ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

EXAMEN FINAL - PARTE II

SEMESTRE ACADÉMICO 2020 -1

Horario: Todos

Elaborado por todos los profesores

Parte II: Entrega de Soluciones Desarrolladas

1. a) Considere la función

$$f(x)=\begin{cases} x-2k, & 0\le x\le 2\,; \\ 5\ln(x-2), & 2+\frac{1}{e}<x<2+e\,; \\ 3k-\arctan(x-2-e), & x\ge 2+e\,. \end{cases}$$

Donde k es una constante.
Halle el conjunto de valores de k para los cuales f es inyectiva. (2p)

b) Sea $a\in\mathbb{R}-\{0,1\}$. Calcule la siguiente suma en términos de a y de n: (2p)

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\binom{n}{k}\left(a^{k+1}-1\right)^2+a^{-k}\right]$$

2. a) Demuestre que $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\le(n+1)!$, para todo entero positivo n. (2p)
Sugerencia: Use Inducción matemática.

b) Sean θ un número real, $p_0=1$, $p_1=\cos(\theta)$ y

$$p_{n+1}=2p_n\cos(\theta)-p_{n-1},\ \text{para todo entero } n\ge 1.$$

Demuestre que $p_n=\cos(n\theta)$ para todo entero $n\ge 0$. (2p)
Sugerencia: Use Inducción matemática.

3. Determine la veracidad o la falsedad de las siguientes proposiciones.

a) La función definida por $p(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-4x}$ es creciente en $]-\infty,2]$. (1p)

b) Si la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es inyectiva, $f(-1)=-1$ y $f(2)=2$, entonces la función $g(x)=(f(x))^2$ no es inyectiva. (1p)

San Miguel, 22 de Julio de 2020.

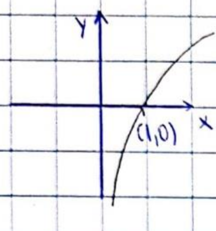
Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

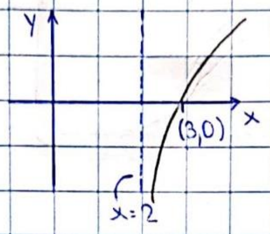
1) a)

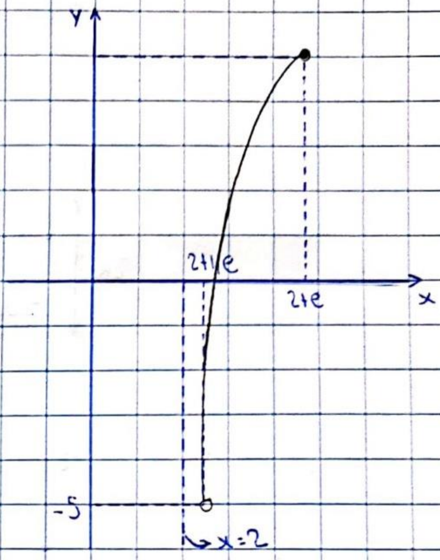
$$\begin{cases} x-2k, & 0 \leq x \leq 2 \\ 5\ln(x-2), & 2+1/e < x < 2+e \\ 3k-\arctan(x-2-e), & x \geq 2+e \end{cases}$$

- $5\ln(x-2)$:

$$\ln(x) \xrightarrow{-2 \text{ en } x} \ln(x-2) \xrightarrow{\cdot 5 \text{ en } y} 5\ln(x-2)$$

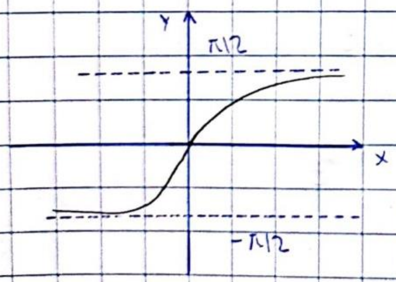


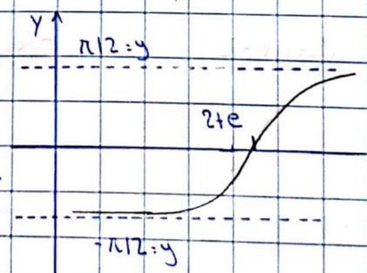


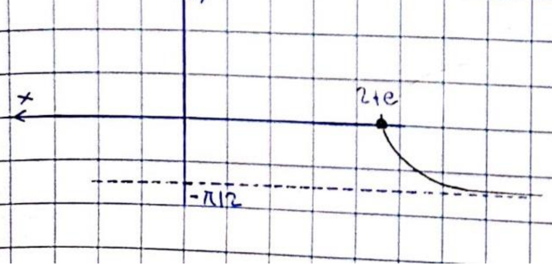


- $-\arctan(x-2-e)$:

$$\arctan(x) \xrightarrow{-2-e \text{ en } x} \arctan(+x-2-e) \rightarrow -\arctan(x-2-e)$$

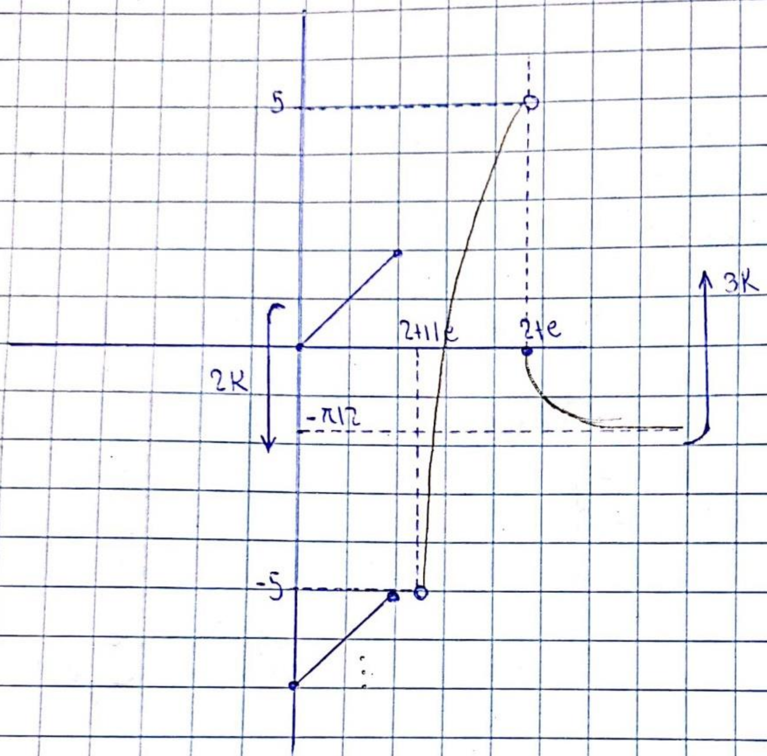






Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

cuando $k>0$:



· localmente, los tres tramos son inyectivos; para comprobar que es totalmente inyectiva, los rangos no se deben interceptar :

$$2-2k \leq 5\ln(2+1/e-2) \qquad -\pi/2+3k \geq 5$$

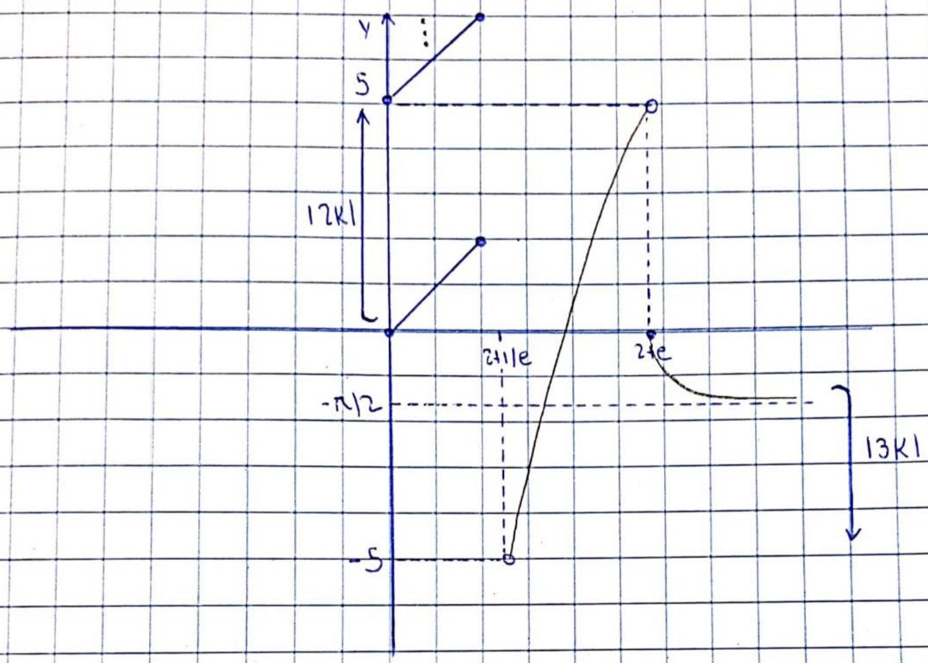
$$2-2k \leq -5 \qquad k \geq \frac{5+\frac{\pi}{2}}{3}$$

$$\boxed{7/2 \leq k}$$

$$k \geq 7/2$$

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

- Cuando $K < 0$



- Para probar la inyectividad global, los rangos no deben interceptarse:

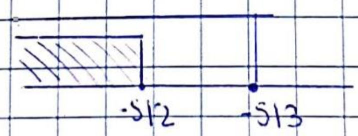
$-2K \geq 5 . \ln(2+e-2)$

$-2K \geq 5$

$K \leq -5/2$

$3K - \arctan(2+e-2-e) \leq -5$

$K \leq -5/3$



; $K \leq -5/2$

- Por último, interceptamos todos los intervalos obtenidos

Rpta: $k \in \left]-\infty, \frac{-5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

b) $$\sum_{k=2}^{n}\left[\binom{n}{k}\left(a^{2k+2}-2a^{k+1}+1\right)+a^{-k}\right]$$

$$=\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}a^{2k}\cdot a^{2}}_{\mathrm{I}}-\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2a\cdot a^{k}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}}_{\mathrm{III}}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{k}}_{\mathrm{IV}}$$

Para I : $$a^{2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{2k}=a^{2}\cdot\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot(a^{2})^{k}$$

$$=a^{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot(a^{2})^{k}-1-a^{2}n\right]$$

cuando $k=1$
$$(1\cdot a^{2})\cdot\frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)}!}=a^{2}n$$

cuando $k=0$
$$(1\cdot 1)\frac{n!}{0\cdot n!}=1$$

$$=a^{2}\left((1+a^{2})^{n}-1-na^{2}\right) \text{ — (I)}$$

Para II : $$-2a\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot a^{k}=-2a\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot a^{k}\underbrace{-1}_{*}-\underbrace{na}_{**}\right]$$

$*$: cuando $k=0$: $(1\cdot 1)\cdot\frac{n!}{0\cdot n!}=1$

$**$: cuando $k=1$: $(1\cdot a)\cdot\frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)}!}=an$

$$=-2a\left((1+a)^{n}-1-na\right) \text{ — (II)}$$

Para III : $$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{-1}_{*}-\underbrace{n}_{**}=(2^{n}-1-n) \text{ — (III)}$$

$*$: cuando $k=0$: $\frac{n!}{0\cdot n!}=1$

$**$: cuando $k=1$: $\frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)}!}=n$

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

Para IV: $\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{a}\right]^k = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{a}\right]^k - \left[\frac{1}{a}\right]^0 - \left[\frac{1}{a}\right]^1$

$= \frac{\frac{1}{a^{n+1}} - 1}{\frac{1-a}{a}} - 1 - \frac{1}{a} = \frac{1-a^{n+1}}{a^n \cdot \cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{1-a} - 1 - \frac{1}{a}$

$= \frac{1-a^{n+1}}{a^n - a^{n+1}} - \left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{a^n - a}{a^{n+1}(a-1)}$ — (IV)

Rpta: $a^2\left((1+a^2)^n - 1 - na^2\right) - 2a\left((1+a)^n - 1 - na\right) + (2^n - 1 - n) + \frac{a^n - a}{a^{n+1}(a-1)}$ //

2) a) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq (n+1)!$, para todo entero positivo n

· Primer paso, para $n=1 \longrightarrow \frac{2!}{1} \leq 2! \longrightarrow 2! = 2!$ ✓

· Segundo paso $\frac{(2k!)}{(k!)^2} \leq (k+1)! \longrightarrow \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} \leq (k+2)!$

$\frac{(2k+2)!}{(2k+1)(2k+2)} \leq (k!)^2 \cdot (k+1) \cdot (k!) \longrightarrow \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} \leq (k+2) \cdot (k+1)!$

$(2k+2)! \leq (k+1) \cdot (k!)^3 \cdot (2k+1) \cdot 2(k+1) \longrightarrow (2k+2)! \leq (k+2)\left((k+1)!\right)^3$

$(2k+2)! \leq (k+1)^2 \cdot (k!)^3 (4k+2) \longrightarrow (2k+2)! \leq (k+2)\left[k! \cdot (k+1)\right]^3$

$(2k+2)! \leq \underbrace{(k+1)^2 \cdot (k!)^3}_{\text{(bloque)}} \cdot (4k+2) \longrightarrow (2k+2)! \leq (k!)^3 \cdot \underbrace{(k+1)^3}_{(1+k)(k+1)^2} \cdot (k+2)$

$\underbrace{(k+1)^2 \cdot (k!)^3}_{\text{bloque}}(1+k)(k+2)$

nos queda demostrar que $4k+2 \leq (1+k)(k+2)$
para poder aplicar la transitividad convenientemente:

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

Para que $4K+2 \leq (K+1)(K+2)$

$4K+2 \leq K^2+3K+2$

$0 \leq K^2-K$

$0 \leq K(K-1)$

0 1

, K debe estar en el intervalo $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, pero como tenemos de dato que K es entero positivo, entrará en el segundo intervalo y la condición siempre cumplirá.

Por transitividad: $(2K+2)! \leq (K+1)^2 (K!)^3 (4K+2) \wedge (K+1)^2 (K!)^3 (4K+2) \leq (K+1)^2 \cdot (K!)^3 \cdot (K+1) \cdot (K+2)$

$\therefore (2K+2)! \leq (K+1)^2 \cdot (K!)^3 (K+1)(K+2)$

queda demostrado

b) $p_n = \cos(n\theta)$ para todo entero $n \geq 0$

- Primer paso: $n=0 \longrightarrow 1 = \cos(0) \; ; \; 1 = 1$ ✓

- Segundo paso: $P_{K-1} = \cos((K-1)\theta) \longrightarrow P_{K+1} = \cos((K+1)\theta)$

Utilizaremos el dato para dale forma ($P_{n+1} = 2p_n(\cos\theta) - P_{n-1}$)

$$P_{K+1} = 2p_K \cdot \cos\theta - P_{K-1}$$

Reemplazando:

$$P_{K+1} = \underbrace{2\cos(K\theta)}_{p_K} \cdot \cos\theta - \underbrace{\cos((K-1)\theta)}_{P_{K-1}}$$

notamos que $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$P_{K+1} = \cos((K+1)\theta) + \cancel{\cos((K-1)\theta)} - \cancel{\cos((K-1)\theta)}$$

$$P_{K+1} = \cos((K+1)\theta)$$

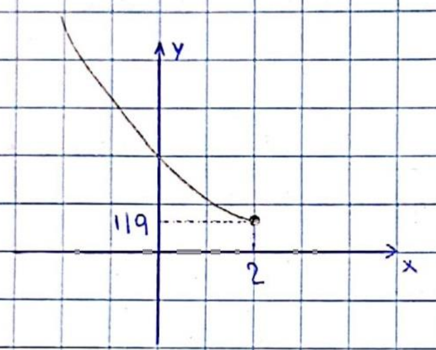
- obtuvimos, precisamente, lo que pretendíamos demostrar

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

3) a) $p(x) = \frac{1}{3}^{x^2-4x}$

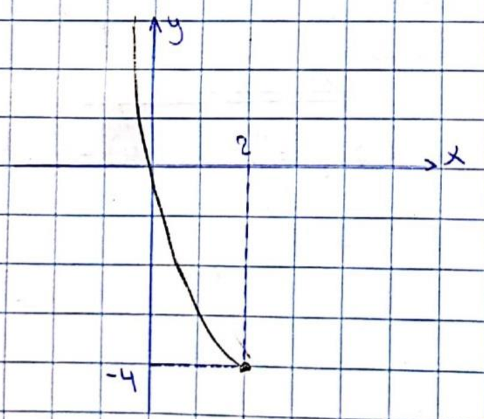
$\therefore f(x) = \left[\frac{1}{3}\right]^x \wedge g(x) = x^2-4x \longrightarrow p(x) = f((g(x)))$

* Analizaremos el comportamiento de la función $f(x)$



$f(x)$ es decreciente para el intervalo mencionado $(]-\infty, 2])$

* Analizaremos el comportamiento de la función $g(x)$



- $g(x) = (x-2)^2 - 4$
  $V(2,-4)$

- $g(x)$ también es decreciente para el intervalo mencionado

$x_1 < x_2 \longrightarrow g(x_1) > g(x_2)$
$f(g(x_1)) < f(g(x_2))$

; al componer dos funciones decrecientes obtendremos una función creciente.

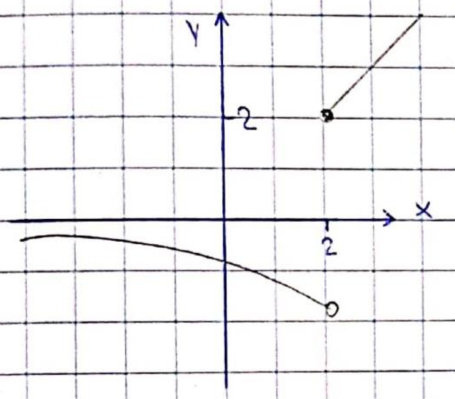
Rpta: Verdadero

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

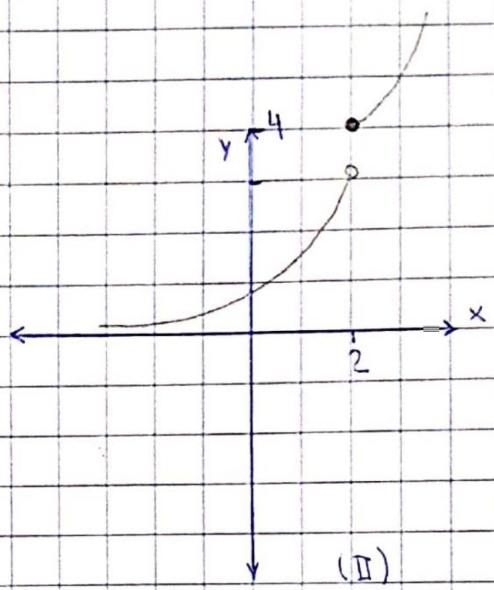
b) Por contraejemplo

$$f(x) \begin{cases} -3^{\frac{x+1}{6}} & , x < 2 \\ x & , x \geq 2 \end{cases} \quad \ldots (I)$$

$$(f(x))^2 \begin{cases} 3^{\frac{x+1}{3}} & , x < 2 \\ x^2 & , x \geq 2 \end{cases} \quad \ldots (II)$$



(I)



(II)

Analizando los gráficos, notamos que será inyectiva incluso después de elevarla al cuadrado; por lo tanto, quedó demostrado que es falso.

Rpta: Falso