

Año	Número
2022	0427
Código de alumno	

Primer examen

Iturrizago Robles, David Matthew

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: A. M. G. A

Horario: H105-1

Fecha: 19/05/2022

Nombre del profesor: Jorge Cristóbal

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horarios: 101; 102;103;104; 105; 106; 107; 108; 109; 110; 111; 122; A123

Turno: 8:00-11:00

Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- El examen consta de 6 preguntas.
- Puede utilizar calculadoras siempre que no sean programables ni gráficas. No puede usar apuntes de clase ni libros.
- **Justifique sus respuestas.**

1. Considere el cuadrilátero de vértices consecutivos A, B, C y D . Se sabe que:

- $A(-8; 5), B(-2; 6)$ y $C(2; 1)$.
- El punto medio del segmento \overline{BD} es $N(-3; 3)$.

Se pide lo siguiente:

- a) Halle las coordenadas del vértice D . (0,5 puntos)
- b) Calcule el área del triángulo ADC . (1,5 puntos)

2. Determine para qué valores de β la gráfica de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4x - 12y + 20\beta = 0$$

Corresponde a:

- a) Una circunferencia
 - b) Un solo punto
 - c) El conjunto vacío
- (2 puntos)

3. Considere los vectores

$$\vec{b} = (6; -2; 4), \vec{j} = (0; 1; 0) \text{ y } \vec{k} = (0; 0; 1).$$

Sea \vec{a} un vector de \mathbb{R}^3 tal que $\|\vec{a}\| = 3$. Si se cumple la siguiente igualdad

$$(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{u} - 3(\vec{u} - \vec{b}) = (6\vec{j} \cdot (\vec{j} + \vec{k}))\vec{b},$$

Halle el vector \vec{u} . (3 puntos)

4. Considere la parábola $\mathcal{P}: (x-4)^2 = -12(y-8)$, la elipse $\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$ y la hipérbola \mathcal{H} .

Se sabe que:

- Los vértices de \mathcal{E} son los focos de \mathcal{H} .
- Los extremos del lado recto de \mathcal{P} son los vértices de \mathcal{H} .

Se pide lo siguiente:

- Halle la ecuación de la hipérbola \mathcal{H} . (2,5 puntos)
- Esboce el gráfico de \mathcal{E} , \mathcal{P} y \mathcal{H} en un mismo plano, mostrando la ubicación del vértice de \mathcal{P} , los centros de \mathcal{E} y \mathcal{H} , así como las asíntotas de \mathcal{H} . (1,5 puntos)

5. Considere la hipérbola cuya ecuación es

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y + \frac{5}{2} - k = 0,$$

donde k es una constante.

Se pide lo siguiente:

- Si se sabe que un vértice de la hipérbola tiene coordenadas $V\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, halle el valor de k . (1 punto)
- Considere $k = 3$ y responda lo siguiente.
 - Halle las coordenadas del centro y la ecuación del eje focal de la hipérbola en el sistema $X-Y$. (3 puntos)
 - Grafique la hipérbola en el plano $X-Y$, mostrando la ubicación del centro, del vértice V y del eje focal. (1 punto)

6. Considere:

- La parábola $\mathcal{P}: 4(x+1) = (y+2)^2$.
- El punto F , foco de la parábola \mathcal{P} .
- Un punto R que se desplaza sobre la parábola \mathcal{P} .
- El punto Q en la recta $\mathcal{L}: x + y - 2 = 0$, tal que \overline{RQ} es perpendicular a la recta \mathcal{L} .

Se pide lo siguiente:

- Halle las coordenadas del foco de \mathcal{P} y grafique en un mismo plano la parábola \mathcal{P} y la recta \mathcal{L} . (1,5 puntos)
- Halle una ecuación del lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo cuyos vértices son F , R y Q . (2,5 puntos)

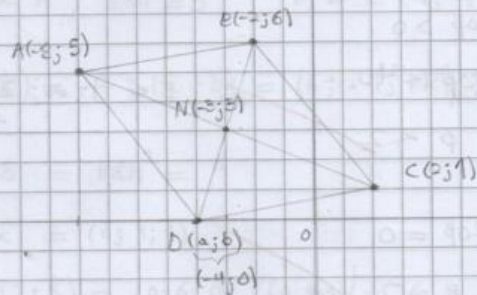
Examen elaborado por los profesores del curso
Coordinadora de teoría: Prof. Cecilia Gaita

San Miguel, 19 de mayo del 2022

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

1)



a) Sea $D(a; b)$.

$$N(-3; 3) = \frac{B(-7; 6) + D(a; b)}{2}$$

$$\begin{aligned} -6 &= a - 2 \\ -4 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &= b + 6 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow D(-4; 0)$$

b)

$$d(A; C) = \sqrt{100 + 16} = 2\sqrt{29} \text{ u}$$

$$m_{AC} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5} \rightarrow AC: y - 5 = -\frac{2}{5}(x + 8)$$

$$AC: 2x + 5y - 9 = 0$$

$$d(D; AC) = \frac{|-8 - 9|}{\sqrt{29}} = \frac{17}{\sqrt{29}} \text{ u}$$

$$\therefore A_{ABC} = d(A; C) \cdot d(D; AC) / 2$$

$$= \frac{2\sqrt{29} \cdot 17}{2 \cdot \sqrt{29}} = 17 \text{ u}^2$$

$$\begin{aligned} 116 & 12 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5y - 25 &= -2x - 16 \\ 2x + 5y - 9 &= 0 \end{aligned}$$

a) 0,5
b) 1,5

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

2) $C: x^2 + y^2 + 4x - 12y + 20p + 4 - 4 + 36 - 36 = 0$
 $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 40 - 20p$

a) $40 - 20p > 0$

$20p < 40$

$p < 2$

$p \in]-\infty; 2[$

b) $40 - 20p = 0$

$p = 2$

c) $40 - 20p < 0$

$40 < 20p$

$2 < p$

$p \in]2; \infty[$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

3) $\vec{b} = (6; -2; 4)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ y $\vec{k} = (0; 0; 1)$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3 / \|\vec{a}\| = 3 \quad \vec{a} = (x_1; x_2; x_3)$

$(\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{a} - 3(\vec{a} - \vec{b}) = (6\vec{j} \cdot (\vec{j} + \vec{k})) \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 9$

$\vec{j} + \vec{k} = (0; 1; 1)$

$6\vec{j} \cdot (\vec{j} + \vec{k}) = (0; 6; 0) \cdot (0; 1; 1) = 6$

$\therefore (6\vec{j} \cdot (\vec{j} + \vec{k})) \vec{b} = (36; -12; 24)$

$\Rightarrow 9\vec{a} - 3(\vec{a} - \vec{b}) = (36; -12; 24)$

$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - 6; x_2 + 2; x_3 - 4)$

$\Rightarrow (9x_1; 9x_2; 9x_3) - (3x_1 - 18; 3x_2 + 6; 3x_3 - 12) = (36; -12; 24)$

(I) $9x_1 - 3x_1 + 18 = 36$

$6x_1 = 18$

$x_1 = 3$

(II) $9x_2 - 3x_2 - 6 = -12$

$6x_2 = -6$

$x_2 = -1$

$\therefore \vec{a} = (3; -1; 2)$

(III) $9x_3 - 3x_3 + 12 = 24$

$6x_3 = 12$

$x_3 = 2$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

4) $P: (x-4)^2 = -12(y-8)$

$E: \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

$\cdot V(4; 8)$

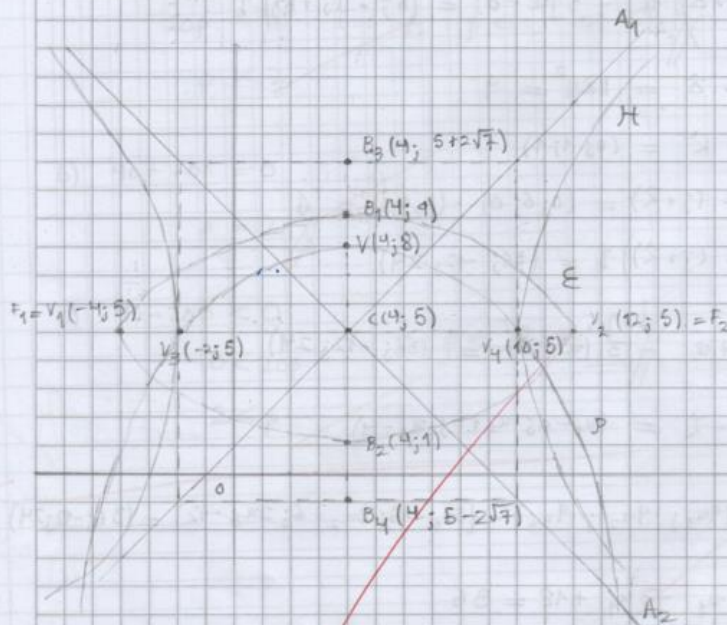
$\cdot C(4; 5)$

$\cdot 4p = -12$

$\cdot a=8, b=4, c=4\sqrt{3}$

$p = -3$

$|p| = 3$



a) 2.5
b) 1.5

$\cdot V_3$ y V_4 : vértices de $E = F_1$ y F_2 : focos de H

$\cdot V_3$ y V_4 : vértices de H y extremos de todo radio de P

$\cdot C$: Foco de P , centro de H y E

\Rightarrow En H , Centro: $C(4; 5)$

$d(C; F_2) = c = 8 \wedge d(C; V_4) = a = 6$

$\cdot c^2 = a^2 + b^2$

$64 = 36 + b^2$

$b = 2\sqrt{7}$

son B_3 y B_4 extremos
del eje conjugado de H .

$3y-15 = \sqrt{7}x - 4\sqrt{7}$

$3y-15 = -\sqrt{7}x + 4\sqrt{7}$

$\Rightarrow A_1: y-5 = \frac{\sqrt{7}}{3}(x-4) \rightarrow A_1: \sqrt{7}x - 3y + 15 - 4\sqrt{7} = 0$

$A_2: y-5 = -\frac{\sqrt{7}}{3}(x-4) \rightarrow A_2: \sqrt{7}x + 3y - 15 - 4\sqrt{7} = 0$

a) $H: \frac{(x-4)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{28} = 1$

b) gráfico ~~erróneo~~

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\y &= u \sin \theta + v \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= x \cos \theta + y \sin \theta \\v &= y \cos \theta - x \sin \theta\end{aligned}$$

$$\frac{2\sqrt{5}(2u-v)}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{10(2u-v)}{5}$$

$$\frac{2\sqrt{5}(u+2v)}{\sqrt{5}}$$

$$(2u-v)^2$$

$$4u^2 - 4uv + v^2$$

$$(2u-v)(u+2v)$$

$$2u^2 + 3uv - 2v^2$$

$$(u+2v)^2$$

$$u^2 + 4uv + 4v^2$$

$$5 \quad \theta: \text{ de rotación}$$

$$H: 2x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y + \frac{5}{2} - K = 0 \quad (*)$$

$$2) A \neq C \rightarrow \tan(2\theta) = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{(2u-v)}{\sqrt{5}} \quad (I)$$

$$y = \frac{(u+2v)}{\sqrt{5}} \quad (II)$$

$$\begin{aligned}3\tan\theta &= 2 - 2\tan^2\theta \\2\tan^2\theta + 3\tan\theta - 2 &= 0 \\2\tan\theta - 1 &= 0 \\ \tan\theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \quad v \quad \tan\theta = -2 \quad (x)$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$(I) \text{ y } (II) \text{ en } (*):$$

$$\frac{2(2u-v)^2}{5} + \frac{4(2u-v)(u+2v)}{5} - \frac{(u+2v)^2}{5} + \frac{10(2u-v)}{5} + \frac{10(u+2v)}{5} + \frac{5}{2} - K = 0$$

$$\frac{8u^2 - 8uv + 2v^2}{5} + \frac{8u^2 + 4uv - 8v^2}{5} - \frac{u^2 + 4uv + 4v^2}{5} + \frac{20u - 10v}{5}$$

$$+ \frac{10u + 20v}{5} = K - \frac{5}{2}$$

$$\frac{8u^2 - 8uv + 2v^2}{5} + \frac{8u^2 + 4uv - 8v^2}{5} - \frac{u^2 + 4uv + 4v^2}{5} + 30u + 10v = 5K - \frac{25}{2}$$

$$15u^2 - 10v^2 + 30u + 10v = 5K - \frac{25}{2}$$

$$30u^2 - 20v^2 + 60u + 20v - 10K + 25 = 0$$

$$30(u^2 + 2u + 1 - 1) - 20(v^2 - v + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 10K - 25$$

$$30(u+1)^2 - 20(v-\frac{1}{2})^2 + 5 = 10K - 25$$

$$\frac{30(u+1)^2}{30} - \frac{20(v-\frac{1}{2})^2}{20} = 10K$$

$$\frac{3(u+1)^2}{K} - \frac{2(v-\frac{1}{2})^2}{K} = \frac{K}{K}$$

$$H: \frac{(u+1)^2}{\frac{K}{3}} - \frac{(v-\frac{1}{2})^2}{\frac{K}{2}} = 1$$

En UV

$$C(-1; \frac{1}{2})$$

centro

$$x: \frac{(u+1)^2}{\frac{K}{3}} - \frac{(v-\frac{1}{2})^2}{\frac{K}{2}} = 1 \quad \text{UV} \quad \text{XY}$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} x &= (2u-v)/\sqrt{5} \quad \text{(I)} \\ y &= (u+2v)/\sqrt{5} \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

$$C(-1; \frac{1}{2})$$

$$(-\frac{5}{2\sqrt{5}}; 0)$$

$$V_1(0; \frac{1}{2})$$

$$V_1(\frac{1}{2\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} u &= (2x+y)/\sqrt{5} \quad \text{(III)} \\ v &= (2y-x)/\sqrt{5} \quad \text{(IV)} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{-1}{2\sqrt{5}} = \frac{2u-v}{\sqrt{5}} \rightarrow 4u-2v = -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{u+2v}{\sqrt{5}} \rightarrow u+2v = 1$$

$$5u = 0$$

$$u = 0$$

$$v = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow V_1$ en UV:

$$(0; \frac{1}{2})$$

\Rightarrow Eje focal horizontal en W

$$\hookrightarrow \frac{K}{3} = a^2 \quad \wedge \quad d(C; V_1) = a = 1$$

$$\frac{K}{2} = b^2$$

$$\bullet \quad K = 3$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

b) b₁) Aplicando (I), (II), (III) y (IV):

En UV

En XY

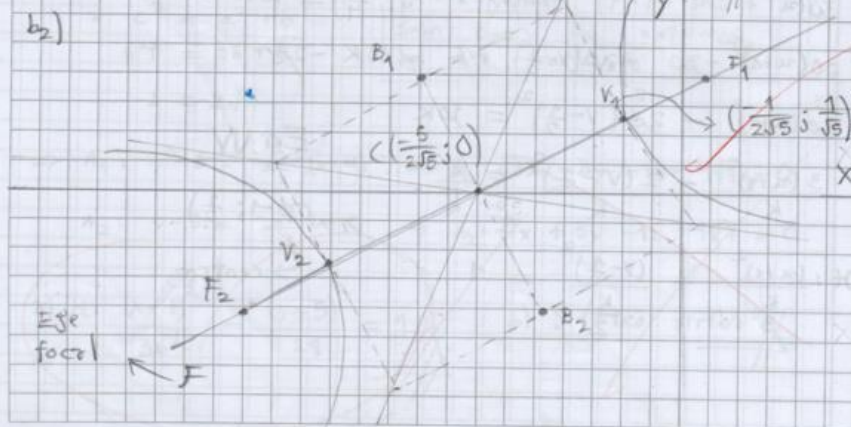
$$\text{Centro } (-1; \frac{1}{2})$$

$$C(-\frac{5}{2\sqrt{5}}; 0)$$

$$\text{Eje focal: } v = \frac{1}{2}$$

$$F: 2x - 4y + \sqrt{5} = 0$$

b₂)



Zona exclusiva para
cálculos y desarrollo
(borrador)

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(2y-x)^2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5} = 4y - 2x$$

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

$$C) \quad \mathcal{P}: (y+2)^2 = 4(x+1) \quad \begin{matrix} V(-1; -2) \\ 4p=4 \\ p=1 \end{matrix} \quad (*)$$

$$\Sigma: y = -x+2$$

a)

$$\bullet \text{ Foco: } F(0; -2)$$

b)

Sea G el baricentro
de $\triangle FRQ$ y $Q(m; -m+2)$.

$$\bullet \quad m = -1 \rightarrow m \overline{FQ} = \frac{b-2+m}{a-m} = 1 \quad (I)$$

$$\bullet \quad x = \frac{a+m}{3} \quad (II) \quad \wedge \quad y = \frac{b-m}{3} \quad (III)$$

$$\Rightarrow \text{En (I)}, \quad b-2+m = a-m \\ 2m = a-b+2 \\ m = \frac{a-b+2}{2} \quad (IV)$$

$$\Rightarrow (IV) \text{ en (II)}, \quad x = \frac{2a + a-b+2}{6} = \frac{3a-b+2}{6} \quad (V)$$

$$y = \frac{2b - a - b + 2}{6} = \frac{3b-a-2}{6} \quad (VI)$$

$$\Rightarrow (V) \quad 3a - b + 2 = 6x \quad (x2) \quad (V) \quad 3a - b + 2 = 6x \quad (x3) \\ (VI) \quad -a + 3b - 2 = 6y \quad (VI) \quad -a + 3b - 2 = 6y$$

$$b = \frac{18y + 6x + 4}{8}$$

$$8a + 4 = 18x + 6y \\ a = \frac{18x + 6y - 4}{8}$$

$$b = \frac{9y + 3x + 2}{4}$$

$$a = \frac{9x + 3y - 2}{4}$$

$$8b - 4 = 18y + 6x \\ b = \frac{18y + 6x + 4}{8}$$

$$8a + 4 = 18x + 6y \\ a = \frac{18x + 6y - 4}{8}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollo
(borrador)

$$\therefore a = \frac{9x+3y-2}{4} \quad \wedge \quad b = \frac{3x+9y+2}{4} \rightarrow R(a;b)$$

$$\Rightarrow a \text{ y } b \text{ son } (*),$$

$$P: (y+2)^2 = 4(x+1)$$

$$Q: \left(\frac{3x+9y+10}{4}\right)^2 = 4\left(\frac{9x+3y+2}{4}\right)$$

$$Q: (3x+9y+10)^2 = 16(9x+3y+2)$$

\hookrightarrow Lugar geométrico

$$\frac{3x+9y+2}{4}$$

$$\frac{9x+3y-2+4}{4}$$

