ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

ENTREGADO 13 JUN. 2018

Práctica

Año: 2018 Número: 3249

Código de alumno

Maceda Virhuez Leonardo Jesus

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica N°: P4

Horario de práctica: 119

Fecha: 4/6/18

Nota: 20

Nombre del profesor: S. Ramirez

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) M.A

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Cuarta Práctica Calificada

Semestre Académico 2018-1

Horario: B125, 0113, 0114, 0116 a 0122, 0124 a 0126 (Turno 2)

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ -9 & 10 & -13 \end{pmatrix}$ y $B = (b_{ij})$ de orden 3×2 tal que $b_{ij} = 2^i - j^2$.

   Halle las matrices X e Y tales que
$$\begin{cases} X - 2Y = A \\ 2X + Y = B^T \end{cases}.$$
   (3 p.)

2. Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 15 \\ 3 & -9 & -15 \\ -3 & 9 & 15 \end{pmatrix}$.

   a) Halle una constante α y una matriz A de modo que se cumpla $B = \alpha A$ y $A^2 = A$. (2 p).

   b) Calcule $B^4 - 27B + 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (2 p).

3. Calcule el determinante de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. (4 p.)

4. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -1 \\ 4 & x & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halle los valores de x tales que $det(A) = -128$. (4 p.)

5. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando sus respuestas.

a) Para números reales a, b y c cualesquiera se cumple $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$ (1 p.)

b) El producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica. (1.5 p.)

c) Dadas las matrices

$$A = (a_{ij})_{25\times 3} \text{ tal que } a_{ij} = i + 2j; \quad B = (b_{ij})_{3\times 20} \text{ tal que } b_{ij} = 2i - j \text{ y } C = (c_{ij}) = AB,$$

se cumple que el valor de la entrada c_{64}, correspondiente a la fila 6 y columna 4 de la matriz C, es 8. (1.5 p.)

d) Si A es una matriz cuadrada de orden n y $B = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$, entonces $B^T = -B$. (1 p.)

COORDINADOR DE PRÁCTICA: PROF. JOSÉ HENOSTROZA G.

San Miguel, 4 de junio de 2018.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$X-2Y=A$
$(2X+Y=B^t)$
$5X=A+2B^t$ 13

$2X+Y=B^t$
$-2X+4Y=-2A$
$5Y=B^t-2A$

$b_{11}=2-1=1$
$b_{12}=2-4=-2$
$b_{21}=4-1=3$
$b_{22}=4-4=0$
$b_{31}=8-1=7$
$b_{32}=8-4=4$

$-1-3+5$ $2-9$

b_{12}
2^i-j 2^1-2^2
$2-4$
$3+2-15$
6

$1+3-5$
$-3-9+15$
$15-12$

$-5-15+25$
$25-20$
$\alpha(A)(A)$

1) Hallamos $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}$

> $b_{11}=1$
> $b_{22}=-2$
> $b_{21}=3$
> $b_{22}=0$
> $b_{31}=7$
> $b_{32}=4$

$\rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4\end{pmatrix}$

$\begin{cases} X-2Y=A \ \cdots \ (1) \\ 2X+Y=B^t \ \cdots \ (2)\end{cases}$

$\rightarrow (1)+2(2)$: Operamos

$X+4X=A+2B^t$

$5X=A+2B^t$

$5X=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ -9 & 10 & -13\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$

$5X=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ -13 & 10 & -5\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -\frac{13}{5} & 2 & -1\end{pmatrix}$

$\rightarrow (2)-2(1)$

$Y+4Y=B^t-2A$

$5Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ -9 & 10 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & -5 & 5 \\ 16 & -20 & 30\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -\frac{13}{5} & 2 & -1\end{pmatrix} \wedge Y=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ \frac{16}{5} & -4 & 6\end{pmatrix}$

2)

Sea $\frac{1}{\alpha}=B \rightarrow A=\beta B$

$\rightarrow A=3\beta\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

$A^2=3\beta 3\beta\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix} = 9B^2\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$A = 3\beta\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \wedge A^2 = 9\beta^2\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

∴ Luego, para que $A = A^2 \rightarrow 3\beta = 9\beta^2$

$\beta = 3\beta^2 \rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$

$\rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{\alpha^2} \rightarrow \alpha^2 = 3\alpha$

$\hookrightarrow \alpha = 3$

Luego: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $\alpha = 3$

b) Hallamos B^4, sabemos que $B = 3A$, luego:

$B^4 = (3A)^4 = 3^4A^4 = 3^4A^2 \cdot A^2$ (sabemos que $A^2 = A$)

$= 3^4 A \cdot A = 3^4A^2 = 3^4A = 81A$

~~$\begin{pmatrix} -81 & 81(3) & 5(81) \\ 81 & 81(-3) & -5(81) \\ -81 & 81(3) & 5(81) \end{pmatrix}$~~

→ Luego, la ecuación quedaría así:

$81A - 27B + 2I \longrightarrow$ Remplazamos B por $3A$

$\rightarrow 81A - 81A + 2I$

$= 0 + 2I \rightarrow$ La matriz que resulta es simplemente la identidad por 2

Luego, la matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = (\alpha A)^4$

$\alpha^4 A$

$B^4 = (\alpha A)^4$

$\alpha^4 A^4$

$A^2 \cdot A \cdot$

$A A^2$

$9 \cdot 27$

$3 \times 3 \times 3 \times$

27
$\times 3$
81

$B^4 = (\alpha A)^4$

$\alpha^4 A^4$

$A^2 A$

AA

A^2

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$2 \quad 1 \quad 2 \quad -3$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_{43}(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_{14}(-1)}$$

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}}_{\text{traspuesta}} - 6 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{F_{13}}$$

2

$$\rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}}_{F_{23}(1)} + 6 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}_{F_{12}(-2)} \rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}}_{F_{12}} + 6 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

27 B

81 A - 81

$$\rightarrow -\begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -[-3(-4-4) - 3(1+6)] + 6[-5(-3+2)]$$

$$\rightarrow -[-3(-8) - 3(7)] + 6[-5(-1)] \rightarrow -[24-21] + 6(5)$$

$$\rightarrow -(3) + 30 \rightarrow 27$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x & -1 \\ 4 & x & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_{12}} -\begin{vmatrix} 4 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\left(4\begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{F_{13}}\right)$$

4,0

$12 \times 4 = 48$

$$\rightarrow -\left\{4\begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix}\right\} = -\{4[-x(-1-8)+(-1)(12)] + x[3(3-2x)+(5x+3)]\}$$

$$-\{4[(-x)(-9)+(-12)] + x[9-6x+5x+3]\}$$

$$-\{4[9x-12] + x[12-x]\} = -\{36x-48+12x-x^2\} = -128 \rightarrow$$

Presente aquí su trabajo

$-36x + 48 - 12x + x^2 = -128$

$x^2 - 48x + 48 + 128 = 0$

$x^2 - 48x + 176 = 0$

$x \quad -44$

$x \quad -4$

$\begin{cases} x = 44 \\ x = 4 \end{cases}$

$\therefore$ x puede tomar los valores 4 y 44

(5)

b) Sean dos matrices: $A = A^t$

$B = B^t$

→ El producto AB debe ser igual a su traspuesta $(AB)^t$

∴ Comprobemos: $(AB)^t = B^tA^t = \boxed{BA}$

Por ser simétricas

(contraejemplo AL FINAL)

→ Nada me asegura que las matrices conmuten, luego, no puedo afirmar que $AB = BA$, luego es FALSO (b)

d) $B = \frac{1}{2}(A - A^t)$ → Tomamos traspuesta:

$B^t = \left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{A^t - A}{2}$

Tomamos $-B$:

$-B = -\frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{-(A - A^t)}{2} = \frac{A^t - A}{2}$

Ambos son iguales, luego es VERDADERO (d)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

36
12
148
128
176

$x^2 - 48x + 176 = 0$

$x \quad -$

$x \quad -$

$\frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4(176)}}{2}$

$(A)(B) = (C$

$25\times3 \quad 3\times20 \quad 25\times$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$

$(15 - 24) - (10 - 21)$

$15 - 24 - 10 + 21$

48 − 48

Fila 6 Columna

$(A - A^t)^t = A^-$

$A^t - A^{t^t} = A$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$44 \times 4 = 176$

$A = A^t$
$B = B^t$
$(AB)^t = B^t A^t$
BA

$a_{61} = 6+2=8$
$a_{62} = 6+4=10$
$a_{63} =$

$(a_{61}\ a_{62}\ 6$

$24 - 16 = 8$

$-A$

~~a) Sea $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. La matriz sería ... Traspuesta~~

~~$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(18-24) - (10-14) + (12-21)$~~

c) Para hallar el termino c_{64} debemos hallar la fila 6 de A y la columna 4 de B

Fila 6 A $= a_{61}\ a_{62}\ a_{63}$

$6+2\quad 6+4\quad 6+6 = 8\ \ 10\ \ 12$

Columna 4 B $=$ $b_{14} = 2-4 = -2$
$b_{24} = 4-4 = 0$
$b_{34} = 6-4 = 2$

Multiplicamos la fila y columna:

$$[8\ \ 10\ \ 12]\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2(8) + 0(10) + 12(2)$$

$$-16 + 24 = 8$$

Realmente el termino C_{64} es 8, luego la proposición es VERDADERA (c)

1.5

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$

$[b(a+b) - c(a+c)] - [a(a+b) - c(b+c)] + [a(a+c) - b(b+c)]$

$= b(a+b) - c(a+c) - a(a+b) + c(b+c) + a(a+c) - b(b+c)$

$= \cancel{ab} + \cancel{b^2} - \cancel{ac} - \cancel{c^2} - \cancel{a^2} - \cancel{ab} + \cancel{bc} + \cancel{c^2} + \cancel{a^2} + \cancel{ac} - \cancel{b^2} - \cancel{bc} = 0$

Conclusión en la siguiente →

1.9

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Como pudimos observar, para cualquier valor que tomes a, b y c, la determinante siempre será cero, luego, la proposición es VERDADERA (a)

b) Para fundamentar mejor nuestra respuesta busquemos un contraejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A$ es simétrica

Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B$ es simétrica

$\rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$

$(AB)^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ $\nleftrightarrow$ AB no es simétrica,

luego, reafirmamos que la proposición b) es falsa

1.5

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & & \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

$+[b(a+c)-c(a+c)]$

$+$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$