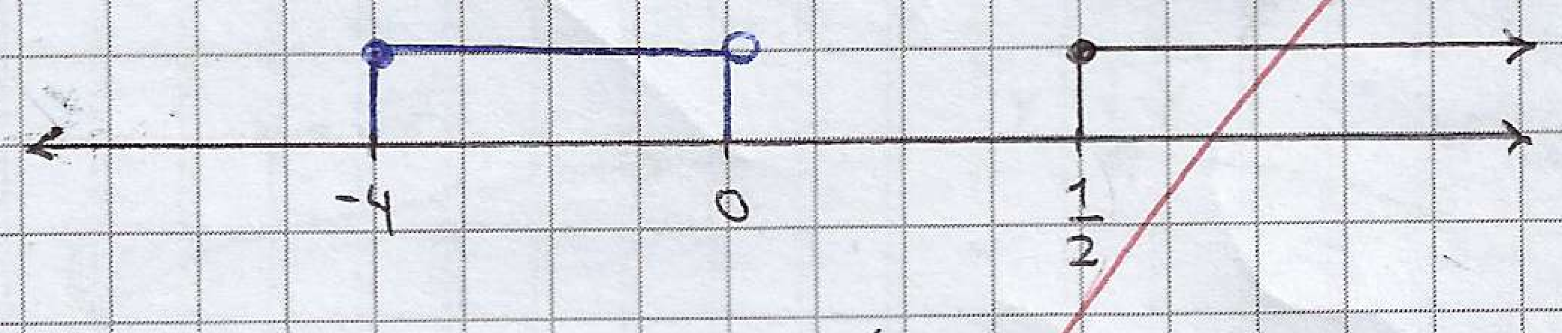
$$\frac{-2x+1}{3} \le 0$$

$$2x-1 \ge 0$$

$$x \ge \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Intersectando:



$$D(f \circ g_2) = \varnothing$$

$$\therefore \quad (f \circ g)(x) = \left\{ \sqrt{2x^2 - x + 2} \quad ; \quad \frac{1}{2} \le x \le 2 \right.$$

d). $\sqrt{2x^2 - x + 2} \quad ; \quad \frac{1}{2} \le x \le 2$

$$\sqrt{2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 2}$$

$$\sqrt{2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) + 2}$$

$$\sqrt{2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}} \rightarrow \text{gráfica contenida en una cónica}$$

$$y = \underbrace{\sqrt{2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}}}_{\ge 0}$$

$$\boxed{y \ge 0}$$

x	y
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
2	$\sqrt{8}$

$$y^2 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$$

$$-\frac{15}{8} = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - y^2$$

$$1 = \frac{-\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{15}{16}} + \frac{y^2}{\frac{15}{8}}$$

$$1 = \frac{y^2}{\frac{15}{8}} - \frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{15}{16}}$$

Hipérbola

✓ Eje focal // Eje y

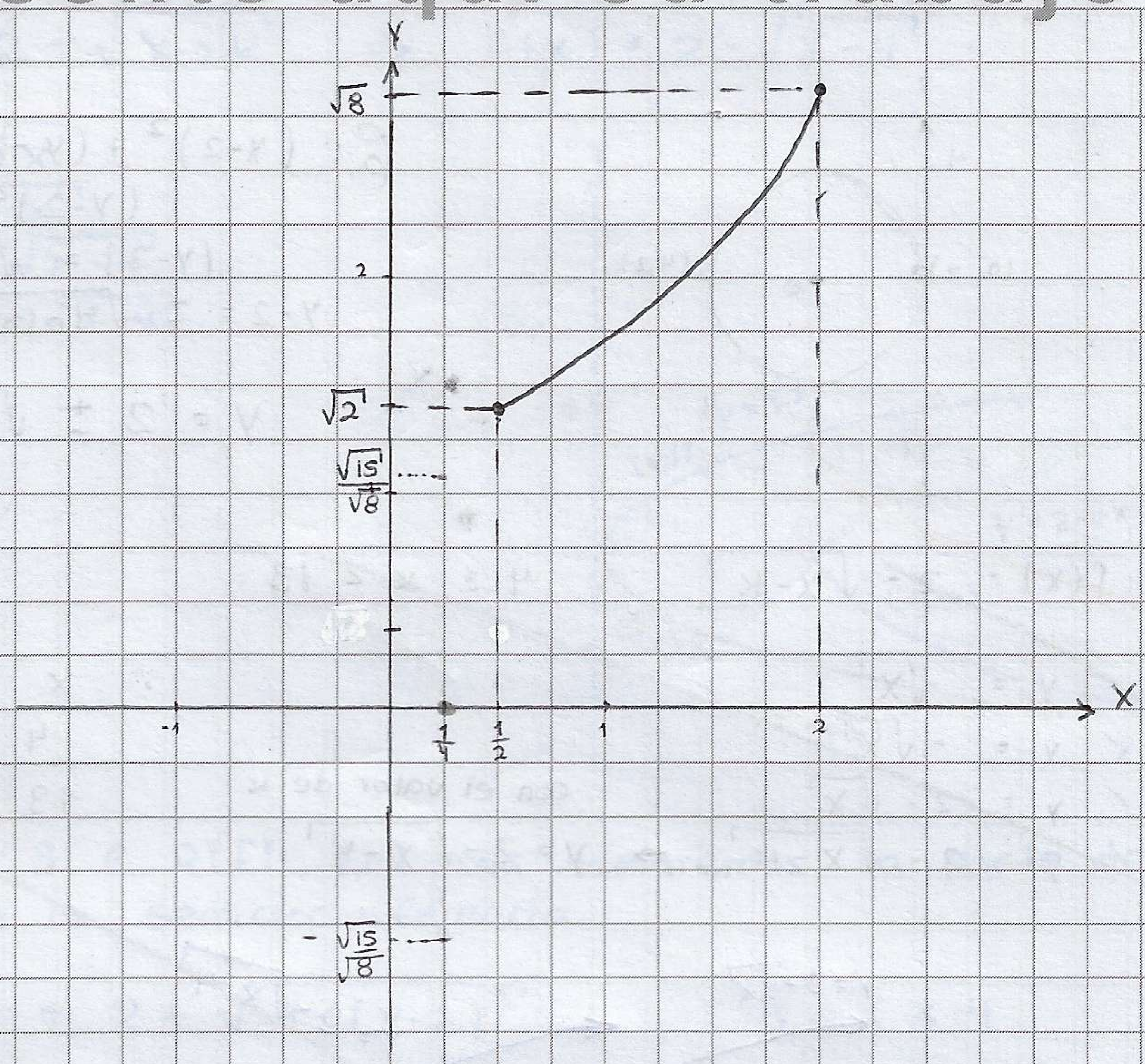
✓ $\Theta\left(\frac{1}{4}; 0\right)$

✓ $a^2 = \frac{15}{8} \rightarrow a = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{8}}$

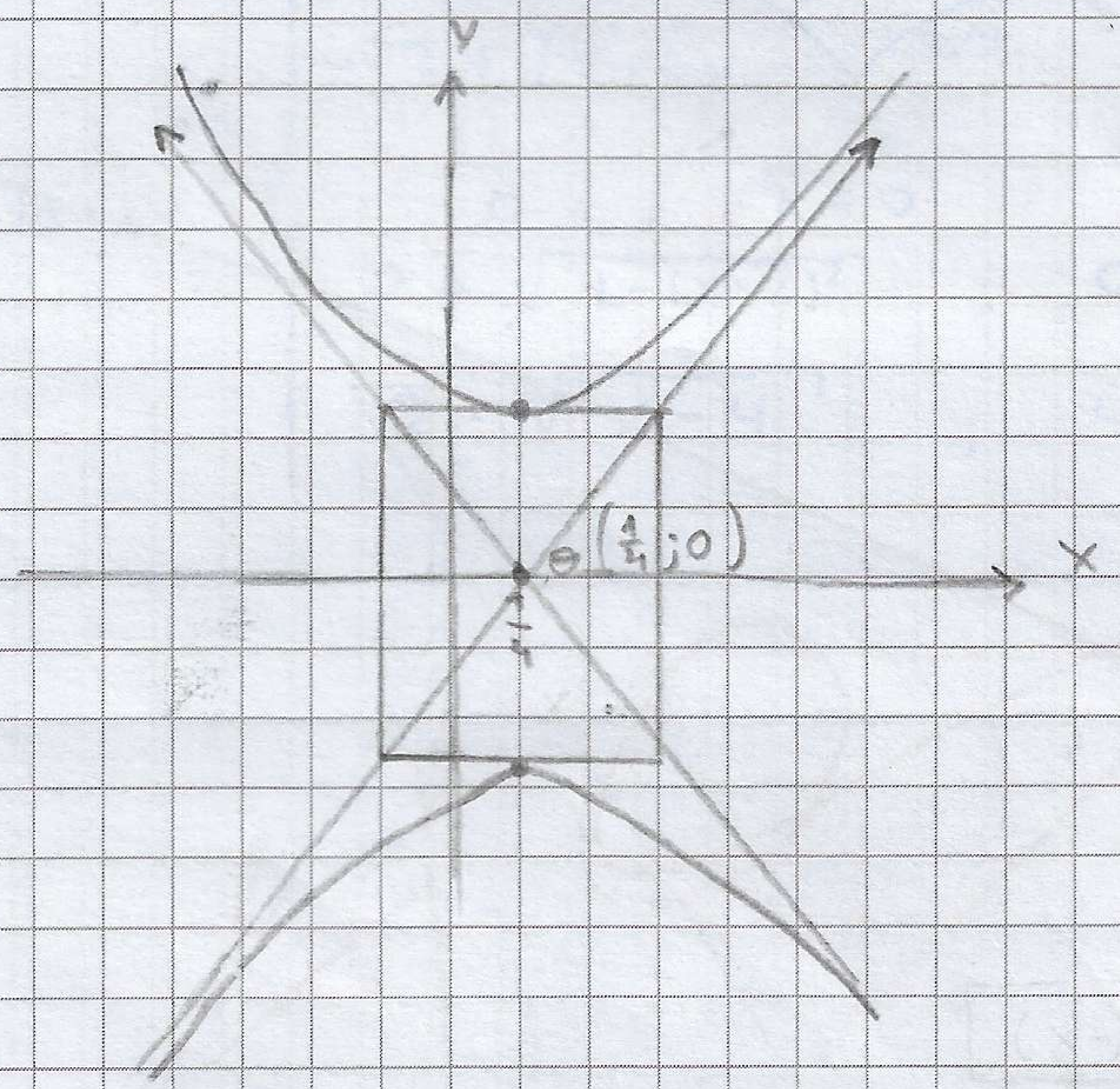
✓ $b^2 = \frac{15}{16} \rightarrow b = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo



Hipérbola



Considerando:

✓ $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

✓ $y \geq 0$

$\therefore$ $\underline{R(f\circ g) = [\sqrt{2}; \sqrt{8}]}$ //

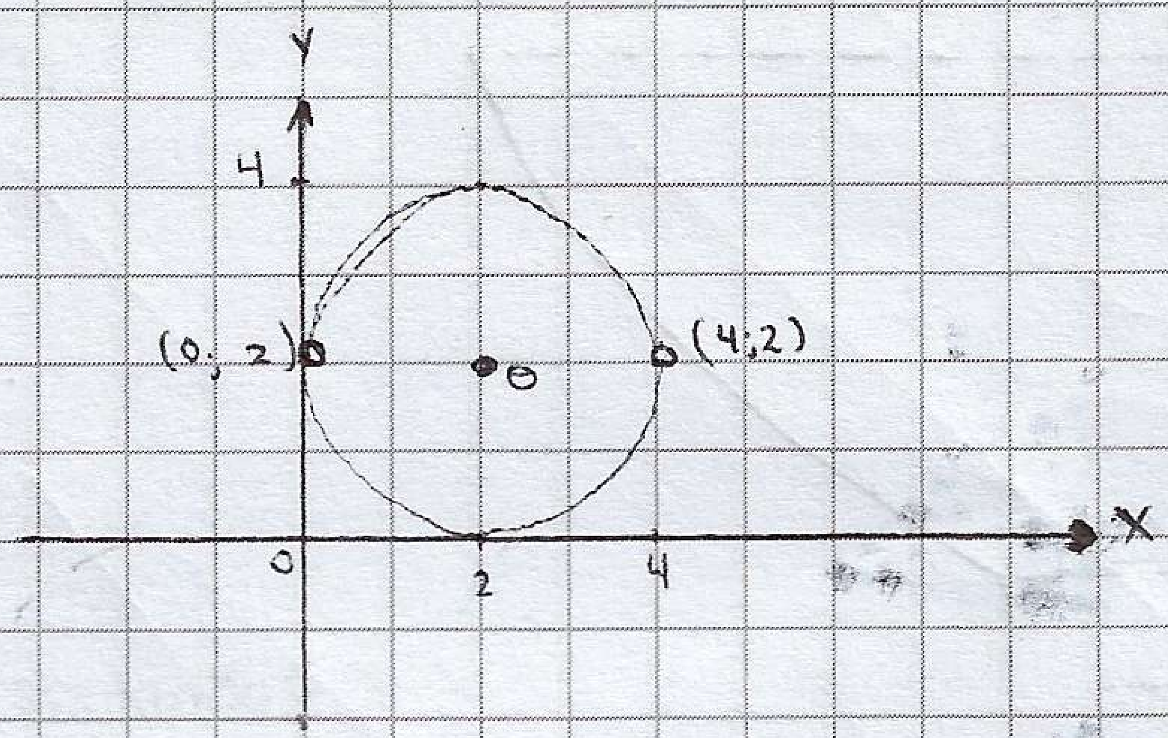
10

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3.

✓



$\mathcal{C}: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$(y-2)^2 = 4 - (x-2)^2$

$|y-2| = \sqrt{4-(x-2)^2}$

$y-2 = \pm\sqrt{4-(x-2)^2}$

$y = 2 \pm \sqrt{4-(x-2)^2}$

✓ $f(x) = 2 - \sqrt{x-k}$; $4 \leq x < 13$

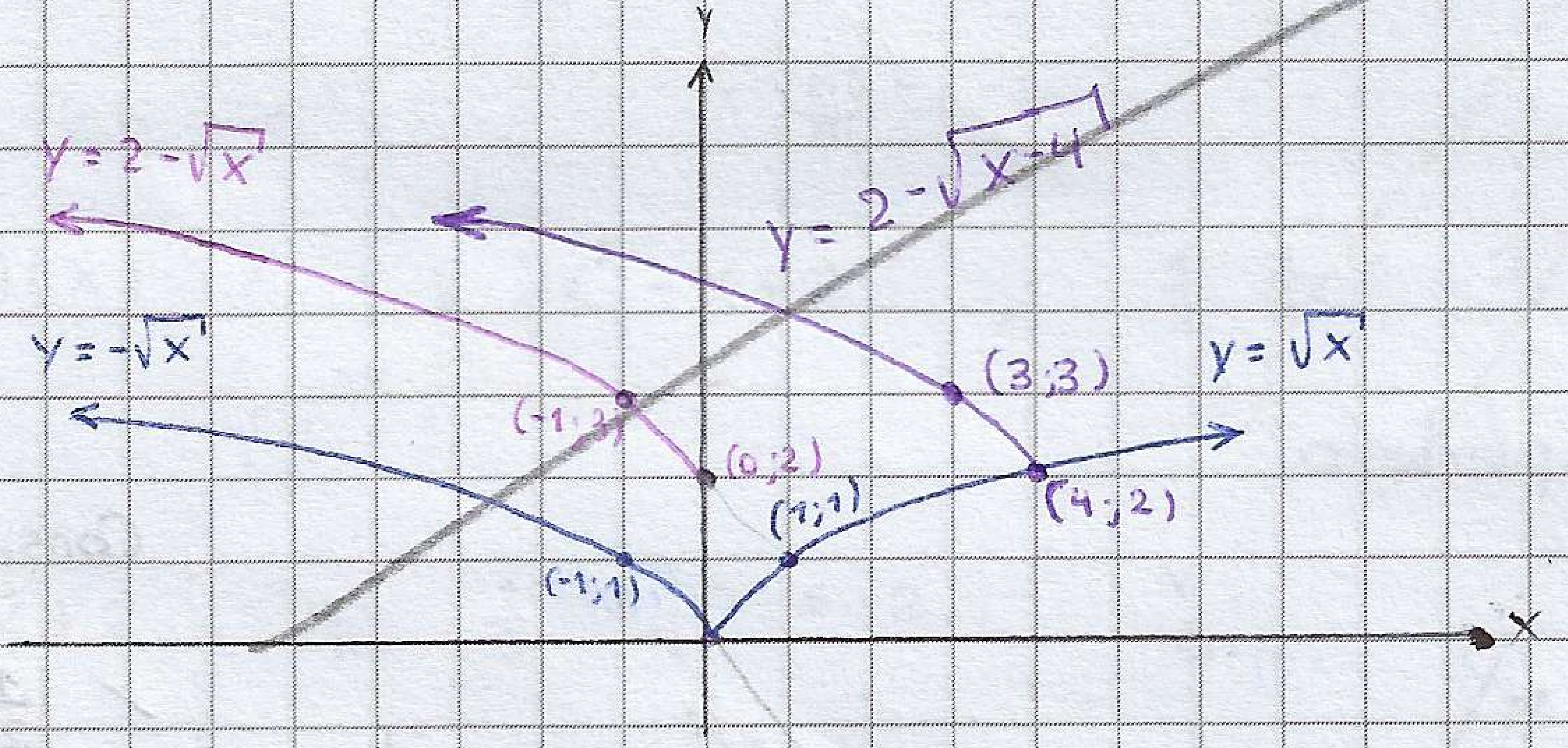
✓ $y = \sqrt{x}$

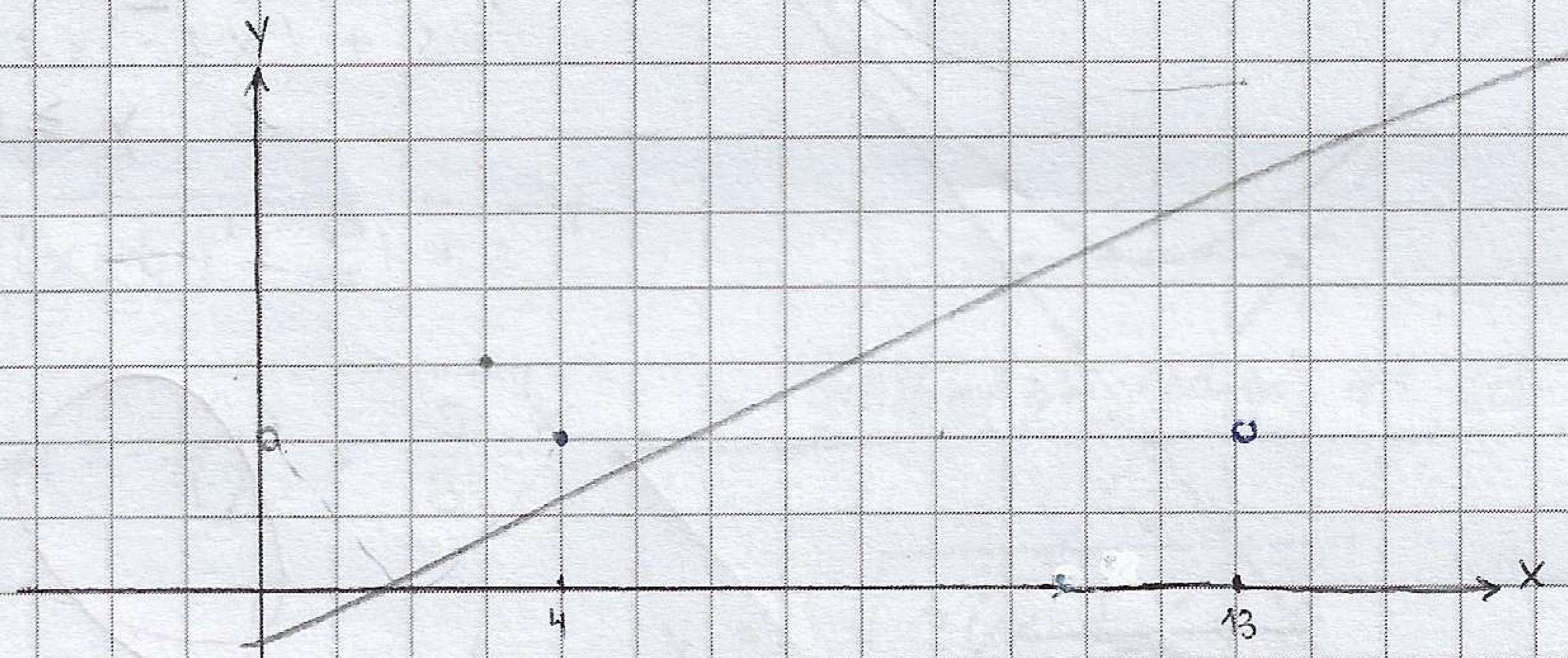
✓ $y = -\sqrt{x}$

✓ $y = 2 - \sqrt{x}$

✓ $y = 2 - \sqrt{x-k}$ → $y = 2 - \sqrt{x-4}$ con el valor de k

x	y
4	$2-\sqrt{4-k}$
13	$2-\sqrt{13-k}$





- Como es impar :

$\boxed{f(x) = -f(-x)}$

✓ Dice que el gráfico pasa por $(-5;-1)$

$\rightarrow \quad 2-\sqrt{x-k} = -\left(2-\sqrt{-x-k}\right)$

$= -2 + \sqrt{-x-k}$

Para $f(-5) = -1$

$-2 + \sqrt{-(-5)-k} = -1$

$\sqrt{5-k} = 1$

$5 - k = 1$

$\boxed{4 = k}$ //

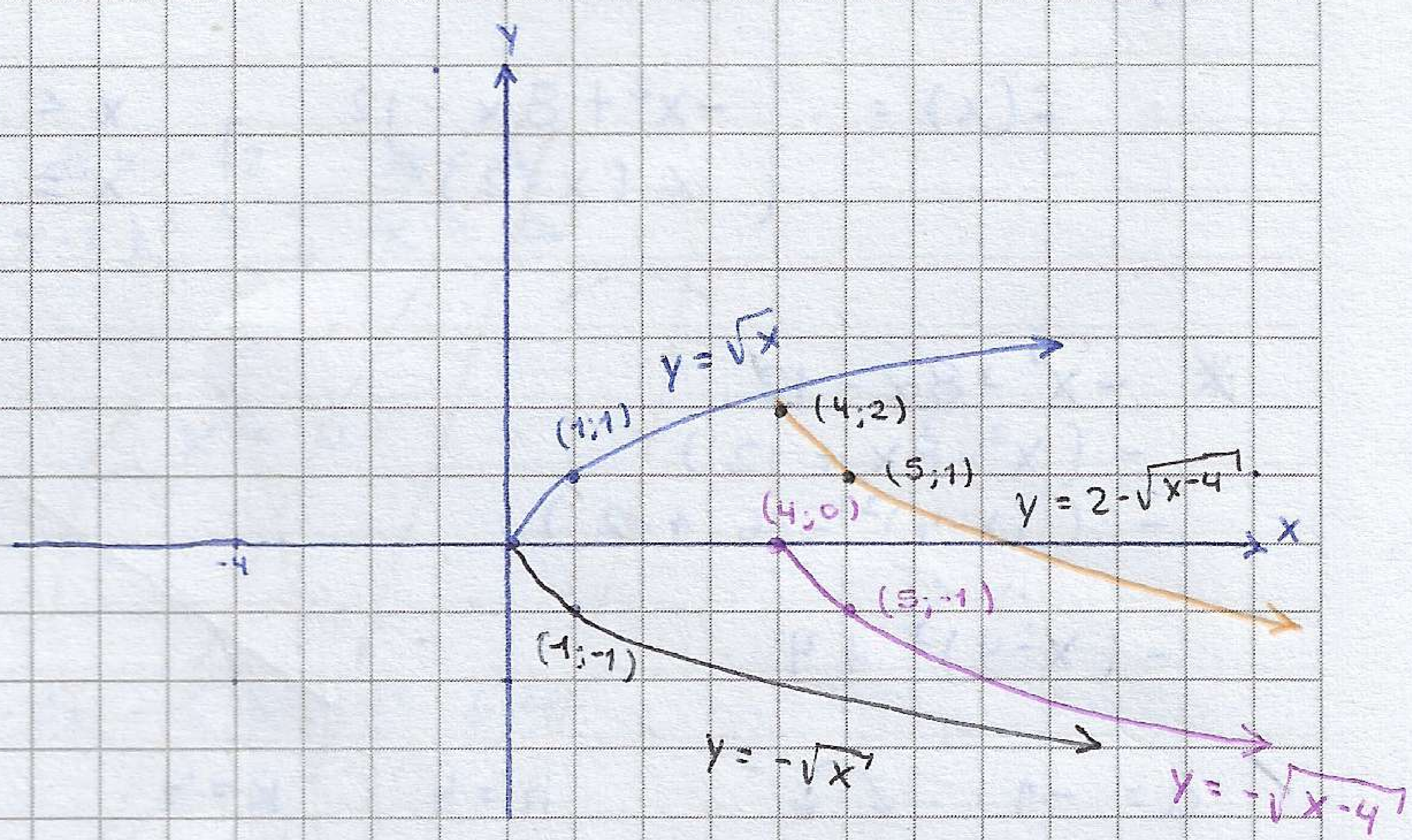
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

✓ $f(x) = 2 - \sqrt{x-k} \Rightarrow f(x) = 2 - \sqrt{x-4}$

- $y = \sqrt{x}$
- $y = -\sqrt{x}$
- $y = -\sqrt{x-4}$
- $y = 2 - \sqrt{x-4}$

x	y
4	2
13	-1



✓ Como dice $3 \in R(f)$. Entonces tomaremos la parte de arriba de la semicircunferencia.

$$y = 2 + \sqrt{4-(x-2)^2} \quad ; \quad 0 < x < 4$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -\left(2 - \sqrt{-x-4}\right) & ; \ -13 < x \leq -4 \\ -\left(2 + \sqrt{4-(-x-2)^2}\right) & ; \ -4 < x < 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ 2 + \sqrt{4-(x-2)^2} & ; \ 0 < x < 4 \\ 2 - \sqrt{x-4} & ; \ 4 \leq x < 13 \end{cases}}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4).

a). $a = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8x - 12 & , \quad x < 0 \\ x(x-2)^2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$*$ $-x^2 + 8x - 12$

$-(x^2 - 8x + 12)$

$-((x-4)^2 - 16 + 12)$

$-(x-4)^2 + 4$

✓ $a = -1$ $\quad h = 4 \quad k = 4$

✓ $V(4;4)$

✓

x	y
0	-12

$*$ $x(x-2)^2$

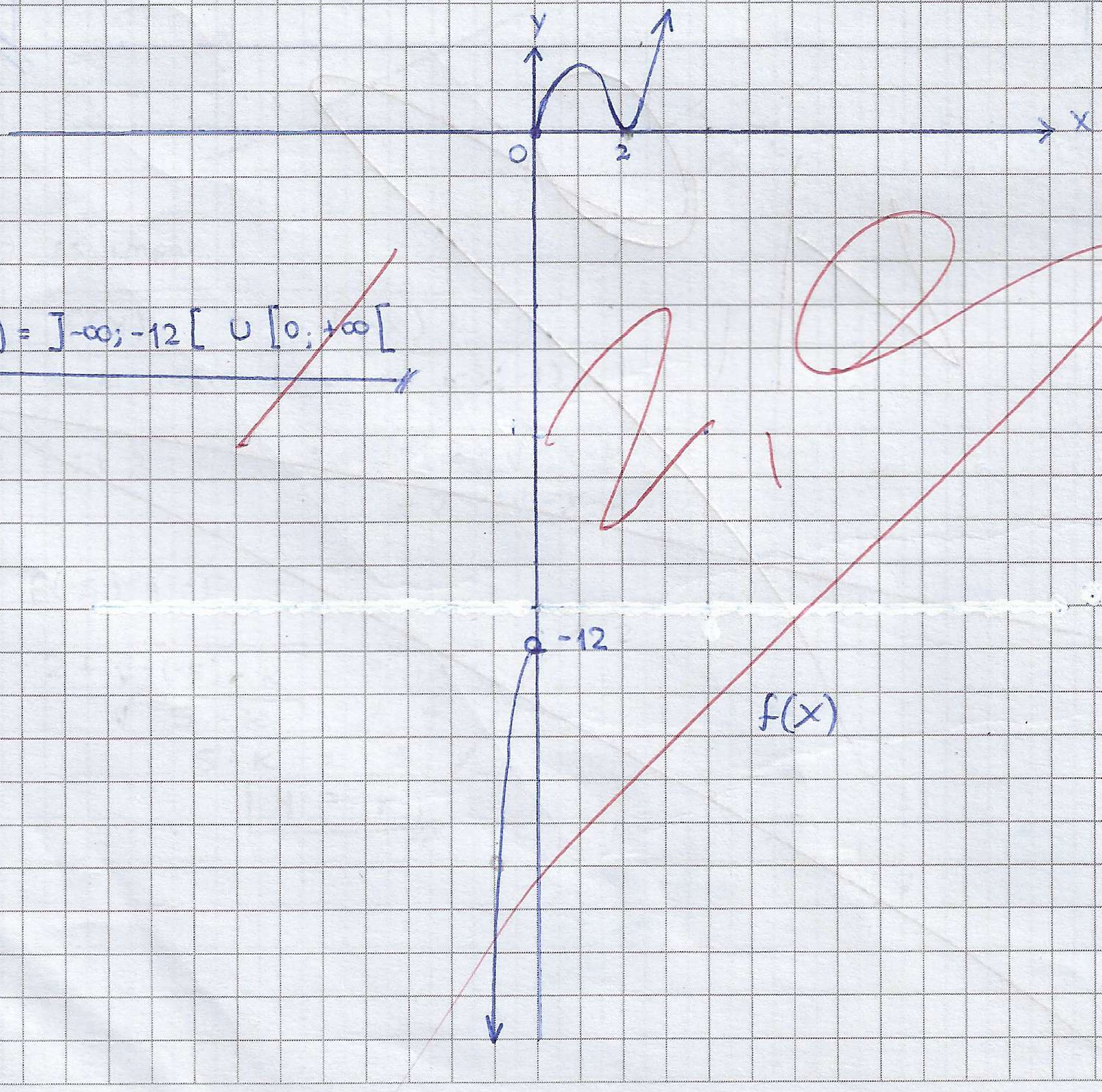
✓

x	y
0	0

$x = 0 \qquad x = 2$

✓ $x(x-2)^2 > 0$

$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 2 $\quad$ $+$



$R(f) =]-\infty; -12[\cup [0; +\infty[$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5).

a) $1 < x < 2 \rightarrow (2x-3)^{2/3} \leq 1$

$2 < 2x < 4$

$-1 < 2x-3 < 1$

$0 \leq (2x-3)^2 < 1$

$0 \leq \sqrt[3]{(2x-3)^2} < 1$

$-1 \leq \sqrt[3]{(2x-3)^2} - 1 < 0$

$-1 \leq (2x-3)^{2/3} - 1 < 0 \leq 0 \rightarrow (2x-3)^{2/3} - 1 \leq 0$

Verdadero

b). $x(x-2)(x-4)$

Una de las raices tendría que tener multiplicidad 2 para que sea de grado 4.

0 2 4

① $x^2(x-2)(x-4)$

$f(1) = 1(-1)(-3) = 3$ $f(3) = 9(1)(-1) = -9$

$\rightarrow f(1)\,f(3) = -27 < 0$

② $x(x-2)^2(x-4)$

$f(1) = 1(1)(-3) = -3$ $f(3) = 3(1)(-1) = -3$

$\rightarrow f(1)\,f(3) = 9 < 0$

$(\rightarrow \leftarrow)$

③ $x(x-2)(x-4)^2$

$f(1) = 1(-1)(9) = -9$ $f(3) = 3(1)(1) = 3$

$f(1)\,f(3) = -27 < 0$

Falso