ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA - SUGERENCIAS DE SOLUCIÓN
SEMESTRE ACADÉMICO 2022-2

---

1. Sean f y g las funciones definidas por

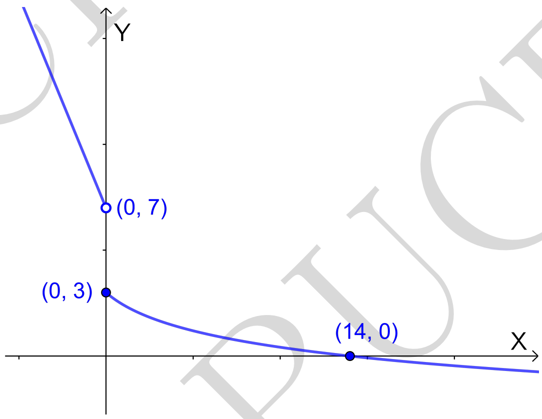
$$f(x) = \begin{cases} -2x+7 & \text{si } x<0, \\ 4+\log_{1/2}(x+2) & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 4^{x-1} - 2\,.$$

   a. Justifique que f es inyectiva.

   b. Halle el dominio y la regla de correspondencia de $f \circ g$.

   Solución.

   a. Graficamos la función f



   Luego, a partir de la gráfica de f concluimos que la función es inyectiva dado que toda recta horizontal toca a la gráfica en a lo más un punto.

   b. El dominio de $f \circ g$ puede obtenerse de la siguiente manera:

$$Dom(f \circ g) = Dom(f_1 \circ g) \cup Dom(f_2 \circ g)$$

   Dado que el dominio de la función g es $\mathbb{R}$, resolvemos las siguientes desigualdades

   - $4^{x-1} - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3/2, \quad$ luego $Dom(f_1 \circ g) =]-\infty; 3/2[$
   - $4^{x-1} - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3/2, \quad$ luego $Dom(f_2 \circ g) = [3/2; +\infty[$

   Luego,

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2 \cdot 4^{x-1} + 11 & \text{si } x < 3/2 \\ -2x+6 & \text{si } x \geq 3/2 \end{cases}$$

2. a. Esboce la gráfica de la región en el plano determinada por las inecuaciones

$$\begin{cases} 2|x| \leq y, \\ x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} < 1. \end{cases}$$

b. Halle los puntos de intersección de las curvas con ecuaciones

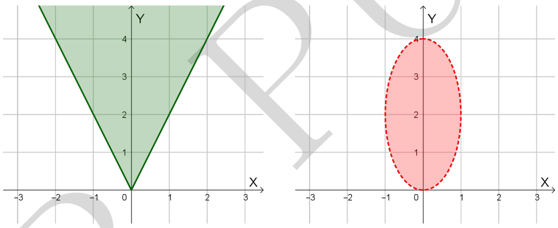
$$\begin{cases} 2|x| = y, \\ x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1. \end{cases}$$

Solución.

a. Las regiones que consiste de los puntos (x, y) que satisfacen las inecuaciones

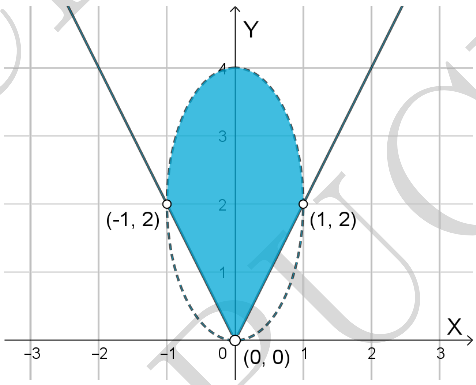
$$2|x| \leq y \quad \text{y} \quad x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} < 1$$

son



$2|x| \leq y$ $\qquad$ $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} < 1$

Por tanto, la región pedida es la intersección de las tres regiones.



b. Los puntos de intersección entre las curvas tienen coordenadas $(-1; 2)$, $(1; 2)$ y $(0; 0)$.

3. Una población de bacterias cultivada en una placa de Petri cuenta inicialmente con 500 individuos y crece exponencialmente de tal manera que se cuadruplica cada 3 minutos.

   a. Determine la regla de correspondencia de la función que representa la población de bacterias, respecto del tiempo, medido en minutos.

   b. Calcule la cantidad de bacterias después de 2 horas.

   c. ¿En cuánto tiempo la población de bacterias será de 4 000 individuos?

Solución.

a. Sean P la población de bacterias y t el tiempo en minutos.
Usaremos el modelo exponencial $P(t) = C(a)^{kt}$.
Del enunciado tenemos

t	P
0	500=500(1)
3	2000=500(4)
6	8000=500(4)^2

De donde obtenemos que $C = 500$, $a = 4$ y $k = \frac{1}{3}$.
Luego, la regla de correspondencia es $P(t) = 500(4)^{t/3}$ con $t \geq 0$.

b. Para $t = 2$ horas $= 120$ minutos al reemplazar en la regla de correspondencia se tiene

$$P(120) = 500(4)^{40} \text{ bacterias}$$

c. Para determinar el tiempo debemos resolver la ecuación $4000 = 500(4)^{t/3}$, así tenemos que el tiempo es $t = \dfrac{9}{2}$ minutos.

4. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } -1 \leq x < a \\ a - \log_a(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

donde a es una constante real positiva con $a \neq 1$.

a. Para $a = 2$, ¿la función f es decreciente? Justifique su respuesta.

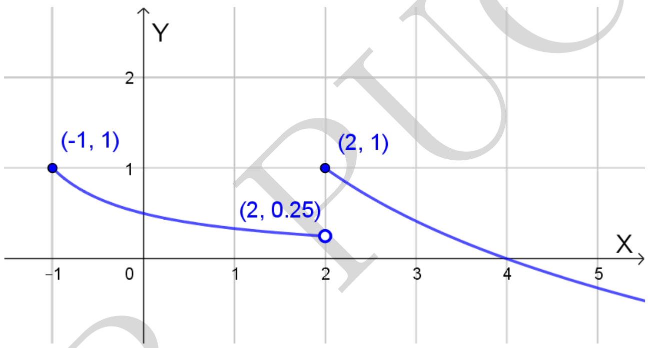
b. Halle todos los valores de a para los cuales la función f es decreciente.

Solución.

a. Para $a = 2$ tenemos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 2 - \log_2(x) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cuya gráfica es



La función no es decreciente porque para $-1 < 2$ se tiene $f(-1) = 1 = f(2)$.

b. Para que f sea una función decreciente se debe cumplir las siguientes condiciones:

$$a > 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{a+2} \geq a - \log_a(a)$$

Resolvemos la inecuación

$$\frac{1}{a+2} \geq a - \log_a(a) \Leftrightarrow 0 \geq \frac{a^2 + a - 3}{a+2}$$

Así tenemos,

$$a \in \left] -\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right] \cup \left] -2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$$

Por tanto, para $a \in \left]1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$, f es una función decreciente.

5. a. Encuentre, si existen, el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x) = 2^{x^2+1}$, $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$.

   b. Justifique la veracidad de la siguiente proposición:
   La función f definida por $f(x) = \log_2(a^x + 1)$, con $0 < a < 1$ es inyectiva.

Solución.

a. Sean g y h las funciones $g(x) = 2^x$ y $h(x) = x^2 + 1$ con $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ respectivamente.
Notamos que g es una función creciente y h es una función decreciente.
Luego $f = g \circ h$ es una función decreciente.
Así, los valores máximo y mínimo se ubican evaluando en $-\sqrt{3}$ y -1.
Por tanto, $f(-\sqrt{3}) = 16$ es su valor máximo y $f(-1) = 4$ es su valor mínimo.

b. Notamos que el dominio de f es $\mathbb{R}$.
Si $m, n \in Dom(f)$ con

$$\begin{aligned} f(m) = f(n) &\Rightarrow \log_2(a^m + 1) = \log_2(a^n + 1) && \text{Por definición de } f \\ &\Rightarrow a^m + 1 = a^n + 1 && \text{Por la inyectividad de } \log_2(x) \\ &\Rightarrow a^m = a^n && \text{Por la inyectividad de } a^x \\ &\Rightarrow m = n \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función inyectiva.

San Miguel, 10 de noviembre de 2022.