PUCP
Estudios
Generales Ciencias

# ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
## EXAMEN FINAL
SEMESTRE ACADÉMICO 2024-1

**Duración: 180 minutos**

TURNO 2 HORARIOS: **A101, B101, B102, B103, I101, I102, I103, 104, I105, 117, 118, 119, 120 Y 121**

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Tome las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos; de tener alguna emergencia, comuníqueselo a su jefe de práctica.
- Para retirarse del aula y dar por concluida su evaluación, deberá haber transcurrido al menos la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- **Puede usar una calculadora que no sea programable y que no grafique.**
- **No puede usar apuntes de clase ni libros.**
- **El examen consta de 5 preguntas. Debe justificar sus respuestas.**
- **Puede responder las preguntas en el orden que desee, sólo indique el número de la pregunta que está resolviendo al inicio de la misma.**

**Pregunta 1**

Considere las ecuaciones de los planos:

$$\begin{aligned}
\Pi_1&: x + \beta y + 2z = \beta + 2\\
\Pi_2&: x + \beta^2 y + 2z = \beta + 2\\
\Pi_3&: 3x + 3\beta y + (\beta^2 + 5)z = \beta^2 + 3\beta + 5\\
\Pi_4&: \beta x + \beta^2 y + (\beta^2 + 1)z = 2\beta^2 + 1
\end{aligned}$$

a) Indique qué operaciones deben hacerse con dichas ecuaciones para transformar el sistema en otro, representado por la siguiente matriz.

$$\left[\begin{array}{ccc:c}
1 & \beta & 2 & \beta + 2\\
0 & \beta^2 - \beta & 0 & 0\\
0 & 0 & \beta^2 - 1 & \beta^2 - 1\\
0 & 0 & \beta - 1 & \beta - 1
\end{array}\right]$$

(1 punto)

b) Analice para qué valores de $\beta$,

- el sistema tiene como conjunto solución un plano y halle la ecuación de dicho plano.
- el sistema tiene como conjunto solución un punto y halle sus coordenadas.
- el sistema tiene como conjunto solución una recta y halle su ecuación.
- el sistema no tiene solución.

(4 puntos)

**Pregunta 2**

a) Simplifique la siguiente expresión y dé la respuesta en forma binómica $a + bi$, donde $a$ y $b \in \mathbb{R}$.

$$E = \frac{(1 - \sqrt{3}\,i)^9(-3 + 3i)^{14}}{\left(-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)i\right)^{24}(1 + i)^{20}}$$

(3 puntos)

a) Halle el número complejo $z \neq -1$, si se sabe que su conjugado, $\bar{z}$ , satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{-4i}{\bar{z} + 1} + \frac{(2 - i)^2 - 3}{2} = 1 + i^4$$

(2 puntos)

**Pregunta 3**

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la identidad $I$ de orden 3.

a) Halle la matriz de cofactores $Cof(A - 7I)$. (1 punto)

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , halle la matriz $X$ que satisface la siguiente ecuación

$$(XA^t)^t = 7X^t + B.$$

(2 puntos)

**Pregunta 4**

Al intersecar la esfera $S$ con el plano $\Pi_1: z = 0$ se obtiene la circunferencia $C$ cuyo radio mide 4 unidades y cuyo centro se encuentra en la recta $\mathcal{L}: P = (6; 3; 2) + t(1; 2; 1), t \in \mathbb{R}$ . Se sabe además que el plano $\Pi_2: 4y + 3z - 12 = 0$ es tangente a la esfera $S$ en el punto $T(4; 3; 0)$.
Halle el centro de la circunferencia $C$ y la ecuación de la esfera $S$. (4 puntos)

(0,4,3)t

**Pregunta 5**

Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $A$ y $B$ son matrices no nulas de orden $n$, entonces $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (1,5 puntos)

b) Sean $A$ y $B$ matrices invertibles de orden 2. Si $BA^2 = 5A^{-1}B^{-1}$ y $det(B) = -5$ entonces $det(A) = -1$. (1,5 puntos)

Examen elaborado por los profesores del curso
Coordinadora de teoría. Prof. Cecilia Gaita
San Miguel, 1 de julio de 2024

5

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII
PUCP

Año | Número
2 0 2 4 | 2 3 4 1
Código de alumno

**Segundo examen**

Ruiz Rodriguez, Misael Fabrizio
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H113

Fecha: 01/07/24

Nombre del profesor: Omar Cárdenas

Nota
19

Firma del profesor

## INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

na exclusiva para
culos y desarrollos
(borrador)

1)

1a)
$$A_a = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & B & 2 & & B+2 \\ 1 & B & 2 & & B+2 \\ 3 & 3B & (B^2+5) & & B^2+3B+5 \\ B & B^2 & B^2+1 & & 2B^2+1 \end{array}\right)$$

$f2-f1=f2$
$-3f1+f3=f3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & B & 2 & B+2 \\ 0 & B^2-B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2-1 & B^2-1 \\ B & B^2 & B^2+1 & 2B^2+1 \end{array}\right)$$

$-Bf1+f4=f4$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & B & 2 & B+2 \\ 0 & B^2-B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2-1 & B^2-1 \\ 0 & 0 & B^2-2B+1 & B^2-2B+1 \end{array}\right)$$

$-1f3+f4=f4$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & B & 2 & B+2 \\ 0 & B^2-B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2-1 & B^2-1 \\ 0 & 0 & -2(B-1) & -2(B-1) \end{array}\right)$$

$\frac{f4}{-2}=f4$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & B & 2 & B+2 \\ 0 & B^2-B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2-1 & B^2-1 \\ 0 & 0 & B-1 & B-1 \end{array}\right)$$

Profe, 1b al final

~~$\pi 4: (B-1)z = B-1$~~
~~Si $B=1$~~
~~$\pi 4: 0=0$ tautología~~
~~$\pi 3: (B^2-1)z = (B^2-1)$ $0=0$ tautología~~
~~$(B+1)(B-1)z = (B+1)(B-1)$~~

~~$(B^2-B)y=0$~~
~~$B(B-1)\,y=0$~~
~~$0\,y=0$~~
~~$0=0$ Tautología~~

~~$x+1y+2z=3$~~
~~$y+x+2z=3$; un plano~~

~~∴ Si $B=1$, la solución es un plano~~
~~$P: x+y+2z=3$~~

~~Si $B=0$~~
~~$-1z=-1$~~
~~$z=1$~~
~~$(B^2-1)z=0$~~ ~~contradicción~~

~~Si $B=0$, no hay solución~~

$B \quad 2 \quad B+2$
$B^2 \quad 2B \quad B^2+2B$
$B^2 \quad B^2+1 \quad 2B^2+1$
$B^2+1-2B \quad B^2+2B+1$

$+5 -3B - C$
$2 - 3$

$+4=f4 \quad B^2-2B$
$2B^2+1-B^2-2B$
$B^2-2B+1$

$B^2+1 \quad 2B^2+1$
$-B^2-2B \quad -B^2-2B$
$0 \quad B^2-2B+1$

$(B-1)^2 \quad (B-1)^2$

$(B+1)(B-1)_x$

~~Para casos donde $B \neq -1, 0$~~

~~$(B+1)z = (B+1)$~~

~~$B(B-1)y = 0$~~

~~$y = 0$~~

~~$x + By + 2z = B+2$~~

$x - B + 2z = B + 2$

$x - 0 + 2 = -1 + 2$

$x = -1$

solución un punto:

$P: (-1, 0, 1)$

~~$S: P: (B, 0, 1), B \in \mathbb{R}$~~

~~No hay valores para los cuales no haya solución.~~

TOTAL

5.0
5.0

2)

2a) Reescribimos $m = (1 - \sqrt{3}i) =$

$\theta + B = 2\pi$

$|m| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$B = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$m = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ 0.5P

$m^9 = 2^9\left(\cos 15\pi + i\,sen\,15\pi\right)$

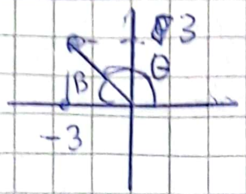
$m^9 = 2^9\left(\cos(14\pi+\pi) + i\,sen(14\pi+\pi)\right) = 2^9(\cos\pi + i\,sen\,\pi)$

$\cancel{n = -3+\sqrt{3}i}$ $\quad n = -3+3i$

$\theta + \beta = \pi \qquad |n| = 3\sqrt{2}$

$\beta = \arctan\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$



$n = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,sen\frac{3\pi}{4}\right)$

$n^{14} = 3^{14}2^7\left(\cos\frac{21\pi}{2} + i\,sen\frac{21\pi}{2}\right) = 3^{14}2^7\left(\cos\left(10\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\,sen\left(10\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 0.5P

$n^{14} = 3^{14}2^7\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

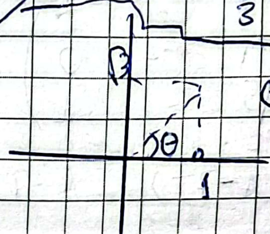
$p = -2\cos\frac{2\pi}{3} + 2\,sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)i$

$sen\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1P

$p = +2\left(-\cos\frac{2\pi}{3} + i\,sen\frac{2\pi}{3}\right)$

$\theta = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$p = 1 + \sqrt{3}i$



$|p| = 2$

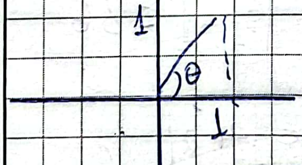
$p = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,sen\frac{\pi}{3}\right)$

$p^{24} = 2^{24}(\cos 8\pi + i\,sen\,8\pi) = 2^{24}(\cos 0 + i\,sen\,0)$

$q = 1+i$

$|q| = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$



$q = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right)$

$q^{20} = 2^{10}\cos(5\pi + i\,sen\,5\pi)$

$q^{20} = 2\cos(4\pi+\pi) + i\,sen(4\pi+\pi)$

$q^{20} = 2^{10}(\cos\pi + i\,sen\,\pi)$

Reemplazando todo en E

$E = \frac{m^9 n^{14}}{p^{24}q^{20}} = \frac{2^9(\cos\pi + i\,sen\,\pi)\cdot 3^{14}2^7\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}\right)}{2^{24}(\cos 0 + i\,sen\,0)\cdot 2^{10}(\cos\pi + i\,sen\,\pi)}$

$E = 2^{-18}3^{14}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}\right)$ 0.5P

$sen\frac{\pi}{2} = 1$

$E = 2^{-18}3^{14}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}\right) = 2^{-18}3^{14}i = \frac{3^{14}}{2^{18}}i + 0$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$2^9 \cdot (3\sqrt{2})^{14}$

$(2)^{24}$

120

$8\pi + 0$

$14\pi + \pi$

$\frac{2^9\,3^{14}\,2^7}{2^{24}\,2^{10}}$

$\frac{2^{16}\,3^{14}}{2^{34}}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2b) $\frac{-4i}{\bar{z}+1} + \frac{(2-i)^2-3}{2} = 1+i^4$

$\frac{-4i}{\bar{z}+1} + \frac{-4i}{2} = 2$

$\frac{-4i}{\bar{z}+1} - 2i = 2$

$\frac{-4i}{(\bar{z}+1)} = 2+2i$

$\frac{-4i}{2+2i} = \bar{z}+1$

$-1-i = \bar{z}+1$

$-2-i = \bar{z}$

$\therefore z = -2+i$

1P

1P

---

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $-7I = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

3.0/3.0 TOTAL

3a) Piden cof (A−7I) $A-7I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ ✓ 0.25P

$Cof(A-7I) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$

$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 48$ $M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 24$ $M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 36$

$M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 13$ $M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 29$ $M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 6$

$M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -8$ $M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$ $M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 24$

$Cof(A-7I) = \begin{pmatrix} 48 & 24 & 36 \\ 13 & 29 & 6 \\ -8 & -4 & 24 \end{pmatrix}$ ✓ 0.75P

$1+i^4 \quad \frac{(2-i)^2-3}{2}$

$-1-i = \bar{z}+1$

$-2-i = \bar{z}$

$-2+i = z$

$32-8$

$-12 \quad -1 = -13$

$24+5 = 29$

$+4 = 10 = (-6)$

$-4+40 = 36$

$4-10 = -6$

$-7$

$8$

$32-8 = 24$

$-12-1 = -13$

$24+5 = 29$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

# Presente aquí su trabajo

3b) $(XA)^t = 7X^t + B$

$A X^t = 7X^t + B$

$A X^t - 7X^t = B$

$(A - 7I) X^t = B$

$(A-7I)^{-1}(A-7I) X^t = (A-7I)^{-1} B$

$X^t = (A-7I)^{-1} \cdot B$ 0.5P

Hallando $(A-7I)^{-1} = \frac{1}{|A-7I|} \text{Adj}(A-7I)$ ; $|A-7I| \neq 0$

$$|A-7I| = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -180$$

$$\text{Adj}(A-7I) = \text{Cof}(A-7I)^t = \begin{pmatrix} 48 & 13 & -8 \\ 24 & 29 & -4 \\ 36 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A-7I)^{-1} = -\frac{1}{180}\begin{pmatrix} 48 & 13 & -8 \\ 24 & 29 & -4 \\ 36 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X^t = -\frac{1}{180}\begin{pmatrix} 48 & 13 & -8 \\ 24 & 29 & -4 \\ 36 & 6 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^t = -\frac{1}{180}\begin{pmatrix} -35 & 13 & -8 \\ 5 & 29 & -4 \\ -30 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$ 1P

$$X = -\frac{1}{180}\begin{pmatrix} -35 & 5 & -30 \\ 13 & 29 & 6 \\ -8 & -4 & 24 \end{pmatrix}$$ 0.5P

Profe, la 4 está después de la 5a y 5b

5)a) Falso

Contraejemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 & 144 \\ 180 & 224 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ ; $2AB = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 & 78 \\ 91 & 106 \end{pmatrix}$ ; $2AB = \begin{pmatrix} 36 & 44 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}$

Borrador (margen):

$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 67 & 78 \\ 91 & 106 \end{pmatrix}$

$2AB = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 44 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}$

$(A+B)(A+B)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 & 144 \\ 180 & 224 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = ($

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}110 & 132\\ 192 & 228\end{pmatrix}$$

15

$\therefore (A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

$$\begin{pmatrix}116 & 144\\ 180 & 224\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}110 & 132\\ 192 & 228\end{pmatrix};$$ lo cual es absurdo

Es falso

(4, 3, 0)

(4, 7, 3)

5b)

$|BA^2| = |5A^{-1}B^{-1}|$ ; $|B| = -5$

$|B||A^2| = 5^2|A^{-1}||B^{-1}|$

$|B||A^2| = 5^2 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|B|}$

Corrección:

$-5|A^2| = 5^2 \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{-5}$

1,25

$5^2|A|^2 = 5^2\frac{1}{|A|}$

(4, -1, 0)

$-5|A^3| = -5$

$|A^3| = -1$

$|A|^3 = 1$

$|A| = 1$

$|A| = -1$, $\boxed{\text{Única Solución real}}$

La proposición es verdadera

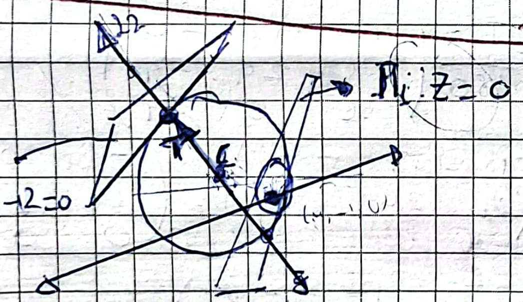
La proposición es falsa

$r=2$

4)

(4, 3+4, 3)

(4, 7, 3)



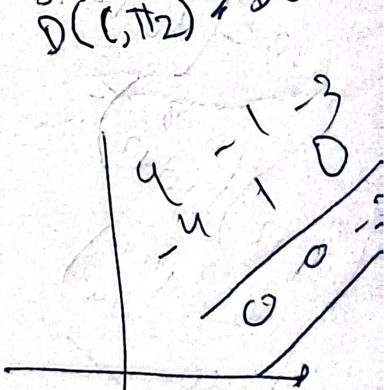

$\Pi_2: 4y+3z-12=0$

$\vec{n}=(0,4,3)$

$r_{circ}=4$

$T(4,3,0)$

$D(C,\Pi_2) = D(C,\Pi_1)$



$L: P=(6,3,2)+t(1,2,1);\ t\in\mathbb{R}$

Primero, el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ es un punto que intersecta a $L$ y a $\Pi_1$

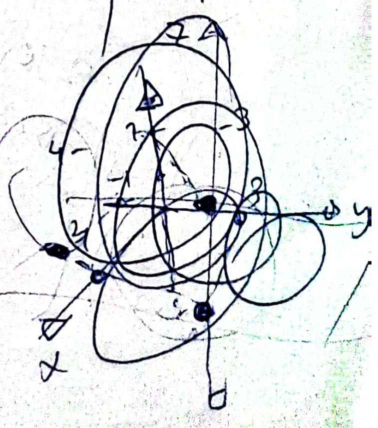
$L\cap\Pi_1 = C_1$

$C_1 = (6+t,\ 3+2t,\ 2+t);\ t\in\mathbb{R}$

$\rho: 2+t=0$

$t=-2$

$C_1=(4,\ -1,\ 0)$



$L_2: P=P_0+\vec{v}\,r;\ r\in\mathbb{R}$ ; La pasa por el punto de tangencia y el centro de la circ.

$P_0$ será el punto de tangencia

$P_0 = T = (4,3,0)$

$\vec{v}$ será una paralela al vector normal del plano $\vec{n} = (0,4,3)$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

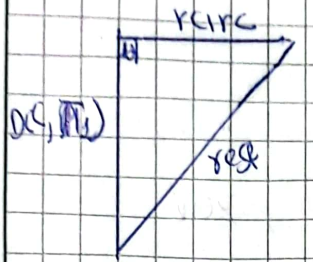
**Presente aquí su trabajo**

$\therefore L_2 = (4,3,0) + r(0,4,3)\ ;\ r \in \mathbb{R}$

El centro pertenece a esa recta.

$C = (4;\ 3+4r,\ 3r)\ ;\ r \in \mathbb{R}$

Además sabemos que:



Por propiedad $r_{circ} = 16$

$\underbrace{r_{est} = D(C,\pi_2)}_{\downarrow}$

son tangentes

$D(C,\pi_2)^2 = r_{circ}^2 + D(C,\pi_1)^2$

$\left(\dfrac{|4(3+4r)+3(3r)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)^2 = 16 + \left(\dfrac{|3r|}{\sqrt{1^2}}\right)^2$

$\left(\dfrac{|25r|}{5}\right)^2 = 16 + (|3r|)^2$

$25r^2 = 16 + 9r^2$

$16r^2 = 16$

$r^2 = 1$

$\sqrt{r^2} = 1$ ; $r = 1 \ \vee\ r = -1$

$3(3)$

$|3(1)| = 3$

Para saber qué valor tomar; $C_1 = (4;\ -1,\ 0)$ $\quad T = (4,3,0)$

Si $r = 1$

$C = (4,7,3)$

$D(C,\pi_2) = 5 = r_{est}$

$D(C,\pi_1) = 3$

$T = (4,3,0)$

$\overline{CT} = (0,-4,-3)$

$\|\overline{CT}\| = 5 = \sqrt{(-4)^2+(3)^2}$

$\overline{C_1C} = (0,8,3)$

$\|\overline{C_1C}\| = \sqrt{73} = \sqrt{(8)^2+(3)^2}$

$\dfrac{|4(7)+3(3)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5$

$r = -1$

$C = (4,-1,-3)$

$D(C,\pi_2) = 5 = r$

$D(C,\pi_1) = 3 \rightarrow |(-3)| = 3$

$\overline{CT} = (0,4,3)$

$\|\overline{CT}\| = 5 = \sqrt{4^2+3^2}$

$\overline{C_1C} = (0,0,-3)$

$\|\overline{C_1C}\| = 3 = \sqrt{(3)^2}$

$\dfrac{|4(-1)+3(-3)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5$

Pero $\|\overline{C_1C}\| = D(C,\pi_1)$, debido a que $C_1 \in \pi_1$

Solo cumple en $r = -1$

$\therefore$ ~~$C = (\ldots)$~~ $\quad C = (4,-1,-3)$

$r_{est} = 5$

$\therefore S:\ (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 25$

Borrador:

4 -1 -3
-4 1 0
0 0 3

4 7 3
-4 1 0
0 8 3

$4(3+4r) + 3(3r) - 12$

$12 + 16r + 9r - 12$

$25r$

3 -4 3 -1

$C = (4, -1, -3)$

$(0,-4,3) = (4, 3+4r, 3r)$

4 -1 -3
-4 1 0
0 0 3

4 7 3
-4 1 0
0 8 3

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & B & 2 & & B+2 \\ 0 & B^2-B & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & B^2-1 & & B^2-1 \\ 0 & 0 & B-1 & & B-1 \end{array}\right)$$

$\pi_4$: $B-1(z)=B-1$

Si $B=1$ ✓ $(1-1)(z)=1-1$

$0=0$ Tautología ; $z \in \mathbb{R}$

$\pi_3$: $(B^2-1)(z)=B^2-1$

$(1^2-1)(z)=(1^2-1)$

$0=0$ Tautología ; $z \in \mathbb{R}$

$\pi_2$: $(B^2-B)y=0$

$(1^2-1)\ y=0$

$0=0$ Tautología ; $y \in \mathbb{R}$

$\pi_1$: $x+By+2z=B+2$

$x+1y+2z=1+2$

$x+y+2z=3$

$x+y+2z-3=0$

∴ La solución si $B=1$ es un plano;

$\rho = x+y+2z-3=0$

Si $B=0$ ✓ $\pi_4$: $(B-1)z=B-1$

$-1z=-1$

$z=1$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

# Presente aquí su trabajo

$\pi_3$: $(B^2 - 1)\, z = B^2 - 1$

$-1\, z = -1$

$z = 1$

$\pi_2$: $B(B-1)\, y = 0$

$0 = 0$ tautología

Como nos va a faltar una ecuación, la creamos

$y = t;\ t \in \mathbb{R}$

$\pi_1$: $x + By + 2z = B+2$

$x + 2 = 2$

$x = 0$

$$\therefore L = \begin{cases} x = 0 + 0t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + 0t \end{cases}$$

$\therefore$ si $B = 0$, la solución es una recta

$L: P = (0,0,1) + (0,1,0)\,t;\ t \in \mathbb{R}$

Ahora, si $B \neq 0, 1$,

$\pi_4$: $(B-1)\, z = B-1$

$z = 1$

$\pi_3$: $(B^2-1)\, z = (B^2-1)$

$z = 1$

$\pi_2$: $(B^2 - B)\, y = 0$

$y = 0$

$\pi_1$: $x + By + 2z = B+2$

$x + 2 = B+2$

$x = B$

¿$B = -1$?

Si $B \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$ la solución es un punto

$P = (B, 0, 1)$

No existen valores de $B \in \mathbb{R}$ que hagan que el sistema no tenga solución

Profe, si llegó hasta esta parte del examen, gracias por todo, aprendí bastante y me gustó el curso. Ojalá volverlo a tener como profe.
Pd. Perdone por la letra en egipcio. Atte: Miguel Ruiz

Corrección: si $B = -1$

$\pi_4$: $(B-1)\, z = B-1$

$(-1-1)\, z = -1-1$

$z = 1$

$\pi_3$: $(B+1)(B-1)\, z = (B+1)(B-1)$

$0 = 0$ Tautología

$\pi_2$: $B(B-1)\, y = 0$

$-1(-1-1)\, y = 0$

$y = 0$

$\pi_1$: $x + By + 2z = B+2$

$x + 2 = 1 \quad x = -1$

$\therefore$ Si $B = -1$, la solución es un punto

$P = (-1, 0, 1)$