Fundamentos de Cálculo

Segunda Práctica Calificada - Soluciones propuestas

Semestre Académico 2024-1

Horarios: A101, B101, B102, B103, I101, I102, I103, I104, I105, 117, 118, 119, 120, 121. 6. Duración: 110 minutos

Elaborada por todos los profesores.

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, calculadoras, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

1. Sea la función $f(x) = -5 - \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

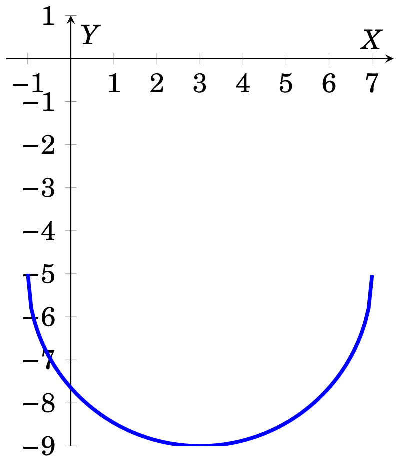
   a) Determine el dominio implícito de f. (1 punto)

   b) Grafique f, indicando las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados. (2 puntos)

   Solución:

   a) Resolvemos $7 + 6x - x^2 \geq 0$ se obtiene $Dom(f) = [-1; 7]$.

   b) Puntos de intersección:
      - Con el eje X:No hay
      - Con el eje Y:$(0; -5 - \sqrt{7})$



2. Considere las funciones f y g definidas por

$$f(x) = -5x^2 + 4x + 9, x < 0, \qquad g(x) = \sqrt{-2x+6}, -19 \leq x \leq -3.$$

a) Esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de los puntos de interseccion de la gráfica con los ejes coordenados. (1 punto)

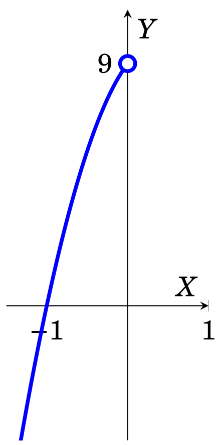
b) Usando transformaciones, esboce la gráfica de la función g, indicando la secuencia de transformaciones necesarias para llegar a la gráfica. (3 puntos)

c) Halle $\dfrac{g}{f}$. (1 punto)

d) Halle $g \circ f$. (2 puntos)

Solución:

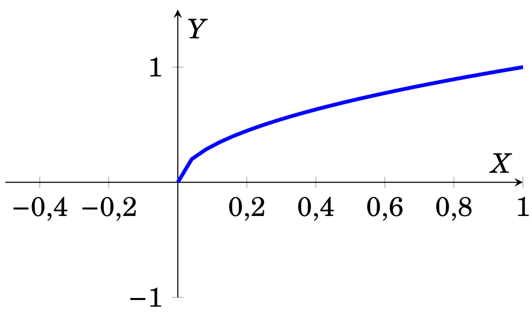
a)



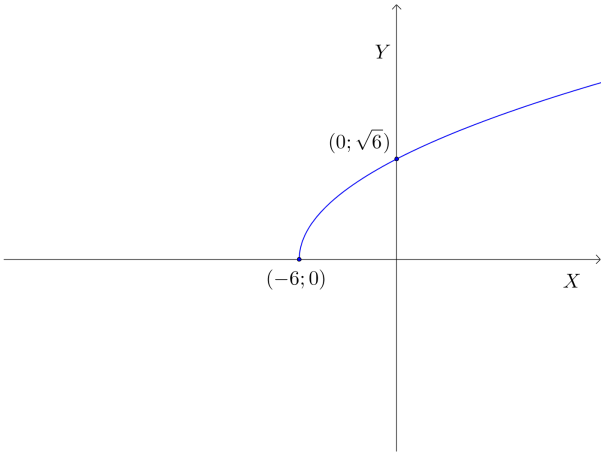
Puntos de intersección:
Con el eje X: $(-1;0)$
Con el eje Y: No hay.

b)

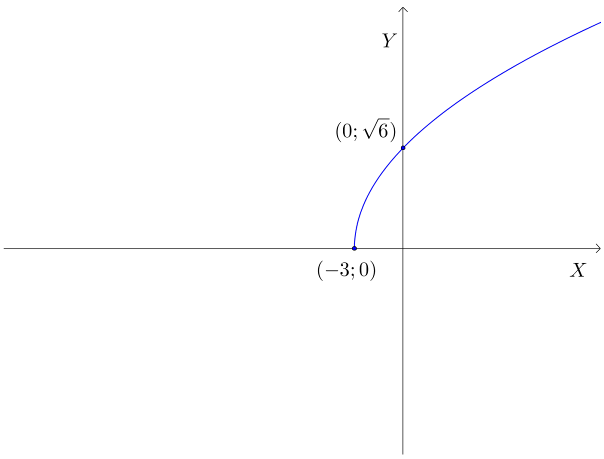
$y = \sqrt{x}$



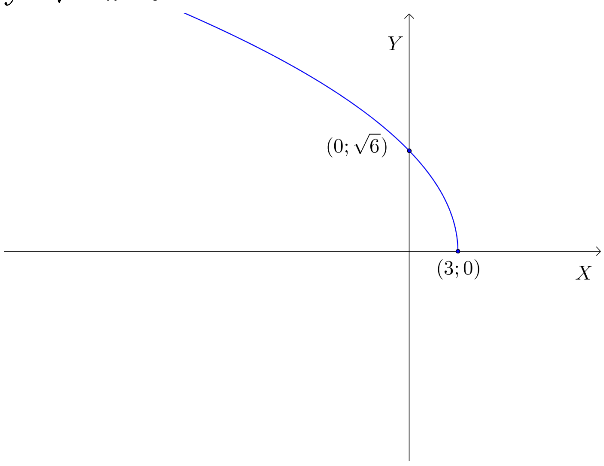
$y = \sqrt{x+6}$

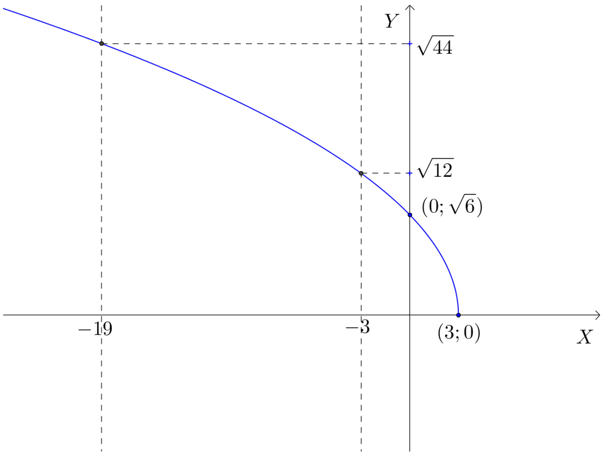


$y = \sqrt{2x+6}$

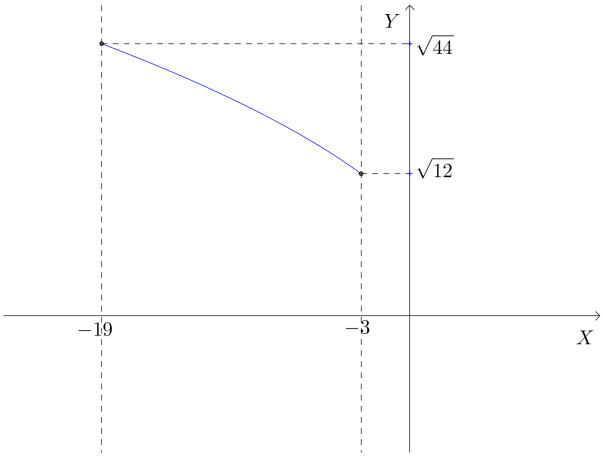


$y = \sqrt{-2x+6}$





Por lo tanto, la gráfica de g es



c) $Dom\left(\frac{g}{f}\right) = Dom(g) \cap Dom(f) - \{x : f(x) = 0\} = [-19;-3]$

$\frac{g}{f}(x) = \frac{\sqrt{-2x+6}}{-5x^2+4x+9}, x \in [-19;-3]$

d) $Dom(g \circ f) = \{x : x \in Dom(f) \wedge f(x) \in Dom(g)\}$

$= \{x : x < 0 \wedge -19 \leq -5x^2+4x+9 \leq -3\}$

$= \{x : x < 0 \wedge -19 \leq -5x^2+4x+9 \wedge -5x^2+4x+9 \leq -3\}$

$= \{x : x \in]-\infty : 0[\wedge x \in [-2;14/5] \wedge x \in (]-\infty;-6/5] \cup [2;+\infty[)\}$

$= [-2;-6/5]$

Luego,

$g \circ f(x) = \sqrt{10x^2-8x-12}, x \in [-2;-6/5]$

3. Sea $f : [-4;4] \to \mathbb{R}$ una función par que cumple las siguientes condiciones:

- Para $x \in [0;2]$, f se define por $f(x) = 2x+3$.
- Para $x \in [-4;-2[$, f se define por $f(x) = 2\sqrt{-x+5}+3+a$, donde a es una constante real.
- $f(4) = 8$.

Halle:

a) El valor de la constante a. (2.5 puntos)

b) La función f. (2.5 puntos)

Solución:

a)

Dado que f es par (presenta simetría respecto al eje Y), en el tramo $]2;4]$, f se define así:
$f(x) = 2\sqrt{x+5}+3+a$
Luego, $f(4) = 2\sqrt{4+5}+3+a = 8$ de donde $a = -1$.

b) La función f es.

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x+5}+2; & -4 \le x < -2 \\ -2x+3; & -2 \le x < 0 \\ 2x+3; & 0 \le x \le 2 \\ 2\sqrt{x+5}+2; & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

4. El porcentaje de carga $P(t)$ de la batería de un celular disminuye conforme pasa el tiempo de encendido t (medido en horas). Se está experimentando con un nuevo modelo de batería para celulares y se tiene la siguiente información:

- Comenzando con el celular cargado completamente $P(t)$ se modela con la función lineal $at+b$ durante las primeras 36 horas de encendido, momento en el cual se llega al 60% de la carga.
- Desde la hora 36 de encendido hasta que la batería se agota $P(t)$ se modela con la función $c+d\sqrt{t}$, además se sabe que luego de 49 horas desde el inicio se registró que el celular contaba con 30% de batería restante.

Halle la función $P(t)$. (3 puntos)

Solución.

Puesto que el celular inicia completamente cargado $P(0) = 100$ y de la información se tiene que $P(36) = 60$, como $P(t) = at+b$ para $t \in [0,36] \implies a = -10/9$, $b = 100$.

De la información se tiene que $P(36) = 60$ y $P(49) = 30$, como desde la hora 36 hasta el final $P(t) = c+d\sqrt{t} \implies c = 240$, $d = -30$.

El experimento termina cuando la batería se agota, es decir $P(t) = 0$, resolviendo esto : $240-30\sqrt{t} = 0 \implies t = 64$.

Por tanto

$$P(t) = \begin{cases} 100-10/9t, & 0 \le t \le 36 \\ 240-30\sqrt{t}, & 36 < t \le 64 \end{cases}$$

5. Justifique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Existe $k > 0$ tal que el rango de la función definida por $f(x) = x^2+(2k-1)x+k^2$ es $[0;+\infty[$. (1 punto)

b) Si f es una función con dominio $\mathbb{R}$, valor mínimo igual a -2 y valor máximo de f igual a 4, entonces el rango de f es $[-2;4]$. (1 punto)

Solución:

a) Verdadero. El discriminante de la expresión cuadratica es $\Delta = (2k-1)^2 - 4k^2 = -4k+1$

Para $k = 1/4$, la función $f(x) = x^2 - 1/2x + 1/16 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$ tiene como rango $[0;+\infty[$.

b) Falso. Basta considerar como contraejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ 4, & x > 0 \end{cases}$$

San Miguel, 2 de mayo de 2024.