ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

y = arcsen(0)
sen y = 0
1 = 0

Fundamentos de Cálculo

Cuarta Práctica Calificada

Semestre Académico 2019-2

Horario: Todos.

Duración: 110 minutos

Elaborada por todos los profesores.

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: y = arcsen(1)

   a) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$. $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ (1 punto)

   b) Para todo $x \in [-1,1]$ se cumple $\arctan(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{\operatorname{arccos}(x)}$. (1 punto)

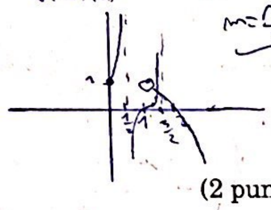
   c) El mayor dominio posible de la función con regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{arccos}(\sqrt{x})$ es $[0,+\infty[$. (1 punto)

   d) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función polinómica de grado 5 entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (1 punto)

   $m = \frac{\pi}{2}$

2. Sea $0 < m \le 1$ una constante real y f la función definida por

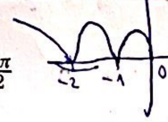
$$f(x) = \begin{cases} 1+\tan(\pi x) & \text{si} \quad 0 \le x < m,\ x \ne \frac{1}{2} \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$



   a) Halle el mayor valor de m para el cual f sea inyectiva. (2 puntos)

   b) Para el valor de m hallado en $a)$, determine los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente. (1 punto)

3. Dada la función f definida por



$$f(x) = \begin{cases} \tan(x-\pi) & \text{si} \quad 0 \le x < 2\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2},\ x \ne \frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{arccos}\left(\frac{x}{\pi}-2\right) & \text{si} \quad 2\pi \le x < 3\pi. \end{cases}$$

   a) Esboce la gráfica de f y halle los puntos de intersección con los ejes coordenados. (2.5 puntos)

   b) Halle $\displaystyle\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} f(x)$. (1 punto)

   c) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi^+} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi^-} f(x)$. ¿Qué puede concluir respecto a $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi} f(x)$? (1.5 puntos)

$= \frac{\pi}{2}$

$\dfrac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$

4. Sea la función $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}x - \pi - 1}{x - 2}\right)$.

   a) Sea $g(x) = \dfrac{\frac{\pi}{2}x - \pi - 1}{x - 2}$, $x \neq 2$, halle $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$. $-\infty$ (2 puntos)

   b) Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. $-\infty$ (2 puntos)

5. Una masa unida a un resorte se mueve hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple. Su desplazamiento en el tiempo a partir del equilibrio se modela por una función de la forma $f(t) = a\,\mathrm{sen}(wt) + b$, donde a, b y w son constantes reales, cuya gráfica se muestra a continuación.

$A = \dfrac{4-(-4)}{2} = 4$

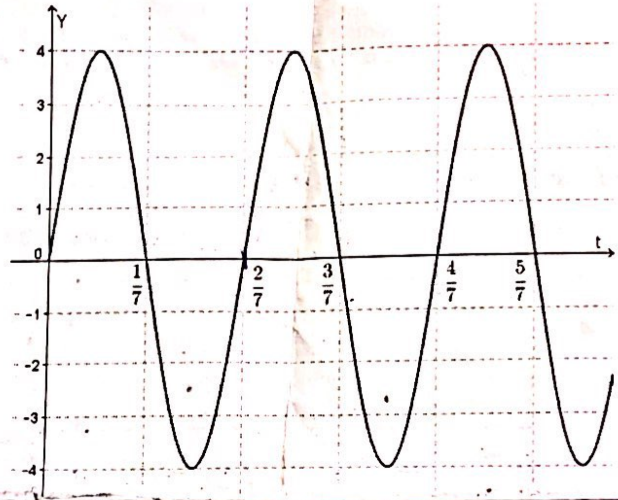
$T = \frac{2}{7} = \frac{2\pi}{w}$

$\boxed{w = 7\pi}$

$\frac{2}{7} = \frac{2\pi}{w}$

$w = \frac{2\pi \cdot 7}{2}$

$\boxed{w = 7\pi}$



   a) Determine el periodo y amplitud de f. (2 puntos)

   b) Halle la regla de correspondencia de f. (2 puntos)

San Miguel, 23 de noviembre de 2019.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII **PUCP**

ENTREGADO
30 NOV. 2019

Año: 2019 Número: 5973

Código de alumno

Práctica #15

Sosa Aluno, Alvaro Caleb

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAC

Práctica Nº: P4

Horario de práctica: P-107

Fecha: 23/11/19

Nombre del profesor: J. Flores

Nota

20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) JASJ

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1) a) $x \in \mathbb{R} \rightarrow \arcsen(\sen x) = x$

Contra ejemplo:

Para $x = \pi \in \mathbb{R}$; $\arcsen(\sen x) = \arcsen(\sen \pi) = \arcsen(0) = 0$

$\Rightarrow \arcsen(\sen \pi) \neq \pi$

$\therefore$ Falso

1.0

b) $\forall x \in [-1, 1]$, $\arctg(x) = \dfrac{\arcsen(x)}{\arccos(x)}$

Contra-ejemplo: $x = -1$; $\arctg(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

$\arcsen(-1) = -\pi/2$

$\arccos(-1) = \pi$

$\dfrac{\arcsen(-1)}{\arccos(-1)} = -\dfrac{1}{2} \neq \arctg(-1)$

$\therefore$ Falso

1.0

c) ¿ $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$; $Dom f = [0; +\infty[$?

$-1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1$

$0 \leq x \leq 1$

$Dom f = [0; 1]$

$\therefore$ (Falso)

Además, para $x = 2$, $f(x)$ no existe.

1.0

d) Contra ejemplo:

$f(x) = -x(x-1)^4$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \neq +\infty$

$\therefore$ (Falso)

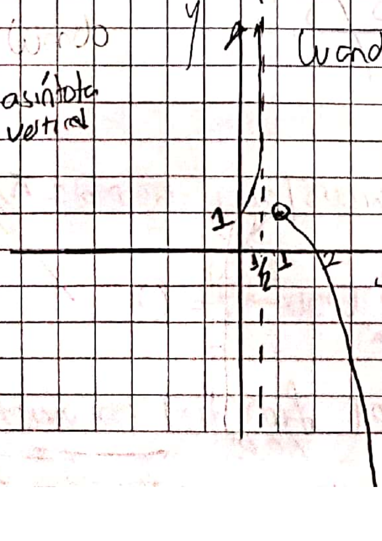
1.0

2) $0 < m \leq 1$

$f(x) = \begin{cases} 1 + \tg(\pi x) ; & 0 \leq x < m ; x \neq 1 \\ -x^2 + 2x ; & x > 1 \end{cases}$

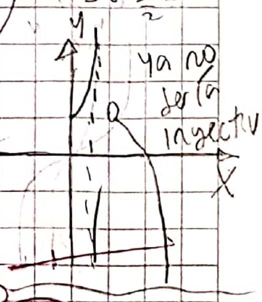
$-(x-1)^2 + 1$

a) Cuando $x = 1/2$: asíntota vertical



Cuando $m = 1/2$

Nota: Si $\frac{1}{2} < m \leq 1$



Ya no sería inyectiva

2.0

$m_{max} = 1/2$

$-\pi/2$

π

$x(x-1)(x-2)$

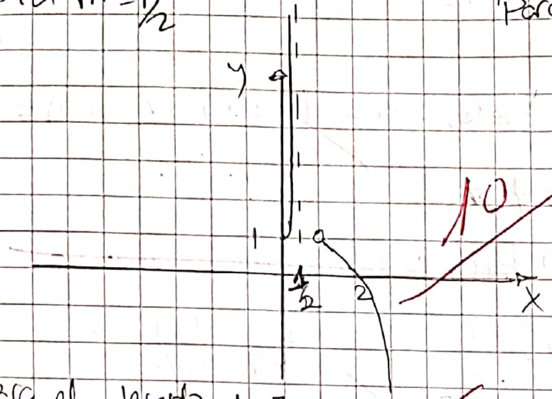
$-x^2 + 2x - 1 + 1$

$-(x-1)^2 +$

Presente aquí su trabajo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) Para $m = 1/2$



Para el intervalo de $[0; \frac{1}{2}[$

$0 \leq x_1 < x_2 < 1/2$

$0 \leq \pi x_1 < \pi x_2 < \pi/2$

Nota: la función tangente es creciente en el intervalo de $[0; \frac{\pi}{2}[$

$\rightarrow tg(0) \leq tg(\pi x_1) < tg(\pi x_2)$

$1 + 0 = 1 \leq 1 + tg(\pi x_1) < 1 + tg(\pi x_2)$

$\Rightarrow 1 \leq f(x_1) < f(x_2)$

$\rightarrow$ creciente en $[0; \frac{1}{2}[$

10

Para el intervalo de $]1; +\infty[$

$1 < x_1 < x_2$

$0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$

$0 < (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2$

$0 > -(x_1-1)^2 > -(x_2-1)^2$

$1 > 1-(x_1-1)^2 > 1-(x_2-1)^2$

$1 > f(x_1) > f(x_2)$

$\rightarrow$ Decreciente en $]1; +\infty[$

Rpta: Creciente: $[0; \frac{1}{2}[$

Decreciente: $]1; +\infty[$

(3)

5.0

$$f(x) = \begin{cases} tg(x-\pi) & ; \quad 0 \leq x < 2\pi ; \ x \neq \frac{\pi}{2} ; x \neq \frac{3\pi}{2} \\ \arccos(\frac{x}{\pi} - 2) & si \quad 2\pi \leq x < 3\pi \end{cases}$$

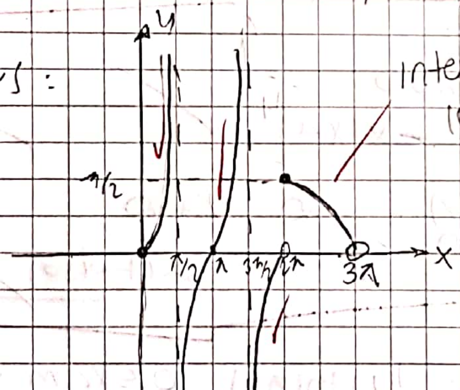
$f_1(x) = tg(x-\pi) \quad ; 0 \leq x < 2\pi ; \ x \neq \frac{\pi}{2} ; \ x \neq \frac{3\pi}{2}$

a)

Asíntotas:

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2}$



Intersecciones: $(0;0) ; (\pi;0)$

b) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ Por la gráfica

c) $\lim_{x \to 2\pi^+} f(x) = f(2\pi) = \arccos(\frac{2\pi}{\pi} - 2) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} (tg(x-\pi)) = 0$

Como $\lim_{x \to 2\pi^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2\pi^+} f(x)$, el $\lim_{x \to 2\pi} f(x)$ no existe

Scanned by CamScanner

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

(4) $f: \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}x - \pi - 1}{x-2}\right)$

a) $g(x) = \dfrac{\frac{\pi}{2}x - \pi - 1}{x-2}$; $x \neq 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}x - \pi - 1}{x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\to \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$

2U

b) $f(x) = \cos(g(x))$ $\wedge$ $g(x) = \dfrac{\frac{\pi}{2}x - \pi - 1}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \cos(g(x))$

Sea $h(x) = \cos(x)$

Pide $\lim\limits_{x \to -\infty} h(g(x)) = \lim\limits_{t \to t_0} h(t)$

cuando $t_0 = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

Como ya se halló en el anterior inciso;

$t_0 = \frac{\pi}{2}$

2U

$\to \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} h(t) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \cos t = 0$

---

(5) De la gráfica, la amplitud sería

$A = \dfrac{4-(-4)}{2} = 4$

el periodo sería $T = \frac{2}{7} - 0 = \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$

$f(t) = a\,\text{sen}(wt) + b$

$f(t) = 4\,\text{sen}(wt) + b$ $\quad \to f(t) = 4\,\text{sen}(w \cdot t) + b$

$T = \frac{2}{7} = \frac{2\pi}{|w|}$ $\quad (0;0) \in f(x) \Rightarrow f(0) = 0 = 4\,\text{sen}\,0 + b$

$\to b = 0$

$|w| = 7\pi$ $\quad (\frac{1}{14}; 4) \in f(x) \Rightarrow f(\frac{1}{14}) = 4\,\text{sen}(\frac{w}{14}) = 4$

$\text{sen}(\frac{w}{14}) = 1$

$w = 7\pi$

(continúa)

$\to f(t) = 4\,\text{sen}(7\pi t)$

Scanned by CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)

a) $A = 4$

$T = \frac{2}{7}$

4.0

b) $f(t) = 4 sen(7\pi t)$; $t \geq 0$

FIN