PUCP
Estudios
Generales Ciencias

Fundamentos de Cálculo

Tercera Práctica Calificada

Semestre Académico 2024-1

Horarios: A101, B101, B102, B103, I101, I102, I103, I104, I105, 0117 al 0121. Duración: 110 minutos
Elaborada por todos los profesores.

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, calculadoras, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+d}$, donde a, b y d son constantes reales. La gráfica de f pasa por el punto $(-6;7)$ y tiene como asíntotas a las rectas $\mathscr{L}_1 : x = -4$ y $\mathscr{L}_2 : y = 6$.

   a) Determine la regla de correspondencia de f. (2.0 puntos)

   b) Esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados. (2.0 puntos)

   c) ¿Es f creciente? Justifique. (1.0 punto)

2. Sea a una constante real y sea f la función:

$$f(x) = \begin{cases} a - \sqrt[3]{4x+8} & , \quad x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+3} & , \quad x > -2. \end{cases}$$

   a) Para $a = -2$, esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados. (2.5 puntos)

   b) Para $a = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica. (0.5 puntos)

   c) Determine todos los valores de a tales que f sea decreciente. Justifique. (1.0 punto)

3. Sea la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + e^{x+2} & , \quad x < -1 \\ 4 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^x & , \quad x \geq -1. \end{cases}$$

   a) Esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas. (3.0 puntos)

   b) Halle el rango de la función f. (1.0 punto)

   c) ¿Es f creciente en $]-\infty; 3[$? Justifique. (1.0 punto)

4. Una compañía fabrica un determinado tipo de accesorios de iluminación para casas. La función

$$Q(t) = k\left(25^{-0,25t}\right), t \geq 0$$

donde k es una constante real, modela la cantidad de accesorios disponibles para la venta t semanas después de lanzar una campaña publicitaria. Además, se sabe que inicialmente se dispone de 50000 unidades para la venta. Asimismo, la siguiente campaña debe realizarse cuando la cantidad de accesorios disponibles sea la quinta parte de la inicial.

   a) Halle el valor de la constante k. (1.0 punto)

   b) Halle la cantidad de accesorios de iluminación disponibles para la venta cuatro semanas después de lanzar la campaña, según este modelo. (1.0 punto)

   c) ¿Cuánto tiempo después del inicio se lanzará la siguiente campaña? (1.0 punto)

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x < 0$, presenta una asíntota vertical. (1.0 punto)

   b) La función $f(x) = \sqrt[3]{e^x} - \dfrac{3}{x-2}$, $x > 2$, es creciente. (1.0 punto)

   c) Si f es una función creciente con dominio $[-5; 3]$ entonces su rango es $Ran(f) = [f(-5); f(3)]$. (1.0 punto)

San Miguel, 30 de mayo de 2024.

Año					Número			
2	0	2	4		0	6	3	3

Código de alumno

Práctica

Rojas Adrianzen Rubén Eduardo

Apellidos y nombres del alumno (letra imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Práctica N°: 3

Horario de práctica: A-101

Fecha: 30 / 5 / 24

Nombre del profesor: J. Lope

Nota

20

Número entero

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: C. G.
(iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - redacción, claridad de expresión, corrección gramatical, ortografía y puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

Pregunta 1:

$F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ A.V: $x=-4$
A.H: $y=6$

a) $c=1$. Asíntota horizontal: $y=6$

• $y = 6 = \frac{a}{c}$
$6 = a$

• Asíntota vertical: $x=-4$
↳ $x+d=0$
$x=-d$
$-d=-4$
$d=4$

El punto $(-6;7)$ pertenece a la gráfica:

$f(-6) = \frac{6(-6)+b}{(-6)+4} = 7$

$\frac{-36+b}{-2} = 7$

$-36+b = -14$

$b = 22$

2

Regla de correspondencia:

$F(x) = \frac{6x+22}{x+4}$ Restricciones: $x \neq -4$

b) Intersección eje y: $x=0$

$F(0) = \frac{6(0)+22}{(0)+4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5,5 \rightarrow (0; \frac{11}{2})$

Intersección eje x: $y=0$

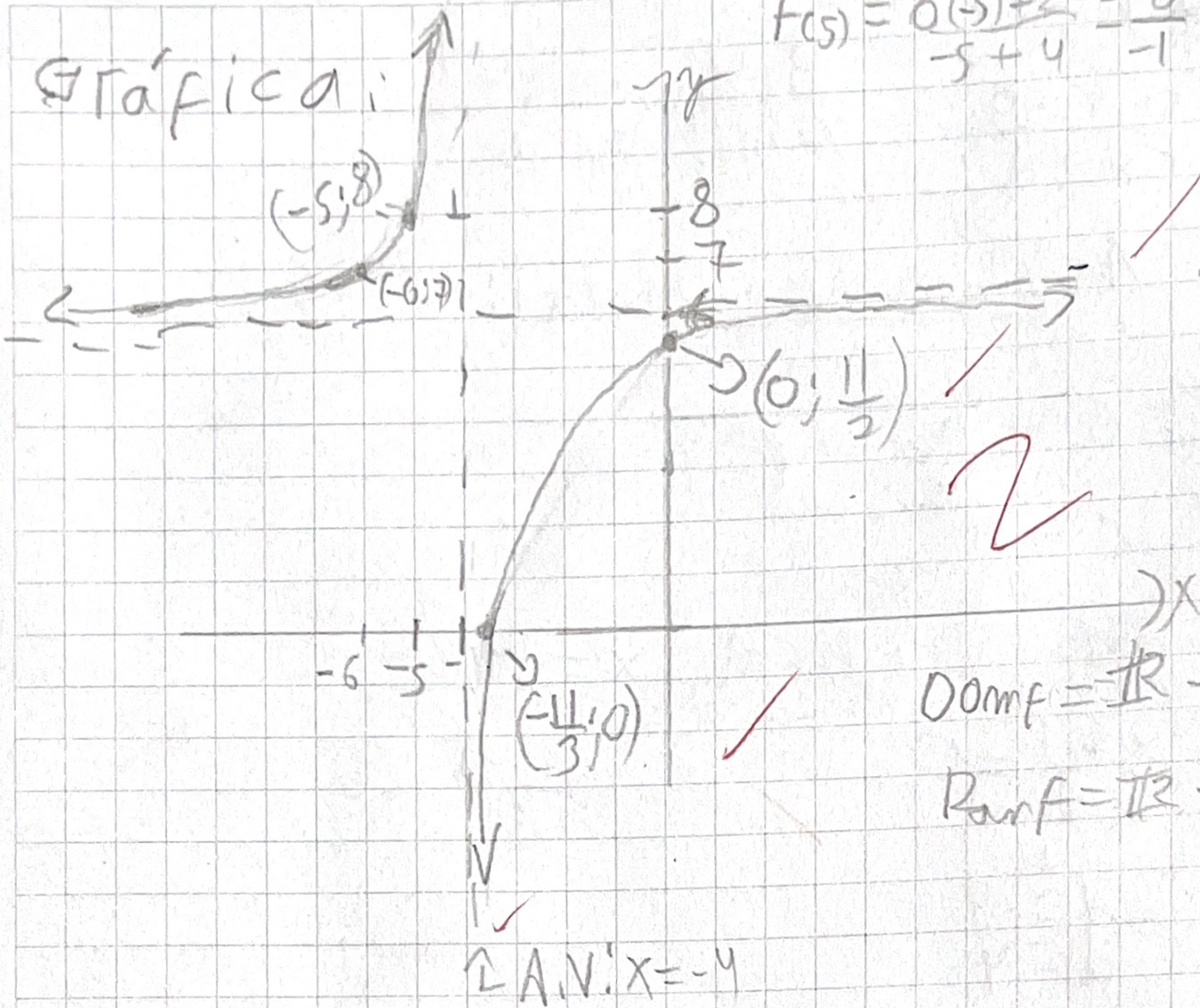
$F(x) = 0 = \frac{6x+22}{x+4} \rightarrow x \neq -4$

$0 = 6x+22$
$-22 = 6x$
$-\frac{11}{3} = x \rightarrow (-\frac{11}{3}; 0)$

Presente aquí su trabajo

$f(5) = \frac{6(-5)+22}{-5+4} = \frac{-8}{-1} = 8$

Gráfica:



A.H.: $y = 6$

2

$Dom f = \mathbb{R} - \{-4\}$

$Ran f = \mathbb{R} - \{6\}$

c)

Si f(x) fuera creciente, entonces:

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Contraejemplo:

$-5 < 0 \rightarrow f(-5) < f(0)$

- $f(-5) = \frac{6(-5)+22}{-5+4} = \frac{-8}{-1} = 8$
- $f(0) = \frac{6(0)+22}{0+4} = \frac{11}{2} = 5,5$

1

$-5 < 0 \rightarrow 8 < 5,5 \leftarrow$ Es falso

✓ ✗

f(x) no es creciente.

Solo es creciente en los intervalos:

$x \in]-\infty; -4[$ y $x \in]-4; +\infty[$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

Pregunta 2:

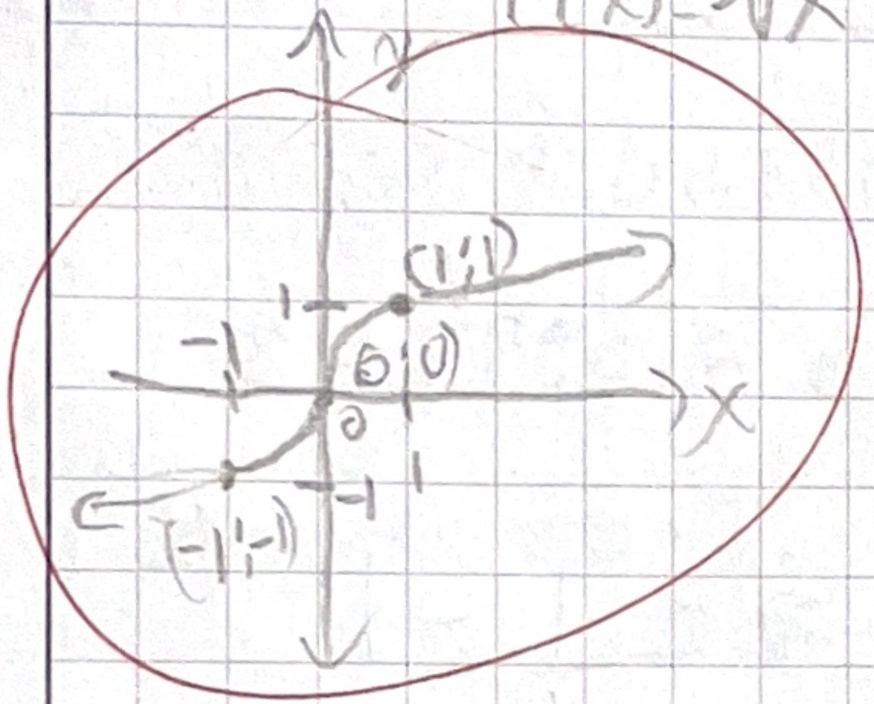
$$F(x) = \begin{cases} a - \sqrt[3]{4x+8} & , x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+3} & , x > -2 \end{cases}$$

a) $a = -2$.

• $f(x)_1 = -2 - \sqrt[3]{4x+8}$, $x \leq -2$

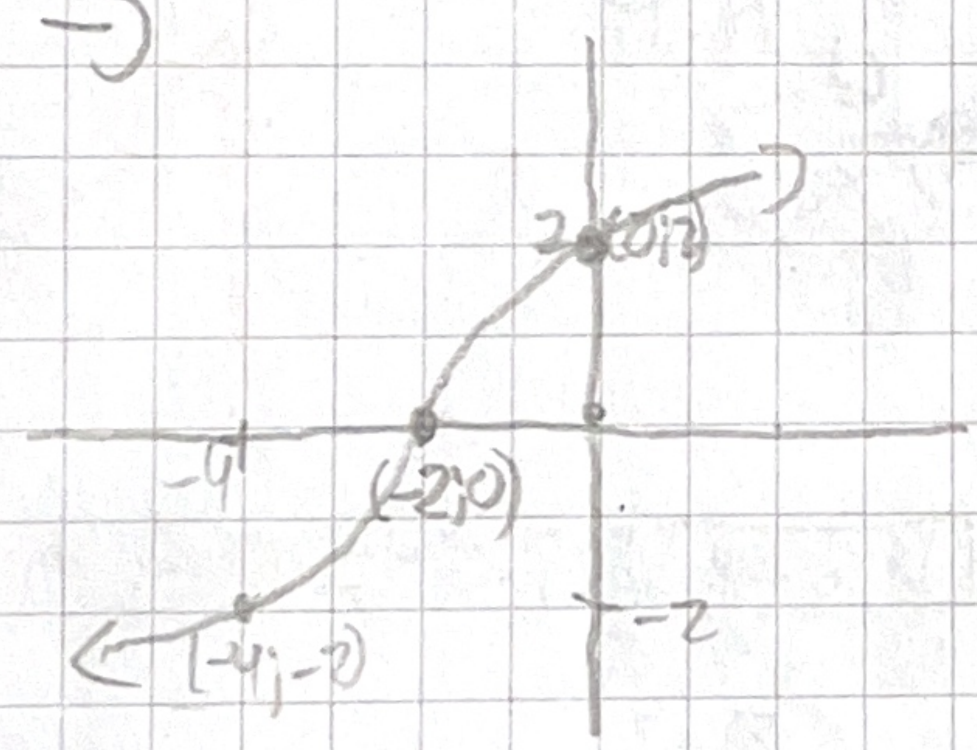
Transformamos la función: $\sqrt[3]{x}$

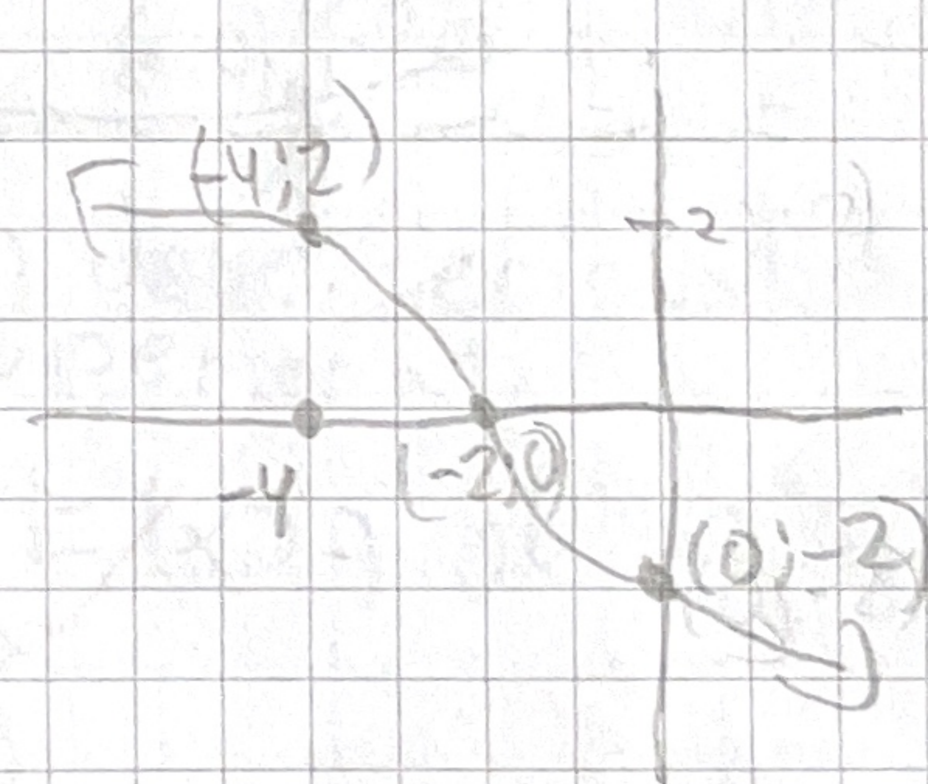
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$



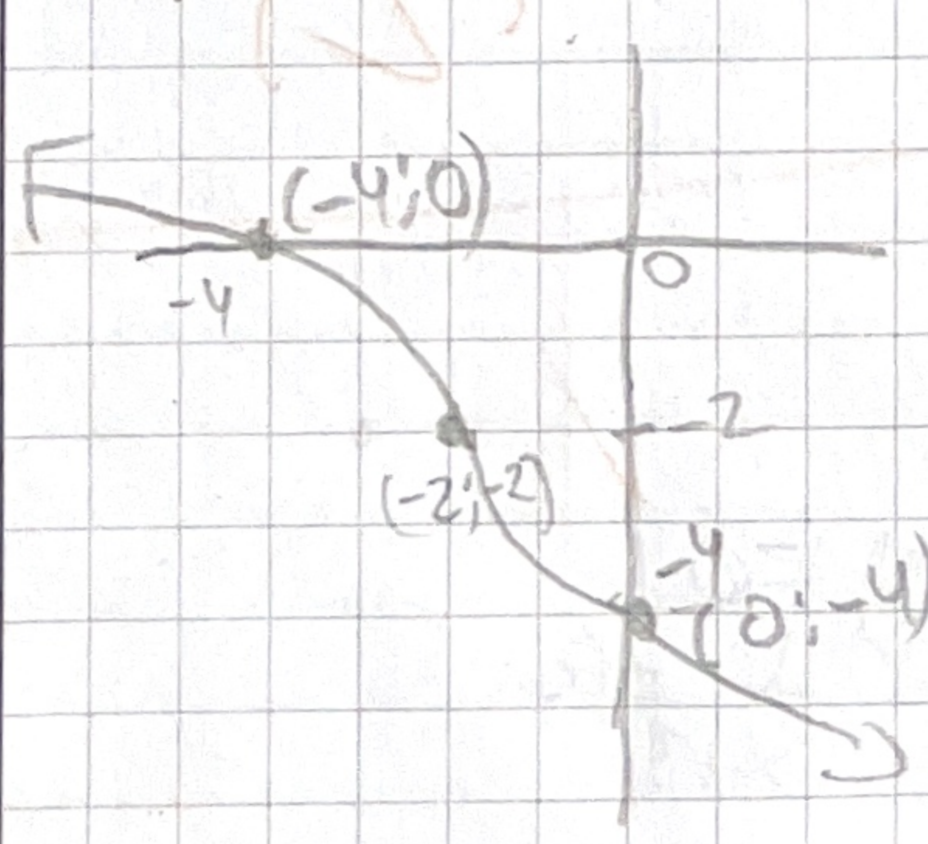
→

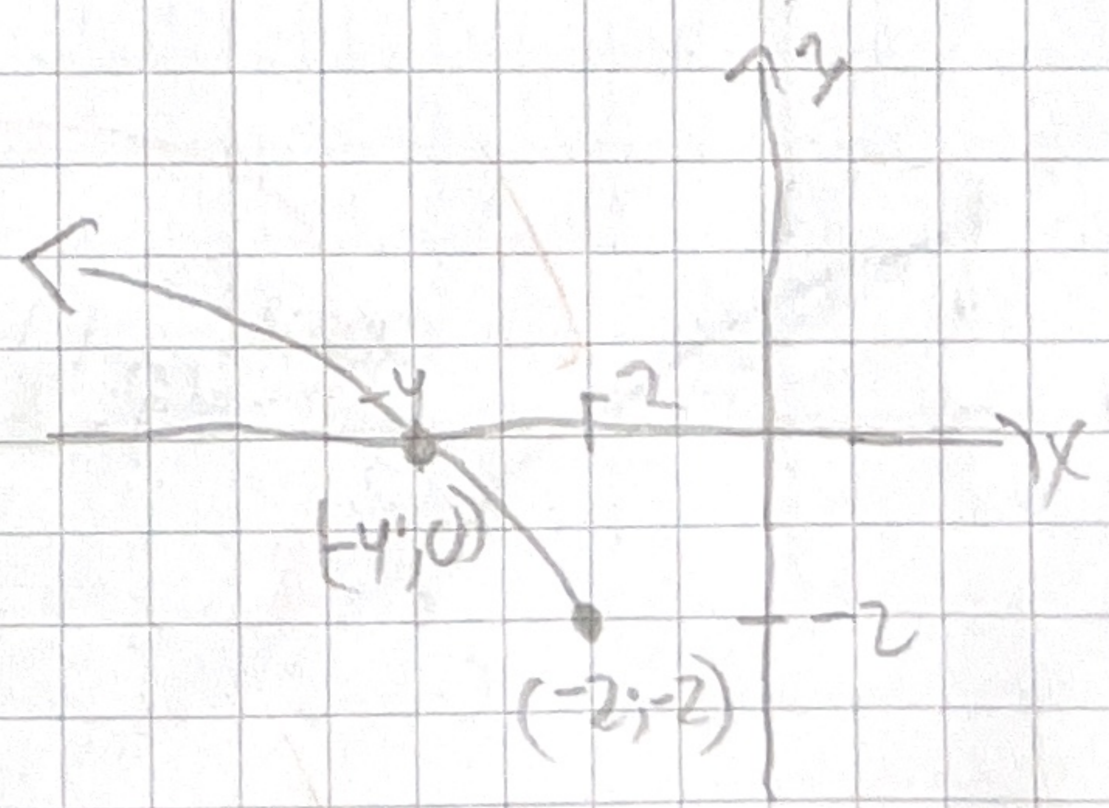
$\rightarrow$ $F(x) = \sqrt[3]{4x+8}$ $\quad$ $\rightarrow$ $F(x) = -\sqrt[3]{4x+8}$





$\rightarrow F(x) = -2 - \sqrt[3]{4x+8}$ $\quad$ $\rightarrow$ $F(x) = -2 - \sqrt[3]{4x+8}$; $x \leq -2$





Presente aquí su trabajo

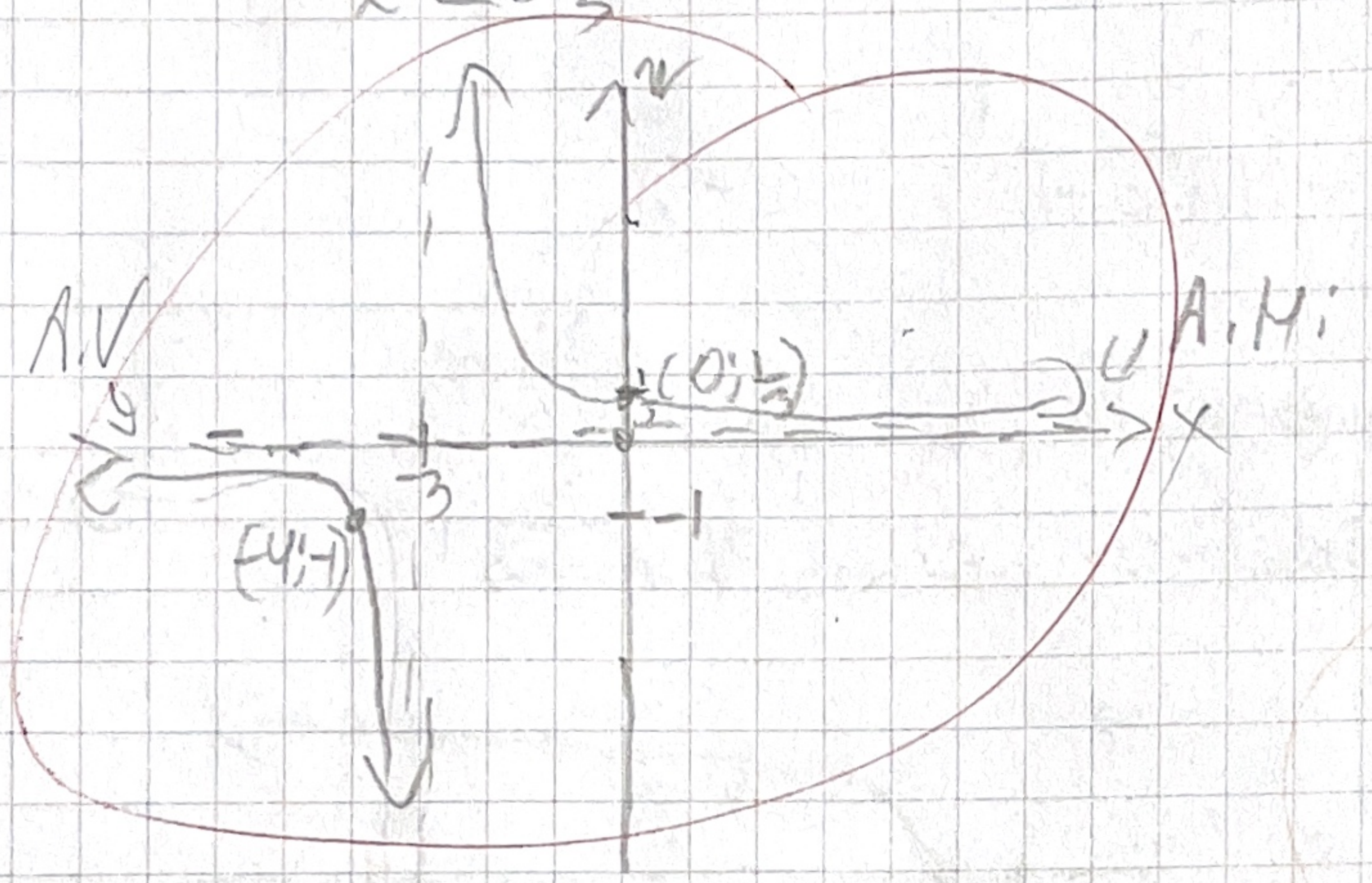
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Graficamos $F(x)_2 = \frac{1}{x+3}$

A.H: $y = \frac{0}{1} = 0$ $\quad F(0) = \frac{1}{3}$

A.V: $x+3=0$ $\quad f(-4) = \frac{1}{-1} = -1$

$x = -3$



→ $f(x)_2 = \frac{1}{x+3}$; $x > -2$ $\quad f(-2) = \frac{1}{1} = 1$

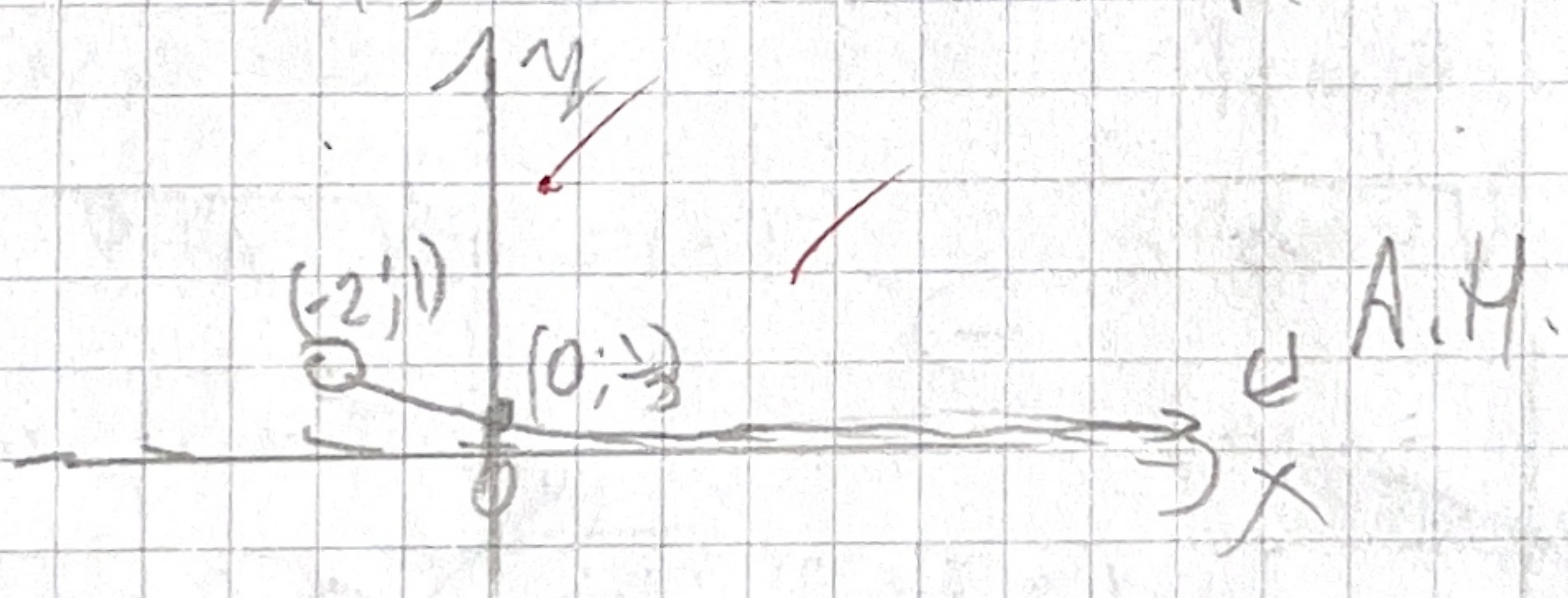
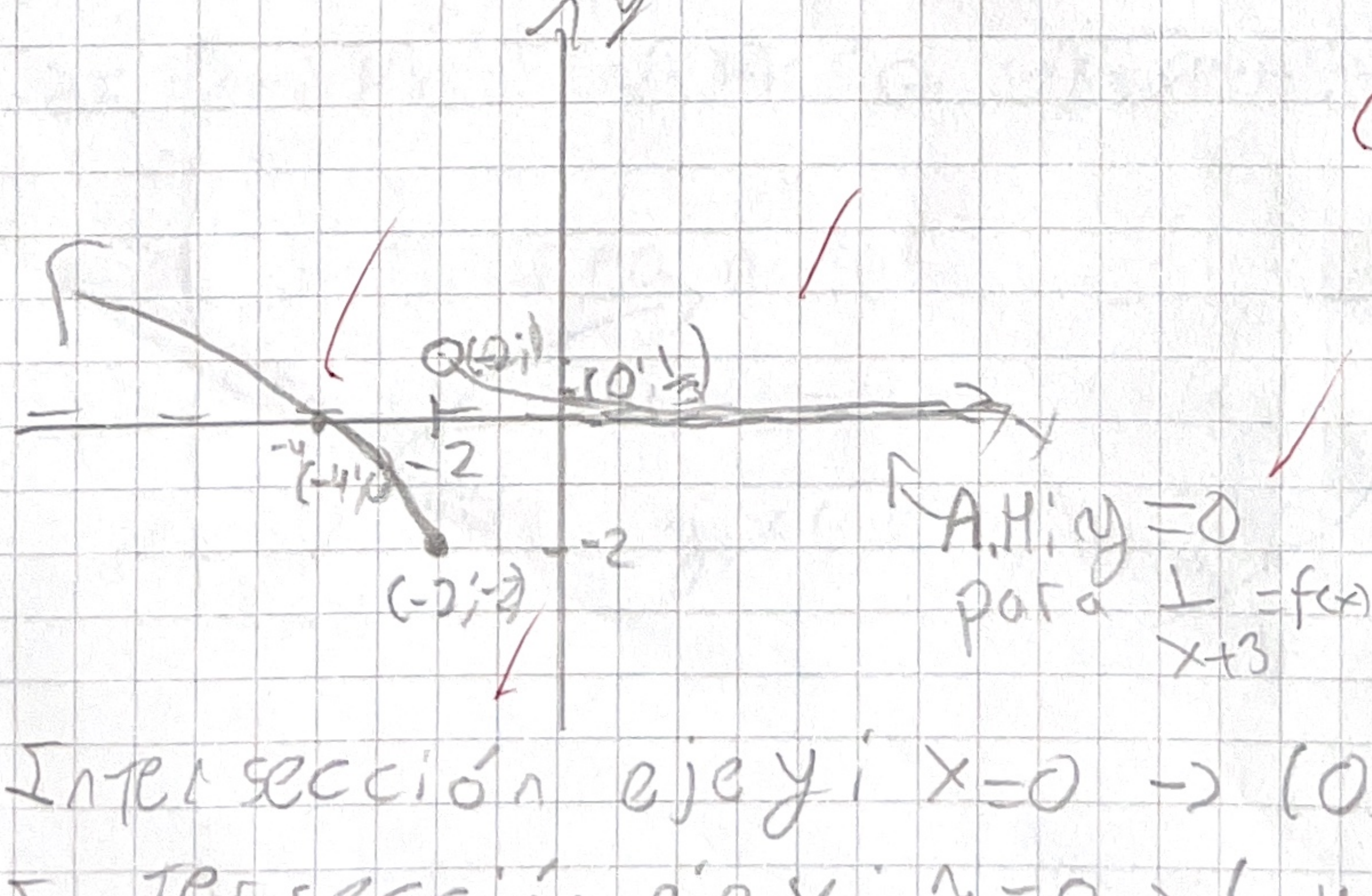


Gráfico de $f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt[3]{4x+8} & ; \ x \le -2 \\ \frac{1}{x+3}, & x > -2 \end{cases}$

2,5



Intersección eje y: $x=0 \rightarrow (0; \frac{1}{3})$

Intersección eje x: $y=0 \rightarrow (-4; 0)$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

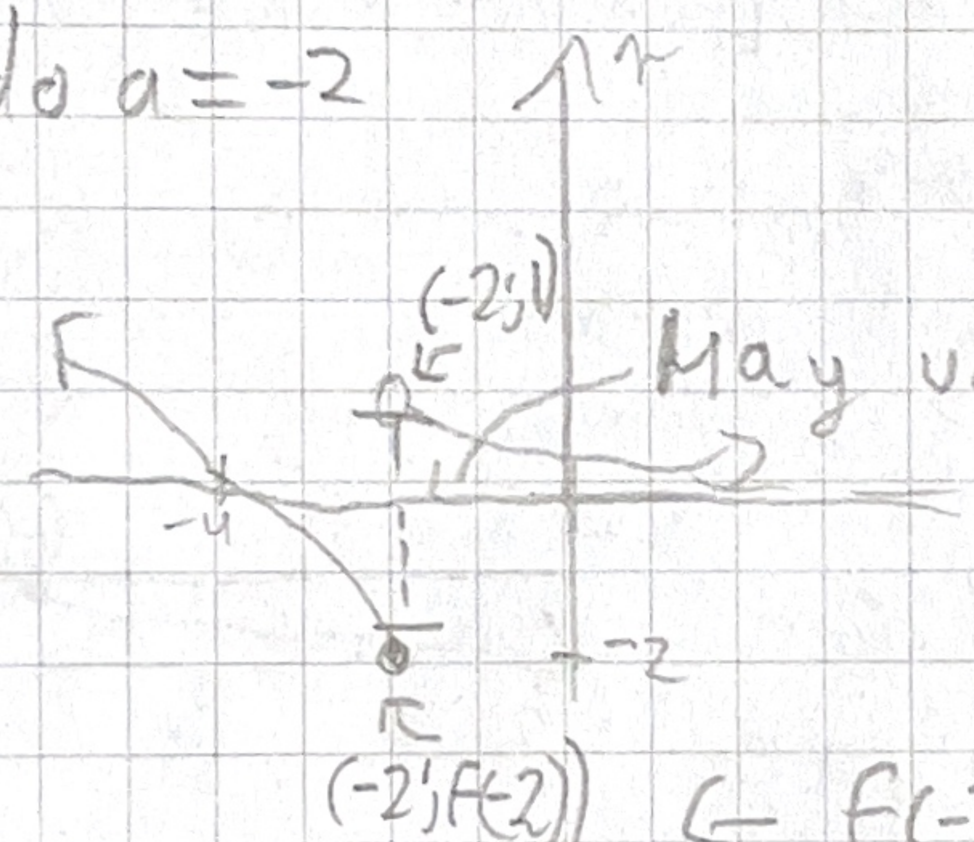
b) Solo estaría presente la asíntota horizontal: $y=0$, cuando $x>-2$.

Esto se debe a $f(x)_2 = \frac{1}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{0} = 0 = y$; A.H

La asíntota vertical: $x=-3$ ya no estaría presente pues x solo toma valores superiores a -2.

c) Para que $f(x)$ sea decreciente, $f(-2)$ debe ser mayor o igual a 1. Esto se aprecia en la gráfica:

cuando $a=-2$



Hay una brecha que impide que la función sea decreciente.

← $f(-2)$ debe ser igual o superior a 1.

- $f(-2) = a - \sqrt[3]{4(-2)+8} \geq 1$

$a - \sqrt[3]{-8+8}$

$a \geq 1$

a debe $\in [1; +\infty[$ para que $f(x)$ sea decreciente.

Presente aquí su trabajo

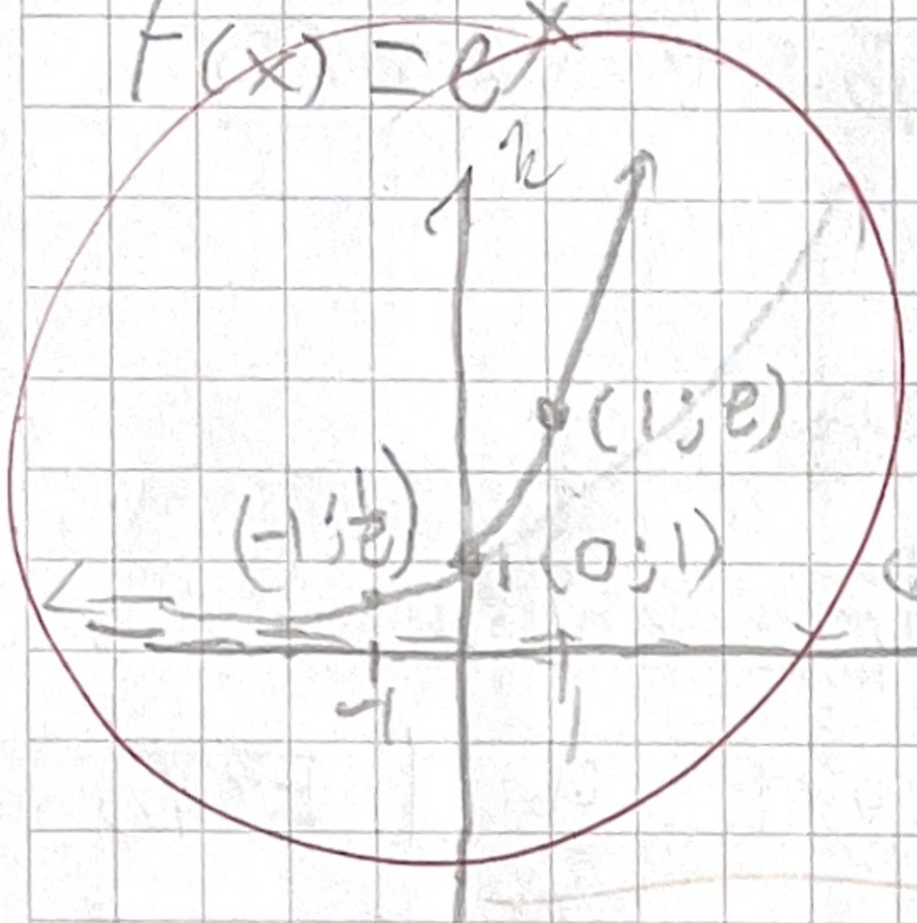
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

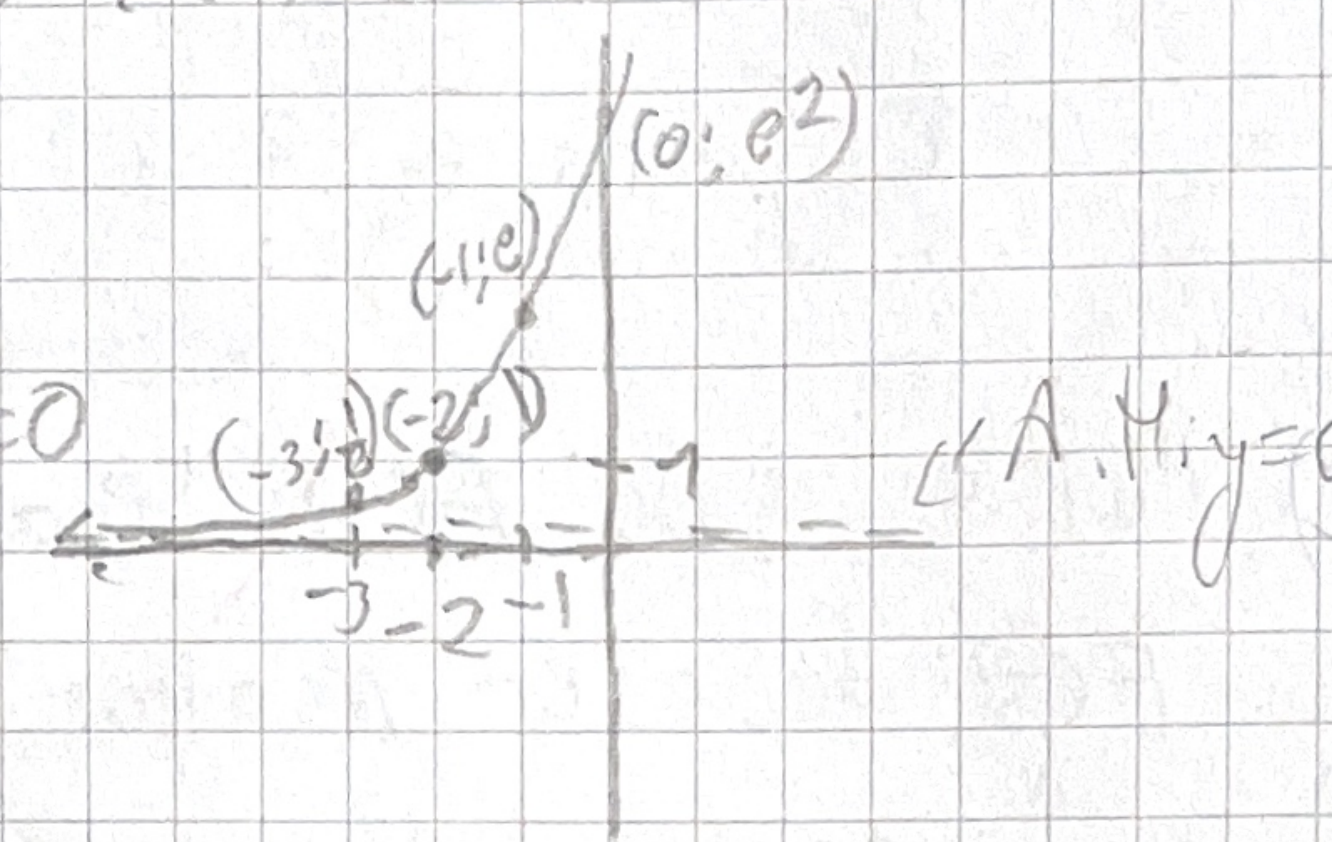
Pregunta 3:

d) $f(x) = \begin{cases} -1 + e^{x+2}, & x < -1 \\ 4 - \left(\frac{3}{5}\right)^x, & x \geq -1 \end{cases}$

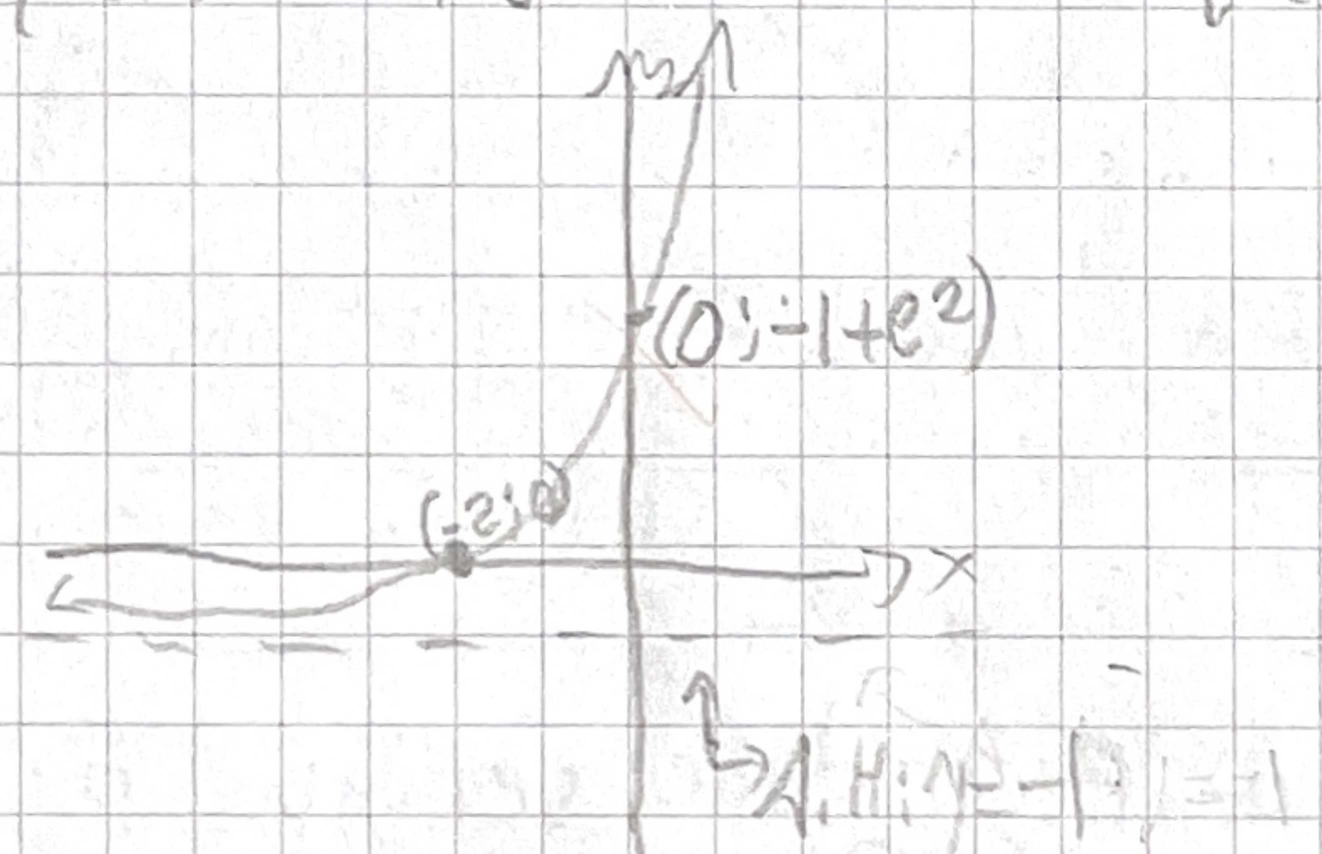
• Transformamos $f(x)_1 = -1 + e^{x+2}, x < -1$

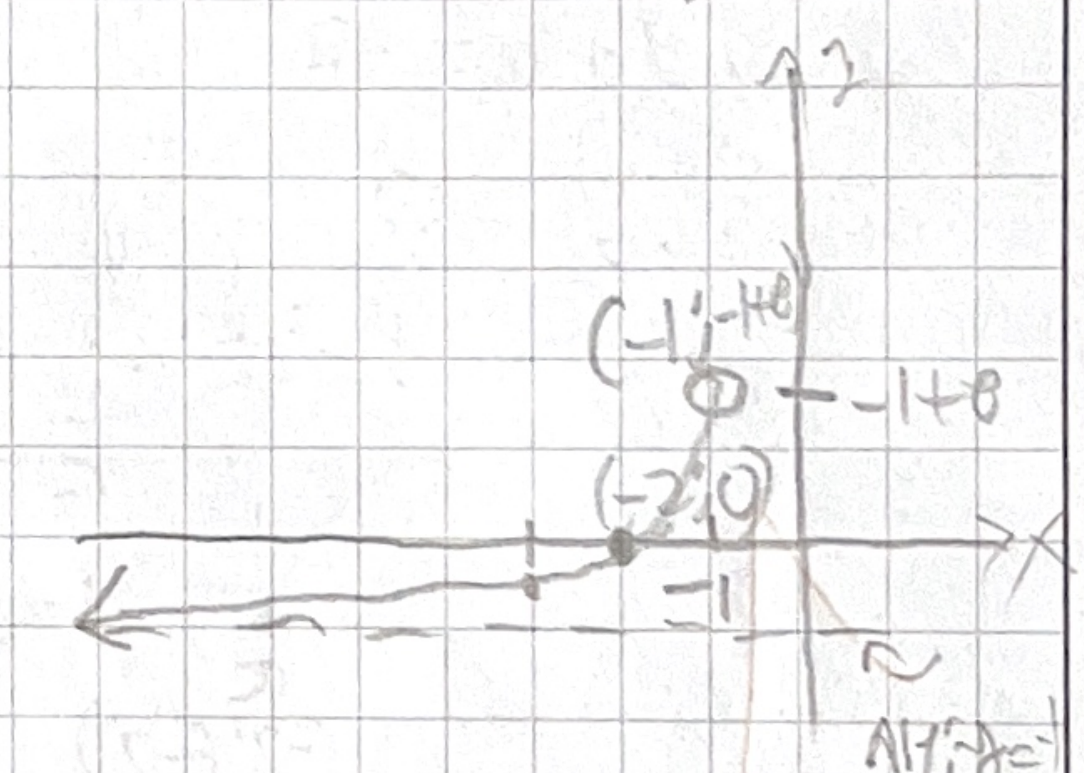
$f(x) = e^x$ → $f(x) = e^{x+2}$





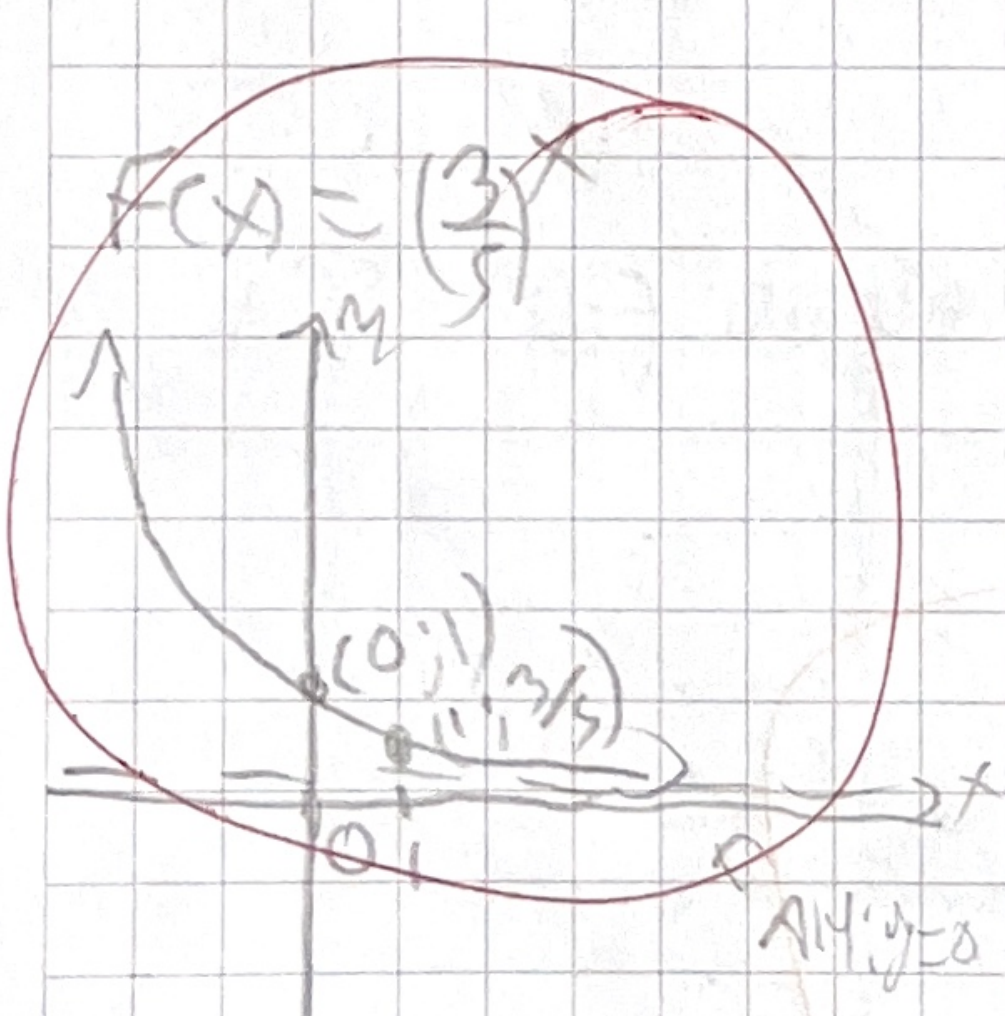
→ $f(x) = -1 + e^{x+2}$ → $f(x) = -1 + e^{x+2}, x < -1$



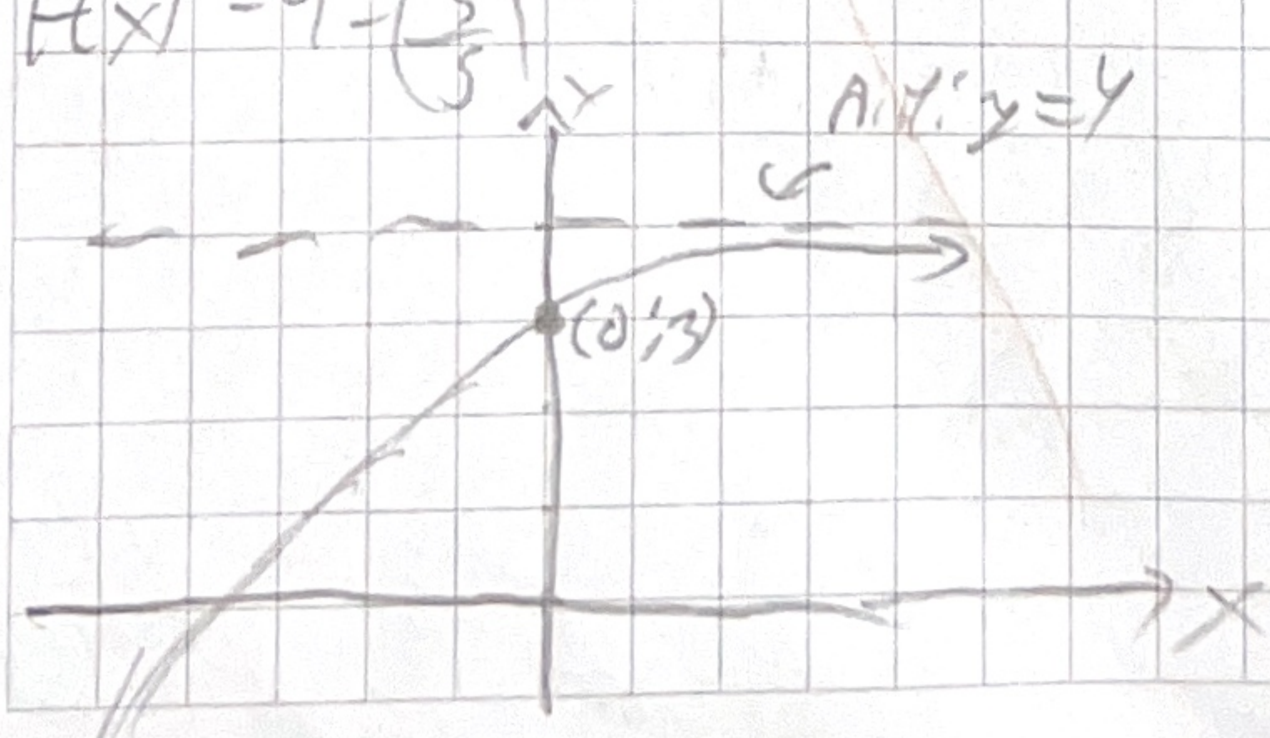


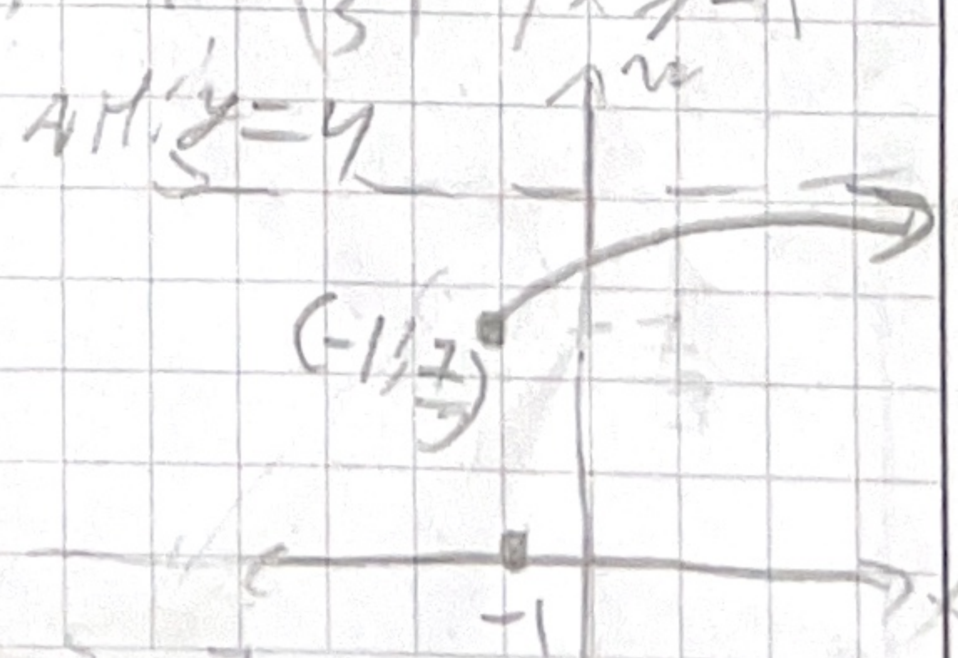
• Transformamos $f(x)_2 = 4 - \left(\frac{3}{5}\right)^x, x \geq -1$

$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ → $f(x) = -\left(\frac{3}{5}\right)^x$



$f(x) = 4 - \left(\frac{3}{5}\right)^x$ → $f(x) = 4 - \left(\frac{3}{5}\right)^x, x \geq -1$



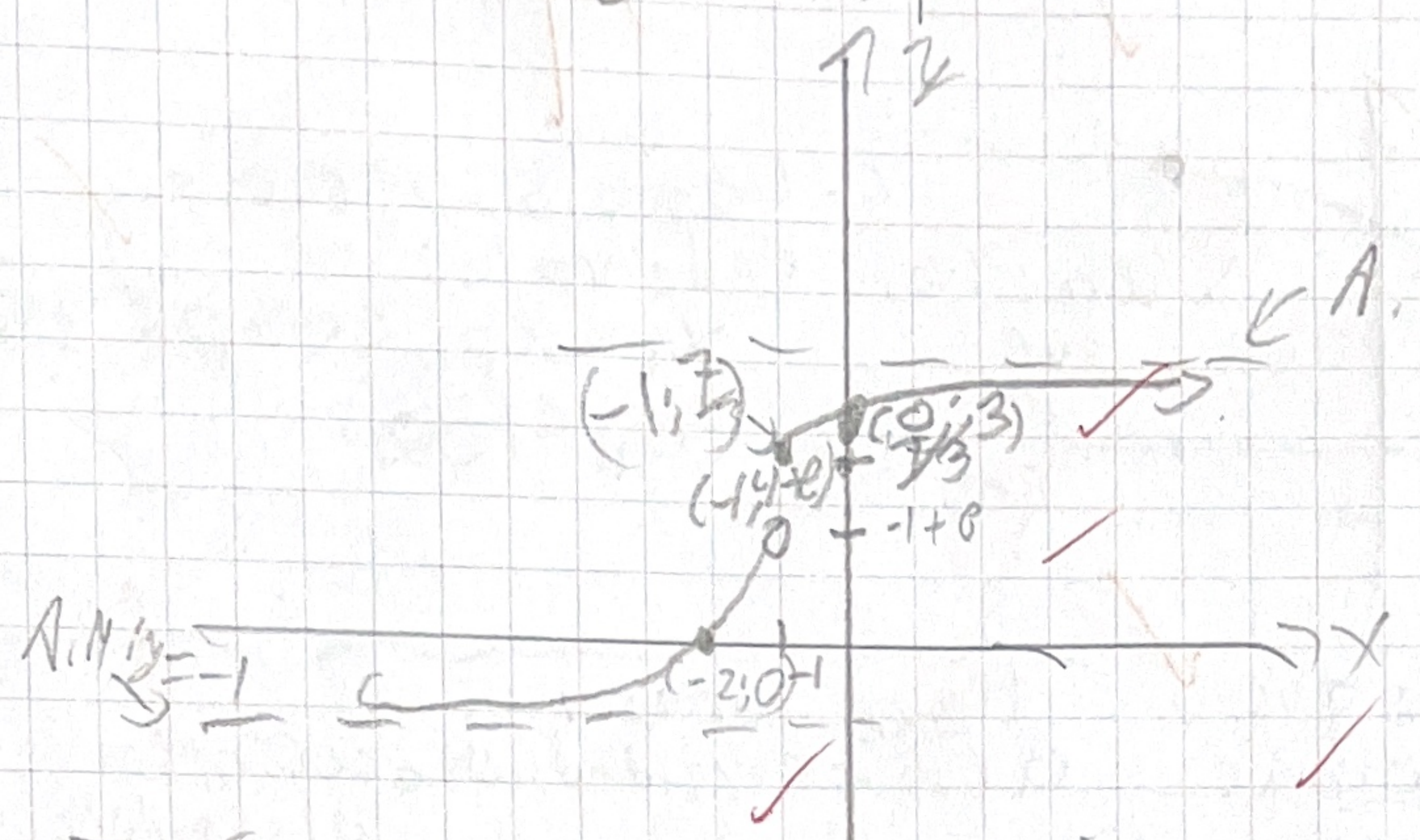


$f_{(-1)} = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

Gráfica de $f(x)$: $\frac{7}{3} \approx 2,3$ $-1+e \approx 1,7$



Intersección eje y: $x=0$

$f(0) = 4 - \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 4-1 = 3 \rightarrow (0;3)$

Intersección eje x: $y=0$

$f(x) = 0 = -1 + e^{x+2}$

$1 = e^{x+2}$

$e^0 = e^{x+2}$

$0 = x+2$

$-2 = x \rightarrow (-2;0)$

b) Para $f(x)_1$: $-1+e^{x+2}$, $x<-1$, es creciente.
Como se ve en la gráfica, si $x=-1 \rightarrow f(-1) = -1+e$
Como tiene asíntota: $y=-1$, no puede ser menor a esto.
Entonces: $\text{Ran}\, f(x)_1 = \,]-1; -1+e[$
Para $f(x)_2$: $4-\left(\frac{3}{5}\right)^x$, $x \geq -1$, es creciente.
Empieza en $f(-1) = \frac{7}{3}$, tiene asíntota: $y=4$,
entonces: $\text{Ran}\, f(x)_2 = [\frac{7}{3}; 4[$

• $\text{Ran}\, f(x) = \,]-1; -1+e[\, \cup [\frac{7}{3}; 4[$

1

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) sí es

La brecha no impide que sea creciente.

← Como se aprecia, cada valor $x_1 < x_2$ cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

se aprecia que es creciente.

se aprecia que es creciente

t = semanas, Q(t) = cantidad de accesorios disponibles

4) $Q(t) = k(25^{-0{,}25t}), t \geq 0$

a) $Q(0) = 50\,000 = k(25^{-0{,}25(0)}) = k(25^{(0)}) = k$

$50\,000 = k$

b) $Q(4) = 50\,000(25^{-\frac{1}{4}\cdot 4}) = 50\,000(25^{-1}) = 50\,000(\frac{1}{25}) = 2000$

Estarán disponibles 2000 accesorios luego de 4 semanas de lanzar la campaña.

c) Siguiente campaña empieza cuando hayan $\frac{Q(0)}{5} = \frac{50\,000}{5} = 10000$ accesorios

↳ $Q(t_1) = 10\,000 = 50000(25^{-\frac{1}{4}\cdot t_1})$

$\frac{1}{5} = (5)^{2\cdot -\frac{1}{4}\cdot t_1} \rightarrow 5^{-1} = 5^{-\frac{1}{2}\cdot t_1} \rightarrow -1 = -\frac{1}{2}\cdot t_1$

$2 = t_1$

La siguiente campaña se lanzará 2 semanas después del inicio.

Preguntas: a) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}, x < 0$ Falso

Gráfico: $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ → $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}, x<0 \rightarrow f(0) = 1$

y=2 f(0)=1 A.V: x=1 ← A.H: y=2

• Como x se vuelve menor a 0, la A.V: x=1 deja de existir.

b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ← creciente

$h(x) = e^x$ ← creciente

$i(x) = \frac{-3}{x-2}, x>2$ creciente

↳ $g(h(x)) = \sqrt[3]{e^x}$ ← creciente

$g(h(x)) + i(x) =$ creciente

creciente creciente

Verdadero

$f(x) = -5$

c) Falso, f(-5) y f(3) solo indican su máximo y mínimo, no aseguran que el rango sea [f(-5); f(3)]