2020-1 ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA (1MAT04-0106)

Comenzado el	jueves, 4 de junio de 2020, 17:01
Estado	Finalizado
Finalizado en	jueves, 4 de junio de 2020, 17:25
Tiempo empleado	23 minutos 55 segundos
Calificación	**8.00** de 8.00 (**100**%)

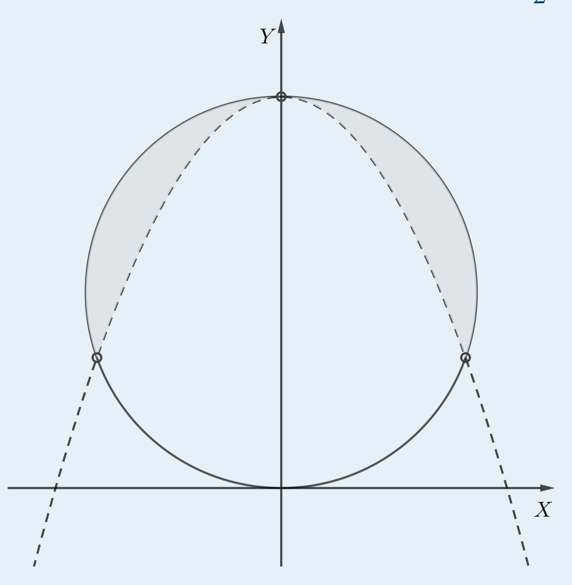
Pregunta 1

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

En la figura se muestran la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y la parábola $y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$



El sistema de desigualdades que describe la región sombreada es:

Seleccione una:

- a. $x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge y < -\frac{3}{2}x^2 + 2$
- b. $x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge y > -\frac{3}{2}x^2 + 2$
- c. $x^2 + (y-1)^2 \geq 1 \wedge y < -\frac{3}{2}x^2 + 2$
- d. $x^2 + (y-1)^2 \geq 1 \wedge y > -\frac{3}{2}x^2 + 2$
- e. Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es: $x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge y > -\frac{3}{2}x^2 + 2$

Pregunta 2

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

Dadas las circunferencias

C: $x^2+(y+1)^2=2$ y D: $(x+3)^2+(y-2)^2=8$,

se puede afirmar que:

Seleccione una:

- a. son tangentes exteriormente
- b. son tangentes interiormente
- c. se cortan en dos puntos
- d. no se cortan

La respuesta correcta es: son tangentes exteriormente

Pregunta 3

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

Un ángulo de rotación $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ permite transformar la ecuación $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$ en una ecuación cuadrática en el sistema UV que carece del término uv. Entonces se cumple que:

Seleccione una:

- a. $cos(\theta) = (\frac{4}{5})$
- b. $cos(\theta) = (\frac{3}{5})$
- c. $cos(\theta) = (\frac{1}{5})$
- d. $cos(\theta) = (\frac{2}{5})$
- e. Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es: $cos(\theta) = (\frac{4}{5})$

Pregunta 4

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

Si los extremos del lado recto de una elipse están ubicados en los puntos $(-1; \frac{5}{2})$ y $(-1; \frac{1}{2})$, y uno de los focos tiene coordenadas $(-1 - 4\sqrt{3}; \frac{3}{2})$, determine la longitud de su eje menor.

Seleccione una:

- a. 4
- b. 8
- c. $4\sqrt{3}$
- d. 6
- e. Ninguna de las respuestas anteriores

La respuesta correcta es: 4

Pregunta 5

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

Determine la ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje Y, centro en $(1; -2)$, con asíntota de ecuación $y = \frac{4}{\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}} - 2$ y punto de paso $(\sqrt{2} + 1; -2 + \sqrt{32})$.

Seleccione una:

- a. $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$
- b. $\frac{(y+2)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$
- c. $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$
- d. $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$
- e. Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es: $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$

Pregunta 6

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

Considere la curva cuya ecuación es la siguiente:

$$x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 22 = 0$$

Señale qué forma adopta su gráfica.

Seleccione una:

- a. Circunferencia
- b. Parábola
- c. Elipse
- d. El conjunto vacío
- e. Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es: El conjunto vacío

Pregunta 7

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

Dados los puntos *A*(2; 1) y *B*(-1; -2), se describe la figura F como el lugar geométrico de todos los puntos *P* del plano tales que:

$$|d(P, A) - d(P, B)| = 2\sqrt{2}$$

Entonces, la figura F es:

Seleccione una:

- a. Una hipérbola cuyo eje conjugado tiene pendiente -1.
- b. Una hipérbola cuyo eje conjugado tiene pendiente 1.
- c. Una hipérbola cuyo eje transverso tiene pendiente -1.
- d. Una hipérbola cuyos vértices son *A* y *B*.
- e. Ninguna de las respuestas anteriores.

La respuesta correcta es:
Una hipérbola cuyo eje conjugado tiene pendiente -1.

Pregunta 8

Finalizado

Puntúa 1.00 sobre 1.00

Marcar pregunta

Se sabe que las coordenadas del punto Q en el sistema UV son $Q(\sqrt{3}, 1)$ y en el sistema XY son $Q(1, \sqrt{3})$. La recta L pasa por el origen de coordenadas y, en el sistema UV, tiene pendiente $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Halle la ecuación de dicha recta en el sistema XY.

Seleccione una:

- a. $\sqrt{3}x + y = 0$
- b. $x + y = 0$
- c. $x - y = 0$
- d. $-\sqrt{3}x + y = 0$
- e. Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es: $-\sqrt{3}x + y = 0$

Examen parcial - AMGA - Cuestionario

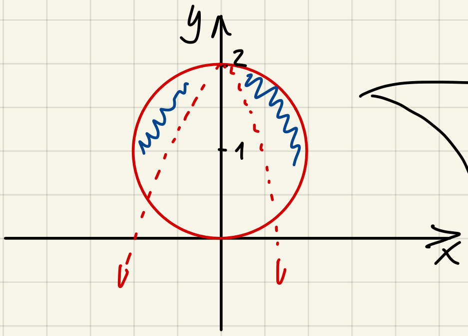
Jorge Francisco Barreto Falla
20201278

(1) $\mathcal{C}: x^2 + (y-1)^2 = 1$ $\qquad$ $\mathcal{P}: y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$

$\hookrightarrow C(0,1)$ $\qquad$ $\hookrightarrow r=1$

$$-\frac{2}{3}(y-2) = x^2$$

$\hookrightarrow V(0,2)$



Interior de $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}: \quad x^2 + (y+1)^2 \leq 1$ $\qquad$ Por la línea continua

Exterior de $\mathcal{P}$ $\rightarrow$ $(0,0)$ NO pertenece a la región sombreada

Por tanto, la desigualdad será inversa a la obtenida al reemplazar $(0,0)$

$$0 \quad -\frac{3}{2}(0)^2 + 2$$

$$0 < 2$$ Por la línea discontinua

$\hookrightarrow$ Entonces, para el área sombreada será lo contrario

Finalmente

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + (y+1)^2 \leq 1 \\ y > -\frac{3}{2}x^2 + 2 \end{array}\right.$$

(2) $\mathcal{C}_1: x^2 + (y+1)^2 = 2$ $\qquad$ $\mathcal{C}_2: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 8$

$\hookrightarrow C_1(0,-1)$ $\qquad$ $\hookrightarrow r_1 = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\hookrightarrow C_2(-3,2)$ $\qquad$ $\hookrightarrow r_2 = 2\sqrt{2}$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(0+3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \qquad r_1 + r_2$$

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Tangentes exteriores $\leftarrow$ $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

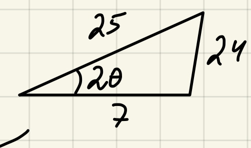
③ $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad 8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$

$A \neq C \Rightarrow$ Usamos $\tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C}$

$$\tan 2\theta = \frac{-24}{8-15}$$

$$= \frac{-24}{-7}$$

$$\tan 2\theta = \frac{24}{7} \quad \oplus \to \text{I cuad}$$

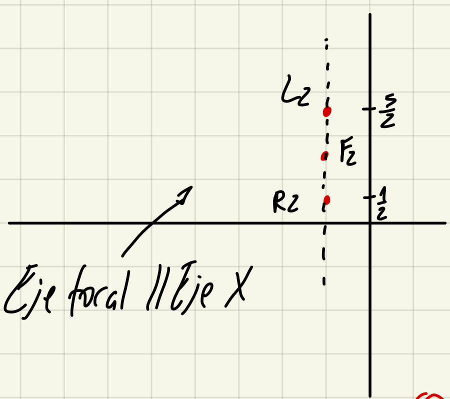


$$\cos 2\theta = \frac{7}{25}$$

Entonces:

$$\cos\left(\frac{2\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5} = \cos\theta$$

④ Extremos $L_2\left(-1, \frac{5}{2}\right), R_2\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y un foco $F_1\left(-1-4\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$



① $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$

$d(L,R) = \dfrac{2b^2}{a}$ $\qquad d(L,R) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \pm 2$

Pero, por ser distancia se toma $\oplus$ +2

$\cancel{2} = \dfrac{\cancel{2}b^2}{a}$

$a = b^2$

② $F_2 \in x = -1$ (Por ser PM de LR)

$F_2 \in y = \frac{3}{2}$ (Por F_1)

$F_2 = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$

$F_1 = \left(-1 - 4\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$

③ $\sqrt{(-1+1+4\sqrt{3})^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^2} = 2c$

$\pm 4\sqrt{3} = 2c$

Tomamos el positivo por ser distancia

$2\sqrt{3} = c$

④ $a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = a + 12$

$a^2 - a - 12 = 0$

$a \quad -4 \quad -4a$

$a \quad 3 \quad 3a$

$-a$

$a = 4$

↳ $4 = b^2$

$2 = b$

↳ $2b = 4$

⑤ Zf // Eje y

↳ ⊕ en y

$\mathcal{H}: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ → $(1,-2)$

↳ $\frac{(y+2)^2}{a^2} - \frac{(x-1)^2}{b^2} = 1$ Asíntota

Asíntota

$y = \frac{4}{\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}} - 2$

Como es ⊕ en x y Zf // Eje y, proviene de:

$y = \frac{a}{b}(x-1) - 2$

$y = \frac{4}{\sqrt{2}}(x-1) - 2$

$\frac{a}{b} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}a}{4} = b$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

$(\sqrt{2}+1, -2+\sqrt{32}) \in \mathcal{H}$

$$\frac{(-2+\sqrt{32}+2)^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2}+1-1)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{32}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$$

$$\frac{32}{a^2} - \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2} = 1$$

$$\frac{32}{a^2} - \frac{2}{\frac{2a^2}{16}} = 1$$

$$\frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^2} = 1$$

$$\frac{16}{a^2} = 1$$

$$16 = a^2$$

$a = -4$ ✗ $\quad a = 4$ ✓ por ser distancia

$$b \quad \frac{\sqrt{2}\cancel{a}}{\cancel{4}} = b$$

$$b \quad \sqrt{2} = b$$

$$\mathcal{H}: \quad \frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$$

6 $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 22 = 0$

$$x^2 + 4x + 2^2 + 2(y^2 - 4y + 2^2) = 2^2 - 22 + 8$$

12

$$(x+2)^2 + 2(y-2)^2 = -10$$

$$-\frac{(x+2)^2}{10} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

¿? ¿?

Vacío

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

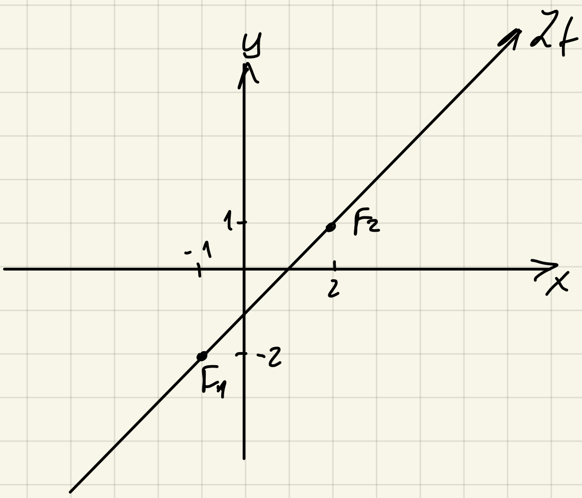
7 $A(2,1)$ y $B(-1,-2)$

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a = 2\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$\left|\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\right| = 2\sqrt{2}$$

↳ Hipérbola



$m\,\overline{F_1F_2} = m\,\mathcal{L}_t = m$ eje transverso

$$\frac{1+2}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

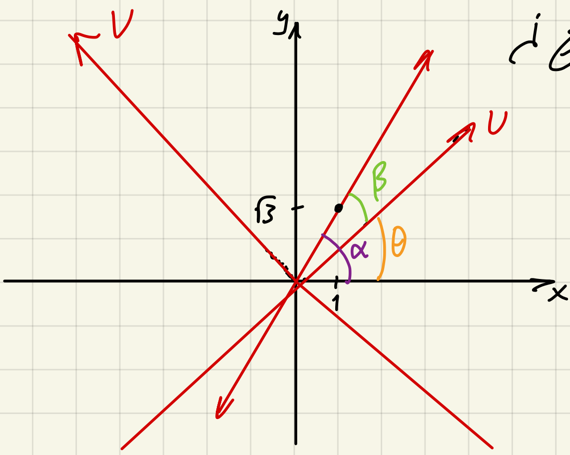
$m\,\mathcal{L}_t \cdot m$ eje conjugado $= -1$

m eje conjugado $= -1$

8 En UV ⇒ $Q(\sqrt{3}, 1)$ / En XY ⇒ $Q(1, \sqrt{3})$?

$(0,0) \in \mathcal{L}$ En UV ⇒ $m = \frac{\sqrt{3}}{1}$ en XY

¿En XY?



$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$
$\alpha = 60$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ en UV ⇒ $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\beta = 30$

$\theta = \alpha - \beta$
$\theta = 30°$

Como para por $(0,0)$, la recta en UV es:

$\mathcal{L}$: $V = -\sqrt{3}\,U$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

$\theta = 30° \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$u = \frac{\sqrt{3}x + y}{2} \qquad x = \frac{\sqrt{3}u - v}{2}$

$v = \frac{\sqrt{3}y - x}{2} \qquad y = \frac{u + \sqrt{3}v}{2}$

con $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$v = \frac{u}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}y - x}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}x + y}{\cancel{2}\sqrt{3}}$

$3y - \sqrt{3}x = \sqrt{3}x + y$

$2y - 2\sqrt{3}x = 0$

$y - \sqrt{3}x = 0$

2020-1 ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA (1MAT04-0106)

Comenzado el	viernes, 5 de junio de 2020, 14:45
Estado	Finalizado
Finalizado en	viernes, 5 de junio de 2020, 17:20
Tiempo empleado	2 horas 34 minutos
Calificación	**8.00** de 8.00 (**100**%)

Pregunta 1

Finalizado

Puntúa 2.50 sobre 2.50

Marcar pregunta

Considere la sección cónica C representada, por la siguiente ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y = -16$$

1. Mediante una rotación de ejes adecuada, demuestre que dicha curva corresponde a una parábola. 1 punto
2. Grafique la sección cónica C en el sistema XY, mostrando también la ubicación de los ejes U y V. 0,5 puntos
3. En el sistema XY, halle la ecuación cartesiana de la recta que contiene al lado recto de C y dé las coordenadas de su foco. 1 punto

Muestre detalladamente todos sus cálculos en las imágenes que presentará.

EX1 - P1 - BARRETO FALLA Jorge Francisco - 20201278.pdf

Comentario:
Todos los procedimientos y las respuestas son correctos.

Pregunta 2

Finalizado

Puntúa 3.00 sobre 3.00

Marcar pregunta

Considere las ecuaciones de la hipérbola y de la recta,

$$\mathcal{C} : x^2 - y^2 = 9, \qquad \mathcal{L} : y - x = 0.$$

Se sabe que $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{L}$ y el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a la recta $\mathcal{L}$.

a) Determine el lugar geométrico generado por los puntos P en el segmento $\overline{AB}$ tales que $d(A, B) = 4d(A, P)$. 2 puntos

b) Esboce el lugar geométrico hallado en a), identificando aquellos elementos que ayuden a hacer su gráfica. 1 punto

EX1 - P2 - BARRETO FALLA Jorge Francisco - 20201278.pdf

Comentario:
Excelente trabajo.

Pregunta 3

Finalizado

Puntúa 2.50 sobre 2.50

Marcar pregunta

Los vértices de una hipérbola H son los puntos $V_1 = (-5; 5)$ y $V_2 = (-5; -1)$, y una de sus asíntotas es la recta $4x + 3y + 14 = 0$. Una elipse E, cuyos vértices son los focos de H, pasa por los extremos del eje conjugado de H.

Además, se sabe que los vértices de la elipse E son los extremos del lado recto de una parábola P, cuyo vértice tiene abscisa menor que -5.

a) Halle las ecuaciones de la hipérbola H, de la elipse E y de la parábola P. 1,5 puntos

b) Grafique dichas cónicas en un mismo plano cartesiano. 1 punto

EX1 - P3 - BARRETO FALLA Jorge Francisco - 20201278.pdf

Comentario:
Todos los procedimientos y las respuestas son correctos.

Examen parcial – AMGA

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

Problema 1:

a) $C: \; x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$

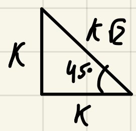
① Identificamos los coeficientes de la ecuación de 2do grado

$A = 1 \;/\; B = 2 \;/\; C = 1$

② Notamos que $A = C$
$1 = 1$, entonces el ángulo de rotación θ será $45°$

③ Construimos las ecuaciones de rotación

$\operatorname{sen} 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \;/\; \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



Entonces:

$x = \dfrac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad y = \dfrac{u + v}{\sqrt{2}}$

	u	v
x	$\cos\theta$	$-\operatorname{sen}\theta$
y	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$

④ Reemplazamos por partes:

✓ $x^2 = \left(\dfrac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{u^2 - 2uv + v^2}{2}$

✓ $2xy = \cancel{2}\left(\dfrac{u-v}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\dfrac{u+v}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) = u^2 - v^2$

✓ $y^2 = \left(\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{u^2 + 2uv + v^2}{2}$

✓ $8x = 8\left(\dfrac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}(u-v) = 4\sqrt{2}u - 4\sqrt{2}v$

✓ $-8y = -8\left(\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-\overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = -4\sqrt{2}u - 4\sqrt{2}v$

✓ 16

③ Sumando por partes

$$\frac{u^2 - \cancel{2uv} + v^2}{2} + u^2 - v^2 + \frac{u^2 + \cancel{2uv} + v^2}{2} + \cancel{4\sqrt{2}u} - 4\sqrt{2}v \cancel{- 4\sqrt{2}u} - 4\sqrt{2}v + 16 = 0$$

$$\frac{2u^2 + 2v^2}{2} + u^2 - v^2 \quad - 8\sqrt{2}v + 16 = 0$$

$$u^2 + \cancel{v^2} + u^2 \cancel{- v^2} = 8\sqrt{2}v - 16$$

$$2u^2 = 8\sqrt{2}v - 16$$

$$u^2 = 4\sqrt{2}v - 8$$

$$P: \quad u^2 = 4\sqrt{2}(v - \sqrt{2})$$

Sí corresponde a una parábola, al ser lineal en una variable y cuadrática en la otra

b) Para graficar, construimos las ecuaciones de rotación de UV a XY

	U	V
X	$\cos\theta$	$-\operatorname{sen}\theta$
Y	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$

$$U = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{y - x}{\sqrt{2}}$$

→ Hallamos los componentes en UV y los convertimos a XY

✓ Determinamos si será cóncava o convexa

$$\cancel{4}|p| = \cancel{4}\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad 4\sqrt{2} > 0$$, por lo que será convexa, es decir se abrirá para arriba

$$|p| = \sqrt{2}$$

✓ $V(\overset{u}{0}, \overset{v}{\sqrt{2}})$

$$^{u}\ 0 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 = \cancel{x} + y$$

$$^{v}\ \sqrt{2} = \frac{y-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2 = y - \cancel{x}$$

$+$

$$1 = y$$

$$x = -1$$

En XY:

$$V(-1, 1)$$

✓ $Zf \parallel$ Eje V, por ser lineal en v → $Zf: u = 0$

$$U = 0$$

$$\frac{y - x}{\sqrt{2}} = 0$$

$$Zf: \ y = x \qquad \text{(En XY)}$$

Jorge Francesco
Barreto Falla
20201278

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

✓ $F(0, \sqrt{2}+|p|) = F(0, 2\sqrt{2})$

$$0 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 = \cancel{x}+y$$

$$2\sqrt{2} = \frac{y-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4 = \cancel{-x}+y$$

$+$

$2 = y$

$\hookrightarrow x = -2 \rightarrow$ En xy: $F(-2,2)$

✓ $L(0+2|p|, \sqrt{2}+|p|) = L(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$$2\sqrt{2} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4 = \cancel{x}+y$$

$$2\sqrt{2} = \frac{y-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4 = y\cancel{-x}$$

$+$

$4 = y$

$\hookrightarrow x = 0 \rightarrow$ En xy: $L(0,4)$

✓ $R(0-2|p|, \sqrt{2}+|p|) = R(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$$-2\sqrt{2} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \Rightarrow -4 = \cancel{x}+y$$

$$2\sqrt{2} = \frac{y-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4 = y\cancel{-x}$$

$+$

$0 = y$

$\hookrightarrow x = -4 \rightarrow$ En xy: $R(-4,0)$

✓ $\mathcal{L}_{LR}$: $v = 2\sqrt{2}$ (Recta que contiene al lado recto)

$$\frac{y-x}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$\mathcal{L}_{LR}$: $y = x+4$ (En xy)

Y también las ecuaciones de los ejes de coordenadas de UV a XY

✓ $u=0$

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0$$

$y = -x$ (En xy)

✓ $v=0$

$$\frac{y-x}{\sqrt{2}} = 0$$

$y = x$ (En xy)

Entonces, en XY:

✓ $V(-1,1)$

✓ $\mathcal{L}_f$: $y = x$

✓ $F(-2,2)$

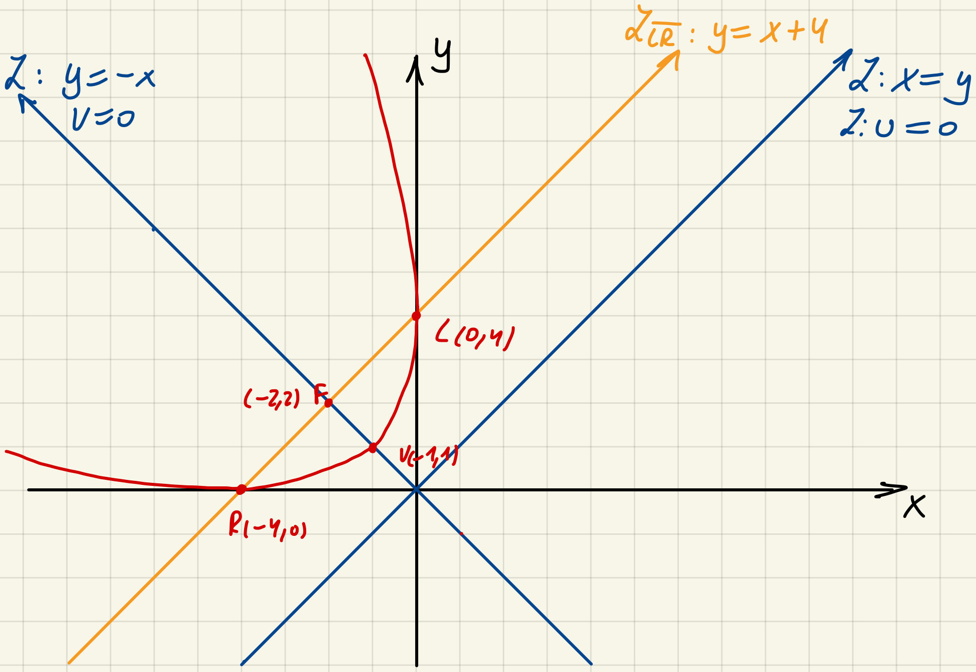
✓ $L(0,4)$

✓ $R(-4,0)$

✓ $\mathcal{L}_{\overline{LR}}$: $y = x + 4$

✓ $U=0 \to y = -x$

✓ $V=0 \to y = x$



c) Como anteriormente fue hallado, el foco de $\mathcal{P}$ en XY es $F(-2,2)$ y la recta que contiene al lado recto de $\mathcal{P}$ es $\mathcal{L}_{\overline{LR}} : y = x + 4$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

Examen parcial – AMGA

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

Problema 2:

$\mathcal{C}: \; x^2 - y^2 = 9 \qquad \mathcal{L}: \; y - x = 0$

$A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{L}$ y el segmento $AB \perp \mathcal{L}$

a) LG generado por puntos $P(x,y)$ en segmento $\overline{AB}$ tales que $d(A,B) = 4d(A,P)$

① $\mathcal{C}: x^2 - y^2 = 9 \qquad \mathcal{L}: y = x$

$\hookrightarrow \mathcal{L}: x - y = 0$

$\hookrightarrow m_{\mathcal{L}} = \frac{-A}{B} = \frac{-1}{-1} = 1$

$A \in \mathcal{C} \qquad B \in \mathcal{L}$

$x_A^2 - y_A^2 = 9 \qquad B(x_B, x_B)$

$x_A^2 - 9 = y_A^2$

$\sqrt{x_A^2 - 9} = y_A$

$\hookrightarrow A(x_A, \sqrt{x_A^2 - 9})$

② $\overline{AB} \perp \mathcal{L}$, entonces:

$m_{AB} \cdot \underbrace{m_{\mathcal{L}}}_{1} = -1$

$m_{AB} = -1$

$\frac{x_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$

$x_B - y_A = -x_B + x_A$

$2x_B = x_A + y_A$

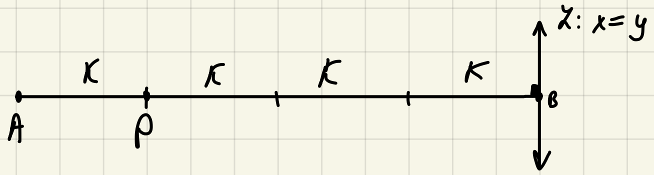
$x_B = \frac{x_A + \sqrt{x_A^2 - 9}}{2}$

$\hookrightarrow B\left(\frac{x_A + \sqrt{x_A^2 - 9}}{2}, \frac{x_A + \sqrt{x_A^2 - 9}}{2}\right)$

Jorge Francesco
Barreto Falla
20201278

③ $d(A,B) = 4\,d(A,P)$

$$\frac{d(A,B)}{d(A,P)} = \frac{4}{1}$$



$$\frac{d(A,P)}{d(P,B)} = \frac{1}{3} \qquad P(x,y)$$

$$x = \frac{3(x_A)+1(x_B)}{3+1} \qquad y = \frac{3(y_A)+1(x_B)}{3+1}$$

$$x = \frac{3x_A + x_B}{4} \qquad y = \frac{3y_A + x_B}{4}$$

$$x = \frac{3x_A + \left(\frac{x_A + \sqrt{x_A^2-9}}{2}\right)}{4} \qquad y = \frac{3\sqrt{x_A^2-9} + \frac{x_A + \sqrt{x_A^2-9}}{2}}{4}$$

$$x = \frac{6x_A + x_A + \sqrt{x_A^2-9}}{8} \qquad y = \frac{6\sqrt{x_A^2-9} + x_A + \sqrt{x_A^2-9}}{8}$$

$$8x = 7x_A + \sqrt{x_A^2-9} \qquad 8y = x_A + 7\sqrt{x_A^2-9}$$

$$\frac{8y - x_A}{7} = \sqrt{x_A^2-9}$$

$$8x = 7x_A + \frac{8y - x_A}{7}$$

$$56x = 49x_A + 8y - x_A$$

$$\cancel{56}^{7}x - \cancel{8}^{1}y = \cancel{48}^{6}x_A$$

$$\frac{7x - y}{6} = x_A$$

④ Construimos la recta que contiene AB a $A(x_A, \sqrt{x_A^2-9})$

$$\mathcal{L}_{AB}: y = -1(x - x_A) + \sqrt{x_A^2-9}$$

$$y = -x + x_A + \sqrt{x_A^2-9}$$

$$\mathcal{L}_{AB}: y + x = x_A + \sqrt{x_A^2-9}$$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

Como $P(x, y) \in \mathcal{L}_{AB}$

$$x+y = \frac{7x-y}{6} + \sqrt{\left(\frac{7x-y}{6}\right)^2 - 9}$$

$$x+y - \left(\frac{7x-y}{6}\right) = \sqrt{\left(\frac{7x-y}{6}\right)^2 - 9}$$

$$\left(\frac{6x+6y-7x+y}{6}\right)^2 = \frac{49x^2 - 14xy + y^2}{36} - 9$$

$$\left(\frac{7y-x}{6}\right)^2 = \frac{49x^2 - 14xy + y^2 - 324}{36}$$

$$\frac{49y^2 \cancel{-14xy} + x^2}{\cancel{36}} = \frac{49x^2 \cancel{-14xy} + y^2 - 324}{\cancel{36}}$$

$$324 = 48x^2 - 48y^2$$

$$\frac{48x^2}{324} - \frac{48y^2}{324} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{\frac{27}{4}} - \frac{y^2}{\frac{27}{4}} = 1$$

b) Para graficar, hallamos los principales elementos:

✓ $\mathcal{L}_f \parallel$ Eje X, por ser positivo en X

✓ $C(0,0) \Rightarrow \mathcal{L}_f: y=0$

$a^2 = \frac{27}{4}$ $\qquad b^2 = \frac{27}{4}$

$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ✓ $\vee$ $a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ✗ $\qquad b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ✗ $\vee$ $b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ✓

Por ser distancia

$c^2 = \frac{27}{4} + \frac{27}{4}$

$c^2 = \frac{27}{2}$

$c = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$V_1(0+a, 0) = V_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$
$V_2(0-a, 0) = V_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$
$F_1(0+c, 0) = F_1\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, 0\right)$
$F_2(0-c, 0) = F_2\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

$L\left(\pm c, \frac{b^2}{a}\right) = L\left(\pm\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad \frac{b^2}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$R\left(\pm c, -\frac{b^2}{a}\right) = R\left(\pm\frac{3\sqrt{6}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Asíntotas:

$\mathcal{L}_1: y = \frac{\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}}}{\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}}} x$

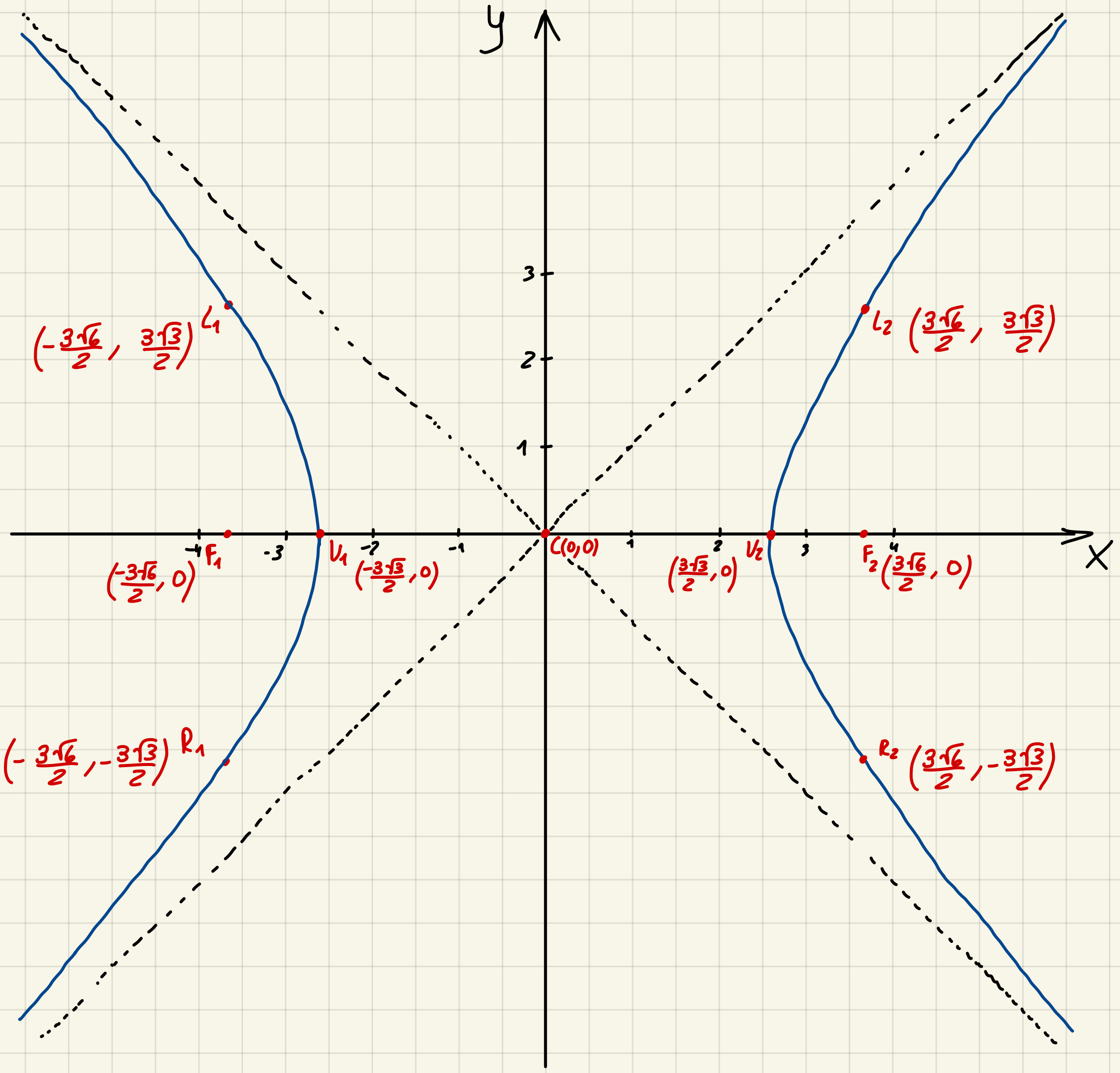
$y = x$

$\mathcal{L}_2: y = -\frac{\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}}}{\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}}} x$

$\mathcal{L}_2: y = -x$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

Entonces:

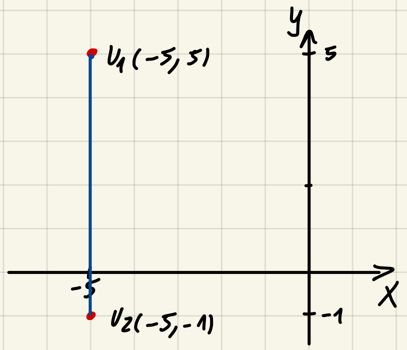


Examen parcial – AMGA

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

Problema 3:

Vértices de $\mathcal{H}$ son $V_1(-5,5)$ y $V_2(-5,-1)$



① V_1 y $V_2 \in \mathcal{L}: x = -5$

entonces $\mathcal{L}f: x = -5 \parallel$ Eje y

② $C(h,k) \in \mathcal{L}f$, entonces $h = -5$

y como C es punto medio de $\overline{V_1V_2}$

$$K = \frac{5-1}{2}$$
$$K = 2$$
$$\hookrightarrow C(-5,2)$$

③ $d(V_1, V_2) = 2a$

$$\sqrt{(\cancel{-5+5})^2 + (5+1)^2} = 2a$$
$$6 = 2a$$
$$3 = a$$

④ Una de las asíntotas es:

$$4x + 3y + 14 : 0$$
$$\hookrightarrow m = \frac{-A}{B} = -\frac{4}{3}$$

Entonces, esta asíntota proviene de:

$$\mathcal{L}_2: \quad y - k = -\frac{a}{b}(x-h)$$

Por lo que:

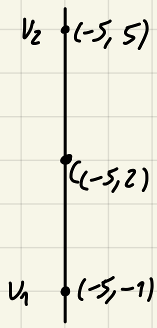
$$\cancel{-}\frac{4}{3} = \cancel{-}\frac{a}{b}$$
$$b = \frac{3a}{4} \quad a=3$$
$$b = \frac{9}{4}$$

⑤ Damos forma con lo que sabemos:

$$\mathcal{H}: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+5)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = 1$$

⑥ Para hallar los focos



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 9 + \frac{81}{16}$$
$$c = \frac{15}{4} \vee c = -\frac{15}{4}$$

✓ ✗

Por ser distancia

$$c = \frac{15}{4}$$

Entonces:

$$F_1(\underset{-5}{h}, \underset{2+\frac{15}{4}}{K+c}) = F_1\left(-5, \frac{23}{4}\right)$$

$$F_2(\underset{-5}{h}, \underset{2-\frac{15}{4}}{K-c}) = F_2\left(-5, -\frac{7}{4}\right)$$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

(7) Los extremos del eje conjugado $\overline{B_1 B_2}$ de $\mathcal{H}$ $\in \mathcal{L}: y = 2$, por tanto:

$$B_1(\underset{-5-\frac{9}{4}}{h-b}, \underset{2}{k}) = B_1\left(-\frac{29}{4}, 2\right)$$

$$B_2(\underset{-5+\frac{9}{4}}{h+b}, \underset{2}{k}) = B_2\left(-\frac{11}{4}, 2\right)$$

(8) Para $\mathcal{E}$:

$$F_1 \text{ de } \mathcal{H} = V_1 \text{ de } \mathcal{E} = V_1\left(-5, \frac{23}{4}\right)$$

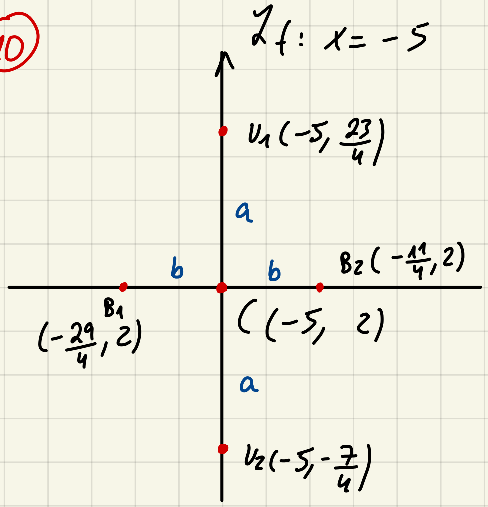
$$F_2 \text{ de } \mathcal{H} = V_2 \text{ de } \mathcal{E} = V_2\left(-5, -\frac{7}{4}\right)$$

(9) Entonces $\mathcal{L}_f$ de $\mathcal{E}$ es $\mathcal{L}_f: x = -5$ // Eje y

También C es PM de $\overline{V_1 V_2}$, por lo que

$$C \text{ de } \mathcal{H} = C \text{ de } \mathcal{E} = C(-5, 2)$$

(10)



Como B_1 y $B_2 \in \mathcal{L}_n: y = 2$ son los extremos del eje menor de la elipse

$$d(B_1, B_2) = 2b$$

$$\cancel{\sqrt{\left(-\frac{29}{4} + \frac{11}{4}\right)^2}} = 2b$$

$$\frac{18}{4} = 2b$$

$$\frac{9}{4} = b$$

a de $\mathcal{E}$ = c de $\mathcal{H}$

a de $\mathcal{E} = \frac{15}{4}$

(11) Entonces:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x+5)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\frac{15}{4}\right)^2} = 1$$

(12)

$$V_1 \text{ de } \mathcal{E} = L \text{ de } \mathcal{P} = L\left(-5, \frac{23}{4}\right)$$

$$V_2 \text{ de } \mathcal{E} = R \text{ de } \mathcal{P} = R\left(-5, -\frac{7}{4}\right)$$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

13 Sabemos que:

$$d(V_1, V_2) = 2a = \frac{15}{2} = d(L, R) = 4|p|$$

$$\frac{15}{2} = 4|p|$$

$$\frac{15}{8} = |p|$$

14 $\mathcal{L}_{\overline{LR}} : x = -5$ y F es PM de LR, entonces

F de $\mathcal{P}$ = C de $\mathcal{E}$

$F(-5, 2)$

15 Como $\mathcal{L}_{LR} \parallel$ Eje y, entonces $\mathcal{L}_f \parallel$ Eje X (Eje focal) $\Rightarrow \mathcal{L}_f : y = 2$

16 $\mathcal{L}_{\overline{LR}} : x + 5 = 0$ y $V(h, 2)$

$$d_{\mathcal{L}_{\overline{LR}}} V = |p|$$

$$\frac{|1(h) + 0(2) + 5|}{\cancel{\sqrt{1^2}}} = \frac{15}{8}$$

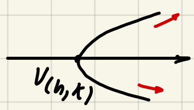
$$|h + 5| = \frac{15}{8}$$

$$h + 5 = \frac{15}{8} \qquad h + 5 = -\frac{15}{8}$$

$$h = -\frac{25}{8} \qquad h = -\frac{55}{8}$$

Pero como h de $\mathcal{P} < -5$, entonces:

$h = -\frac{55}{8}$ y se abrirá para la derecha; en consecuencia será $\oplus 4p$



17 Por tanto, como $\mathcal{L}_f \parallel$ Eje X, la ecuación será lineal en x

$$\mathcal{P} : (y - k)^2 = +4p(x - h)$$

$$\mathcal{P} : (y - 2)^2 = \frac{15}{2}\left(x + \frac{55}{8}\right)$$

Jorge Francisco
Barreto Falla
20201278

Entonces:

$$\mathcal{H}: \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+5)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x+5)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\frac{15}{4}\right)^2} = 1$$

$$\mathcal{P}: (y-2)^2 = \frac{15}{2}\left(x + \frac{55}{8}\right)$$

Asíntotas de $\mathcal{H}$

$\mathcal{L}_1: 4x + 3y + 14 = 0$

$\left(0, -\frac{7}{2}\right) \quad \left(0, -\frac{14}{3}\right)$

$\mathcal{L}_2: y - 2 = \frac{4}{3}(x+5)$

$\left(-\frac{13}{2}, 0\right) \quad \left(0, \frac{26}{3}\right)$