ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

Segundo examen

Año: 2022 Número: 0427
Código de alumno

Iturrizaga Robles, David Matthew
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H105 -1

Fecha: 07/07/2022

Nombre del profesor: Jorge Crisóstomo

Nota: 20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN FINAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horarios: **101; 102;103;104; 105; 106; 107; 108; 109; 110; 111; 124; A123**

Turno: 8:00-11:00 Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación. - Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad. - Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos. - Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica. - Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.
INDICACIONES:
- El examen consta de 5 preguntas. - **Puede utilizar calculadoras siempre que no sean programables ni** gráficas. No puede usar apuntes de clase ni libros. - **Justifique sus respuestas.**

Pregunta 1

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Analice si existe A^{-1}. En caso la respuesta sea afirmativa, muestre cada paso que siga para hallarla. (2 puntos)

b) Si además se sabe que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

resuelva la ecuación matricial $XA = 4B^t$. (2 puntos)

Pregunta 2

Considere las esferas

$$S_1:\ x^2 + y^2 + z^2 = 10 \quad \text{y} \quad S_2:\ x^2 + 10x + y^2 - 4y + z^2 - 10z + 26 = 0.$$

Se pide lo siguiente:

a) Halle las coordenadas del centro y el valor del radio de S_2. (0,5 puntos)

b) Halle la ecuación del plano que contiene a la circunferencia $\mathcal{C}$, que resulta de intersecar S_1 y S_2. (0,5 puntos)

c) Halle las coordenadas del centro de la circunferencia $\mathcal{C}$. (1 punto)

d) Halle el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$. (1 punto)

Pregunta 3

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, sabiendo que z y w son números complejos. Dé sus respuestas en forma binómica, es decir, en la forma $a + bi, a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \overline{(1+i)}\,z + iw = 1+i \\ (2+5i)z - 2iw = \overline{3+2i} \end{cases}$$

(2,5 puntos)

b) Considere los siguientes números complejos:

$$z_1 = -1 - 2\sqrt{3}i$$
$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i$$
$$z_3 = \sqrt{3} + i$$

Efectúe las siguientes operaciones y dé su respuesta en forma binómica, es decir, en la forma $a + bi, a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{(z_1 + z_2)^{23}}{2^{22}(\sqrt{3} - z_3)}$$

(2,5 puntos)

Pregunta 4

Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) Sean A y B matrices cuadradas no nulas de orden 2×2.

Si $(A + B)$ y $(A - B)$ son matrices simétricas, entonces A es una matriz simétrica.

(2 puntos)

b) Si A es una matriz cuadrada de orden 2×2, entonces siempre se cumple que

$$|A| = |Adj(A)|.$$

(2 puntos)

Pregunta 5

Considere el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas x, y y z:

$$\begin{cases} x - 2\alpha y = 1 \\ y + \alpha z = 0 \\ 5x - 9\alpha y + z = 5 \\ 2x - 3\alpha y + z = \beta \end{cases}$$

Analice si existen valores de α y $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales:

- el sistema tiene solución única; en ese caso, señale cuál sería esta.
- el sistema tiene infinitas soluciones; en ese caso exprese la solución como la ecuación de una recta o de un plano, según corresponda.
- el sistema no tenga solución.

(4 puntos)

Examen elaborado por los profesores del curso
Coordinadora de teoría: Prof. Cecilia Gaita
San Miguel, 7 de julio del 2022

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-4+6=2$

$-3(8)$

$-4-(-6)=2$

$-3-(-3)$

$\cancel{-3}-(\cancel{-3})$

-3

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $-12+4-2$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & -8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -18 \\ 0 & -2 & 6 \\ -12 & -10 & \end{pmatrix}$

$36-12+10$

1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a)

• $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$|A| = 5-3 = 2 \neq 0 \longrightarrow$ Existe A^{-1}.

• $\text{cof}|A| = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$ $\qquad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$\alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \alpha_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9$

$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\qquad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3$

$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$ $\qquad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$

$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\Longrightarrow \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -9 & 3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

2,0

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$XA = 4B^t$

$X(AA^{-1}) = 4B^tA^{-1}$

$XI_3 = 4B^tA^{-1}$

$X = \frac{4}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

2,0

$X = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \\ -6 & -5 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -18 \\ 0 & -2 & 6 \\ -12 & -10 & 34 \end{pmatrix}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2) $S_1: \; x^2+y^2+z^2 = 10 \quad \begin{cases} C_1(0;0;0) \\ r_1 = \sqrt{10} \end{cases}$

3/3

a) $S_2: \; x^2 + 10x + y^2 - 4y + z^2 - 10z + 26 + 25 - 25 + 4 - 4 + 25 - 25 = 0$

$(x+5)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 28 \quad \begin{cases} C_2(-5;2;5) \\ r_2 = 2\sqrt{7} \text{ u} \end{cases}$

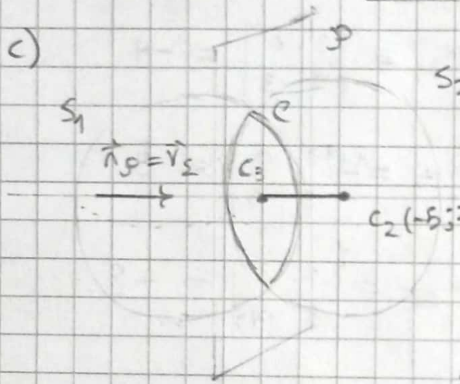
b) $S_1: \; x^2+y^2+z^2 = 10$

$S_2: \; x^2+y^2+z^2 + 10x - 4y - 10z + 26 = 0$ (-)

$\mathcal{P}: \; 10x - 4y - 10z + 36 = 0$

$5x - 2y - 5z + 18 = 0$

c)



$\vec{n}_{\mathcal{P}} = (5;-2;-5)$

$\vec{v}_{\Sigma} = \vec{n}_{\mathcal{P}} = (5;-2;-5)$

$\Sigma: \; P = (-5;2;5) + t(5;-2;-5), \; t \in \mathbb{R}$

$P = (-5+5t;\; 2-2t;\; 5-5t), \; t \in \mathbb{R}$

$\Sigma \cap \mathcal{P}: \; 5(-5+5t) - 2(2-2t) - 5(5-5t) + 18 = 0$

$-25 + 25t - 4 + 4t - 25 + 25t + 18 = 0$

$54t = 36$

$t = \frac{2}{3}$

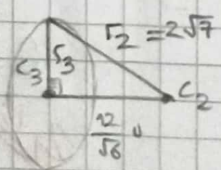
$\rightarrow C_3\left(-\frac{5}{3};\; \frac{2}{3};\; \frac{5}{3}\right)$

$-\frac{15}{3} + \frac{10}{3}$

d) $d(C_2;\mathcal{P}) = \frac{|-25-4-25+18|}{\sqrt{54}} = \frac{\overset{12}{\cancel{36}}}{\cancel{3}\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \text{ u}$

$\frac{6}{3} - \frac{4}{3}$

$\frac{15}{3} - \frac{10}{3}$



$28 = r_3^2 + 24$

$r_3 = 2 \text{ u}$

$\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\sqrt{6}}{\cancel{6}}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-2i(-4i)$ -8

• $\frac{2-2i}{2+5i}$

• $\frac{2+2i}{3-2i}$

$-i(-3i)$ -3 $3i^2$

$(1-i)(4-3i)$

$4-7i-3 = 1-7i$

$(2+5i)\frac{(4-3i)}{5} - 2i\frac{(12-4i)}{5}$

$\frac{23+14i-24i-8}{5}$

$\frac{15-10i}{5}$

$3-2i$

$-(i)(i)$

$-(-1)$

$i-\sqrt{3}$

$i-\sqrt{3}$

3] a)

$\overline{(1+i)}\,z + iw = \overline{1+i}$ ... ①

$(2+5i)\,z - 2iw = \overline{3+2i}$ ... ②

① $(1-i)\,z + iw = 1+i$ $(\times 2)$

② $(2+5i)\,z - 2iw = 3-2i$

$(4+3i)\,z = 5$

$z = \frac{5}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i} = \frac{\cancel{5}(4-3i)}{\cancel{25}\,5}$

$z = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

z en ①: $(1-i)\frac{(4-3i)}{5} + iw = 1+i$

$\frac{(1-7i)}{5} + iw = 1+i$

$iw = 1+i-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

$iw = \frac{4}{5}+\frac{12}{5}i$

$w = \frac{4+12i}{5i}\cdot\frac{-i}{-i}$

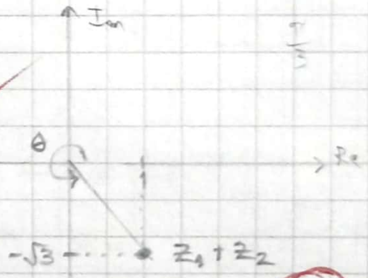
$w = \frac{12-4i}{5} = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i$

2,5

b) $z_1 = -1-2\sqrt{3}i$; $z_2 = 2+\sqrt{3}i$; $z_3 = \sqrt{3}+i$

$z_1+z_2 = 1-\sqrt{3}i = a+bi$

$\sqrt{3} - z_3 = -i$



• Para z_1+z_2, $\tan\theta = -\sqrt{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$\theta = 5\pi/3$

$|z_1+z_2| = \sqrt{1+3} = 2$

2,5

$\Longrightarrow z_1+z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

$\frac{115\pi}{3} \to \frac{\pi}{3}$

$\frac{(z_1+z_2)^{23}}{2^{22}(-i)} = \frac{\overset{2}{\cancel{2^{23}}}\left(\cos\left(\frac{115\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{115\pi}{3}\right)\right)}{\cancel{2^{22}}\,(-i)}$

$= \frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{-i} = \frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}i}{-i}$

$= \frac{1+\sqrt{3}i}{-i}\cdot\frac{i}{i} = -\sqrt{3}+i$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)

4] a) $A = [a_{ij}]_{2\times2}$, $B = [b_{ij}]_{2\times2}$ $\wedge$ $A, B \neq \theta$

$(A+B) = (A+B)^t \wedge (A-B) = (A-B)^t \longrightarrow A = A^t$

$A+B = A^t + B^t$ $\qquad A-B = A^t - B^t$

$B^t - B = A - A^t$ $\qquad B^t - B = A^t - A$

$A - A^t = A^t - A$

$2A = 2A^t \longrightarrow A = A^t \equiv (V)$

2/2

b) $A = [a_{ij}]_{2\times2} \longrightarrow |A| = |Adj(A)|$

C.E: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge |A| = ad - bc$

$cof(A) = (-1)^{i+j} |M_{ij}| = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \wedge Adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\alpha_{11} = d$

$\alpha_{12} = -c$ $\qquad |Adj(A)| = ad - bc$

$\alpha_{21} = -b$

$\alpha_{22} = a$ $\qquad \longrightarrow |A| = |Adj(A)| \equiv (V)$

2/2

$4 - 6 = -2$

$\alpha_{11} = 1$

$\alpha_{12} = -3$

$\alpha_{21} = -2$

$\alpha_{22} = 4$

$\begin{matrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$

$4 - 6 = -2$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$cof\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$cof\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Escaneado con CamScanner

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$-9\alpha \quad +10\alpha$

5)

$$\begin{cases} x - 2\alpha y = 1 \\ y + \alpha z = 0 \\ 5x - 9\alpha y + z = 5 \\ 2x - 3\alpha y + z = \beta \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f_1 \ldots \\ f_2 \ldots \\ f_3 \ldots \\ f_4 \ldots \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 5 & -9\alpha & 1 & 5 \\ 2 & -3\alpha & 1 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 2 & -3\alpha & 1 & \beta \\ 5 & -9\alpha & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 - 2f_1]{f_3 - 5f_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta-2 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 - f_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - \alpha f_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - 2\alpha y = 1 & \ldots (1) \\ y + \alpha z = 0 & \ldots (2) \\ (1-\alpha^2) z = 0 & \ldots (3) \\ 0 = \beta - 2 & \ldots (4) \end{cases}$$

a) Solución única:

- En (4), $\beta - 2 = 0$
  $\beta = 2$

- En (3), $1 - \alpha^2 \neq 0$
  $\alpha^2 - 1 \neq 0$
  $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 1 \longrightarrow z = 0$

- En (2), $y = 0$ — En (1), $x = 1$

$\therefore \alpha \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$; $\beta = 2$ y $CS = \{(1; 0; 0)\}$ //

b) Infinitas soluciones:

- En (4), $\beta = 2$
- En (3), $1 - \alpha^2 = 0$
  $\alpha^2 - 1 = 0$
  $\alpha = 1 \vee \alpha = -1$
  $\rightarrow z \in \mathbb{R}$

* Caso 1: $\alpha = 1$ $\quad CS = \{(x; y; z) = (1-2z; -z; z)\}, z \in \mathbb{R}$

- En (2), $y + z = 0$ $\quad$ recta $\mathcal{L}: P = (1; 0; 0) + z(-2; -1; 1), z \in \mathbb{R}$ //
  $y = -z$
- En (1), $x = 1 - 2z$ $\quad \boxed{\alpha = 1 ; \beta = 2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

* Caso 2: $\alpha = -1$

- En ④, $\beta = 2$
- En ②, $y = z$
- En ③, $z \in \mathbb{R}$
- En ①, $x + 2y = 1$

$x = 1 - 2z$

$CS = \{(x; y; z) = (1-2z; z; z)\}, z \in \mathbb{R}$

$\Sigma: P = (1; 0; 0) + z(-2; 1; 1), z \in \mathbb{R}$ //

recta

$\boxed{\alpha = -1 ; \beta = 2}$

$\therefore (\alpha = -1 \lor \alpha = 1) \land \beta = 2$ //

c) Conjunto vacío:

- En ④, $\beta - 2 = 0 \land \beta \neq 2 \rightarrow \beta - 2 \neq 0$ (Absurdo)

$\therefore \beta \in \mathbb{R} - \{2\} \land \alpha \in \mathbb{R}$ //

4 | 0

Escaneado con CamScanner