PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Álgebra Matricial y Geometría Analítica
Examen 1
(2017-1)

Indicaciones:

* No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 3 horas.
* Resuelva las cinco preguntas de acuerdo a la siguiente distribución:

Pregunta	1	2	3	4	5
Página	1 y 2	3 y 4	5 y 6	7 y 8	9 y 10

---

1. Considere el punto $A(-3,1)$ y la recta L con ecuación $y=4$.

   a) Halle la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos P del plano cartesiano tales que $d(P,A)=2d(P,L)$. (1,5 pts)

   b) Grafique el lugar geométrico obtenido en el item anterior. (2,5 pts)

2. Considere la familia de cónicas

$$C_t : \frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{9+t}=1$$

   con $t \neq 4, -9$.

   a) Para qué valor de t, C_t representa una circunferencia?

   b) Halle todos los valores de t, para que C_t represente una elipse.

   c) Halle todos los valores de t, para que C_t represente una elipse cuyo eje focal coincida con el eje X

   d) Halle todos los valores de t, para que C_t represente una hipérbola.

   Justifique sus respuestas (4 pts)

3. Dada la ecuación cuadrática

$$y^2-\sqrt{3}xy=2$$

   a) Verifique que la ecuación cuadrática representa a una hipérbola. (3 pts)

   b) Halle el ángulo formado por las asíntotas de la hipérbola anterior. (1 pts)

Continúa...

4. *a*) Sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{aligned} \overline{u}+\overline{v} &= (4,2,6) \\ \overline{u}-\overline{v} &= (-2,4,0) \end{aligned}$$

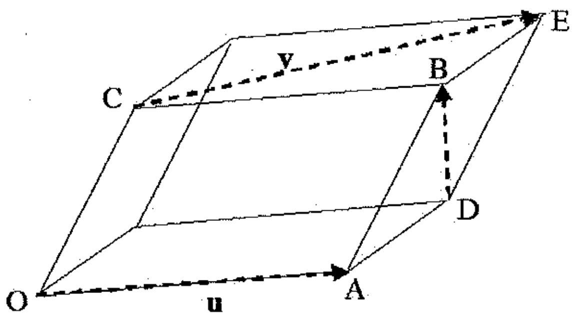
Halle el área del paralelogramo formado por los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$. (2 pts)

b) Sean $\overline{a}$ y $\overline{b}$ dos vectores en R^n. Si

$$\overline{c} = \|\overline{b}\|\overline{a} + \|\overline{a}\|\overline{b}$$

Verifique que el ángulo formado por los vectores $\overline{a}$ y $\overline{c}$ es igual al ángulo formado por $\overline{b}$ y $\overline{c}$ (2 pts)

5. Sean los vectores $\overline{u} = (1,5,1)$, $\overline{v} = (-2,6,2)$, y los puntos $O(1,0,1)$ y $B(1,7,6)$ en el paralelepípedo mostrado en la figura.



Determine las coordenadas de los puntos A, D, C y E. (4 pts)

Examen elaborado por los coordinadores del curso.
Turno: 8:00 - 11:00.

San Miguel, 19 de mayo de 2017.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

PUCP

ENTREGADO
01 JUN. 2017

Año 2017 Número 0245

Código de alumno

Primer examen

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta): Arzola Ramírez Carlos

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H-103

Fecha: 19/05/17

Nombre del profesor: E. Villogas

Nota

20

E

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

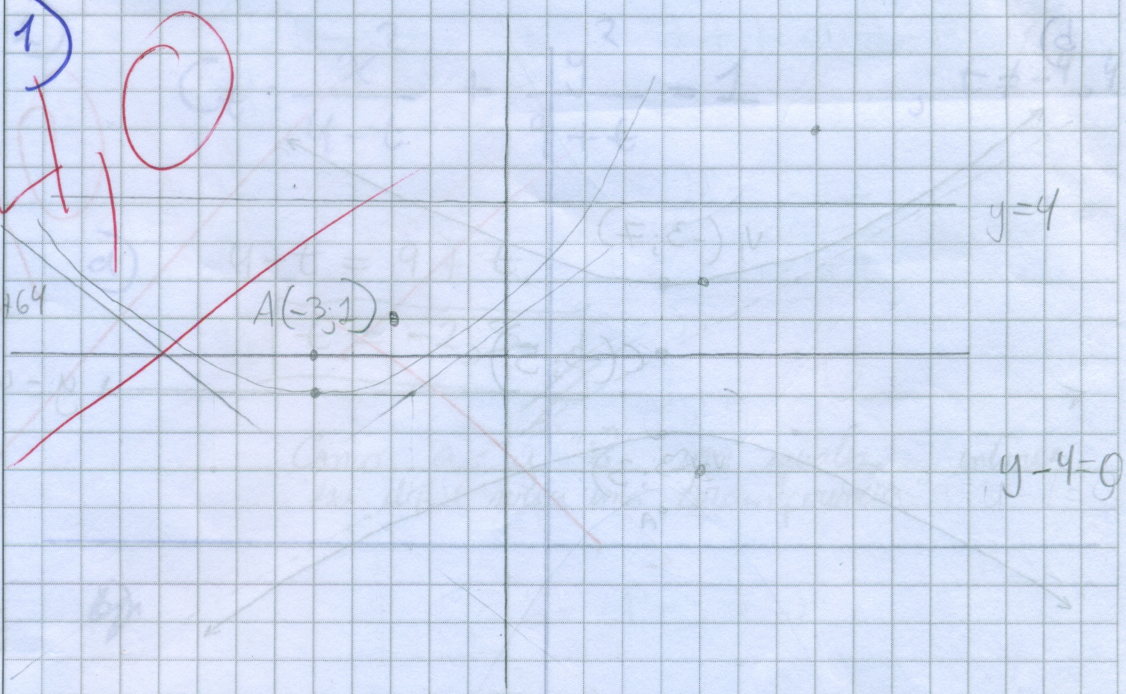
$(x+3)^2 + y^2 - 2y + 1 = 4y - 32y + 64$

$(x+3)^2 - 3y^2 + 30y = 63$

$(x+3)^2 - 3[(y+5)^2 - 25] = 63$

$2\sqrt{3}$

1) 4,0



a) $d(P, A) = 2\, d(P, L)$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = 2\,|y-4|$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4(y-4)^2$$

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10 = 4y^2 - 32y + 64$$

$$x^2 + 6x - 3y^2 + 30y = 54$$

$$(x+3)^2 - 9 - 3(y^2 - 10y) = 54$$

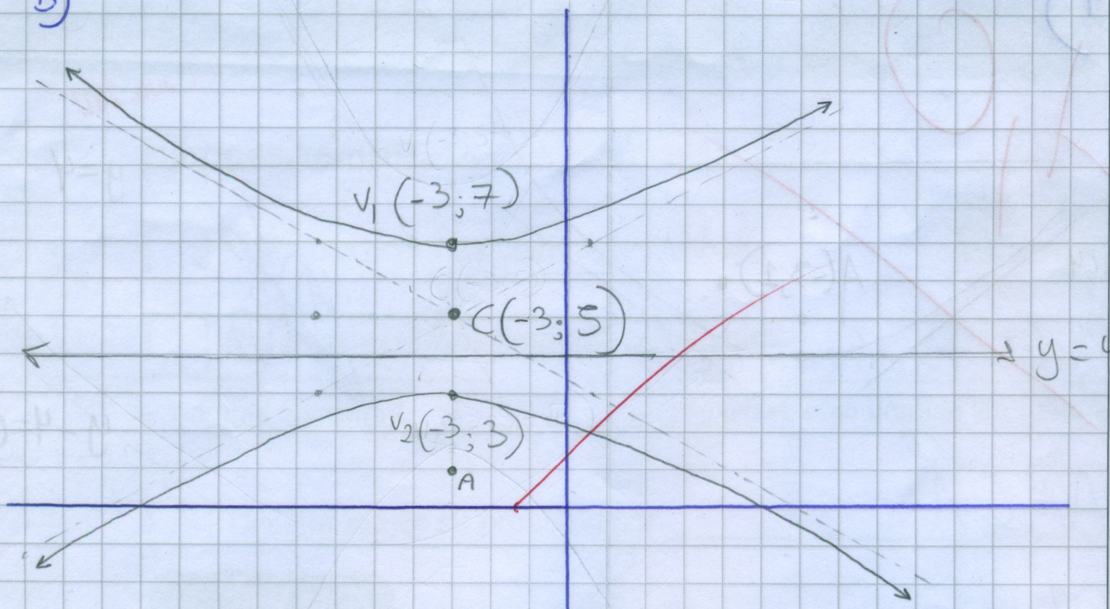
$$(x+3)^2 - 3[(y-5)^2 - 25] = 63$$

$$(x+3)^2 - 3(y-5)^2 + 75 = 63$$

$$12 = 3(y-5)^2 - (x+3)^2$$

$$\boxed{1 = \frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{12}}$$

b)



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$2\sqrt{3}$

$\sqrt{12}$

$1+\sqrt{12}$

$4+\sqrt{12}=2+2\sqrt{\ }$

$2=\sqrt{12}$

$\boxed{x=5}$

$25-3(y-5)^2-12$

$3(y^2-10y+25)=3$

$y^2-10y+25-\frac{37}{2}=$

$10y+\frac{13}{2}$

$1=\frac{(y-5)^2}{4}-\frac{25}{12}$

2

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$4-t$

$9+t$

$4t-t^2$

$36-9t$

$4-t=1$

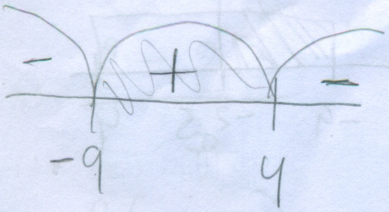
$36-5t-t^2$

b)

$(9+t)x^2+(4-t)y^2=(4-t)(9+t)$

$(4-t)(9+t)>0$

$36-5t-t^2>0$



$\langle -9 ; 4\rangle$

4,0

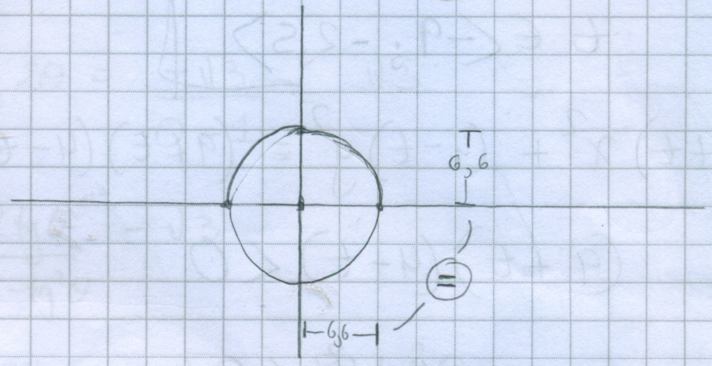
2) $C_t: \dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{9+t}=1$, $t\neq -9, 4$

a) $4-t=9+t$

$\boxed{t=-2{,}5}$

Como "a" y "b" son iguales entonces esa elipse sería una circunferencia.

b)

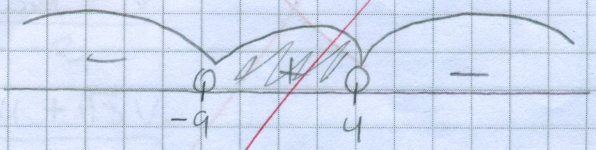


b) $(9+t)x^2+(4-t)y^2=(4-t)(9+t)$

$(4-t)(9+t)>0$

$36-5t-t^2>0$

$(9+t)(4-t)>0$



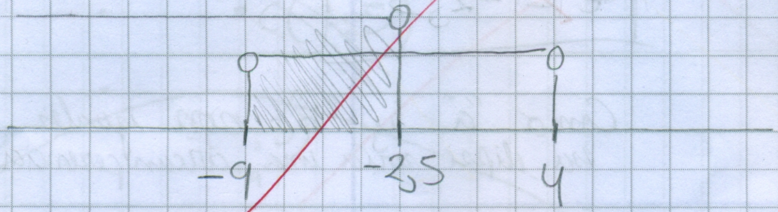
$t\in\langle -9 ; 4\rangle$ para que sea elipse

c) $4-t>9+t \quad \wedge \quad t\langle -9;4\rangle$

$-2t>5$

$2t<-5$

$\boxed{t<-2{,}5}$



$t\in\langle -9;-2{,}5\rangle$

d) $(9+t)x^2+(4-t)y^2=(9+t)(4-t)$

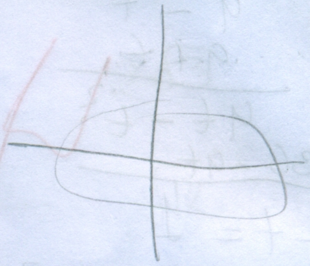
$(9+t)(4-t)<0$

$36-5t-t^2<0$

$(9+t)(4-t)<0$

$t\in\langle -\infty;-9\rangle \cup \langle 4;+\infty\rangle$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



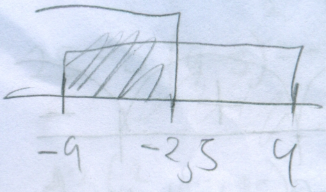
$4-t>9+t$

$-5>2t$

$t<-2{,}5$

$\wedge$

$t\langle -9;4\rangle$



-2,6

6,6 6,4

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$Ax^2 + Bxy + Cy^2$

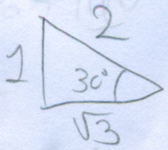
$\theta = 30^\circ$

$\sqrt{3}\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2(1-\sqrt{3})}{3}$



$-tg\,\theta$

$x = u\cos\theta - v\,\text{sen}\theta$

$y = u\,\text{sen}\theta + v\cdot\cos\theta$

3.-

$$y^2 - \sqrt{3}xy = 2$$

a) $b^2 - 4ac > 0$ para que sea hipérbola

$(-\sqrt{3})^2 - 4(0)(1) > 0$

$3 > 0$ $\boxed{V}$

$\therefore\ y^2 - \sqrt{3}xy = 2$ es una hipérbola

b) $tg\,2\theta = \frac{-\sqrt{3}}{0-1} = \sqrt{3}$

$\frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \sqrt{3}$

$2tg\theta = \sqrt{3} - \sqrt{3}tg^2\theta$

$\sqrt{3}tg^2\theta + 2tg\theta - \sqrt{3} = 0$

$tg\theta \qquad \sqrt{3}$

$\sqrt{3}tg\theta \qquad -1$

$tg\theta = 1/\sqrt{3}$

$\theta = 30^\circ$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}u - v}{2} \\ y = \frac{u + \sqrt{3}v}{2} \end{cases}$$

$$H: \left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}u - v}{2}\right)\left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right) = 2$$

$$H: \left(\frac{u^2 + 2\sqrt{3}uv + 3v^2}{4}\right) - \left(\frac{3u - \sqrt{3}v}{2}\right)\left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right) = 2$$

Presente aquí su trabajo

$$\left(\frac{u^2+2\sqrt{3}uv+3v^2}{4}\right)-\left(\frac{3u-\sqrt{3}v}{2}\right)\left(\frac{u+\sqrt{3}v}{2}\right)=2$$

$$\frac{u^2+2\sqrt{3}uv+3v^2-3u^2-2\sqrt{3}uv+3v^2}{4}=2$$

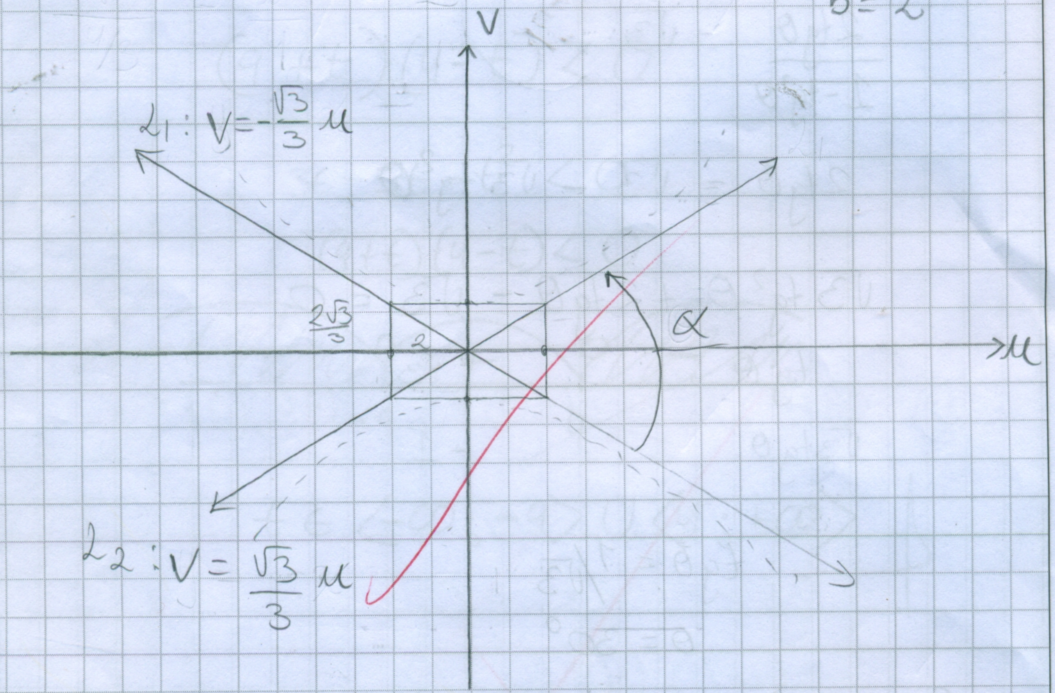
$$-2u^2+6v^2=8$$

$$-u^2+3v^2=4$$

$$\frac{v^2}{4/3}-\frac{u^2}{4}=1$$

$a=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$b=2$



$$tg\,\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$tg\,\alpha=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}}$$

$$tg\,\alpha=\sqrt{3}$$

$$\boxed{\alpha=60^\circ}$$

6

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\begin{array}{r} 3u-\sqrt{3}v \\ u+\sqrt{3}v \\ \hline 3\sqrt{3}uv-3v^2 \\ 3u^2-\sqrt{3}uv \\ \hline 3u^2+2\sqrt{3}uv-3v^2 \end{array}$$

$3u \quad -\sqrt{3}v$

$u \quad +\sqrt{3}v$

$$A=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{-2}{4}$$

$$-\frac{1}{2}u^2$$

$$C=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}u^2+\frac{3}{2}v^2-2=0$$

$$1-\frac{3}{9}$$

$$1-\frac{1}{3}$$

Paralelogramo $\|A \times B\|$

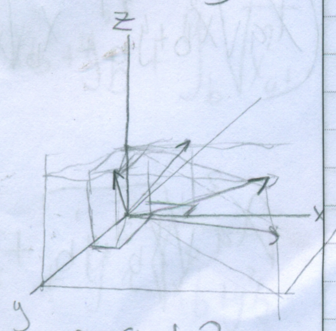
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$12 ; -(3-9) ; -1-9$

$(12 ; 6 ; -10)$



$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & \end{array}$$

$\sqrt{144+36+100}$

$\sqrt{280}$

$2\sqrt{70}$

4) a) $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{u} + \vec{v} = (4;2;6)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-2;4;0)$$

$$\vec{u} = (x_u , y_u , z_u)$$

$$\vec{v} = (x_v , y_v , z_v)$$

$$\begin{aligned} x_u + \cancel{x_v} &= 4 \\ x_u - \cancel{x_v} &= -2 \end{aligned} \Big\} +$$

$$2x_u = 2$$

$$\boxed{x_u = 1} \quad \boxed{x_v = 3}$$

$$\begin{aligned} y_u + y_v &= 2 \\ y_u - y_v &= 4 \end{aligned} \Big\} +$$

$$\boxed{y_u = 3} \quad \boxed{y_v = -1}$$

$$\begin{aligned} z_u + z_v &= 6 \\ z_u - z_v &= 0 \end{aligned} \Big\} +$$

$$\boxed{z_u = 3} \quad \boxed{z_v = 3}$$

$$\vec{u} = (1;3;3) \quad \vec{v} = (3;-1;3)$$

$$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

$$A = \|(12;6;-10)\|$$

$$A = \sqrt{(12)^2 + (6)^2 + (10)^2}$$

$$A = 2\sqrt{70}\ u^2$$

23 13
33

33
-1 3

1
44
36
100

Presente aquí su trabajo

b) $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$

$$\vec{c} = \|\vec{b}\|\,\vec{a} + \|\vec{a}\|\,\vec{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot(\|\vec{b}\|\vec{a} + \|\vec{a}\|\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot\|\,|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\|a\|^2\cdot\|\vec{b}\| + \|\vec{a}\|^2\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\,|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\|\vec{a}\|^2\cdot(\vec{b} + \|\vec{b}\|)}{\|\vec{a}\|\cdot\|\,|\vec{b}|\cdot\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{2\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\|}{\|\,|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{b}\cdot(\|\vec{b}\|\vec{a} + \|\vec{a}\|\vec{b})}{\|\vec{b}\|\;\|\,|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}$$

$$= \frac{\|\vec{b}\|^2\vec{a} + \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|^2}{\|\vec{b}\|\cdot\|\,|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}$$

$$= \frac{\|\vec{b}\|^2(\vec{a} + \|\vec{a}\|)}{\|\vec{b}\|\;\|\,|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}$$

igualiz

$$\boxed{\cos\beta = \frac{2\|\vec{b}\|\,\|\vec{a}\|}{\|\,|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\,\|}}$$

$\therefore\ \alpha = \beta$

8

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\vec{a} = (x_a ; y_a)$

$\vec{b} = (x_b ; y_b)$

$\sqrt{x_b^2 + y_b^2}\,(x_a ; y_a$

$+ \sqrt{x_a^2 + y_a^2}\,(x_b ;$

$(x_a\sqrt{x_b^2+y_b^2} + x_b\sqrt{x_a^2+}$

$x_a^2\sqrt{x_b^2+y_b^2} + x$

$\|A \times B\| = |A|\cdot|$

$\|A \times C\| = |A|\cdot|$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\cos\alpha \cdot \frac{\overline{a}\cdot\overline{c}}{|a|\cdot|c|}$

$\cos\beta = \frac{\overline{b}\cdot\overline{c}}{|b|\cdot|c|}$

$\overline{C}$

$y_a\sqrt{x_b^2+y_b^2} + y_b\sqrt{x_{a}^2+}$

$\sqrt{x_a^2+y_a^2} + y^2 a\sqrt{x_b^2+y_b^2}+$

sen α

5) $\vec{u} = (1;5;1)$ $O(1;0;1)$

$\vec{v} = (-2;6;2)$ $B(1;7;6)$

$\vec{u} = A - O$

$(1;5;1) = A - (1;0;1)$

$\boxed{A = (2;5;2)}$

$\vec{u} = \overrightarrow{CB}$

$(1;5;1) = B - C$

$(1;5;1) = (1;7;6) - C$

$\boxed{C = (0;2;5)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{CE}$

$(-2;6;2) = E - (0;2;5)$

$\boxed{E = (-2;8;7)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OD}$

$(-2;6;2) = D - (1;0;1)$

$\boxed{D = (-1;6;3)}$