ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Cuarta Práctica Calificada

Semestre Académico 2019 -2

Duración: 110 minutos

Elaborado por los profesores del curso.

Todos los horarios.

Advertencias:

- No se permite el uso de calculadoras durante la evaluación.
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

---

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Determine la matriz adjunta de A. (1.5 Ptos.)

b) Halle la matriz inversa de A. (0.5 Ptos.)

c) Resuelva la ecuación matricial $AX = B$. (2 Ptos.)

2. Sean los puntos $P(1,0)$ y $Q(0,1)$ y la recta $\mathscr{L} : y = 2x$.

a) Halle los puntos P', simétrico de P, y Q' simétrico de Q, respecto de $\mathscr{L}$. (1 Pto.)

b) Verifique que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

es aquella formada por las componentes de los vectores (de posición) $\overrightarrow{OP'}$ y $\overrightarrow{OQ'}$, respectivamente; donde O es el origen de coordenadas. (1 Pto.)

c) Halle las matrices A^5 y $A^5 \times A^T$. (2 Ptos.)

Continúa ···

3. Sea A la matriz de orden $n \times n$, (4 Ptos.)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times 2} = 3-1 = 2 = 2^{2-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix}$$

$8-2-2 = 4 = 2^{3-1}$

Si $\det(A) = 128$, halle n.

4. a) Si $a+b+c = 10$, calcule el determinante de la matriz (2 Ptos.)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a-2 & b+3 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{pmatrix}.$$

$f_2 - f_3$, $f_3 - f_2$, $3a + 3c + 36$

b) ¿Para qué valores de k la matriz (2 Ptos.)

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k & k \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & k & k+1 & 0 \\ k & 0 & k+1 & k \end{pmatrix}$$

es invertible? $k(-k-1) + (k-k^2)$

5. Determine la falsedad o veracidad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

F a) Si A es una matriz simétrica, entonces $\det(A)$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal de A. (F) $A = A^T$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 6-16 = -10$ (1 Pto.)

V b) Si A es una matriz cuadrada de orden 5 tal que $A = -A^t$ entonces $\det(A) = 0$. (V) (1 Pto.)

F c) Sean C y D matrices de orden $n \times n$. Si $M = \frac{1}{2}C$, $N = 4D$, $\det(C) = 4$ y $\det(D) = 8$ entonces $\det(MN) = 2^{n+3}$. (F) (1 Pto.)

V d) Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces la matriz $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica (V) (1 Pto.)

$\det(M) = \det(\frac{1}{2}C)$

$\det(M) = \frac{1}{2^n}\underbrace{\det(C)}_{4} \Rightarrow \det(M) = 2^{2-n}$

$\det(N) = \det(4D)$

$\det(N) = 4^n \underbrace{\det(D)}_{2^3} = 2^{2n+3}$

$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T = \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A$

$B + B^T = B^T + B$

$A + A^T = (A + A^T)^T = A^T + A$

$S^T = \frac{1}{2}(A + A^T) = S \Rightarrow S = S^T$, V

Roy Sánchez Gutiérrez
Coordinador de Prácticas

San Miguel, lunes 18 de Noviembre del 2019.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

Práctica

Año: 2019
Número: 6030
Código de alumno

Ganoza Chavez, Daniel Alejandro
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

ENTREGADO 27 NOV. 2019

Curso: AMGA

Práctica Nº: 4

Horario de práctica: 103

Fecha: 18/11/19

Nombre del profesor: R. Quispe

Nota
20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) ARD

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Mayo 2018

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1) a)

$$\text{Cofact}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -13 & 8 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

1,5

$$\text{Adj}(A) = \text{Cofact}(A)^T = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}, \quad \det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 7 - 13 + 16 = 10$$

0,5

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}}{10}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x+y+2z \\ 3x-y+z \\ -x+3y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x+y+2z &= 2 \\ 3x-y+z &= 6 \end{aligned} \quad (+)$$

$$2x+3z=8$$

$$\begin{aligned} -x+3y+4z &= 4 \\ -x+y+2z &= 2 \end{aligned} \quad (-)$$

$$2y+2z=2$$

$$y+z=1$$

2

$$\Rightarrow 3x-y+z=6$$

$$3\left(\frac{8-3z}{2}\right)+z-1+z=6$$

$$\frac{24-9z}{2}+2z=7$$

$$24-5z=14$$

$$z=2$$

$\boxed{\cancel{z=\frac{8}{5}}}$ $\boxed{z=2}$

$$2x+3(2)=8$$

$$x=1$$

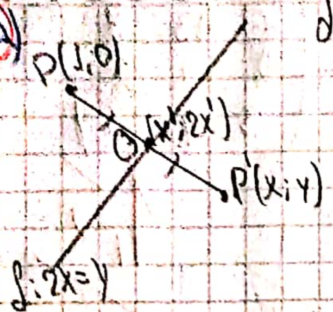
$$\Rightarrow y+z=1$$

$$y=-1$$

$\boxed{\cancel{x=\frac{8}{5}}}$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) a)



$d(P;L) = \frac{|y-2x|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{(x'-1)^2+(2x')^2}$

$\frac{4}{5} = 5x'^2-2x'+1$

$25x'^2-10x'+1=0$

$5x' \quad -1$

$5x' \quad -1$

$\Rightarrow O\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$

$d(P';L) = \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{|y-2x|}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$= 2 = |y-2x|$

$2 = 2x-y$ $\qquad$ $2 = y-2x$

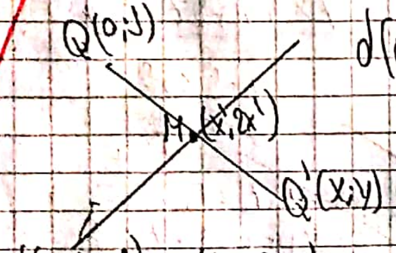
$P(1;0)$ $\qquad$ $y = 2+2x$

$\Rightarrow d(P';O) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\left(2+2x-\frac{2}{5}\right)^2}$

$\frac{4}{5} = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} + 4x^2 + \frac{32}{5}x + \frac{64}{25}$

$\frac{4}{5} = 5x^2+6x+\cancel{\frac{65}{25}}\frac{13}{5}$

$0 = 5x^2+6x+\frac{9}{5} \Rightarrow x = -\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{P' = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)}$



$d(Q;L) = \frac{|y-2x|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{x'^2+(2x'-1)^2}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{x'^2+4x'^2-4x'+1}$

$\frac{1}{5} = 5x'^2-4x'+1$

$1 = 25x'^2-20x'+5$

$0 = 25x'^2-20x'+4$

$x' = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$

$d(Q';L) = \frac{|y-2x|}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{|y-2x|}{\cancel{\sqrt{5}}} \Rightarrow 1 = |y-2x|$

$1 = y-2x$ $\qquad$ $1 = 2x-y$

$Q(0;1)$ $\qquad$ ✓

$\Rightarrow d(Q';M) = \sqrt{\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\left(2x-1-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} + 4x^2 - \frac{36}{5}x + \frac{81}{25} = \frac{1}{5}$

$5x^2 - 8x + \cancel{\frac{85}{25}}\frac{17}{5} = \frac{1}{5}$

$5x^2-8x+\frac{16}{5} = 0$

$25x^2-40x+16=0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{Q' = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

(b) $\overrightarrow{OP'} = P' - O = P'$; $\overrightarrow{OQ'} = Q' - O = Q'$

$\Rightarrow P' = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ $\quad Q' = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$

1

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{OP'} \\ \overrightarrow{OQ'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Matriz identidad

2

$\Rightarrow A^5 = \underbrace{A^2}_{I} \cdot \underbrace{A^2}_{I} \cdot A = A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^5 \times A^T = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

③ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2\times 2} = 3-1 = 2 = 2^{2-1}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8-2-2=4$
2^{3-1}

$\Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}_{n\times n} = 128 = 2^{n-1}$

$2^7 = 2^{n-1}$

$\Rightarrow n = 8$

4

④ a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+2 & b+3 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} b & c \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a & c \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & b \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= -b - 3c + 3(-a+2c) + 2(3a+2b)$

$= -b - 3c - 3a + 6c + 6a + 4b$

$= 3(\underbrace{a+b+c}_{10})$

$= 30$

2

b) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & k & k \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & k & k+1 & 0 \\ k & 0 & k+1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \neq 0$

2

$\Rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & k & k \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & k & k+1 & 0 \\ k & 0 & k+1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} \to f_3 - f_2 \\ \to f_4 - f_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & k & k \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$k\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & k \\ k & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$k(-k-1) + (k-k^2) + k(-k) + 1 - k^2$

$-k^2 \cancel{-k} \cancel{+k} - k^2 - k^2 + 1 - k^2 \neq 0$

$-4k^2 + 1 \neq 0$

$k^2 \neq \frac{1}{4}$

$k \neq \frac{1}{2} \vee k \neq -\frac{1}{2}$

$\therefore\ k \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

5) a) Matriz simétrica: $A = A^T$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = A \Rightarrow \det(A) = \boxed{ac - b^2}$

Diagonal principal de A: a y c

$\therefore$ (F)

1.0

b) $A = -A^t \Rightarrow \det(A) = \det(-A^t)$

$\det(A) = (-1)^5 \det(A^t)$

$\det(A) = -\det(A^t) = -\det(A)$

$\therefore$ El único valor posible es cero (V)

1.0

c) ~~det~~ $M = \frac{1}{2}C \Rightarrow \det(M) = \det(\frac{1}{2}C)$

$= \frac{1}{2^n} \underbrace{\det(C)}_{4} = 2^{2-n}$

$N = 4D \Rightarrow \det(N) = \det(4D)$

$= 4^n \underbrace{\det(D)}_{8} = 2^{2n} \cdot 2^3 = 2^{2n+3}$

$\Rightarrow \det(MN) = \det M \cdot \det N$

$= 2^{2-n} \cdot 2^{2n+3}$

$= 2^{n+5}$ $\therefore$ (F)

1.0

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

d) ~~Demostrar: $A+A^T=(A+A^T)^T$~~

~~$B = B^T$~~

En una matriz n x n y cuadrada la suma de A^T+A siempre sera simétrica

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & g & \cdots & k \\ a & 2 & h & \cdots & j \\ \vdots & e & 3 & i & \vdots \\ \vdots & \vdots & e & \ddots & \vdots \\ b & d & f & \cdots & n \end{pmatrix}_{n\times n} + \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & b \\ g & 2 & c & \cdots & d \\ \vdots & h & 3 & e & f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & j & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

10

La suma ~~será~~ igual de todos los elementos menos los de la diagonal principal serán los mismos.

$\therefore$ (V)