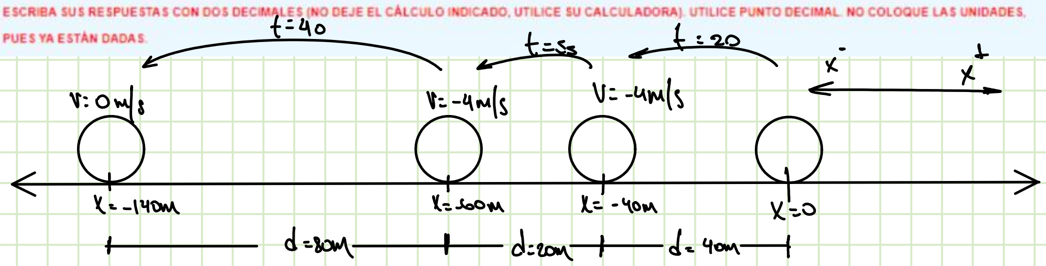
BORRADOR

1) (3,5 puntos) Un auto se mueve en línea recta sobre el eje x (considere que +x apunta hacia la derecha). Inicialmente, el auto parte del reposo desde el origen de coordenadas en $t = 0\,s$ y se mueve hacia la **izquierda** hasta alcanzar una rapidez de 4 m/s después de recorrer 40 metros. Luego, se mueve con velocidad constante por 5 segundos (entre $t = t_1$ y $t = t_2$). Finalmente, disminuye su rapidez a ritmo constante hasta detenerse en $t = t_f$ después de haber recorrido 140 metros en total. Es decir, desde que parte del reposo hasta que se detiene recorre 140 metros.

ESCRIBA SUS RESPUESTAS CON DOS DECIMALES (NO DEJE EL CÁLCULO INDICADO, UTILICE SU CALCULADORA). UTILICE PUNTO DECIMAL. NO COLOQUE LAS UNIDADES, PUES YA ESTÁN DADAS.



•) Primer tramo:

$v_f^2 = v_0^2 + 2ad$

$(-4)^2 = 0^2 + (2)(a)(-40)$

$16 = -(2)(4)(2)(5)(a)$

$16 = -16(5a) \longrightarrow \underline{a = -0{,}2\,m/s^2}$

$v_f = v_0 + at$

$-4 = 0 + (-0{,}2)(t)$

$-4 = -\frac{2}{10}(t) \longrightarrow \underline{t_1 = 20\,s}$

•) tramo de velocidad constante:

$d = vt$

$d = (4)(5) \longrightarrow \underline{|d| = 20\,m}$

•) tramo de desaceleración:

•) $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$

$0^2 = (-4)^2 + (2)(a)(-80)$

$(160)(a) = 16 \longrightarrow \underline{a = 0{,}1\,m/s^2}$

•) $\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$0 = -4 + (0{,}1)(t)$

$4 = (0{,}1)(t) \longrightarrow \underline{t = 40\,s}$

a) En el **primer** tramo de su movimiento, la aceleración del auto (a_x) en m/s está dada por:

Rpta: $\underline{-0{,}2\,m/s^2}$

b) En el **tercer** tramo de su movimiento, la aceleración del auto (a_x) en m/s está dada por:

Rpta: $\underline{0{,}1\,m/s^2}$

BORRADOR

c) Sabemos que el auto empieza a moverse con velocidad constante en $t = t_1$. Este tiempo en segundos es igual a:

Rpta: $\underline{t_1 = 20s}$

d) Un segundo después de partir (en $t = 1\,s$), la posición del auto (x) en metros está dada por:

En el primer tramo, la ecuación de la posición está dada por:

$$\vec{X}(t) = \vec{X_0} + \vec{V_0}(t) + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$\vec{X_0} = 0m$

$\vec{V_0} = 0m/s$

$\vec{a} = -0{,}2m/s^2$

$\rightarrow X(t) = \frac{1}{2}(-0{,}2)t^2 = \underline{-0{,}1t^2}$; $\forall t \in [0; 20]$

$\therefore X(1) = -0{,}1(1)^2 = \underline{-0{,}1m}$

e) Veintidós segundos después de partir (en $t = 22\,s$), la posición del auto (x) en metros está dada por:

·) La posición en $t = 20s$ es $X(20) = -40m$

·) Por condición del problema, el móvil tiene Vcte en $\underline{t \in \langle 20; 25]}$

$\therefore X(22) = X(20) + d_{20 \to 22}$

$-40 + (-4)(2) = \underline{-48m}$

f) Sabemos que el auto se detiene en el tiempo final $t = t_f$. Este tiempo final en segundos es igual a:

$T_{total} = 20 + 5 + 40 = \underline{65s}$

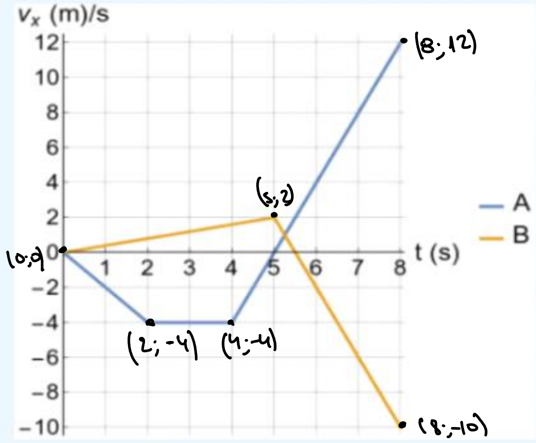
g) Desde que parte del reposo hasta que se detiene en $t = t_f$, la velocidad media del auto (v_{med-x}) en m/s está dada por:

$$V_{media} = \frac{X(t) - X(0)}{t_f - t_0} = \frac{-140 - (0)}{65} = \frac{-140}{65} = \underline{-2{,}15\,m/s}$$

BORRADOR

2)

(3,5 puntos) A continuación se muestra el gráfico velocidad-tiempo de dos partículas (A en color azul y B en color anaranjado). Se sabe que la partícula A parte de la posición $x = 18\,m$ y que se cruza con la partícula B por primera vez en t = 1 s.



Para B:

$$V_B(t) = \begin{cases} 0{,}4t\,;\ t\in[0;5] \\ -4(t-5)+2\,;\ t\in\langle 5;8] \end{cases}$$

Para A:

$$V_A(t) = \begin{cases} -2t\,;\ t\in[0;2] \\ -4\,;\ t\in\langle 2;4] \\ 4(t-4)-4\,;\ t\in\langle 4;8] \end{cases}$$

ESCRIBA SUS RESPUESTAS CON DOS DECIMALES (NO DEJE EL CÁLCULO INDICADO, UTILICE SU CALCULADORA). UTILICE PUNTO DECIMAL. NO COLOQUE LAS UNIDADES, PUES YA ESTÁN DADAS.

Para A: $X_{(0)} = 18m$

•) Para $t \in [0;2]$ $\quad V(t) = -2t \longrightarrow a(t) = -2 m/s^2$

$$X(t) = X_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$X(t) = 18 + \tfrac{1}{2}(-2)t^2 = 18 - t^2 \quad \{ X(2) = 18 - 4 = 14m$$

•) Para $t \in \langle 2;4]$

$$X(t) = X_0 + V_0(t-2)$$

$$X(t) = 14 + (-4)(t-2) \longrightarrow X(4) = 6m$$

•) Para $t \in \langle 4;8]$

$$X(t) = X_0 + V_0(t-4) + \tfrac{1}{2}a(t-4)^2$$

$$X(t) = 6 - 4(t-4) + 2(t-4)^2$$

Dato: $X_A(1) = X_B(1)$

$$X_{(A)}(1) = 18 - 1 = 17m = X_B(1)$$

Para B:

Para $t \in [0;5]$

$V(t) = 0{,}4t$

$$X(t) = X_0 + V_0(t) + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$X(t) = X_0 + \tfrac{1}{2}(0{,}4)t^2$$

$$X(t) = X_0 + (0{,}2)t^2$$

Dato $X_B(1) = 17m$ $\longrightarrow X(1) = 17 = X_0 + 0{,}2$

$$\underrightarrow{16{,}8m = X_0}$$

$\therefore X(t) : 16{,}8 + (0{,}2)t^2 \longrightarrow X(5) = 16{,}8 + (0{,}2)(25)$

$$X(5) = 16{,}8 + 5$$

$$X(5) = 21{,}8$$

BORRADOR

Para $t \in \langle 5; 8]$

$V_{(t)} = -4(t-5) + 2; t \in \langle 5; 8]$

$V_{(5)} = 2 m/s$

$X_{(t)} = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$X_{(t)} = 21{,}8 + 2(t-5) + \frac{1}{2}(-4)(t-5)^2$

$X_{(t)} = 21{,}8 + 2(t-5) - 2(t-5)^2 ; t \in \langle 5; 8]$

a) La posición inicial de B ($x_{B\_inicial}$) en metros es:

Rpta: 16,8m

b) En $t = 7\,s$, la aceleración de la partícula A es a_{xA} y la aceleración de la partícula B es a_{xB}, entonces la suma de sus aceleraciones en ese instante ($a_{xA} + a_{xB}$) en m/s^2 es:

$a_A = 4 m/s^2$

$a_B = -4 m/s^2$

$\rightarrow a_{Ax} + a_{Bx} = 4 m/s^2 + (-4 m/s^2) = 0 m/s^2$

c) En $t = 2\,s$, la posición de A (x_A) en metros está dada por

$X_{A(2)} = 14 m$

d) En $t = 4\,s$, la posición de A (x_A) en metros está dada por

$X_{A(4)} = 6 m$

e) La posición final de A (x_{A_final}) en metros es:

$X_{(t)} = 6 - 4(t-4) + 2(t-4)^2 ; t \in \langle 4; 8]$

$X_{(8)} = 6 - 4(4) + 2(16) = 6 - 16 + 32 = 6 + 16 = 22 m$

f) Entre $t = 0\,s$ y $t = 8\,s$, la velocidad media de la partícula A (v_{med_x}) en m/s es:

$X_{(8)} = 22 m$

$X_{(0)} = 18 m$

$\therefore V_{M[0;8]} = \frac{22 - 18}{8} = \frac{4}{8} = 0{,}5 m/s$

g) Entre $t = 0\,s$ y $t = 8\,s$, el desplazamiento de la partícula B (Δx_B) en metros es:

$X_{(8)} = X_{(t)} = 21{,}8 + 2(t-5) - 2(t-5)^2 = 21{,}8 + 2(3) - 2(9)$

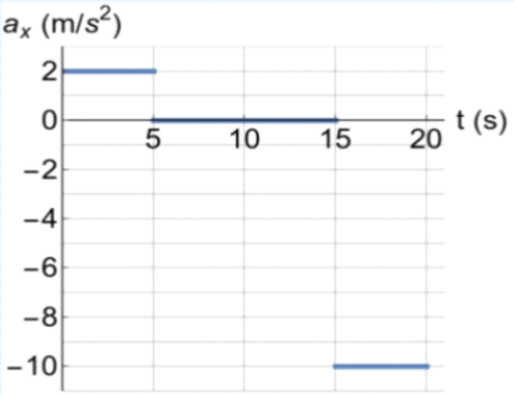
$= 9{,}8 m$

$X_{(0)} = 16{,}8$

$\therefore X_{(8)} - X_{(0)} = 9{,}8 - (16{,}8) = -7 m$

BORRADOR

(3,0 puntos) A continuación se muestra el gráfico aceleración-tiempo de una bicicleta y la ley de movimiento de un perro que corre en línea recta. Se sabe que la bicicleta parte de la posición $x = -40\ m$ y que en $t = 10\ s$ su velocidad está dada por $v_x = 10\ m/s$.



$x_{perro}(t) = 90 + 2t - 0.4t^2$ (t en s, x_{perro} en m)

ESCRIBA SUS RESPUESTAS CON DOS DECIMALES (NO DEJE EL CÁLCULO INDICADO, UTILICE SU CALCULADORA). UTILICE PUNTO DECIMAL. NO COLOQUE LAS UNIDADES, PUES YA ESTÁN DADAS.

Para la bicicleta:

$t \in [0;5] \longrightarrow a_x: 2\ m/s^2$ $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ x(t) = -40 + v_0(t) + t^2;\ t \in [0;5] \end{array} \right.$

$x(5) = -40 + 25 + 5v_0 = 5v_0 - 15$

$x(5) = -15\ m$

$v(t) = v_0 + at \rightarrow \{ v(5) = v_0 + 10 \}$

En $t \in \langle 5;15]$ la velocidad es constante

$\therefore v(10) = v(5) \Rightarrow 10 = v_0 + 10$

$\underline{v_0 = 0}$

$t \in \langle 5;15] \longrightarrow a_x = 0\ m/s^2$ $\Big\{$ $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ → cte $(a=0)$

$x(t) = -15 + 10(t-5);\ t \in \langle 5;15]$

$x(15) = -15 + 10(15-5) = -15 + 10(10) = 100 - 15 = \underline{85\ m}$

Para $t \in \langle 15;20]$

$a = -10\ m/s^2$ $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ x(t) = 85 + 10(t-15) + \frac{1}{2}(-10)(t-15)^2 \end{array} \right.$

$x(t) = 85 + 10(t-15) - 5(t-15)^2;\ t \in \langle 15;20]$

a) La posición de la bicicleta (x) en $t = 5\ s$ en metros está dada por:

Rpta: $\underline{-15\ m}$

b) La velocidad inicial de la bicicleta (v_{0x}) en m/s está dada por:

Rpta: $\underline{0\ m/s}$

c) La distancia entre el perro y la bicicleta en $t = 15\ s$ en metros es:

$x_{(15)\ bicicleta}: 85\ m$

$x_{(15)\ perro}: 90 + 2(15) - 0{,}4(15)^2 = 120 - 90 = 30\ m$

$\therefore (85 - 30)\ m = \underline{55\ m}$

BORRADOR

d) Cuando la velocidad del perro cambia de sentido, la velocidad de la bicicleta es v_{bici-x}. Esta velocidad (v_{bici-x}) en m/s es igual a:

$$x_{perro}(t) = 90 + 2t - 0.4t^2 \ (t \ en \ s, \ x_{perro} \ en \ m)$$

$V(t) = 2 - 0{,}8t$

Cambia de sentido cuando $V(t) = 0$

$2 = 0{,}8(t) \rightarrow t = 2{,}5s$

$V(t) = 2t \ ; t \in [0;5] \rightarrow V(2{,}5) = 2(2{,}5) = \underline{5m/s}$

e) El perro y la bicicleta están en la misma posición por única vez en $t = t_{encuentro}$ ($t < 20\ s$). Este tiempo de encuentro en segundos es igual a:

$$X_{bicicleta}: \begin{cases} -40 + t^2; & t \in [0;5] \\ -15 + 10(t-5); & t \in \langle 5;15] \\ 85 + 10(t-15) - 5(t-15)^2; & t \in \langle 15;20] \end{cases}$$

Caso 1:

$-40 + t^2 = 90 + 2t - 0{,}4t^2$

$1{,}4t^2 - 2t - 130 = 0 \rightarrow t = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-130)(1{,}4)}}{2{,}8}$

$t = \dfrac{2 \pm \sqrt{732}}{2{,}8} = \dfrac{2 \pm 27{,}06}{2{,}8}$

$t = \begin{cases} 10{,}38s \\ -8{,}95s \end{cases} \notin [0;5]$

Caso 2:

$-15 + 10(t-5) = 90 + 2t - 0{,}4t^2 \ ; \forall t \in \langle 5;15]$

$-15 + 10t - 50 = 90 + 2t - 0{,}4t^2$

$0{,}4t^2 + 8t - 155 = 0 \rightarrow t = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(0{,}4)(-155)}}{0{,}8}$

$t = \dfrac{-8 \pm 17{,}66}{0{,}8}$

$t = \begin{cases} 12{,}075 (✓) \in \langle 5;15] \\ -32{,}075 (X) \end{cases}$

Caso 3:

$85 + 10(t-15) - 5(t-15)^2 = 90 + 2t - 0{,}4t^2$

$85 + 10t - 150 - 5(t^2 - 30t + 225) = 90 + 2t - 0{,}4t^2$

$10t - 65 - 5t^2 + 150t - 1125 = 90 + 2t - 0{,}4t^2$

$-5t^2 + 160t - 1190 = 90 + 2t - 0{,}4t^2$

$4{,}6t^2 - 158t + 1280 = 0$

$t = \dfrac{158 \pm \sqrt{158^2 - 4(4{,}6)(1280)}}{9{,}2}$

$t = \dfrac{158 \pm 37{,}58}{9{,}2} \rightarrow t = \overset{(X)}{21{,}26} \vee t = \overset{(X)}{13{,}09} \notin \langle 15;20]$

BORRADOR

$\therefore \quad \underline{t = 12,075 \, s}$

f) En $t = t_{encuentro}$, la posición de la bicicleta (x) en metros está dada por:

$$X_{bicicleta}: \begin{cases} -40 + t^2; & t \in [0;5] \\ -15 + 10(t-5); & t \in \langle 5;15] \\ 85 + 10(t-15) - 5(t-15)^2; & t \in \langle 15;20] \end{cases}$$

En $t = 12,075$

$$-15 + 10(12,075 - 5) = \underline{55,75 \, m}$$

PC2 - Segunda Parte (5 Puntos)

Dos partículas se mueven sobre el eje x. La partícula A parte del reposo en t = 0 h desde la posición x = 30 km y acelera a ritmo constante hasta alcanzar una velocidad dada por v_x = 20 km/h después de 2 horas.

Por otro lado, la partícula B parte desde el reposo en t = 1 h de una posición x_{0B} desconocida y acelera a ritmo constante hasta alcanzar una velocidad dada por v_x = -20 km/h cuando ha recorrido una distancia de 20 km (en t = t_1). En ese instante (t = t_1), deja de acelerar de manera que su rapidez se mantiene constante.

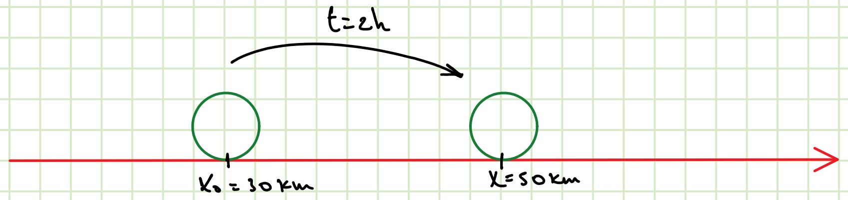
Finalmente, se sabe que en t = 4 h, ambos móviles se cruzan. En ese instante, la aceleración de la partícula A cambia de manera que su rapidez empieza a disminuir 8 km/h cada hora.

a) (1,0) Escriba la ley de movimiento de A desde t = 0 h hasta t = 5 h.
b) (2,0) Escriba la ley de movimiento de B desde t = 0 h hasta t = 5 h.
c) (2,0) En un solo diagrama, realice el gráfico posición-tiempo de ambos móviles desde t = 0 h hasta t = 5 h.

IMPORTANTE: RECUERDE QUE TODA RESPUESTA DEBE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA. SU PROCEDIMIENTO DEBE SER LEGIBLE, CLARO Y ORDENADO. DE LO CONTRARIO, NO SERÁ REVISADO.

LOS GRÁFICOS DEBEN ESTAR APROXIMADAMENTE A ESCALA, Y DEBE INDICAR PUNTOS CLAVE COMO LAS POSICIONES Y TIEMPOS INICIALES Y FINALES DE CADA TRAMO.

Para A:



$\cdot)\quad \vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$$20\,\frac{km}{h} = 0\,\frac{km}{h} + a(2h) \rightarrow 20\,\frac{km}{h} = (a)(2h)$$

$$\underline{10\,\frac{km}{h^2} = a}$$

$\cdot)\quad v_f^2 = v_0^2 + 2ad$

$$\left(20\,\frac{km}{h}\right)^2 = \left(0\,\frac{km}{h}\right)^2 + (2)\left(10\,\frac{km}{h^2}\right)(d) \rightarrow \underline{d = 20\,km}$$

BORRADOR

Para B:

$|d| = 20\,km$

$\cdot)$ $V_f^2 = V_0^2 + 2ad$

$(|-20|)^2 = (2)(|a|)(|d|)$

$400 = (2)(|a|)(20) \rightarrow |a| = 10\,\frac{km}{h^2}$

$\cdot)$ $\vec{V_f} = \vec{V_0} + \vec{a}t$

$-20 = a(t)$ → necesariamente "a" tiene que ser menor a 0 ya que $t > 0$

$\rightarrow -20 = (-10)(t)$

$2h = t$

NOTA : El enunciado no es específico sobre el móvil A pasado las 2 horas de movimiento , por lo tanto asumiremos que sigue acelerando hasta t:4h

Ley de movimiento de A:

$X_0 = -30\,km$

$V_0 = 0\,km/h$

$a = 10\,\frac{km}{h^2}$

$X_{(t)}: X_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$\rightarrow X_{(t)}: (-30 + 5t^2)\,km \quad t \in [0;4h]$

Ley de movimiento de B:

$X_0 = X_{0B}$

$a = -10\,km/h^2$

$V_0 = 0\,km/h$

$X_{(t)} = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$\rightarrow X_{(t)} = X_{0B} + \frac{1}{2}(-10)(t-1)^2$

$X_{(t)} = X_{0B} - 5(t-1)^2; \quad t \in [1;4]$

En $t = 4h$: $X_{A(t)} = X_{B(t)}$

$X_{A(4)} = -30 + 5(16) = -30 + 80 = \underline{50\,km}$

$X_{B(4)} = X_{0B} - 5(3)^2 = X_{0B} - 45$

$\rightarrow 50 = X_{0B} - 45 \rightarrow \underline{X_{0B} = 95\,km}$

Dato: Pasado las 4h, el móvil A cambia su aceleración:

$X_{(4)}: 50\,km$ $\quad a = -8\,km/h^2$ $\quad V_{(4)} = V_{(0)} + (10)(4)$, $V_{(4)} = 40\,km/h$

$X_{(t)} = X_{(0)} + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$X_{(t)} = 50 + 40(t-4) + \frac{1}{2}(-8)(t-4)^2, \quad t \in \langle 4;5]$

$X_{A(t)} = 50 + 40(t-4) - 4(t-4)^2; \quad t \in \langle 4;5]$

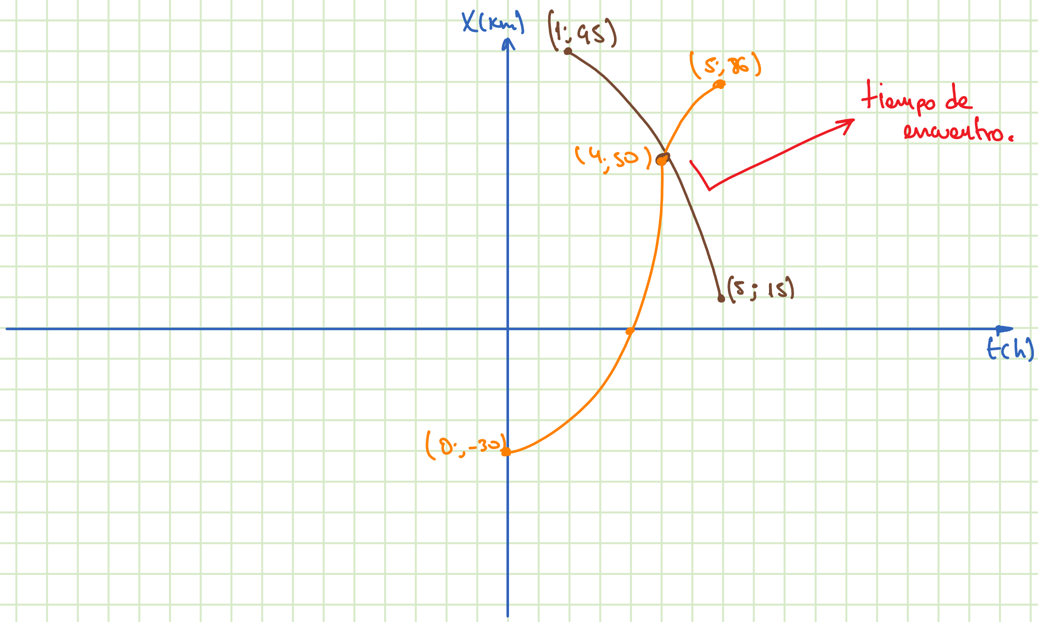
$\therefore X_A: \begin{cases} 5t^2 - 30; & t \in [0;4] \\ 50 + 40(t-4) - 4(t-4)^2; & t \in \langle 4;5] \end{cases}$

$\therefore X_B: 95 - 5(t-1)^2; \quad t \in [0;5]$

BORRADOR

$$x_A: \begin{cases} 5t^2 - 30; & t \in [0;4] \\ 50 + 40(t-4) - 4(t-4)^2; & t \in \langle 4;5] \end{cases}$$

$$x_B: \quad 95 - 5(t-1)^2 \; ; \; t \in [0;5]$$



Resuelto por Josue Baldera - CAAS PUCP