ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Algebra Matricial y Geometría Analítica

Examen Final

Semestre Académico 2018 -1

Horario: Todos

Duración: 3 horas

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni calculadoras.
- Enumere las páginas del cuadernillo en la parte superior del 1 al 12 y utilice cada página para resolver cada una de las preguntas, según el orden establecido en la prueba.
- Resuelva TODAS las preguntas.

---

1. Considere las rectas $\mathscr{L}_1 : P = (1,0,2) + t(1,2,3)$, $t \in \mathbb{R}$, y $\mathscr{L}_2 : x - 3 = -z = \frac{y-2}{x}$. Halle

   a) La posición relativa de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ (esto es, paralelas, alabeadas, etc.) (1 pt)

   b) La ecuación cartesiana del plano $\mathscr{P}$ que contiene a la recta $\mathscr{L}_2$ y es paralelo a la recta $\mathscr{L}_1$. (2 pt)

   c) Una ecuación vectorial de la recta que resulta de intersecar $\mathscr{P}$ con el plano $x + y = 0$. (1 pt)

2. Considere las matrices (3 pt)

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3x & 3y & 3z \\ 4+2x & 5+2y & 6+2z \end{pmatrix}.$$

   Si se sabe que $\det(A) = 4$, calcule $\det\left(3AA^T A^{-1}\right) + \det(B)$.

3. Dado el sistema (3 pt)

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + z = -2\alpha + 5 \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 4x + y - \alpha z = \alpha \end{cases},$$

   determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los casos en que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones y no tenga solución.

4. Sea $w = \sqrt{3} - i$. Si $z = (2i + w)^9$, se pide:

   a) Halle la forma polar de $\overline{z}$. (1 pt)

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII **PUCP**

ENTREGADO
10 JUL 2018

Año | Número

2	0	1	8		1	4	6	0

Código de alumno

Segundo examen

Yesan Vasquez, José Andrés
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H-124-1

Fecha: 28 / 06 / 2018

Nombre del profesor: J. Flores

Nota
18

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{x(x-3)}{1} = \frac{-7x}{-7} = \frac{y-2}{1}$

$\frac{x-3}{\frac{1}{x}} = \frac{7}{\frac{-1}{x}} = \frac{y-2}{1}$

$\vec{v} = (\frac{1}{x}, ; \frac{-1}{x})$

$\vec{v} = \frac{1}{x}(1, x, -1)$

$x \neq 0$

$\begin{cases} t = x-3 & t+3=x \\ t = -7 & -t=7 \\ t = \frac{y-2}{x} & xt+2=y \end{cases}$

$P = (x, y, z)$
$= (t+3, xt+2, -t)$
$= t+3, (t+3)t+2 \;\; -t$
$t+3, t^2+3t+2$
$t+3, (t+1)(t+2), -t$

3

Pregunta 1: Sol:

$\mathcal{L}_1 : P = (1,0,2) + t(1,2,3), t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v_1} = (1,2,3)$

En:

$\mathcal{L}_2 : x-3 = -7 = \frac{y-2}{x}$ → Error

sea $\vec{v_n}$: vector dirección

cambio

$\mathcal{L}_2 : P = (3,0,2) + s(1,-1,2), s \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v_2} = (1,-1,2)$

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2 \Rightarrow \vec{v_1} // \vec{v_2} \Rightarrow \vec{v_1} = r\vec{v_2}, r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (1,2,3) = r(1,-1,2)$

$(1,2,3) = (r, -r, 2r)$

contradicción

$1 = -2 = 3/2 \Rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 & \Rightarrow r = 1 \\ -r = 2 & \Rightarrow r = -2 \\ 2r = 3 & \Rightarrow r = 3/2 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq -2 \neq 3/2$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1$ no es paralela $\mathcal{L}_2$

Si $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Rightarrow \vec{v_1} \perp \vec{v_2} \Rightarrow \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$

$\Rightarrow (1,2,3) \cdot (1,-1,2) = 0$

$\Rightarrow (1)(1) + (2)(-1) + 3(2) = 0$

$1 - 2 + 6 = 0$

$1 + 4 = 0$ contradicción

$5 = 0 \Rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1$ no es perpendicular a $\mathcal{L}_2$.

Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son alabeadas $\Rightarrow$ si $Q \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow Q \notin \mathcal{L}_2$

$\Rightarrow$ Tomando: ~~[illegible]~~

$Q = (x, y, z) \in \mathcal{L}_1$

$\Rightarrow$ En $\mathcal{L}_2$:

$\begin{cases} (x,y,z) = (1,0,2) + t(1,2,3), t \in \mathbb{R} \\ (x,y,z) = (3,0,2) + s(1,-1,2), s \in \mathbb{R} \end{cases}$

$(t, 2t, 3t) + (1,0,2) = (3,0,2) + (s, -s, 2s)$

$(t+1, 2t, 3t+2) = (s+3, -s, 2s+2)$

$\Rightarrow \begin{cases} t+1 = s+3 & \Rightarrow t = s+2 \Rightarrow s = t-2 \;..(1) \\ 2t = -s & \Rightarrow s = -2t \;..(2) \\ 3t+\cancel{2} = 2s+\cancel{2} & \Rightarrow s = \frac{3}{2}t \;..(3) \end{cases}$

de (2) y (3): $-2t = \frac{3}{2}t$, $-4t = 3t$, $0 = 7t$, $\Rightarrow t = 0$

de (1) y (2): $-2t = t-2$, $2 = 3t$, $t = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow Q \in \mathcal{L}_1 \wedge Q \notin \mathcal{L}_2$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son Alabeadas

Conclusión

$\mathcal{L}_1 \wedge \mathcal{L}_2$ son Alabeadas.

Continua en pag 9

12

2

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 2:

$$A=\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3x & 3y & 3z \\ 4+7x & 5+7y & 6+7z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1} \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$4 = -\left(1\begin{vmatrix} y & z \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & z \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\left(6y-5z - (6x-4z) + (5x-4y)\right)$$

$$4 = -(6y-5z-6x+4z+5x-4y)$$

$$4 = -6y+5z+6x-4z-5x+4y$$

$$4 = -2y+z+x$$

Luego

$$|3AA^T A^{-1}| + |B| \quad \text{como } n = 3$$

$$3^3 |A||A^T||A^{-1}| + \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3x & 3y & 3z \\ 4+7x & 5+7y & 6+7z \end{vmatrix}, \quad |A| = |A^T|$$

$$27|A|^2|A^{-1}| + (4)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 4+7x & 5+7y & 6+7z \end{vmatrix}$$

$$27(4)^2|A^{-1}| + 12\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 7x & 7y & 7z \end{vmatrix}\right) \quad F_3 = 7F_2$$

$$27 \times 16|A^{-1}| + 12(-|A| + 0)$$

$$432|A^{-1}| - 12(4), \quad \text{como } |A| \neq 0 \neq 4$$

$$\frac{432|A^{-1}||A|}{|A|} - \frac{48|A|}{|A|}$$

$$\frac{432|A^{-1}A|}{|A|} - 48 \quad \Rightarrow A^{-1}A = I$$

$$\frac{432|I|}{4} - 48 \Rightarrow \frac{432}{4} - 48 = 108 - 48 = 60$$

4
27
16
162
27
432

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$-2\ -2\ 2\ -2$$
$$2\ -1\ -1\ 3$$
$$0\ -3\ 3\ 1$$

$$-4\ -4\ 4\ -4$$
$$4\ 1\ -1\ 1$$
$$0\ -3\ 3\ -3$$

$$-2\ -2\ -2\ -2$$
$$2\ 1\ 1\ 7$$
$$0\ -1\ -1\ 5$$

$$-4\ -4\ -4\ -4$$
$$4\ 1\ 1\ 1$$
$$0\ -3\ -3\ -3$$

Pregunta 3:

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + z = -2\alpha + 3 \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 4x + y - \alpha z = \alpha \end{cases}$$

Donde
A = Matriz de coef.
B = Matriz de Términos Independientes.
X = Matriz de incógnitas

Sistema Matricial $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$\Rightarrow$ Tiene sol $\Leftrightarrow A^{-1}$ existe

$\wedge$ A^{-1} existe $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ 4 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 \neq 2\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 4 & -\alpha \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2 \cdot 0} + \alpha(-\alpha - (-4\alpha)) + (1-4) \neq 0$$

$$\alpha(-\alpha + 4\alpha) - 3 \neq 0$$

$$\alpha(3\alpha) - 3 \neq 0 \Rightarrow 3\alpha^2 - 3 \neq 0$$

$$3(\alpha^2 - 1) \neq 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 1) \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha \neq 1 \quad \alpha \neq -1$$

3.0

Luego:

para $\alpha = 1$:

Matriz Ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right] -F_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right] F_3 + F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ De F_3:
$0 = 4 \Rightarrow \Leftarrow$ Contradicción
$\Rightarrow \wedge\ Ra(A) \neq Ra(A_a)$

$\Rightarrow$ Cuando $\alpha = 1$, El sistema no tiene solución

para $\alpha = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right] F_3(-1/3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] F_3 + F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ De F_3:
$0 = 6 \Rightarrow \Leftarrow$
$\Rightarrow Ra(A) \neq Ra(A_a)$

$\Rightarrow$ para $\alpha = -1$, El sistema no tiene sol:

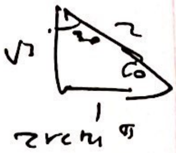
$\Rightarrow$ Tiene solución: para $\alpha \in \mathbb{R} - \{1; -1\}$

No tiene solución: para $\alpha \in \{1; -1\}$

No tiene Soluciones infinitas
No existen α

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



Pregunta 4:

$w = \sqrt{3} - i \quad \wedge \quad z = (2i + w)^9$

a)

$\Rightarrow z = (2i + \sqrt{3} - i)^9$

$z = (\sqrt{3} + i)^9$ Sea $\sqrt{3} + i = x$, $x \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Forma Polar de x:

$\cdot\ |x| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, Siendo $\theta = Arg(x)$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = |x|(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$

$x = 2(\cos \pi/6 + i\,sen\,\pi/6)$

$\Rightarrow$ como $z = x^9$

$\Rightarrow z = x^9 = [2(\cos \pi/6 + i\,sen\,\pi/6)]^9$

$z = 2^9(\cos \pi/6 + i\,sen\,\pi/6)^9 \Rightarrow$ Por Teorema de Moivre

$z = 2^9(\cos \frac{9\pi}{6} + i\,sen\,9\pi/6)$

$z = 2^9(\cos \frac{3\pi}{2} + i\,sen\,\frac{3\pi}{2}) =$

$z = 2^9(0 + i(-1))$

$z = 2^9(-i) \Rightarrow z = -2^9 i$

$\Rightarrow \bar{z} = 2^9 i \Rightarrow Arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{2} \wedge |\bar{z}| = \sqrt{0^2 + (2^9)^2} = 2^9$

$\Rightarrow \bar{z} = 2^9(\cos \pi/2 + i\,sen\,\pi/2)$

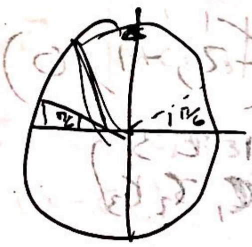
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}$

$\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}$

$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$



$\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}$

$\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}$

$\frac{9\pi}{6}$

b) $u = ?$, $u^3 = \bar{z}$

Raíces de un número complejo:
Si $u^n = z$
$u_k = |z|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$
donde:
$\theta = Arg(z)$ ∧ $k = 0, 1, 2 \dots n-1$

$\Rightarrow u^3 = 2^9 i$

$\Rightarrow$ ~~Para~~ para u.

$n = 3 \Rightarrow k = 0, 1, 2$, $\theta = \pi/2$ ∧ $|z| = 2^9$

- $u_0 = (2^9)^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi(0)}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi/2 + 2\pi(0)}{3}\right)\right)$

$u_0 = 2^3\left(\cos \pi/6 + i\,sen\,\pi/6\right)$

$u_0 = 2^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$u_0 = 4\sqrt{3} + 4i$

- $u_1 = (2^9)^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right)\right)$

$u_1 = 2^3\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\,sen \frac{5\pi}{6}\right)$

$u_1 = 2^3\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$u_1 = 8\left(-\cos \pi/6 + i\,sen\,\pi/6\right)$

$u_1 = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$u_1 = -4\sqrt{3} + 4i$

- $u_2 = (2^9)^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)\right)$

$u_2 = 2^3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i\,sen \frac{3\pi}{2}\right)$

$u_2 = 2^3\left(0 + i(-1)\right)$

$u_2 = 2^3(-i)$

$u_2 = -2^3 i$

$\Rightarrow u \in \{4\sqrt{3} + 4i, -4\sqrt{3} + 4i, -2^3 i\}$

6

Presente aquí su trabajo

Pregunta 5:

a) Sol: (F)

Contraejemplo:

Sea $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,3,1)$ y $\vec{c}=(1,2,2)$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(1,2,3)\cdot(2,3,1)=(1,2,3)\cdot(1,2,2)$ $\quad (2,3,1)\neq(1,2,2)$

$\Rightarrow 2+6+3=1+4+6$ pero $\vec{b}\neq\vec{c}$

$11=11$ ✓

(F)

$\vec{b}-\vec{c}=(1,1,-1)$

b) Sol: (F)

Sea $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,2,2)$ y $\vec{c}=(2,4,5)$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&2&3\\1&2&2\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}2&3\\2&2\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{b}=(-2,1,0)$

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&2&3\\2&4&5\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{c}=(-2,1,0)$ $\quad$ Pero: $(1,2,2)\neq(2,4,5)$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ $\quad \Rightarrow \vec{b}\neq\vec{c}$

(F)

$\vec{b}-\vec{c}=(-1,-2,-3)$

c) Sea $\theta \Rightarrow$ ángulo entre vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ $\quad \alpha=$ ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$ $\quad \cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\|\vec{a}\|\|\vec{c}\|}$

$\operatorname{sen}\theta=\dfrac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$ $\quad \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

como $\vec{a}\neq0$

$\Rightarrow \cos\theta\,\cancel{\|\vec{a}\|}\|\vec{b}\|=\cos\alpha\,\cancel{\|\vec{a}\|}\|\vec{c}\|$ $\quad \Rightarrow\|\vec{a}\|\neq0$

$\operatorname{sen}\theta\,\cancel{\|\vec{a}\|}\|\vec{b}\|=\operatorname{sen}\theta\,\cancel{\|\vec{a}\|}\|\vec{c}\|$ $\quad \vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

$\Rightarrow\|\vec{a}\times\vec{c}\|=\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

$\cos^2\theta\,\|\vec{b}\|^2=\cos^2\alpha\,\|\vec{c}\|^2$

$\operatorname{sen}^2\theta\,\|\vec{b}\|^2=\operatorname{sen}^2\alpha\,\|\vec{c}\|^2$ $\quad +$

$\|\vec{b}\|^2=\|\vec{c}\|^2$ como $\|\vec{b}\|\wedge\|\vec{c}\|>0$

$\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|$

$\Rightarrow$ No necesariamente $\vec{b}=\vec{c}$

caso: $\vec{b}=-\vec{c}$ $\Rightarrow \vec{b}\neq\vec{c}$ pero $\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|$

$\Rightarrow$ (F)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(1,2,3)\cdot(2,3,1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2+6+3=11$

$(1,2,3)\cdot(\vec{c})=11$

$c_1+2c_2+3c_3=11$

1 2 2

$(1,2,3)(1,2,2)=11$

$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{vmatrix}$

$(-2,+1,0)$

$\begin{vmatrix}1&2&3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

$(2c_3-3c_2,\ -2$

$3c_1-c_3,\ -+1$

$c_2-2c_1=0$

$2c_3-3c_2=-2$

$3c_1-c_3=+1$

$c_2-2c_1=0$

$c_2=2c_1$

$2c_3-6c_1=-2$

$3c_1-c_3=+1$

$c_1\ c_3\ \in\mathbb{R}$

$c_1=t$ $\quad t=2$

$c_2=2t$

$c_3=3t-1$

∞ sol

2 4 5

$\begin{vmatrix}1,2,3\\2,4,5\end{vmatrix}$

$(-2,1,0)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\vec{z} = (1,1,1)$

$\vec{h} = (4,3,2)$

$\vec{z}\cdot\vec{h} = 4+3+2 = 9$

$\vec{z}\times\vec{h} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$

$\vec{z}\cdot\vec{c}$

$c = (c_1, c_2, c_3)$

$\vec{z}\cdot\vec{c} = c_1 + c_2 + c_3 = 9$

$\vec{z}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$(c_3 - c_2,\ c_1 - c_3,\ c_2 - c_1)$

$c_3 - c_2 = -1$ $\quad c_1 = 2 + c_3$

$c_1 - c_3 = 2$

$c_2 - c_1 = -1$

$c_2 - 2 - c_3 = -1$

$c_2 - c_3 = 1$

$c_2 = t$

$c_3 = t - 1$

$c_1 = t + 1$

$9 = 3t$

$t = 3$

$\vec{h} \neq \vec{c}$

Pregunta 6:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k+2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -k \\ k+1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) Si $k = -1$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ Si los vectores de S son L.I

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{v_3} \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ Ordenando: $\quad$ Analizando:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad 1\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow (0 - (-6)) + (0 - 6) - 3(0) \neq 0$

$\Rightarrow 6 - 6 + 0 \neq 0$

$0 \neq 0 \Rightarrow\Leftarrow$

$\Rightarrow$ cuando $k = -1$

Los vectores de S no son L I

$\Rightarrow$ S es L.D (Linealmente dependiente) cuando $k = -1$

Luego

Si $\vec{v} = (4,3,7)^T \in S$

$\Rightarrow \vec{v}$ es C.L de los vectores en $S \Rightarrow \vec{v} \in Gen(S)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta - \gamma \\ -\alpha + \beta + \gamma \\ -3\alpha - 6\beta + 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 4 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 3 \\ -3\alpha - 6\beta + 0 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -6 & 0 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right] F_3 + F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 0 & 7 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow 0 = 7 \Rightarrow\Leftarrow$ contradicción

$\Rightarrow$ El sistema no tiene solución

$\Rightarrow$ No existen escalares, por ende,

$\vec{v} \notin Gen(S)$

$||=$

8

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) Como se tiene 3 vectores de S

Para que S sea Base de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ S debe ser L.I. $\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ v_3 \end{vmatrix} \neq 0$

Ordenando:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & -3 \\ k & k+2 & -6 \\ -1 & -k & k+1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow 1\begin{vmatrix} k+2 & -6 \\ -k & k+1 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} k & -6 \\ -1 & k+1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} k & k+2 \\ -1 & -k \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(k+2)(k+1) - 6k - k[(k)(k+1) - 6] - 3[-k^2 - (-1)(k+2)] \neq 0$$

$$k^2 + 3k + 2 - 6k - k(k^2 + k - 6) - 3\{-k^2 - (-k-2)\} \neq 0$$

$$\cancel{k^2} - 3k + 2 - k^3 - \cancel{k^2} + 6k - 3(-k^2 + k + 2) \neq 0$$

$$-k^3 + 2 + 3k + 3k^2 - 3k - 6 \neq 0$$

$$-k^3 + 3k^2 - 4 \neq 0$$

$$k^3 - 3k^2 + 4 \neq 0$$

$$(k+1)(k^2 - 4k + 4) \neq 0$$

$$\Rightarrow (k+1)(k-2)^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow k \neq -1$$
$$k \neq 2$$

$\Rightarrow$ Para que S sea base:

$$k \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$$

c) Si Gen(S) es una recta

$\Rightarrow$ Los vectores en S deben ser paralelos

$\Rightarrow (1, k, -3) = t(k, k+2, -6) \wedge (1, k, -3) = s(-1, -k, k+1)$

$(1, k, -3) = (tk, tk+2t, -6t) \wedge (1, k, -3) = (-s, -sk, sk+s)$

$\Rightarrow (tk, tk+2t, -6t) = (-s, -sk, sk+s)$

$$\begin{cases} tk = -s \\ tk + 2t = -sk \\ -6t = sk + s \end{cases} \Rightarrow tk = -s$$

$tk + 2t = -sk$

$s(k+1) = -6t$

0,

$\Rightarrow$ Deben ser L.D. $\Rightarrow$ No debe ser L.I.

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ v_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$
-1 | -4 4 -4
1 -4 4

(1) en (2)

(1) en (3)

$\begin{vmatrix} k \\ k \\ k+1 \end{vmatrix} \neq 0$

k

$k = -1$

$-t = -s$

$4(-1) = -2t$

$t(-1) + 2t = -s(-1)$

$-t + 2t = s$

$t = s$

$t = 0 = s$

$tk = -s$ $\quad k = -1$

$tk + 2t = -sk$

$tk = -s$

$tk + 2t = -sk$

$-6t = sk + s$

$t = s$ ✓

$-t + 2t = s$

$t = s$ ✓

$-6t = -s + s$

$t = 0 = s$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Tomando en cuenta parte h)

$(k+1)(k^2-4k+4)=0$

$\Rightarrow k=-1 \quad k=2$

$\Rightarrow$ Es L.D cuando $k=-1$ y $k=2$

Para $k=2$

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$

Sea $\vec{v}=(1,0,0)$ $\vec{u}=(0,0,1)$, $\vec{w}=(0,1,0)$

$B=\{\vec{v},\vec{u}\}$

Si Debería dos

$\Rightarrow$ • D es L.I

• D genera S

$\Rightarrow$ Si D es L.I.

$0=\vec{v}\alpha_1+\vec{v}\alpha_2+\vec{w}\alpha_3$

$(0,0,0)=(\alpha_1,0,0)+(0,0,\alpha_2)+(0,\alpha_3,\ldots)$

$\Rightarrow \alpha_1=0$ $\alpha_2=0$ $\alpha_3=0$ $\Rightarrow$ D es LI

Si D genera S:

$\Rightarrow$ Vectores de S son C.L de vectores de D.

Continuar atrás empezado

Continuación Pregunta 1:

b) Hallar P / $\mathcal{L}_2\in P$ y $\mathcal{L}_1 // P$

Sol: Si $\mathcal{L}_2 \in P$ siendo $\vec{V_2}$ vector dirección de $\mathcal{L}_2$ y $\vec{N}$ normal de P

$\Rightarrow \vec{V_2}\perp\vec{N}$ Además Si $P//\mathcal{L}_1 \Rightarrow \vec{N}\perp\mathcal{L}_1 \Rightarrow \vec{N}\perp\vec{V_1}$

$\Rightarrow \vec{V_1}\perp\vec{N} \Rightarrow \vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\perp N$

$\Rightarrow \vec{N}=\vec{V_1}\times\vec{V_2}$

$\vec{N}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{array}\right| = i\begin{vmatrix}2&3\\-1&2\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}$

$\vec{N}=(7,1,-3)$

Luego si Si $\mathcal{L}_2\in P \Rightarrow$ Si $Q\in\mathcal{L}_2 \Rightarrow Q\in P$

$\Rightarrow$ Sea un $R\in P$ / $R=(x,y,z)$ y $Q=(3,0,2)$

$\Rightarrow \vec{QR}\in P$

$\Rightarrow$ Ecuación Normal: $(7,1,-3)\cdot(x-3,y,z-2)=0$

$7(x-3)+y+(-3)(z-2)=0$

$7x-21+y-3z+6=0$

$P: 7x+y-3z-15=0$

c) Sea $\mathcal{L}_3=P\cap P_1$, $P=7x+y-3z-15=0$, $P_1=x+y=0$

$\Rightarrow \mathcal{L}_3=\begin{cases}7x+y-3z-15=0\\ x+y=0\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{V_3}\perp\vec{N_1}\wedge\vec{N_2}$

$\Rightarrow \vec{V_3}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}$, $\vec{N_1}=(7,1,-3)$ y $\vec{N_2}=(1,1,0)$

$\Rightarrow \vec{V_3}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 7 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right| = (3,-3,6)$

$\vec{V_3}=(3,-3,6) \rightarrow (3,-3,6)//(1,-1,2)$

$\Rightarrow \vec{V_3}=(1,-1,2)$

Luego para hallar Punto de paso:

Si $x=y=0$

$\Rightarrow 7(0)+0-3(z)-15=0$

$-15=3z \Rightarrow z=-5$

$P=(0,0,-5)$

$P\in P\wedge P_1$

$\Rightarrow P\in\mathcal{L}_3$

$\Rightarrow \mathcal{L}_3: P:(0,0,-5)+j(1,-1,2)$, $j\in\mathbb{R}$

$k=2$

$v_2 t=s$

$2t+2t=-2s$

$4t=-2s$

$2t=-s$

$-6t=2s+5$

$-6t=2s+3$

$2t=-3$

$2 \quad -2 \quad 4$

$6 \quad 0 \quad -3$

$2 \quad -2$

$7(2)+-2-3(1)-15=0$

$14-2+3-15=0$

$-1+1=0$

20

10

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow (1,2,-3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(0,1,0)$

$\Rightarrow \alpha_1 = 1$ $\Rightarrow$ Si es C.L

$\alpha_2 = 2$

$\alpha_3 = -3$

$(2,4,-6) = \beta_1(1,0,0) + \beta_2(0,0,1) + \beta_3(0,1,0)$

$\beta_1 = 2$ Si es C.L.

$\beta_2 = 4$

$\beta_3 = -6$

$(-1,-2,3) = \gamma_1(1,0,0) + \gamma_2(0,0,1) + \gamma_3(0,1,0)$

$\gamma_1 = -1$

$\gamma_2 = -2$ $\Rightarrow$ Si es C.L

$\gamma_3 = 3$

~~Conclusión~~

~~$B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ es base de S~~