Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Solución PD4

Semestre Académico 2021 -2

Horario: Todos.

1. Sean A y B matrices tales que

$$2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}.$$

a) Halle las matrices A y B.

Solución.-

Procedemos como en los sistemas de ecuaciones del álgebra común.

$$\begin{cases} 2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4A - 2B = \begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases} \leftrightarrow 7A = \begin{pmatrix} 21 & 49 & 14 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

De donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Reemplazando en la primera ecuación:

$B = 2A - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, es decir, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) Si C es una matriz $(c_{ij})_{2\times 3}$ tal que $c_{ij} = 2i + 3j - 4$, calcule $(A - B)C^T$.

Solución.-

La matriz C es de la forma $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Efectuando las operaciones indicadas obtenemos: $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Así, $(A - B)C^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 & 81 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Sea X una matriz columna de orden $n \times 1$ que satisface la condición $X^{\mathrm{t}}X = 1$. La matriz $H = I_n - 2XX^{\mathrm{t}}$ se llama matriz de Householder.

a) Demuestre que H es simétrica.

Solución. La matriz H es simétrica si se cumple que $H^{\mathrm{t}} = H$.

$$H^{\mathrm{t}} = \left(I_n - 2XX^{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{t}} = I_n^{\mathrm{t}} - \left(2XX^{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{t}} = I_n - 2(X^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}X^{\mathrm{t}} = I_n - 2XX^{\mathrm{t}} = H.$$

De esta manera, H es simétrica.

b) Sea $X = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que $X^{\mathrm{t}}X = 1$ y halle la matriz de Householder asociada a X.

Solución. En primer lugar vamos a demostrar que $X^{\mathrm{t}}X = 1$.

$$X^{\mathrm{t}}X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot 0 = 1.$$

Ahora hallaremos la matriz de Householder.

$$H = I_3 - 2XX^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sea A una matriz invertible tal que

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule A^{-1}.

Solución. Como $\operatorname{adj}(A) = |A| A^{-1}$, entonces

$$|\operatorname{adj}(A)| = \left| |A| A^{-1} \right| = |A|^3 |A^{-1}| \to 3 = |A|^2 \to |A| = \pm\sqrt{3}.$$

Luego,

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule $\det\left(\operatorname{adj}(A \cdot \operatorname{adj}(A^{-1}))\right)$.

Solución. Simplifiquemos la matriz interior del determinante:

$$A \cdot \operatorname{adj}(A^{-1}) = A \cdot \left| A^{-1} \right| \left(A^{-1} \right)^{-1} = \left| A^{-1} \right| A^2.$$

Luego,

$$\operatorname{adj}\left(A \cdot \operatorname{adj}(A^{-1})\right) \quad = \quad \operatorname{adj}\left(\left| A^{-1} \right| A^2 \right) = \left| |A^{-1}| \, A^2 \right| \left(|A^{-1}| A^2 \right)^{-1} = \left| A^{-1} \right|^3 \left| A^2 \right| \left| A^{-1} \right|^{-1} \left(A^2 \right)^{-1} = A^{-2}$$

De esta manera,

$$\det\left(\operatorname{adj}(A \cdot \operatorname{adj}(A^{-1}))\right) = \det\left(A^{-2}\right) = \frac{1}{3}.$$

4. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique sus respuestas.

a) Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2-2A+5I=0$, entonces $A^{-1}=\dfrac{1}{5}(2I-A)$.

Solución. Como $A^2-2A+5I=0$, tenemos

$$A(A-2I)=-5I \to A\cdot\left(-\frac{1}{5}(A-2I)\right)=I.$$

Así, $A^{-1}=\dfrac{1}{5}(2I-A)$.

La proposición es verdadera.

b) Si A,B y P son matrices cuadradas tales que $B=PAP^{-1}$ entonces $A^3=P^{-1}B^3P$.

Solución. Como $B=PAP^{-1}$, entonces

$$B^2=B\cdot B=\left(PAP^{-1}\right)\cdot\left(PAP^{-1}\right)=PA^2P^{-1}.$$

De manera similar,

$$B^3=B^2\cdot B=\left(PA^2P^{-1}\right)\cdot\left(PAP^{-1}\right)PA^3P^{-1}.$$

Luego, $A^3P^{-1}BP$.

La proposición es verdadera.

c) Considere las matrices $A=(a_{ij})$ de orden 33×5 y $B=(b_{ij})$ de orden 5×27, definidas de la siguiente manera:

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+2j}(i-3j), & j\le 3\\ 1-5j, & j>3\end{cases}\quad \text{y}\quad b_{ij}=\begin{cases} i^{j-1}, & i\le j\\ (i-5)^3, & i>j\end{cases}.$$

Si $C=(c_{ij})$ es la matriz producto $C=AB$, entonces $c_{13\ 2}+c_{5\ 20}=10$.

Solución.

$$c_{13\ 2}=\begin{pmatrix} a_{13\ 1} & a_{13\ 2} & a_{13\ 3} & a_{13\ 4} & a_{13\ 5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\\ b_{42}\\ b_{52}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -7 & -4 & -19 & -24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -8\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=23$$

$$c_{5\ 20}=\begin{pmatrix} a_{5\ 1} & a_{5\ 2} & a_{5\ 3} & a_{5\ 4} & a_{5\ 5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1\ 20}\\ b_{2\ 20}\\ b_{3\ 20}\\ b_{4\ 20}\\ b_{5\ 20}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -19 & -24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2^{19}\\ 3^{19}\\ 4^{19}\\ 5^{19}\end{pmatrix}$$

De donde notamos que $c_{13\ 2}+c_{5\ 20}\neq 10$

La proposición es falsa.

d) Si A y B son matrices invertibles de orden 7×7 tales que $\left|\dfrac{1}{|A|}AB\right|=5$, entonces $|B|=5$.

Solución. La proposición es falsa, pues las matrices A y B cuyos determinantes son: $|A|=\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$ y $|B|=1$ cumplen con la hipótesis $\left|\dfrac{1}{|A|}AB\right|=5$, sin embargo $|B|\neq 5$.

5. Considere el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & a & m & x \\ 2 & b & n & y \\ 2 & c & p & z \\ 2 & d & r & w \end{vmatrix} = \beta.$$

Calcule el valor de M en términos de β e indique las propiedades que ha usado.

$$M = 5\begin{vmatrix} 4 & a & m & 3x-2a \\ 4 & b & n & 3y-2b \\ 4 & c & p & 3z-2c \\ 4 & d & r & 3w-2d \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 6m & 6n & 6p & 6r \\ a & b & c & d \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ x & y & z & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & m & x \\ 1 & b & n & y \\ 2 & c+a & p+m & z+x \\ 1 & d & r & w \end{vmatrix}.$$

Solución. Calculamos los determinantes de manera independiente.

$$\begin{vmatrix} 4 & a & m & 3x-2a \\ 4 & b & n & 3y-2b \\ 4 & c & p & 3z-2c \\ 4 & d & r & 3w-2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & a & m & 3x \\ 4 & b & n & 3y \\ 4 & c & p & 3z \\ 4 & d & r & 3w \end{vmatrix} - \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & a & m & 2a \\ 4 & b & n & 2b \\ 4 & c & p & 2c \\ 4 & d & r & 2d \end{vmatrix}}_{C4=2C2} = 6\begin{vmatrix} 2 & a & m & x \\ 2 & b & n & y \\ 2 & c & p & z \\ 2 & d & r & w \end{vmatrix} + 0 = 6\beta$$

$$\begin{vmatrix} 6m & 6n & 6p & 6r \\ a & b & c & d \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} m & n & p & r \\ a & b & c & d \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = -6\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & b & c & d \\ m & n & r & p \\ x & y & z & w \end{vmatrix}}_{F1 \text{ por } F3} = -6\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & a & m & x \\ 2 & b & n & y \\ 2 & c & r & z \\ 2 & d & p & w \end{vmatrix}}_{|A|=|A^t|} = -6\beta$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & m & x \\ 1 & b & n & y \\ 2 & c+a & p+m & z+x \\ 1 & d & r & w \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & m & x \\ 1 & b & n & y \\ 1 & c & p & z \\ 1 & d & r & w \end{vmatrix}}_{F3:F3-F1} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & a & m & x \\ 2 & b & n & y \\ 2 & c & p & z \\ 2 & d & r & w \end{vmatrix} = \frac{\beta}{2}$$

Finalmente, $M = \dfrac{25\beta}{2}$.

6. Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1+\kappa & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\kappa & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

Solución. hacemos operaciones con filas:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1+\kappa & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\kappa & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{vmatrix} = F1:F1-(1+\kappa)F2 \begin{vmatrix} 0 & \kappa^2 & -\kappa & -\kappa \\ 1 & 1-\kappa & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{vmatrix} \\
&= \begin{matrix} F3:F3-F2 \\ F4:F4-F2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & \kappa^2 & -\kappa & -\kappa \\ 1 & 1-\kappa & 1 & 1 \\ 0 & \kappa & \beta & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & -\beta \end{vmatrix} = (1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \kappa^2 & -\kappa & -\kappa \\ \kappa & \beta & 0 \\ \kappa & 0 & -\beta \end{vmatrix} \\
&= -\left(-\kappa^2\beta^2 + \kappa^2\beta - \kappa^2\beta\right) \\
&= \kappa^2\beta^2.
\end{aligned}
$$

7. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Justifique la existencia de la matriz A^{-1}, luego halle dicha matriz.
   Solución. Como $\det(A) = -8$, entonces existe la matriz inversa A^{-1}. Luego,

$$
A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 12 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & -1/2 \\ -3/4 & 1/4 & -3/2 \\ -1/4 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}
$$

   b) Demuestre que $A(A+4I) = -4I$.
   Solución. En primer lugar, hallamos

$$
A + 4I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.
$$

   Luego,

$$
A(A+4I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_3.
$$

San Miguel, 6 de noviembre de 2021.