FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2018-2

Horarios: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores del curso.

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se permite el uso de apuntes de clase, libros ni calculadoras.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía, y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Construya un circuito lógico equivalente a la proposición dada: 2 puntos

$$(p \wedge q) \vee \left[(p \to r) \wedge \sim q\right]$$

2. Usando inducción matemática, demuestre que para todo n entero positivo se cumple que $5(3n+1)^2 - 2^{4n} + 11$ es múltiplo de 15. 3 puntos

3. Los números reales a_n, con $n \in \mathbb{Z}_0^+$, se definen recursivamente por:

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 15$$
$$a_n = a_{n-1}(a_{n-2})^2 + 1, \text{ para } n \geq 2.$$

Usando inducción matemática, demuestre que $a_n < 2^{2^{n+1}}$ para todo $n \geq 0$. 4 puntos

4. Calcule en términos de n las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} 3^{2n-2k} 8^{k-1}$ 2 puntos

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{(k+4)!}$ 2 puntos

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1}$ 3 puntos

5. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente su respuesta:

   a) Si n es un número par, entonces $n^3 + 3n^2$ es un múltiplo de 4 y $(n-1)^2$ es impar. 1 punto

   b) Si x, y son números reales positivos tales que $xy > 25$, entonces $x > 5$ o $y > 5$. 1 punto

   c) $\exists y \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{x}{y} \leq 1$. 1 punto

   d) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Una condición suficiente para que n sea par es que $n^3 + 5$ sea impar. 1 punto

Coordinadora de práctica: Iris Flores

San Miguel, 15 de setiembre de 2018

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

PUCP

ENTREGADO
22 SEP 2018

Práctica

Año: 2018 Número: 0030

Código de alumno

Chambe Lopez Jaron Jose

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: Fundamentos del Cálculo

Práctica Nº: P 01

Horario de práctica: P-112

Fecha: 15/09/18

Nombre del profesor: E. Barrantes

Nota

17

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: J.R.F
(iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1) Nos dan

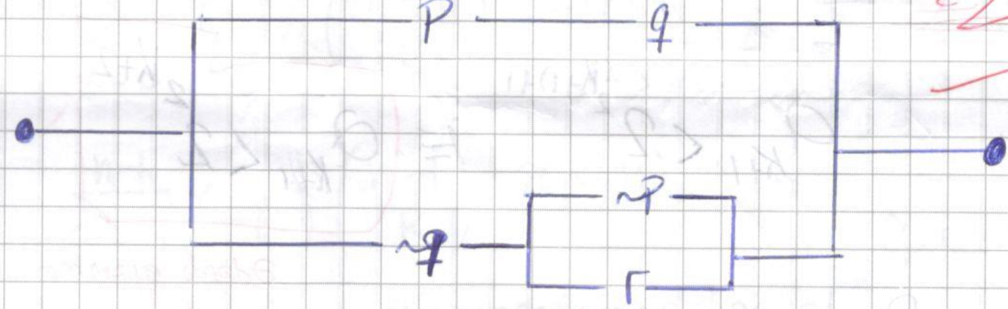
$(p \wedge q) \vee [(p \to r) \wedge \sim q]$

$(p \wedge q) \vee [(\sim p \vee r) \wedge \sim q]$

ley $\underbrace{p \to r}$

$\sim p \vee r$

Circuito:



3) $a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \underline{\mathbb{Z}^+_0}$, se definen recursivamete

Enteros positivo incluyendo al 0

$a_0 = 1$

$a_1 = 15$ ¡SOLO PARA AQUÍ!

$a_n = a_{n-1}(a_{n-2})^2 + 1$, para $n \geq 2$

Usando I.M demuestre q'

$a_n < 2^{2^{n+1}} \quad \forall n \geq 0$

Etapa Base empezará de 0

Etapa Base

para $n = 0$

$a_0 = 1 \wedge a_0 < 2^{2^{0+1}}$

$1 \wedge 1 < 2^{2^1} \Rightarrow 1 < 2^2$

$\Rightarrow 1 < 4$ ✓

para $n = 1$

$a_1 = 15 \wedge \cancel{a_1 < 2^{2}} \quad a_1 < 2^{2^2} \cong 15 < 2^4$

$15 < 16$ ✓ (V)

protagonista de "n" x def. recursiva

Aquí finaliza la Etapa Base para el 2do principio de inducción

1° K(algo)^K

2° (algo-1) / (algo-1)

$[(n+1)-1]()$

sin el K

telescopio / geométrica

$\wedge \; \vee \; \to \; \leftrightarrow$

V V	V V	V	V
V F	F V	F	F
F V	F V	V	F
F F	F F	V	V

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Etapa Inductiva para $n = h$ con

IMPORTANTE Además cumple con $k-1, k, h$

H.I: se tiene como (V)

$h_0 \leq h \leq k$ en este caso

$0 \leq h \leq k$

$a_h < 2^{2^{h+1}}$

T.I para $n = k+1$ probar que es verdad,

$a_{k+1} < 2^{2^{(k+1)+1}} \cong \boxed{a_{k+1} < 2^{2^{k+2}}}$

adonde queremos llegar

SOL

De la definición recursiva de a_{k+1}, tenemos

Importante

$a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{H.I} \underbrace{(a_{(k-1)})^2}_{H.I} + 1$

H.I

para $n=k-1$ ① $a_{k-1} < 2^{2^{(k-1)+1}}$

para $n=k$ ② $a_k < 2^{2^{k+1}}$

$a_{k+1} = a_k (a_{(k-1)})^2 + 1$

$a_k (a_{(k-1)})^2 + 1$

$(a_{(k-1)})^2 a_k < 2^{2^{k+1}} \cdot \left(2^{2^{(k-1)+1}}\right)^2$

$1 + (a_{k-1})^2 a_k < 2^{2^{k+1}} \cdot \left(2^{2^k}\right)^2$

$a_{k+1} < 2^{2^{k+1}} \cdot 2^{2^k \cdot 2}$

$a_{k+1} < 2^{2^{k+1}} \cdot 2^{2^{k+1}}$

$a_{k+1} < 2^{2(2^{k+1})} = 2^{2^{k+2}}$

$a_{k+1} < 2^{2^{k+2}}$ llegué

llegamos a la tesis inductiva.

Transitividad

$2^{4+1} =$

$2(2^{2(k+1)}) < 2^{2^{k+2}}$

$a_{k+1} = a_k (a_{k-1})^2 + 1$

$2^{2^{k+1}} \quad 2^{2^{k+1}}$

$2^{2^{k+2}}$

$2^{2^{2(k+1)}}$

$2^k \cdot 4$

2^n

REVISAR

$8^5 \cdot 8^{-1} = 8^{(4)}$

$2^{2^{n+2}}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$\therefore \forall n \geq 0 \wedge a_n < 2^{2^{n+1}}$

y esto a sido demostrado

4) a) $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} 3^{2n-2k} \cdot 8^{k-1}$

$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} 3^{2(n-k)} \cdot 8^k \cdot 8^{-1}$

$(3^2)^{n-k} \cdot 8^k \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$ CTE

se va para atrás de la Σ

$\frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} 9^{n-k}\, 8^k$

$(ab)^k \Leftrightarrow a^k b^k$

$\frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n-1} (-8)^k \binom{n-1}{k} 9^{n-k}$

de la del binomio del newton forma

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

$\frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n-1} (-8)^k \binom{n-1}{k} 9^{(n-1)-k}$

$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 9^{(n-1)-k} (-8)^k$

Añadimos multiplicamos/9 para que no se afecte

$\frac{1}{9} = 9^{-1}$

$\frac{9}{8} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{(n-1)-k}\, b^k$ con $a = 9$, $b = -8$

$\frac{9}{8}(9+-8)^{n-1} = \frac{9}{8}(1)^{n-1}$ → Rpta

1.5

a^{n-k}

1^{n-k} no afecta

$\sum_{k=0}^{n-1}($

$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ ($n-1-k$)

$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$

$\frac{1}{9}$ 9^{-1}

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4b) $\displaystyle\sum_{K=1}^{n} \frac{K+3}{(K+4)!}$

$\displaystyle\sum_{K=1}^{n} \frac{\cancel{(K+4)}}{\underset{(K+4)(K+3)!}{(K+4)!}} - \frac{1}{(K+4)!}$ simplificando

$\displaystyle\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{(K+\ )!} - \frac{1}{(K+4)!}$ Por telescópica K para el menor y n para el mayor

$\frac{1}{4!} - \frac{1}{(n+4)!}$

$\frac{1}{K+4} + \frac{1}{K+2}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

4c) $$\sum_{K=1}^{n} K\left(\frac{3}{5}\right)^{K+1} = \sum_{K=1}^{n} K\left(\frac{3}{5}\right)^{K} \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \quad \boxed{K(\text{Algo})^{K}}$$

Artificio

$$= \frac{3}{5}\sum K\left(\frac{3}{5}\right)^{K}$$

$$\frac{K\left(\frac{3}{5}\right)^{K}\left(\frac{3}{5}-1\right)}{\left(\frac{3}{5}-1\right)} = \frac{K\left(\frac{3}{5}\right)^{K+1} - K\left(\frac{3}{5}\right)}{-2/5}$$

$$[(K+1)-1]\,\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{K+1} - K\left(\frac{3}{5}\right)}{} \cdot \frac{1}{\frac{-2}{5}}$$

$$\underbrace{(K+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{K+1} - K\left(\frac{3}{5}\right)}_{\text{telescopica}} - \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{K+1}}_{\text{veremos luego}} \cdot \frac{5}{2}$$

$$\left[(n+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 1\left(\frac{3}{5}\right)\right] - \left[\sum_{K=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{K} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\right] \cdot \frac{5}{2}$$

$$(n+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \frac{3}{5}\Big] - \Big[\frac{3}{5}\underbrace{\sum_{K=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{K}}_{\text{Geometrica}}$$

$$\left[(n+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \frac{3}{5}\right] - \left[\frac{3}{5}\left[\frac{\frac{3}{5}^{n+1} - 1}{\frac{3}{5} - 1}\right]\right] \cdot \frac{5}{2}$$

$$\left[(n+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \frac{3}{5}\right] - \left[\frac{3}{5}\left[\frac{\frac{3}{5}^{n+1} - 1}{-\frac{2}{5}}\right]\right]$$

2.5

Margin: $-5+3 = -2$; $\left(\frac{3}{5}-1\right) = -\frac{2}{5}$; $-5+3=-2$; $\frac{3/5}{-2/5} = \frac{15}{-10} = \frac{3}{2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\left[(n+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \frac{3}{5}\right] - \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}^{n+1} - 1\right)\right]$$

$$(n+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \frac{3}{5}\Big] + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}^{n+1} - 1\right)$$

Rpta 9 hallado en términos de n

2c) Usando I.M Demostrar $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

≥ 1

$$\boxed{5(3n+1)^2 - 2^{4n} + 11 = 15K}$$

Aplicamos 1er principio de Inducción

EB Para $n=1$

$5(3(1)+1)^2 - 2^{4(1)} + 11$ ~~15K~~

$5(16) - 16 + 11$ ~~15K~~

$80 - 16 + 11$

$64 + 11 = 75 = 15K$

$75 = 15 \ldots$ (V)

E.I Para $n=h$, $h \geq 1$ se cumple

$h \geq n_0$ de la etapa base

H.I $\boxed{5(3h+1)^2 - 2^{4h} + 11 = 15K}$ ... (V)

Para $n = h+1$ probar que se cumple

T.I $5(3(h+1)+1)^2 - 2^{4(h+1)} + 11 = 15K$

Partimos sin afirmar la Tesis

$5(3h+3+1)^2 - 2^{4h+4} + 11$

$5(3h+4)^2 - 2^{4h} \cdot 2^4 + 11$

$5 \cdot 6h^2 + 24h + 16 - 2^{4h} \cdot 2^4 + 11$

$30h^2 + 24h + 16 - 2^{4h} \cdot 2^4 + 11$

$9h^2 + 21h^2 + 6h + 15 = 15$

$(3h+1)^2$

$9h^2 + 6h + 1$

$5 \cdot 9h^2$

$40h^2$

3.0 TRES ¡Faltó!

1.1

3

$16 \times 5 = 80$

2:00

2^2 2^2

4 4

16

2

15×5

$80 - 16 = 64$

3.0

9

21

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

5b) Falso $x \wedge y \in \mathbb{R}^+ \wedge \mathbb{Z}^+ / xy > 25$,

entonces $x > 5 \vee y > 5$

Falso contraejemplo

para $\underline{x > 5}$ (V) pero si y toma (1)

como 25 x 1 25

y no es mayor a 5

25

5x5
6x5
5x6
25x1

5c) $\exists y \in \mathbb{Z}^+, \forall x \, \mathbb{Z}^+ / \frac{x}{y} \leq 1$

$[1, \ldots \infty[\; ; [1 \ldots \infty[$

infinito desde el 1

~~cuando~~

FALSO ~~...~~ , $x \geq 1$ infinito ~~$\mathbb{Z}^+$~~ ~~$y \leq 1$~~

tenemos que encontrar "y" que cumpla para todo "x"

$1 \ldots \infty$

Contraejemplo: Porque solo se cumple para $x = y$

$\frac{x}{x} = 1$ pero para $\frac{x}{y} \neq 1$ y esto no cumple* que $\forall x \, \mathbb{Z}^+$

no cumple $\forall x \, \mathbb{Z}^+$

(1) (1) (1) 1 1 1 1 2 1 1 1 3 3 1 2

$1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3ab^2 + 1$

$1a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3ab^2$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1$

5d) $C.S \longrightarrow C.N$ logica mental

$+$

$P \longrightarrow q$

hallar el ⊞

$n^3 + 5$ par $\longrightarrow n$ par

impar

Contrarecíproco

n = impar $\longrightarrow n^3 + 5$ par

$2K+1 \qquad (2K+1)^3 + 5$ par

$1(2K)^3 + 3(\;\;) + 3(\;\;) + 1^3$

$3(\;\;) + 8K^3 + 1$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$(2k+1)^3$

$8k^3 + 3(2k)^2 1 + 3(2k) 1^2 + 1$

$8k^3 + 3(4k^2) + 6k + 1$

$2(k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$

$2m + 1 \quad m \in \boxed{k^3 + 6k^2 + 3k}$

$\boxed{\text{Impar}}$

0,5

1 V o F 1

1°

Sol Si n es un numero par $\rightarrow (n^3 + 3n^2) = \dot{4}$ y $(n-1)^2$ es impar

1°

$p \rightarrow q$

$n = 2k$ → definición de par entonces $((2k)^3 + 3(2k)^2)$

$8k^3 + 3(4k^2)$

$8k^3 + 12k^2$

$4(2k^3 + 3k^2) = 4k$ si es múltiplo de 4

$k \in \mathbb{Z}$ ... (V)

1

2° $n = 2k$ → definición de par

$(2k-1)^2 \Rightarrow 4k^2 - 4k + 1 = 2(k^2 - 2k) + 1$

$k^2 - 2k = m \quad — \quad k \in \mathbb{Z}$

$2m + 1$

Impar ... (V)

$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1$

$p \rightarrow q \wedge r$

$2 \times 2 \times 2$

$4x^2$

$( )^2$ m

$(3k + 1 + 3)$ impar

Solución alternativa pregunta 4.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \ (V), & n=0 \\ a_1 = 15 \ (V), & n=1 \\ a_n = a_{n-1}(a_{n-2})^2 + 1, & \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Usando I.M Dq' $a_n < 2^{2^{n+1}}$; $\forall n \geq 0$

Etapa Base

Para $n=0$ | $a_0 = 1 \Rightarrow a_0 < 2^{2^{0+1}} = 1 < 2^{2^1} = 1 < 4$ (V)

Para $n=1$ | $a_1 = 15 \Rightarrow a_1 < 2^{2^{1+1}} \Rightarrow 15 < 2^4$; $15 < 16$ (V)

Etapa Inductiva

1° H.I (HERRAMIENTA) | $n_0 < h < K$ (no significa $a_0 = 1$ pues $n_0 = 0$) | $0 < h < K$ (V)

$P(n_0)$: (V) ; $P(h)$: (V), $P(K)$: (V) $\quad a_k < 2^{2^{k+1}}$

$P(K-1)$; $P(K-2)$

2do T.I Probar $K+1$

$$\boxed{a_{K+1} < 2^{2^{K+2}}}$$

$$a_{K+1} = (a_{K+1-1})(a_{K+1-2})^2 + 1$$

$$(a_K)(a_{K-1})^2 + 1$$

1° 2do

H.I:

- $a_k < 2^{2^{k+1}}$ (V)
- $a_{k-1} < 2^{2^{k-1+1}}$
- $(a_{k-1} < 2^{2^k})^2$
- $(a_{k-1})^2 < (2^{2^k})^2$ (V)

$a < b < c$	$a < b$ V
$a < c$	$b < c$ V

H.I $a_k < 2^{2^{k+1}}$ H.I

$$(a_k)(a_{k-1})^2 + 1 < 2^{2^{k+1}} \cdot (2^{2^k})^2 + 1$$

(a)

$$2^{2^{k+2}} + 1 \Longrightarrow \text{NO ES TESIS} \quad \boxed{* > c}$$

*

Idea $\Rightarrow \underbrace{(a_k)(a_{k-1})^2 + 1}_{a} < \underbrace{b}_{\text{FIND}} < \underbrace{c}_{\text{TESIS}}$

Necesitamos $*' \leq c$

Armemos $*'$

sabemos por H.I $a_k < 2^{2^{k+1}}$

$$\underbrace{a_k \leq 2^{2^{k+1}} - 1}_{(*_1)} < 2^{2^{k+1}} \quad \text{Por transitividad}$$

$(*_1)$ Como no sabemos desigualdad analicemos $*_1$

//

$\boxed{E.B}$ ¿$a_n \geq 2^{2^{n+1}}-1$?

para $\boxed{n=0} \Rightarrow$

$1 \geq 3$ (F)

No se cumple E.B

.... $\forall n \geq 0$

i.e la desigualdad es

y así....

POR CONTRADICCIÓN

$a_k < 2^{2^{k+1}} - 1 \vee a_k = 2^{2^{k+1}} - 1$

$\boxed{V}$ pues $\boxed{F}$ $= (V)$

$$\boxed{a_k < 2^{2^{k+1}} - 1} < 2^{2^{k+1}}$$

1° usar para forma $*$'

$$\underbrace{\ldots\ldots a_k}_{a} \cdot \underbrace{< 2^{2^{k+1}} - 1 \ldots\ldots}_{b}$$

2°

$$\underbrace{\underbrace{(a_k)(a_{k-1})^2}_{H.I}+1}_{a_{k+1}} < \underbrace{\left(2^{2^{k+1}}-1\right)\left(2^{2^k}\right)^2}_{H.I}+1$$

3°

$$a_{k+1} < \underbrace{\left(2^{2^{k+1}}-1\right)}_{*_{A'}}\underbrace{\left(2^{2^k}\right)^2}_{*_{B'}}+1 < \underbrace{\left(2^{2^{k+1}}\right)}_{*_T}\underbrace{\left(2^{2^k}\right)^2}_{*_B}$$

pues

- $\boxed{*_{A'} < *_T}$
- $\boxed{*_{B'} = *_B}$

y además notar $*_T \cdot *_B = 2^{2^{k+2}}$ T.I

i.e por transitividad.

$$\boxed{a_{n+1} < 2^{2^{n+1}} ; \forall n \geq 0}$$

Rcda

$a^b \cdot a^b$

$(a^b)^2 =$

sea

$a = 2^{2^{k+1}}$

$a^2 = 2^{2^{k+2}}$