ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

TERCERA PRÁCTICA DIRIGIDA - SOLUCIONES PROPUESTAS
SEMESTRE ACADÉMICO 2021 -2

Horario: Todos. Duración: 110 minutos

Elaborada por todos los profesores.

Problemas Obligatorios

1. Considere las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 2 + |\log_3(x-4)| \quad y \quad g(x) = 4 + \log_3(3-x).$$

Halle el dominio y la regla de correspondencia de $g \circ f$.

Solución:
$Dom(f) =]4, +\infty[$; $\quad Dom(g) =]-\infty, 3[$;
$Dom(g \circ f) = \{x > 4 \wedge 2 + |\log_3(x-4)| < 3\} = \{x > 4 \wedge -1 < \log_3(x-4) < 1\} = \{x > 4 \wedge \frac{1}{3} < x - 4 < 3\}$
$Dom(g \circ f) = \left]\frac{13}{3}, 7\right[$.

$(g \circ f)(x) = 4 + \log_3(1 - |\log_3(x-4)|), \quad \dfrac{13}{3} < x < 7.$

2. Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

Si f y g son funciones decrecientes con dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}^-$ entonces $f \circ g$ es decreciente.

Solución:
Falso.
Puede tomarse como contraejemplo $f(x) = -e^x = g(x)$.
En general puede demostrarse que $f \circ g$ será creciente a partir de las condiciones dadas pues
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 < x_2 \Rightarrow 0 > g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)) < 0$.

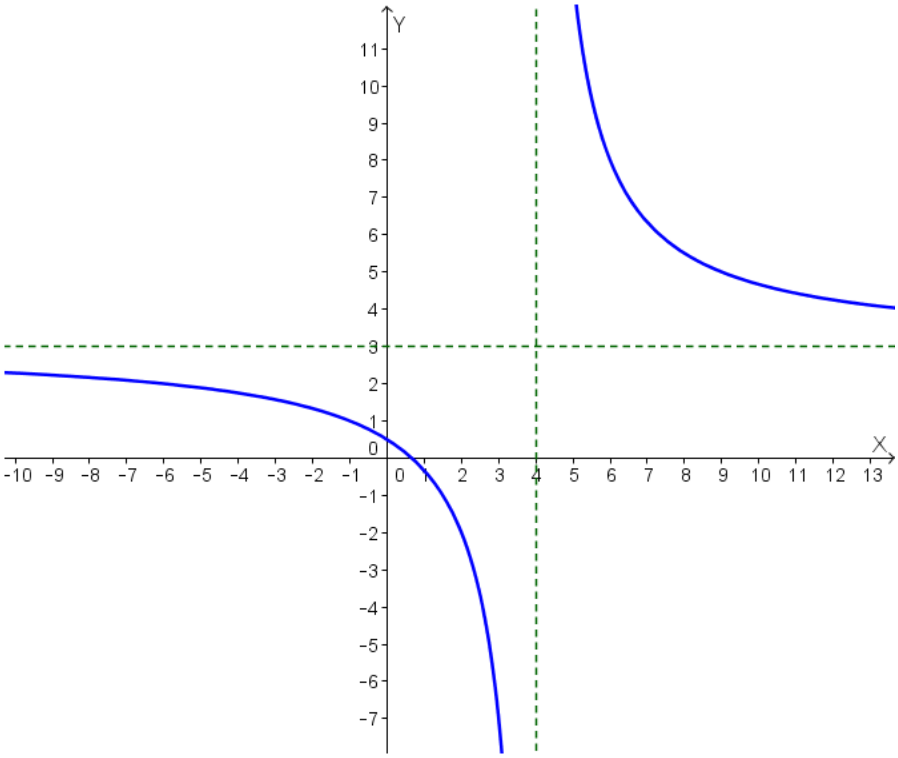
Problemas Complementarios

1. Sea h la función definida por $h(x) = \dfrac{3x^2 - 14x + 8}{x^2 - 8x + 16}$, considerando el mayor dominio posible (dominio implícito).

   a) Esboce la gráfica de h e indique los intervalos donde es creciente y los intervalos donde es decreciente.

Solución:
$h(x) = \dfrac{3x^2 - 14x + 8}{x^2 - 8x + 16} = \dfrac{(3x-2)(x-4)}{(x-4)^2} = \dfrac{3x-2}{x-4}$. Se mantiene el dominio $\mathbb{R} - \{4\}$.

$h(x) = 3 + \dfrac{10}{x-4}$ tiene $A.V: x = 4$, $A.H: y = 3$.



h es decreciente en $]-\infty, 4[$ y también en $]4, +\infty[$. No hay intervalos donde sea creciente.

b) Analice si h es inyectiva y, en caso afirmativo, halle la función inversa h^{-1} y esboce su gráfica.

Solución:
h es inyectiva (puede usarse criterio de la recta horizontal en la gráfica de h).
Procedemos a hallar h^{-1}, tomando en cuenta que $Dom(h^{-1}) = Ran(h) = \mathbb{R} - \{3\}$, $Ran(h^{-1}) = Dom(h) = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$y = 3 + \frac{10}{x-4}, \quad x \neq 4, \quad y \neq 3$$

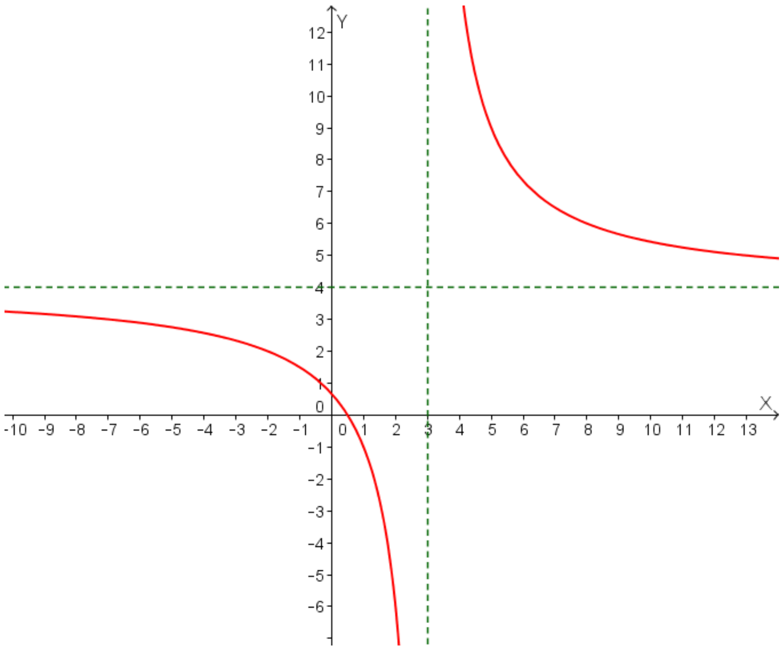
$$y - 3 = \frac{10}{x-4}, \quad x \neq 4, \quad y \neq 3$$

$$x - 4 = \frac{10}{y-3}, \quad x \neq 4, \quad y \neq 3$$

$$x = 4 + \frac{10}{y-3} = h^{-1}(y), \quad y \neq 3$$

$$h^{-1}(x) = 4 + \frac{10}{x-3}, \quad x \neq 3.$$

Gráfica de h^{-1}:



2. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - x - 2} & , \quad x \le -2 \\ 2^{-x^2-2x} - 6 & , \quad -2 < x < -1 \,. \end{cases}$$

Responda lo siguiente:

a) ¿Es f creciente en el intervalo $]-\infty, -2]$?

Solución:
Sí, pues $p(x) = x$ es creciente en $\mathbb{R}$, en particular en $]-\infty, -2]$, $r(x) = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ es decreciente en $]-\infty, -2]$, $s(x) = \sqrt{x}$ es creciente, luego $s \circ r$ es decreciente en $]-\infty, -2]$, entonces $q(x) = -\sqrt{x^2 - x - 2}$ es creciente en $]-\infty, -2]$ y por último la suma de crecientes es crecientes $f_1(x) = x - \sqrt{x^2 - x - 2}$ es creciente en $]-\infty, -2]$.

b) ¿Es f creciente en el intervalo $]-2, -1[$?

Solución:
Sí, pues $\alpha(x) = -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1$ es creciente en $]-2, -1[$, $\beta(x) = 2^x - 6$ es creciente en $\mathbb{R}$, luego la composición $f_2(x) = 2^{-x^2-2x} - 6$ es creciente en $]-2, -1[$.

c) ¿Es f inyectiva? Justifique.

Solución:
De los items anteriores sabemos que cada tramo es creciente, luego faltaría analizar si hay intersección de sus rangos.
Los rangos de cada tramo son: $Ran(f_1) =]-\infty, -4]$; $Ran(f_2) =]-5, -4[$.

Usando rango de la compuesta podemos asegurar que $Ran(f_2) =]-5, -4[$ y usando propiedades de función creciente obtenemos que $f_1(x) \leq -4$, luego en el primer tramo si por ejemplo tomamos $x = -\frac{7}{3}$, $-5 < f(-7/3) < -4$, con lo cual $Ran(f_1) \cap Ran(f_2) \neq \emptyset$.
Como cada tramo es creciente, tenemos que cada tramo por separado es inyectivo pero $Ran(f_1) \cap Ran(f_2) \neq \emptyset$, luego f no es inyectiva.

3. Considere la función

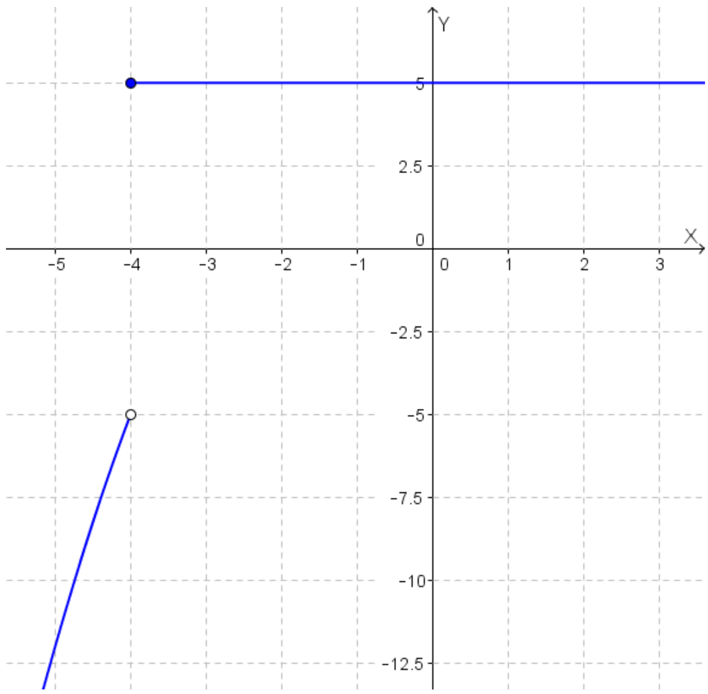
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & \text{si } x < -a \\ 4^x \cdot a^{-x} + 4, & \text{si } x \geq -a \end{cases}$$

donde $a > 0$ es una constante real.

a) Haga un esbozo de la gráfica de f cuando $a = 4$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & \text{si } x < -4 \\ 5, & \text{si } x \geq -4 \end{cases}$$



b) Encuentre el conjunto de todos los valores de a para los cuales la función f es creciente.

Solución:
$f_1(x) = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$, $x < -a$. Para que el primer tramo sea creciente es necesario que $-a \leq -1$, es decir $a \geq 1$.
$f_2(x) = \left(\frac{4}{a}\right)^x + 4$, $x \geq -a$. Para que el segundo tramo sea creciente es necesario que $\frac{4}{a} > 1$, es decir $0 < a < 4$.
Para que la función f completa sea creciente es necesario que $\left(\frac{4}{a}\right)^{-a} + 4 \geq -(-a+1)^2 + 4$.
Para los valores de a que cumplen $1 \leq a < 4$ se cumple que $\left(\frac{4}{a}\right)^{-a} + 4 > 4 \geq -(-a+1)^2 + 4$, luego los valores pedidos son todos los a en $[1, 4[$.

4. Sea la función definida por $g(x)=\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x-1)}$, halle su dominio máximo (implícito), pruebe que es inyectiva y halle la función inversa g^{-1}.

Solución:

$Dom(g)=\{x+1>0 \wedge x-1>0 \wedge \ln(x+1)-\ln(x-1)\geq 0\}=]1,+\infty[$.

Puede reescribirse $g(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$, $x>1$. Como $\frac{x+1}{x-1}$ es decreciente en $]1,+\infty[$, $\ln(x)$ es creciente en $]0,+\infty[$, $\sqrt{x}$ es creciente en $[0,+\infty[$; por composición puede probarse que g es decreciente en $]1,+\infty[$ con rango $]0,+\infty[$, luego g es inyectiva y posee inversa.

$$y=\sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)},\ x>1,\ y>0$$

$$y^2=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\ x>1,\ y>0$$

$$e^{y^2}=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1},\ x>1,\ y>0$$

$$e^{y^2}-1=\frac{2}{x-1},\ x>1,\ y>0$$

$$x-1=\frac{2}{e^{y^2}-1},\ x>1,\ y>0$$

$$x=1+\frac{2}{e^{y^2}-1},\ y>0$$

$$g^{-1}(x)=1+\frac{2}{e^{x^2}-1},\ x>0.$$

5. Sea $f:[-3,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- f es impar.
- $f(1)=1$.
- Para $x\in]-2,0]$, f es creciente y $f(x)$ es de la forma $f(x)=|4-a^x|+b$, donde a y b son constantes reales.
- Para $x\in[2,3]$, $f(x)$ es de la forma $f(x)=c^{-x+3}+d$, donde c y d son constantes positivas.
- El rango de f es $[-6,-4]\cup]-3,3[\cup[4,6]$.

Determine los valores de las constantes reales a, b, c y d, halle la regla de correspondencia de f y esboce la gráfica de f, indicando las ecuaciones de las asíntotas, en caso existan.

Solución:

Como f es impar con $0\in Dom(f)$, $f(0)=0$, como $f(1)=1$, $f(-1)=-1$.

$f(0)=3+b=0\Rightarrow b=-3$; $f(-1)=|4-a^{-1}|-3=-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ ó $a=\frac{1}{6}$.

Como se pide que f sea creciente en $]-2,0]$, se concluye que $a=\frac{1}{2}$.

$f_1(x)=|4-2^{-x}|-3$, $x\in]-2,0]$. Los valores que toma y en este tramo son $]-3,0]$.

Al agregar su reflejo se cubre $y\in]-3,3[$.

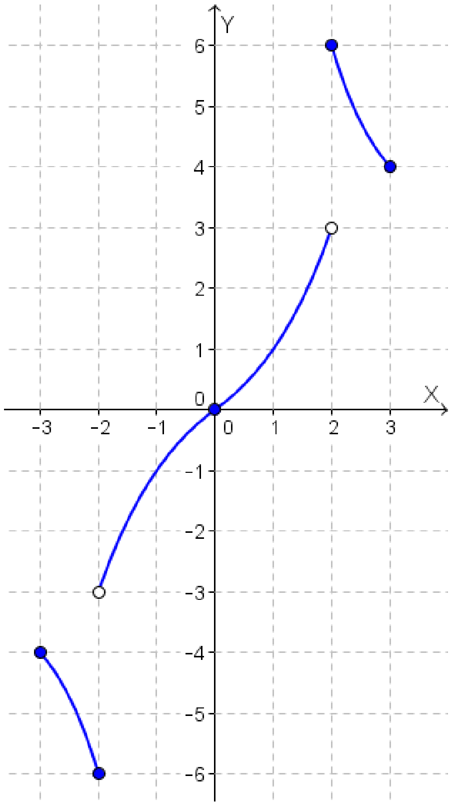
Como $c>0$, para $x\in[2,3]$ $y=f(x)$ debe tomar todos los valores en $[4,6]$, de donde $c\neq 1$, se tienen los casos:

- Si $0 < c < 1$, f es creciente, debería cumplir $f(2) = c + d = 4 \wedge f(3) = 1 + d = 6$. Al resolver el sistema se tendría $d = 5$, $c = -1$, se descarta pues c debe ser positivo.
- Si $c > 1$, f es decreciente en este tramo, debe cumplir $f(2) = c + d = 6 \wedge f(3) = 1 + d = 4$ de donde $d = 3$, $c = 3 > 1$, cumple lo pedido.

Por tanto,

$$f(x) = \begin{cases} -3^{x+3} - 3 & , \quad -3 \leq x \leq -2 \\ |4 - 2^{-x}| - 3 & , \quad -2 < x \leq 0 \\ -|4 - 2^{x}| + 3 & , \quad 0 < x < 2 \\ 3^{-x+3} + 3 & , \quad 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Su gráfica será:



No posee asíntotas.

6. El día 1 de diciembre del 2020 a las 10 horas, se colocaron a la venta por internet todas las entradas a un concierto. El número de entradas vendidas t horas después del inicio de la venta, en miles, puede aproximarse de manera adecuada por el siguiente modelo

$$N(t) = 6\log_{25}(6t+1)^8 - 5\log_{125}(6t+1)^9.$$

Además, se sabe que la última entrada fue vendida cuarenta horas después del inicio de la venta.

a) Determine el número de entradas vendidas 40 minutos desde que se inició la venta de entradas.

Solución:

$$N(t) = 6\log_{25}(6t+1)^8 - 5\log_{125}(6t+1)^9, \quad 0 \leq t \leq 40.$$

40 minutos $= \dfrac{2}{3}$ hora. Como t es en horas y N en miles:

$$N(2/3) = 6\log_{25}(5)^8 - 5\log_{125}(5)^9 = 9.$$

Respuesta: 9 000 entradas.

b) Halle el tiempo que fue necesario para lograr la venta de 27 000 entradas y expréselo de la forma: H horas con M minutos.

Solución:

$$N(t) = 6\log_{25}(6t+1)^8 - 5\log_{125}(6t+1)^9 = 27$$

$$N(t) = 3\log_5(6t+1)^8 - \frac{5}{3}\log_5(6t+1)^9 = 27$$

$$N(t) = 24\log_5(6t+1) - 15\log_5(6t+1) = 27$$

$$N(t) = 9\log_5(6t+1) = 27$$

$$\log_5(6t+1) = 3$$

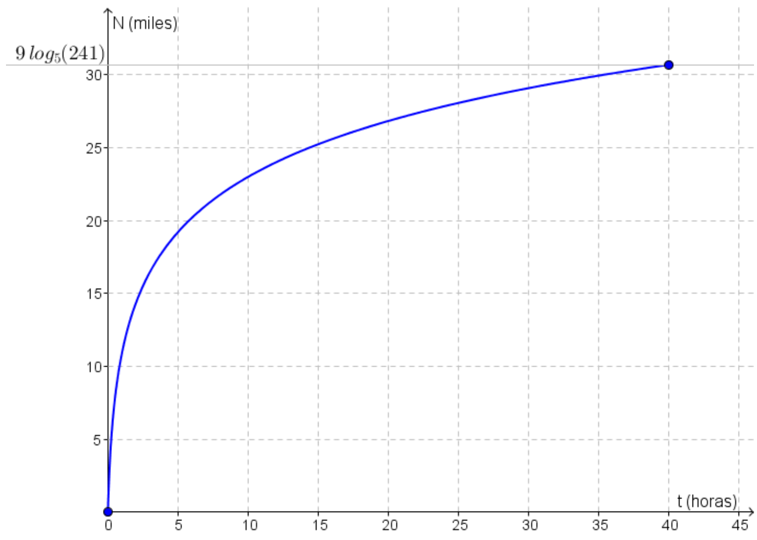
$$6t+1 = 125$$

$t = \dfrac{62}{3} = 20 + \dfrac{2}{3}$ horas $=$ 20 horas y 40 minutos.

c) Esboce la gráfica de la función N indicando su rango y las ecuaciones de sus asíntotas, en caso existan.

Solución:

$$N(t) = 9\log_5(6t+1), \quad 0 \le t \le 40.$$



$Ran(N) = [0, 9\log_5(241)]$.

No posee asíntotas.

7. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Sean $a>0$, $\lambda<0$ constantes. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función decreciente con rango $]-\infty,0[$, entonces la función h definida por $h(x)=\dfrac{a}{1-f(\lambda x)}$ es creciente.

Solución:
Verdadero, en efecto:
Para todo $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, si $x_1<x_2 \Rightarrow \lambda x_1>\lambda x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1)<f(\lambda x_2)$ pues f es decreciente
$\Rightarrow -f(\lambda x_1)>-f(\lambda x_2)>0 \Rightarrow 1-f(\lambda x_1)>1-f(\lambda x_2)>1$
$\Rightarrow \dfrac{1}{1-f(\lambda x_1)}<\dfrac{1}{1-f(\lambda x_2)} \Rightarrow \dfrac{a}{1-f(\lambda x_1)}<\dfrac{a}{1-f(\lambda x_2)} \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$.
Por lo tanto, h es creciente.

b) La función f definida por $f(x)=e^{x^2-1}+\sqrt{-2\,(0,3)^x+4}$ con $x\in]2,+\infty[$ es inyectiva.

Solución:
Verdadero. f es creciente luego f es inyectiva.
Para justificar que f es creciente, expresamos f como suma de dos funciones $g(x)=e^{x^2-1}$ y $h(x)=\sqrt{-2(0,3)^x+4}$.
g es creciente por ser composición de dos funciones crecientes en el dominio dado.
$(0,3)^x$ es decreciente por ser $0<0,3<1$, luego $-2(0,3)^x+4$ es creciente en el intervalo dado, $\sqrt{x}$ es creciente en $[0,+\infty[$, luego h es creciente por ser composición de dos funciones crecientes en el dominio correspondiente.

c) Existe una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ creciente con rango igual a $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

Solución:
Falso.
Si dicha función existiera, deberían existir en el dominio dos valores a y b con $a\neq b$ tales que $f(a)=-1$, $f(b)=1$. Como f es creciente, necesariamente $a<b$, pero como el dominio es $\mathbb{R}$ existiría $c\in\mathbb{R}$ tal que $a<c<b$ donde $f(a)=-1<f(c)<1=f(b)$ luego no cumpliría con el rango.

San Miguel, 6 de noviembre de 2021.