

Año	2	0	2	3	Número	3	4	4	3
Código de alumno									

Práctica

Típsio Ríos Hantr Leandro

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AM 6A

Práctica Nº: PC 04

Horario de práctica: I 101

Fecha: 20 / 11 / 23

Nombre del profesor: O. Cárdenas

Nota

20

¡Muy bien!!

Alejandra R.

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: A.R.
(iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
 - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
 - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
 - evitar borrones, manchas o roturas;
 - no usar corrector líquido;
 - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2023 -2

Horario: Todos

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comuníquese a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida fx-991SPX).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. Sea ABC un triángulo sobre el cual se sabe lo siguiente:

- Los puntos A y B pertenecen a la recta $\mathcal{L}_1 : P = (13; -13; 24) + t(3; -4; 5), t \in \mathbb{R}$.
- Los puntos A y C pertenecen a la recta $\mathcal{L}_2 : P = (-9; -7; 4) + r(1; 1; 0), r \in \mathbb{R}$.
- El punto medio de \overline{BC} es $M(0; -\frac{3}{2}; \frac{13}{2})$

a) Halle las coordenadas de los vértices del triángulo ABC . $(4; -1; 9) (-4; -2; 4)$ (3 pt)

b) Halle la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC . $(1; 3; 4) A$ (1 pt)

2. a) Halle la matriz X que satisface la ecuación siguiente :

$$(2A - 3B^t)^t + X = 5B \cdot C,$$

siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. (3 pt)

b) Si se sabe que el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ es 10, calcule

$$\begin{vmatrix} 2a & g & 3a+d \\ 2b & h & 3b+e \\ 2c & i & 3c+f \end{vmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 19 & 0 & -40 \\ 48 & 21 & 15 \end{pmatrix}$$

(2 pt)

3. Considere las esferas siguientes:

$$\mathcal{E}_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = a^2 \quad y \quad \mathcal{E}_2 : x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 5 = 0,$$

donde a es una constante real positiva.

- a) Halle las coordenadas del centro y radio de la esfera \mathcal{E}_2 . $(-1; 2; -1)$ $r=1$ (1 pt)
 b) ¿Para qué valor de a la esfera \mathcal{E}_1 es tangente interior a la esfera \mathcal{E}_2 ? $(a=7)$ (1 pt)
 c) Para $a=3$, halle las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia que resulta de interseccar las esferas \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 . $r_C = \frac{\sqrt{35}}{6}$ $C\left(-\frac{8}{9}, \frac{35}{18}, -\frac{10}{9}\right)$ (3 pt)

4. Analice si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

- a) Sean A y B matrices cuadradas, no nulas y de orden 2×2 . Si se cumple que $\det(A) = 0$ y $\det(AB) = 0$, entonces $\det(B) = 0$. F (2 pt)
- b) Sean A y B son matrices simétricas de orden $n \times n$ e I la matriz identidad de orden $n \times n$. Si se cumple que

$$A \cdot A^t = I, \quad B \cdot B^t = I \quad y \quad AB = BA, \quad \checkmark$$

entonces $(AB)^2 = I$. (2 pt)

- c) Sean las matrices $A = (a_{ij})$ de orden 3×2 , $B = (b_{ij})$ de orden 3×3 . Si las entradas de la matriz A son de la forma $a_{ij} = 2^i - j - 1$ y se cumple

$$2B + 4I = A \cdot A^t,$$

entonces la entrada b_{22} de la matriz B , ubicada en fila 2 y columna 2 de B , es -1 .

\checkmark (2 pt)

$$A^T = A$$

Coordinador de prácticas: Elton Barrantes

$$(BB)^T = A \cdot B \cdot A^T$$

San Miguel, 20 de noviembre de 2023.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Problema 3

① Usando las ecuaciones se infiere que:

B y C tienen la forma de

$$B = (13 + 3t, -13 - 4t; 24 + 5t) \wedge C = (-9 + r; -7 + r; 4)$$

Además: $M = \frac{B+C}{2} = (0; -\frac{3}{2}; \frac{13}{2})$

$$B+C = (0; -3; 13)$$

$$(4 + 3t + r; -20 - 4t + r; 28 + 5t) = (0; -3; 13)$$

1a) 3 Pts

$$z \Rightarrow 28 + 5t = 13 \Rightarrow t = -3$$

$$y \Rightarrow -20 - 4(-3) + r = -3 \Rightarrow r = 5$$

$$x \Rightarrow 4 + 3(-3) + (5) = 0$$

Por lo tanto: Reemplazando:

$$\boxed{B(1; -1; 9)} \wedge \boxed{C(-4; -2; 4)}$$

Para hallar A: (Punto de intersección de las rectas)

Ecuaciones paramétricas:

$$L_1 = \begin{cases} x = 13 + 3t \\ y = -13 - 4t \\ z = 24 + 5t \end{cases} \quad (1)$$

$$L_2 = \begin{cases} x = -9 + r \\ y = -7 + r \\ z = 4 \end{cases} \quad (2)$$

Sustituyendo: (1) y (2)

$$z = 24 + 5t = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -13 - 4t = -7 + r \\ t = -4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 13 + 3t = -9 + r \\ -13 + 16 = -7 + r \end{array} \right. \quad 13 - 12 = -9 + 10$$

Reemplazando t y r : en (1)

$$\boxed{0; A = (1; 3; 4)} \quad \text{pts}$$

$$1 = 1 \checkmark$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

b)

Teniendo los puntos:

$$A(1; 3; 4)$$

Para hallar el \vec{n} (normal)

$$\vec{n} \parallel \vec{BA} \times \vec{BC}$$

$$C(-4; -2; 4)$$

$$\vec{n} = (-3, 4, -5) \times (-8, -1, -5)$$

$$B(4; -1; 9)$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ i & j & k \\ -3 & 4 & -5 \\ -8 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-25, +25, 35) \rightarrow 5(-5, 5, 7)$$
$$\vec{n} = (-5, 5, 7)$$

1b) 1 pto

$$3+32=35 \checkmark$$

Para la ecuación del plano:

$$P = P_0 + \vec{P}_0 \cdot \vec{n}$$

$$P: 8(x-1; y-3; z-4) (-5; 5; 7)$$

$$P_0: -5x + 5 + 5y - 15 + 7z - 28 = 0$$

$$-5x + 5y + 7z - 38 = 0$$

$$P_0: 5x - 5y - 7z + 38 = 0$$

Ppto

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

Problema 23

$$a) (2A - 3B)^T + X = 5 \cdot B.C.$$

$$2A^T - 3B + X = 5 \cdot B.C.$$

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + X = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & 5 \end{pmatrix} + X = 5 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -40 \\ 40 & 20 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \boxed{\begin{pmatrix} 19 & 0 & -40 \\ 48 & 21 & 15 \end{pmatrix}}$$

✓

Ppte

2a) 3pts

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Mediante propiedades:

$$2a \quad g \quad 3a+d$$

$$2b \quad h \quad 3b+e = 2.3$$

$$2c \quad i \quad 3c+f$$

$$\begin{array}{|ccc|} \hline a & g & g \\ b & h & b \\ c & i & c \\ \hline \end{array}$$

isodas

$$\begin{array}{|ccc|} \hline a & g & d \\ b & h & c \\ c & i & f \\ \hline \end{array}$$

cambios

$|A|=|A^T|$

y cambio de orden:

$$|A| = -|B|$$

↔

Propiedades

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ppte

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva:
cálculos y desarrollos
(borradores)

Problema 3

a) $E_2: x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 5 = 0$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 + 5 = 1 + 4 + 1$$

$$E_2: (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$$

$$\boxed{\text{Centro } E_2 = (-1; 2; -1) \wedge r_{E_2} = 1 \text{ m}}$$

✓ Rpta

b) Para ser tangentes exteriores se debe cumplir que:

$$\underbrace{d_{C_1 C_2}}_{=} = r_1 + r_2$$

$$C_1 = (1; 1; -3) \\ C_2 = (-1; 2; -1)$$

$$\sqrt{(1-(-1))^2 + (2-1)^2 + (-3-(-1))^2} = 3 = r_1 + r_2$$

$$3 = d + 1$$

$$\boxed{d=2}$$

✓ Rpta

c) Si $|a|=3$:

i) Plano de intersección: (P_J)

$$P_1 = E_2$$

$$E_1: x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 - 9 = 0$$

$$C_1(1; 1; -3)$$

$$C_2(-1; 2; -1)$$

$$P_1: x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 + 6z + 2 = 0$$

$$E_2: x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$-4x + 2y + 4z - 3 = 0$$

$$4x - 2y - 4z + 3 = 0$$

Sea O , el centro de la circunferencia

$$d_{C_1 O} = d_{C_1 P_1} = \frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{|4(1) - 2(1) - 4(-3) + 3|}{6}$$

$$\left(d_{C_1 O} = \frac{17}{6}\right) \quad (1)$$

$$4 - 2 + 12 +$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

- ii) Para el centro, halla la ecuación de la recta que contiene
a C_1 y C_2 , e intersectalo al plano (P_I)

$$\left. \begin{array}{l} C_2(1;1;-3) \\ C_1(2;-1;-1) \\ \vdots f((1,-1)) = (2,-1,-2) \end{array} \right\} d: (1;1;-3) + t(2;-1;-2); t \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = -3-2t \end{array} \right\}$$

Reemplazando en P_I :

$3c) 3PFS$

$$4(1+2t) - 2(1-t) - 4(-3-2t) + 3 = 0$$

$$4+8t+2+2t+12+8t+3=0$$

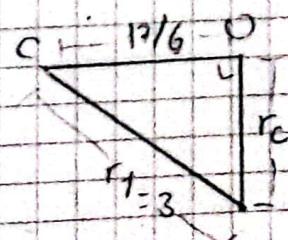
$$17+18t=0$$

$$t = -\frac{17}{18} \rightarrow \boxed{\text{Centro} = O\left(-\frac{8}{9}, \frac{35}{18}, -\frac{10}{9}\right)}$$

✓ Pptc.

Usando la distancia $d_{C_1O} = \frac{17}{3}$ y el radio $r_1 = 3$

Por Pitágoras:



$$r_C^2 + \left(\frac{17}{6}\right)^2 = 9$$

$$r_C = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

✓ Rpta

$$\sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2 + \left(\frac{35}{6}\right)^2 + \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva
cálculos y dibujos
(borradores)

Problema 4º

a) Comprobación:

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i) $\det(A) = 0$

ii) $\det(A \cdot B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

iii) $\det(B) = 1 \neq 0$

$\boxed{\text{La proposición es FALSA}}$

b) Sean $A \cdot A^T = I$, $B \cdot B^T = I$; $A \cdot B = B \cdot A$

Además, al ser simétricos se cumple:

$$\underbrace{A^T = A}_{\text{y}} \wedge \underbrace{B^T = B}_{\text{y}}$$

$$A \cdot A^T = I \quad B \cdot B^T = I$$

$$A^2 = I \wedge B^2 = I \quad \text{... (1)}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^2 &= (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = \underline{A \cdot B} \cdot \underline{A \cdot B} \\ &= \underline{A} \cdot \underline{A \cdot B \cdot B} \\ &= A^2 \cdot B^2 \\ &= I \cdot I = I \end{aligned}$$

$\therefore (A \cdot B)^2 = I$

✓ Recomiéndalo (1) y (2)

1a) 2

$\boxed{\text{La proposición es VERDADERA}}$

Ppta

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

c) $A = a_{ij}; \leq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

$$a_{ij} = 2^i - j - 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & 17 \\ -5 & 17 & 61 \end{pmatrix} = 2B + 4J$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 17 \\ -5 & 17 & 57 \end{pmatrix} = 2B$$

$$B = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 & 17/2 \\ -5/2 & 17/2 & 57/2 \end{pmatrix}$$

$$b_{22} = \frac{1}{2} \neq -1$$

La proposición es Falsa

✓ Rpta

AC) 20 TS