PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Fundamentos de Cálculo
Práctica Calificada N° 2
Semestre Académico 2017-1
H-106, H-113, H-114, H-115, H-116, H-117, H-119, H-120, H-121, H-122, H-123, H-124, H-133

Indicaciones generales:

- Tiempo de duración: 1 hora y 50 minutos.
- No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomados en cuenta en la calificación.

---

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente sus respuestas:
   a) Si $|x-2|<1$, entonces $\frac{1}{x+1}>\frac{1}{2}$. **(1.5 puntos)**
   b) Si $x \in]-5;1[$ entonces $\left|\frac{1}{2x+13}\right|<\frac{1}{3}$. **(1.5 puntos)**
   c) Si $x \in \left[0;\frac{4}{5}\right]$, el conjunto solución de $17x > 15-3x > 12x$ es $\left]\frac{3}{4};1\right[$. **(2.0 puntos)**

2. En cada caso, escriba el equivalente de cada expresión usando la definición de valor absoluto.
   a) $|3-x|$ **(1.0 punto)**
   b) $|2x-3|+8x$ **(1.0 punto)**

3. Calcule en términos de n las siguientes sumas:
   a) $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{4k^2-4k}\right)$ **(2.5 puntos)**
   b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4^{k-1}}$ **(3.0 puntos)**
   c) $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+2}\binom{n-1}{k}4^{2n-2k}$ **(2.5 puntos)**

4. Pruebe, usando inducción matemática, que la siguiente igualdad es válida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. **(3.0 puntos)**

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)\,(k+1)=\frac{(n)(n-1)(2n+5)}{6}$$

5. Grafique la región representada por las inecuaciones siguientes: **(2.0 puntos)**

$$\begin{cases} y \le -x^2+8 \\ y > x+6 \end{cases}$$

Elaborado por los profesores del curso.
San Miguel, 17 de abril de 2017

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

Práctica

Año				Número			
2	0	1	7	0	4	5	0

Código de alumno

Tapara Tejada Julio Cesar
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: Fundamentos de cálculo

Práctica N°: 2

Horario de práctica: P- 124

Fecha: 17/04/2017

Nota
20

Nombre del profesor: E. Barrantes

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: C.P.H
(iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$|x-2|<1$

$-1<x-2<1$

$17x > 15-3x \geq 12x$

$20x > 15 \wedge 15 > 15x$

$x > \frac{3}{4} \wedge 1 > x$

0,75

$0 < x < \frac{4}{5}$

$16-3x > 20x$

$> 20x$

$16-3x > 12x$

$1 > x > \frac{3}{4}$

$1 > x > 0,75$

$\cap$

$0,8 > x > 0$

$\boxed{0,8 \geq x > 0,75}$

1,5

1,5

20

1. (a) $|x-2|<1$

$-1 < x-2 < 1 \wedge (1>0)$

$2 < x+1 < 4$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{x+1} > \frac{1}{4}$ (se puede invertir porque los extremos son positivos)

Como se observa, $\frac{1}{2} > \frac{1}{x+1}$, por lo que la proposición (a) es falsa. $\boxed{F}$

(b) $x \in]-5;1[$

$-5 < x < 1$

$-10 < 2x < 2$

$3 < 2x+13 < 15$

Como los extremos son positivos, se puede invertir:

$\frac{1}{3} > \frac{1}{2x+13} > \frac{1}{15} \left(> -\frac{1}{3} \right)$ → se puede extender el intervalo

$\frac{1}{3} > \frac{1}{2x+13} > -\frac{1}{3}$, como consecuencia:

$\therefore \frac{1}{3} > \left| \frac{1}{2x+13} \right|$

La proposición es verdadera $\boxed{V}$

(c) Desarrollando la desigualdad:

$17x > 15-3x > 12x$

$17x > 15-3x \wedge 15-3x > 12x$

$20x > 15 \wedge 15 > 15x$

$x > \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \wedge 1 > x$

CS: $]\frac{3}{4};1[$; sin embargo,

por condición, $x \in [0;4/5]$, por lo que el CS de la inecuación se ve afectado por las condiciones iniciales de x. :

CS: $]\frac{3}{4};1[\cap [0;4/5]$

CS: $]\frac{3}{4};\frac{4}{5}]$

La proposición es falsa $\boxed{F}$

Presente aquí su trabajo

2- (a)

~~$|3-x|$, hallamos el punto crítico:~~

~~$3-x \geq 0 \rightarrow x = 3$~~

~~$\therefore |3-x| \begin{cases} 3-x \\ \end{cases}$~~

2: (a)

$$|3-x| \begin{cases} 3-x, & \forall\ x \leq 3 \\ x-3, & \forall\ x > 3 \end{cases}$$

(b)

$$|2x-3|+8x \begin{cases} 2x-3+8x = \boxed{10x-3}, & \forall\ x \geq 3/2 \\ 3-2x+8x = \boxed{6x+3}, & \forall\ x < 3/2 \end{cases}$$

3: (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{4k^2-4k}\right) = \frac{3}{4}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k}\right) = \frac{3}{4}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\right)$

2,5

El término " $\frac{1}{k(k-1)}$ " puede separarse por fracciones parciales:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1}$$

$\therefore$ $A(k-1) + Bk = 1$

$k(A+B) - A = k(0) + 1$

$A = -1$ $\quad A+B=0 \rightarrow A=-B \quad \therefore B = +1$

Reemplazando en el sumando:

$$\frac{3}{4}\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1}\right)\right), \text{ por telescópica:}$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right) = \boxed{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)} //$$

[redacted]

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4^{k-1}}$. Se puede generar una sumatoria telescópica a modo de artificio:

3,0

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{4^{k-1}} - \frac{k-1}{4^{k-2}}\right) \dots (I)$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$|3-x| \geq 0$

$3 \geq 3$

$x-3 \geq 0$

$x \geq 3$

$|2x-3| = 0$

$x = 3/2$

$\frac{3}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-k)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{k}{4^{k-1}} - \frac{k-1}{4^{k-2}}\right)$

$\frac{1}{4^0} - \frac{1-1}{4^{1-2}} + \frac{2}{4^{2-1}} - \frac{1}{4^0}$

$\frac{0}{4^{0-1}} - \frac{0}{4^{-1}}$

n

$4^{k-2} = 4^{k-1}$

4

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\frac{16}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\, k!} \quad \frac{(-1)^{k+2}(-1)^2}{\cancel{(-1)^2}}$$

$$(-1)^k \; 16^{n-k-1} \cdot 16$$

2,5

Presente aquí su trabajo

Por la propiedad telescópica se observa que (I) tiene el siguiente valor:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{4^{k-1}} - \frac{k-1}{4^{k-2}}\right) = \frac{n}{4^{n-1}} - \frac{0}{4^{-1}} = \frac{n}{4^{n-1}} \quad \ldots (II)$$

Por otro lado, se puede desarrollar (I):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{4^{k-1}} - \frac{4(k-1)}{4^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{4^{k-1}} - \frac{4k}{4^{k-1}} + \frac{4}{4^{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-3\,\frac{k}{4^{k-1}}\right) + 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \to \text{geométrica}$$

$$= -3\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4^{k-1}} + 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}\right) \quad \ldots (III)$$

Igualando (II) y (III):

$$-3\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4^{k-1}} + 4\left(\frac{4}{3}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{n}{4^{n-1}}$$

$$-3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{4^{k-1}}\right) = -\left(\frac{16}{3} - \frac{4}{3\cdot 4^{n-1}}\right) + \frac{n}{4^{n-1}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{4^{k-1}}\right) = \left(\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)\left(n+\frac{4}{3}\right) - \frac{16}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)$$

Finalmente:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4^{k-1}} = \boxed{\frac{16}{9} - \left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)\left(\frac{n}{3}+\frac{4}{9}\right)}$$

(c) $$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+2}\binom{n-1}{k}4^{2n-2k}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^{k+2}\,\frac{(-1)^2}{\cancel{(-1)^2}}\cdot\frac{16^{n-k}}{16}\cdot 16$$

$$16\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k(16)^{n-k-1}$$, por teorema de binomio:

$$16\,(16-1)^{n-1} = \boxed{16\cdot 15^{n-1}}$$

Presente aquí su trabajo

4.- ~~Sea $i \in \mathbb{Z}^+$, tal que $0 < i \leq h$, $\forall i$ se cumple:~~

~~$$\sum_{k=1}^{i} (k-1)(k+1) = \frac{(i)(i-1)(2i+5)}{6} \quad (HI),$$~~

Probar:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

En efecto:

Etapa base $(h = 1)$

$$\sum_{k=1}^{1} (k-1)(k+1) = 0(2) = 0 = \frac{(1)(1-1)(2+5)}{6} = 0$$

$(h=2)$

$$\sum_{k=1}^{2} (k-1)(k+1) = 0 + 1(3) = 3 = \frac{2(1)(2 \cdot 2+5)}{6} = 3$$

se cumple

Etapa inductiva:

Sea $i \in \mathbb{Z}^+$, tal que $0 < i \leq h$; $\forall i$, se cumple:

$$\sum_{k=1}^{i} (k-1)(k+1) = \frac{(i)(i-1)(2i+5)}{6} \quad (HI),$$

entonces, $$\sum_{k=1}^{h+1} (k-1)(k+1) = \frac{(h+1)(h)(2(h+1)+5)}{6} \quad (TI).$$

En efecto:

$$(h+1-1)(h+1+1) + \underbrace{\sum_{k=1}^{h} (k+1)(k-1)}_{HI} = \sum_{k=1}^{h+1} (k+1)(k-1)$$

$$\sum_{k=1}^{h+1} (k+1)(k-1) = h(h+2) + \frac{h(h-1)(2h+5)}{6}$$

$$= h^2 + 2h + \frac{2h^3 - 2h^2 + 5h^2 - 5h}{6}$$

$$= \frac{6h^2 + 12h + 2h^3 - 2h^2 + 5h^2 - 5h}{6} = \frac{2h^3 + 9h^2 + 7h}{6}$$

El término "$2h^3 + 9h^2 + 7h$" es factorizable:

$$2h^3 + 9h^2 + 7h = h(2h^2 + 9h + 7) = h(2h+7)(h+1)$$

$2h \quad 7 = 7h$

$h \quad 1 = 2h$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1) = n(n-1$

$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(k+1) = (n+1)$

Sea

$h > i$

2

$h^2 + 2h$

$2h^3$

$6h^2 + 12h$

$h(2h$

2

1

$2h^2$

2

-1

2

$6h^2$

$6h(h+2) + h(h$

$6h^2 + 12h + (h^2-$

$2h^3-$

$2h^3$

$2h^2+$

2

1

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$(2n+5)$

6

$n\ (2(n+1)+5)$

6

$(h^2 \cancel{+} h\quad)(2h+5)$

$h^3 + 5h^2 - 2h^2 - 5h$

$2h^3 - 3h^2 - 5h$

$3h^2 + 7h$

$+3h+7)$

7

3

$3 \quad 7$

$2 \quad -1$

$1 \quad 7$

$1)(2h+5)$

$)(2h+5)$

$h^2 + 5h$

$h^2 - 5h$

$h^2 + 7h$

7

1

Presente aquí su trabajo

Reemplazando:

$$\sum_{k=1}^{h+1} = \frac{h(h+1)(2h+7)}{6} = \frac{(h+1)(h)(2(h+1)+5)}{6},$$

la cual es la TI, que queda demostrada.

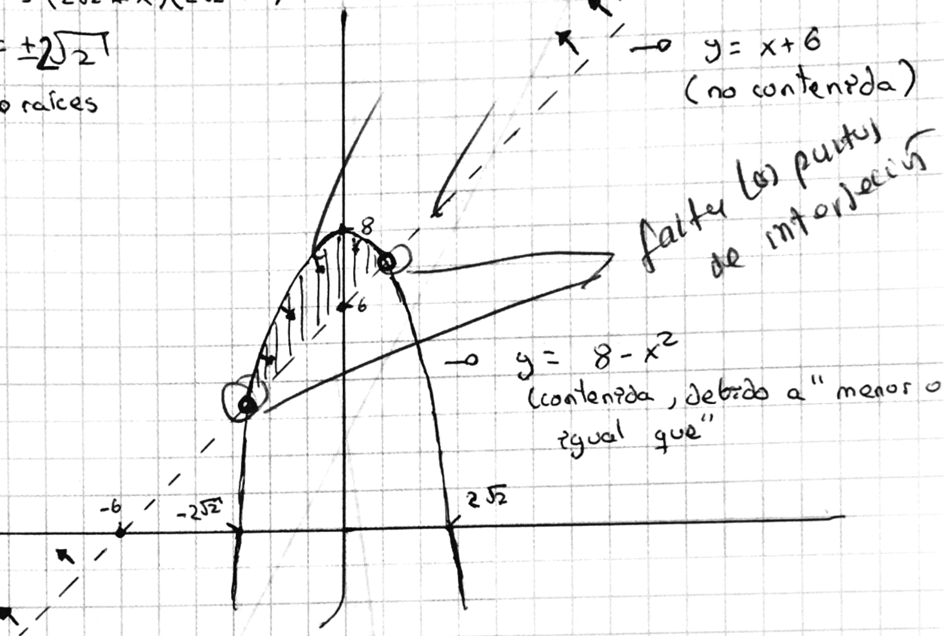
5- Se grafican $y = x+6$ (punteada), por el signo "menor que", e $y = -x^2+8$ sombreada por el signo "menor o igual que":

5

$y = 8 - x^2 = (2\sqrt{2} - x)(2\sqrt{2}+x)$

$\therefore x = \pm 2\sqrt{2}$

↳ raíces



La zona sombreada es la región representada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 8 \\ y > x + 6 \end{cases}$$

//