ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Segunda Práctica Calificada

Semestre Académico 2018-1

Horario: B125, 0113, 0114, 0116 a 0122, 0124 a 0126 (Turno 2) Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

---

1. Dada la ecuación $\mathscr{E}: 4x(x-4)+16(y^2-3)=0$, esboce la gráfica de $\mathscr{E}$ indicando las coordenadas de sus vértices, focos y extremos del eje menor. (4 p.)

2. Los focos de una elipse $\mathscr{E}$ cuyo eje focal es paralelo al eje X están en las rectas $\mathscr{L}_1: y = x-8$ y $\mathscr{L}_2: y=-x+8$, uno en cada recta. Uno de los vértices de $\mathscr{E}$ es el punto $V_1 = (8-\sqrt{20}, 4)$. Halle la ecuación de $\mathscr{E}$. (4 p.)

3. Halle la ecuación de la parábola que pasa por los focos de la elipse $\mathscr{E}: \dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{(y+3)^2}{20} = 1$, tiene directriz $\mathscr{D}: x = 3$ y la abscisa de su vértice es positiva. Además, esboce la gráfica de la parábola. (4 p.)

4. Una circunferencia $\mathscr{C}$ pasa por el punto P que es intersección de las rectas $\mathscr{L}_1: 4x+3y-33=0$ y $\mathscr{L}_2: x+2y-7=0$. El centro de $\mathscr{C}$ está en $\mathscr{L}_2$ y el segmento PQ es una cuerda de longitud 10 unidades, con Q en $\mathscr{L}_1$. Halle:

   a) las coordenadas de Q cuya abscisa es menor que 5. (2 p.)

   b) la ecuación de $\mathscr{C}$. (2 p.)

5. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ circunferencias tangentes exteriores que se intersectan en el punto $M = (3,5)$, con radios $\sqrt{5}$ y r_2, respectivamente. La recta $\mathscr{L}: x-2y+3=0$ es tangente solamente a $\mathscr{C}_2$ en el punto $T = (7,5)$. Halle las ecuaciones de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. (4 p.)

San Miguel, 16 de abril de 2018.

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII | PUCP

Año: 2018 Número: 1460

Código de alumno

ENTREGADO 25 ABR. 2018

Práctica

Yesán Vásquez, José Andrés

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica Nº: 2

Horario de práctica: P-124

Fecha: 16/04/2018

Nombre del profesor: J. FLORES

Nota

19

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) EDJ

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcridad posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posible.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Setiembre 2017

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$4(x^2-4x+4)$

$4(x-2)^2$

Desarrollo: pregunta 1: Sol

$\mathcal{E}: 4x(x-4)+16(y^2-3)=0$

$= 4x^2-16x+16y^2-48=0$

$= 4x^2-16x+16+16y^2-48=16$

$= 4(x-2)^2+16y^2=64$

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

4?

$\mathcal{E}=\dfrac{(x-2)^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1 \overset{Si}{\Leftrightarrow} \mathcal{E}=\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Como $a>b \Rightarrow \ell_{Focal} // \ell_{y=0}$

$\Rightarrow a=4 \wedge C_0=(h;k)=(2;0)$

$b=2$

$\Rightarrow c=\sqrt{4^2-2^2}$

$c=\sqrt{12}$

$c=2\sqrt{3}$

Como $C_0=(h;k)$

$\Rightarrow V_1=(h-a;k)$

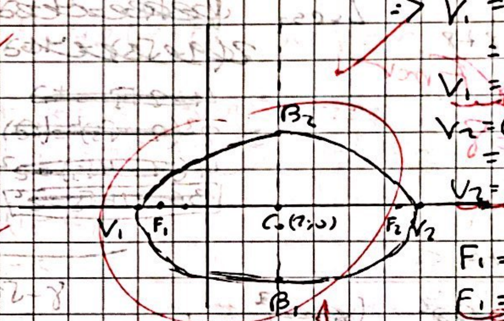
$=(2-4;0)$

$V_1=(-2;0)$

$V_2=(h+a;k)$

$=(2+4;0)$

$V_2=(6;0)$



$B_1=(h;k-b)$

$=(2;0-2)$

$B_1=(2;-2)$

$B_2=(h;k+b)$

$=(2;0+2)$

$B_2=(2;2)$

$C_0=(2;0)$

$F_1=(h-c;k)$

$F_1=(2-2\sqrt{3};0)$

$F_2=(h+c;k)$

$F_2=(2+2\sqrt{3};0)$

Colocar los puntos en el gráfico

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 2: Sol De $\mathcal{E}$

$\mathcal{L}_{eje\ Focal} // \mathcal{L}_{y=0} \Rightarrow a$ esta debajo de x

$\Rightarrow \mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Si $C_0 = (h;k)$

32

Luego:

$F_1 \in \mathcal{L}_1: y = x - 8$ pero $F_1 = (h-c; k)$ $\wedge F_2 \in \mathcal{L}_2: y = -x+8$ pero $F_2 = (h+c; k)$

$k = h - c + 8$; $-4 = h - c$; $k = -h - c - 8$; $12 = -h - c \Rightarrow h + c = -12$

$\Rightarrow k = h + c + 8$; $4 - h + c - 8$; $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow k + c = h + 8 = -h - 8$ 4

$\boxed{c = 8}$

$F_1(4; 4)$; $h - c = 4$; $h = 8$

$F_2(12; 4)$; $h + c = 12$; $2h = 16$; $\boxed{c = 4}$

$C = 4$ y $a = \sqrt{20}$

b

$b = 2$

Despues $V_1 = (8 - \sqrt{20}; 4)$ pero $V_1 = (h \pm a; k)$

$\Rightarrow \boxed{k = 4}$

$\Rightarrow 4 = h - 8 + 8$

$\boxed{h = 8}$ Error

$h = 8$

Luego ~~[illegible]~~ $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

~~[illegible]~~

$36 - 16\sqrt{5} - 64 = b^2$

~~[illegible]~~

$\boxed{28 - 16\sqrt{5} = b^2}$

$\Rightarrow a^2 ~~(2-\sqrt{5})^2 = (\pm a)^2~~$

~~$4(7 - 4\sqrt{5}) = a^2$~~

$\boxed{~~36 - 16\sqrt{5} = a^2~~}$

Finalmente

$8 - \sqrt{20} = h \pm a$

$16 - \sqrt{20} = \pm a$

$16 - 2\sqrt{5}$

$(2(8-\sqrt{5}))^2 = (\pm a)^2$

$4(8-\sqrt{5})^2 = a^2$

$\boxed{4(69 - 16\sqrt{5}) = a^2}$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$276 - 64\sqrt{5} - 16 = b^2$

$260 - 64\sqrt{5} = b^2$

~~$\mathcal{E}: \frac{(\ )^2}{\ } + \frac{(\ )^2}{\ } = 1$~~

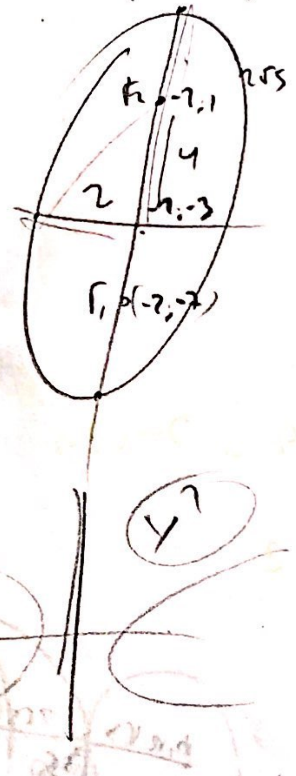
$\mathcal{E}: \frac{(x+8)^2}{276 - 64\sqrt{5}} + \frac{(y-4)^2}{260 - 64\sqrt{5}} = 1$

$\frac{(x-8)^2}{20} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

Arrastra Error

2

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



Presente aquí su trabajo

Pregunta 3: Sol

Si $\mathcal{E}: \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1 \Rightarrow C_0=(h;k)$

$C_0=(-2;-3)$

$a=2\sqrt{5}$ $\quad a^2=b^2+c^2$

$b=2$ $\quad c=4$

$\Rightarrow c=4$

$\Rightarrow F_1=(h;k-c)$

$F_1=(-2;-3-4)$

$F_1=(-2;-7)$

$F_2=(h;k+c)$

$F_2=(-2;-3+4)$

$F_2=(-2;1)$

Luego de $\mathcal{P}$:

$F_1 \wedge F_2 \in \mathcal{P} \wedge \mathcal{L}_D: x=3 \Rightarrow \mathcal{L}_D // \mathcal{L}_{x=0}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{eje\ focal} // \mathcal{L}_{y=0}$

$\Rightarrow \mathcal{P}: (y-k)^2=4p(x-h)$ si $V=(h;k) \wedge h>0$

$\Rightarrow 4p = \frac{(y-k)^2}{(x-h)} = \frac{(-7-k)^2}{(-2-h)} = \frac{(1-k)^2}{(-2-h)}$ $\quad$ De $\mathcal{L}_D$:

$\mathcal{L}_D: x=h-p=3$

$h=p+3$

$h-3=p$

$\Rightarrow$ En $\mathcal{P}$:

$\Rightarrow (-7-k)^2=(1-k)^2$

$|-7-k|=|1-k|$

$\Rightarrow -7-k=1-k$ $\quad \vee \quad 7+k=1-k$

$-7=1 \to$ Absurdo $\quad 2k=-6$

$\boxed{k=-3}$

$\mathcal{P}: (-7+3)^2=4(h-3)(-2-h)$

$-4=(h-3)(2+h)$

$-4=h^2-h-6$

$0=h^2-h-2$

$\quad h \quad -2$

$\quad h \quad 1$

$\Rightarrow 0=(h-2)(h+1)$

$\Rightarrow h_1=2 \quad h_2=-1$

Pero como $h>0$

$\Rightarrow h=2$

$\Rightarrow p=-1$

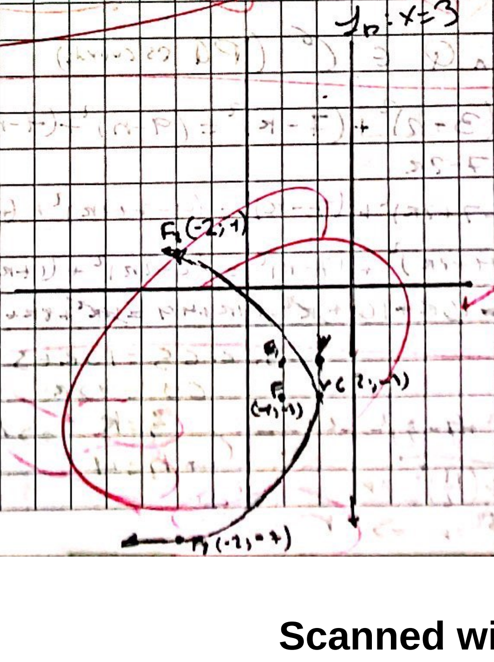
Además

$F=(h+p;k)$

$F=(1;-3)$

Finalmente:

$$\boxed{\mathcal{P}: (y+3)^2=-4(x-2)}$$



Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 4: Sol

$\Rightarrow P \in \mathcal{L}_1 \wedge \mathcal{L}_2 \Rightarrow P = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

$\Rightarrow S: \mathcal{L}_1: 4x+3y-33=0 \wedge \mathcal{L}_1: x+2y-7=0$

Resolviendo:

$4(7-2y)+3y-33=0 \quad \Rightarrow P=(9;-1)$

$28-8y+3y-33=0$

$-5y=5$

$y=-1$

$x=9$

Luego: Sea:

$\mathcal{C}_1: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde $C_0=(h;k)$

$C_0 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow h+2k-7=0$

$h=7-2k$

Además $d(\overline{P,Q})=10$ Si: $Q=(x_1;y_1)$

$\Rightarrow 10^2=(9-x_1)^2+(-1-y_1)^2$

pero $Q\in\mathcal{L}_1$

$\Rightarrow 4x_1+3y_1-33=0$

$\Rightarrow x_1=\frac{33-3y_1}{4}$

$\Rightarrow 100=\left(9+\frac{3y_1-33}{4}\right)^2+(1+y_1)^2$

$100=\frac{(3+3y_1)^2}{16}+(y_1+1)^2$

$1600=3^2(1+y_1)^2+16(y_1+1)^2$

$1600=25(y_1+1)^2$

$\left(\frac{40}{5}\right)^2=(y_1+1)^2$

$8^2=(y_1+1)^2 \Rightarrow |y_1+1|=8 \Rightarrow y_1=7 \quad y_2=-9$

$\Rightarrow x_1=3 \quad x_2=15$

Finalmente

$\mathcal{C}_1: (x-4)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$

$\Rightarrow$ a) Si: $x_1<5$

$\Rightarrow x_1=3 \wedge y_1=7 \Rightarrow Q=(3;7)$

b) Si $P \wedge Q \in \mathcal{C}$ ($\overline{PQ}$ es cuerda)

$\Rightarrow r^2=(3-h)^2+(7-k)^2=(9-h)^2+(-1-k)^2$

pero $h=7-2k$

$\Rightarrow (3-7+2k)^2+(7-k)^2=(9-7+2k)^2+(1+k)^2$

$(-4+2k)^2+(7-k)^2=(2+2k)^2+(1+k)^2$

$\cancel{4k^2}-16k+16+\cancel{k^2}-14k+49=\cancel{4k^2}+8k+4+\cancel{k^2}+2k+1$

$-30k+65=10k+5$

$60=40k$

$(3-4)^2+\left(7-\frac{3}{2}\right)^2=r^2 \Leftarrow \frac{3}{2}=k \Rightarrow h=7-2\left(\frac{3}{2}\right)$

$h=4$

$\sqrt{1+\left(\frac{11}{2}\right)^2}=r$

$\sqrt{\frac{125}{4}}=r \Rightarrow r=\frac{5}{2}\sqrt{5}$

3.5

4

¿Eje ⊥ Es ⊥ Circunf?

Es ⊥?

h,k $r\sqrt{5}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

Pregunta 5: Sol

Sean:

$\mathcal{C}_1 : (x-h_1)^2 + (y-k_1)^2 = r_1^2$ con $C_{o_1} = (h_1; k_1)$ $\wedge$ $\mathcal{C}_2 : (x-h_2)^2 + (y-k_2)^2 = r_2^2$ $C_{o_2} = (h_2; k_2)$

Por dato

$r_1 = \sqrt{5}$.

Además

Si $\mathcal{L} : x - 2y + 3 = 0$ es tangente a $\mathcal{C}_2$ en $T = (7; 5)$

$\Rightarrow T \in \mathcal{L} \wedge \mathcal{C}$

$\Rightarrow d(C_{o_2}; \mathcal{L}) = d(C_{o_2}; T) = r_2$

$\Rightarrow r_2 = \dfrac{|h_2 - 2k_2 + 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(7-h_2)^2 + (5-k_2)^2}$

$\Rightarrow r_2^2 = \dfrac{(h_2 - 2k_2 + 3)^2}{5} = (7-h_2)^2 + (5-k_2)^2$

Pero $\mathcal{L}_{d(C_{o_2};T)} \perp \mathcal{L}$

$\Rightarrow m_{\mathcal{L}} = \dfrac{-1}{m_r}$

pero $m_{\mathcal{L}} = 1/2$

$\Rightarrow m_r = -2$

Y como $T \in \mathcal{L}_r$

$\Rightarrow \mathcal{L}_r = \mathcal{L}_{d(C_{o_2};T)}$

$= (y - 5) = -2(x-7)$

$y = -2x + 19$

$\wedge$ $C_{o_2} \in \mathcal{L}_r$

$\Rightarrow k_2 = -2h_2 + 19$

Reemplazando:

$r_2^2 = (h_2 - 2(-2h_2 + 19) + 3)^2 = (7 - h_2)^2 + (5 + 2h_2 - 19)^2$

$= (h_2 + 4h_2 - 38 + 3)^2 = (7 - h_2)^2 + (2h_2 - 14)^2$

$= (5h_2 - 35)^2 = (h_2 - 7)^2 + 4(h_2 - 7)^2$

Ahora: se verifica ✓

Pero $M \in \mathcal{C}_2$

$\Rightarrow r_2^2 = (3-h_2)^2 + (5-k_2)^2 = (7-h_2)^2 + (5-k_2)^2$

$\Rightarrow (3-h_2)^2 = (7-h_2)^2$

$|3-h_2| = 7 - h_2$ $\vee$ $3 - h_2 = h_2 - 7$

$\Rightarrow 3 - \cancel{h_2} = 7 - \cancel{h_2}$ $\quad 10 = 2h_2$

$3 \neq 7$ → Absurdo $\quad h_2 = 5$

$3 = 7$ $\quad k_2 = 9$

4

Finalmente:

$\boxed{\mathcal{C}_1 : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5}$

$\Rightarrow r_2 = \dfrac{|5 - 2(9) + 3|}{\sqrt{5}}$

$r_2 = \dfrac{|8 - 18|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} = r_2$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_2 : (x-5)^2 + (y-9)^2 = 20}$

Después:

Si $M \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow (3-h_1)^2 + (5-k_1)^2 = 5$

Además

$d(C_{o_1}, C_{o_2}) = r_1 + r_2 = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\dfrac{d(C_{o_1}, M)}{d(M; C_{o_2})} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow x_M = \dfrac{h_1 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = 3$ $\quad y_M = \dfrac{k_1 + \frac{1}{2} \cdot 9}{1 + \frac{1}{2}} = 5$

$h_1 + \frac{5}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2}$ $\quad k_1 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$

$\boxed{h_1 = +2}$ $\quad \boxed{k_1 = 3}$