ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

Año: 2022 Número: 0920

Código de alumno

Segundo examen

Vesaga Baicón, Diego Eduardo

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: F. CAL

Horario: 114-1

Fecha: 4 / 7 / 22

Nombre del profesor: A. Castillo

Nota: 20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Abril 2016

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

Examen Final

Semestre Académico 2022-1

Horarios del Turno 1. Duración: 3 horas

Prueba elaborada por todos los profesores del curso.

INDICACIONES:

- Todo dispositivo electrónico deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos durante la evaluación.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.
- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.

---

1. Sea la función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(-x+1), \quad x > 1.$$

a) Esboce la gráfica de f, indicando su asíntota. **(1.5 ptos)**

b) Halle su rango. **(0.5 ptos)**

c) Justifique que f es inyectiva. **(1 pto)**

d) Determine la regla de correspondencia de la función inversa de f, indicando su dominio. **(1 pto)**

2. Halle el valor de los siguientes límites, si existen. Justifique su procedimiento.

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-16x}{2-\sqrt{x}}$. **(1 pto)**

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\frac{x\pi-2\pi}{1-x}\right)$ **(1.5 ptos)**

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{-\frac{1}{x^2-1}}$. **(1.5 ptos)**

Continúa...

3. En cada caso, justifique su respuesta. **(6 ptos)**

   a) Calcule en términos de n el valor de:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+3)}.$$

   b) Calcule en términos de n la suma

$$\sum_{k=2}^{n} \left[5k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - \frac{4}{n} k^2 \right]$$

   c) Sea $a_0, a_1, a_2 \cdots$ una sucesión de números reales. Si $a_0 = 0$ y para cada entero $n \geq 0$,

$$a_n + \frac{2}{a_{n+1}} = 3,$$

   pruebe, usando inducción, que $a_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$ para todo entero $n \geq 0$.

4. Sean $a > \frac{15}{4}$ y la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 0 \\ -\log_2(x - \frac{15}{4}), & \frac{15}{4} < x < a. \end{cases}$$

   a) Esboce la gráfica de f en el caso $a = 5$. **(1.5 ptos)**

   b) Para $a = 5$, determine el rango de f. Justifique. **(1 pto)**

   c) Halle el máximo valor de a de tal manera que f sea inyectiva. **(1.5 ptos)**

5. Dada la función $f(x) = \ln(1 - \text{sen}(x))$, halle: **(2 ptos)**

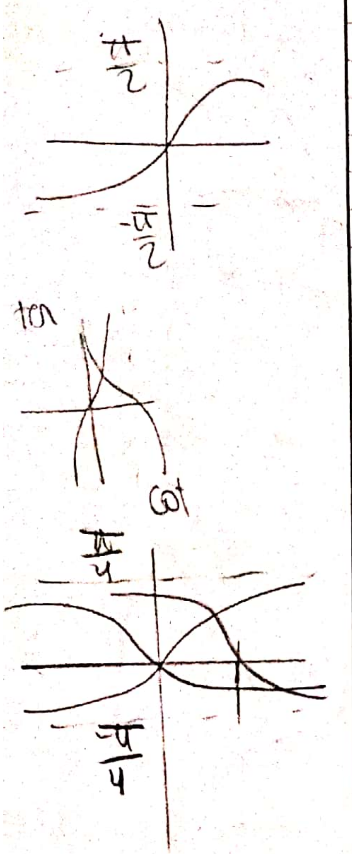
   a) El dominio de f.

   b) Los valores de x donde f alcanza su valor máximo, si existen.

Roy W. Sánchez Gutiérrez
Coordinador del curso.

San Miguel, 29 de junio de 2022

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



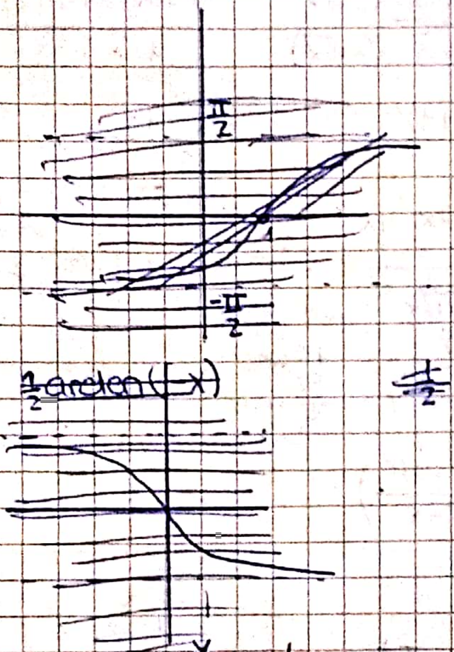
~~arctan(-x+1) = ½ arctan~~

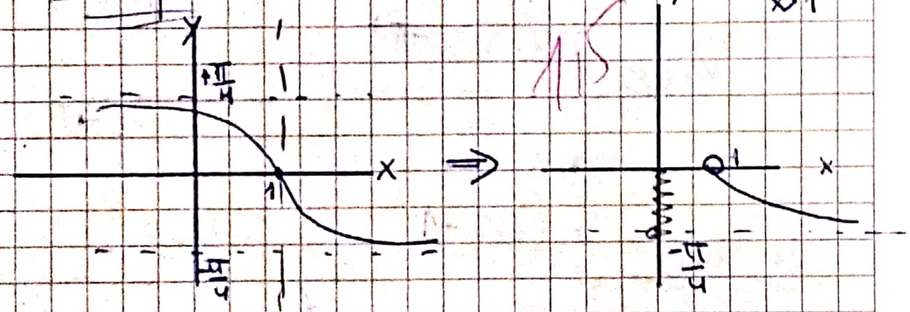
~~x+1 = -y+1~~

Presente aquí su trabajo

1

a)





1,5

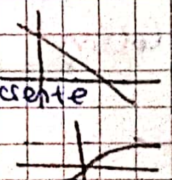
b) Rango: $]-\frac{\pi}{4};0[$

0,5

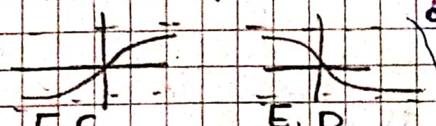
c) La función arctangente, es estrictamente creciente, y cuando se ~~[illegible]~~ refleja en y, se vuelve estrictamente decreciente, por lo que esto indica inyectividad

1,0

- $h(x) = -x+1$ estrictamente decreciente
- $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$ estrictamente creciente



$g \circ h$ = estrictamente decreciente por lo tanto inyectiva



d) $y = \frac{1}{2}\arctan(-x+1)$

$2y = \arctan(-x+1)$

$\tan(2y) = -x+1$

$x = 1-\tan(2y)$;

$f(x)^{-1} = 1-\tan(2x)$; $-\frac{\pi}{4} < x < 0$

$f^{-1}(x) = 1-\tan(2x)$; $-\frac{\pi}{4} < x < 0$

1,0

Escaneado con CamScanner

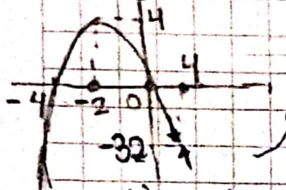
Presente aquí su trabajo

2)

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{2-\sqrt{x}} \frac{(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})} = \frac{x(x-4)(x+4)(2+\sqrt{x})}{\cancel{(4-x)}}$

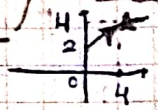
$\lim_{x\to 4} \frac{-(x)(x+4)(2+\sqrt{x})}{1} = \frac{-x^2-4x}{\frac{1}{2+\sqrt{x}}}$

$\lim_{x\to 4} -x^2-4x = -32$



$\frac{\lim_{x\to 4} -x^2-4x}{\lim_{x\to 4} \frac{1}{2+\sqrt{x}}} = \frac{-32}{\frac{1}{4}} = -128$ &

$\frac{\lim_{x\to 4} 1}{\lim_{x\to 4} 2+\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$



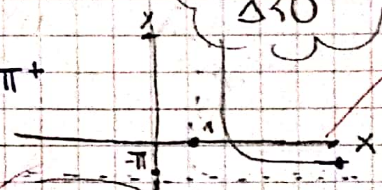
b) $\lim_{x\to +\infty} \cos\left(\frac{x\pi-2\pi}{1-x}\right)$

$\pi-2\pi=-\pi<0$

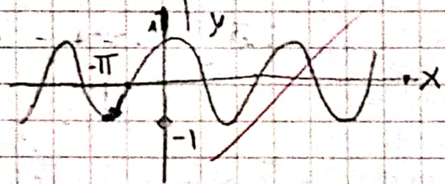
$\Delta<0$

Por composición

↳ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi(x-2)}{(-x+1)} = -\pi^+$



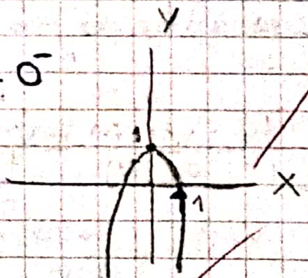
↳ $\lim_{x\to -\pi^+} \cos(x) = -1$



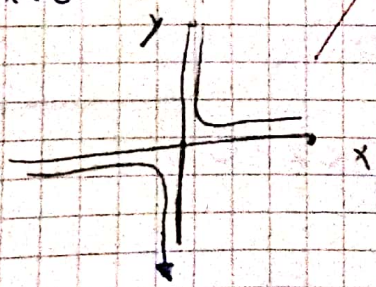
c) $\lim_{x\to 1^+} e^{-\frac{1}{x^2-1}}$

Por composición

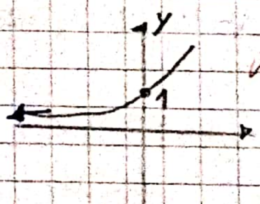
↳ $\lim_{x\to 1^+} -x^2+1 = 0^-$



↳ $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



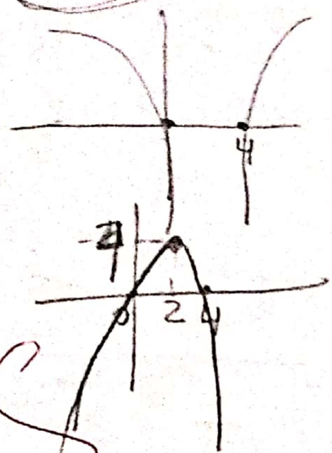
↳ $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ &



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{x(x-4)(x+4)}{\cancel{2-\sqrt{x}}}$

$\frac{1}{2+\sqrt{x}}$



$-x^2+4x$

$x=2$
$y=4$

$-x^2-4x$

-2

$-4-8=-12$

$-4(8)$

32

$-(4)(8)(4)$

-128

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva cálculos y desa (borrador)

c) $a_0 = 0$, Probar $a_n = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$, $n \geq 0$

$a_n + \frac{2}{a_{n+1}} = 3$

$a_0 + \frac{2}{a_1} = 3$

$a_1 = \frac{2}{3}$

PRUEBA:

$a_0 = 0 \rightarrow a_0 = \frac{2^1-2}{2^1-1} = 0$ (V)

$a_1 = \frac{2}{3} \rightarrow a_1 = \frac{2^2-2}{2^2-1} = \frac{2}{3}$ (V)

hipotesis:

$a_{n-1} = \frac{2^{n}-2}{2^n-1}$

$a_n = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$

tesis

$a_{n+1} = \frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1}$

Partiendo de la hipotesis

$a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = 3$

$\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1} + \frac{2}{a_{n+1}} = 3$

$\frac{2}{a_{n+1}} = 3 - \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{n+1} - 3 - 2^{n+1} + 2}{2^{n+1}-1}$

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^{n+1} - 1}{2^{n+1}-1}$

$\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}-1} = a_{n+1}$

VERDADERO

2

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

3

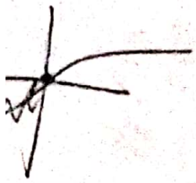
a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+3)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}$$

$1/2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

$$= \frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$



b) $$\sum_{k=2}^{n}\left[5k\binom{n}{k}-\frac{4}{n}k^2\right] = 5\sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k} - \frac{4}{n}\sum_{k=2}^{n} k^2$$

$$5\sum_{k=2}^{n} \cancel{k}\,\frac{(n-1)!\,n}{(k-1)!\,\cancel{k}\,(n-k)!} - \frac{4}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2\right)$$

$$5n\sum_{k=2}^{n}\binom{n-1}{k-1} - \frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)$$

2^2

$n-1$

$$5n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} - \frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}$$

$$5n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{n}-\cancel{\binom{n}{0}}\right) - \frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)$$

$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$$

1 2 1

$$5n\left(2^n-1-1\right) - \frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)$$

$$5n\left(2^n-2\right) - \frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)$$

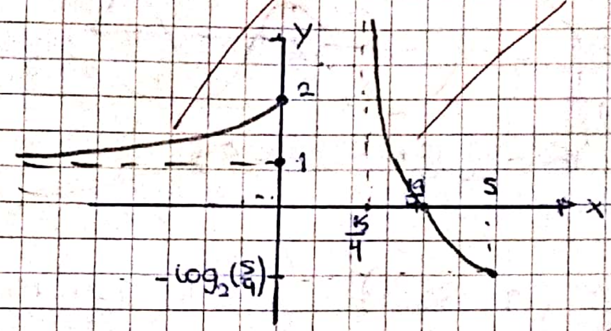
15

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

4)

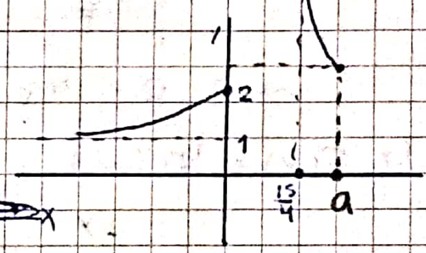
a) $a=5$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & , x \leq 0 \\ -\log_2\left(x - \frac{15}{4}\right) & , \frac{15}{4} \leq x < 5 \end{cases}$



b) Rango de F : ~~$]-\infty; -\log_2(\frac{5}{4})$~~

$]-\log_2\left(\frac{5}{4}\right) ; +\infty[$; Por gráfica

c)



el valor que tome f(a) debe ser ~~menor~~ mayor o igual a 2, para ser inyectiva

$-\log_2\left(a - \frac{15}{4}\right) \geq 2$

$\log_2\left(a - \frac{15}{4}\right) \leq -2$

$\left(a - \frac{15}{4}\right) \leq \frac{1}{4}$

$a \leq 4$

máximo valor 4

$\left(5 - \frac{15}{4}\right)$

$\left(\frac{5}{4}\right)$

$-\left(\log_2\left(\frac{5}{4}\right)\right)$

$\log_2\left(\frac{4}{5}\right)$

$2^x - \left(\frac{4}{5}\right)$ 0,8

$0 < x < a$

$\log_2 0 < \log_2 \quad < \log_2$

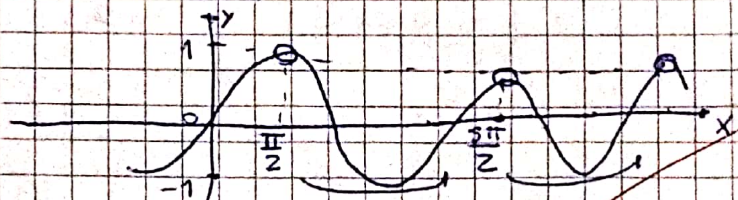
Escaneado con CamScanner

Presente aquí su trabajo

5) $\ln(1-\mathrm{sen}(x))$

a) (*) $1-\mathrm{sen}(x) > 0$

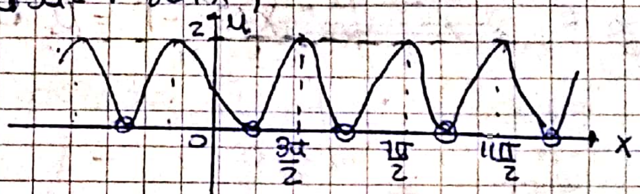
$1 > \mathrm{sen}(x)$



$x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2\pi n ; n \in \mathbb{Z}\}$

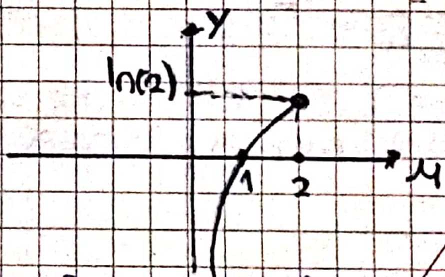
b) $f(x) = \ln(1-\mathrm{sen}x)$; $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

↳ $u = 1 - \mathrm{sen}\,x$



u ; $0 < u \leq 2$

↳ $f(x) = \ln(u)$, $0 < u \leq 2$



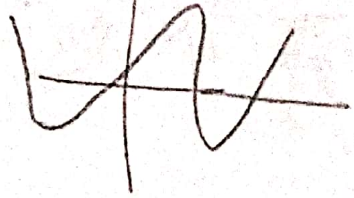
~~máximo valor alcanza en ...~~

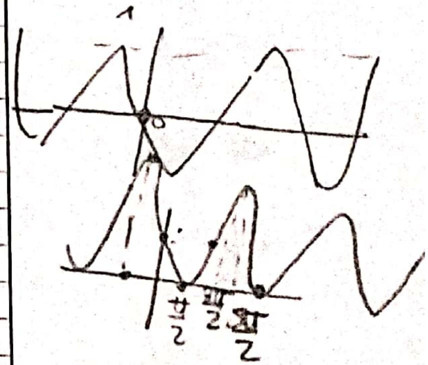
máximo valor $\ln(2)$ y se alcanza en $x \in \{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\mathrm{sen}(90) = 1$

$\frac{\pi}{2}$





-1

270

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\frac{3\pi}{2}$