FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA-SOLUCIONES PROPUESTAS

SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horario: Turno 1.

---

1. Una función f está definida por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} arcsen(x + |x + 1|)$$

halle el dominio implícito de f y esboce su gráfica. (4 puntos)

Solución.

Para hallar el dominio implícito debemos resolver la desigualdad:

$$-1 \leq x + |x + 1| \leq 1 \ldots (1)$$

Si $x + 1 \geq 0$, tenemos $-1 \leq x + (x + 1) \leq 1$ que es equivalente a $-1 \leq x \leq 0$, luego intersectamos $[-1, +\infty[$ con $[-1,0]$ y obtenemos $[-1,0]$.

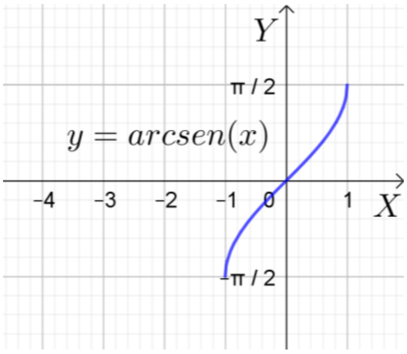
Si $x + 1 < 0$, tenemos $-1 \leq x + (-x - 1) \leq 1$ que es equivalente a $-1 \leq -1 \leq 1$ que es cierto, entonces cualquier x en el intervalo $]-\infty, -1[$ cumple esa desigualdad.

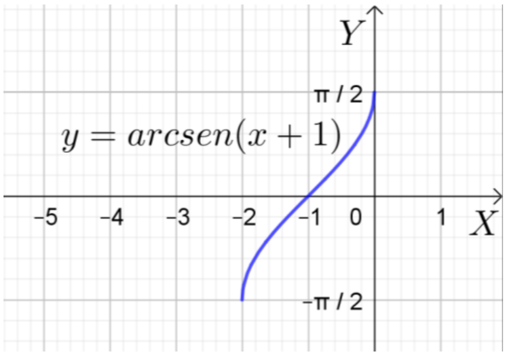
Por lo anterior, concluimos que el dominio implícito es $]-\infty, -1[\cup [-1,0]$.

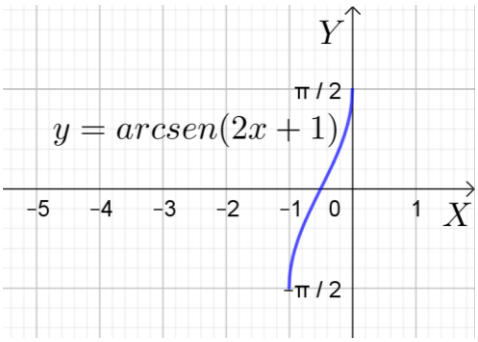
Luego, podemos redefinir la función de la siguiente forma:

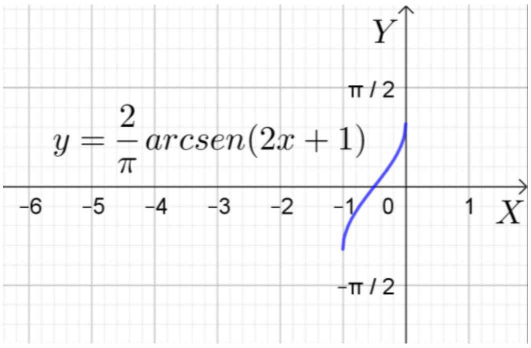
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ \frac{2}{\pi} arcsen(2x + 1), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Usando transformaciones, obtenemos la gráfica de f.

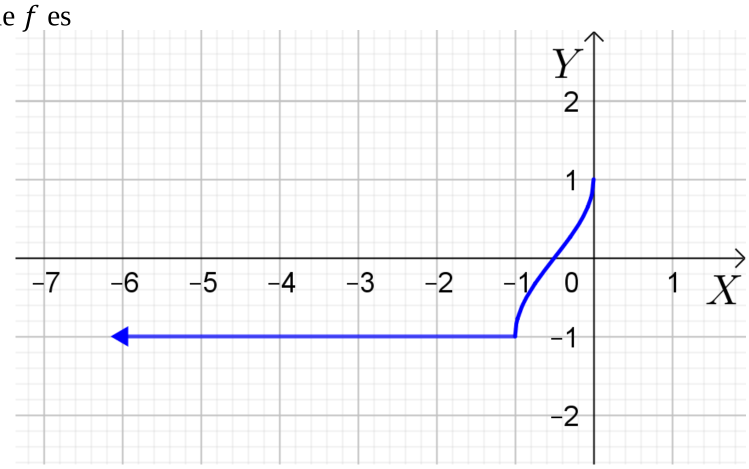








Finalmente, la gráfica de f es



2. Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} sen(x) + 1 & , \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ k\,cos(x) & , \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ es una constante real.

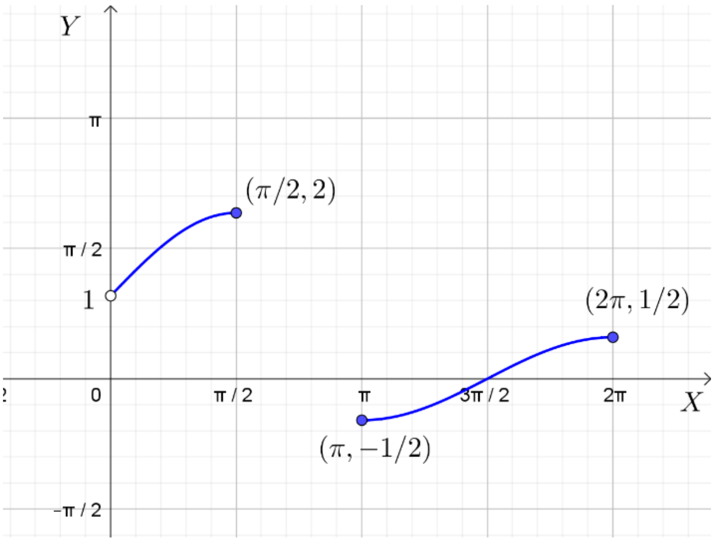
a) Para $k = \frac{1}{2}$, halle la función inversa de f y grafíquela. (4 puntos)

b) Determine el menor valor de k tal que f sea inyectiva. (2 puntos)

Solución.

a) $f(x) = \begin{cases} sen(x) + 1 & , \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{cos(x)}{2} & , \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

Grafiquemos f



De la gráfica se observa que f es infectiva. Luego, existe f^{-1}.

Primer tramo: Si $x \in]0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ y $y = f(x) \in]1\,;2]$ (se obtiene de la gráfica de f) entonces

$$y = sen(x) + 1 \quad \Rightarrow \quad x = arc\ sen\ (y - 1)$$

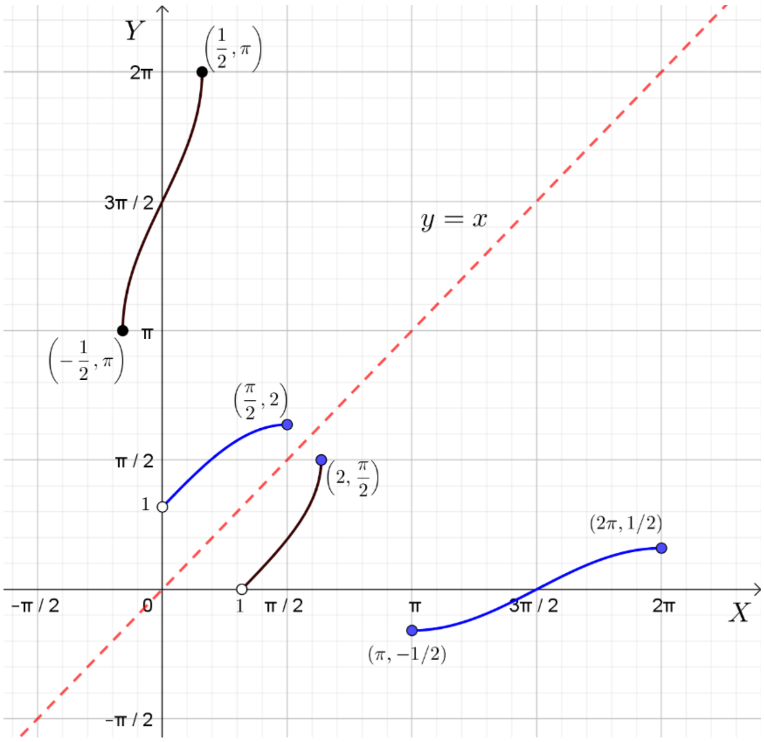
Segundo tramo: Si $x \in [\pi\,;2\pi]$ y $y = f(x) \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ (se obtiene de la gráfica de f) entonces

$$arc\,cos(cos(x - \pi)) = x - \pi \quad \text{y} \quad cos(x - \pi) = -cos(x)$$

$$\Rightarrow x = \pi + arc\cos(-2y)$$

Por tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \pi + arc\cos(-2x) & , \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ arc\ sen\ (x-1) & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



b) El primer tramo de f es inyectivo y tiene rango $]1\,;2]$. El segundo tramo es inyectivo y tiene rango $[-k\,;k]$.
Como $k \neq 0$ entonces la función f es inyectiva si $|k| \leq 1$, donde el menor valor es $k = -1$.

3. Calcule los siguientes límites o explique por qué no están definidos:

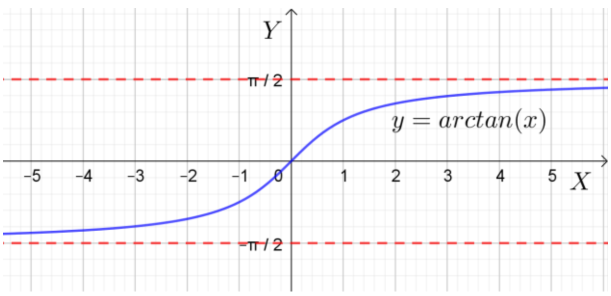
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\pi - \arctan(2 - x))$ (1.5 puntos)

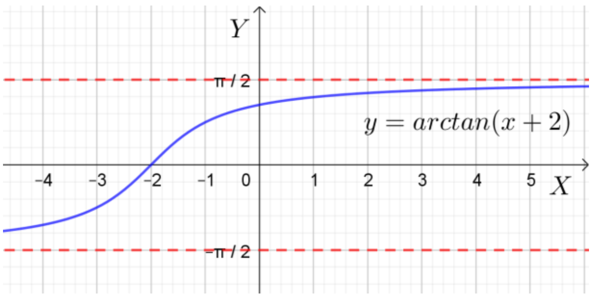
b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left|1 - \log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right|$ (1.5 puntos)

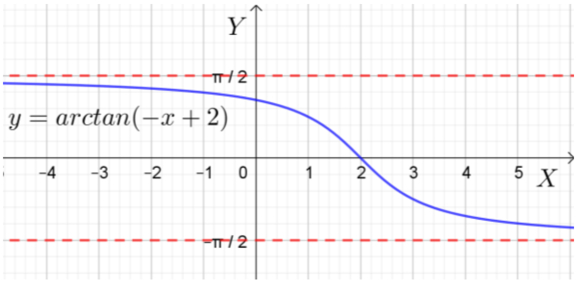
Solución.

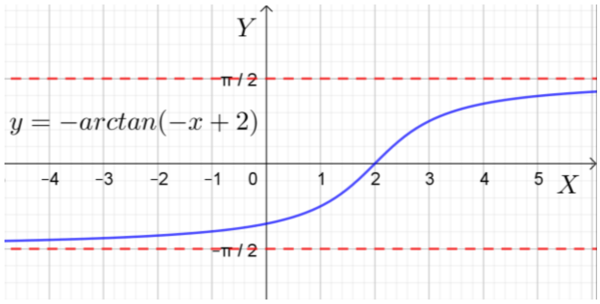
Usando transformaciones de gráfica de funciones obtenemos

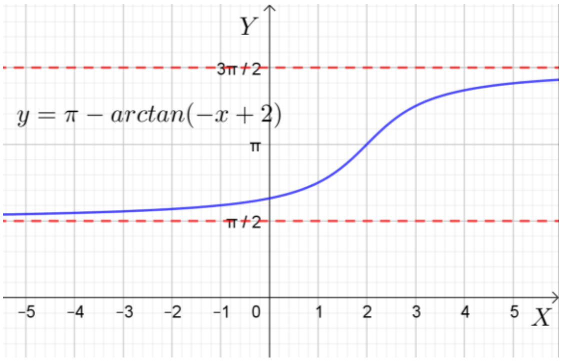
a)





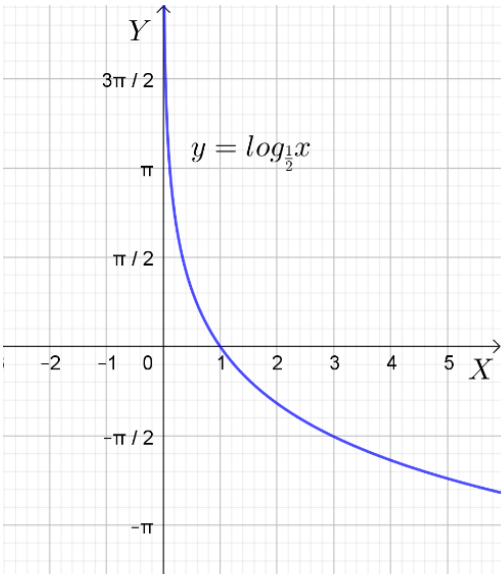


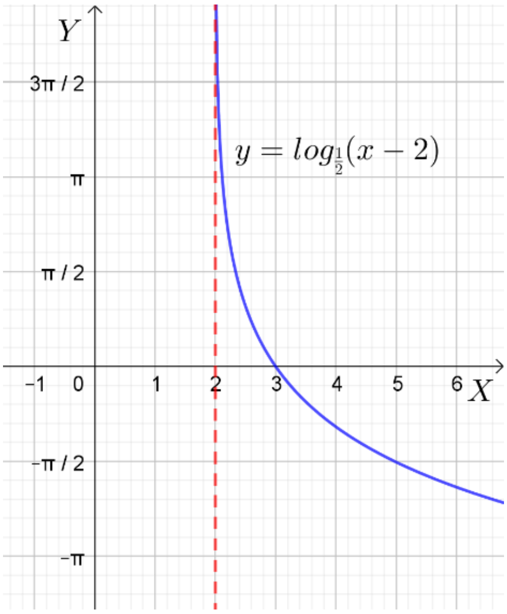


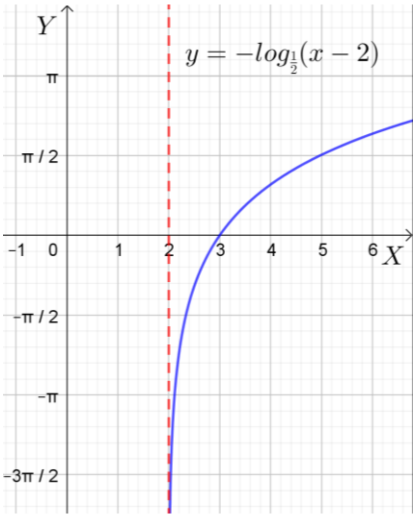


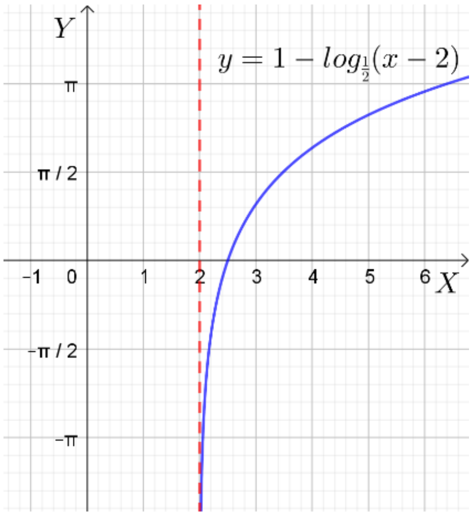
$$\lim_{x \to -\infty} (\pi - \arctan(2 - x)) = \frac{\pi}{2}$$

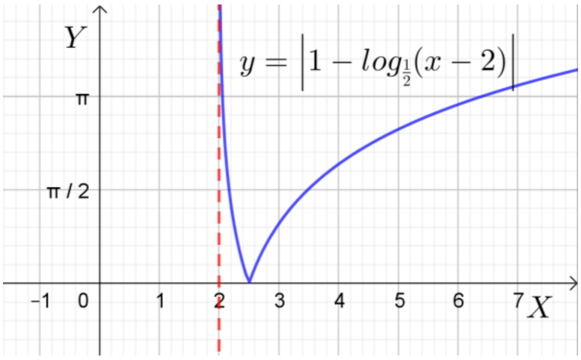
b)











$$\lim_{x\to 2^+} \left|1 - \log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right| = +\infty$$

4. Sean las funciones

$$f(x) = \frac{6}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

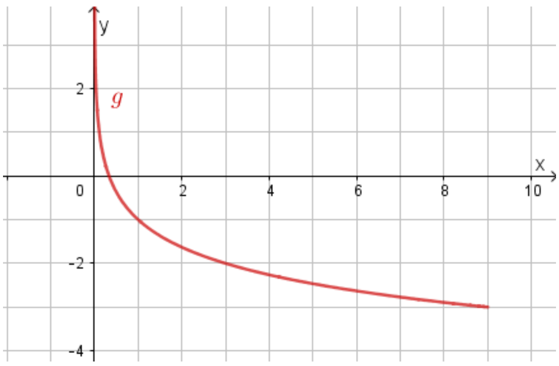
y

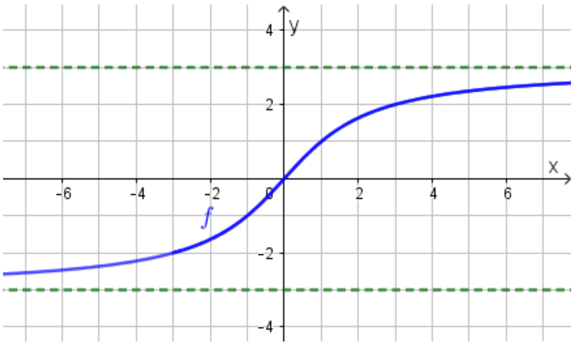
$$g(x) = -1 - \log_3(x),\ \text{con } 0 < x \leq 9.$$

Determine el rango de la función $f \circ g$. (3 puntos)

Solución

De las gráficas de f y g





Decimos que:
Para $0 < x \leq 9$ se tiene que $g(x) \in [-3, +\infty[$
Para $x \in [-3, +\infty[$ se tiene $f(x) \in [-2, 3[$
Por tanto, $Ran(f \circ g) = [-2, 3[$.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Si a es un número real positivo tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{2x} = 0$ entonces $a \leq 2$. (1 punto)

Solución:
Verdadera, por contradicción. Si $a > 2$, entonces $a^2 > 4 > 1$ y tendríamos que $a^{2x} = (a^2)^x$ es una función exponencial de base mayor que 1, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{2x} = +\infty$ (por la gráfica), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, concluimos que a ≤ 2.

b) Si una función f es creciente en $]1, +\infty[$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (1 punto)

Solución:
Falsa, un contraejemplo es

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

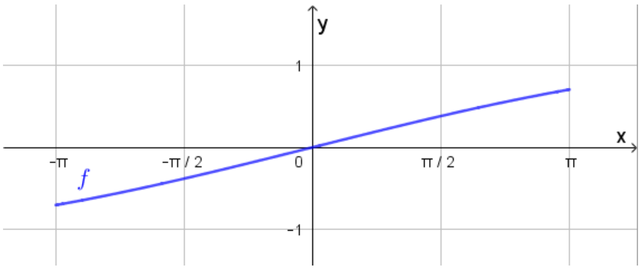
f es creciente en $]1, +\infty[$, y

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

c) Existe $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $sen\left(\frac{x}{4}\right) = 1$. (1 punto)

Solución:

Falsa. La gráfica de $f(x) = sen\left(\frac{x}{4}\right)$



Nos indica que el rango es $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Por lo tanto, no existe algún valor de $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $f(x) = 1$.

d) La función inversa de

$$f(x) = cos(x) \ , \qquad 2\pi \leq x \leq 3\pi$$

es $f^{-1}(x) = 2\pi + arc\ cos(-x)\ , -1 \leq x \leq 1$. (1 punto)

Solución

Falsa.

Si $x \in [2\pi + 0\ , 2\pi + \pi]$ y $y = f(x) \in [-1\ , 1]$ entonces

$$arc\ cos(cos(x - 2\pi)) = x - 2\pi \quad \text{y} \quad cos(x - 2\pi) = cos(x)$$
$$\Rightarrow x = 2\pi + arc\ cos\ (cos\ (x - 2\pi))$$
$$\Rightarrow x = 2\pi + arc\cos(\cos(x))$$
$$\Rightarrow x = 2\pi + arc\cos(y)$$
$$f^{-1}(x) = 2\pi + arc\ cos(x), -1 \leq x \leq 1.$$

San Miguel, 23 de junio de 2022

Coordinadora PC4: Iris Flores.