PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Algebra Matricial y Geometría Analítica
Solución PC2
(2017-1)

---

1. Considere la hipérbola

$$\mathcal{H} : 4x^2 - y^2 - 24x + 8y + 16 = 0.$$

Halle la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ que pasa por el punto $A(3,5)$ y que tiene como focos a los vértices de $\mathcal{H}$. (4 pts)

Solución.-

- La ecuación ordinaria de la hipérbola

$$\mathcal{H} : \frac{(x-3)^2}{1} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

- Los vértices de $\mathcal{H}$ son $V_1(2,4)$ y $V_2(4,4)$. Como los vértices de $\mathcal{H}$ son los focos de la elipse $\mathcal{E}$, tenemos

$$2c = d(F_1, F_2) = d(V_1, V_2) = 2 \longrightarrow c = 1.$$

- La ecuación de la elipse es

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} = 1$$

- De dato $A(3,5) \in \mathcal{E}$, entonces

$$\frac{(3-3)^2}{a^2} + \frac{(5-4)^2}{b^2} = 1 \longrightarrow b = 1$$

- De la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$ hallamos $a = \sqrt{2}$.
  Por lo tanto,

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$$

2. Sea $\mathcal{H}$ una hipérbola tal que el punto $F(-3,8)$ es uno de sus focos y tal que la recta $L : 4x - 3y + 16 = 0$ es una de sus asíntotas. Sabiendo que su centro C se ubica en la recta $L' : 2x - 3y + 20 = 0$, halle la ecuación de $\mathcal{H}$. (4 pts)

Solución.-

- De los datos, el centro de la hipérbola $\mathcal{H}$ es el punto de intersección de L y L'.

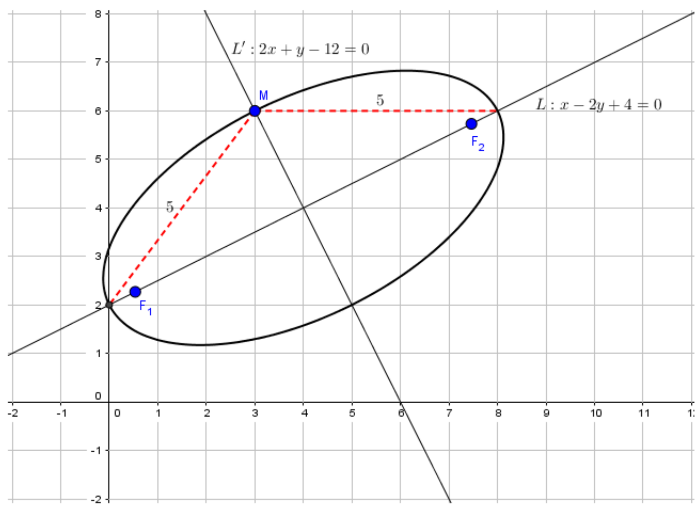
$$\begin{cases} 4x - 3y + 16 = 0 \\ 2x - 3y + 20 = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad C(2,8).$$

- De las coordenadas del foco $F(-3,8)$ y del centro $C(2,8)$, la ecuación de la hipérbola de la forma
$$\mathcal{H} : \frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y-8)^2}{b^2} = 1$$
- Como la pendiente de la asíntota es $m = \frac{4}{3}$, tenemos $a = 4k$ y $b = 3k$, don $k \neq 0$. Además, la distancia del semiejefocal es $c = d(F,C) = 5$.
De la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos $k = 1$. Po lo tanto, $a = 4$ y $b = 3$.
- De lo anterior,
$$\mathcal{H} : \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-8)^2}{9} = 1$$

3. El eje focal de una elipse $\mathcal{E}$ es la recta $L : x - 2y + 4 = 0$, un extremo de su eje menor es el punto $M(3,6)$ y la distancia de dicho punto a uno de los vértices de la elipse es 5, halle las coordenadas de los focos de $\mathcal{E}$. (4 pts)

Solución.-

- Sea L' la recta que contiene al eje menor de $\mathcal{E}$, que es perpendicular a L y pasa por M. Como la pendiente de la recta L es $m = \frac{1}{2}$, tenemos
$$L' : y - 6 = -2(x-3) \quad \longleftrightarrow \quad L' : 2x + y - 12 = 0$$
- El centro de la elipse es el punto de intersección de L y L'.
$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad C(4,4).$$



- Sea V un vértice de la elipse, en donde la longitud del semieje menor es $b = d(M,C) = \sqrt{5}$ y la longitud del semieje mayor es $a = d(C,V)$. En el tríangulo rectángulo MCV, tenemos
$$d^2(M,V) = d^2(M,C) + d^2(C,V) \longleftrightarrow \begin{aligned} 25 &= 5 + a^2 \\ a &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$
De la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$ obtenemos $c = \sqrt{15}$.

- Sea $F(f_1, f_2)$ un foco de la elipse, entonces $F \in L$ y $d(F, C) = \sqrt{15}$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1 - 2f_2 + 4 & = & 0 \\ \sqrt{(f_1-4)^2 + (f_2-4)^2} & = & \sqrt{15} \end{array} \right. \longrightarrow \quad f_1 = 4 \pm 2\sqrt{3} \ \text{ y } \ f_2 = 4 \pm \sqrt{3}.$$

- De este modo, los focos son $F_1(4+2\sqrt{3}, 4+\sqrt{3})$ y $F_2(4-2\sqrt{3}, 4-\sqrt{3})$.

4. Halle la longitud del lado recto de la cónica $\mathcal{C}$ con ecuación

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y + 40 = 0. \qquad \text{(4 pts)}$$

Solución.-

- $\tan(2\theta) = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{4}{3}$, de donde obtenemos $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ y $\cos(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
- Las ecuaciones de rotación son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u\cos(\theta) - v\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{2u-v}{\sqrt{5}} \\ y = u\operatorname{sen}(\theta) + v\cos(\theta) = \dfrac{u+2v}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

- Reemplazando en la ecuación de la curva, obtenemos

$$4\left(\frac{2u-v}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2u-v}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{u+2v}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{u+2v}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(\frac{2u-v}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(\frac{u+2v}{\sqrt{5}}\right) + 40 = 0$$

Simplificando, se obtiene

$$u^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}v + 8 = 0,$$

que corresponde a una parábola.

- La longitud del lado recto de dicha parábola es $LR = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. Considere la familia de cónicas

$$\mathcal{C}_k : (9-k)x^2 + (16-k)y^2 = 1.$$

a) Halle las condiciones que k debe cumplir para que la cónica C_k no sea el conjunto vacío. (1 pts)

b) Halle todos los valores de k para los cuales C_k es una elipse. (1 pts)

c) Halle todos los valores de k para los cuales C_k es una hipérbola. (1 pts)

d) ¿Será cierto que las cónicas C_k halladas en (b) y (c) tienen todas los mismos focos? Justifique. (1 pts)

Solución.-

a) Para que la cónica C_k no sea el vacío $k \in]-\infty, 16[$.

b) Para que la cónica C_k sea una elipse $k \in]-\infty, 9[$.

c) Para que la cónica C_k sea una hipérbola $k \in]9, 16[$.

d) Falso. Para $k \in]-\infty, 9[$ la elipse de eje focal horizontal mientras que si $k \in]9, 16[$ la hipérbola es de eje focal vertical, lo cual nos indica que los focos no van a coincidir.