PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Álgebra Matricial y Geometría Analítica
Examen 2
(2017-1)

Indicaciones:

* No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 3 horas.
* Resuelva las cinco preguntas de acuerdo a la siguiente distribución:

Pregunta	1	2	3	4	5
Página	1 y 2	3 y 4	5 y 6	7 y 8	9 y 10

---

1. Sea $S = \{(k, 1-k, 2), (-1, 2, 3), (k+1, 0, 1)\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, con $k \in \mathbb{R}$.

   a) Determine los valores de k para que S sea una base de $\mathbb{R}^3$. (2,5 pts)

   b) Para $k = 0$, demuestre que los vectores generados por S pertenecen al plano de ecuación
   $$x + 2y - z = 0$$
   (1,5 pts)

2. Sean A, B, X y Y cuatro matrices de orden n tales que $\det A = 4$, $\det B = 5$ y
$$\begin{cases} 5AX + 2BY = 20I \\ 6AX - BY = 7I \end{cases},$$
donde I es la matriz identidad. Halle
$$\det X + \det Y,$$
(4 pts)

3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

   a) Halle los valores y vectores propios de A. (3 pts)

   b) Halle el siguiente producto de matrices (1 pto)
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} A^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Continúa...

4. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ kx+y+z &= 1 \\ x-y+3z &= -3 \\ 4x+2y &= k \end{cases}$$

Determine los valores de la constante k, en caso existan, para que el sistema:

   a) Tenga solución única (2 ptos.)

   b) Tenga infinitas soluciones. (1 pto)

   c) No tenga solución. (1 pto)

5. a) Demuestre que

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2017} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

(2 pts)

   b) Hallar el número complejo z que satisface la siguiente ecuación

$$\frac{5i}{z} + \frac{(1+i)^4}{1-i^2} = -1+4i$$

   De su respuesta en forma binómica $a+bi$. (2 pts)

Examen elaborado por los coordinadores del curso.
Turno: 11.30 - 14:30.

San Miguel, 7 de julio de 2017.

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ENTREGADO 18 JUL. 2017

Segundo examen

Año				Número			
2	0	1	7	1	2	2	9

Código de alumno

Rodrigo Jesús Rodriguez Montes

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H - 124

Fecha: 07 / 07 / 2017

Nombre del profesor: H. Neciosup

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1

a) Para que K sea base deben ser linealmente independientes, det(A) ≠ 0

$$A = \begin{pmatrix} K & -1 & K+1 \\ 1-K & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$4(K+1)$ $\quad$ $2K$

0 $\quad$ $3(1-K)(1+K)$

$(K-1)$ $\quad$ 0

$$2K + 3(1-K^2) - 4(K+1) - (K-1) = 0$$

$$3(1-K^2) - 4K - 4 - K + 1 + 2K = 0$$

$$3(1-K^2) - 3K - 3$$

$$3(1-K^2) - 3(K+1)$$

$$3(1-K)(1+K) - 3(K+1)$$

$$(K+1)(3-3K-3) = 0$$

$$(K+1)(-3K) = 0$$

$$\cancel{K} \; 3K(K+1) = 0$$

$$K = 0 \;\vee\; K = -1$$

Para ser L.I $K \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$

2.5

Para demostrar conjunto generador (Tres vectores L.I generan $\mathbb{R}^3$)

$$(x, y, z) = \lambda_1(K, 1-K, 2) + \lambda_2(-1, 2, 3) + \lambda_3(K+1, 0, 1)$$

$$(x, y, z) = (K\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 K, \; \lambda_1(1-K) + 2\lambda_2 ; \; 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\begin{cases} K\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 K = x \\ \lambda_1 - \lambda_1 K + 2\lambda_2 = y \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases}$$

$\cancel{\lambda_1 = y + \lambda_1 K}$

$$\lambda_1 = \frac{y - 2\lambda_2}{1-K}$$

$$K\left(\frac{y - 2\lambda_2}{1-K}\right) - \lambda_2 + \lambda_3 K = x$$

$$K(y - 2\lambda_2) - (1-K)\lambda_2 + \lambda_3(1-K)K = x(1-K)$$

$$Ky - 2K\lambda_2 - (1-K)\lambda_2 + (K-K^2)\lambda_3 = x$$

$$\lambda_2(-2K - (1-K)) = x^{(1-K)} - Ky - (K-K^2)\lambda_3$$

$$\lambda_2 = \frac{(1-K)x - Ky - (K-K^2)\lambda_3}{(-K-1)}$$

$$2\left(\frac{y - 2\cdot\lambda_2}{1-K}\right) + 3\lambda_2 + \lambda_3 = z \rightarrow \frac{2y - 4\lambda_2}{1-K} + 3\lambda_2 + \lambda_3 = z$$

3 $\quad$ 3

-2

2

Presente aquí su trabajo

$2y - 4\lambda_2 + 3\lambda_2(1-K) + \lambda_3(1-K) = Z(1-K)$

$\cancel{2} - 4\lambda_2 + 3\lambda_2 - 3K\lambda_2 + \lambda_3 - K\lambda_3 = Z(1-K) - 2y$

$-\lambda_2 - 3\lambda_2 K + \lambda_3(1-K)$

$\lambda_2(-1-3K) + \lambda_3(1-K) = Z(1-K) - 2y$

$\left[\frac{(1-K)x - Ky - (K-K^2)\lambda_3}{-K-1}\right](-1-3K) + \lambda_3(1-K) = Z(1-K) - 2y$

$\lambda_3 \in \mathbb{R}$ ya que $x, y, z \in \mathbb{R}$, no existira para $K = \{-1; 0\}$ como se demostro anteriormente. Si λ_3 existe, entonces λ_2 y λ_1 existen.

$\therefore$ S es una base de $\mathbb{R}^3$ para $K \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ //

b) Si $K = 0 \rightarrow S = \{(0,1,2); (-1,2,3); (1;0;1)\}$

$(0,1,2) \cdot [(-1,2,3) \times (1;0,1)]$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-1} & \cancel{1} \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$(0,1,2) \cdot (2;4;-2) = 0 + 4 + (-4) = 0$

$\therefore$ Los 3 vectores viven en un mismo plano y el vector ~~(...)~~ $(2;4;-2)$ es ortogonal al plano, entonces sea (x,y,z) un punto del plano y $(0,0,0)$ otro punto del plano.

$(x,y,z) - (0,0,0) =$ vector en el plano

$(x,y,z) =$ vector en el plano

$(x,y,z) \cdot (2;4;-2) = 0$

$2x + 4y - 2z = 0$

$x + 2y - z = 0$ (ecuación cartesiana del plano)

~~$\therefore (0,1,2); (-1,2,3); (1,0,1) \in x + 2y - z$~~

$\therefore$ gen $\{(0,1,2); (-1,2,3); (1,0,1)\} \in$

$P: x + 2y - z = 0$

35 + 14

$(7 \quad -7) \cdot A^8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(49 \quad -49) \cdot A^6 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

$(49 \quad -49)$

$(343 \quad -343) \cdot A^4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(7^3 \quad -7^3) \cdot A^4 \cdot \begin{pmatrix} 3^3 \\ 3^3 \end{pmatrix}$

$(7^4 \quad -7^4) A^2 \begin{pmatrix} 3^4 \\ 3^4 \end{pmatrix}$

$(7^5 \quad -7^5) \begin{pmatrix} 3^5 \\ 3^5 \end{pmatrix}$

$(7^5 \cdot 3^5 - 7^5 \cdot 3^5$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_2$

5

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

4

16

4 . 5

20

20

$45 - 18 = 27$

98

$-12BY$

$-15BY$

4

49 .

5

245 +

98

343 x

7

3 1

$-120I +$

$35I$

-85

0

Presente aquí su trabajo

2

$$\begin{cases} 5AX + 2BY = 20I \\ 2(6AX - BY = 7I) \end{cases} \quad \begin{cases} 5AX + 2BY = 20I \quad + \\ 2(6AX - BY = 7I) \end{cases}$$

$$17AX = 34I$$

~~17AX = 34I~~

~~det(17~~

~~|17AX| = |27I|~~

~~17^n |A| |X| = 27~~

$$|17AX| = |34I|$$

$$17^n |A| . |X| = 34^n . |I|$$

$$17^n . 4 . |X| = 34^n$$

$$4|X| = 2^n$$

$$|X| = \frac{2^n}{2^2}$$

$$|X| = 2^{n-2}$$

$$-6(5AX + 2BY = 20I) +$$

$$5(6AX - BY = 7I)$$

$$-17BY = -85I$$

$$17BY = 85I$$

$$|17BY| = |85I|$$

$$17^n . |B| . |Y| = 85^n . |I|$$

$$5|Y| = 5^n . 1$$

$$|Y| = \frac{5^n}{5}$$

$$|Y| = 5^{n-1}$$

$$|X| + |Y| = 2^{n-2} + 5^{n-1}$$

4.0

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1 60° 2 30° $\sqrt{3}$

$2017 \,|\, 12$
81 168
72
97

$y = -x$

$\frac{x}{y}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

60 $\frac{\pi}{3} \cdot n = 2\pi k \quad n \in \mathbb{Z}$

$n = 6$

$2017 \,|\, 6$
21 336
37
1

Presente aquí su trabajo

3

$P(\lambda) = (A - I\lambda)\,v = 0$

$\det(A - I\lambda) = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$(5-\lambda)^2 - 4 = 0$

$[(5-\lambda)+2][(5-\lambda)-2] = 0$

$(7-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$(\lambda-7)(\lambda-3) = 0$

$\underline{\lambda = 7} \vee \underline{\lambda = 3}$ → valores propios

3.0

Para $\lambda = 7$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2x - 2y = 0$
$-2x - 2y = 0$

$-2x = 2y$
$x = -y$

$v = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$

$v = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

vector propio

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x - 2y = 0$
$-2x + 2y = 0$

$2x = 2y$
$x = y$

$v = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

$v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

vector propio

Presente aquí su trabajo

b)

$$(1\quad -1)\underset{1\times 2}{.}A\underset{2\times 2}{.}A^{8}.A.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$(+1\quad -1)\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}.A^{8}.\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$(7\quad -7)A^{8}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$(7\quad -7).A.A^{6}.A\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$(7\quad -7)\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}.A^{6}.\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$(7^2\quad -7^2)A^{6}\begin{pmatrix}3^2\\3^2\end{pmatrix}$$

$$(7^3\quad -7^3)A^{4}\begin{pmatrix}3^3\\3^3\end{pmatrix}$$

$$(7^4\quad -7^4)A^{2}\begin{pmatrix}3^4\\3^4\end{pmatrix}$$

$$(7^5\quad -7^5).\begin{pmatrix}3^5\\3^5\end{pmatrix} = 7^5.3^5+(-7^5.3^5) = \underline{0}_{\#}$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-1-\frac{5}{2}+3z=-3$

$-\frac{7}{2}+3z=-3$

$3z=\frac{7}{2}-\frac{6}{2}$

$3z=\frac{1}{2}$

$z=\frac{1}{6}$

45 - 18

$\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27\\27\end{pmatrix}$

135 - 54

$\frac{3}{2}-z=2$

$z=-\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-1=1$

$\frac{4}{2}-1=1$

2 - 1

$-1-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=-3$

$(K-3)-2.(K$

$-2(K-3)^2$

$x+y-z=2$

$-2y+4z=-5$

$4z+5=2y$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 29 & -20 \\ -20 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$x + y - z = 2$
$3x + y + z = 1$
$x - y + 3z = -3$
$4x + 2y = 1$

$2x + 2y = 3$
$2y = 3 - 2x$
$2x + 3 = 1$
$2x = -2$
$x = -1$
$y = 5/2$

$(K-3)$

-2

(-1) $2K + 4 - (4K-2)$
$-2K + 6$
$-2(K-3)$

$K-3$

$2K - (4K-2)$
$-2K-2$
$-2(K+1)$

Presente aquí su trabajo

4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ K & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ K \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ K & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & K \end{array}\right) \quad F_2 \longleftrightarrow F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} K & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & K \end{array}\right) \quad F_3 = -F_2 + F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} K & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & K \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \longleftrightarrow F_1 \\ F_4 = -4F_1 + F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ K & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & K-8 \end{array}\right) \quad F_4 = -F_3 + F_4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ K & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & K-3 \end{array}\right)$$

* Si observamos la última fila nos damos cuenta que si $K \neq 3$ el sistema no tiene solución ya que $\underline{0 = K-3}$

Entonces, analizamos en $K = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 = -3F_1 + F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 = -F_2 + F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 = -\frac{1}{2} F_2$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F_1 = -F_2 + F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$2 - \frac{5}{2}$

$-\frac{1}{2}$

* Tenemos que

Ran(A) = Ran(A : B) < #variables
tiene infinitas soluciones

4.0

a) El sistema no tiene solución única ~~independientemente del valor de k~~ para ningún valor de k

b) El sistema tiene infinitas soluciones para k = 3

c) El sistema no tiene solución para $k \in \mathbb{R} - \{3\}$

$\frac{2\pi \cdot 1008 + \pi}{3}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1008

$$\cancel{2016}\ \lfloor 6$$
1008 ⌊ 168
40
48

⑤

a) ~~5i~~

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2017}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = |z| \cdot e^{i\theta}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{4}{4}}$$

$$|z| = 1$$

$$\tan\theta = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

(1) $z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$z^{2017} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2017}$$

$$z^{2017} = e^{i\frac{2017\pi}{6}}$$

$$z^{2017} = e^{i\left(\frac{2016\pi+\pi}{6}\right)}$$

$$z^{2017} = e^{i\left(\frac{2\pi \cdot 1008}{6} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z^{2017} = e^{i\,2\pi\cdot 168} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

como lleva 2π significa que da 168 vueltas y es la representación de 1.

$$z^{2017} = e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{de (1)}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2017} = z$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2017} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

//

2.0

Presente aquí su trabajo

b)

$$\frac{5i}{z} + \frac{(1+i)^4}{1+1} = -1+4i$$

$$\frac{5i}{z} + \frac{(1+i)^2(1+i)^2}{2} = -1+4i$$

$$\frac{5i}{z} + \frac{(2i)(2i)}{2} = -1+4i$$

$$\frac{5i}{z} + 2i^2 = -1+4i$$

$$\frac{5i}{z} = 1+4i$$

$$z = \frac{5i}{1+4i} \cdot \frac{(1-4i)}{(1-4i)}$$

$$z = \frac{5i-20i^2}{17}$$

$$z = \frac{20+5i}{17}$$

$$z = \frac{20}{17} + \frac{5i}{17}$$

2.0

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\frac{(1+i)^3}{1-i}$$

$$(1+i)(1+i)$$

$$1+2i+i^2$$

$$2i(1+i)$$

$$\frac{2i-2}{1-i}$$

$$\frac{2(i-\cancel{1})}{-1(i-\cancel{1})}$$

$$-2$$