

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2022 - I

Horario: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 122, A123

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comuníquese a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas (Calculadora sugerida fx-991SPX).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. a) Si $B = (b_{ij})$ es una matriz de orden 2×3 tal que $b_{ij} = 2i - j^{i+1}$, halle explicitamente las matrices B y B^t . (1 pt)

b) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz B , hallada en el ítem a). Si X e Y son matrices

que cumplen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ X + Y = -B^t \end{cases}$$

halle el producto de las matrices X^t y Y , en ese orden. (3 pt)

2. Considere los planos

$$\mathcal{P}_1 : x + 2y + 3z = 4 \quad y \quad \mathcal{P}_2 : x + 3y + 2z = 1.$$

a) Halle una ecuación de la recta que resulta de interseccón de los planos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 . (2 puntos)

b) Halle una ecuación del lugar geométrico descrito por los puntos $P(x; y; z)$ que equidistan de los planos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 . (2 puntos)

NOTA: Sean el punto $P(x_0; y_0; z_0)$ y el plano $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$. La distancia del punto P al plano \mathcal{P} es:

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. Sean la recta $\mathcal{L} : P = (2; 4; 6) + t(1; 3; 0)$, $t \in \mathbb{R}$, y el plano $\mathcal{P} : 3x + 12y - 15z + 9 = 0$. Halle la ecuación del plano \mathcal{P}_1 que contiene a \mathcal{L} y es perpendicular al plano \mathcal{P} . (4 puntos)

4. Considere las rectas

$$\mathcal{L}_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-1}{a} \quad y \quad \mathcal{L}_2: \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}t \\ y = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = 4 - t \end{cases}$$

donde $a \neq 0$ es un valor constante.

- a) Analice si existe algún valor de "a" para el cual las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son paralelas. En caso exista dicho valor, determine si dichas rectas son coincidentes o son distintas. (2 puntos) ✓

b) Analice si existen valores de "a" para los cuales las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 se intersecan en un punto. (2 puntos)

5. Considere el plano \mathcal{P} : $4x - 7y - 4z + 68 = 0$ y la esfera \mathcal{S} : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 211 = 0$.

5. Considere el plano $\mathcal{P}: 4x - 7y - 4z + 68 = 0$ y la esfera $\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 211 = 0$

- a) Halle las coordenadas del centro y el radio de la esfera \mathcal{S} . (1 punto) ✓

b) Halle las coordenadas del centro de la circunferencia \mathcal{C} que se obtiene al interseccar el plano \mathcal{P} con la esfera \mathcal{S} . (1.5 puntos)

c) Determine el radio de la circunferencia \mathcal{C} , hallada en item b). (1.5 puntos)

Coordinador de prácticas: Elton Barrantes

San Miguel, 20 de junio de 2022.

$$a_0 + b_0 t + c_0 t^2$$

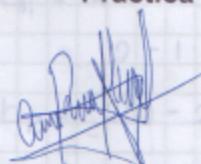
Año

Número

2022 2137

Código de alumno

Práctica



Firma del alumno

RIVERA HUARAZ, CAMILA ELIZABETH

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Curso: AMGA

Práctica N°:

PC4

Horario de práctica:

H110-2

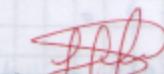
Fecha:

20/06/22

Nombre del profesor: EDWIN VILLOGAS

Nota

20



Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: HENRY ESQUIVEL JESÚS
(Iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$\textcircled{1} \quad a) B = (\text{bi}^j)_{2 \times 3} \quad b) j = 2i - \frac{i+1}{1+i}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A$$

Quinto B y B^t

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \bullet b_{11} = 2(1) - \frac{1+1}{1+i} \\ \bullet b_{12} = 2(1) - \frac{1+1}{1+i} \end{array}$$

$$B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & -4 & -23 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{l} \bullet b_{13} = 2(1) - \frac{1+1}{1+i} \\ \bullet b_{21} = 2(2) - \frac{2+1}{2+i} \end{array}$$

$$B^t = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \\ -7 & -23 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{l} \bullet b_{22} = 2(2) - \frac{2+1}{2+i} \\ \bullet b_{23} = 2(2) - \frac{2+1}{2+i} \end{array}$$

$$\bullet b_{21} = 2(2) - \frac{2+1}{2+i}$$

$$= 4 - 2 \frac{3}{2+i} = -4$$

$$= 4 - 3 \frac{3}{2+i} = -23$$

$$= 4 - 3 \frac{3}{2+i} = -23$$

Quinto $(X^t)(Y)$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & -4 & -23 \end{pmatrix}$$

$$-B^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5} / \begin{pmatrix} A - 3B^t \\ A - 3B^t \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad -3B^t = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 21 & 69 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 10 & 15 \\ 28 & 70 \end{pmatrix}$$

Numeros

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos

$$X = \frac{1}{5} (A - 3B^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(borrador)}} \begin{pmatrix} 26 & 14 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A - 3B^t = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 10 & 15 \\ 28 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 2 \\ -2 & \frac{28}{5} \end{pmatrix}$$

$$-2 \quad 3 \quad 14$$

$$X + Y = -B^t$$

$$y = -B^t - X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}$$

$$-2 \quad 4 \\ 7 \quad 23$$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 1$$

$$0 \quad 1$$

$$X^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{28}{5} \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{4}{25} + \frac{196}{25} = \frac{200}{25} = 8$$

$$-2 \quad 3 \quad 14$$

$$X^t Y = \left(\begin{array}{cc} \left(-\frac{1}{5} \right) \left(-\frac{4}{5} \right) + 2 \left(6 \right) + \frac{28}{5} \left(\frac{7}{5} \right) & \left(-\frac{1}{5} \right) (-1) + 2(1) + \frac{28}{5}(9) \\ \frac{3}{5} + \frac{14(7)}{5} = \frac{105}{5} & 2 + 3 + (-2)(-1) + 3(1) + 14(9) \end{array} \right)$$

$$-2 \quad 3 \quad 14$$

$$X^t Y = \begin{pmatrix} 8 & 263 \\ 5 & 131 \end{pmatrix}$$

Presente aquí su trabajo

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{P}_1: x + 2y + 3z = 4 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 2, 3)$$

$$\mathcal{P}_2: x + 3y + 2z = 1 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, 3, 2)$$

$$\textcircled{a}) \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{v} \quad P_0: \text{Punto de la recta}$$

$$\vec{n}_1 = (1, 2, 3)$$

$$\vec{n}_2 = (1, 3, 2)$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\frac{4-9}{2(2)-(3)(3)}, -\left[1(2)-3(1) \right], \frac{3-2}{1(3)-2(1)} \right)$$

$$\vec{v} = (-5, 1, 1)$$

$$x + 2y + 3z = 4 \quad x + 2y + 3(3+4) = 4$$

$$x + 3y + 2z = 1 \quad \{ \begin{matrix} (-) \\ x + 2y + 9 + 3y = 4 \end{matrix}$$

$$z - y = 3$$

$$x = -5 - 5y$$

$$z = 3 + y$$

$$P_0 = (-5 - 5(1), 1, 3 + 1) \quad y = 1$$

$$P_0 (-10, 1, 4)$$

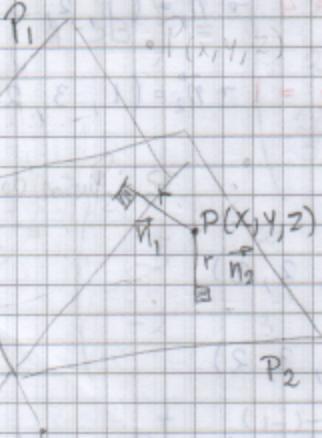
Ecuación de la recta \mathcal{L}

$$\boxed{\mathcal{L}: P = (-10, 1, 4) + t(-5, 1, 1), t \in \mathbb{R}}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

b)



Quiero el lugar geométrico de

$$P(x, y, z)$$

$$P_1: x + 2y + 3z - 4 = 0$$

$$P_2: x + 3y + 2z - 1 = 0$$

$$\vec{n}_1 = (1, 2, 3) \checkmark$$

$$\vec{n}_2 = (1, 3, 2) \checkmark$$

$$d(P, P_1) = \frac{|x + 2y + 3z - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{|x + 3y + 2z - 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}}$$

$$|x + 2y + 3z - 4| = |x + 3y + 2z - 1| \quad d(P, P_2)$$

$$x + 2y + 3z - 4 = x + 3y + 2z - 1$$

$$0 = y - z + 3$$

~~$$x + 2y + 3z - 4 = -(x + 3y + 2z - 1)$$~~

~~$$x + 2y + 3z - 4 = -x - 3y - 2z + 1$$~~

$$2x + 5y + 5z - 5 = 0$$

$$2x + 5y + 5z - 5 = 0$$

Presente aquí su trabajo

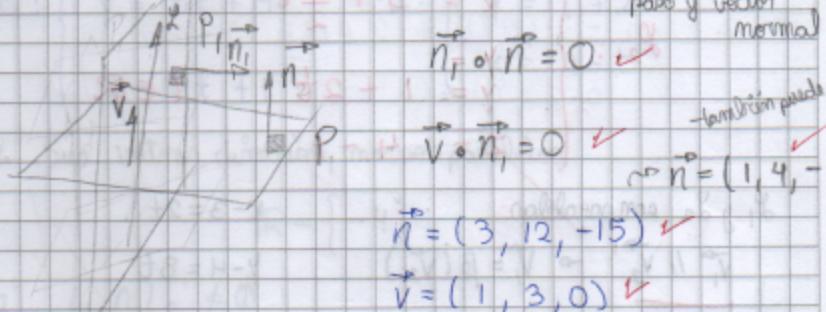
Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)



③

$$L: \tilde{P} = (2, 4, 6) + t(1, 3, 0), t \in \mathbb{R}$$

$$P: 3x + 12y - 15z + 9 = 0$$



$$\vec{n} = (3, 12, -15)$$

$$\vec{v} = (1, 3, 0)$$

$$P_1: x + ay + bz + d = 0$$

$$\vec{n}_1 = (1, a, b)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{n}_1 = (1, a, b)$$

$$\vec{n} = (3, 12, -15)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\vec{v} = (1, 3, 0)$$

$$\vec{n}_1 = (1, a, b)$$

$$3 + 12a - 15b = 0$$

$$1 + 3a = 0$$

$$3 + 12\left(\frac{-1}{3}\right) - 15b = 0$$

$$3a = -1$$

$$3 - 4 = 15b$$

$$-1 = 15b$$

$$a = \frac{-1}{3}$$

$$\frac{-1}{15} = b$$

$$A \in P,$$

$$A(2, 4, 6)$$

$$2 + \left(\frac{-1}{3}\right)(4) + \left(\frac{-1}{15}\right)(6) + d = 0$$

$$P_1: x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{15}z - \frac{4}{15} = 0 \quad d = -\frac{4}{15}$$

$$P_1: 15x - 5y - z - 4 = 0$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

4)

$$\text{a) } \mathcal{L}_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-1}{\alpha} = t \quad \alpha \neq 0$$

$$\mathcal{L}_2: \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

\mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son paralelas

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \beta(\vec{v}_2)$$

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 8t + 4 \\ z = \alpha t + 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = (2, 8, \alpha)$$

$$x-3=2t$$

$$y-4=8t$$

$$z-1=\alpha t$$

$$\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, 2, -1 \right)$$

$$(2, 8, \alpha) = \left(\frac{1}{2}, 2, -1 \right) \beta$$

\mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son
paralelas

$$2 = \frac{\beta}{2} \wedge 8 = 2\beta \wedge \alpha = -\beta \quad \text{para } \alpha = -4$$

$$4 = \beta / \quad 4 = \beta / \quad \alpha = -4 \quad \checkmark$$

g) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = ?$

$$(2t+3, 8t+4, \alpha t+1) = \left(3 + \frac{1}{2}w, 1 + 2w, 4 - w \right)$$

$$2t+3 = \beta + \frac{1}{2}w$$

\mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son

$$2t = \frac{1}{2}w \Rightarrow 4t = w \quad \text{rectas distintas}$$

$$8t+4 = 1 + 2w$$

$$8t+4 = 1 + 2(4t)$$

$$8t+4 = 1 + 8t \quad 4 = 1 \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

$$\alpha t + 1 = 4 - w$$

$$0 = 1 - w \quad \checkmark$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

b)

$$R_1: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 8t + 4 \\ z = at + 1 \end{cases}$$

$$R_2: \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

1º Sus vectores dirección no son paralelos

$$\text{TR} = \{-4\}$$

2º $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Como vimos en a) los rectas no se intersecan en ningún punto. Entonces, no existe ningún valor para que se interseguen en algún punto.

la R_1 y R_2

⑤ $g: 4x - 7y - 4z + 68 = 0$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 211 = 0$$

211

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 - 211 = 0 + 4 + 1 + 9$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 225$$

a) $\Rightarrow C(2, 1, -3) \checkmark$ radio = 15 \checkmark

b)

Queremos A y r

$$d(C, P) = \sqrt{\frac{8 - 7 + 12 + 68}{4(2) - 7(1) - 4(-3) + 68}}$$

$$\sqrt{4^2 + 7^2 + 0^2}$$

$$= \frac{81}{9} = 9$$

$$P: P = (2, 1, -3) + h(4, -7, -4)$$

$$A(2+4h, 1-7h, -3-4h)$$

Presente aquí su trabajo

$$2+4(-1) \quad 1-7(-1) \quad -3-4(-1)$$
$$A(2+4h, 1-7h, -3-4h)$$

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$4(2+4h)-7(1-7h)-4(-3-4h)+68=0$$

$$8+16h-7+49h+12+16h+68=0$$

$$81h+81=0$$

$$h = -1$$

$$C(-2, 8, 1)$$

c)

$$15^2 = a^2 + r^2$$

$$15^2 - 9^2 = r^2$$

$$\sqrt{15^2 - 9^2} = r$$

$$r = 12$$

N.S.

$$C = 100\pi r^2 + 2\pi r \cdot 15 + 2\pi r \cdot 9 + 2\pi r \cdot 12$$

3240

