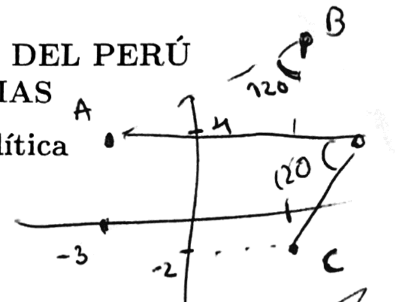
2017 0450 $\frac{tg^2\theta}{1}$ $\frac{tg - tg}{1 - tg}$ $\frac{2\,tg\theta}{1 - tg^2}$

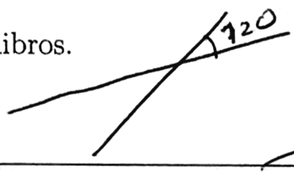
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

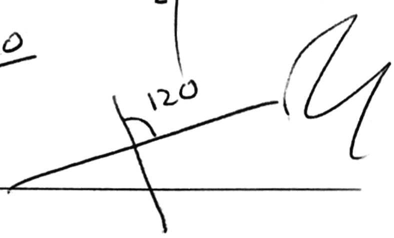


Algebra Matricial y Geometría Analítica
Primera Práctica Calificada
(2017-1)

Indicaciones:

* No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 1 hora y 50 minutos.





---

1. Los puntos $A(-3,4)$ y $C(3,-2)$ son vértices de un triángulo isósceles ABC con $\widehat{B} = 120°$. Sabiendo que el vértice B se encuentra en el primer cuadrante, halle las coordenadas de dicho vértice. (4 pts)

2. Considere las rectas $L : x - y + 1 = 0$ y $L' : 3x + 3y - 5 = 0$.

   a) Halle la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos P del plano cartesiano tales que $d(P, L) = 3d(P, L')$. (1,5 pts)

   b) Grafique el lugar geométrico obtenido en el item anterior. (2,5 pts)

3. Sea L la recta con ecuación $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ y sea L' una recta que pasa por el punto $A(0,4)$. Sabiendo que dichas rectas forman un ángulo de $60°$, halle la ecuación de la recta L'. ¿Cuántas soluciones existen? (4 pts)

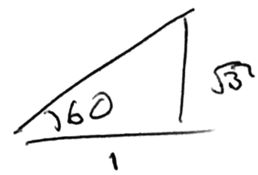
   9 3 $+\frac{64}{25}$ 225

4. Considere los puntos $A(-2,3)$, $B(4,3)$ y la recta $L : y = -2$.

   a) Halle la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta L. (2 pts)

   b) Sea $\mathcal{P}$ la parábola que pasa por los puntos A y B y cuya recta directriz es L. Sabiendo que su vértice V se encuentra en el primer cuadrante, halle la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$. (2 pts)

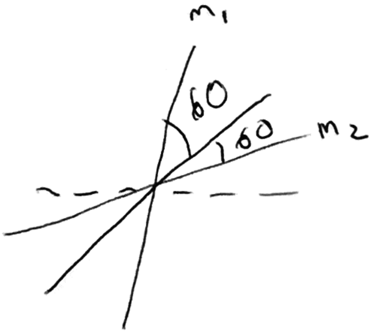
5. Sabiendo que los puntos $A(-2,0)$ y $B(2,4)$ son los extremos del lado recto de una parábola $\mathcal{P}$, halle el vértice de dicha parábola. ¿Cuántas soluciones existen? (4 pts)



Práctica elaborada por los coordinadores del curso.

San Miguel, 27 de abril del 2017.

$y = \sqrt{3}\,x + 1$



$m = \sqrt{3} = tg\theta \to \theta = 60°$

45 AÑOS Formación de excelencia

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

ENTREGADO 03 MAYO 2017

Práctica

Año				Número			
2	0	1	7	0	4	5	0

Código de alumno

Tapara Tejada Julio César

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica N°: 1

Horario de práctica: P_124

Fecha: 27/04/2016

Nombre del profesor: H. Neciosup

Nota

20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: EDJ
(iniciales)

INDICACIONES

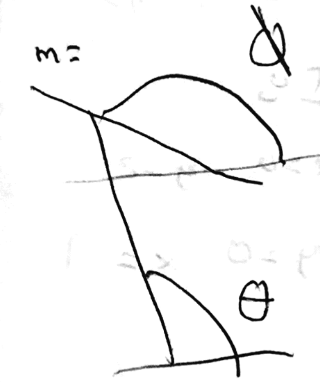
1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

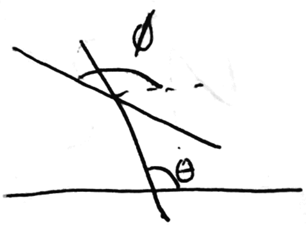
Presente aquí su trabajo

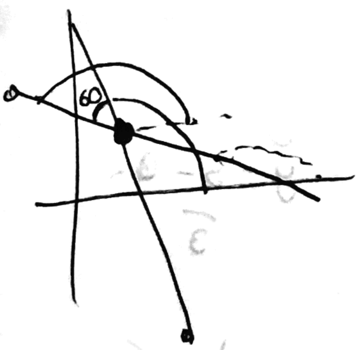
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$tg\,60 =$

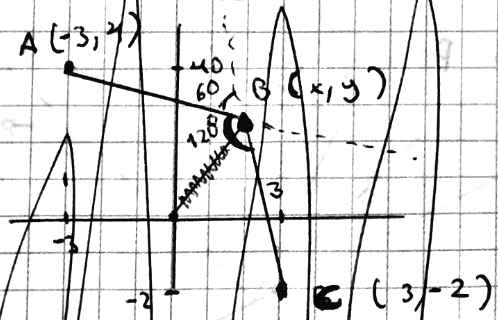
$m =$

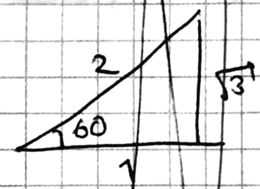






1.





$$tg\,60° = \frac{m(\overline{AB}) - m(\overline{BC})}{1 + m(\overline{AB}) \cdot m(\overline{BC})}$$

$$tg\,60° = \sqrt{3} = \frac{\frac{(-4+y)}{(+3+x)} - \frac{(y+2)}{(x-3)}}{1 + \frac{(-4+y)}{(+3+x)} \cdot \frac{(y+2)}{(x-3)}}$$

$\sqrt{3} =$

anulado x alumno

2. (a) $P(x,y)$ $\quad L: x-y+1=0 \quad L': 3x+3y-5=0$

$$d(P,L) = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} \qquad d(P,L') = \frac{|3x+3y-5|}{3\sqrt{2}}$$

$d(P,L) = 3d(P,L')$, entonces:

$$\frac{|x-y+1|}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{\cancel{3}\,|3x+3y-5|}{\cancel{3}\,\cancel{\sqrt{2}}}$$

a) 1,5

$$|x-y+1| = |3x+3y-5|$$

Se sabe que si $|a| = |b| \to b = a \lor b = -a$

$x-y+1 = 3x+3y-5 \qquad x-y+1 = -3x-3y+5$

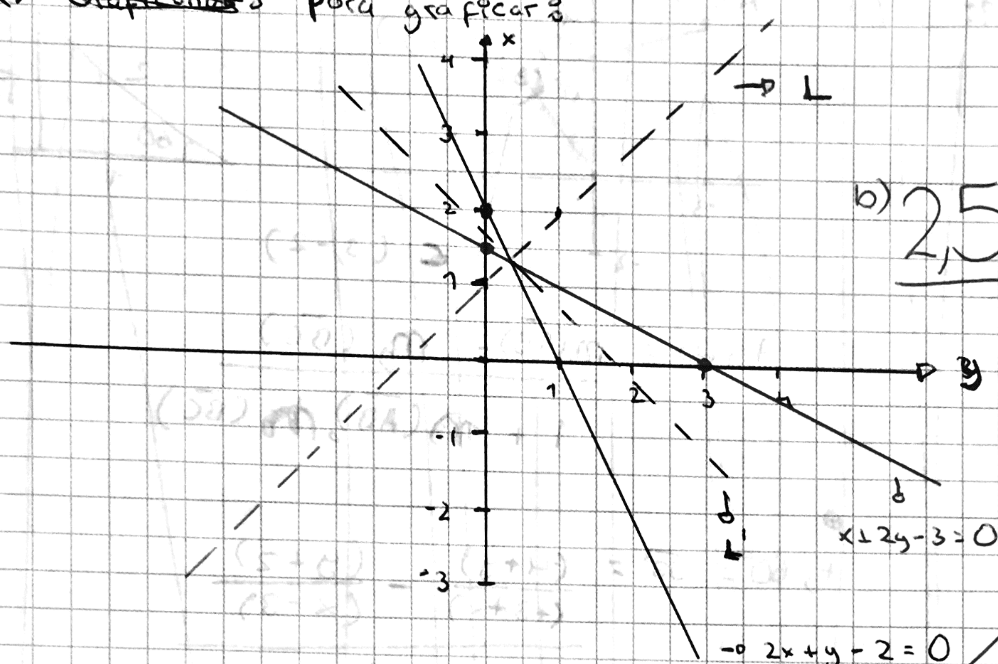
$2x+4y-6=0 \qquad 4x+2y-4=0$

$x+2y-3=0 \ (I) \qquad 2x+y-2=0 \ (II)$

Se obtienen dos rectas, las cuales son el lugar geométrico requerido.

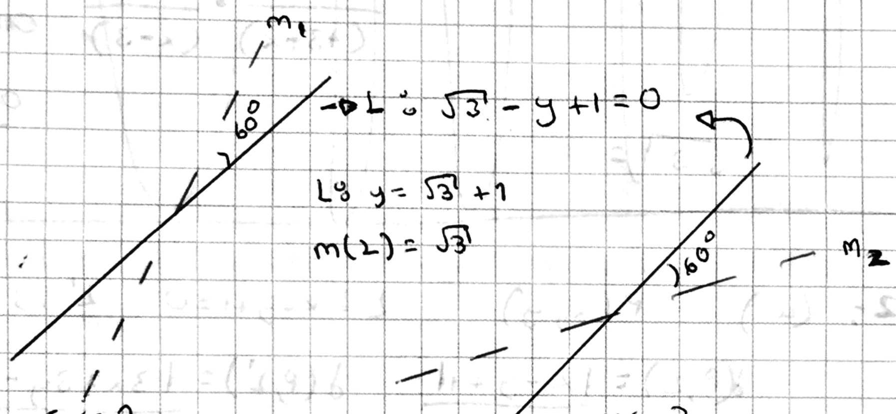
Presente aquí su trabajo

(b) ~~Graficando~~: Para graficar:



b) 2,5

3:



→ L: $\sqrt{3} - y + 1 = 0$

L: $y = \sqrt{3} + 1$

$m(L) = \sqrt{3}$

~~Para el caso 1:~~

$$\cancel{tg\,60 = \frac{m_1 - m(L)}{1 + m_1 \cdot m(L)}}$$

anulado x alumno

Para el caso 1:

$$m_1 = \frac{tg\,60 + m(L)}{1 - tg\,60° \cdot m(L)}$$

$$m_1 = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

Como el punto pasa por A (0,4):

L': $y - 4 = -\sqrt{3}\,x \rightarrow \boxed{\sqrt{3}\,x + y - 4 = 0}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

I:

$y=0 \quad x=3$

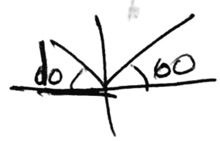
$x=0 \quad y=1{,}5$

II:

$x=0 \quad y=2$

$y=0 \quad x=1$

$y = 5 - \frac{x}{\sqrt{3}}$



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

4,0

Para el caso 2:

$$m_2 = \frac{m(\mathcal{L}) - tg\,60^\circ}{1 + m(\mathcal{L}) \cdot tg\,60^\circ}$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{0}{4} = 0$$

como pasa por el punto A (0,4):

$$y - 4 = 0 \cdot x \to \boxed{y = 4}$$

Existen dos posibilidades para $\mathcal{L}'$:

$\mathcal{L}'$: $\sqrt{3} + y - 4 = 0$ y $\mathcal{L}'$: $y = 4$

4.- (a) Sean (h, k) las coordenadas del centro de la circunferencia. Se cumple:

$$r^2 = \left(\sqrt{(h+2)^2 + (k-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(h-4)^2 + (k-3)^2}\right)^2$$

$$(h+2)^2 + \cancel{(k-3)^2} = (h-4)^2 + \cancel{(k-3)^2}$$

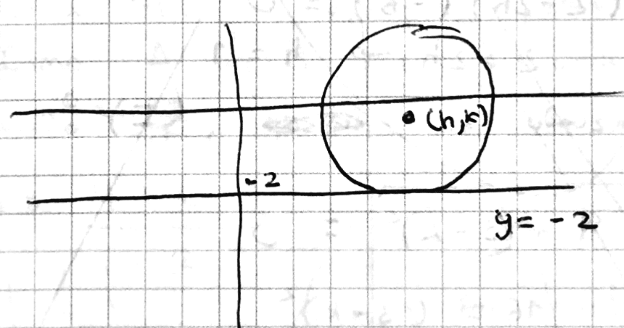
$$(h+2)^2 - (h-4)^2 = 0$$

$$(2h-2)\cancel{(6)} = 0$$

$$2h = 2$$

$$h = 1$$

Como es tangente a $y = -2$:



$$r = k - (-2) = k + 2 = \sqrt{(h+2)^2 + (k-3)^2}$$

$$(k+2)^2 = (3)^2 + (k-3)^2$$

$$(2k-1)(5) = 9$$

$$2k - 1 = 9/5 \to \boxed{k = \frac{7}{5}}$$

y $r = k + 2 = \frac{7}{5} + 2 = \frac{17}{5}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Para la ecuación:

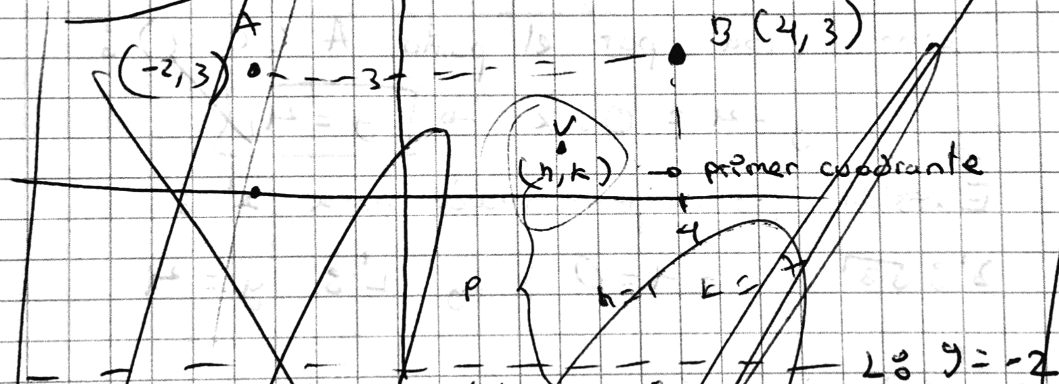
a) 2,0

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$\frac{284}{25} = (x-1)^2 + \left(y-\frac{7}{5}\right)^2$$

$3 - k = \pm 4$

b)



A 60°

120

Por definición de parábola:

$d(V,B) = d(B,L)$

$\sqrt{(4-h)^2 + (3-k)^2} = 5 \quad (I)$

$d(A,L) = d(A,V)$

anulado x alumno

$\sqrt{(-2-h)^2 + (3-k)^2} = 5 \quad (II)$

Igualando (I) y (II):

$(-2-h)^2 + \cancel{(3-k)^2} = (4-h)^2 + \cancel{(3-k)^2}$

$(-2-h)^2 - (4-h)^2 = 0$

$(2-2h)(-6) = 0$

m(A B) =

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

~~Ahora, $p = k-(-2) = 7+2 = 9$~~

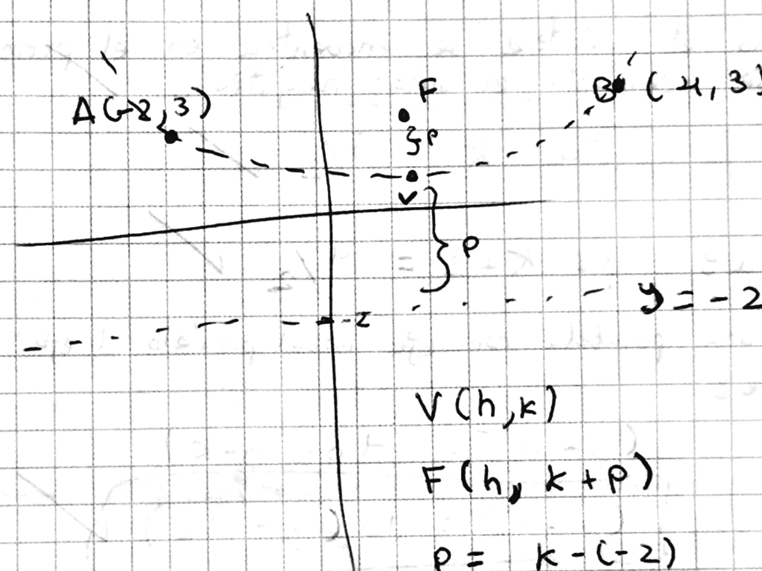
~~Para una parábola con eje focal paralelo al eje "y" se sabe que se cumple:~~

$$\cancel{4p(y-k) = (x-h)^2}$$

$$\cancel{\therefore\ 36(y-7) = (x-1)^2}$$

anulado

(b):



$V(h,k)$

$F(h, k+p)$

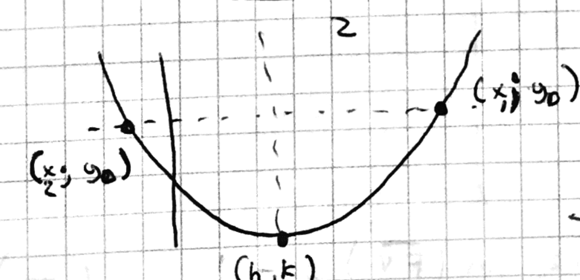
$p = k-(-2)$

$p = k+2$

$\therefore\ F(h,k+p) \equiv F(h, 2k+2)$

La parábola tiene un eje focal paralelo al eje "y". Como A y B contienen una misma coordenada "y", por simetría se sabe que:

$$h = \frac{4+(-2)}{2} = 1$$



Por simetría:

$$\boxed{h = \frac{x_1+x_2}{2}}$$

Por definición de parábola se sabe que:

$$d(A, \mathcal{L}) = d(A, F) \quad :$$

ø

, y)

C

m BC

0 m BC

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$d(A, L) = 3 - (-2) = 5 = \sqrt{(h+2)^2 + (2k-1)^2}$

Como $h = 1$:

$25 = 9 + (2k-1)^2$

$16 = (2k-1)^2$

$2k - 1 = \pm 4 \begin{cases} 2k = 5 \rightarrow k = 5/2 \\ 2k = -3 \rightarrow k = -3/2 \end{cases}$

Como el vértice se encuentra en el primer cuadrante, se descarta el valor negativo:

$\therefore \; k = 5/2$

b) 2,0

Ahora: $p = k + 2 = 9/2$

4, 3

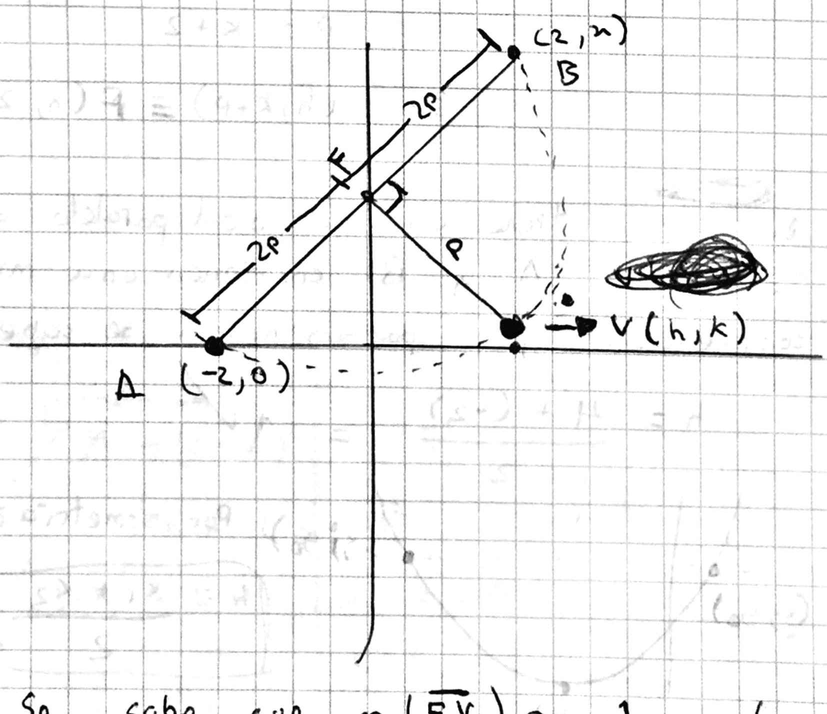
9

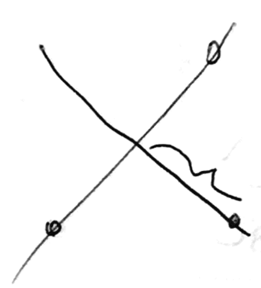
Para una parábola con eje focal paralelo al eje "y" se cumple:

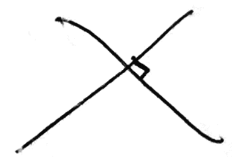
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$\therefore \; \boxed{(x-1)^2 = 18(y - 5/2)}$

S:







Se sabe que $m(\overline{FV}) = \dfrac{-1}{m(\overline{AB})}$ (I)

y que: $d(\overline{FA}) = 2d(\overline{FV})$ (II)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

Para (I):

Las coordenadas de F:

$x_F = \frac{-2+2}{2} = 0 \qquad y_F = \frac{4-0}{2} = 2$

$F(0, 2)$

$\cancel{m(\overline{FV}) \cdot m(\overline{AB})} =$

$$m(\overline{FV}) = \frac{2-k}{0-h} = \frac{-1}{\left(\frac{4-0}{2-(-2)}\right)}$$

$$\frac{2-k}{-h} = -1 \to \boxed{2-k = h}$$

$$\boxed{k = 2-h}$$

Para (II):

$$\left(\sqrt{(4-2)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{(h-0)^2+(k-2)^2}\right)^2$$

$$2\cancel{8} = \cancel{4}\left(h^2 + (k-2)^2\right)$$

$$2 = (2-k)^2 + (k-2)^2$$

$$\cancel{2} = \cancel{2}k^2 + \cancel{8}^{4} - \cancel{8}^{4}k$$

$$1 = k^2 + 4 - 4k$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$k \quad -1$
$k \quad -3$

$$\underbrace{(k-1)}_{k=1} \; \vee \; \underbrace{(k-3)}_{k=3} = 0$$

Si $k = 1 \to h = 1$
Si $k = 3 \to h = -1$
2 posibilidades

4,0

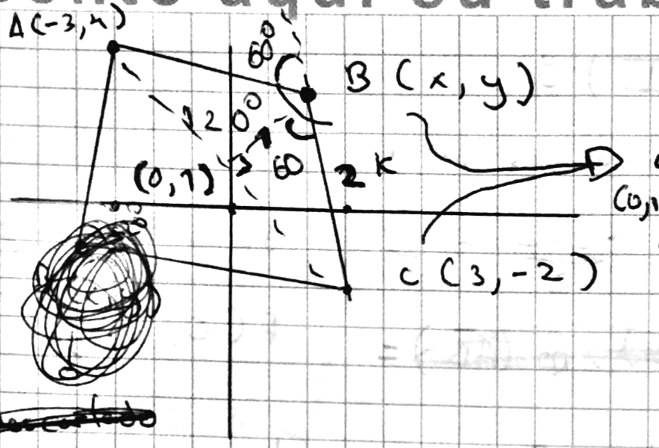
Existen dos posibilidades para el vértice:

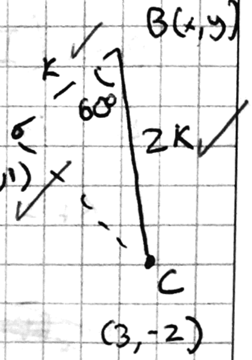
$$\boxed{V: (1, 1) \quad \vee \quad V: (-1, 3)}$$

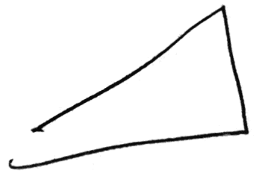
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1°:







~~lado~~

Como $\triangle ABC$ es isósceles, se deduce que

$$d(\overline{AB}) = d(\overline{BC}) \quad ó$$

bien la idea

$$\left(\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}\right)^2$$

3,5

$$(x+3)^2-(x-3)^2=(y+2)^2-(y-4)^2$$

$m(AB) = tg\,6$

$$(2x)(\cancel{6}) = (2y-2)(\cancel{6})$$

$$\boxed{x = y-2} \quad (I) \qquad \text{error} \qquad \boxed{X = y-1}$$

$$\frac{y-4}{y+1} = \qquad 1+\frac{7}{y-5}$$

$-5+7$

~~$m(AB) = \frac{y-4}{x+3}$ $\quad m(BC) = \frac{y+2}{x-3}$~~

$$tg60 = \frac{\frac{y-4}{y+1} - \frac{y+2}{y-5}}{1+\frac{(y-4)(y+2)}{(y+1)(y-5)}}$$

~~Reemplazando I: $m(\overline{AB}) = \frac{y-4}{y+1}$ $\quad m(\overline{BC}) = \frac{y+2}{y-5}$~~

~~Se sabe también que:~~

anulado

~~$m(AB) = \frac{tg 60° + m(\overline{BC})}{1 - tg 60°\cdot m(\overline{BC})}$ ó $tg60° = \frac{m(AB) - m(BC)}{1 + m(AB)m(BC)}$~~

$$0 - \frac{5}{y+1} - \frac{7}{y-5}$$

~~$\sqrt{3} = \frac{\left(\frac{y-4}{y+1}\right) - \left(\frac{y+2}{y-5}\right)}{1+\frac{(y-4)(y+2)}{(y+1)(y-5)}} = \frac{-\frac{5}{y+1} - \frac{7}{y-5}}{1+\frac{(y-4)}{(y+1)}\frac{(y+2)}{(y-5)}}$~~

$$x^2-3+2x=-x^2+4$$

$$2x^2+2x-7=0$$

$2x \quad 7$

$x \quad 1$

$$x^2-3+2x = 4-x^2$$

$$-2\pm\sqrt{4+8\cdot 56}$$

$$\frac{-2\pm 2\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{15}-1}{2}+\frac{4}{2}$$

Del gráfico:

$$2\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}$$

arrastra error

$$(2x)^2+(2y-2)^2 = (x-3)^2+(y+2)^2$$

$$(3x-3)(x+3) = (3y)(4-y) \quad \boxed{y = x+2} \quad (I)$$

$$(x-1)(x+3) = (x+2)(2-x)$$

$$2x^2+2x-7=0 \rightarrow \boxed{x = (\sqrt{15}-1)\cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)} \wedge y = (\sqrt{15}+3)\cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)}}$$