Fundamentos de Cálculo

Tercera Práctica Calificada - Soluciones propuestas

Semestre Académico 2024-1

Horarios: A101, B101, B102, B103, I101, I102, I103, I104, I105, 117 al 121. Duración: 110 minutos

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+d}$, donde a, b y d son constantes reales. La gráfica de f pasa por el punto $(-6;7)$ y tiene como asíntotas a las rectas $\mathscr{L}_1 : x = -4$ y $\mathscr{L}_2 : y = 6$.

   a) Determine la regla de correspondencia de f. (2.0 puntos)

   Solución:

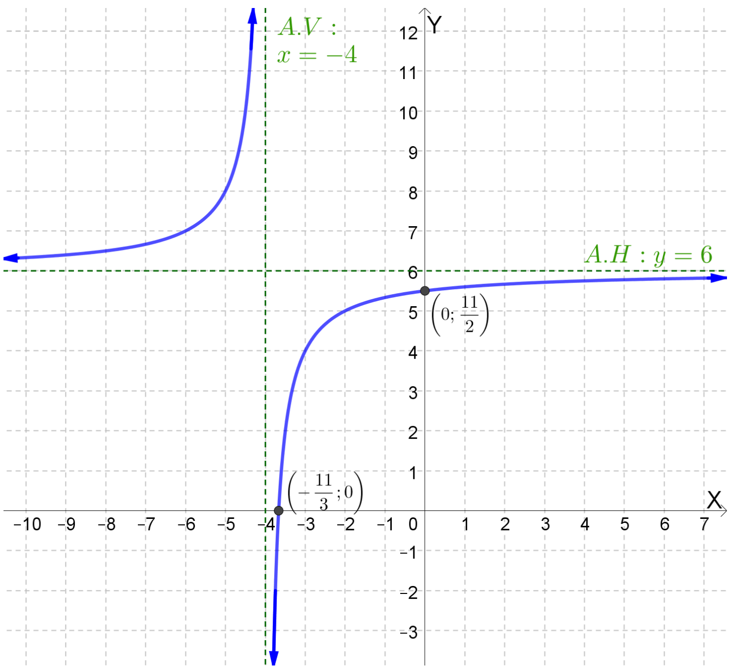
   Como la asíntota vertical es $x=-4$, la constante $d=4$, como la asíntota horizontal es $y=6$, se tiene $\frac{a}{1}=a=6$. Luego la regla de correspondencia tiene la forma $f(x)=\dfrac{6x+b}{x+4}$, reemplazando el punto de paso obtenemos $7=\dfrac{-36+b}{-2}$ entonces $b=22$.

   $$f(x)=\frac{6x+22}{x+4}.$$

   b) Esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados. (2.0 puntos)

   Solución:

   Intersecciones con los ejes: Con Y: $(0;11/2)$. Con X: $(-11/3;0)$.



c) ¿Es f creciente? Justifique. (1.0 punto)

Solución:

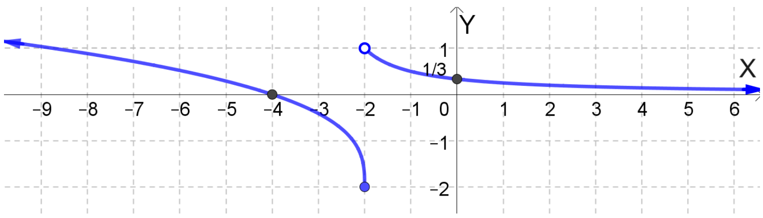
f es creciente en $]-\infty;-4[$ y en $]-4;+\infty[$ pero NO es creciente en $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-4\}$ pues por ejemplo $x_1=-5<x_2=-3$ pero $f(-5)=8 \not< 4=f(-3)$.

2. Sea a una constante real y sea f la función:

$$f(x)=\begin{cases} a-\sqrt[3]{4x+8} & , \quad x\le -2 \\ \dfrac{1}{x+3} & , \quad x>-2 \end{cases}$$

a) Para $a=-2$, esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados. (2.5 puntos)

Respuesta:



Intersecciones con los ejes: Con Y: (0;1/3). Con X: (-4;0).

$A.H: y=0$.

b) Para $a=-2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica. (0.5 puntos)

Solución:

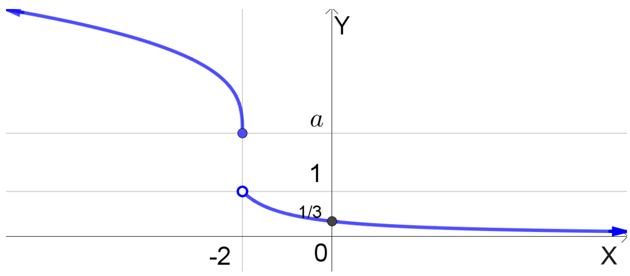
Asíntota Vertical: No tiene.

Asíntota Horizontal: $y=0$.

c) Determine todos los valores de a tales que f sea decreciente. Justifique. (1.0 punto)

Solución:

La función es decreciente para $x<-2$ y es decreciente para $x\ge -2$. El rango del primer tramo es $[a;+\infty[$ y el rango del segundo tramo es $]0;1[$. Para que f sea decreciente se necesita que $a\ge 1$.



3. Sea la función f definida por:

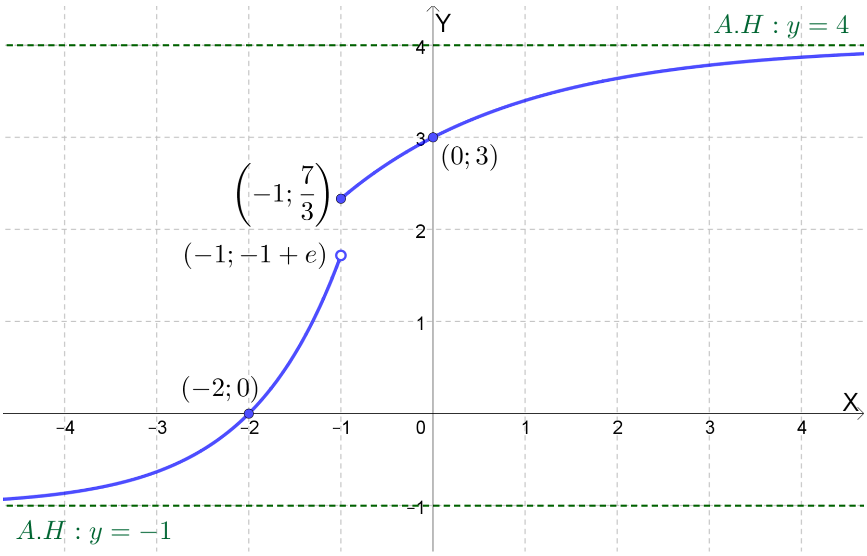
$$f(x) = \begin{cases} -1 + e^{x+2} & , \quad x < -1 \\ 4 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^x & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas. (3.0 puntos)

Solución:

Se halla la gráfica del primer tramo a partir de la gráfica de e^x, usando traslaciones y luego restringiendo al dominio dado.

Se halla la gráfica del segundo tramo a partir de la gráfica de $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$, usando transformaciones y restringiendo al dominio dado.



Intersecciones con los ejes: Con Y: (0; 3). Con X: (-2; 0).

b) Halle el rango de la función f. (1.0 punto)

Solución:

$Ran(f) =]-1;-1+e[\cup [\frac{7}{3};4[$.

c) ¿Es f creciente en $]-\infty;3[$? Justifique. (1.0 punto)

Solución:

Sí, f es creciente en $\mathbb{R}$, en particular es creciente en $]-\infty;3[$ como puede verse en la gráfica.

4. Una compañía fabrica un determinado tipo de accesorios de iluminación para casas. La función

$$Q(t) = k\left(25^{-0{,}25t}\right), \, t \geq 0$$

donde k es una constante real, modela la cantidad de accesorios disponibles para la venta t semanas después de lanzar una campaña publicitaria. Además, se sabe que inicialmente se dispone de 50000 unidades para la venta. Asimismo, la siguiente campaña debe realizarse cuando la cantidad de accesorios disponibles sea la quinta parte de la inicial.

a) Halle el valor de la constante k. (1.0 punto)

Solución:
$Q(0) = k = 50000$.

b) Halle la cantidad de accesorios de iluminación disponibles para la venta cuatro semanas después de lanzar la campaña, según este modelo. (1.0 punto)

Solución:
$Q(4) = 50000\left(25^{-1}\right) = 50000\left(\frac{1}{25}\right) = 2000$ accesorios.

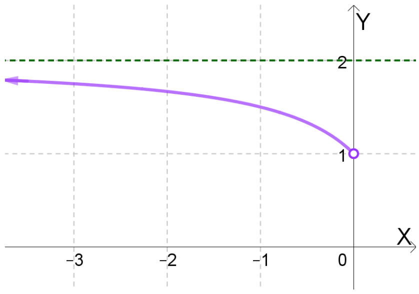
c) ¿Cuánto tiempo después del inicio se lanzará la siguiente campaña? (1.0 punto)

Solución:
$Q(t) = 10000$ si y solo si $25^{-t/4} = \dfrac{1}{5}$, esto es para $t = 2$ semanas desde el lanzamiento.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

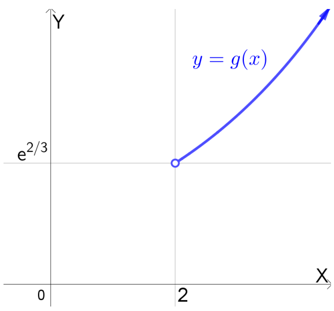
   a) La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x < 0$, presenta una asíntota vertical. (1.0 punto)

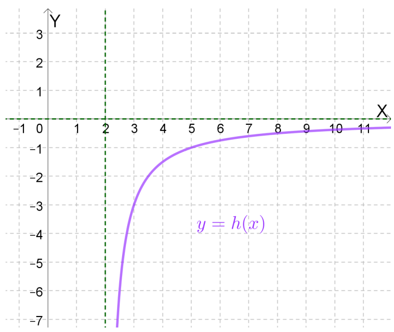
   Solución:
   Falso.
   Al recortar el dominio, la gráfica sólo conserva su asíntota horizontal pero pierde la vertical.



   b) La función $f(x) = \sqrt[3]{e^x} - \dfrac{3}{x-2}$, $x > 2$, es creciente. (1.0 punto)

   Solución:
   Verdadero.
   La función $g(x) = \sqrt[3]{e^x}$, $x > 2$, es creciente. La función $h(x) = -\dfrac{3}{x-2}$, $x > 2$, es creciente.





   Luego la suma $f = g + h$ es creciente.

c) Si f es creciente con dominio $[-5;3]$ entonces $Ran(f) = [f(-5); f(3)]$. (1.0 punto)

Solución:

Falso.

Contraejemplo: $f(x) = \begin{cases} x, & -5 \leq x < 3 \\ 5, & x = 3. \end{cases}$

f es creciente pero $Ran(f) = [-5;3[\cup \{5\} \neq [-5;5] = [f(-5); f(3)]$.

San Miguel, 30 de mayo de 2024.