Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Tercera Práctica Calificada

Semestre Académico 2023-1

Horario: $A101$, $B101$, $B102$, $B103$, $I101$, $I102$, $I103$, $I104$, $I105$, 116, 117, 118 **(Turno 2)**

Duración: 110 minutos

numera x no esta definido

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

---

1. Considere los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$. Se tiene la siguiente información:

   - El vector $\vec{v}$ es paralelo y tiene el mismo sentido que el vector $(\sqrt{10};-1;3)$.
   - $\| \vec{v} \| = \sqrt{20}$.
   - $\vec{u} = (0;n;-2)$ y $\vec{w} = (n-4;1;2)$ con $n \in \mathbb{R}$.
   - El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ mide $\dfrac{\pi}{2}$.

   Se pide lo siguiente:

   a) Halle los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. **(2.5 pt)**

   b) Halle el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(2.5 pt)**

(1,1,0)

2. Considere el vector $\vec{v} = (1;3;3)$ y los puntos $A(-5;2;1)$, $B(-1;-2;1)$, C y $F(t;t;t-1)$, con $t \in \mathbb{R}$. Se sabe lo siguiente:

   (1,1,0) − (−5,2,1) = 6,−1,−1

   - $\overrightarrow{AF}$ es ortogonal al vector $\vec{v}$.
   - El punto C es de la forma $(x_c;0;-x_c)$.

   $\frac{\|A \times B\|}{2}$ B C A M

   a) Halle las coordenadas de F y calcule el área del triángulo ABF. **(2 pt)**

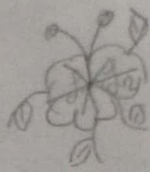
   b) Halle las coordenadas del punto C, si se sabe que el volumen del tetraedro $ABCM$ es $8u^3$, siendo F el punto medio de $\overline{AM}$ (2 soluciones). **(3 pt)**

   $2(F-A) = \vec{AM}$

   $x_c = -2,4$ $(-2,0,2)$

Nota. El volumen del tetraedro generado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual a la sexta parte del volumen del paralelepípedo generado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

(a,b,c)



3. Sean las rectas $\mathscr{L}_1 : P = (3;0;-1) + t(-1;2;3), t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : P = (-2;7;10) + r(1;1;1), r \in \mathbb{R}$.

   a) Halle las coordenadas del punto intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. **(2 pt)**

   b) Halle la ecuación de la recta que es perpendicular tanto a $\mathscr{L}_1$ como a $\mathscr{L}_2$ y que pasa por el punto hallado en el apartado a). **(2 pt)**

   c) Halle la ecuación vectorial de una recta $\mathscr{L}_3$, que sea paralela y distinta a $\mathscr{L}_2$, y que corte a la recta $\mathscr{L}_1$ en un solo punto. **(1 pt)**

4. Analice y justifique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

   a) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$. Al realizar la siguiente operación

   $$proy_{\vec{u}}(\vec{u} \times \vec{v}) + proy_{\vec{u}}(\vec{u})$$ V

   se obtiene el vector $\vec{u}$. **(2.5 pt)**

   b) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ tal que $||\vec{u}|| = 2$ y $||\vec{v}|| = 6$. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son ortogonales, entonces

   $$||(\vec{u} - \vec{v}) \times (2\vec{u} + 3\vec{v})|| = 12.$$ F

   (2.5 pt)

Coordinador de prácticas: José Flores

San Miguel, 5 de junio de 2023.

Año: 2023 Número: 2326

Código de alumno

Práctica

Quijano Quezada Kate Arocelly

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: ANGA

Práctica Nº: ~~RAMA~~ PC3

Horario de práctica: ~~[illegible]~~ P-117

Fecha: 05/06/23

Nombre del profesor: J. Crisóstomo

Nota: 18

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) WY

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

cálculos y desarrollos
(borrador)

1. a) $\vec{V} = \lambda(\sqrt{10}, -1, 3)$

1a) 2,5ptos

$\vec{V} = (\lambda\sqrt{10}, -\lambda, 3\lambda)$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{(\sqrt{10}\lambda)^2 + (-\lambda^2) + (3\lambda)^2}$

$(\sqrt{20})^2 = 10\lambda^2 + \lambda^2 + 9\lambda^2$

$\sqrt{20} = \sqrt{20\lambda^2}$

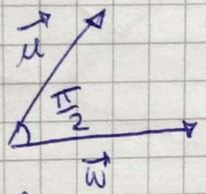
$\cancel{\sqrt{20}} = \cancel{\sqrt{20}}\,|\lambda|$

$1 = \lambda$ o $\lambda = -1$

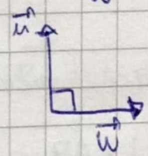
Dato: Tiene mismo sentido por lo tanto $\lambda = 1$

• $\vec{u} = (0, n, -2)$

• $\vec{V} = (\sqrt{10}, -1, 3)$ • $\vec{w} = (n-4, 1, 2)$



$\cos\theta = \dfrac{\vec{\mu}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|}$



$\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{\cos 90^\circ} = \dfrac{(0, n, -2)\cdot(n-4, 1, 2)}{\sqrt{0^2+n^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{n-4^2+1^2+2^2}}$

$0 = 0.n-4 + n.1 + -2.2$

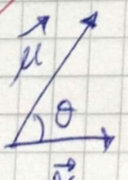
$0 = 0 + n - 4$

$4 = n$

• $\vec{V} = (\sqrt{10}, -1, 3)$ • $\vec{w} = (0, 1, 2)$: Rpta

1b) 2,5ptos

b) $\vec{u} = (0, 4, -2)$



$\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

$\cos\theta = \dfrac{(0,4,-2).(\sqrt{10},-1,3)}{\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{\sqrt{10}^2+(-1)^2+3^2}}$

$\cos\theta = \dfrac{0.\sqrt{10} + 4.-1 + -2.3}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}} \rightarrow \cos\theta = \dfrac{-10}{20}$

$\rightarrow \cos\theta = \dfrac{-1}{2}$

$\theta = 120^\circ$: Rpta

a exclusiva para
ulos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

2. a)

$\vec{AF} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{AF} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{AF} = \vec{F} - \vec{A}$

$(t, t, t-1) - (-5, 2, 1) \cdot (1, 3, 3) = 0$

$(t+5; t-2; t-2) \cdot (1, 3, 3) = 0$

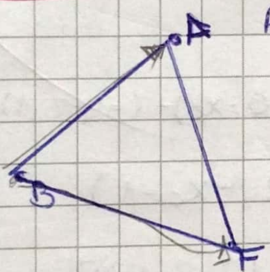
$t+5 \cdot 1 + t-2 \cdot 3 + t-2 \cdot 3 = 0$

$t+5 + 3t-6 + 3t-6 = 0$

$7t - 7 = 0$

$t = 7/7 \rightarrow t = 1$

• $\vec{F} = (1, 1, 0)$



$Área_\Delta = \frac{1}{2} \| A \times B \|$

$Área_\Delta = \frac{1}{2} \| \vec{BA} \times \vec{BF} \|$

$\vec{BA} = A - B = (-5, 2, 1) - (-1, -2, 1)$

$\vec{BA} = (-4, 4, 0)$

$\vec{BF} = F - B = (1, 1, 0) - (-1, -2, 1)$

$\vec{BF} = (2, 3, -1)$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \| (-4, 4, 0) \times (2, 3, -1) \|$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \| (-4, -4, -20) \|$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{-4^2 + -4^2 + -20^2}$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3}$

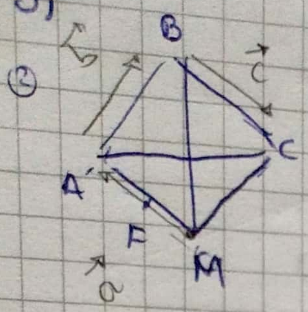
• $\vec{F} = (1, 1, 0)$ • $A_{\Delta_{ABF}} = 6\sqrt{3}\ u^2$: Rpta

Escaneado con CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b)



①

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\right|$$

$$8u^3 = \frac{1}{6}\left|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\right|$$

④ $\vec{a} = \vec{MA} \rightarrow \vec{A} - \vec{M} \rightarrow \vec{a} = (-5, 2, 1) - (7, 0, -1)$

③ $2\vec{AF} = \vec{AM}$

⑤ $\vec{a} = (-12, 2, 2)$

$2(F - A) = \vec{AM}$

⑥ $\vec{b} = \vec{AB}$

$2(6, -1, -1) = \vec{M} - (-5, 2, 1)$

$\vec{b} = \vec{B} - \vec{A} = (-1, -2, 1) - (-5, 2, 1)$

$(12, -2, -2) + (-5, 2, 1) = \vec{M}$

$\vec{b} = (4, -4, 0)$

$(7, 0, -1) = \vec{M}$

⑦ $\vec{c} = \vec{BC}$

$\vec{c} = \vec{C} - \vec{B} = (x_c, 0, -x_c) - (-1, -2, 1)$

$\vec{c} = (x_c + 1, 2, -x_c - 1)$

⑧

$8u^3 = \frac{1}{6} \cdot \left|-[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]\right|$

$8u^3 = \frac{1}{6}\left|[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]\right|$

$8u^3 = \frac{1}{6} \cdot \left|[\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})]\right|$

⑨

$8u^3 = \frac{1}{6} \cdot \left|[\vec{c} \cdot (8, 8, 40)]\right|$

$8 = \frac{1}{6} \cdot \left|[(x_c + 1, 2, -x_c - 1) \cdot (8, 8, 40)]\right|$

$8 = \frac{1}{6} \cdot \left|8x_c + 8 + 16 + -40x_c - 40\right|$

$8 = \frac{1}{6} \cdot \left|-32x_c - 16\right|$

$48 = \left|-32x_c - 16\right|$

⑩

$48 = -32x_c - 16$ o $48 = -(-32x_c - 16)$

$64 = -32x_c$ v $48 = 32x_c + 16$

$-2 = x_c$ v $32 = 32x_c$

$1 = x_c$

$C = (-2, 0, 2)$ o $C = (1, 0, -1)$ ∴ Rpta cálculos y desarrollos (borrador)

3. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ $\quad P = P_0 + t\vec{u}\ ,\ t \in \mathbb{R}$

a)

$$\mathcal{L}_1 : P = \underbrace{(3,0,-1)}_{P_0} + t\,\underbrace{(-1,2,3)}_{\vec{u}}\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}_1 : P = (3-t\,;\ 2t\,;\ -1+3t)$$

$$\mathcal{L}_2 : P = \underbrace{(-2,7,10)}_{Q_0} + r\,\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{v}}\ ,\ r \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}_2 : P = (-2+r,\ 7+r,\ 10+r)$$

$$(3-t\ ,\ 2t\ ;\ -1+3t) = (-2+r\ ;\ 7+r\ ,\ 10+r)$$

- $3-t = -2+r \ \dots (I)$
  $5 = t+r$
- $2t = 7+r$
  $t = 7+r/2 \quad \dots (II)$
- $-1+3t = 10+r$
  $3t = 11+r$
  $t = 11+r/3 \quad \dots (III)$

En (I) y (III)

$$\begin{cases} 5 = t+r \\ 11 = 3t-r \end{cases}$$

$t = 4 \ \wedge\ r = 1$

Reemplazamos en la segunda ecuación (la que no usamos)

- $2t = 7+r$ $\quad$ ∴ al cumplir, si hay punto de intersección

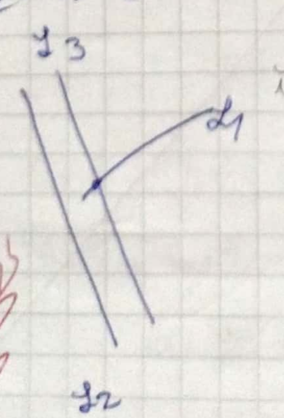
$2(4) = 7+1$ $\quad$ $\mathcal{L}_1 : P = \overset{3-4,\ 2(4),\ -1+12}{(-1,\ 8,\ 11)}.\ t \in \mathbb{R}$ $\quad$ Punto de intersección

verdad $\quad 8 = 8$ ✓ $\quad$ ∴ $\mathcal{L}_2 : P = \overset{-2+1,\ 7+1,\ 10+1}{(-1,\ 8,\ 11)}\ ,\ r \in \mathbb{R}$: Rpta

2

c) Ecuación vectorial : $P = P_0 + t\vec{u}\ ,\ t \in \mathbb{R}$

$\vec{u} = \lambda(\vec{v})$



$\vec{u} = \lambda(\vec{v})$

$$P = (-2,\ 7,\ 10) + r\,(\lambda,\ \lambda,\ \lambda)$$

debe pertenecer a $\mathcal{L}_1$

debe fijar el λ

0.5

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4.

a) $\text{Proy}_{\vec{u}} \underbrace{(\vec{u} \times \vec{v})}_{\text{vector}} + \text{Proy}_{\vec{u}} (\vec{u})$

vector vector vector vector

Sí se puede resolver.

$$\left(\frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u} + \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}$$

2.5 pts

recordar:

- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
- $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

$$\left(\frac{0}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u} + \left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}$$

$$\underbrace{0 + 1\vec{u}}$$

Verdadero : $\vec{u}$: Rpta

b) $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\|(\vec{u} - \vec{v}) \times (2\vec{u} + 3\vec{v})\| = 12$$

$$2(\vec{u} \times \vec{u}) + 3(\vec{u} \times \vec{v}) - 2(\vec{v} \times \vec{u}) - 3(\vec{v} \times \vec{v})$$

$$\underbrace{\vec{0} + 3(\vec{u} \times \vec{v}) + 2(\vec{u} \times \vec{v})}_{5(\vec{u} \times \vec{v})} - \vec{0}$$

2.5 pts

$\|5(\vec{u} \times \vec{v})\| = 12$

$|5| \, \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 12$

$5 \cdot \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} 90° = 12$

$5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 = 12$

$60 \neq 12$

$60 = 12$? Falso

$\|(\vec{u} - \vec{v}) \times (2\vec{u} + 3\vec{v})\| = 12$ es Falso

no sale 12

Rpta: Falso