ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA - SOLUCIONES PROPUESTAS

SEMESTRE ACADÉMICO 2021 -1

Horarios: A123, B124, B125, B126, 0102, 0105, 0108, 0110, 0114, 0120, 0127, 0128, 0129, 0130, 0131, 0132, 0133.

---

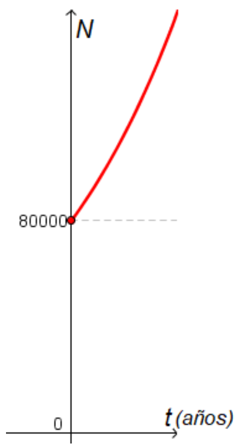
1. El número total de arrestos relacionados al narcotráfico en UCANIO, viene dado por $N(t) = Ae^{rt}$, $\quad t \geq 0$, donde t es el número de años transcurridos desde 1985. Sabiendo que el número total de arrestos era de 80 000 en 1985 y 1 280 000 en 1989.

   a) Halle el valor de las constantes A y r. (1 punto)

   Solución:
   $N(0) = 80\,000 = A$.
   $N(4) = 1\,280\,000 = 80\,000\,e^{4r} \Rightarrow r = \dfrac{\ln(16)}{4} = \ln(2)$.

   b) Esboce la gráfica de la función N, indicando las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, en caso existan. (2 puntos)

   Solución:
   $N(t) = 80\,000e^{\ln(16)t/4} = 80\,000(2)^t, \quad t \geq 0.$



   Intersección con el eje Y: $(0, 80\,000)$. No tiene intersección con el eje X. No tiene asíntotas.

   c) Determine el número total de arrestos en 2001. (1 punto)

   Solución:
   $N(16) = 80\,000(2)^{16} = 5\,242\,880\,000$.

   d) ¿En qué año el número total de arrestos llegó a ser 327 680 000? (1 punto)

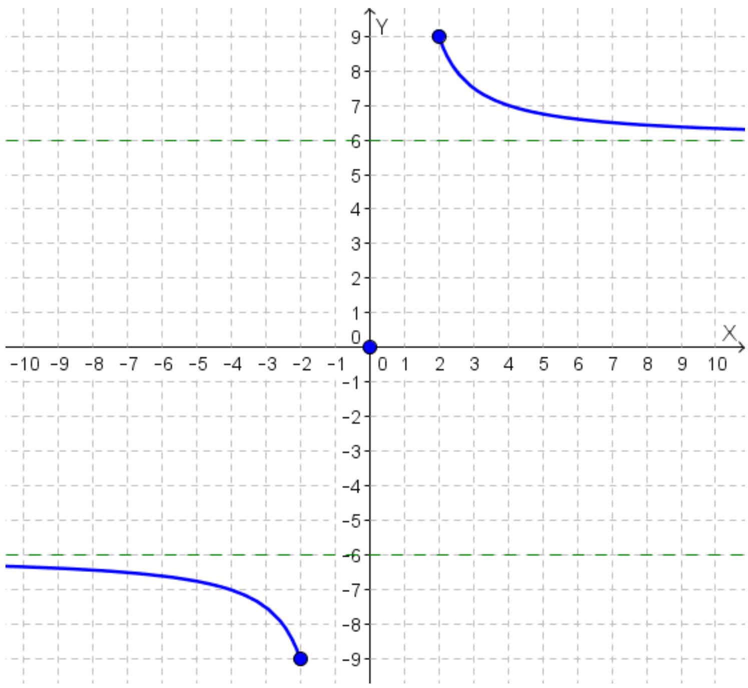
   Solución:
   $N(t) = 80\,000(2)^t = 327\,680\,000 \Rightarrow 2^t = 4096 \Rightarrow t = \log_2(4096) = 12$ años. El año 1997.

2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- f es una función impar.
- Para $x \in]0,2[$, $f(x)$ es de la forma $f(x) = a + \log_b(x+1)$, donde a y b son constantes positivas con $\frac{2}{3} < b < 2$.
- Para $x \in [2,+\infty[$, es de la forma $f(x) = \frac{6x-3}{x-1}$.
- El rango de f es $[-9,-6[\cup]-4,-2[\cup\{0\}\cup]2,4[\cup]6,9]$.

Calcule los valores de a y b, y esboce la gráfica de f. (4 puntos)

Solución:
Podemos esbozar los tramos para $x \geq 2$ y $x \leq -2$ usando que f es impar. Además como f es impar con dominio $\mathbb{R}$, la gráfica incluye al $(0,0)$.

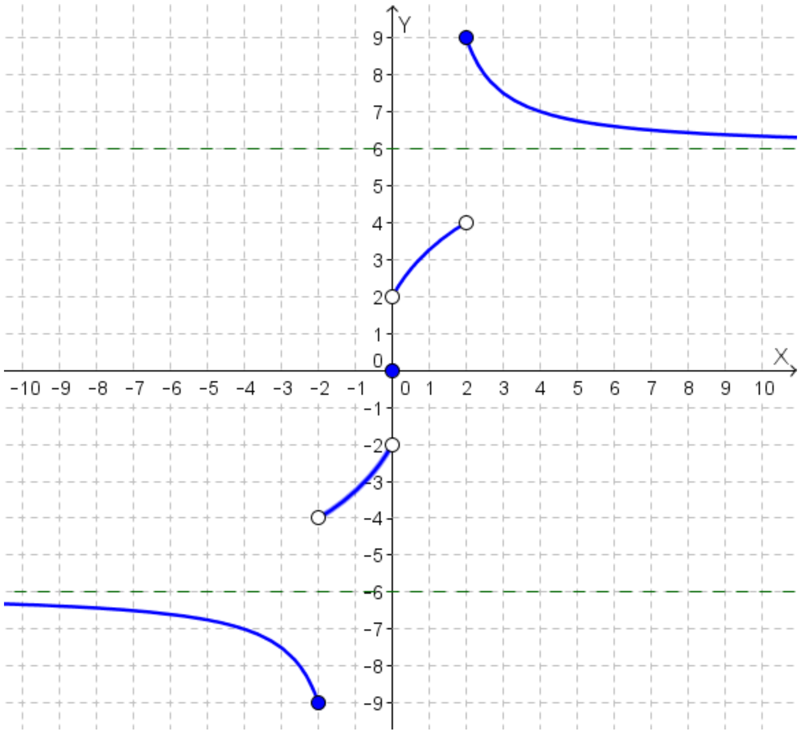


Luego los tramos para x en $-2 < x < 0$ ó $0 < x < 2$ deben cubrir la parte del rango $]-4,-2[\cup]2,4[$.
Como $a > 0$ el tramo con $0 < x < 2$ debe cubrir el rango $]2,4[$.
Tenemos los casos:

- **0<b<1**: Tramo decreciente, debe cumplirse:
  $a + \log_b(1) = a = 4 \wedge a + \log_b(3) = 2$, de donde $a = 4$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{2}{3}$, se descarta.
- **b>1**: Tramo creciente, debe cumplirse:
  $a + \log_b(1) = a = 2 \wedge a + \log_b(3) = 4$, de donde $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, cumple $\dfrac{2}{3} < \sqrt{3} < 2$.

Los valores pedidos son $\boxed{a = 2,\ b = \sqrt{3}}$.

La gráfica pedida sería



3. (Versión 1)

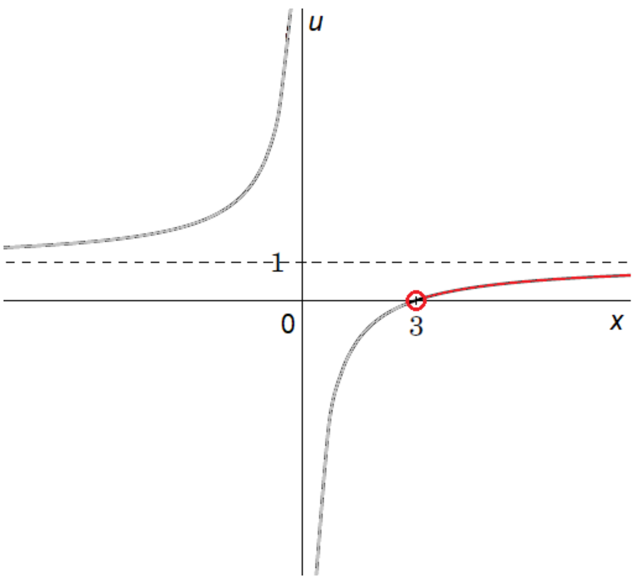
a) Sea $f(x) = \ln(x-3) - \ln(x)$. Halle el dominio y el rango de f. (2 puntos)

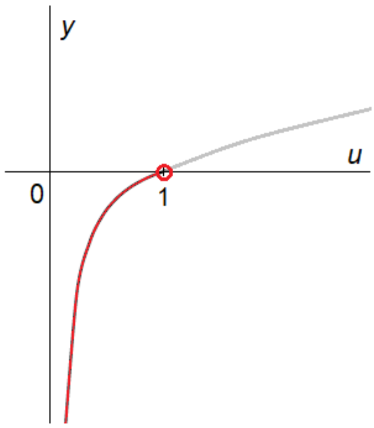
Solución:

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x-3 > 0 \wedge x > 0\} =]3, +\infty[$. $\boxed{Dom(f) =]3, +\infty[}$.

Para estos valores de x podemos reescribir $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{x}\right)$, $x > 3$.

Cuando x toma todos los valores en $]3, +\infty[$, $u = \dfrac{x-3}{x}$ toma todos los valores en $]0, 1[$, $y = \ln(u)$ tomará todos los valores en $]-\infty, 0[$. $\boxed{Ran(f) =]-\infty, 0[}$.





b) Sean $0 < a < 1$ y la función $f(x) = a^{2x^2 - ax + 1}$, $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right]$

i) Para $a = \frac{2}{3}$, justifique que f es inyectiva y halle la función inversa f^{-1}. (3 puntos)

Solución:

$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2 - \frac{2}{3}x + 1}$, $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right]$

La función $g(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{17}{18}$ es creciente en $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right[$, en particular es creciente en $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right]$. La función $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

Luego la composición es decreciente en $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right]$, luego es inyectiva en $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right]$.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}}(x) - \frac{17}{36}}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{71}{75}} \le x \le \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{17}{18}}.$$

ii) Determine todos los valores de a tales que f es creciente. (2 puntos)

Solución:

Como $0 < a < 1$, la función a^x es decreciente en $\mathbb{R}$.

La función $g(x) = 2x^2 - ax + 1 = 2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{8}$ es decreciente en $\left]-\infty, \frac{a}{4}\right]$ y es creciente en $\left[\frac{a}{4}, +\infty\right[$.

Necesitamos que $\frac{1}{5} \le \frac{a}{4}$ para que la compuesta sea creciente.

Los valores pedidos son todos los a en $\left[\frac{4}{5}, 1\right[$.

3. (Versión 2)

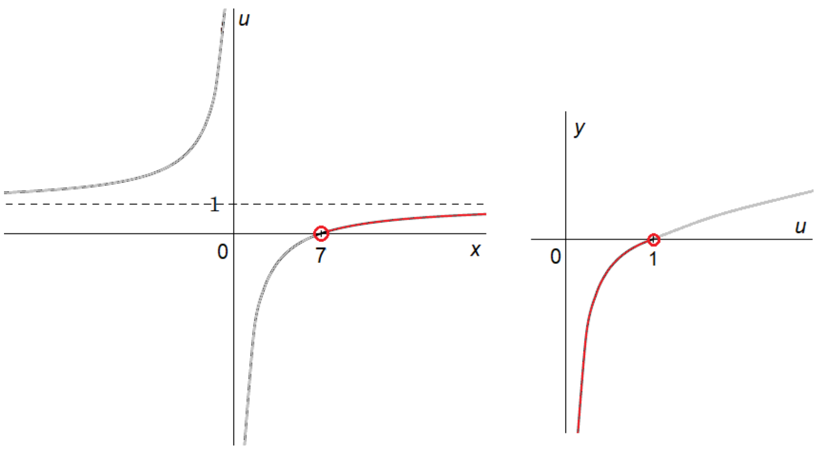
a) Sea $f(x) = \ln(x-7) - \ln(x)$. Halle el dominio y el rango de f. (2 puntos)

Solución:

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 7 > 0 \wedge x > 0\} =]7, +\infty[$. $\boxed{Dom(f) =]7, +\infty[}$.

Para estos valores de x podemos reescribir $f(x) = \ln\left(\frac{x-7}{x}\right)$, $x > 7$.

Cuando x toma todos los valores en $]7, +\infty[$, $u = \frac{x-7}{x}$ toma todos los valores en $]0, 1[$, $y = \ln(u)$ tomará todos los valores en $]-\infty, 0[$. $\boxed{Ran(f) =]-\infty, 0[}$.



b) Sean $0 < a < 1$ y la función $f(x) = a^{2x^2 - ax + 1}$, $x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right]$

i) Para $a = \frac{1}{2}$, justifique que f es inyectiva y halle la función inversa f^{-1}. (3 puntos)

Solución:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2 - \frac{1}{2}x + 1}$, $x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right]$

La función $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{31}{32}$ es creciente en $\left[\frac{1}{8}, +\infty\right[$, en particular es creciente en $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right]$. La función $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

Luego la composición es decreciente en $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right]$, luego es inyectiva en $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right]$.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x) - \frac{31}{64}}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{35}{36}} \le x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{31}{32}}.$$

ii) Determine todos los valores de a tales que f es creciente. (2 puntos)

Solución:

Como $0 < a < 1$, la función a^x es decreciente en $\mathbb{R}$.

La función $g(x) = 2x^2 - ax + 1 = 2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{8}$ es decreciente en $\left]-\infty, \frac{a}{4}\right]$ y es creciente en $\left[\frac{a}{4}, +\infty\right[$.

Necesitamos que $\frac{1}{6} \le \frac{a}{4}$ para que la compuesta sea creciente.

Los valores pedidos son todos los a en $\left[\frac{2}{3}, 1\right[$.

3. (Versión 3)

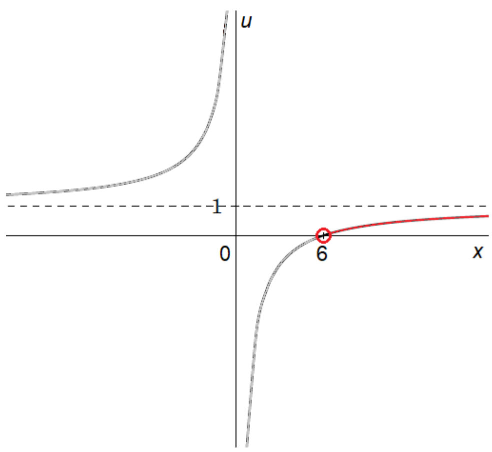
a) Sea $f(x) = \ln(x-6) - \ln(x)$. Halle el dominio y el rango de f. (2 puntos)

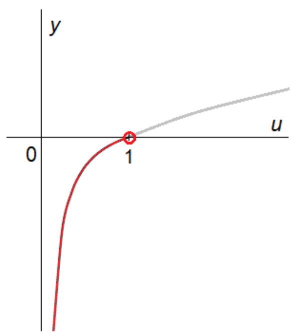
Solución:

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 6 > 0 \wedge x > 0\} =]6, +\infty[$. $\boxed{Dom(f) =]6, +\infty[}$.

Para estos valores de x podemos reescribir $f(x) = \ln\left(\frac{x-6}{x}\right)$, $x > 6$.

Cuando x toma todos los valores en $]6, +\infty[$, $u = \frac{x-6}{x}$ toma todos los valores en $]0, 1[$, $y = \ln(u)$ tomará todos los valores en $]-\infty, 0[$. $\boxed{Ran(f) =]-\infty, 0[}$.





b) Sean $0 < a < 1$ y la función $f(x) = a^{2x^2-ax+1}$, $x \in \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{8}\right]$

i) Para $a = \frac{2}{5}$, justifique que f es inyectiva y halle la función inversa f^{-1}. (3 puntos)

Solución:
$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-\frac{2}{5}x+1}$, $x \in \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{8}\right]$
La función $g(x) = 2x^2 - \frac{2}{5}x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{49}{50}$ es creciente en $\left[\frac{1}{10}, +\infty\right[$, en particular es creciente en $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{8}\right]$. La función $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ es decreciente en $\mathbb{R}$.
Luego la composición es decreciente en $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right]$, luego es inyectiva en $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right]$.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{10} + \sqrt{\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{5}}(x) - \frac{49}{100}}, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{157}{160}} \le x \le \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{49}{50}}.$$

ii) Determine todos los valores de a tales que f es creciente. (2 puntos)

Solución:
Como $0 < a < 1$, la función a^x es decreciente en $\mathbb{R}$.
La función $g(x) = 2x^2 - ax + 1 = 2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{8}$ es decreciente en $\left]-\infty, \frac{a}{4}\right]$ y es creciente en $\left[\frac{a}{4}, +\infty\right[$.
Necesitamos que $\frac{1}{8} \le \frac{a}{4}$ para que la compuesta sea creciente.
Los valores pedidos son todos los a en $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

4. (Versión 1)
Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Sea $f(x) = |x(x-2)|$, donde $-1 \le x \le 1$. Entonces f no es creciente ni decreciente. (1 punto)

Solución:
Verdadero.
Puede hacer un esbozo de la gráfica. f es decreciente en $[-1, 0]$, f es creciente en $[0, 1]$.

b) Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces f no tiene valor máximo. (1.5 puntos)

Solución:
Falso.
Hay varios contraejemplos que pueden usarse:
Contraejemplo: $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ es inyectiva y tiene máximo 0.
Contraejemplo: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$ es inyectiva y tiene máximo 1.

c) La función $g:[-a^2-1, a^2+2] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x)=x^2-2ax+1$ no es inyectiva para ningún valor de la constante real a. (1.5 puntos)

Solución:
Verdadero.
$g(x)=x^2-2ax+1=(x-a)^2+1-a^2$ tiene vértice en $(a, 1-a^2)$.
Para que sea inyectiva en $[-a^2-1, a^2+2]$ tendría que cumplirse $a^2+2 \leq a$ ó $-a^2-1 \geq a$, pero el C.S. de ambas inecuaciones es vacío.

4. (Versión 2)
Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) La función $f(x)=\sqrt{x+1}+e^x$, con $x>-1$, es creciente. (1 punto)

Solución:
Verdadero.
$\sqrt{x+1}$ es creciente en $]-1,+\infty[$, e^x es creciente en $]-1,+\infty[$. Entonces f al ser la suma de funciones crecientes es creciente.

b) Si una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces f no tiene valor mínimo. (1.5 puntos)

Solución:
Falso.
Hay varios contraejemplos:
Contraejemplo: $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ es inyectiva y tiene mínimo 0.
Contraejemplo: $f(x)=\begin{cases} -e^x, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ es inyectiva y tiene mínimo -1.

c) La función $g:[-a^2-2, a^2+3] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x)=x^2+2ax+1$ no es inyectiva para ningún valor de la constante real a. (1.5 puntos)

Solución:
Verdadero.
$g(x)=x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2$ tiene vértice en $(-a, 1-a^2)$.
Para que sea inyectiva en $[-a^2-2, a^2+3]$ tendría que cumplirse $a^2+3 \leq -a$ ó $-a^2-2 \geq -a$, pero el C.S. de ambas inecuaciones es vacío.

San Miguel, 17 de junio del 2021.