PUCP

Estudios Generales Ciencias

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Segunda Práctica Calificada

Semestre Académico 2024 -1

Horario: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión del punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

---

1. Considere el punto $A(2;2)$ y un punto B que se desplaza sobre la circunferencia $\mathscr{C}$ cuya ecuación es $x^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=9$. Se sabe que P está en la prolongación del segmento $\overline{AB}$ (con B entre A y P) de tal manera que $\dfrac{d(A,B)}{d(B,P)}=\dfrac{3}{2}$.

   a) Halle una ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P. (3 puntos)

   b) Grafique la ecuación obtenida en la parte a). (2 puntos)

2. Considere la parábola $\mathscr{P}_1:(y-3)^2=4(x-16)$.

   a) Trace la gráfica de $\mathscr{P}_1$, mostrando las coordenadas de su vértice, foco y extremos de su lado recto. (2 puntos)

   b) Halle la ecuación de la parábola $\mathscr{P}_2$, que cumple las condiciones siguientes: (3 puntos)
   - La directriz de $\mathscr{P}_2$ es el eje focal $\mathscr{P}_1$.
   - La longitud del lado recto de $\mathscr{P}_2$ mide 4 unidades y su vértice tiene ordenada menor que 3.
   - El foco de $\mathscr{P}_2$ está en $\mathscr{L}:5y=x-2$.

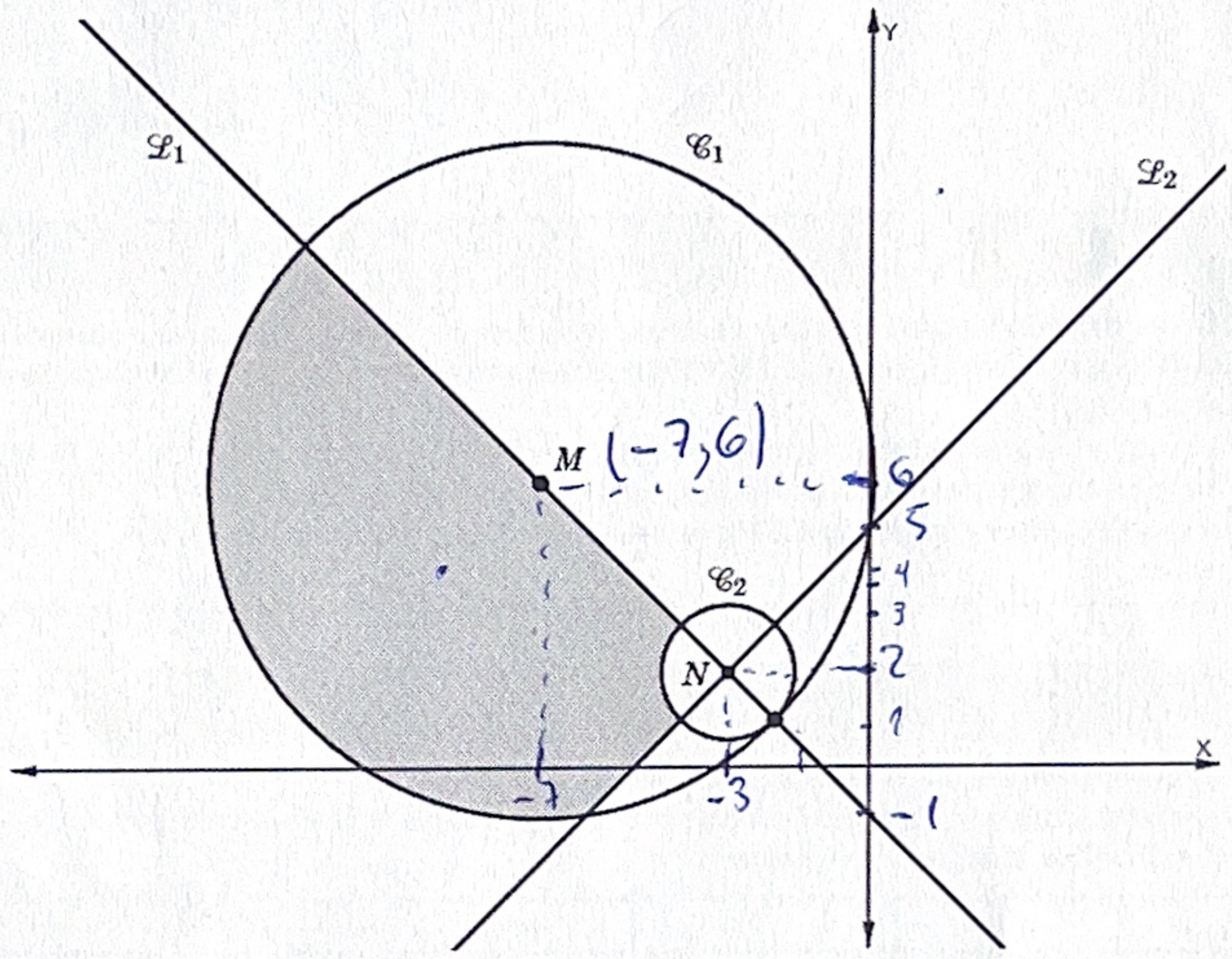
3. Sea $\mathscr{P}$ una parábola con vértice en el punto $V(2;-4)$ y directriz la recta $\mathscr{L}_D:x+y-6=0$.

   a) Determine las coordenadas del foco de $\mathscr{P}$. (2 puntos)

   b) Halle la ecuación de $\mathscr{P}$. (2 puntos)

   c) ¿Es cierto que el punto $\left(-\frac{25}{16};-\frac{25}{16}\right)$ pertenece a $\mathscr{P}$? Justifique su respuesta. (1 punto)

4. En la siguiente figura se muestran las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2 : x^2+6x+y^2-4y+11=0$, que son tangentes interiormente, y cuyos centros son los puntos M y N, respectivamente.



Se sabe lo siguiente:

N(-3;2)

- Las coordenadas del centro de $\mathscr{C}_1$ son $M(-7;6)$.
- Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. son perpendiculares y pasan por el centro de $\mathscr{C}_2$.

a) Halle las ecuaciones de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. (2 puntos)

b) Halle la ecuación de $\mathscr{C}_1$. (1 puntos)

c) Determine el sistema de inecuaciones que describe la región sombreada. (2 puntos)

Coordinador de prácticas: Elton Barrantes

San Miguel, 22 de abril de 2024.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

PUCP

Práctica

Año: 2024 Número: 1028

Código de alumno

Gastelo Marchán Juan Antonio

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica Nº: 2

Horario de práctica: P-102

Fecha: 22/04/24

Nombre del profesor: E. Barrantes

Nota

20

R.

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: RMDD
(iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$9x^2+24x+9y^2=9\cdot25-16$

$9\left(x^2+\frac{24}{4}x+y^2\right)=9\cdot25-16$

$x^2+\frac{24}{9}x+y^2=\frac{9\cdot25-16}{9}$

$x^2+\frac{8}{3}x+\frac{8}{6}+y^2=\frac{9\cdot25-16}{9}+\frac{8}{6}$

$r=4{,}955$

1. $A(2;2)$

a) $B(x_B;y_B)\in C: x^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=9$

3.0

$x_B^2+\left(y_B-\frac{4}{5}\right)^2=9 \ldots (3)$

$P(x;y)$, $2k$, $B(x_B;y_B)$, $3k$, $A(2;2)$

$x_B=\frac{3(x)+2(2)}{5}=\frac{3x+4}{5} \ldots (1)$

$y_B=\frac{3(y)+2(2)}{5}=\frac{3y+4}{5} \ldots (2)$

Reemplazando (1) y (2) en (3)

$\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2+\left(\frac{3y+4}{5}-\frac{4}{5}\right)^2=9$

$\frac{(3x+4)^2}{25}+\frac{(3y)^2}{25}=9$

$x_B=\frac{3x+4}{5}$

$y_B-\frac{4}{5}=\frac{3y}{5}+\cancel{\frac{4}{5}}$

$9x^2+24x+16+9y^2=9\cdot25$

$9\left(x^2+\frac{24}{9}x+\frac{16}{9}+y^2\right)=9\cdot25$

$x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2=25$

$x^2+\frac{8}{3}x+\frac{8}{6}+y^2=25-\frac{16}{9}+\frac{8}{6}$

$\left(x+\frac{8}{6}\right)^2+y^2=\frac{9\cdot25-16}{9}+\frac{8}{6}$

25

$\left(x+\frac{8}{6}\right)^2+y^2=\frac{221}{9} \rightarrow \left(x+\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{221}{9}$

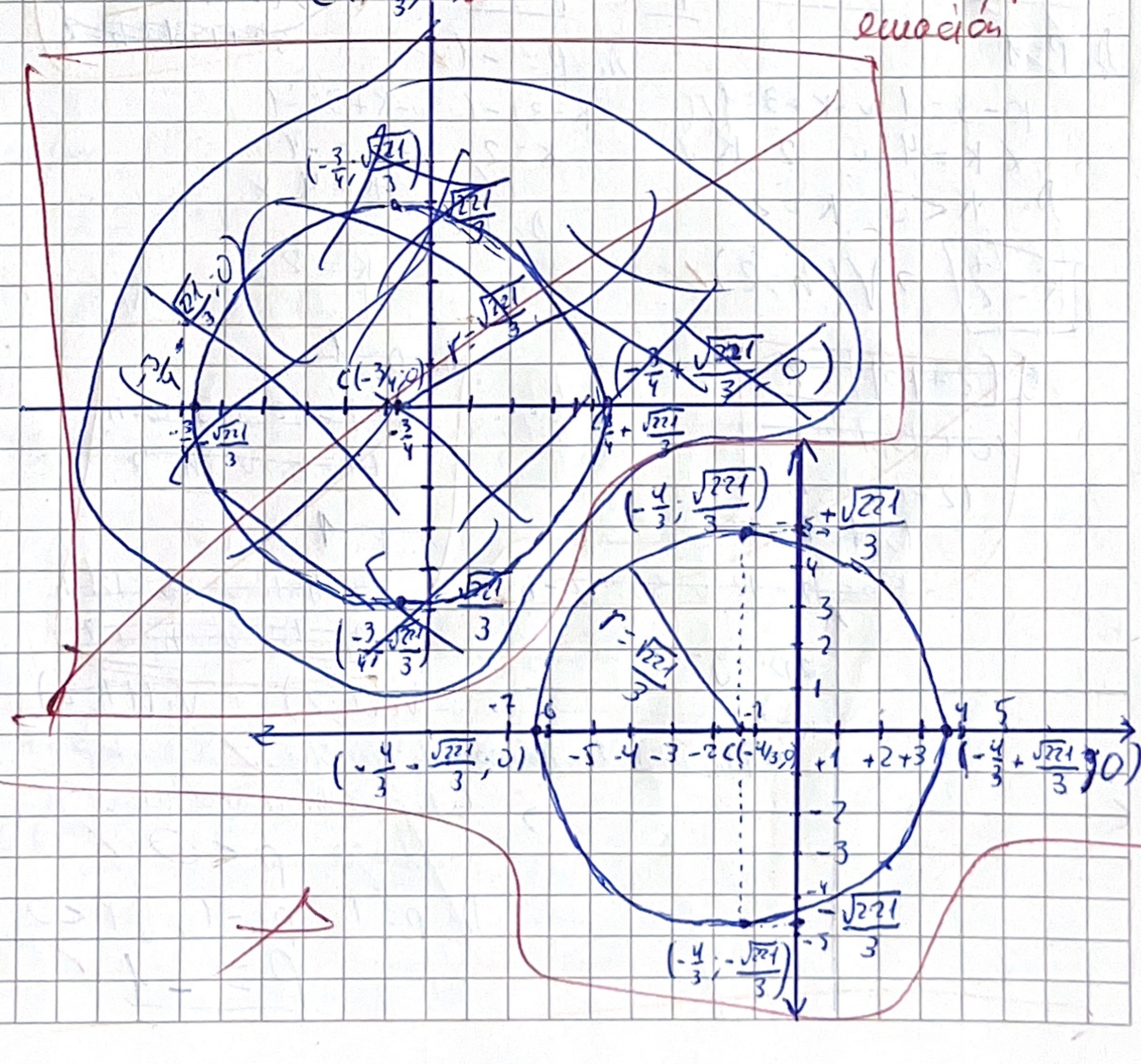
$C\left(-\frac{8}{6};0\right)$; $r=\frac{\sqrt{221}}{3}$ X

$C\left(-\frac{4}{3};0\right)$

error al simplificar ecuación

b)

1.5



Presente aquí su trabajo

2: $P_1: (y-3)^2 = 4(x-16) \rightarrow$ parábola horizontal $\quad (y-k)^2 = 4p(x-h)$

a) $V(16;3) \quad 4 = 4p$

$h=16;\ k=3 \quad p = 1 > 0$, se abre a la derecha

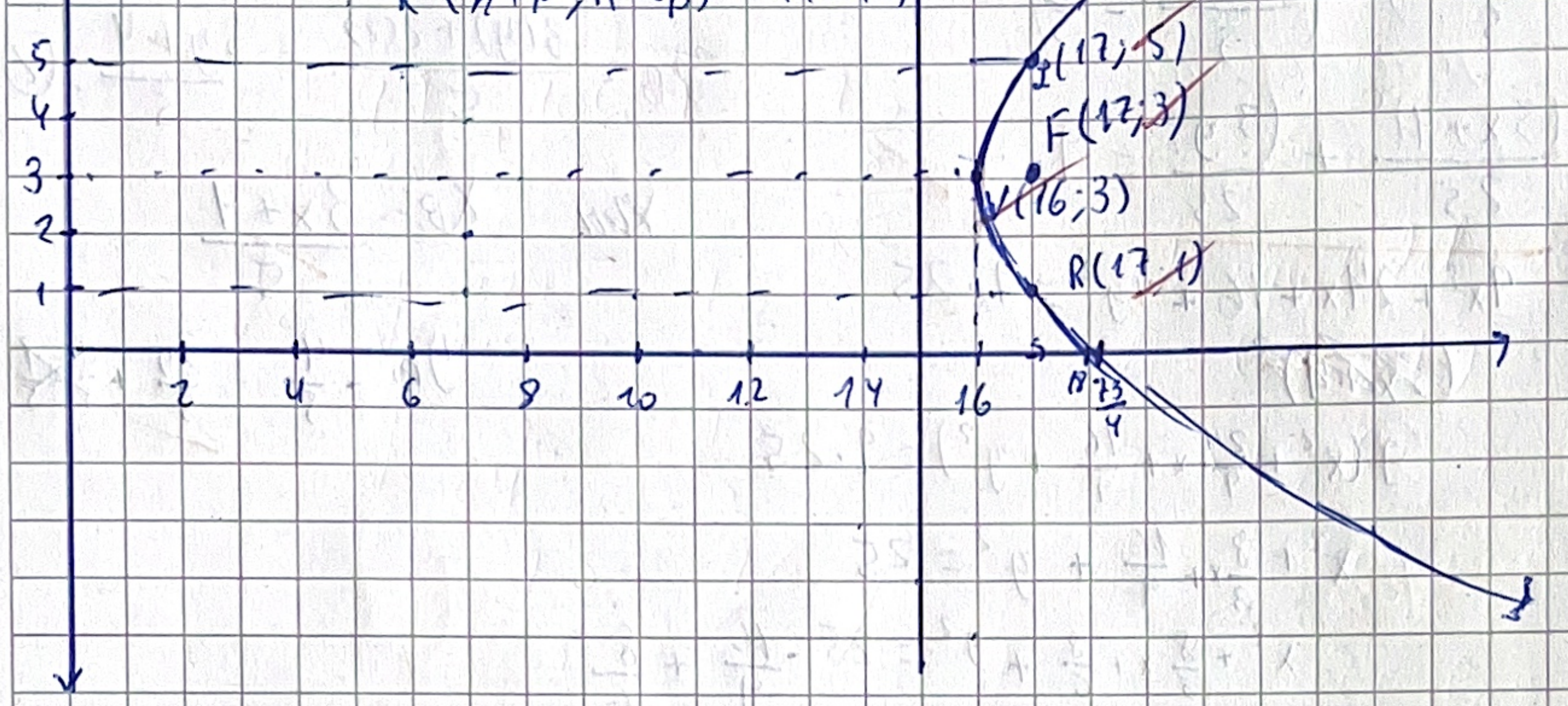
20

$\ell_D: x = h - p = x = 15$

$F(h+p;k) = F(17;3)$

$L(h+p; k+2p) = L(17;5)$

$R(h+p; k-2p) = R(17;1)$



b) Eje focal de P_1: $y = 3$.

Directriz P_2: $y = 3 \rightarrow P: (x-h)^2 = 4p(y-k)^2$

$V(h;k) \quad ; (k<3)$

$|k - |p|| = 3$ Longitud lado recto $= 4|p| = 4$

$k - 3 = |p| \qquad |p| = 1$

$k - 3 = p \quad \vee \ -k + 3 = p \qquad p = 1 \vee p = -1$

~~$F(h; k+|p|) \in 5y = x - 2$~~

~~$5(k+|p|) = h - 2$~~

Si $p = 1$ $\qquad$ Si $p = -1$

$k - 3 = 1 \ \vee \ -k + 3 = 1 \qquad k - 3 = -1 \ \vee \ -k + 3 = -1$

$k = 4 \ \vee \ 2 = k \qquad k = 2 \ \vee \ -k = -4$

$k = 4$ X

Si $k<3$; $k = 2 \qquad$ Si $k<3$;

$\boxed{k=2} \rightarrow V(h;2) \qquad k = 2$

~~$5(2+|p|) = h - 2$~~

~~$10 + 5|p| = h - 2$~~

~~$12 + 5|p| = h$~~

~~$5|p| = h - 12$~~

~~$5p = h - 12 \ \vee \ 5p = 12 - h$~~

~~Si $p = 1$~~

~~$5 = h - 12 \ \vee \ 5 = 12 - h$~~

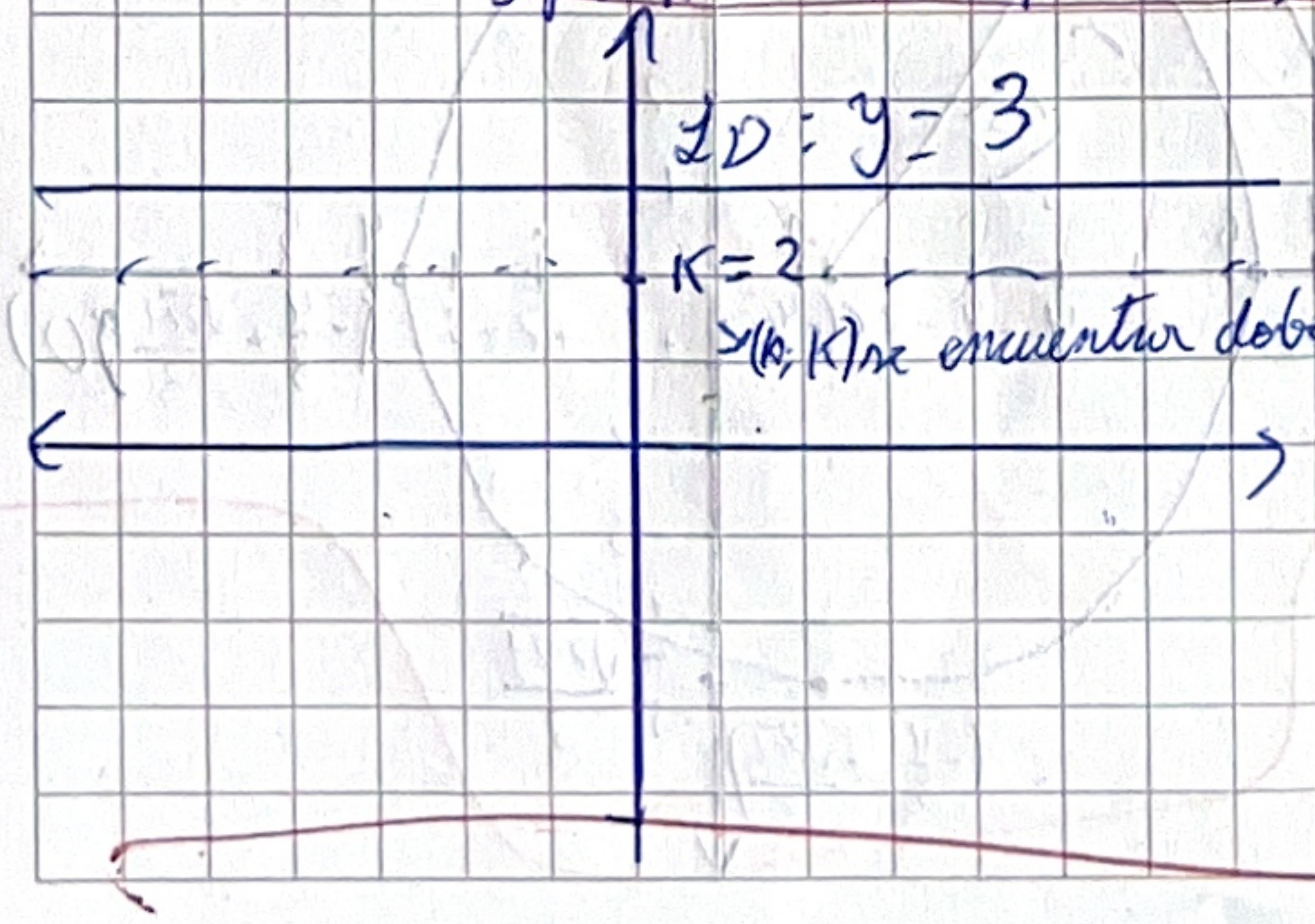
~~$17 = h_1 \ \vee \ h_1 = 7$~~

~~Si $p = -1$~~

~~$-5 = h - 12 \ \vee \ -5 = 12 - h$~~

~~$h_1 = 7 \ \vee \ h_2 = 17$~~

$V_1(7;2) \qquad V_2(17;2)$



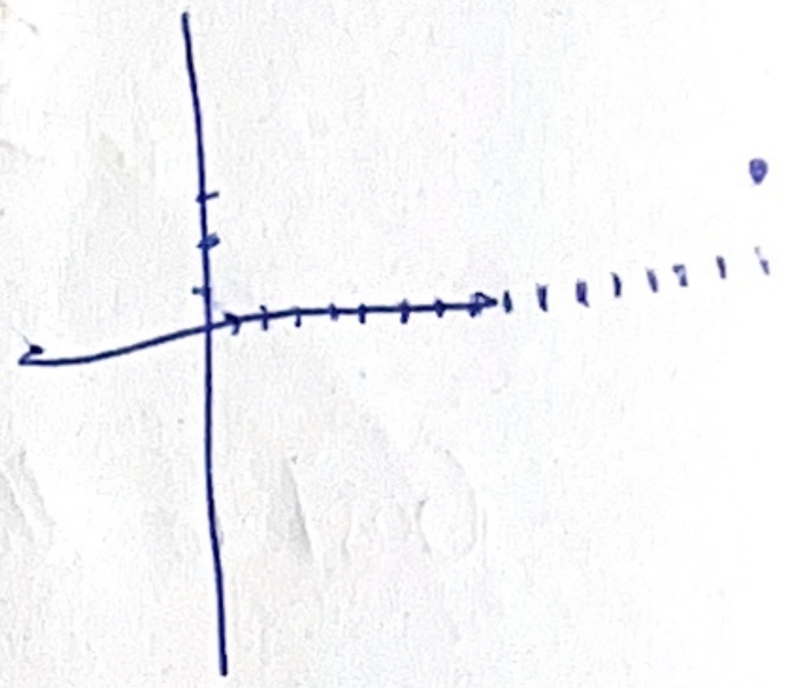
$V(h,k)$ se encuentra debajo de la directriz

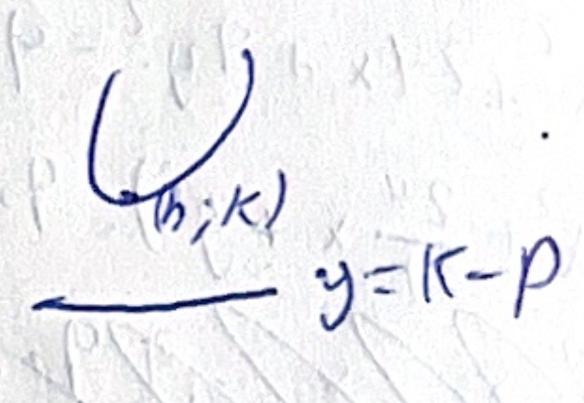
↳ la parábola se abre hacia abajo: $p < 0$

Si $p = 1$ o $p = -1$, y $p < 0$

$\underline{p = -1}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)





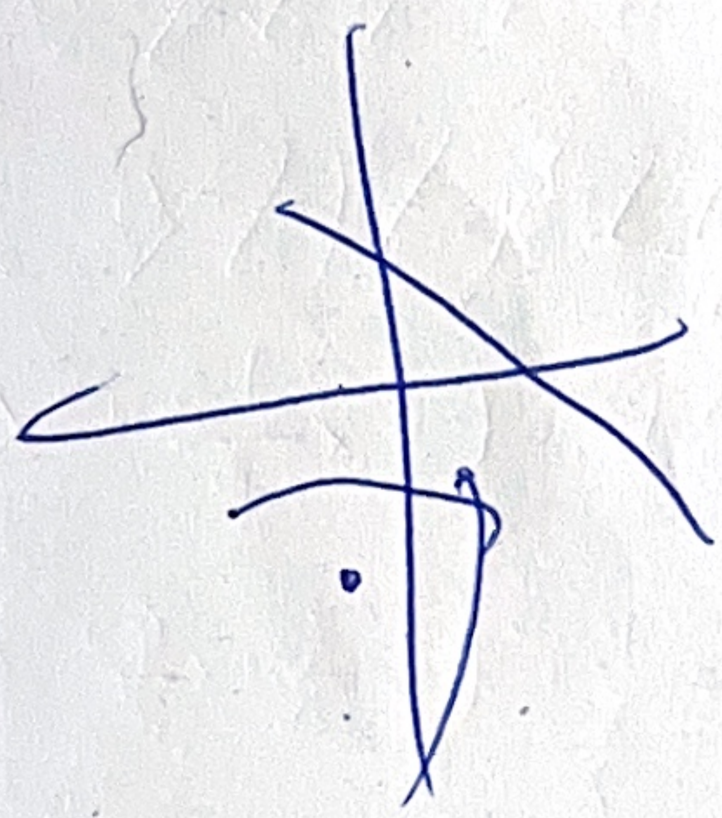
$|3| =$

$|x| = 3$

$x = 3$

$x = -3$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$K=2$

$p=-1$

En una parabola de directriz horizontal $(y=3)$

Si $V(h;K)$ el foco es $F(h;K+p)$, y la directriz $y=K-p$

~~$y=K+p=3$~~

~~$d(P;F)=d(P;L_D)$~~

$K+p=2-1$

$K+p=1$

$F(h;1) \in 5y=x-2$

$5=h-2$

$h=7$

$F(7;1)$

$P: (x-h)^2 = 4p(y-K)$

$P: (x-7)^2 = -4(y-2)$

2C

3. P es parábola

a) $V(2;-4)$

$L_D: y=-x+6$

$m_{L_D}=-1$

$L_D: x+y-6=0$

Eje focal $= L_l \rightarrow L_l \perp L_D \wedge V \in L_l$

$m_l \cdot m_{L_D} = -1$

$m_l \cdot (-1) = -1$

$m_l = 1$

$m_l = \dfrac{y+4}{x-2} = 1$

$L_l: y+4 = x-2$

$L_l: y = x-6$

$D(x_D;y_D) \in L_D \cap L_l$

$\begin{cases} y=-x+6 \\ y=x-6 \end{cases}$

$-x+6 = x-6$

$12 = 2x$

$x=6$

$y=6-6$

$y=0$

$D(6;0)$

F es foco: $F(x_F;y_F)$

$V = \frac{1}{2}(F+D)$

$V(2;-4) = \left(\dfrac{x_F+6}{2}; \dfrac{y_F+0}{2}\right)$

$4 = x_F+6 \qquad -8 = y_F$

$x_F = -2$

$F(-2;-8)$

2C

b) $P: d(P;F) = d(P;L_D)$; $P(x;y)$ es punto de la parábola

$P: \sqrt{(x+2)^2+(y+8)^2} = \dfrac{|x+y-6|}{\sqrt{2}}$

~~c) Si el punto $A\left(-\frac{25}{16}; -\frac{25}{16}\right)$ pertenece a la parábola~~

~~$d(A;F) = d(A;L_D)$~~

~~$\sqrt{\left(-\frac{25}{16}+2\right)^2+\left(-\frac{25}{16}+8\right)^2} = \dfrac{\left|-\frac{25}{16}-\frac{25}{16}-6\right|}{\sqrt{2}}$~~

~~$\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{7}{16}\right)^2+\left(\frac{103}{16}\right)^2} = \left|-\frac{73}{8}\right|$~~

X

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) Si el punto $A\left(-\frac{25}{16}; -\frac{25}{16}\right) \in P$:

10

$P: \sqrt{\left(-\frac{25}{16}+2\right)^2 + \left(-\frac{25}{16}+8\right)^2} = \frac{\left|-\frac{25}{16} - \frac{25}{16} - 6\right|}{\sqrt{2}}$

$d(A;F) = \sqrt{\left(\frac{7}{16}\right)^2 + \left(\frac{103}{16}\right)^2} = \frac{\left|-\frac{73}{8}\right|}{\sqrt{2}} = d(A;L_D)$

$\sqrt{\frac{49}{256} + \frac{10609}{256}} = \frac{\frac{73}{8}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5329}{128}} = \frac{73}{8}$

$\sqrt{\frac{5329}{64}} = \frac{73}{8}$

$\frac{73}{8} = \frac{73}{8}$ ✓

El punto equidista tanto del Foco $(-2;-8)$ y de $L_D: x+y-6=0$, por lo tanto, cumple la ecuación de la parábola P, y pertenece a la parábola P.

4: a) $C_2: x^2+6x+y^2-4y+11=0$

2.0

$C_2: x^2+6x+3^2+y^2-4y+2^2 = -11+3^2+2^2$

$(x+3)^2+(y-2)^2 = 2$ ✓

$N(-3;2)$; $r^2 = 2$

$r = \sqrt{2}$

$M \in L_1$

$N \in L_1$

$m_1 = \frac{y-6}{x+7} = \frac{2-6}{-3+7} =$

$m_1: \frac{y-6}{x+7} = \frac{-4}{4} = -1 = m_1$

$L_1: y-6 = -x-7$

$L_1: x+y+1=0$

$L_2 \perp L_1$; $N \in L_2$

$m_2 \cdot m_1 = -1$

$m_2 \cdot (-1) = -1$

$m_2 = 1$

$m_2: \frac{y-2}{x+3} = 1$

$L_2: y-2 = x+3$

$L_2: x-y+5=0$

4

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

b) $C_2: x^2+6x+y^2-4y+11=0$

1.0

$x^2+6x+3^2+y^2-4y+2^2=-11+9+4$

$C_2: (x+3)^2+(y-2)^2=2$

$N(-3;2)$; $r_2=\sqrt{2}$

Si C_1 y C_2 son circunferencias tangentes interiores:

$d(M;N)+r_{c2}=r_{c1}$

$\sqrt{(-7+3)^2+(6-2)^2}=r_{c1}-\sqrt{2}$

$\sqrt{16+16}=r_{c1}-\sqrt{2}$

$\sqrt{32}=r_{c1}-\sqrt{2}$

$\sqrt{2\cdot16}+\sqrt{2}=r_{c1}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}+\sqrt{2}=r_{c1}$

$4\sqrt{2}+\sqrt{2}=r_{c1}$

$5\sqrt{2}=r_{c1}$

$25\cdot2=(r_{c1})^2$

$50=(r_{c1})^2$

$C_1: (x+7)^2+(y-6)^2=50$

$0<8$

2.0

c) · Se toma el interior y la frontera de C_1

$C_1: d(P;M)\leq r_{c1}$

$C_1: (x+7)^2+(y-6)^2\leq50$

· Se toma el exterior y la frontera de C_2

$C_2: d(P;N)\geq r_{c2}$

$C_2: (x+3)^2+(y-2)^2\geq2$

Punto de prueba para L_2: $M(-7;6)$ (debe cumplir)

$L_2: -7-6+5\ \square\ 0$

$-8\leq0$

$L_2: x-y+5\leq0$

Punto de prueba para L_1: $(0;0)$ (NO DEBE CUMPLIR)

L_1 $0+0+1\ \square\ 0$

$1\leq0$

$L_1: x+y+1\leq0$

$$\begin{cases}(x+7)^2+(y-6)^2\leq50\\(x+3)^2+(y-2)^2\geq2\\x-y+5\leq0\\x+y+1\leq0\end{cases}$$