Estudios
Generales Ciencias

Fundamentos de Cálculo

Examen Final - Soluciones

Semestre Académico 2024 -1

Horarios: 0101 al 0116. **(Turno 1)**

1. Determine el dominio (implícito) de la función (3 pt)

$$f(x) = \log_3\left(2+x-x^2\right) + \arccos\left(\frac{2^x+3}{5}\right).$$

Solución. El dominio implícito de f es determinado por las siguientes restricciones:

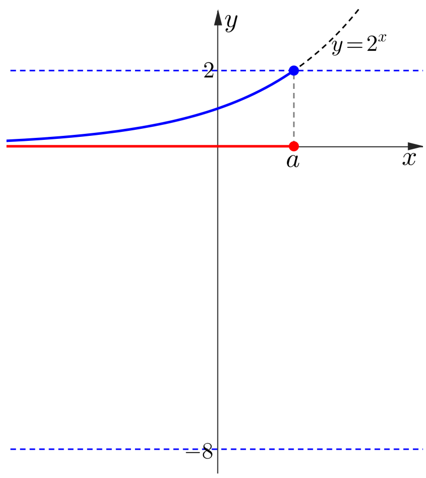
$$\underbrace{2+x-x^2>0}_{\mathrm{I}} \quad \wedge \quad \underbrace{-1 \le \frac{2^x+3}{5} \le 1}_{\mathrm{II}}.$$

Resolviendo la inecuación I, obtenemos $x \in]-1,2[$.

La inecuación II es equivalente a

$$-5 \le 2^x + 3 \le 5 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \le 2^x \le 2$$

De la gráfica



observamos que el conjunto solución de la inecuación II es $]-\infty, a]$ con $2^a = 2$, es decir, $a = 1$.

Finalmente, el dominio de f es

$$D_f =]-1,2[\cap]-\infty,1] =]-1,1].$$

2. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\arctan(x-1) - 2, & x \le 2, \\ \dfrac{x+1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de la función f. (2 pt)

b) Indique las ecuaciones cartesianas de las asíntotas horizontales y verticales (en caso existan) a la gráfica de f. (1 pt)

c) Justifique que f es inyectiva. (0,5 pt)

d) Encuentre la función inversa de f. (2 pt)

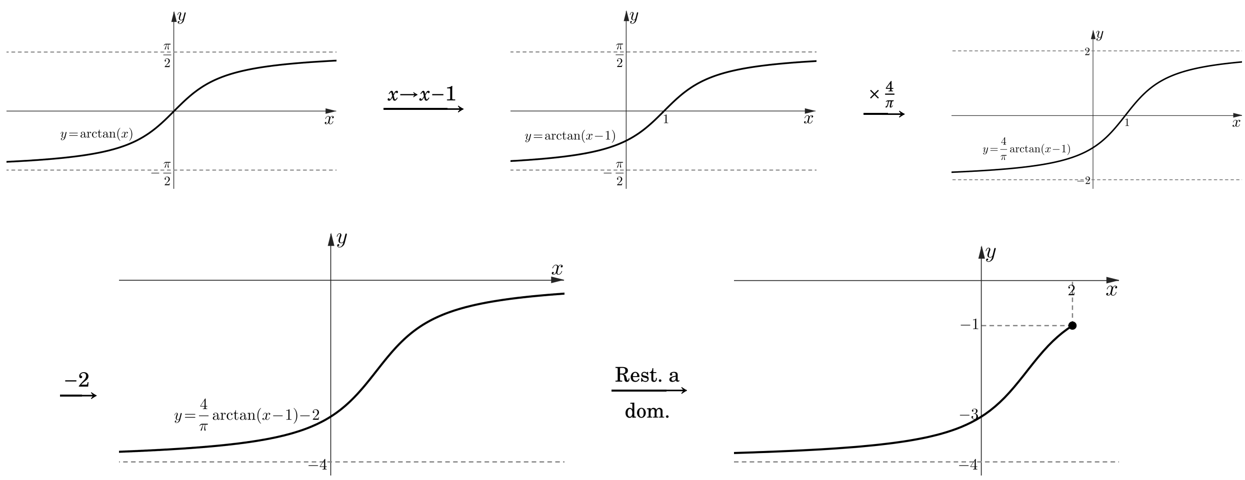
e) Calcule los siguientes límites (1 pt)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

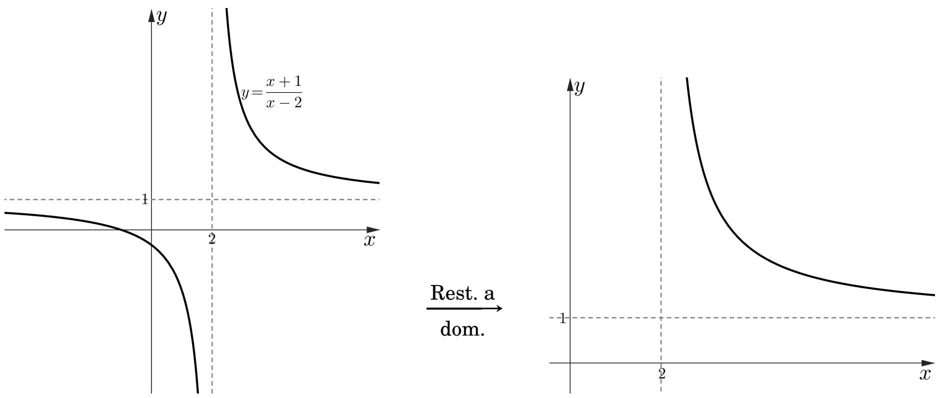
f) ¿Existe el límite $\lim_{x\to 2} f(x)$? Justifique su respuesta. (0,5 pt)

Solución.

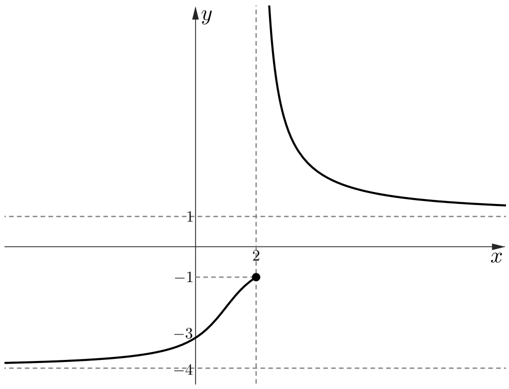
a) Podemos esbozar la gráfica del primer tramo de f mediante transformaciones, partiendo de la gráfica de la función $\arctan(x)$.



La gráfica del segundo tramo de f es



Finalmente, la gráfica de f es



b) De la gráfica de f, vemos que:
   Asíntotas horizontales: $L_1:\ y=-4$ y $L_2:\ y=1$.
   Asíntotas verticales: $L_3:\ x=2$.

c) Podemos ver que toda recta horizontal corta a la gráfica de f en a lo más un punto. Por lo tanto, la función f es inyectiva.

d) $D_{f_1^{-1}} = R_{f_1} =]-4,-1]$.
   Si $y=\frac{4}{\pi}\arctan(x-1)-2$ entonces

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}(y+2)\right)=\tan(\arctan(x-1))=x-1 \implies x=\tan\left(\frac{\pi}{4}(y+2)\right)+1.$$

   Entonces $f_1^{-1}(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}(x+2)\right)+1,\ x\in]-4,-1]$.

   $D_{f_2^{-1}} = R_{f_2} =]1,+\infty[$.
   Si $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ entonces

$$yx-2y=x+1 \implies x(y-1)=2y+1 \implies x=\frac{2y+1}{y-1}.$$

   Entonces $f_2^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-1},\ x\in]1,+\infty[$.
   Finalmente,

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\tan\left(\frac{\pi}{4}(x+2)\right)+1, & x\in]-4,-1];\\ \dfrac{2x+1}{x-1}, & x\in]1,+\infty[.\end{cases}$$

e) De la gráfica de f, observamos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

f) Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-1\neq+\infty=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, entonces el límite $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ no existe.

3. Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)+1, & -4\le x<a\,,\\ 4-\log_2(x+4), & x\ge a\,,\end{cases}$$

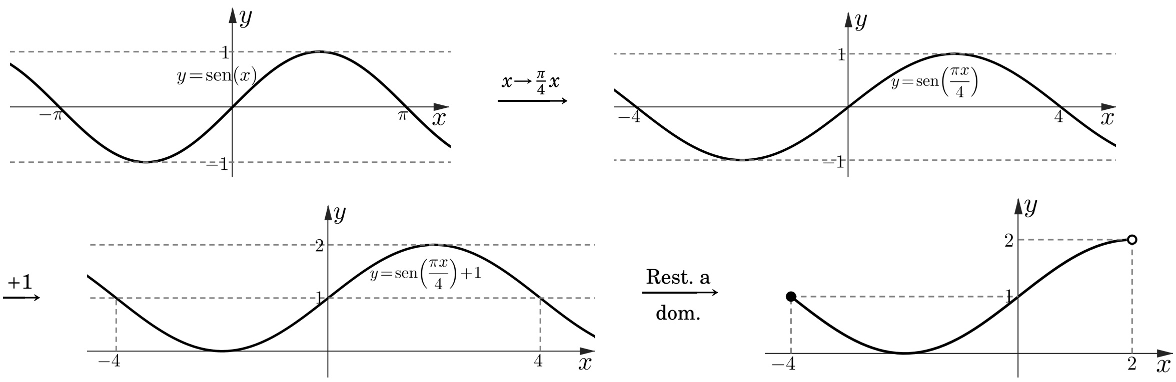
donde $a>-4$ es una constante.

a) Para $a=2$, esboce la gráfica de f indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados. (2,5 pt)

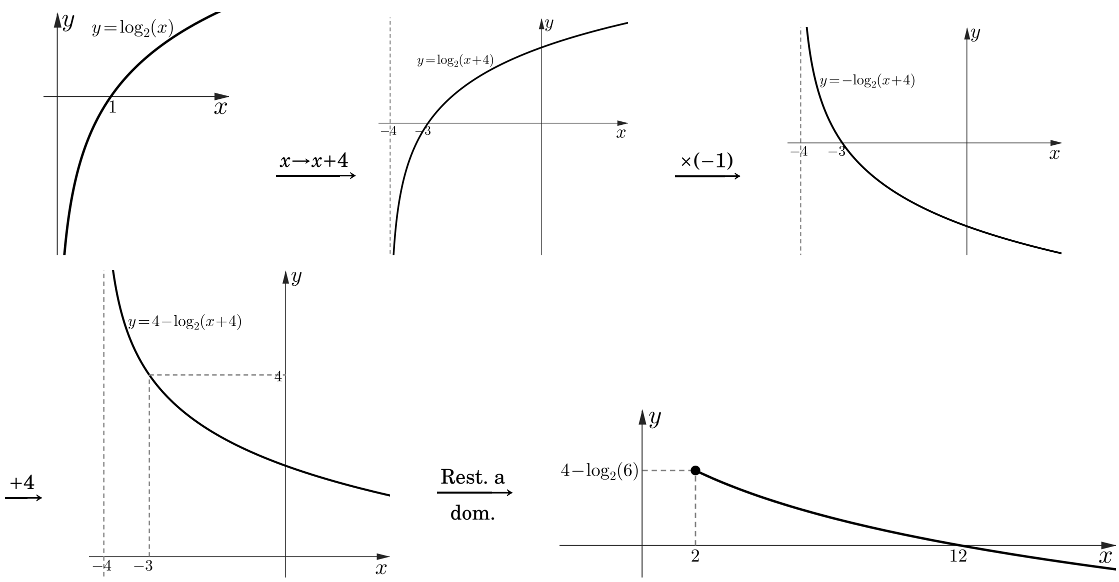
b) Halle el conjunto de valores de a para los cuales el rango de f es $]-\infty,2]$. (1,5 pt)

Solución.

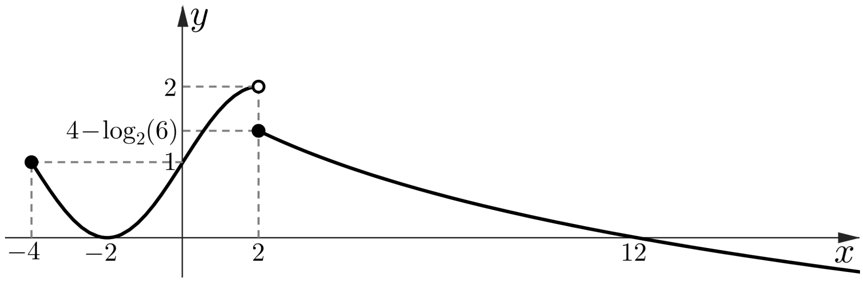
a) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)+1, & -4\le x<2\,,\\ 4-\log_2(x+4), & x\ge 2\,.\end{cases}$ La gráfica del primer tramo de f la podemos obtener mediante transformaciones a partir de la gráfica de $\operatorname{sen}(x)$.



La gráfica del segundo tramo de f la podemos obtener mediante transformaciones a partir de la gráfica de $\log_2(x)$.



Finalmente, la gráfica de f es



Los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados son: $(-2,0)$, $(12,0)$ y $(0,1)$.

b) Tenemos las siguientes situaciones:

- **Cuando** $-4<a<0$**:** El rango de f es $R_f=\,]-\infty,4-\log_2(a+4)]$, con $4-\log_2(a+4)>2$. Entonces $R_f\neq\,]-\infty,2]$.
- **Cuando** $a=0$**:** El rango de f es $R_f=\,]-\infty,2]$.
- **Cuando** $0<a\le 2$**:** El rango de f es $R_f=\left[0,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}a\right)+1\right[\cup\,]-\infty,4-\log_2(a+4)]$, con $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}a\right)+1\le 2$ y $4-\log_2(a+4)<2$). Entonces $R_f\neq\,]-\infty,2]$.
- **Cuando** $a>2$**:** El rango de f es $R_f=[0,2]\cup\,]-\infty,4-\log_2(a+4)]$, con $4-\log_2(a+4)<2$. Para que el rango de f sea $]-\infty,2]$, se debe cumplir $4-\log_2(a+4)\ge 0$. Resolviendo y considerando que $a>2$, obtenemos que $a\in\,]2,12]$.

En conclusión, el conjunto de valores de a para los cuales se cumple lo pedido es $\{0\}\cup\,]2,12]$.

4. a) Calcule, en términos de n, la siguiente suma (2 pt)

$$\sum_{k=1}^{n+1}2^k\left[2^k+\binom{n+1}{k}3^{n-k}\right].$$

b) Demuestre que (2 pt)

$$(n+1)!\ge n\times 3^{n-1}\quad \text{para todo entero } n\ge 4.$$

Solución.

a) Sea

$$S=\sum_{k=1}^{n+1}2^k\left[2^k+\binom{n+1}{k}3^{n-k}\right]$$

Tenemos que

$$S=\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1}4^k}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k3^{n-k}}_{\mathrm{II}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\sum_{k=0}^{n+1}4^k-4^0=\frac{4^{n+2}-1}{4-1}-1=\frac{4^{n+2}-4}{3}\\
\mathrm{II}&=3^{-1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}3^{n+1-k}2^k=\frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}3^{n+1-k}2^k-\binom{n+1}{0}3^{n+1-0}2^0\right]\\
&=\frac{1}{3}(3+2)^{n+1}-3^n=\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{3}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$S = \frac{4^{n+2}-4}{3} + \frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{3}$$

b) Procediendo por Inducción Matemática.
Caso base ($n = 4$): $(4+1)! = 5! = 120 \geq 108 = 4 \times 3^{4-1}$.
H.I.: Supongamos que

$$(k+1)! \geq k \times 3^{k-1}$$

para un cierto entero $k \geq 4$.
T.I.: Debemos probar que

$$(k+2)! \geq (k+1) \times 3^{k}$$

Primero veamos que:

$$k \geq 4 \implies k \geq 4 \wedge k-1 \geq 3 \implies k(k-1) \geq 12 \geq 3 \implies k(k+2) \geq 3(k+1) \implies k\left(3^{k-1}\right)(k+2) \geq (k+1)3^{k}$$

De esto y por la H.I.,

$$(k+2)! = (k+1)!(k+2) \geq k\left(3^{k-1}\right)(k+2) \geq (k+1)3^{k}.$$

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) La función $f(x) = 3^x - 2^x$ es una función creciente. (1 pt)

b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $f(-1) = f(1)$, entonces el rango de f es $\mathbb{R}$. (1 pt)

Solución.

a) Falsa. $-2 < -1$, pero **no** se cumple $\underbrace{f(-2)}_{-\frac{5}{36}} < \underbrace{f(-1)}_{-\frac{1}{6}}$.

b) Falsa. Un contraejemplo es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}; \\ 1, & x \in \{-1, 0\}. \end{cases}$$

El dominio de f es $\mathbb{R}$. De la gráfica de f, podemos ver que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $f(-1) = 1 = f(1)$, pero su rango es $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.