ESTUDIOS
**GENERALES**
**CIENCIAS**

PONTIFICIA
**UNIVERSIDAD**
**CATÓLICA**
DEL PERÚ

# FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

PRIMER EXAMEN

SEMESTRE ACADÉMICO 2018-2

Horario: Todos | Duración: 3 horas

Elaborado por todos los profesores del curso

**ADVERTENCIAS:**

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

**INDICACIONES:**

- Se prohíbe el uso de apuntes de clase, libros, tablas, calculadora y de computadora personal.
- Debe explicar detalladamente sus soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.
- Enumere las páginas del cuadernillo en la parte superior del 1 al 12 y reserve **dos** páginas para resolver cada una de las preguntas, según la distribución siguiente:

| **Pregunta** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Páginas** | 1 y 2 | 3 y 4 | 5 y 6 | 7 y 8 | 9 y 10 |

---

1. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta adecuadamente.

   a) $\forall x < 0, \exists y > 0$ tal que $x^2 < y^2$. 1 punto

   b) El conjunto solución de la inecuación $x^2(4 - x^2) > 0$ es $]-2, 2[$. 1 punto

   c) $\left||x^2 - 4| - 5\right| < 5$ es condición necesaria para $0 < |x^2 - 4| < 3$. 1 punto

   d) Si $f$ es una función definida por $f(x) = mx + k$, con $x \in [a, b]$ y $m, k \in \mathbb{R}$, entonces 1 punto
   $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

2. a) Los números reales de la secuencia de *Tribonacci*, $a_n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, se definen recursivamente por
   $$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \; a_3 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \quad \text{para } n \geq 4. \end{cases}$$
   Demuestre, usando inducción matemática, que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $a_n < 2^n$. 2 puntos

   .

   b) Sea $x$ un número real. Considere la siguiente suma
   $$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2n-k} 3^{n-k} 2^k.$$
   b₁) Calcule $S$ en términos de $n$ y $x$. 1 punto

   b₂) Resuelva para $x$ la inecuación $S \leq 0$, sabiendo que $n$ es un número impar. 1 punto

3. a) Sea $f$ una función definida por $f(x) = 2x^2 - 2x + 3b + \frac{1}{2}$. Calcule el menor valor entero de $b$ de modo que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. 1 punto

   b) Considere las funciones $f$ y $g$ definidas por

$$f(x) = |x|$$

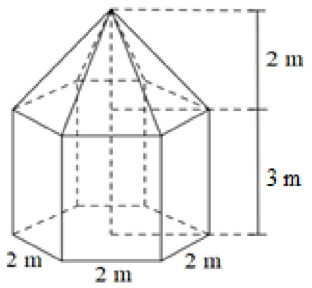
$$g(x) = x^2 + 4x, \quad -2 \leq x < 1.$$

   Halle la regla de correspondencia de la función compuesta $f \circ g$, indicando su dominio. 1.5 puntos

   c) Esboce la gráfica de la función $h$, definida por $h(x) = |x^2 + 4x|$ cuando $-2 \leq x < 1$, hallando (i) las coordenadas de los puntos de intersección de esta gráfica con los ejes coordenados, si existiesen; (ii) el rango de $h$ y (iii) el (los) intervalo(s) abierto(s) donde la función $h$ es creciente o decreciente. 2.5 puntos

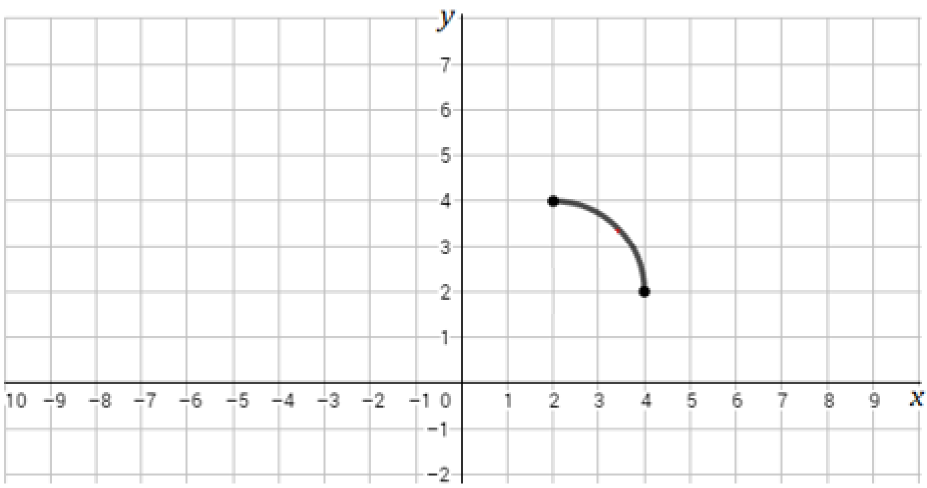
4. Se empieza a llenar un recipiente que tiene la forma de un prisma hexagonal regular de 2 m de arista de la base y 3 m de altura, y una pirámide hexagonal regular de 2 m de altura, tal como se muestra en la figura.

   Halle el volumen de agua en el recipiente en función de la altura $h$ que alcanza la superficie del agua mientras se llena dicho recipiente.




3 puntos

5. Halle la regla de correspondencia de una **función impar** $f$ que cumple con las condiciones siguientes:
   - $Dom\,(f) = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\ \cup \{0\}$ y $Ran\,(f) = [-7, -2] \cup [2, 7] \cup \{0\}$.
   - Para $x \in ]4, 7[$, $f$ es creciente y su gráfica es parte de una parábola.
   - Para $x \in [7, +\infty[$, la gráfica de $f$ es parte de una recta.
   - Parte de la gráfica de $f$ está compuesta por un arco de circunferencia de centro (2, 2) como se muestra en la figura.




4 puntos

Coordinadora de teoría: Norma Rubio

San Miguel, 15 de octubre 2018

ENTREGADO

25 OCT 2018

## Primer examen

| Año | | | | Número | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 8 | 5 | 5 | 4 | 9 |

Código de alumno

Ramirez Huaman Wilven Aldo

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: F. CAL

Horario: H - 109

Fecha: 15/10/18

Nombre del profesor: D. BANCES

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como...
2. Utilice las zonas señaladas del...

desarrollos
rador)

1) (1)

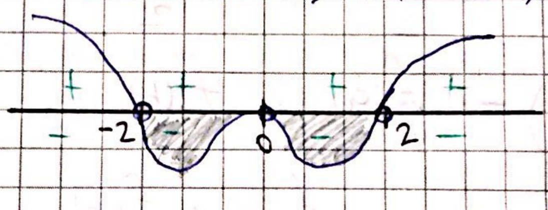
a) $\forall x<0, \exists\ y = x^2+1 > 0$ tal que:

$$0 < 1 \quad \text{(sumando } x^2\text{)}$$
$$\Rightarrow x^2 < x^2+1 \quad \text{(como } x^2+1>0\text{)}$$
$$\Rightarrow x^2 < (x^2+1)(x^2+1) \quad \text{— por ser } x^2+1 > \underline{1}$$
$$\Rightarrow x^2 < \underbrace{(x^2+1)}_{y}{}^2$$
$$\Rightarrow x^2 < y^2$$

$\Rightarrow$ La proposición es Verdadera.

1,0

b) $x^2(4-x^2) > 0 \Rightarrow x^2(x^2-4) < 0$
$\Rightarrow x^2(x-2)(x+2) < 0$




$\Rightarrow$ El C.S: $]-2;0[\cup]0;2[$

$\Rightarrow$ La proposición es Falsa, pues no tiene el 0 en el C.S.

1,0

c) La proposición equivale a:

$$0<|x^2-4|<3 \longrightarrow \big||x^2-4|-5\big|<5$$

Demostración:

$$0<|x^2-4|<3 \quad \text{[sumando (−5)]}$$
$$\Rightarrow -5<|x^2-4|-5<-2$$
$$\Rightarrow 2<\big||x^2-4|-5\big|<5$$

$$2<\big||x^2-4|-5\big|<5 \longrightarrow \big||x^2-4|-5\big|<5$$

$$\underbrace{\underbrace{2<\big||x^2-4|-5\big|}_{V} \wedge \underbrace{\big||x^2-4|-5\big|<5}_{V}}_{V} \longrightarrow \underbrace{\big||x^2-4|-5\big|<5}_{V}$$

$$V \rightarrow V \equiv V$$

$\Rightarrow$ Podemos decir: $2<\big||x^2-4|-5\big|<5 \rightarrow \big||x^2-4|-5\big|<5$

$\Rightarrow$ La proposición es verdadera.

1,0

Presente aquí su trabajo

2

d) $f(x) = mx + k \quad x \in [a, b] \wedge m, k \in \mathbb{R}$

$f(a) = ma + k$ ...... (I)

$f(b) = mb + k$ ...... (II)

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = m\left(\frac{a+b}{2}\right) + k$

$\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{ma}{2} + k + \frac{mb}{2}$

$\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{ma+k}{2} + \frac{mb+k}{2}$ ...... de I y II

$\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}$

$\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

$\Rightarrow$ La proposición es Verdadera.

1.0

Zona ex
cálculos
(bo

$f(x) =$

$x \in$

$m,$

$\rightarrow$

$f(a)$

$-3$

Scanned with CamScanner

2). a) Etapa Base: $n=1$, $a_1 = 1 < 2^1$

$\Rightarrow 1 < 2$, Verdad

$n=2$, $a_2 = 1 < 2^2 \Rightarrow 1 < 4$, Verdad

$n=3$, $a_3 = 1 < 2^3 \Rightarrow 1 < 8$, Verdad

Etapa inductiva:

Hipotesis inductiva: $h \in \mathbb{Z}^+$, $h \geq 3$

$j \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq j \leq h$ se cumple:

$$a_j < 2^j$$

tesis inductiva: demostraremos que si $n = h+1$ se cumple:

$$a_{h+1} < 2^{h+1}$$

En efecto: $a_{h+1} = a_h + a_{h-1} + a_{h-2}$

$$\Rightarrow a_{h+1} = \underbrace{a_h + a_{h-1} + a_{h-2} < 2^h + 2^{h-1} + 2^{h-2}}_{\text{Por hipótesis inductiva}}$$

$$\Rightarrow a_{h+1} < 2^{h-2}(2^2 + 2 + 1)$$

$$\Rightarrow a_{h+1} < (2^{h-2})7 \quad \ldots\ldots (I)$$

Sabemos: $2^{h-2} > 0 \wedge 7 < 8 \Rightarrow 7.(2^{h-2}) < 8.(2^{h-2}) \quad \ldots (II)$

Por transitividad de (I) y (II)

$$\Rightarrow a_{h+1} < (2^{h-2}).7 < (2^{h-2}).8$$

$$\Rightarrow a_{h+1} < 2^3.(2^{h-2})$$

$$\Rightarrow a_{h+1} < 2^{h+1}$$

La afirmación es verdadera para $n = h+1$. Por lo tanto la afirmación es verdadera para todo entero positivo.

2.0

Zona e cálculo

2-b) (4)

$b_1)$ $$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2n-k} \cdot 3^{n-k} \cdot 2^{k}$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n} \cdot \underbrace{x^{n-k} \cdot 3^{n-k}}_{\text{agrupan}} \cdot 2^{k}$$

$$S = x^{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3x)^{n-k} \cdot 2^{k}}_{\text{por binomio de Newton}}$$ [redacted]

$$S = x^{n}(3x+2)^{n}$$

$$\Rightarrow \quad S = (3x^{2}+2x)^{n}$$

1.0

$b_2)$ Si: $n = 2k+1$ , $k \in \mathbb{Z}$

$$S = (3x^{2}+2x)^{n} \leq 0$$

$$(3x^{2}+2x)^{2k+1} \leq 0$$

$$(3x^{2}+2x)^{2k}(3x^{2}+2x) \leq 0$$

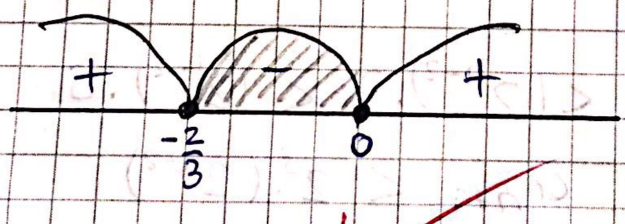
Sabemos que un numero real elevado a un exponente par siempre es mayor o igual que cero

$$((3x^{2}+2x)^{k})^{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\cancel{(3x^{2}+2x)^{2k}}}_{\geq 0}(3x^{2}+2x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^{2}+2x \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad x(3x+2) \leq 0$$




1.0

$\Rightarrow$ C.S : $\left[-\frac{2}{3} \, ; \, 0\right]$ , para estos valores $S \leq 0$.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5

3) a) Sea $f$ una función cuadrática

$f_{(x)} = Ax^2 + Bx + C$ , para que

$f_{(x)} > 0$ debe cumplir que:

$A > 0 \wedge \Delta = B^2 - 4AC < 0$

$\Rightarrow$ Si: $f_{(x)} = 2x^2 - 2x + 3b + \frac{1}{2}$ es $f_{(x)} > 0$

$\Rightarrow \underbrace{A = 2 > 0}_{\text{Verdadero}} \wedge \Delta = (-2)^2 - 4(2)\left(3b + \frac{1}{2}\right) < 0$

$\Rightarrow 4 - 24b - 4 < 0$

$\Rightarrow -24b < 0$

$\Rightarrow 24b > 0$

$\Rightarrow b > 0$

$\Rightarrow b \in ]0; +\infty[$

$\Rightarrow$ El menor Valor entero que puede tomar b para que $f_{(x)} > 0$ es $b = 1$

1.0

b) $Dom_{f\circ g} = \{x \in Dom\,g \wedge g(x) \in Dom\,f\}$, / $Dom\,f = \mathbb{R}$

$Dom_{f\circ g} = \{-2 \leq x < 1 \wedge (x^2 + 4x) \in \mathbb{R}\}$

$Dom_{f\circ g} = \{-2 \leq x < 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

$Dom_{f\circ g} = [-2; 1[$

$(f\circ g)_{(x)} = f(g_{(x)}) = |x^2 + 4x|$ .........(I)

Sabemos: $x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x+2)^2 - 4$ ....(II)

$\Rightarrow \underbrace{-2 \leq x < 1}_{\text{Dominio}} \Rightarrow 0 \leq x + 2 < 3$

$\Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 < 9$

$\Rightarrow -4 \leq \underbrace{(x+2)^2 - 4} < 5$ ..... Por (II)

$\Rightarrow -5 < -4 \leq x^2 + 4x < 5$

$\Rightarrow 0 \leq |x^2 + 4x| < 5$ ..... Por (I)

$\Rightarrow 0 \leq (f\circ g)_{(x)} < 5$

$\Rightarrow Ran_{f\circ g} = [0; 5[$

1.5

Regla de Correspondencia de $f\circ g$ $\begin{cases} x^2 + 4x , & 0 \leq x < 1 \\ -x^2 - 4x , & -2 \leq x < 0 \end{cases}$

Continua...

$x(x+4) \geq 0$

$-4 \quad 0$

$x^2 + 4x / \ldots$

$x^2 + 4x \geq 0$

$x(x+4)$

$x^2 + 4x + 4 - 4$

$(x+2)^2 - 4$

$0 \leq x < 1,\ x^2 + 4x$

$+ < 0$

$\leq x < 1\ -x^2 - 4x$

$\leq x + 2 < 3$

$(x+2)^2 < 9$

$(x+2)^2 - 4 < 5$

$(x+2)^2 - 4| < 5$

$+4x| < 5$

$g(x) < 5$

$]-\infty, 5[$

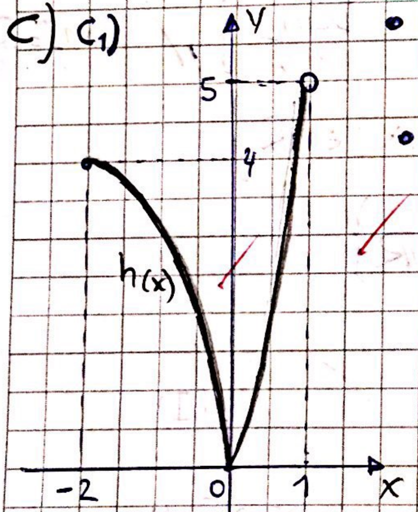
demostración de la regla de correspondencia por intervalos

$0 \leq x < 1 \Rightarrow 2 \leq x+2 < 3$
$\Rightarrow 4 \leq (x+2)^2 < 9$
$\Rightarrow 0 \leq (x+2)^2-4 < 5$
$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{(f\circ g)(x)}_{\text{es positivo}} < 5$
$\Rightarrow (f\circ g)(x) = |x^2+4x| = x^2+4x$

$-2 \leq x < 0 \Rightarrow 0 \leq x+2 < 2$
$\Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 < 4$
$\Rightarrow -4 \leq (x+2)^2-4 < 0$
$\Rightarrow -4 \leq \underbrace{(f\circ g)(x)}_{\text{es negativo}} < 0$
$\Rightarrow (f\circ g)(x) = |x^2+4x| = -x^2-4x$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x) = \begin{cases} x^2+4x, & 0 \leq x < 1 \\ -x^2-4x, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

c) $c_1$)




- intersección con eje $y$ / $x = 0 \wedge x \in Dom\,h$
  $h(0) = |0^2+4(0)| = 0$
- intersección con eje $x$ / $h(x) = 0$
  $h(x) = |x^2+4x| = 0$
  $\Rightarrow (x=0 \vee x=-4) \wedge x \in Dom\,h$
  $\Rightarrow x = 0$

La única coordenada de intersección de $h$ con los ejes coordenados es $(0;0)$

$c_2$) $\underbrace{-2 \leq x < 1}_{\text{dominio}} \Rightarrow 0 \leq x+2 < 3 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 < 9$
$\Rightarrow -4 \leq (x+2)^2-4 < 5 \Rightarrow -4 \leq x^2+4x < 5$
$\Rightarrow 0 \leq |x^2+4x| < 5 \Rightarrow 0 \leq h(x) < 5$
$\Rightarrow Ran_h = [0;5[$

$c_3$) $h$ es creciente en $x \in ]0;1[$
$h$ es decreciente en $x \in ]-2;0[$

2.5

Zona exclusiva pa[ra] cálculos y desarro[llo] (borrador)

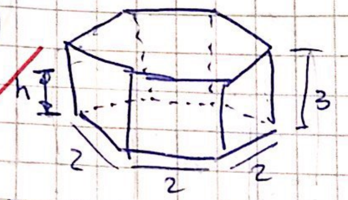
$(x+2)^2-4$

$(x+2)^2-4$

$2 \leq x+2 < 3$
$4 \leq (x+2)^2 <$
$0 \leq (x+2)^2-4$
$0 \leq x+2 <$

7

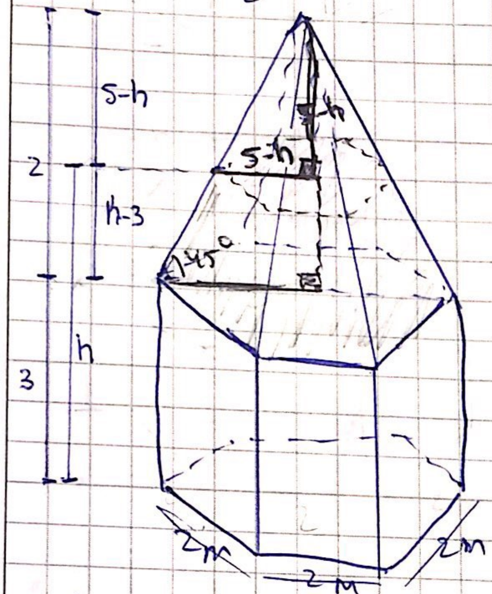
4)




Si: $0 \leq h < 3$

$V_1(h) = A \cdot h$

$V_1(h) = 6\sqrt{3} \cdot h$




Si: $3 \leq h \leq 5$

$V_2(h) = 18\sqrt{3} + V_{TRONCO}$

$V_2(h) = 18\sqrt{3} + V_{\substack{TOTAL\\ Piramide}} - V_{\substack{Piramide\\ pequeño}}$

$\Rightarrow V_2(h) = 18\sqrt{3} + \frac{6\sqrt{3} \cdot 2}{3} - 6 \cdot \frac{(5-h)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \times (5-h) \cdot \frac{1}{3}$

$\Rightarrow V_2(h) = 18\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(5-h)^3$

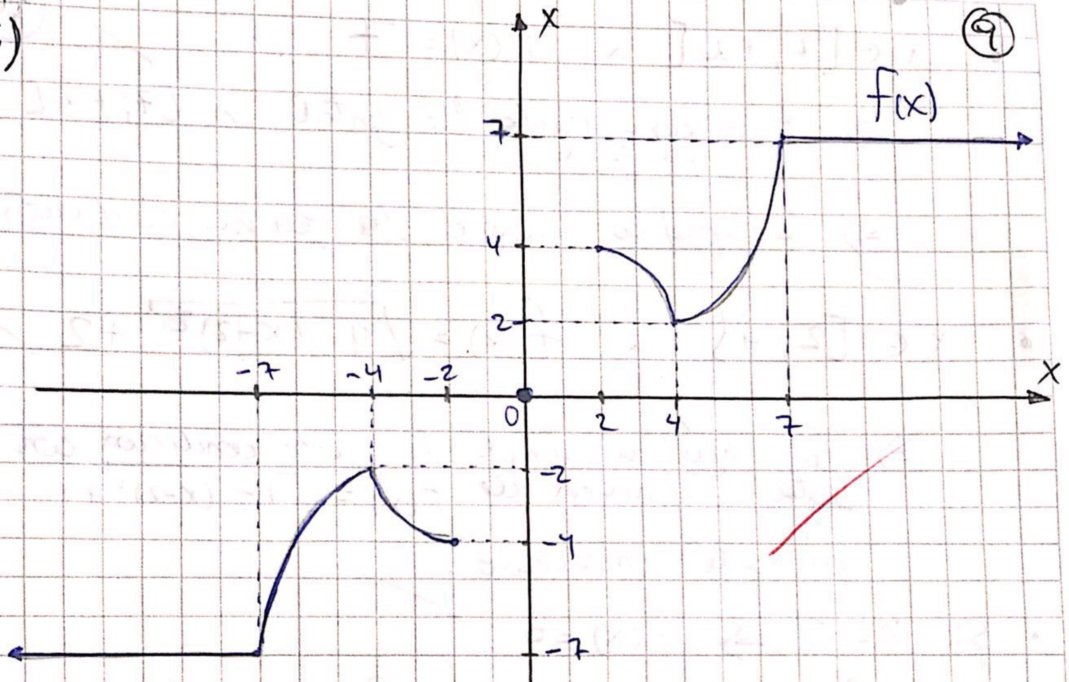
$\Rightarrow V_2(h) = 22\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(5-h)^3$

Volumen en función de la altura h.

$$\Rightarrow V(h) = \begin{cases} 6\sqrt{3}\,h \ m^3, & 0 \leq h < 3\ m \\ 22\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(5-h)^3 \ m^3, & 3 \leq h \leq 5\ m \end{cases}$$

Presente aquí su trabajo

5) ⑨




- $Dom f = ]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[ \cup \{0\}$

$Ran f = [-7;-2] \cup [2;7] \cup \{0\}$

La gráfica cumple la primera condición.

- $x \in ]4,7[ \wedge f(x) = a(x-h)^2 + k$

$f(x) = a(x-4)^2 + 2$

$f(7) = a(7-4)^2 + 2 = 7$

$\Rightarrow a = \frac{5}{9}$

$f(x) = \frac{5}{9}(x-4)^2 + 2$

Si $x_1, x_2 \in ]4,7[ \wedge x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 - 4 > x_2 - 4$

$\Rightarrow (x_1-4)^2 > (x_2-4)^2$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{5}{9}(x_1-4)^2+2}_{f(x_1)} > \underbrace{\frac{5}{9}(x_2-4)^2+2}_{f(x_2)}$

$\Rightarrow f(x)$ es creciente en $]4,7[$

$\Rightarrow$ La gráfica cumple la segunda condición

Continúa ...

Presente aquí su trabajo

Zona ex... cálculos (b...

10

- $x \in [7, +\infty[ \wedge f(x) = 7$

$\Rightarrow$ f es una recta horizontal en $[7; +\infty[$
parte de

$\Rightarrow$ la gráfica cumple la tercera condición.

- $x \in [2; 4] \wedge f(x) = \sqrt{4-(x-2)^2} + 2$

$\Rightarrow$ la gráfica cumple la cuarta condición con esta definición de $f(x) = \sqrt{4-(x-2)^2} + 2$ en este intervalo.

- Si $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
- Como f es impar cumple $f(-x) = -f(x)$ para todos $x \in Dom f$.

4.

Regla de Correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} -7 & , x \in ]-\infty; -7] \\ -\frac{5}{9}(4+x)^2 - 2 & , x \in ]-7; -4[ \\ -\sqrt{4-(x+2)^2} - 2 & , x \in [-4; -2] \\ 0 & , x = 0 \\ \sqrt{4-(x-2)^2} + 2 & , x \in [2; 4] \\ \frac{5}{9}(x-4)^2 + 2 & , x \in ]4; 7[ \\ 7 & , x \in [7; +\infty[ \end{cases}$$