FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA - SOLUCIONES PROPUESTAS

SEMESTRE ACADÉMICO 2022 -1

Horarios: Turno 1 (3:00 p.m. - 5:00 p.m.) Duración: 110 minutos

---

1. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación en $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^3-10}{x^2-x} \geq \frac{x^3+10}{x^2+x}.$$

(4 puntos)

Solución:
Tomando en cuenta que x debe ser diferente de $0, 1, -1$. Pasando todo a un solo lado y factorizando:

$$\frac{x^3-10}{x^2-x} \geq \frac{x^3+10}{x^2+x} \iff \frac{x^3-10}{x^2-x} - \frac{x^3+10}{x^2+x} \geq 0 \iff \frac{(x^3-10)(x+1)-(x^3+10)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0$$

$$\iff \frac{2x^3-20x}{x(x+1)(x-1)} \geq 0 \iff \frac{2x\left(x+\sqrt{10}\right)\left(x-\sqrt{10}\right)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Ordenando los puntos de referencia y analizando los signos en cada intervalo se obtiene

$$C.S. = \left]-\infty, -\sqrt{10}\right] \cup]-1,0[\cup]0,1[\cup \left[\sqrt{10}, +\infty\right[.$$

2. Halle el conjunto solución de la siguiente inecuación en $\mathbb{R}$:

$$\frac{|x-1|-x^2}{x-1} > -1.$$

(4 puntos)

Solución
Pasando todo a un solo lado:

$$\frac{|x-1|-x^2}{x-1} > -1 \iff \frac{|x-1|-x^2}{x-1} + 1 > 0 \iff \frac{|x-1|-x^2+x-1}{x-1} > 0$$

Tenemos los siguientes casos o zonas:

i) $x \geq 1$: En este caso, como $|x-1| = x-1$ se debe resolver $\dfrac{-x^2+2x-2}{x-1} > 0 \wedge x \geq 1$

Esto es $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1} < 0 \wedge x \geq 1.$ Sabemos que $x^2-2x+2 > 0.$ $CS_i = \emptyset.$

ii) $x < 1$: En este caso, como $|x-1| = 1-x$ se debe resolver $\dfrac{-x^2}{x-1} > 0 \wedge x < 1$

Esto es $\dfrac{x^2}{x-1} < 0 \wedge x < 1.$ $CS_{ii} =]-\infty, 1[- \{0\}.$

Finalmente

$$C.S. =]-\infty, 1[- \{0\}.$$

3. Sea b una constante real. Resuelva la inecuación en $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x-2b} > x-2.$$

en los siguientes casos

a) $b = \frac{1}{2}$. (3.5 puntos)

Solución:
Se pide resolver

$$\sqrt{x-1} > x-2$$

En primer lugar la restricción de la raíz cuadrada es $x \geq 1$.
Se tienen los siguientes casos:

i) Si $1 \leq x < 2$: Todos los valores cumplen. $CS_i = [1,2[$.

ii) Si $x \geq 2$: Se puede elevar al cuadrado y resolver $x-1 > (x-2)^2 \wedge x \geq 2$.
$x^2 - 5x + 5 < 0 \wedge x \geq 2 \iff x \in \left] \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right[\cap [2, +\infty[$. $CS_{ii} = \left[2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$

Finalmente

$$C.S. = \left[1, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$$

b) $b > 2$. (2.5 puntos)

Solución:
En primer lugar la restricción de la raíz cuadrada es $x \geq 2b$.
Como $b > 2$, se cumple $x \geq 2b > 4 > 2$. Para estos valores de x puede elevarse al cuadrado.

$$\sqrt{x-2b} > x-2 \iff x - 2b > (x-2)^2 \wedge x \geq 2b$$

$$\iff x^2 - 5x + (4+2b) < 0 \wedge x \geq 2b$$

El coeficiente principal de la cuadrática es $1 > 0$ y como $b > 2$, el discriminante $9 - 8b < 0$, entonces $x^2 - 5x + (4+2b) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$C.S. = \emptyset.$$

4. Justifique la veracidad o falsedad de la proposición:

Existe un triángulo isósceles de área 25 y perímetro 30 tal que su lado desigual mida el doble de su altura relativa a dicho lado desigual.

(2 puntos)

Solución:
La proposición es Falsa.
Si existiese dicho triángulo, el triángulo es isósceles y si el lado desigual mide $2c$ y los otros l cada uno, como el perímetro es $2l + 2c = 30$, tendríamos que $l + c = 15$.
Como el lado desigual $2c$ mide el doble de la altura, entonces dicha altura es c y el área del triángulo es c^2, para que el área sea 25 se necesitaría que $c = 5$.
Tomando el triángulo rectángulo que se forma al trazar la altura, por Pitágoras si $c = 5$ entonces

$l = 5\sqrt{2}$ pero no se cumpliría $l + c = 15$ (necesario para perímetro 30).
Es decir no pueden cumplirse ambas condiciones a la vez.

Observación:
Dependiendo del orden en que trabaje con los datos y la variable con que trabaje llegará a diferentes contradicciones (longitud negativa, triángulo que no cumple perímetro, triángulo que no cumple el área).

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) Existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $2 < x^2 < 3$. (1 punto)
   Solución:
   Verdadero. Existe $x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que $2 < x^2 = \frac{9}{4} < 3$.

   b) Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $x > y$ entonces $5x^{2022} + \dfrac{1}{5x^2} > 5y^2 + \dfrac{1}{5y^{2022}}$. (1 punto)
   Solución:
   Falso. Tomando $x = 1$, $y = -1$, se tiene $1 > -1$ pero $5 + \dfrac{1}{5} \leq 5 + \dfrac{1}{5}$.

   c) Una condición necesaria para que $1 < y$ o $x > 0$ es que $xy < xy^2$. (1 punto)
   Solución:
   Se pide analizar $1 < y \vee x > 0 \Rightarrow xy < xy^2$.
   Falso. Sean $y = 2$, $x = 0$, se cumple $1 < y$ pero $0 \not< 0$.

   d) Para todo $x \neq -2$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $xy + 3 \leq x - 2y$. (1 punto)
   Solución:
   Verdadero. Dado $x \neq -2$, existe $y = \frac{x-3}{x+2}$ tal que $x\left(\frac{x-3}{x+2}\right) + 3 = \frac{x^2+6}{x+2} = x - 2\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \leq x - 2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$.

San Miguel, 21 de abril de 2022.