ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA
SEMESTRE ACADÉMICO 2018-1

Horario: 113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,125,126 y B125

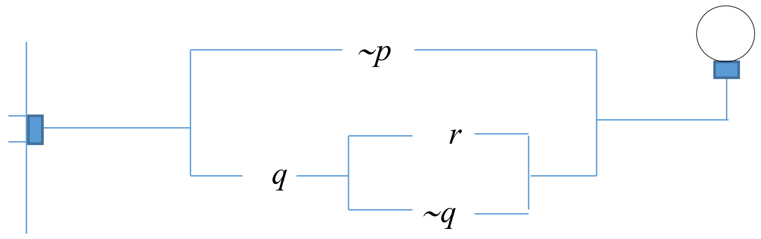
Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores del curso.

ADVERTENCIAS:
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:
- Tiempo de duración: 1 hora y 50 minutos.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros ni calculadoras.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía, y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

1. Sabiendo que la proposición: $(p \longrightarrow \sim q) \vee (r \vee \sim p)$ es falsa, determine si el foco en el circuito mostrado está encendido o apagado. Justifique su respuesta. 3 puntos



2. Los números reales a_n, $n \in \mathbb{Z}_0^+$, se definen recursivamente por: 3 puntos

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -1 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Demuestre usando inducción matemática lo siguiente:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0^+ : a_n = (-1)^n$$

3. Dada la siguiente conjetura:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_0$$

a) Indique el menor número entero positivo n_0 de tal manera que la conjetura sea válida. 1 punto

b) Usando inducción matemática, demuestre que la conjetura es válida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, con $n \geq n_0$, siendo n_0 el número hallado en el ítem anterior. 3 puntos

4. Calcule en términos de n las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k+1}\right)$ 3 puntos

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(3^k+\frac{1}{k}\right)$ 3 puntos

5. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente su respuesta:

a) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, el número $(n^2+n-5)(n^2-n)$ es impar. 1 punto

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $x^2+2x<y$. 1 punto

c) Una condición necesaria para que un entero positivo n sea par es que n^2 sea par. 1 punto

d) Si a y b son números reales diferentes de cero se cumple que $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}>2$. 1 punto

Coordinadora de práctica: Iris Flores

San Miguel, 12 de abril de 2018

ENTREGADO
18 ABR 2018

Práctica

Año: 2018 Número: 1113

Código de alumno

Lázaro Carbajal Diego Estuardo

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Lázaro

Firma del alumno

Curso: Fundamento de Cálculo

Práctica N°: 1

Horario de práctica: P-123

Fecha: 12/04/18

Nombre del profesor: N. Rubio

Nota

20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) MAAN

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

P(1)

→ Sabiendo que

$(p \rightarrow \sim q) \vee (r \vee \sim p)$ es falsa, deducimos que:

- $p \rightarrow \sim q$ es F
- $r \vee \sim p$ es F

por los valores de verdad de la disyunción.

→ Ahora si $p \rightarrow \sim q$ es Falsa:

- p es V
- $\sim q$ es F ⇔ q es V.

por los valores de verdad del condicional

→ Si $r \vee \sim p$ es F entonces

- r es F
- $\sim p$ es F ⇔ p es V

por los valores de verdad de la disyunción.

Así los valores de verdad de p, q y r son:

- p es V , q es V y r es F

→ por lo tanto, el circuito mostrado está apagado debido a que, con los valores de verdad anteriores, la proposición que el circuito representa es falsa.

1) 3,0

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)

P2) Demostramos por Inducción Matemática que $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, $a_n = (-1)^n$.

Etapa Base: Se cumple:

$$a_0 = 1 = (-1)^0 \text{ es V.}$$
$$a_1 = -1 = (-1)^1 \text{ es V.}$$

Etapa Inductiva:

- Hipótesis Inductiva: Para un $h \geq 1$. Se cumple:

$\forall k \in \mathbb{Z}^+,\ 1 \leq k \leq h:\ a_k = (-1)^k$

- Tesis Inductiva: (Por demostrar) para un $h+1$:

$$a_{h+1} = (-1)^{h+1}$$

En efecto,

$$a_{h+1} \overset{\text{por def.}}{=} a_h + 2a_{h-1} \overset{\text{por H.I.}}{=} (-1)^h + 2(-1)^{h-1}$$
$$= (-1)^h + 2(-1)^h \cdot (-1)^{-1}$$
$$= (-1)^h + 2(-1)^h \cdot \left(\frac{1}{-1}\right)$$
$$= (-1)^h - 2(-1)^h$$
$$= -1(-1)^h =$$
$$a_{h+1} = (-1)^{h+1}$$

Queda comprobada la tesis, luego por Inducción Matemática, se comprueba que $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+ : a_n = (-1)^n$

3,0

2)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

P2)

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}>\sqrt{h+1}$$

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{h}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}$$

$$\frac{\sqrt{h^2+h}+1}{\sqrt{h+1}}$$

$$\frac{\sqrt{h^2+h}+1}{\sqrt{h+1}}>\sqrt{h+1}$$

$$\sqrt{h^2+h}+1>h+1$$

$$\sqrt{h^2+h}>h$$

$$h^2+h>h^2$$

Teniendo en cuenta que:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

- Demostramos por Inducción Matemática que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{n}\ ,\ \forall n\in\mathbb{Z}^+,\ n\geq 2$$

3/9 10

<u>Etapa Base</u>: Para un $n=2$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 1+\frac{1,4}{2}=1+0,7=1,7>\sqrt{2}\ \text{es V.}$$

<u>Etapa Inductiva</u>:

- Hipótesis Inductiva: Para un $h\geq 2$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{h}$$

- Tesis Inductiva: (Por demostrar) Para un $h+1$:

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{h+1}$$

En efecto:

Por H.I. sabemos que

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{h}\xrightarrow[\text{de monotonía}]{\text{por propiedad}}\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}>\sqrt{h}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}$$

Así:

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{h}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}>\sqrt{h+1}\ \dots\Rightarrow$$ Afirmo debido a que sabemos que $h>0$,

entonces por propiedad de monotonía $h^2+h>h^2$, ya que ambos son positivos $\sqrt{h^2+h}>h$. Ahora por P. de monotonía nuevamente,

$\sqrt{h^2+h}+1>h+1$, entonces dividimos entre $\sqrt{h+1}$, (que no cambia el sentido de la desigualdad al ser positivo) y tenemos que:

$$\frac{\sqrt{h^2+h}+1}{\sqrt{h+1}}>\frac{h+1}{\sqrt{h+1}}\rightarrow\frac{\sqrt{h^2+h}}{\sqrt{h+1}}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}>\sqrt{h+1}\rightarrow\sqrt{h}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}>\sqrt{h+1}.$$

Así queda comprobada la tesis y por Inducción Matemática, se comprueba la afirmación.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

P(1)

(a) $\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k+1}\right) \Rightarrow$ Sea el k-ésimo término

$$\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2(k+2)-3}$$

$$=\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2(k+1)-3}+\frac{1}{2(k+1)-3}-\frac{1}{2(k+2)-3}$$

$\frac{1}{2(k+2)-3}$

Entonces:

$$\sum_{k=3}^{n}\left[\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2(k+1)-3}\right)+\left(\frac{1}{2(k+1)-3}-\frac{1}{2(k+2)-3}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2(k+1)-3}\right)+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2(k+1)-3}-\frac{1}{2(k+2)-3}\right)$$

- por propiedad telescópica

$$\Rightarrow = \frac{1}{2(3)-3}-\frac{1}{2(n+1)-3}+\frac{1}{2(3+1)-3}-\frac{1}{2(n+2)-3}$$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{\ }$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\ldots$

$-\frac{1}{5}\quad-\frac{1}{7}$

Entonces:

$$\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}$$

(b) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(3^k+\frac{1}{k}\right) \Rightarrow$ Sea el k-ésimo término:

$$\binom{n-1}{k-1}\left(3^k+\frac{1}{k}\right)=3^k\binom{n-1}{k-1}+\frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=3^k\binom{n-1}{k-1}+\frac{1}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=3^k\binom{n-1}{k-1}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n}{n}$$

$$=3^k\binom{n-1}{k-1}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=3^k\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n}$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[3^k\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n}\right]=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}3^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n}$$

Scanned with CamScanner

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

faltó

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^{k+1} + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1)^{n-1-k} \cdot (3)^{k+1} + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1\right)$$

Por Teorema del Binomio de Newton.

$$= 3 \cdot (1+3)^{n-1} + \frac{1}{n}\left(2^n - 1\right)$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\left(3^k + \frac{1}{k}\right) = 4^{n-1} + \frac{2^n - 1}{n}$$

4) 6,0

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

P5

a) $\forall n \in \mathbb{Z}, (n^2+n-5)(n^2-n)$ es impar

es falso, basta con poner de contraejemplo a $n=2$. Así: $(2^2+2-5)(2^2-2) = (1)(2) = 2 \to$ no es par.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2+2x<y$

es verdadero, basta que $\sqrt{y+1}-1 > x \vee -1-\sqrt{y+1} < x$

$x^2+2x+1 < y+1$

$(x+1)^2 < y+1$

$\sqrt{y+1} < x+1 < \sqrt{y+1}$

$-1-\sqrt{y+1} < x < \sqrt{y+1}-1$

c) "Una condición necesaria para que un entero positivo n sea par es que n^2 sea par"

$\to$ Supongamos

p: n es par
q: n^2 es par

Entonces la proposición anterior equivale a " $p \to q$ "

Así trabajamos con: "Si n es par, entonces n^2 es par".

que es verdad puesto que:

Si p: $n = 2K$, $K \in \mathbb{Z}$

entonces $n^2 = 4K^2 = 2\underbrace{(2K^2)}_{\in \mathbb{Z}} \to$ Así n^2 es par.

5) 3,5

d) Si a y b $\in \mathbb{R}-\{0\}$, se cumple $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} \geq 2$

$a^4+b^4 > 2a^2b^2$

$a^4-2a^2b^2+b^4 > 0$

$(a^2-b^2)^2 > a$

es verdadero, puesto que:

si $a=b$

Sabemos que $(a^2-b^2)^2 \geq 0$ entonces:

$\Rightarrow 2 > 2$ (F)

$a^4-2a^2b^2+b^4 \geq 0 \to (a^4+b^4 > 2a^2b^2)\frac{1}{a^2b^2}$

a^2b^2 es positivo, por lo que no cambia el sentido de la desigualdad $\to \frac{a^4+b^4}{a^2b^2} > \frac{2a^2b^2}{a^2b^2} \to \frac{a^4}{a^2b^2}+\frac{b^4}{a^2b^2} > 2 \to \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} > 2$ //