ALGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN PARCIAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2018-1

Horario: Todos   Duración: 3 horas

Elaborado por todos los profesores

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni calculadoras.
- Enumere las páginas del cuadernillo en la parte superior del 1 al 12 y utilice cada página para resolver cada una de las preguntas, según el orden establecido en la prueba.
- Resuelva TODAS las preguntas.

---

1. Halle la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4,6)$, tiene su eje focal paralelo al eje X y sus asíntotas son las rectas $2x+y=3$ y $2x-y=1$. (3 pt)

2. Sea ABC un triángulo isósceles con lados congruentes AB y BC. Si $B=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AD}=\text{Proy}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=(2,3,1)$, el punto D está en el plano XZ, y la altura relativa a AC mide $\sqrt{19}$ unidades, halle las coordenadas de los vértices del triángulo. (3 pt)

3. Dadas las rectas (4 pt)

$$\mathscr{L}_1: 2x+3y=6, \qquad \mathscr{L}_2: 2x+3y=13 \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}_3: x+5y=17,$$

halle la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$ que cumple lo siguiente:

- $\mathscr{L}_1$ es secante a la circunferencia en los puntos A y B.
- La intersección de $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ es el centro de la circunferencia.
- Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$ se intersecan en el punto D, el cual cumple $d(D,B)=3\,d(A,D)$.

4. En un sistema de coordenadas rectangulares XY, donde los extremos del eje menor de una elipse $\mathscr{E}$ son los puntos $B_1(1,-\sqrt{3})$ y $B_2(-1,\sqrt{3})$, se rota un ángulo agudo θ en sentido antihorario, y se obtiene un sistema de ejes UV, donde la ecuación de $\mathscr{E}$ llega a ser $\dfrac{u^2}{20}+\dfrac{v^2}{4}=1$. Halle

   a) Las ecuaciones de rotación que relacionan los sistemas de coordenadas XY y UV. (1 pt)

   b) La ecuación de la forma $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ para $\mathscr{E}$ en el sistema XY. (2 pt)

c) Las coordenadas de los focos de la elipse en ambos sistemas de coordenadas. (2 pt)

5. Dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ cuyos diámetros miden 10 unidades, son tangentes exteriores en el punto T, y la ecuación de la recta tangente común es $\mathscr{L} : 3x+4y-30=0$. Sea $\mathscr{E}$ la elipse cuyo centro es T, uno de cuyos focos es el centro de $\mathscr{C}_1$ y uno de cuyos vértices es el otro extremo del diámetro de $\mathscr{C}_2$. Si $A(1,7)$ es un punto de $\mathscr{C}_2$, halle

   a) la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}_2$ si la abscisa de su centro es mayor que 4, y (2 pt)

   b) la ecuación de la elipse $\mathscr{E}$. (3 pt)

San Miguel, 10 de mayo de 2018.

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ENTREGADO
23 MAYO 2018

Primer examen

Año	Número
2018	1113

Código de alumno

Lázaro Carbajal, Diego Estuardo
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Lázaro
Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H-123-1

Fecha: 10/05/18

Nombre del profesor: Gutierrez

Nota
20

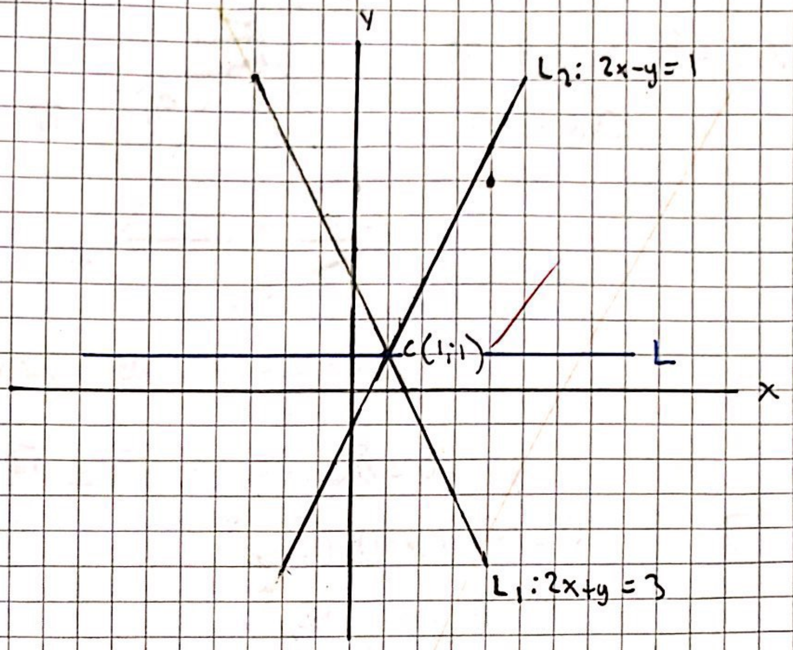
Firma del profesor

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcridad posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posible.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

P①



$C: L_1 \cap L_2$ → Intersección de asíntotas es el centro de la hipérbola.

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases} +$$
$$4x=4$$

$x=1 \wedge y=1$ → $\underline{C(1;1)}$ ⇒ Puesto que H tiene eje focal horizontal:

$L: y=1$

→ Las ecuaciones de las asíntotas de una Hipérbola con eje focal horizontal ~~son~~:

$$y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$$

→ teniendo ya $(h,k)=(1;1)$ → las ecuaciones son:

$$(y-1) = \pm \frac{b}{a}(x-h)$$

Las que tenemos:

- $2x-y=1$ → $y-1 = 2x-2$ ⇒ $(y-1) = 2(x-2)$
- $2x+y=3$ → $y-1 = -2x+2$ ⇒ $(y-1) = -2(x-2)$

⇒ Así $\frac{b}{a}=2$
$b=2a$.

3

Luego:

$$H: \frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

→ Pero $(4;6) \in H$ y $b=2a$

$$\rightarrow \frac{(4-1)^2}{a^2} - \frac{(6-1)^2}{4a^2} = 1$$

$$\rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{25}{4a^2} = 1$$

$$9 - \frac{25}{4} = a^2 \rightarrow a = \sqrt{11}/2$$
$$b = \sqrt{11}$$

Finalmente: $\boxed{H: \frac{(x-1)^2}{11/4} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1}$

$$\frac{36}{4a^2} - \frac{25}{4a^2} = 1$$

$$\frac{36-25}{4a^2} = 1$$

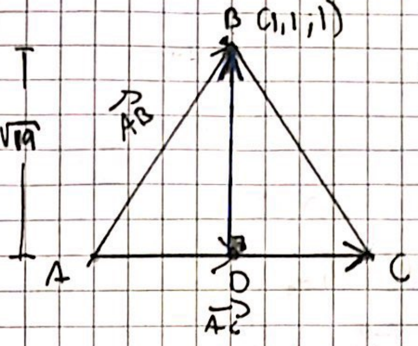
$$\frac{11}{4} = a^2$$

$$\sqrt{11}/2 = a$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para
cálculos y desarrollos
(borrador)

P②



$\vec{AD} = \text{Proy}_{\vec{AC}}\, \vec{AB} = (2,3,1)$

$D = (x,0,z)$

Por ser isóseles: $\overline{AC} = 2\,\overline{AD}$

$\overline{AD} \perp \vec{DB} \rightarrow \vec{AD}\cdot\vec{DB} = 0$

$(2,3,1)\cdot(1-x;1;1-z) = 0$

$(2-2x)+3+(1-z) = 0$

$\rightarrow 2x+z = 6$

Además:

$\|\vec{DB}\| = \sqrt{19}$

$\rightarrow \sqrt{(1-x)^2+1+(1-z)^2} = \sqrt{19}$

$\rightarrow (1-x)^2+(1-z)^2 = 18$

$$\begin{cases} 2x+z = 6 \\ (x-1)^2+(1-z)^2 = 18 \end{cases}$$

$\rightarrow (2x-5) = (1-z)$

$\rightarrow (x-1)^2+(1-z)^2 = 18$

$\rightarrow (x-1)^2+(2x-5)^2 = 18$

$x^2-2x+1+4x^2-20x+25 = 18$

$5x^2-22x+8 = 0$

$5x \quad -2$

$x \quad -4$

$x = 2/5 \wedge z = 26/5$

$x = 4 \wedge z = -2$

$\rightarrow \bar{D} = (4,0,-2) \vee \bar{D} = (2/5, 0, \frac{26}{5})$

①

Así: con $\bar{D} = (4,0,-2)$

$\overline{AD} = (2,3,1) = D-A$

$\rightarrow A = D-(2,3,1)$

$A = (4,0,-2)-(2,3,1) = (2,-3,-3)$

También

$\vec{DC} = \vec{AB} \rightarrow \overline{DC} = (2,3,1)$

$C-D = (2,3,1)$

$C = (2,3,1)+D = (2,3,1)+(4,0,-2)$

$C = (6,3,-1)$

Solución (1): con $\bar{D} = (4,0,-2)$

$A = (2,-3,-3)$, $B = (1;1;1)$ y $C = (6,3,-1)$

$2-2x+3+1-z=0$

$2(1-x)+3+(1-z)=0$

$2(1-x)+3=(z-1)$

$2-2x+3$

$5-2x=(z-1)$

26

-18

8

$6-\frac{4}{5}$

$26/5$

$+\frac{400}{25}$

④

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Con $D = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{26}{5}\right)$

- $\overrightarrow{AD} = (7, 3, 1)$

$D - A = (7, 3, 1) \rightarrow A = D - (7, 3, 1)$

$A = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{26}{5}\right) - (7, 3, 1)$

$A = \left(-\frac{8}{5}, -3, \frac{21}{5}\right)$

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\rightarrow \overrightarrow{DC} = (7, 3, 1)$

$C - D = (7, 3, 1) \rightarrow C = (7, 3, 1) + D$

$C = (7, 3, 1) + \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{21}{5}\right)$

$C = \left(\frac{12}{5}, 3, \frac{31}{5}\right)$

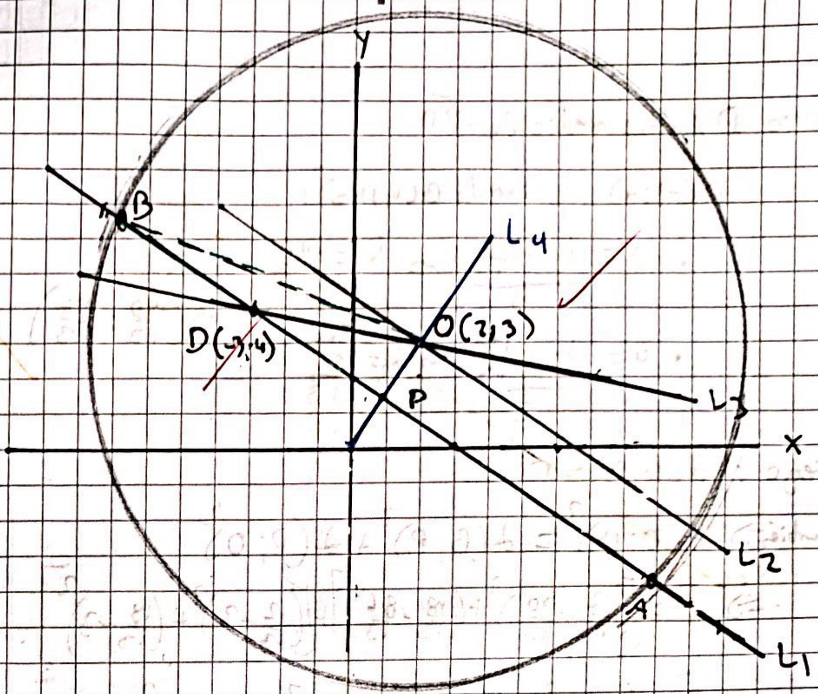
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Solución ② : Con } \bar{D} = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{26}{5}\right) \\ A = \left(-\frac{8}{5}, -3, +\frac{21}{5}\right),\ B = (1; 1; 1) \text{ y } C = \left(\frac{12}{5}, 3, \frac{31}{5}\right)\end{array}}$$ //

3.0

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

P③



$O(h;k): L_2 \cap L_3$

$\to \begin{cases} 2x+3y=13 \\ x+5y=17 \end{cases} \to \begin{matrix} 2x+3y=13 \\ -2x-10y=-34 \end{matrix} \downarrow$

$-7y=-21$

$y=3 \wedge x=2 \to \underline{O(2;3)}$

$D: L_1 \cap L_3$

$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+5y=17 \end{cases} \to \begin{matrix} -2x-3y=-6 \\ 2x+10y=34 \end{matrix} \downarrow$

$7y=28$

$y=4 \wedge x=-3 \to D(-3;4)$

$\to L_4 \perp L_2$

$\Downarrow$

$m_4 \cdot m_2 = -1 \quad O \in L_4$

$m_4 \cdot \frac{-2}{3} = -1 \to \quad y-3 = \frac{3}{2}(x-2)$

$m_4 = \frac{3}{2}$

$\hookrightarrow 2y - \cancel{6} = 3x - \cancel{6}$

$L_4: 2y-3x=0$

$\to P: L_4 \cap L_1$

$\begin{cases} 2y=3x \\ 2x+3y=6 \end{cases} \to \begin{matrix} 4y=6x \\ 6x+9y=18 \end{matrix} \Rightarrow 13y=18$

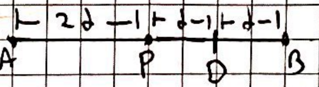
$y=18/13 \wedge x=\frac{12}{13}$

$P\left(\frac{12}{13}; \frac{18}{13}\right)$

$\to$ Dato que $\overline{AB}$ secante de la circunferencia

P es punto medio de AB.

luego:



$\Rightarrow$ Así $d(A,P)=d(P,B)$

y $d(D,B)=3d(A,D)$

Con lo que D es punto medio de $\overline{PB}$.

⑥

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

→ Como D punto medio de $\overrightarrow{PB}$

$D(-3;4)$ (siendo $B(b_1;b_2)$)

- $-3 = \dfrac{b_1 + \frac{12}{13}}{2} \rightarrow b_1 = -\dfrac{90}{13}$
- $4 = \dfrac{b_2 + \frac{18}{13}}{2} \rightarrow b_2 = \dfrac{86}{13}$

$\Rightarrow B\left(-\frac{90}{13} ; \frac{86}{13}\right)$

Luego: $d(O;B) = r$

También $\Rightarrow d(O;B)^2 = d(B;P)^2 + d(P;O)^2$

$$\Rightarrow r^2 = \left[\left(\frac{12}{13}+\frac{90}{13}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}-\frac{86}{13}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{12}{13}-2\right)^2 + \left(\frac{18}{13}-3\right)^2\right]$$

$$r^2 = \left(\frac{102}{13}\right)^2 + \left(\frac{68}{13}\right)^2 + \left(\frac{-14}{13}\right)^2 + \left(\frac{-21}{13}\right)^2$$

$$r^2 = \left(\frac{17.6}{13}\right)^2 + \left(\frac{17.4}{13}\right)^2 + \left(\frac{7.2}{13}\right)^2 + \left(\frac{7.3}{13}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{17^2}{13^2}(36+16) + \frac{7^2}{13^2}(4+9)$$

$$r^2 = \frac{17^2}{13^2}(\overset{4}{\cancel{52}}) + \frac{7^2}{\cancel{13^2}}(\cancel{13})$$

$$r^2 = \frac{17^2 \cdot 4}{13} + \frac{7^2}{13} = \frac{1156+49}{13} = \frac{1205}{13}$$

Así:

$$\boxed{\gamma : (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1205}{13}}$$

4

$-6 - \frac{12}{13}$

$\frac{39}{13}$

$-78 - 18$

3

$-\frac{90}{13} = b_1$

$8 - \frac{18}{13} = \frac{86}{13}$

$104 \,\underline{|13}$
$82 \,\underline{|13}$
4

$104 - 18$

92

$\frac{36}{13} + \frac{96}{13}$

$\frac{114}{13}$

$\frac{132}{13}$

39
18
21

$\frac{24}{13} - \frac{92}{13} = \frac{-68}{13}$

-68 $\frac{39}{13}$ $\frac{26}{13}$

$A\left(\frac{132}{13} \quad \frac{-68}{13}\right)$

$12 - \frac{39}{13}$

27

$P\left(\frac{12}{13} ; \frac{18}{13}\right)$

33
2848
4
1556

$102 \,\underline{|13}$

12
17
11 0
12

$86 -$
18
68

$102 \,\underline{|2}$
$51 \,\underline{|3}$
17

$68 \,\underline{|2}$
$34 \,\underline{|2}$
17

$68 \,|\, 17$ 17.4

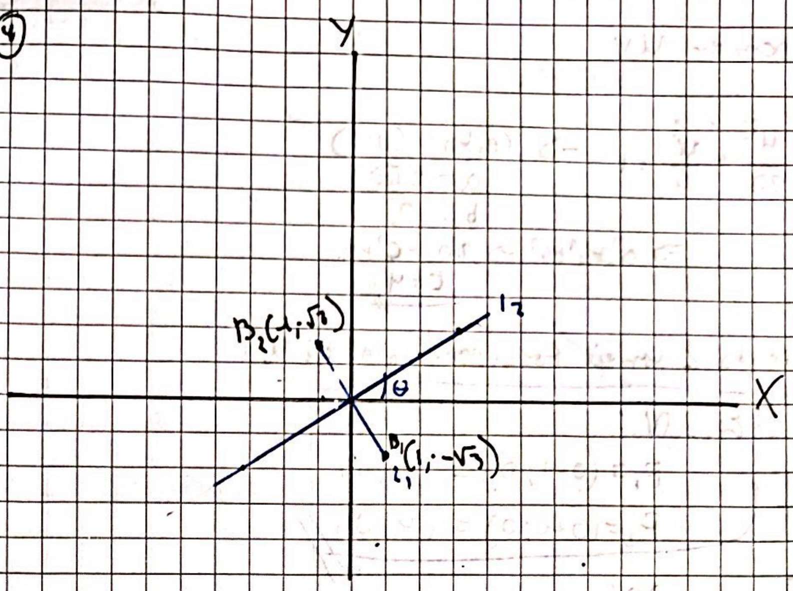
$13 \times 4 = 52$

$17 \times 17 = 289$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

P④



L_1: eje menor → Punto medio de B_2 y $B_1 = (0;0)$

→ $L_1: y = -\sqrt{3}x$

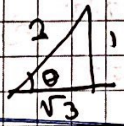
L_2: eje focal → $L_1 \perp L_2$ → $m_1 \cdot m_2 = -1$

$-\sqrt{3} \cdot m_2 = -1$

$m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

→ $L_2: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

→ $m_2 = tg\,\theta$ ↳



ⓐ

Así:

Ecuaciones de Rotación:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ v = \frac{\sqrt{3}y}{2} - \frac{1}{2}x \end{cases}$$

ⓑ

$$\mathcal{E}: \frac{u^2}{20} + \frac{v^2}{4} = 1$$

$$\mathcal{E}: u^2 + 5v^2 = 20$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y+\sqrt{3}x}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{\sqrt{3}y-x}{2}\right)^2 = 20$$

$$\rightarrow y^2 + 2\sqrt{3}xy + 3x^2 + 5(3y^2 - 2\sqrt{3}xy + x^2) = 80$$

$$y^2 + 2\sqrt{3}xy + 3x^2 + 15y^2 - 10\sqrt{3}xy + 5x^2 = 80$$

$$8x^2 - 8\sqrt{3}xy + 16y^2 = 80$$

$$x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 10$$

$$\boxed{\mathcal{E}: x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0}$$

$\sqrt{3}y = +\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{3}{2}y'$ +

$-x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$

$\sqrt{3}y - x = 2y'$

$\sqrt{3}x = \frac{3}{2}x' - \frac{y'}{2}\sqrt{3}$ +

$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}x + y}{2} = x'$

$y = \lambda\,sen\,\theta$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ 49 \\ \hline 1205 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 289 \times \\ 4 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$1205 \,|\, 13$

$35 \quad 9$

130

117

⑧ **Presente aquí su trabajo**

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

ⓒ → Focos en UV

- $\frac{u^2}{20} + \frac{v^2}{4} = 1 \rightarrow$ Centro: $(0;0)$

$a = 2\sqrt{5}$

$b = 2$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 20 = c^2 + 4$

$\underline{c = 4}$ //

Así siendo el eje focal paralelo al eje u :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{En UV :} \\ F_1 = (0-c;0) = (-4;0) \\ F_2 = (0+c;0) = (4;0) \end{array}}$$ //

→ Focos en XY

$$F_1 \text{ con } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}(-4) - 0 \rightarrow x = -2\sqrt{3} \\ y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \rightarrow y = \frac{1}{2}(-4) + 0 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$F_1\ (-2\sqrt{3}, -2)$

$$F_2 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}(4) - 0 \rightarrow x = 2\sqrt{3} \Rightarrow F_2\ (2\sqrt{3}, 2) \\ y = \frac{1}{2}(4) - 0 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Así :} \\ \quad \text{En XY} \\ \quad F_1 = (-2\sqrt{3}, 2) \\ \quad F_2 = (2\sqrt{3}, 2) \end{array}}$$ //

✓

⑤

⑨

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

25 - 90 + 81

$9(h_2^2 - 18h_2 + 81)$

18.

$\frac{9}{16}$

25 - 10 + 1

$h_2^2 - 2h_2 + 1$

15 + 40 - 20

55 - 30

25

400 - 160 + 16

240

376

356

5 . 5 . 4 . 4

20 . 20

16 +

729 + 16

745 -

400

$345 \mid 5$

69

-125

69

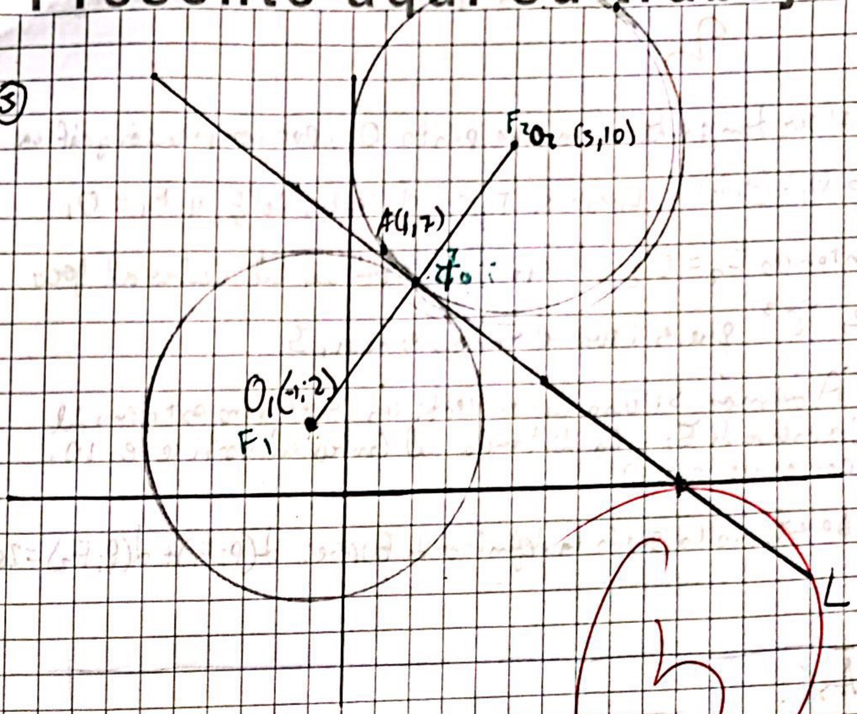
56

+340

625

970

P⑤



⑤

$\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: Diametro = 10 → radio = 5

Distancia de O_2 a L es 5. → Sea $O_2(h_2, k_2)$

$d(O_2; L) = 5$

$\rightarrow \frac{|3h_2+4k_2-30|}{5} = 5$

→ $|3h_2+4k_2-30| = 25$ → suponiendo $3h_2+4k_2-30 > 0$ por la gráfica.

$3h_2+4k_2-30 = 25$

$\rightarrow 3h_2+4k_2 = 55 \rightarrow 4k_2 - 28 = 27 - 3h_2$

$4(k_2-7) = -3(h_2-9)$

$(k_2-7) = -\frac{3}{4}(h_2-9)$

Además: $A \in \mathcal{C}_2$

$\rightarrow (h_2-1)^2 + (k_2-7)^2 = 25$

$\rightarrow (h_2-1)^2 + \frac{9}{16}(h_2-9)^2 = 25$

$16(h_2-1)^2 + 9(h_2-9)^2 = 25 \cdot 16$

$16h_2^2 - 32h_2 + 16 + 9h_2^2 - 162h_2 + 729 = 400$

$25h_2^2 - 194h_2 + 345 = 0$

$25h_2 \quad -5$

$1h_2 \quad -69$

$h_2 = 5 \wedge k_2 = 10$

$h_2 = \frac{69}{25} \times < 4$ $\rightarrow O_2(5;10)$

⑨ $\boxed{\text{Así } \mathcal{C}_2 : (x-5)^2 + (y-10)^2 = 25}$

2

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3

ⓑ

· Al ser tangentes al mismo punto O_1, por comparación gráfica es $O_1 = (-1;2)$, Luego si T es el centro de ξ y $F_1 = O_1$ entonces $F_2 = O_2$, Luego la distancia del Centro al foco es "c" que es igual al radio, es decir, 3.

· Además si uno de los vertices es el otro extremo del diametro de ξ_2. La distancia del Centro al vertice es 10. con lo que $a = 10$.

De este modo, según la definición de Elipse: $d(P;F_1) + d(P;F_2) = 2a$

$$\boxed{\text{Así:} \quad \xi : \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2} = 20}$$

6