PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERU
ESTUDIOS GENERALES DE CIENCIAS
Fundamentos de Cálculo
Primera Práctica Calificada-Solución
(2017-2)

---

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente sus respuestas. (5 puntos)
   a) Sean a y b números enteros positivos. Si $(a+b)^3$ es par, entonces $(a+b)$ es par.

   b) q es condición necesaria para p, donde
   $p: \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tal que $x^2+y^2>1$; y
   $q: \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2+y^2>1$.

   c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2-4x+y^3>8$.

   d) Si a es un número entero, entonces a^3-a y $(a-1)^3+a^3+(a+1)^3$ son múltiplos de 3.

   e) Sean a y b números reales positivos. Si $a+b=4$, entonces $\frac{4}{ab} \geq 1$.

   Solución:

   a) Verdadera
   Usamos el método de demostración por contrarrecíproco.
   Suponemos que $(a+b)$ es impar, entonces $a+b=2k+1, k \in Z$.
   Luego,
   $(a+b)^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1=2k(4k^2+6k+3)+1$
   $(a+b)^3$ es impar.
   Por lo tanto, la proposición es verdadera.

   b) Verdadera
   El valor de V o F de $p \Rightarrow q$ resulta de los valores de p y de q.
   Analizando p, proposición universal, con el predicado existencial, $\exists\, y \in \mathbb{R}$ que cumple $x^2+y^2>1$, es V si para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, se halla $y \in \mathbb{R}$, con $y>1$, de donde $x_0^2 \geq 0$ y $y^2>1$. Sumando miembro a miembro, $x_0^2+y^2>1$; y p es V.
   Analizando q, proposición existencial, con predicado universal $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se cumple $x^2+y^2>1$. Es V si para un determinado y_0, cada x en $\mathbb{R}$ cumple $x^2+y^2>1$. Para esto, dado $y_0 \in \mathbb{R}$, con $y_0>1$, se tiene $y_0^2>1$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se tiene $x^2 \geq 0$. Luego, sumando miembro a miembro, $x^2+y_0^2>1$, para $y_0 \in \mathbb{R}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$; y q es V.
   Por lo tanto, p $\Rightarrow$ q es una proposición verdadera.

   c) Verdadera
   Sea $x \in \mathbb{R}$, tomando $y=3$ se tiene
   $$x^2-4x+27=(x-2)^2+23 \geq 23>8$$

   d) Verdadera

Dado un número entero a, como $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)\,a\,(a + 1)$, producto de tres números consecutivos, uno de los factores es múltiplo de 3; de donde $a^3 - a$ es múltiplo de 3, es V.
Por otro lado, $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3 = (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + a^3 + (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) = 3a^3 + 6a = 3(a^3 + 2a)$, es múltiplo de 3, es V. Luego, la proposición es verdadera.

e) Verdadera

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{4}{ab} \geq 1$$

2. Para todo n número entero positivo, considere la suma siguiente:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \times n^2 .$$

a) Exprésela usando la notación $\sum$. (0.5 puntos)

b) Usando inducción matemática, demuestre que para todo n número entero positivo se cumple

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \times n^2 = (-1)^{n-1} \times \frac{n(n+1)}{2} .$$ (2.5 puntos)

Solución:

a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2$

b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \times \frac{n(n+1)}{2}$

<u>Etapa base</u>: Para $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} k^2 = 1 = (-1)^{1-1} \times \frac{1(1+1)}{2}$$

<u>Etapa inductiva</u>:
Hipótesis inductiva: Suponemos que para algún $h \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{h} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{h-1} \times \frac{h(h+1)}{2}$$

Tesis inductiva: Debemos probar que

$$\sum_{k=1}^{h+1} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{h} \times \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

En efecto

$$\sum_{k=1}^{h+1}(-1)^{k-1}k^2 = \sum_{k=1}^{h}(-1)^{k-1}k^2 + (-1)^{\mathrm{h}}(\mathrm{h}+1)^2$$

$$= (-1)^{h-1}\times\frac{h(h+1)}{2} + (-1)^{\mathrm{h}}(\mathrm{h}+1)^2$$

$$= (-1)^{h}\times\frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

La afirmación es verdadera para $h+1$. Por lo tanto, la afirmación *es* verdadera para todo n entero positivo.

3. Los números a_n , con $n \in \mathbb{Z}^+$, se definen recursivamente por: (4 puntos)

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Usando inducción matemática, demuestre, que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$a_n \leq (\sqrt{3}+1)^{n-1}.$$

Solución:

<u>Etapa base</u>:

Para $n = 1$

$$a_1 = 1 \leq (\sqrt{3}+1)^{1-1}$$

la afirmación es verdadera.

Para $n = 2$

$$a_2 = 2 \leq (\sqrt{3}+1)^{2-1}$$

la afirmación es verdadera.

<u>Etapa inductiva</u>: Sea $h \geq 2$.

Hipótesis inductiva: Suponemos que para $k \in \mathbb{Z}^+$ con $1 \leq k \leq h$ se cumple

$$a_k \leq (\sqrt{3}+1)^{k-1}$$

Tesis inductiva: Debemos probar que

$$a_{h+1} \leq (\sqrt{3}+1)^{h}$$

En efecto

$$a_{h+1} = a_h + 2a_{h-1} \leq (\sqrt{3}+1)^{h-1} + 2(\sqrt{3}+1)^{h-2}$$
$$= (\sqrt{3}+1)^{h-1}(1+\frac{2}{\sqrt{3}+1})$$
$$= (\sqrt{3}+1)^{h-1}(1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)})$$
$$= (\sqrt{3}+1)^{h-1}(2\sqrt{3}-1)$$
$$= (\sqrt{3}+1)^{h-1}(\sqrt{3}+\sqrt{3}-1)$$
$$\leq (\sqrt{3}+1)^{h-1}(\sqrt{3}+1)$$
$$a_{k+1} \leq (\sqrt{3}+1)^h$$

La afirmación es verdadera para $h+1$. Por lo tanto, la afirmación *es* verdadera para todo n entero positivo.

4. Calcule en términos de n las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$ (2 puntos)

b) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k+1}$ (3 puntos)

Solución:

a)

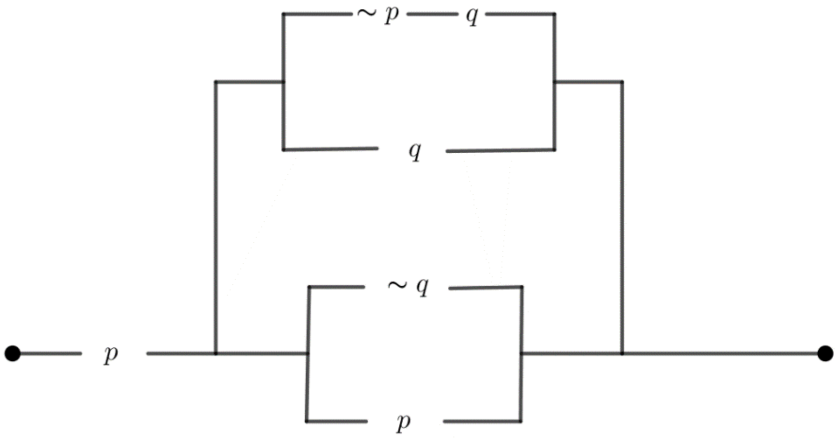
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{-2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-1-\sqrt{2}}{2}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\binom{n+1}{k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(k+1)\binom{n+1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!} - \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\
&= (n+1)\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} \\
&= (n+1)\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0}\} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} \\
&= (n+1)\{2^n - 1\} - 2^{n+1} + 2 + n \\
&= n2^n + 2^n - 2^{n+1} + 1
\end{aligned}
$$

5. Construya un circuito lógico equivalente a la proposición dada:
   $p \wedge \{[(\sim p \wedge q) \vee q] \vee \sim (q \wedge \sim p)\}$ (3 puntos)



San Miguel, 11 de setiembre de 2017