ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN FINAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horarios: **101; 102;103;104; 105; 106; 107; 108; 109; 110; 111; 124; A123**

Turno: 8:00-11:00 Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- El examen consta de 5 preguntas.
- **Puede utilizar calculadoras siempre que no sean programables ni g**ráficas. No puede usar apuntes de clase ni libros.
- **Justifique sus respuestas.**

Pregunta 1

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Analice si existe A^{-1}. En caso la respuesta sea afirmativa, muestre cada paso que siga para hallarla. (2 puntos)

b) Si además se sabe que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

resuelva la ecuación matricial $XA = 4B^t$. (2 puntos)

Pregunta 2

Considere las esferas

$$S_1:\ x^2 + y^2 + z^2 = 10 \quad \text{y} \quad S_2:\ x^2 + 10x + y^2 - 4y + z^2 - 10z + 26 = 0.$$

Se pide lo siguiente:

a) Halle las coordenadas del centro y el valor del radio de S_2. (0,5 puntos)
b) Halle la ecuación del plano que contiene a la circunferencia $\mathcal{C}$, que resulta de intersecar S_1 y S_2. (0,5 puntos)
c) Halle las coordenadas del centro de la circunferencia $\mathcal{C}$. (1 punto)
d) Halle el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$. (1 punto)

Pregunta 3

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, sabiendo que z y w son números complejos. Dé sus respuestas en forma binómica, es decir, en la forma $a + bi, a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \overline{(1+i)}\, z + iw = 1 + i \\ (2+5i)z - 2iw = \overline{3+2i} \end{cases}$$

(2,5 puntos)

b) Considere los siguientes números complejos:

$$z_1 = -1 - 2\sqrt{3}i$$
$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i$$
$$z_3 = \sqrt{3} + i$$

Efectúe las siguientes operaciones y dé su respuesta en forma binómica, es decir, en la forma $a + bi, a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{(z_1 + z_2)^{23}}{2^{22}\left(\sqrt{3} - z_3\right)}$$

(2,5 puntos)

Pregunta 4

Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) Sean A y B matrices cuadradas no nulas de orden 2×2.

Si $(A + B)$ y $(A - B)$ son matrices simétricas, entonces A es una matriz simétrica.

(2 puntos)

b) Si A es una matriz cuadrada de orden 2×2, entonces siempre se cumple que

$$|A| = |Adj(A)|.$$

(2 puntos)

Pregunta 5

Considere el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas x, y y z:

$$\begin{cases} x - 2\alpha y = 1 \\ y + \alpha z = 0 \\ 5x - 9\alpha y + z = 5 \\ 2x - 3\alpha y + z = \beta \end{cases}$$

Analice si existen valores de α y $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales:

- el sistema tiene solución única; en ese caso, señale cuál sería esta.
- el sistema tiene infinitas soluciones; en ese caso exprese la solución como la ecuación de una recta o de un plano, según corresponda.
- el sistema no tenga solución.

(4 puntos)

Examen elaborado por los profesores del curso

Coordinadora de teoría: Prof. Cecilia Gaita

San Miguel, 7 de julio del 2022

SOLUCIONES

Solución pregunta 1

Como $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces existe A^{-1}.

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9, \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

Luego,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -9 & 3 & -5 \end{pmatrix}^t.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}^t$$

$$(A^{-1})^t = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Al despejar X se tiene

$$X = 4B^t A^{-1}.$$

Como $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -18 \\ 0 & -2 & 6 \\ -12 & -10 & 34 \end{pmatrix}.$$

Solución pregunta 2

a) Completando cuadrados, se tiene que S_2: $(x+5)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 28$

b) Al restar las ecuaciones de las esferas obtenemos la ecuación del plano que contiene a la intersección de las esferas. La ecuación de dicho plano es

$$P: 5x - 2y - 5z + 18 = 0.$$

c) El centro de S_1 es $(0,0,0)$ y el de S_2 es $(-5,2,5)$.

Para el centro primero hallamos la ecuación de la recta que une los centros. Esta es

$$L_C = t(-5,2,5), t \in R.$$

La intersección de dicha recta y el plano P se obtiene resolviendo:

$$5(-5t) - 2(2t) - 5(5t) + 18 = 0$$

$$t = \frac{1}{3}$$

Luego, el centro de C es $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

c)El radio r de la circunferencia se obtiene al resolver la ecuación:

$$10 = r^2 + d^2(centro\ de\ \mathcal{S}_1; centro\ de\ \ C\ ),$$ donde $d^2(centro\ de\ \mathcal{S}_1; centro\ de\ \ C\ ) = 6$

$$r = 2$$

Solución pregunta 3

a)

$\overline{(1+i)}z + iw = 1 + i$

$(2+5i)z - 2iw = \overline{3+2i}$

Aplicamos el conjugado de números complejos y obtenemos un sistema equivalente:

$(1-i)z + iw = 1 + i \qquad \ldots (1)$

$(2+5i)z - 2iw = 3 - 2i \quad \ldots (2)$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y obtenemos:

$(2-2i)z + 2iw = 2 + 2i$
$(2+5i)z - 2iw = 3 - 2i$

Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos:

$(4+3i)z = 5$

$z = \frac{5}{(4+3i)} \cdot \frac{(4-3i)}{(4-3i)}$

$z = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

Reemplazamos en la ecuación (1) y tenemos:

$(1-i)\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) + iw = 1 + i$

$w = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i$

b)

- $z_1 + z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Asimismo, la forma polar de este número complejo es

$$z_1 + z_2 = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right).$$

  Luego, aplicando el teorema de Moivre y simplificando, obtenemos

$$(z_1 + z_2)^{23} = 2^{22}(1 + \sqrt{3}i).$$

- Teniendo en cuenta que $2^{22}(\sqrt{3} - z_3) = -2^{22}i$ y simplificando, se tiene

$$\frac{(z_1+z_2)^{23}}{2^{22}\left(\sqrt{3}-z_3\right)}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-i}=-\sqrt{3}+i.$$

Solución pregunta 4

a) De los datos:

$$(A+B)^t=A+B \ \rightarrow \ \ A^t+B^t=A+B$$
$$(A-B)^t=A-B \ \rightarrow \ \ A^t-B^t=A-B$$

Sumando:

$$A^t=A$$

Verdad.

b) Sea $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Entonces $Adj(A)=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
Luego, $|A|=|Adj(A)|$.
Verdad.

Solución pregunta 5

Escribimos el sistema empleando una matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 5 & -9\alpha & 1 & 5 \\ 2 & -3\alpha & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3=-5F_1+F_3 \\ F_4=-2F_1+F_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3=-\alpha F_2+F_3 \\ F_4=-\alpha F_2+F_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & \beta-2 \end{pmatrix} F_4=-F_3+F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{pmatrix}$$

Caso 1: Si $\beta=2$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $\alpha=1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se tiene

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \ y + z = 0 \end{cases}$$

Hacemos $z = t \in \mathbb{R}$

$y = -t$

$x = 1 - 2t$

Luego,

$(x, y, z) = (1,0,0) + t(-2, -1,1), t \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se tiene

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \ y - z = 0 \end{cases}$$

Hacemos $z = t \in \mathbb{R}$

$y = t$

$x = 1 - 2t$

Luego,

$(x, y, z) = (1,0,0) + t(-2,1,1), t \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1,$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1 - \alpha^2)z = 0 \to z = 0$.

$y + \alpha z = 0 \to y = 0$.

$x - 2\alpha y = 1 \to x = 1$.

Luego,

$(x, y, z) = (1; 0; 0)$.

Caso 2: Si $\beta \neq 2$ tenemos

$0 = \beta - 2\ (absurdo)$

El sistema no tiene solución.

Respondiendo a la pregunta:

- La solución es sólo un punto cuando $\beta = 2$, $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1$. El punto es $(x, y, z) = (1,0,0)$.
- Tiene infinitas soluciones cuando $\beta = 2$, $\alpha = 1$. Las infinitas soluciones forman la recta
  $(x, y, z) = (1,0,0) + t(-2, -1,1), t \in \mathbb{R}$.
  También tiene infinitas soluciones cuando $\beta = 2$, $\alpha = -1$. Las infinitas soluciones forman la recta $(x, y, z) = (1,0,0) + t(-2,1,1), t \in \mathbb{R}$.
- El sistema no tiene solución cuando $\beta \neq 2$.