PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Álgebra Matricial y Geometría Analítica
Cuarta Práctica Calificada
(2017-1)

Indicaciones:

* No se permite usar apuntes de clase ni libros.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 1 hora y 50 minutos.

---

1. Analice y justifique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

   a) Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si $A^3 = 0$, entonces $(I - A)(I + A + A^2) = I$, donde I es la matriz identidad de orden n. (1 pt)

   b) Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sea B la matriz que se obtiene de A al efectuar las siguientes dos operaciones:
   - intercambiar las filas 1 y 3 de A
   - multiplicar por 5 la fila 2 de A.

   Entonces $\det(B) = -5^3 \cdot \det(A)$. (1 pt)

   c) Sean A y B dos matrices simétricas. Si AB es simétrica entonces $AB = BA$. (1 pt)

   d) Sean $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (c, d)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes, entonces
   $$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0.$$
   (1 pt)

2. Sean A y B las matrices cuadradas de orden 3 dadas por:
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) Halle la matriz X que satisface la ecuación $2B^T + X = I + A^3$ (2 pts)

   b) Para la matriz X del ítem anterior halle el valor de $\det(X)$. (1 pt)

3. La traza de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se define como
   $$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$
   Sean M, B y B' las matrices cuadradas de orden 2 definidas por
   $$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \det(B) = 1.$$
   Pruebe que
   $$\operatorname{tr}(BMB') = \operatorname{tr}(M)$$
   (4 pts)

CONTINÚA...

4. Sea $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ el conjunto conformado por dos vectores unitarios $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (-b, a)$ de $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

   a) Pruebe que el conjunto S es linealmente independiente. (1 pt)

   b) Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que $\mathbf{w} = \text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$. (2 pts)

   c) ¿Es S una base de $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta. (1 pt)

5. Para $\theta \in \mathbb{R}$, definimos la matriz rotación R_θ de la siguiente manera

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   a) Demuestre que

$$R_\theta R_\beta = R_{\theta+\beta}$$

   (2 pts)

   b) Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un vector de $\mathbb{R}^2$. Denotamos por $R_\theta(\mathbf{u})$ el vector de $\mathbb{R}^2$ obtenido de multiplicar R_θ con $\mathbf{u}$ (pensando $\mathbf{u}$ como vector columna), esto es,

$$R_\theta(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\cos\theta - u_2\operatorname{sen}\theta \\ u_1\operatorname{sen}\theta + u_2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Sean $\mathbf{u} = (1, 1)$ y $\mathbf{v} = (-1, 1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Pruebe que $R_\theta(\mathbf{u})$ y $R_\theta(\mathbf{v})$ son linealmente independientes. (3 pts)

Práctica elaborada por los coordinadores del curso.
Turno: 17:00 - 19:00.

San Miguel, 15 de junio de 2017.