FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

Solución del Examen Final

Semestre Académico 2022 -1

Horarios del Turno 1.

---

1. Sea la función f definida por **(4 ptos)**

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(-x+1), \quad x > 1.$$

a) Esboce la gráfica de f, indicando su asíntota. **(1.5 ptos)**

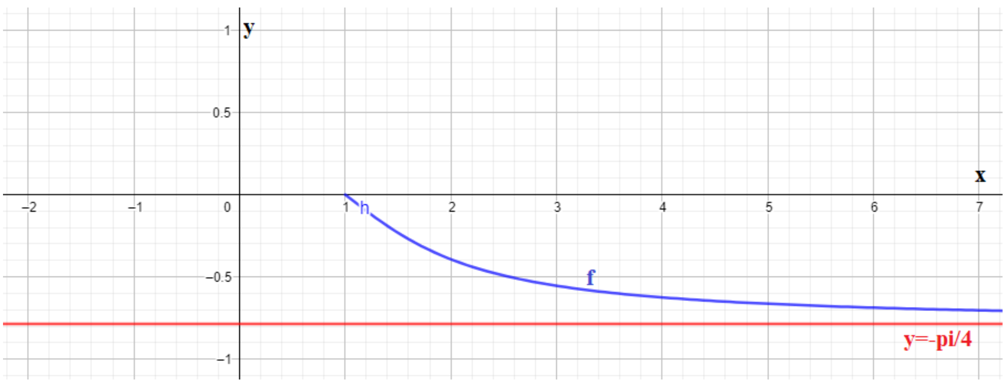
b) Halle su rango. **(0.5 ptos)**

c) Justifique que f es inyectiva. **(1 pto)**

d) Determine la regla de correspondencia de la función inversa de f, indicando su dominio. **(1 pto)**

Solución.

a) A partir de la gráfica de $y = \arctan(x)$, por transformaciones la gráfica de f y su asíntota horizontal $y = -\frac{\pi}{4}$.



b) Rango de f. De

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(-x+1) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{1}{2}\arctan(-x+1) < \frac{\pi}{4}$$

Ahora, si $x > 1$ entonces $R(f) =]-\frac{\pi}{4}, 0[$.

Nota. También lo puede hacer a partir de la gráfica de f.

c) Es f inyectiva. Para $a, b \in D(f)$ tal que $f(a) = f(b)$ entonces se prueba $a = b$.

Nota. También por el criterio dela recta horizontal en la gráfica de f.

d) Regla de correspondencia de f^{-1} y su dominio. Despejando x,

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\arctan(-x+1) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \tan(2x), \quad x \in]-\frac{\pi}{4}, 0[.$$

2. Halle el valor de los siguientes límites, si existen. Justifique su procedimiento.

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-16x}{2-\sqrt{x}}$. **(1 pto)**

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\frac{x\pi-2\pi}{1-x}\right)$ **(1.5 ptos)**

   c) $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{-\frac{1}{x^2-1}}$. **(1.5 ptos)**

   Solución.

   a) Multiplicando y dividiendo por $2+\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{(x^3-16x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = 128.$$

   b) Límite de la composición. Sea $t = \dfrac{x\pi-2\pi}{1-x}$.

$$\lim_{x\to +\infty} t = -\pi \Rightarrow \lim_{t\to -\pi} \cos(t) = -1$$

   c) Límite de la composición. Sea $u = -\dfrac{1}{x^2-1}$.

$$\lim_{x\to 1^+} u = -\infty \Rightarrow \lim_{u\to -\infty} e^u = 0.$$

3. En cada caso, justifique su respuesta. **(6 ptos)**

   a) Calcule en términos de n el valor de:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+3)}.$$

   b) Calcule en términos de n la suma

$$\sum_{k=2}^{n} \left[5k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - \frac{4}{n}k^2 \right]$$

   c) Sea $a_0, a_1, a_2 \cdots$ una sucesión de números reales. Si $a_0 = 0$ y para cada entero $n \geq 0$,

$$a_n + \frac{2}{a_{n+1}} = 3,$$

   pruebe, usando inducción, que $a_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$ para todo entero $n \geq 0$.

   Solución.

a) Suma telescópica. Equivalente

$$\frac{2}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+3)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}
\end{aligned}$$

b) Por la linealidad de la sumatoria

$$\sum_{k=2}^{n} \left[5k \binom{n}{k} - \frac{4}{n} k^2 \right] = 5 \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} - \frac{4}{n} \sum_{k=2}^{n} k^2$$

Por separado las sumatorias

$$\begin{aligned}
S_1 = 5 \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} &= 5n \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= 5n \left[\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} + 1 - 1 \right] \\
&= 5n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - 5n \\
&= 5n2^{n-1} - 5n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 = -\frac{4}{n} \sum_{k=2}^{n} k^2 &= -\frac{4}{n} \left[\sum_{k=2}^{n} k^2 + 1 - 1 \right] \\
&= -\frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{4}{n} \\
&= -\frac{2}{3}(n+1)(2n+1) + \frac{4}{n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=2}^{n} \left[5k \binom{n}{k} - \frac{4}{n} k^2 \right] = 5n2^{n-1} - 5n - \frac{2}{3}(n+1)(2n+1) + \frac{4}{n}.$$

c) Caso base: $n = 0$,

$$a_0 = 0 = \frac{2^{0+1} - 2}{2^{0+1} - 1}.$$

Hipótesis inductiva. Suponemos que se cumple para $n = k$, $a_k = \dfrac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1} - 1}, \quad k \geq 0.$

Por demostrar para $n = k + 1$. De

$$a_k + \frac{2}{a_{k+1}} = 3 \Rightarrow \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1} - 1} + \frac{2}{a_{k+1}} = 3$$

Despejando a_{k+1},

$$a_{k+1} = \frac{2^{k+2}-2}{2^{k+2}-1}.$$

Conclusión. Se cumplea $a_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}, \quad \forall n \geq 0.$

4. Sean $a > \frac{15}{4}$ y la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 0 \\ \\ -\log_2(x - \frac{15}{4}), & \frac{15}{4} < x < a. \end{cases}$$

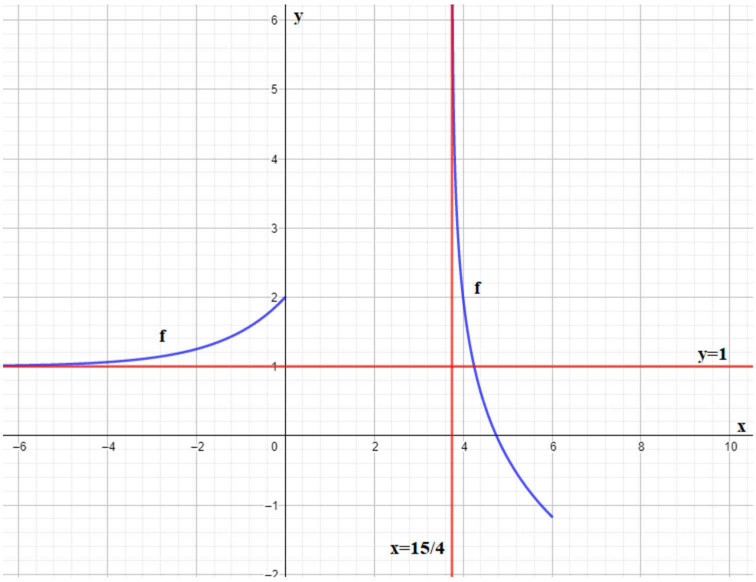
   a) Esboce la gráfica de f en el caso $a = 5$. **(1.5 ptos)**

   b) Para $a = 5$, determine el rango de f. Justifique. **(1 pto)**

   c) Halle el máximo valor de a de tal manera que f sea inyectiva. **(1.5 ptos)**

Solución.

a) Gráfica de f en el caso $a = 5$, asíntota horizontal $y = 0$ y asíntota vertical $x = \frac{15}{4}$.



Para $x = 5$ se tiene $f(5) = -\log_2(\frac{5}{4}) < 0$. Intersección con el eje x, $f(x) = 0 \Rightarrow -\log_2(x - \frac{15}{4}) = 0$. Resolviendo $x = \frac{19}{4} < 5$.

b) Rango de f para $a = 5$.

Para $\frac{15}{4} < x < 5 \Rightarrow]-\log_2(\frac{5}{4}), +\infty[$.

Para $x \leq 0 \Rightarrow]1, 2]$. Por lo tanto, $R(f) =]-\log_2(\frac{5}{4}), +\infty[$.

c) El máximo valor de a para que f sea inyectiva se da cuando

$$-\log_2(a - \frac{15}{4}) = 2$$

Resolviendo $a = 4$.

5. Dada la función $f(x) = \ln(1 - \operatorname{sen}(x))$, halle. **(2 ptos)**

   a) El dominio de f.

   b) Los valores de x donde f alcanza su valor máximo, si existen.

Solución.

a) Como $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \operatorname{sen}(x) \leq 2$. Para hallar el dominio de f se reduce a resolver las siguientes condiciones.

- $1 - \operatorname{sen}(x) > 0$
- $1 - \operatorname{sen}(x) \neq 0$. Resolvemos $1 - \operatorname{sen}(x) = 0$.

$$\operatorname{sen}(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) Como ln es creciente, el máximo valor de f se da cuando $1 - \operatorname{sen}(x)$ toma el máximo valor, es decir, $1 - \operatorname{sen}(x) = 2$.

Por lo tanto, $\ln(2) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = -1$. Existen infinitos puntos donde f alcanza su máximo.

$$\operatorname{sen}(x) = -1 \Rightarrow x = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

RWSG
San Miguel, 4 de julio de 2022