PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Algebra Matricial y Geometría Analítica
Cuarta Práctica Calificada
(2017-1)

Indicaciones:

* No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 1 hora y 50 minutos.

---

1. *a*) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ los vectores

$$v_1 = (k, 1-k, 1-k)\ ,\ v_2 = (1-2k, 2-2k, 3-k) \text{ y } v_3 = (0, 2, -1)$$

son linealmente independientes? (3 pts)

b) Sea $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ una matriz simétrica tal que $a_{ij} = 3i - 2j$ si $i \leq j$.
Halle la matriz X tal que $2(X^T - 3A) + 5I = 0$. (2 pts)

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que los vectores

$$u_1 = (1, a, b),\ u_2 = (1, a, b+1) \text{ y } u_3 = (1, a+1, b+1)$$

forman una base de $\mathbb{R}^3$. (3 pts)

3. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestre que $A^3 + 2I = 3A$. (2 pts)

b) Calcule $\det(A^6 - 4I)$. (2 pts)

4. *a*) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que la traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal, demuestre que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. (2 pts)

b) Sea $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ una matriz tal que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Calcule $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (2 pts)

CONTINÚA...

5. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

   a) Si A es una matriz cuadrada de orden 2, la matriz AA^T resulta ser simétrica. (1 pt)

   b) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces
   $$\det(A - B) = \det A - \det B\,. \qquad (1\text{ pt})$$

   c) Si A es una matriz cuadrada de orden 3 tal que $A^T = -A$, se cumple que $\det A = 0$. (1 pt)

   d) Si A y B son matrices triangulares superiores de orden 3, la matriz AB también es triangular superior. (1 pt)

Práctica elaborada por los coordinadores del curso.
Turno: 15:00 - 17:00.

San Miguel, 15 de junio de 2017.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

PUCP

ENTREGADO 22 JUN. 2017

Año: 2017 Número: 0245
Código de alumno

Práctica

Arzola Ramírez Carlos
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica N°: 4

Horario de práctica: 103

Fecha: 15/06/17

Nombre del profesor: E. Villoges

Nota
19

Firma del jefe de práctica
Nombre y apellido: (iniciales) J. C.

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

289

$$\frac{17 \pm \sqrt{289-4(10)(3)}}{20}$$

$$\frac{17 \pm 13}{20}$$

$3/2$ $\quad$ $1/5$

$1-2k$
$1-k$
$-k+2k^2$
$1-2k$
$1-3k+2k^2$

$-1 \quad -6 \quad 18$
$6 \quad -7 \quad 0$
$18 \quad 0 \quad -13$

Presente aquí su trabajo

Pregunta 1 .-

a) 3,0

$$\begin{vmatrix} k & (1-k) & (1-k) \\ (1-2k) & (2-2k) & (3-k) \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$2(-1)^5 \begin{vmatrix} k & 1-k \\ 1-2k & 3-k \end{vmatrix} + (-1)(-1)^6 \begin{vmatrix} k & 1-k \\ 1-2k & 2-2k \end{vmatrix}$$

$$-2\left[3k-k^2-(1-2k)(1-k)\right] - \left[2k-2k^2-(1-2k)(1-\right.$$

$$-6k+2k^2+2(1-2k)(1-k)-2k+2k^2+(1-2k)(1-k$$

$$0 \neq 4k^2-8k+3(1-2k)(1-k)$$

$$0 \neq 4k^2-8k+3-9k+6k^2$$

$$0 \neq 10k^2-17k+3$$

$2k \quad -3$
$5k \quad -1$

$\therefore$ Para que sea L.I., $k \in \mathbb{R} - \{3/2 ; 1/5\}$

b) 2,0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ a_{21} & 2 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2\left(X^t - \begin{bmatrix} 3 & -3 & -9 \\ -3 & 6 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$2X^t - \begin{bmatrix} 6 & -6 & -18 \\ -6 & 12 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$2x^t = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -18 \\ -6 & 7 & 0 \\ -18 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$x^t = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 & -9 \\ -3 & 7/2 & 0 \\ -9 & 0 & 13/2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 & -9 \\ -3 & 7/2 & 0 \\ -9 & 0 & 13/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 5 \\ 9 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 7 & 8 & 11 \\ 8 & 12 & 8 \\ 11 & 8 & 14 \end{matrix}$$

Pregunta 2 - 3,0

Para que sea base en R^3:

1) Tiene que ser conjunto generador

$$(x;y;z) = \alpha(1, a, b) + \beta(1, a, b+1) + \theta(1, a+1, b+1)$$

$$(x;y;z) = (\alpha+\beta+\theta \,;\, a\alpha + a\beta + a\theta + \theta \,;\, b\alpha + b\beta + \beta + b\theta + \theta)$$

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \theta \\ a\alpha & a\beta & \theta(a+1) \\ b\alpha & \beta(b+1) & \theta(b+1) \end{matrix}$$

$$\alpha + \beta + \theta = x$$
$$a(\alpha+\beta+\theta) + \theta = y$$
$$b(\alpha+\beta+\theta) + \beta + \theta = z$$

$$a(x) + \theta = y \qquad b(x) + \beta + y - ax = z$$

$$\boxed{\theta = y - ax} \qquad \boxed{\beta = z - y + ax - bx}$$

$$\alpha = x - z + \cancel{y} - \cancel{ax} + bx - \cancel{y} + \cancel{ax}$$

$$\boxed{\alpha = x - z + bx}$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

2) Tiene que ser L. I

$$\alpha(1;a;b)+\beta(1;a;b+1)+\theta(1;a+1;b+1)=0$$

$$(\alpha+\beta+\theta\,;\ a(\alpha+\beta+\theta)+\theta\,;\ b(\alpha+\beta+\theta)+\beta+\theta)=(0;0;0)$$

$$\alpha+\beta+\theta=0$$
$$a(\alpha+\beta+\theta)+\theta=0$$
$$b(\alpha+\beta+\theta)+\beta+\theta=0$$

$$a(0)+\theta=0 \qquad b(0)+\beta+\theta=0$$

$$\boxed{\theta=0} \qquad \boxed{\beta=0}$$

$$\alpha+\beta+\theta=0$$
$$\boxed{\alpha=0}$$

∴ Como los 3 complementos son ceros, entonces queda demostrado que es L. I.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & -2 \end{bmatrix}$$

a) $$A.A.A + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3a & 3 & 0 \\ 3b & 3c & -6 \end{bmatrix}$$

$$2I + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & -2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3a & 3 & 0 \\ 3b & 3c & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ (b+ac-2b) & -c & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & -2 \end{bmatrix} = \text{"}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a & 1 & 0 \\ 3b & 3c & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3a & 3 & 0 \\ 3b & 3c & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3a & 3 & 0 \\ 3b & 3c & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3a & 3 & 0 \\ 3b & 3c & -6 \end{bmatrix}$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$3b \quad 1$

$3C \quad 3a$

$-8 \quad 3b$

$3b$

$3b + 9ac - 24b$

$(-21b + 9ac)$

Presente aquí su trabajo

b)

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3a & 1 & 0\\ 3b & 3C & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3a & 1 & 0\\ 3b & 3C & -8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 6a & 1 & 0\\ (-21b+9ac) & -21C & 64\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 6a & -3 & 0\\ (-21b+9ac) & -21C & 60\end{vmatrix}$$

$$-3\,(-1)^2\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -21C & 60\end{vmatrix}$$

$$-3\,(-180) = \underline{540}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 4 .-

a)

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2$

$$tr(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$tra(BA) = C_{11} + C_{22} + C_{33}$$

$$tra(BA) = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23}$$

∴ Se puede observar que ambas trazas presentan los mismos sumandos, por lo tanto queda demostrado que son iguales las trazas

b)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$a + 2b = 4 \qquad 3a + b = 7$

$c + 2d = 5 \qquad 3c + d = 5$

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 3a + b = 7 \quad \cdot(2) \end{cases} -$$

$5a = 10$

$\boxed{a = 2}$

$\boxed{b = 1}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$$\begin{cases} c + 2d = 5 \\ 3c + d = 5 \quad \dots (2) \end{cases}$$

$$5c = 5$$

$$\boxed{c = 1}$$

$$\boxed{d = 2}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Pregunta 5

a)

$$(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t$$

$$(A \cdot A^t)^t = A \cdot A^t$$ } simétrico, ~~ya~~ ya que $\cancel{X}^t = X$

Verdadero

b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ $A - B = \begin{bmatrix} (a-e) & (b-f) \\ (c-g) & (d-h) \end{bmatrix}$

$$\det(A-B) = (a-e)(d-h) - (c-g)(b-f)$$
$$= ad - ah - ed + eh - cb + cf + gb - gf$$

$$\neq$$

$$\det A = ad - bc$$
$$\det B = eh - fg$$

$$\det A - \det B = ad - bc - eh - fg$$

Falso

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}$$

$\boxed{d=-b}$ $\boxed{g=-c}$ $\boxed{h=-f}$

$a=-a$ $\quad e=-e \quad i=-i$

$\boxed{a=0}$ $\quad \boxed{e=0} \quad \boxed{i=0}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{vmatrix}$$

$$\to b(-1)^3 \begin{vmatrix} d & f \\ g & 0 \end{vmatrix} + c(-1)^4 \begin{vmatrix} d & 0 \\ g & h \end{vmatrix}$$

Verdadero $\dashrightarrow bgf + cdh = bgf + (-g)(-b)(-f) = 0$

d) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} g & h & i \\ 0 & j & k \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} ag & (ah+bj) & (ai+bk+cL) \\ 0 & dj & (dk+eL) \\ 0 & 0 & fL \end{bmatrix}$$

por contra ejemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Big\} \text{ matriz diagonal}$$

$\therefore$ Falso

ai

$ah + bj = 0$

$\boxed{\underset{(1)(2)}{ah} = -\underset{(-1)(2)}{bj}}$

$\underset{(1)}{i} + \underset{(3)}{k} + \underset{(2)(1)}{cL} = 0$

$\underset{(1)(3)}{dk} + \underset{(-3)(1)}{eL} = 0$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$