ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

Año: 2022 Número: 3479

Código de alumno

**Segundo examen**

HIPOLITO ASCENCIO ALEJANDRO DAVID

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Horario: 4-103

Fecha: 01/12/2022

Nombre del profesor: F. JIMENEZ

Nota

18

Firma del profesor

## INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

# Fundamentos de Cálculo

## Examen Final

## Semestre Académico 2022-2

**Horario:** Todos. **Duración:** 180 minutos.

Elaborado por todos los profesores.

**Advertencias:**

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

---

1. Encuentre el dominio implícito de la función (3 pt)

$$f(x) = \arccos\left(1 + 2\ln(x)\right) + \operatorname{arcsen}\left(1 - 2^x\right).$$

2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} |\tan(x)|, & x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right[ - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}; \\ 3\operatorname{sen}(2x+\pi), & x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]; \end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de $f$. (2,5 p

b) Indique cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$. (1 pt)

c) Calcule cada uno de los siguientes límites o explique por qué no está definido: (1,5 p

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x).$$

3. Sea $f$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + (x+1)^2, & x < -1; \\ a + a^{x+1}, & x \geq 0; \end{cases}$$

Donde $a > 0$ (con $a \neq 1$) es una constante real.

a) Para $a = \frac{1}{2}$, justifique que $f$ es inyectiva y halle $f^{-1}$ (indicando el dominio y la regla de correspondencia en cada tramo). (3,5 

b) Halle el conjunto de valores de $a$ para los cuales $f$ es inyectiva. (1,5 

4. a) Calcule el límite (1,5

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(\ln(x)).$$

b) Pruebe que (2 pt)

$$n! > 3^{n-1} \quad \text{para todo entero } n \geq 5.$$

c) Calcule la siguiente suma en términos de $n$. (1,5 pt)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+1}(-2)^k.$$

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Existe una función creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con rango igual a $]0,1[$. (1 pt)

b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si la función $f+g$ es inyectiva entonces $f$ es inyectiva o $g$ es inyectiva. (1 pt)

San Miguel, 01 de diciembre de 2022.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

P-1 Solución

$f(x) = \text{arc c}(1+2\ln x) + \text{arcs}(1-2^x)$

$\Rightarrow -1 \leq 1+2\ln(x) \leq 1 \quad \wedge \; -1 \leq 1-2^x \leq 1 \quad$ del $\ln(x) \;\wedge\; x>0$

$\Rightarrow -2 \leq 2\ln(x) \leq 0 \quad \wedge \; -2 \leq -2^x \leq 0$

$-1 \leq \ln(x) \leq 0 \qquad 0 \leq 2^x \leq 2$

$\Rightarrow e^x$ ES CRECIENTE $\qquad 0 \leq 2^x \;\wedge\; 2^x \leq 2$ ; $\lg_2^x$ ES CRECIENTE

$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{\ln(x)} \leq e^0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \;\wedge\; \lg_2 2^x \leq \lg_2 2$

$e^{-1} \leq x \leq 1 \ldots \qquad \underline{x \leq 1}$

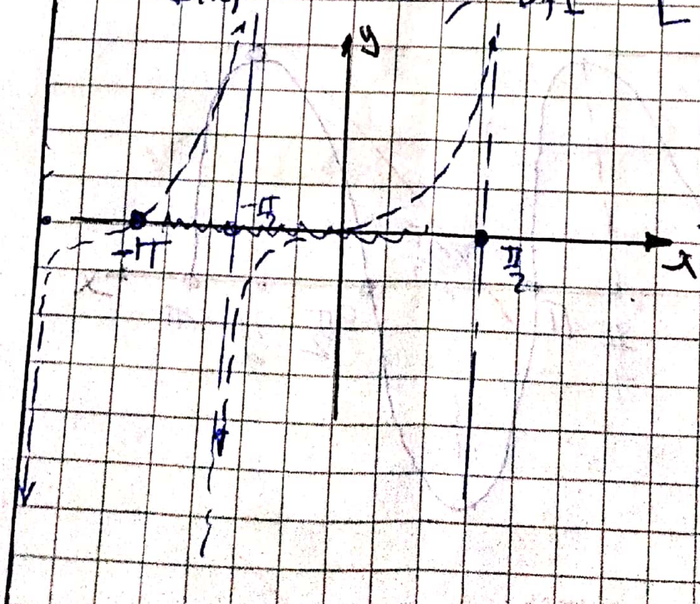
$\Rightarrow \underline{Df = [e^{-1}; 1]}$

3

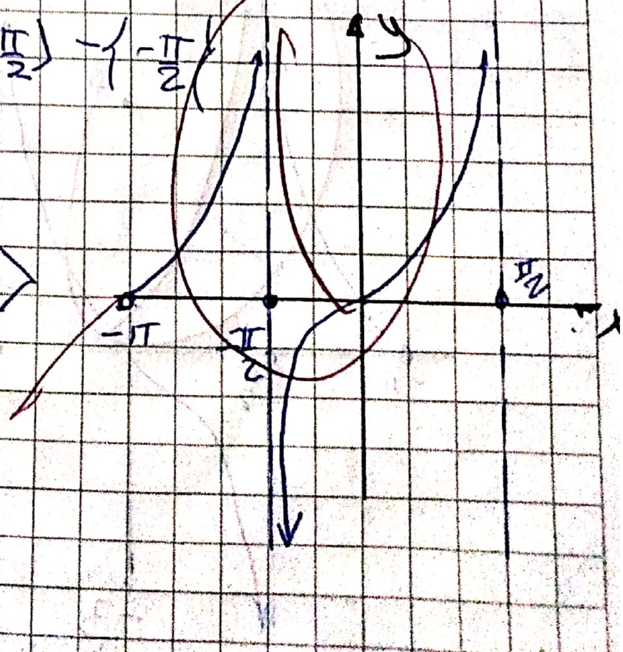
P-2 Solución

$$f(x) = \begin{cases} |Tx| & ; \; x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}\rangle - \{-\frac{\pi}{2}\} \ldots f_1 \\ 3S(2x+\pi) & ; \; x \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi] \ldots f_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_1(x) = |Tx|$ ; $Df_1 = [-\pi; \frac{\pi}{2}\rangle - \{-\frac{\pi}{2}\}$



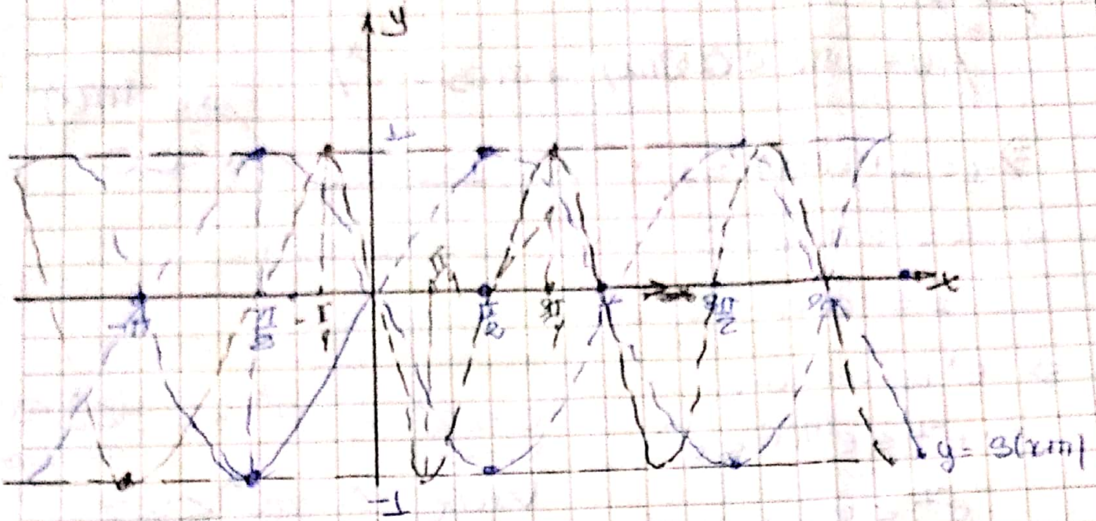

$\Rightarrow$




impulsado por CamScanner

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

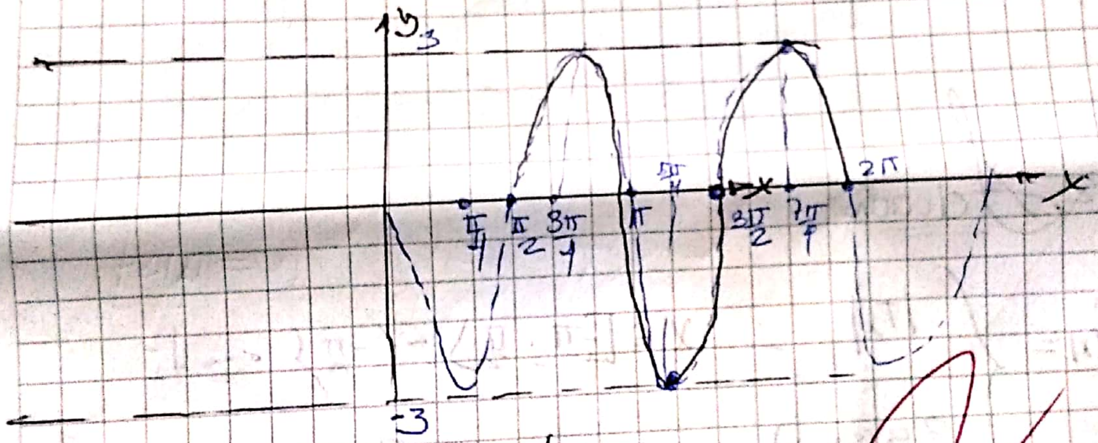
$\Rightarrow f(x) = 3S(2x+\pi)$ ; $D_f = [\frac{\pi}{2} ; 2\pi\rangle$



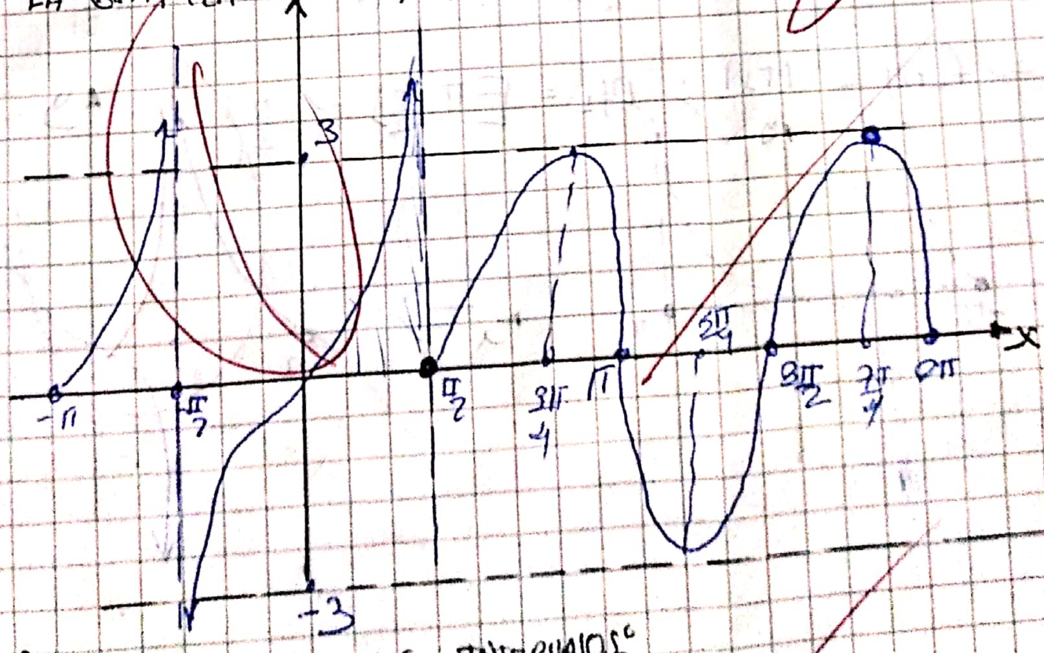

1) $x \longrightarrow x+\pi$

2) $x \longrightarrow 2x$

3) $g(x) \longrightarrow 3g(x)$




$\therefore$ LA GRAFICA DE $f(x)$




$\Rightarrow f(x)$ CRECE EN LOS INTERVALOS:

$[\pi ; \frac{\pi}{2}\rangle$ ; $[\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\rangle$ ; $[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4}]$ ; $[\frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2}]$ ; $\cancel{[\frac{3\pi}{2} ; \frac{9\pi}{4}]}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\Rightarrow f(x)$ DECRECE EN LOS INTERVALOS:

$\left[\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right]$ y $\left[\frac{7\pi}{4} ; 2\pi\right]$

c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$ ; $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) =$

→ NOTAMOS QUE, LOS LÍMITES LATERALES SON DIFERENTES:

$+\infty \neq 0$

$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ NO EXISTE

P3) Solución

$$f(x) = \begin{cases} 3 + (x+1)^2 ; & x < -1 \\ a + a^{x+1} ; & x \geq 0 \end{cases} ; \quad a > 0 , a \neq 1$$

Si $a = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \begin{cases} 3 + (x+1)^2 ; & x < -1 \to f_1 \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} ; & x \geq 0 \to f_2 \end{cases}$

Si $f(x)$ es inyectiva

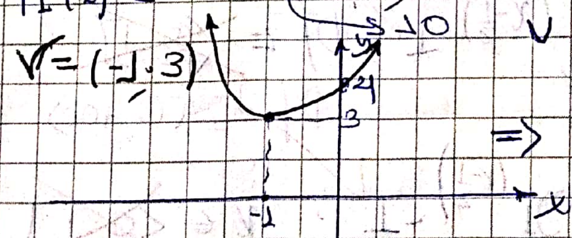
$\Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

o de forma gráfica (al trazar rectas paralelas a $y=0$, debe cortar a la función en un punto).

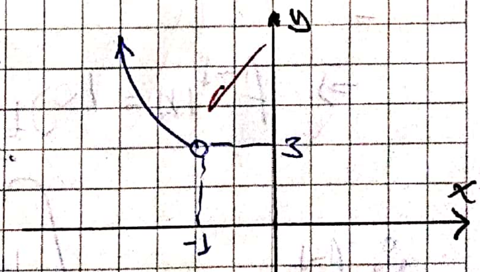
$\Rightarrow f_1(x) = 3 + (x+1)^2 ; \quad x < -1$

$(x+1)^2 \to \geq 0$

$V = (-1 ; 3)$



$\Rightarrow$

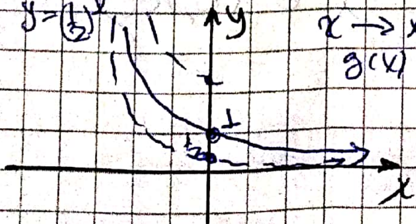


$f_2(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} ; \quad x \geq 0$

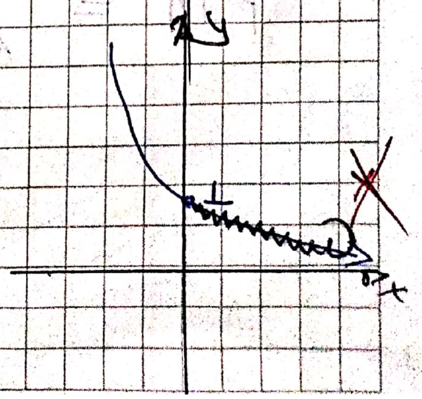
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x \to x+1$

$g(x) \to \frac{1}{2} + g(x)$



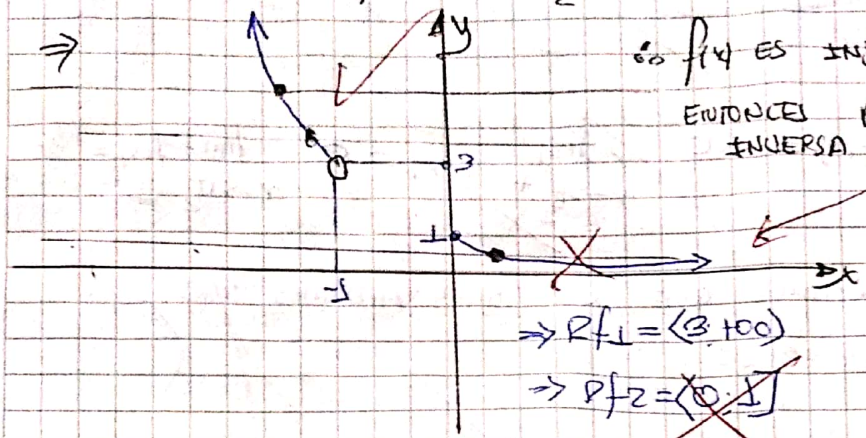
$\Rightarrow$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

∴ LA GRAFICA DE $f(x)$ PARA $a=\frac{1}{2}$



∴ $f(x)$ ES INYECTIVA, ENTONCES POSEE INVERSA

Asíntota horiz. $y = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R f_1 = \langle 3; +\infty \rangle$

$\Rightarrow R f_2 = \cancel{\langle 0; 1]}$

Rango $f_2 = ]\frac{1}{2}; 1]$

$\Rightarrow \underbrace{f_1(x)}_{y} = 3 + (x+1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{y-3} = |x+1|$ DEL RANGO DE $f_1$, SE DEDUCE QUE $y$ (EN LA INVERSA) $y < -1$

$\Rightarrow \sqrt{y-3} = x+1 \vee x+1 = -\sqrt{y-3}$

$Df = Rf^{-1}$

$x = -\sqrt{y-3} - 1 \quad \leq -1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-3} - 1$ ; $Df^{-1} = \langle 3; +\infty \rangle$

$Rf^{-1} = \langle -\infty; -1 \rangle$

$\underbrace{f_2(x)}_{y} = (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^{x+1}$ , $x \geq 0$

$y - \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^{x+1}$

$\log_{\frac{1}{2}} (y - \frac{1}{2}) = \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^{x+1} \Rightarrow x+1 = \log_{\frac{1}{2}} (y - \frac{1}{2})$

$x = \log_{\frac{1}{2}} (y - \frac{1}{2}) - 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2}) - 1$ ; $Df^{-1} = \cancel{\langle 0; 1]}$

$Rf^{-1} = [0; +\infty \rangle$

$$\therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2}) - 1 , & x \in \cancel{\langle 0; 1]} \\ -\sqrt{x-3} - 1 , & x \in \langle 3; +\infty \rangle \end{cases}$$

2.5

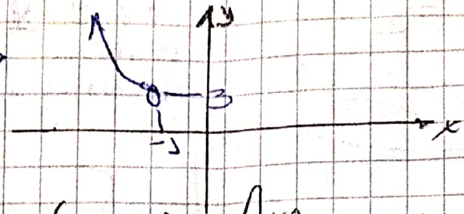
impulsado por CamScanner

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) $f(x) = \begin{cases} 3 + |x+1|^2; & x < -1 \quad \ldots f_1 \\ a + a^{x+1}; & x \geq 0 \quad \ldots f_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ DEL INCISO "a" YA TENEMOS LA GRÁFICA DE $f_1$

$\Rightarrow$




$\Rightarrow R f_1 = \langle 3; +\infty \rangle$

ADEMÁS SI $f(x)$ ES INYECTIVA:

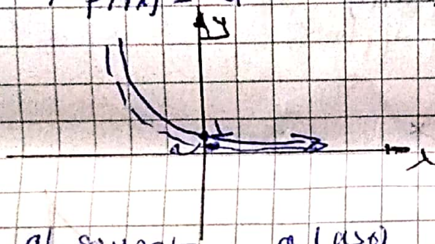
- $f_1$ y $f_2$ SON INYECTIVA
- $Rf_1 \cap Rf_2 = \emptyset$

CASO I) $0 < a < 1$

$\Rightarrow f_2(x) = a + a^{x+1}; \ x \geq 0$

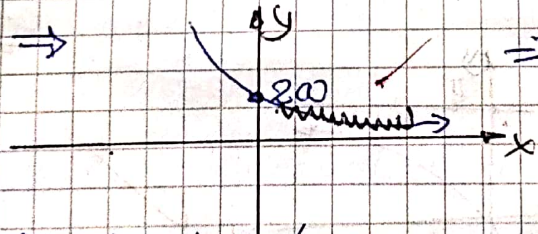
$x \to x+1$

$g(x) \to a + g(x)$




AL SUMARLE $a$ (a>0) DESPLAZAMIENTO VERTICAL

$\Rightarrow$




$\Rightarrow R f_2 = \langle 0; 2a]$

$\Rightarrow Rf_1 \cap Rf_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \underbrace{\langle 3; +\infty \rangle \cap \langle 0; 2a]}_{2a \leq 3} = \emptyset$

$a \leq \frac{3}{2} \ldots$ (I)

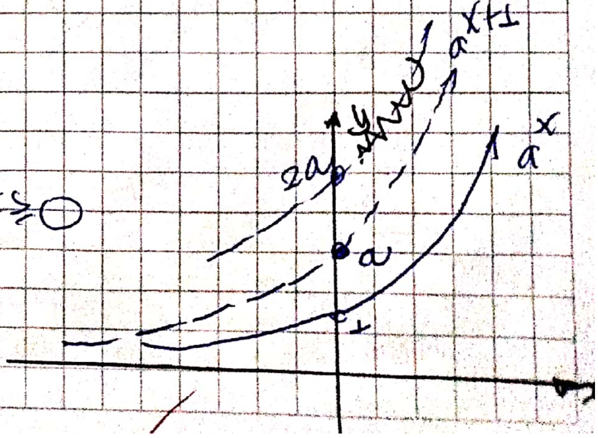
CASO II) $a > 1$

$\Rightarrow f_2(x) = a + a^{x+1}; \ x \geq 0$

$x \to x+1$

$g(x) \to g(x) + a$

$\Rightarrow R f_2 = [2a; +\infty\rangle$

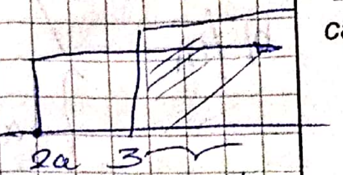


Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\Rightarrow Df_1 \cap Df_2 = \emptyset$

$\Rightarrow [2a; +\infty\rangle \cap [3; +\infty\rangle = \emptyset \Rightarrow$




NO CUMPLIRÍA QUE ES INYECTIVA

SIEMPRE VA HABER INTERSECCIÓN EN MÁS DE 1 PUNTO AL TRAZAR RECTA paralelas a y=0

$\Rightarrow 0 < a < 1 \quad \wedge \quad a \leq \frac{3}{2}$

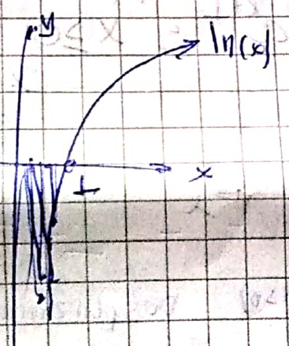
$\therefore CS_a = \langle 0; 1]$

1.5

P4 Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{arcT}(\underbrace{\ln(x)}_{t})$

$\Rightarrow t = \ln(x)$

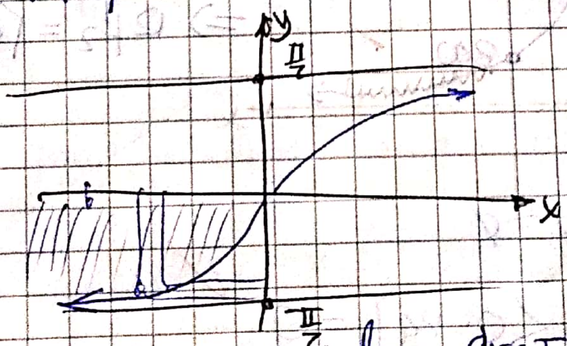



Si $x \to 0^+$

$\Rightarrow t \to -\infty$

1.5

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to -\infty} \operatorname{arcT}(t)$




$\therefore \lim\limits_{t \to -\infty} \operatorname{arcT}(t) = \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{arcT}(\ln(x)) = -\frac{\pi}{2}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

b) PRUEBE QUE $n! > 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ / n \geq 5$

$\Rightarrow$ CASO BASE:

$n=5 \Rightarrow 5! > 3^{5-1}$

$\underbrace{5!}_{120} > 81$

HIPOTESIS INDUCTIVA:

$n = K / K \in \mathbb{Z}^+, K \geq 5$

$\Rightarrow K! > 3^{K-1}$

TESIS INDUCTIVA:

$n = K+1 \Rightarrow (K+1)! > 3^{(K+1)-1}$ ok

$\Rightarrow (K+1)K! > 3^{K-1} \cdot 3^{1} \Rightarrow (K+1)K! > 3^{K}$

DE LA HIPOTESIS:

Si $K! > 3^{K-1}$

$\Rightarrow (K+1)K! > \underbrace{3^{K-1} \cdot 3^{1}}$

$\Rightarrow$ SERIA ANALOGO A DEMOSTRAR QUE:

$K+1 > 3^{1}$ ok

~~$\Rightarrow$ Si $K \geq 5 \Rightarrow K+1 \geq 6 > 3$~~

~~$\Rightarrow K+1 > 3 \Rightarrow 3^{K-1} > 3^{3}$~~

~~$\Rightarrow$ DE LA HIPOTESIS:~~

~~Si $K! > 3^{K-1}$~~

~~$\Rightarrow$~~

PERO $K \geq 5 \Rightarrow K+1 \geq 6 > 3$

$\Rightarrow \underline{K+1 > 3} \Rightarrow 3^{K-1}(K+1) > 3^{K}$

$\Rightarrow K!(K+1) > 3^{K-1}(K+1) > 3^{K}$

$\therefore \underbrace{K!(K+1)}_{(K+1)!} > 3^{K}$

$(K+1)! > 3^{K}$ L q q d

DEMOSTRADO

2

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+3}{k+1} (-2)^k$

$\Rightarrow \binom{n+2}{0} = \frac{\cancel{n+2!}}{0!\,\cancel{(n+2)!}} = 1$

$\Rightarrow \binom{n+2}{n+2} = \frac{\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}\,(0)!} = 1$

$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{(k-1)+1} (-2)^{k-1}$

$S = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} (-2)^k \cdot (-2)^{-1}$

$\Rightarrow S = -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} (-2)^k}$ $\cdot 1$

$S = -\frac{1}{2}\left((1-2)^{n+2} - \left(\binom{n+2}{0}(-2)^0 + \binom{n+2}{n+2}(-2)^{n+2}\right)\right)$

$S = -\frac{1}{2}\left((-1)^{n+2} - ((1) + (1)(-2)^{n+2})\right)$

$\therefore S = -\frac{1}{2}\left((-1)^{n+2} - 1 - (-2)^{n+2}\right)$

1.5

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

**Presente aquí su trabajo**

P-5 Solución:

a) SEA
$f(x) = x \; ; \; 0 < x < 1$

f debe tener dom $= \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ f ES CRECIENTE y $R_f = \langle 0,1 \rangle$

$\therefore$ LA PROPOSICIÓN ES VERDADERA

b) Si $f+g$ es INYECTIVA $\Rightarrow$ f ES INYECTIVA y g ES INYECTIVA

CONTRAEJEMPLO:

$f(x) = x^2 \; ; \; g(x) = x - x^2$

$(f+g)_{(x)} = x$ ; INYECTIVA

bien

PERO $f(x) = x^2$ (NO ES INYECTIVA, POR $x \in \mathbb{R}$)

y $g(x) = x - x^2$ (NO ES INYECTIVA)

$\therefore$ LA PROPOSICIÓN ES FALSA

impulsado por CamScanner

## INDICACIONES AL ALUMNO

- [ ] Llene con más esmero la carátula.
- [ ] Presente con más claridad su trabajo.
- [ ] Presente con más limpieza su trabajo.
- [ ] Haga los cálculos con más esmero.
- [ ] Ordene mejor su presentación.
- [ ] Explique mejor su procedimiento.
- [ ] Dibuje mejor los croquis.
- [ ] Tabule mejor los datos.
- [ ] *El profesor desea hablar con usted.*
- [ ] *Venga mejor preparado.*

**Notas parciales**

| Pregunta | Nota |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4,5 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 1 |
| 6 | 7 |
| 7 | |
| 8 | |
| Total | 17.5 |


**Estudios Generales Ciencias**

facultad.pucp.edu.pe/generales-ciencias/
Contiene lo referente a las actividades realizadas en la unidad, así como información que le será de utilidad.

facebook.com/eeggcc

buzon20@pucp.edu.pe
Para realizar preguntas sobre algún aspecto del reglamento cuya lectura no deje claro, dar sugerencias, solicitar información sobre el proceso de egresados o acreditación de idiomas, realizar observaciones a la relación de cursos permitidos y lo relacionado sobre los procesos de matrícula, etc.

626-2000 Anexos 5200, 5210, 5242