

Año

2023

Número

1521

Código de alumno

Primer examen

Apolinario León, Max

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Curso: SM6A

Horario: 101

Fecha: 29/01/2024

Nombre del profesor: Elton Barrantes

Firma del alumno

Nota

19

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
  - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
  - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
  - evitar borrones, manchas o roturas;
  - no usar corrector líquido;
  - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

**ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA**  
**EXAMEN PARCIAL**  
**SEMESTRE ACADÉMICO 2024 -0**

Duración: 180 minutos

**ADVERTENCIAS:**

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comuníquese a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

**INDICACIONES:**

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida  $f\!x-991SPX$ ).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. Considere que la Figura 1 se encuentra en  $\mathbb{R}^2$  y con la información mostrada, halle las componentes de los vectores  $\vec{EA}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$  y  $\vec{DE}$ .

(3 pt)

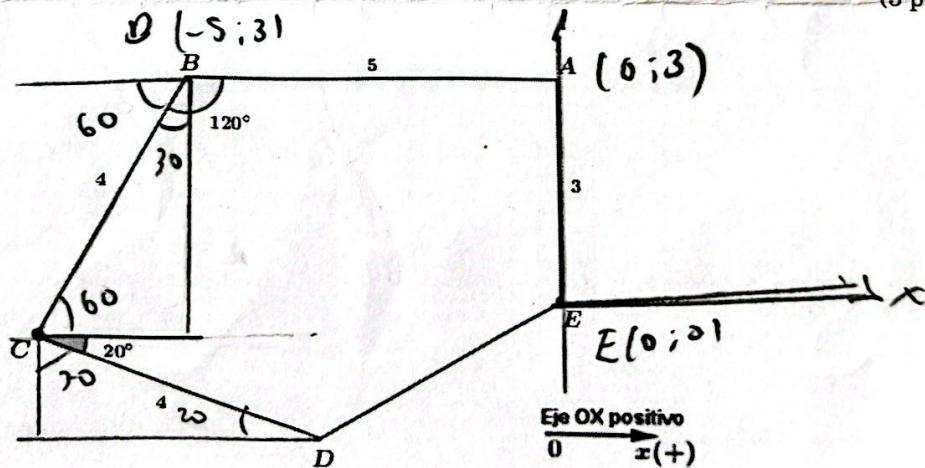


Figura 1

2. Sean la parábola  $\mathcal{P}$ , la circunferencia  $\mathcal{C}$  cuya ecuación es  $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 18$  y  $T$  un punto perteneciente a  $\mathcal{C}$ . Además, se sabe lo siguiente:

- La recta  $\ell: x + y + 3 = 0$  es tangente a  $\mathcal{C}$  en el punto  $T$  y también es directriz de  $\mathcal{P}$ .
- $T$  divide al segmento  $\overline{CF}$  de manera que  $\frac{d(C,T)}{d(T,F)} = \frac{3}{4}$ , siendo  $C$  el centro de  $\mathcal{C}$  y  $F$  el foco de  $\mathcal{P}$ .

- a) Halle las coordenadas de  $T$ . (1 pt)  
b) Halle la ecuación de  $\mathcal{P}$ . (3 pt)

3. Sea  $ABO$  un triángulo rectángulo, recto en  $B$  y  $O(0;0)$ . Se cumplen las siguientes condiciones:

- $T(2;-1)$  es el punto de la hipotenusa  $\overline{OA}$  tal que  $\frac{d(O,T)}{d(T,A)} = \frac{2}{3}$ .
  - El cateto  $\overline{OB}$  está contenido en la recta que por el punto  $(2;1)$ .
- a) Halle las coordenadas del punto  $A$ . (1 pt)
- b) Halle la ecuación de la recta que contiene al cateto  $\overline{AB}$  y las coordenadas del punto  $B$ . (1 pt)
- c) Halle una ecuación del lugar geométrico descrito por los puntos  $P(x;y)$  tal que la pendiente del segmento  $\overline{PB}$  es el triple de la pendiente del segmento  $\overline{OP}$ . (1 pt)
- d) ¿Es cierto que el punto  $\left(3;\frac{3}{2}\right)$  pertenece al lugar geométrico obtenido en el ítem c)? (1 pt)

4. Se sabe que los focos de la hipérbola  $\mathcal{H}$  se encuentran en la directriz de la parábola  $\mathcal{P}: x^2 - 8x + 8y = 16$  y que el eje focal de la parábola es el eje conjugado de la hipérbola  $\mathcal{H}$ .

Se sabe además que la distancia entre un foco de la hipérbola y el foco de la parábola es  $4\sqrt{5}$  unidades y que uno de los vértices de  $\mathcal{H}$  pertenece a la recta  $\mathcal{L}: x = -2$ .

- a) Halle la ecuación de la hipérbola  $\mathcal{H}$ . (2 pt)
- b) Grafique las dos cónicas en un mismo plano cartesiano. (2 pt)

5. Considere la curva cuya ecuación es

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$$

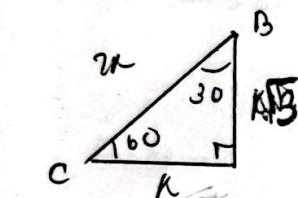
- a) Encuentre las ecuaciones de rotación que permiten identificar la curva. (1 pt)
- b) Identifique de qué tipo de cónica se trata y halle las coordenadas de su centro y en el sistema  $XY$ . (3 pt)
- c) Grafique la cónica, señalando la ubicación de su centro y de su eje focal en el sistema  $XY$ . (1 pt)

Coordinador del curso: Elton Barrantes

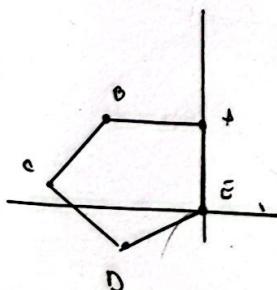
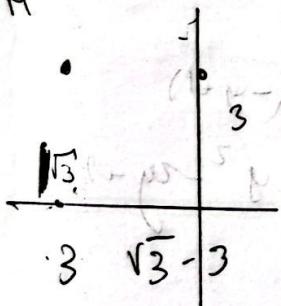
San Miguel, 29 de enero de 2024.

# Presente aquí su trabajo

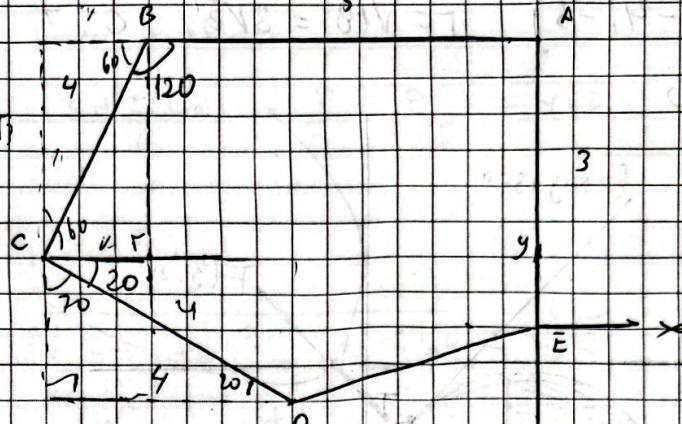
Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)



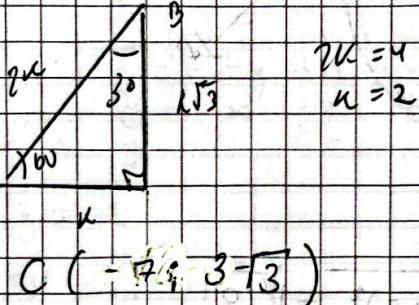
$\sin(30^\circ)$



1



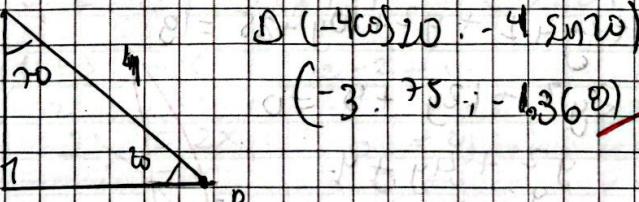
$$E(0,0) \quad A(0,3) \quad B(-5,3)$$



$$2n = 4$$

$$n = 2$$

$$C(-\frac{5}{2}, 3 - \sqrt{3})$$



$$D(-4\cos 20^\circ, -4\sin 20^\circ)$$

$$(-3.75, -1.36)$$

- $\overrightarrow{EA} = A - \bar{E} \Rightarrow (0, 3) - (-7, 0) = (7, 3)$
- $\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow (-5, 3) - (0, 3) = (-5, 0)$
- $\overrightarrow{BC} = C - B \Rightarrow (-7, 3 - \sqrt{3}) - (-5, 3) = (-2, -\sqrt{3})$
- $\overrightarrow{CD} = D - C \Rightarrow (-3.75, -1.36) - (-7, 3 - \sqrt{3})$   

$$= (3.25, 2.62)$$
 NO
- $\overrightarrow{DE} = E - D \Rightarrow (0, 0) - (-3.75, -1.36)$   

$$= (3.75, 1.36)$$
 X

# Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)

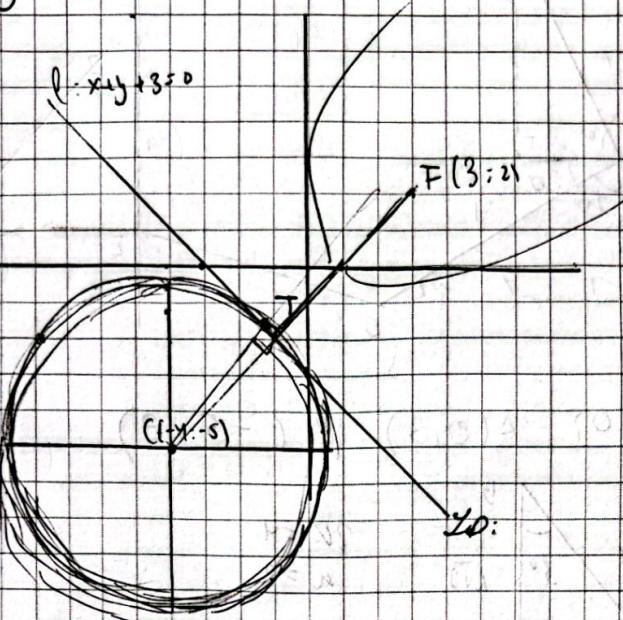
$$\textcircled{2} \quad C: (x+4)^2 + (y+5)^2 = 18$$

$$C(-4; -5) \quad r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad c \quad T$$

$$l: x+y+3=0$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & -3 \\ -3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

a)



$$T \in l: x+y+3=0 \quad x = -3-y$$

$$T(-3-y; y)$$

$$\sqrt{(-3-y-4)^2 + (y+5)^2} = \sqrt{18}$$

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 + 10y + 25 = 18$$

$$2y^2 + 12y + 8 = 0$$

$$\begin{matrix} y^2 & + 6y & + 4 \\ y & & x^2 \end{matrix}$$

$$y = -2$$

$$T(-(-2)-3; -2) = T(-1; -2)$$

$$\text{b) } \frac{d(C, T)}{d(T, F)} = \frac{3}{4}$$

$$F(x; y)$$

$$(-1; -2) = \frac{4(-4; -5) + 3(x; y)}{7}$$

$$3 + (-1; -2)$$

$$(-7; -14) = (-16; -20) + (3x; 3y)$$

$$C(-4; -5)$$

$$3x - 16 = -7$$

$$\begin{matrix} 3x = 9 \\ x = 3 \end{matrix}$$

$$3y - 20 = -14$$

$$\begin{matrix} 3y = 6 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{F(3; 2)}$$

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)

# Presente aquí su trabajo

$$I_0: x+y+3 = 0 \quad F(3,2)$$

$$d(P; F) = 20$$

$$\frac{|3+2+3|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$

$$D(-y-3, y)$$

$$\sqrt{(3+y+3)^2 + (z-y)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$(y+6)^2 + (y-2)^2 = 32$$

$$y^2 + 12y + 36 + y^2 - 4y + 4 = 32$$

$$2y^2 + 8y + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r} y^2 + 4y + 4 = 0 \\ y \cancel{+} z \\ \hline y \end{array}$$

$$y = -2$$

$$D(-4, -2)$$

$$D(-4, -2) \quad V(x; y) \neq (3, 2)$$

$$\frac{-4+3}{2} = x \quad \frac{-2-2}{2} = y$$

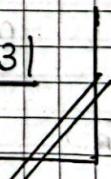
$$\frac{-2}{2} = -1 = x \quad \frac{0-0}{2} = 0 = y$$

$$\frac{0+4}{2} = 2 = x \quad \frac{0+0}{2} = 0 = y$$

$$V(4, 0)$$

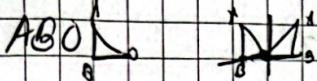
$$P: d(P; F) = d(P; X_0)$$

$$\therefore P: \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x+y+3|}{\sqrt{2}}$$

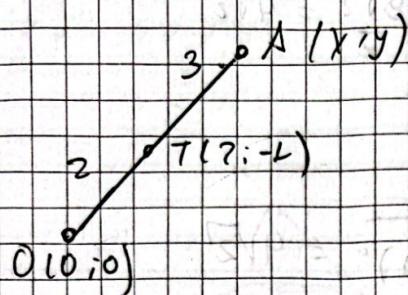


# Presente aquí su trabajo

(3)



a)  $T(?, -2)$



$$(?, -2) = 3(0, 0) + 2(x, y)$$

$$(10, -5) = (2x, -2y)$$

$$\begin{matrix} 10 = 2x \\ 5 = x \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -5 = -2y \\ -5/2 = y \end{matrix}$$

$$A(5, -5/2)$$

b)

$$O(0, 0) \quad D(2, 1)$$

$$m = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\begin{matrix} y - 2 = x - 2 \\ 0 = x - y \end{matrix}$$

$$m = \frac{1}{2} \quad m_2 = -2$$

$$\overline{OD}: x - 2y = 0$$

$$\overline{AB}: 4x + 2y = 15$$

$$A(5, -\frac{5}{2})$$

$$-\frac{y+5}{2} = -2(x-5)$$

$$y + \frac{5}{2} = -2x + 10$$

$$2y + 5 = -4x + 20$$

$$\cancel{\overline{AB}: 4x + 2y = 15 = 0}$$

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)

$$T(?, -2)$$

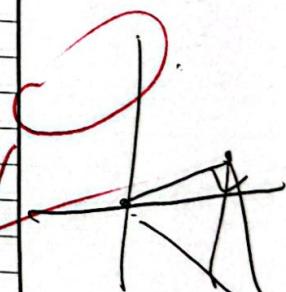
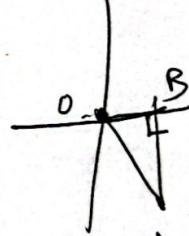
$$2$$

$$D(0, 0)$$

$$(0, -1) - 3(0, 1) +$$

$$(10, -5) =$$

$$x = 5$$



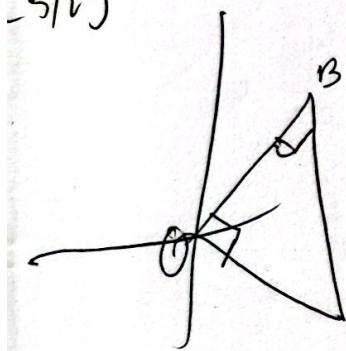
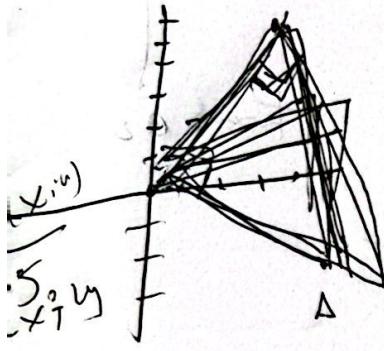
$$3 - y = 0$$

$$3 = 2y$$

$$3/2 = y$$

# Presente aquí su trabajo

XIV) Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



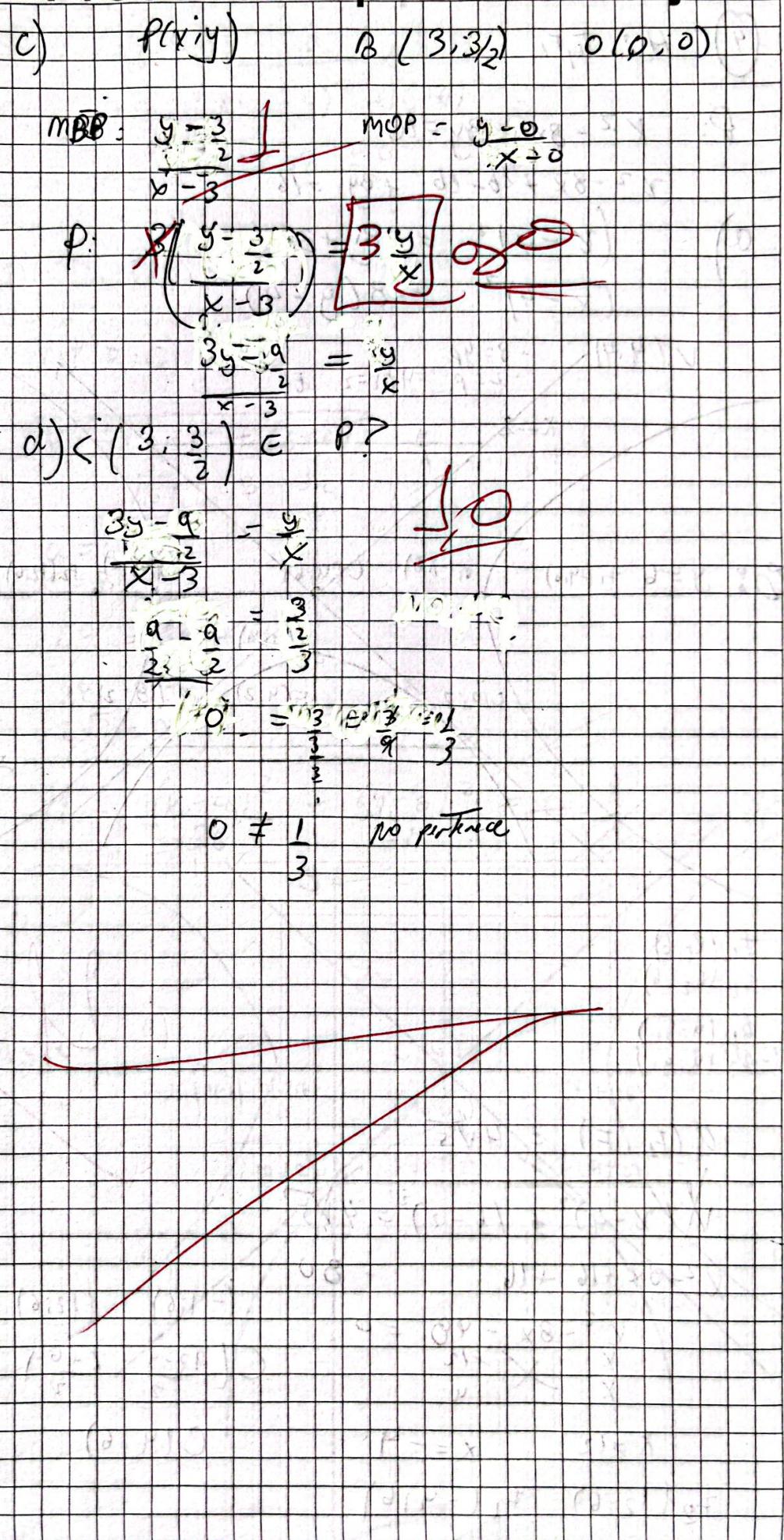
MPB  
 $P(x,y) B(3, \frac{3}{2})$

$$3\left(\frac{y - \frac{3}{2}}{x - 3}\right) = \frac{y}{x}$$

$$OP \quad \frac{y - \frac{3}{2}}{x - 3} = \frac{y}{3x}$$

$$(0,0) \quad y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{0}{3x}$$



# Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)

9)

$H_1; F_1, F_2$

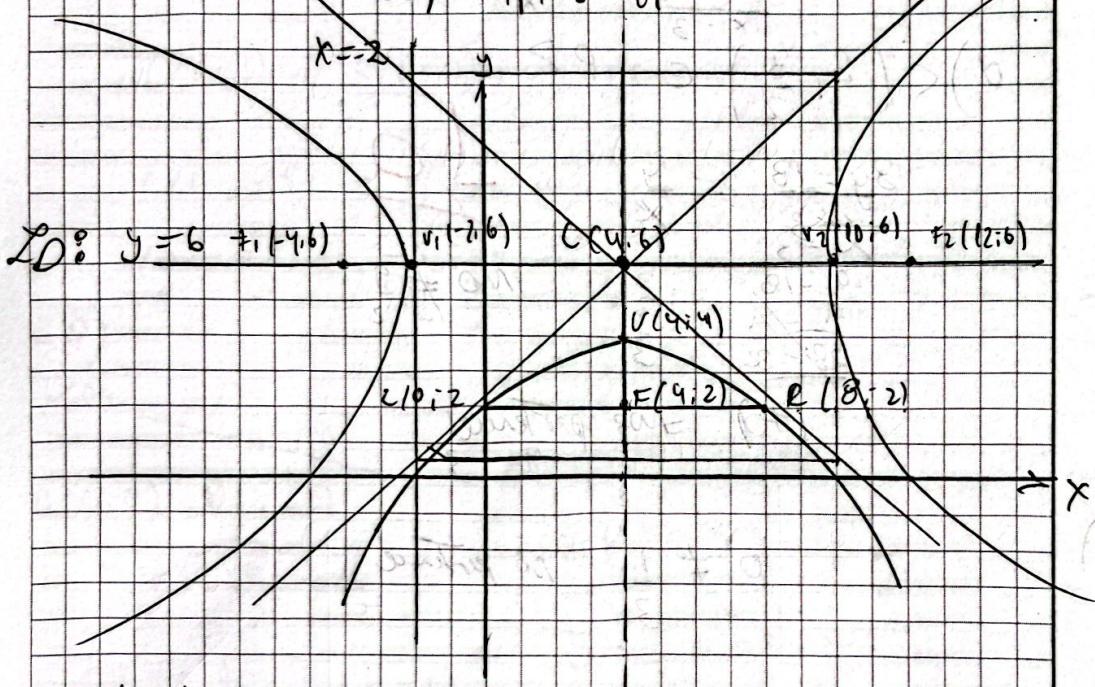
$$P: x^2 - 8x + 8y = 16$$

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + 8y = 16$$

$$a) (x-4)^2 = -8y + 32$$

$$(x-4)^2 = -8(y-4)$$

$$\sqrt{(4,4)} \quad -8 = 4p \\ -2 = p \quad | \quad |p| = 2 \quad EF$$



$$F_1(-4, 6)$$

$$F_2(12, 6)$$

$$B_1(u, y_1)$$

$$B_2(u, y_2)$$

$$d(F_1, F) = 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (6-2)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$x^2 - 8x + 16 + 16 = 80$$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 16}{2}$$

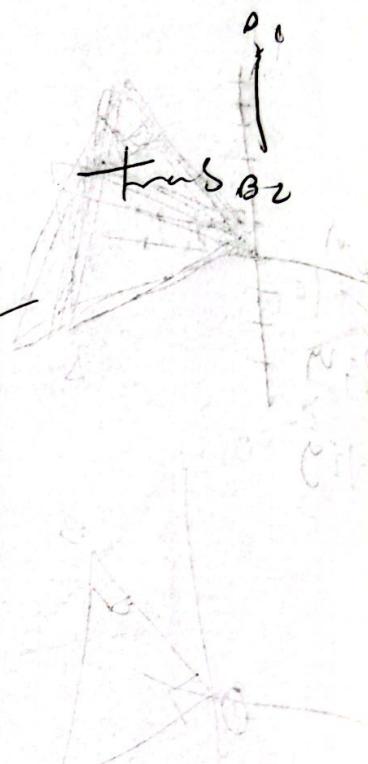
$$x = 12 \quad x = -4$$

$$(-4, 6) \quad (12, 6)$$

$$C\left(\frac{12-4}{2}; \frac{6+6}{2}\right)$$

$$C(4, 6)$$

$$F_2(12, 6) \quad F_1(-4, 6)$$



# Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)

$$d(V_1; C) = a$$

$$a = \sqrt{(-2-4)^2 + (6-6)^2}$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$a = 6$$

$$V_2 (10; 6)$$

$$d(F; C) = c$$

$$\sqrt{(-4-4)^2 + (6-6)^2}$$

$$\sqrt{64} = 8 - c$$

$$a = 6$$

$$c = 8$$

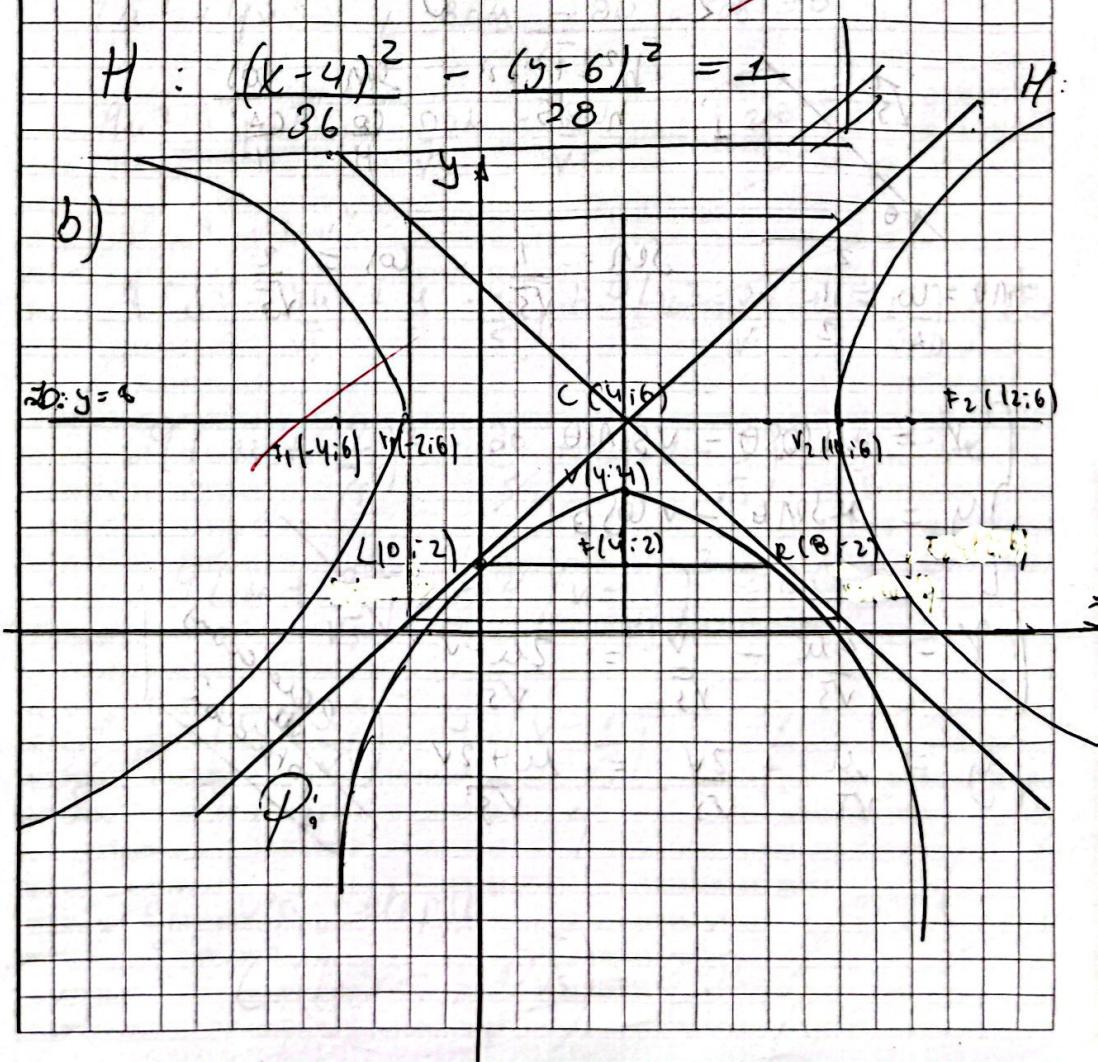
$$64 = 36 + b^2$$

$$28 = b^2$$

$$2\sqrt{7} = b$$

$$H: \frac{(x-4)^2}{36} - \frac{(y-6)^2}{28} = 1$$

b)



# Presente aquí su trabajo

(5)

$$8x^2 + 9xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$$

a)  $2\tan\theta = \frac{8}{4-5}$

$$\Rightarrow \frac{4}{0-5} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2+\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$4 - 4\tan^2\theta = 6\tan\theta$$

$$4\tan^2\theta + 6\tan\theta - 4 = 0$$

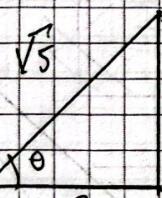
$$2\tan^2\theta + 3\tan\theta - 2 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} 2\tan\theta & & \\ 1\tan\theta & \cancel{-1} & \\ \cancel{1\tan\theta} & & \cancel{-2} \end{array}$$

$$2\tan\theta - 1 = 0 \quad \checkmark \quad \tan\theta + 2 = 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\tan\theta = -2 \quad \times$$



$$h^2 = 1^2 + 2^2$$

$$h = \sqrt{5}$$

$\sin$	$\cos$
$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \checkmark \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u\cos\theta - v\sin\theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = u\sin\theta - v\cos\theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2u}{\sqrt{5}} - \frac{v}{\sqrt{5}} = \frac{2u-v}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{u}{\sqrt{5}} + \frac{2v}{\sqrt{5}} = \frac{u+2v}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

lnea de rotación  
lnea de rotación

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)

## b) Presente aquí su trabajo

$$8\left(\frac{2u-v}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2u-v}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{u+2v}{\sqrt{5}}\right) + 5\left(\frac{u+2v}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(\frac{2u-v}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+ 4\left(\frac{u+2v}{\sqrt{5}}\right) - 28 = 0$$

$$8(4u^2 - 4uv + v^2) + 4(2u^2 + 4uv - uv - 2v^2) + 5(u^2 + 4uv + 4v^2)$$

$$\cancel{\frac{32u^2 - 32uv + 8v^2 + 8u^2 + 12uv - 8v^2 + 5u^2 + 20uv + 20v^2}{5}}$$

$$\frac{45u^2 + 20v^2}{5} + \left(\frac{16(2u-v)}{\sqrt{5}} + \frac{4(u+2v)}{\sqrt{5}}\right) - 28 = 0$$

$$\frac{9u^2 + 4v^2}{5} + \frac{32u - 16v + 4u + 8v}{\sqrt{5}} - 28 = 0$$

$$9u^2 + 4v^2 + \frac{36u - 8v}{\sqrt{5}} - 28 = 0$$

$$9u^2 + 4v^2 + \frac{36u}{\sqrt{5}} - \frac{8v}{\sqrt{5}} = 28$$

$$9u^2 + 4v^2 = 28$$

$$9\left(u^2 + \frac{4u}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\right) + 4\left(v^2 - \frac{2v}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{5} - \frac{1}{5}\right) = 28$$

$$9\left(u + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{36}{5} + 4\left(v - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} = 28$$

$$9\left(u + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(v - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36$$

$$\frac{\left(u + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{9} + \frac{\left(v - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} = 1$$

e) una elipse

$$C\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$X^o$   $Y^o$   $(5, 0)$

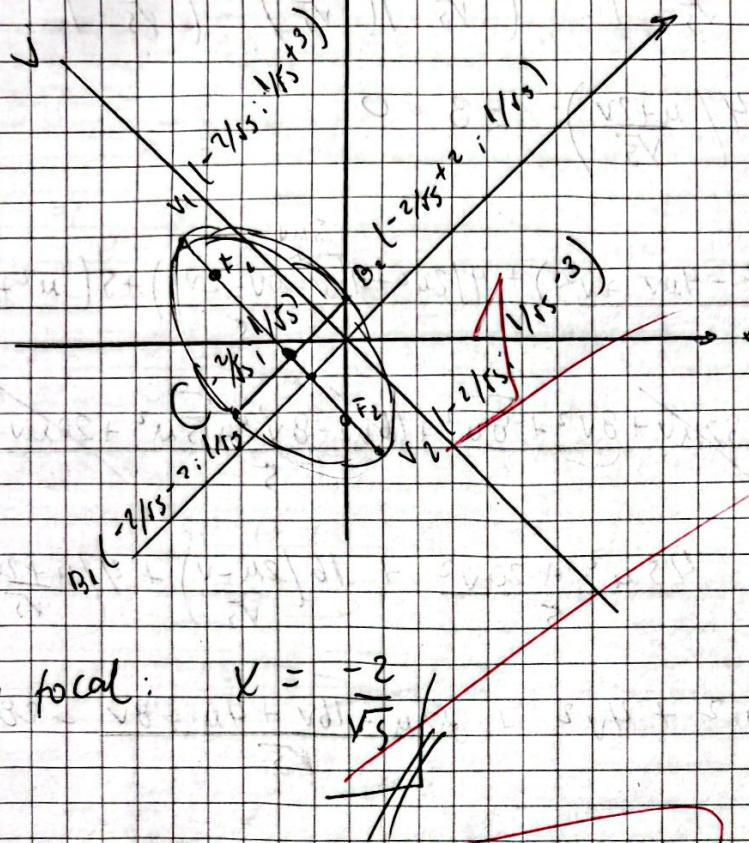
$$\begin{aligned} u &= \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5}u &= 4 \\ \frac{4\sqrt{5}}{5} &= 4 \\ \frac{4\sqrt{5}}{5} &= \frac{20}{5} \\ \frac{4}{5} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5}v &= 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5}u &= 4 \\ \frac{4\sqrt{5}}{5} &= 4 \\ \frac{4}{5} &= 1 \end{aligned}$$

# Presente aquí su trabajo

c)



Eje focal:  $x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

Zona exclusiva para  
cálculos y desarrollos  
(borrador)