ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ENTREGADO 19 JUN 2019

Práctica

Año				Número			
2	0	1	9	1	0	4	3

Código de alumno

Gonzales Huisa Omar Andrés

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Omar Gonzales

Firma del alumno

Curso: FCAL

Práctica Nº: P3

Horario de práctica: P-110

Fecha: 6 / 6 / 19

Nota

19

Nombre del profesor: J. Flores

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2019-1

Horario: *15:00 - 17:00* Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

---

1. Considere la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-2}, & \text{si } -3<x<1 \\ 3-\sqrt{5-x}, & \text{si } \boxed{1\le x\le 4}.\end{cases}$$

   a) Indique si la función f es creciente o decreciente en los intervalos $]-3,1[$ y $[1,4]$. (2p)

   b) Indique si la función f es inyectiva. En caso de que lo sea, determine el dominio, la regla de correspondencia y esboce la gráfica de la función f^{-1}. (3p)

2. a) Demuestre que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=5^x+x^5$ es creciente. (2p)

   b) ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $5^x+x^5\ge 6$? (2p)

3. Considere la función $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}$, $x\neq 0$.

   a) Demuestre que la función f es decreciente en el intervalo $]0,+\infty[$. (1.5p)

   b) Demuestre que la función f es decreciente en el intervalo $]-\infty,0[$. (1.5p)

   c) ¿La función f es inyectiva? Justifique su respuesta. (1p)

4. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) Si $b>0$ entonces $b^{1/3}\ge b^{1/4}$. (1p)

   b) Si las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son decrecientes, entonces la composición $f\circ g$ es creciente. (1p)

   c) El valor máximo de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^{-x^2}$ es igual a 1. (1p)

[1,2] (1)

x^2

5. Sea a una constante real. Considere la función

$$f(x) = x^2 - 2ax + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{a < 1}$ $(x-1)$

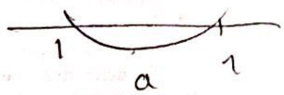
a) Encuentre el conjunto de todos los valores de a tales que f es creciente en el intervalo $[1,2]$. (2p)

b) Encuentre el conjunto de todos los valores de a tales que f es inyectiva en el intervalo $[1,2]$. (2p)

$(x-a)^2 - a^2 + 1$

$x^2 - 2ax + c$

San Miguel, 6 de junio de 2019.



$(x-1)^2$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5,0

1)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-2}, & -3 < x < 1 \quad \ldots f_1 \\ 3-\sqrt{5-x}, & 1 \le x \le 4 \quad \ldots f_2 \end{cases}$$

a) i) $x \in]-3,1[$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} = \frac{5}{x-2} + 2$$

• Si $a,b \in D(f)$:

$$a < b$$
$$(a-2 < b-2)^{-1} \ldots \quad -3 < a < 1 \wedge -3 < b < 1$$
$$-5 < a-2 < -1 \quad -5 < b-2 < -1$$
$$(-) \quad (-)$$

se puede invertir

$$5 \times \left(\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}\right)$$

$$2 + \left(\frac{5}{a-2} > \frac{5}{b-2}\right)$$

$$\frac{5}{a-2} + 2 > \frac{5}{b-2} + 2 \Rightarrow f(a) > f(b)$$

$\Rightarrow$ En el intervalo $]-3,1[$, f es decreciente

ii) $x \in [1,4]$

$$f(x) = 3 - \sqrt{5-x}$$

• Si $a,b \in D(f)$:

$$a < b \qquad 1 \le a \le 4 \qquad 1 \le b \le 4$$
$$-a > -b \qquad -1 \ge -a \ge -4 \qquad -1 \ge -b \ge -4$$
$$5-a > 5-b \qquad 4 \ge 5-a \ge 1 \qquad 4 \ge 5-b \ge 1$$
$$(+) \quad (+)$$

sí se puede tomar raíz cuadrada

$$\sqrt{5-a} > \sqrt{5-b}$$
$$-\sqrt{5-a} < -\sqrt{5-b}$$
$$3-\sqrt{5-a} < 3-\sqrt{5-b}$$
$$f(a) < f(b)$$

$\Rightarrow$ En el intervalo $[1,4]$, f es creciente

b) *Para que f sea inyectiva, ambos tramos tienen que ser inyectivos y sus rangos no deben tener intersección:

i)
- f_1 es decreciente, por lo tanto, es inyectiva
- f_2 es creciente, por lo tanto, es inyectiva

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

ii) $R(f_1)$:

$$-3 < x < 1$$
$$-5 < x-2 < -1$$
$$-\frac{1}{5} > \frac{1}{x-2} > -1$$
$$-1 > \frac{5}{x-2} > -5$$
$$1 > \underbrace{\frac{5}{x-2} + 2}_{R(f_1)} > -3$$

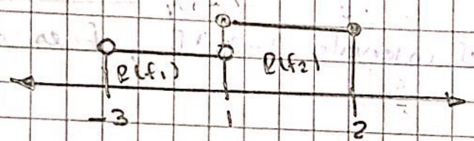
$\Rightarrow R(f_1) \in]-3, 1[$

$R(f_2)$:

$$1 \leq x \leq 4$$
$$-1 \geq -x \geq -4$$
$$4 \geq 5-x \geq 1$$
$$2 \geq \sqrt{5-x} \geq 1$$
$$-2 \leq -\sqrt{5-x} \leq -1$$
$$1 \leq \underbrace{3-\sqrt{5-x}}_{R(f_2)} \leq 2$$

$\Rightarrow R(f_2) \in [1, 2]$

$\therefore$



$R(f_1) \cap R(f_2) = \emptyset$

Por lo tanto, f es inyectiva

iii) Hallando su inversa:

f_1 : $y = \frac{5}{x-2} + 2$

$$y - 2 = \frac{5}{x-2}$$
$$x - 2 = \frac{5}{y-2}$$
$$x = 2 + \frac{5}{y-2}$$
$$x = \frac{2y+1}{y-2}$$
$$f_1^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

f_2 : $y = 3 - \sqrt{5-x}$

$$y-3 = -\sqrt{5-x}$$
$$3-y = \sqrt{5-x}$$
$$(3-y)^2 = 5-x$$
$$x = 5-(3-y)^2$$
$$x = -(y-3)^2+5$$
$$f_2^{-1}(x) = -(x-3)^2+5$$

Sabiendo que : $R(f) = D(f^{-1})$

$D(f_1^{-1}) =]-3, 1[$

$D(f_2^{-1}) = [1, 2]$

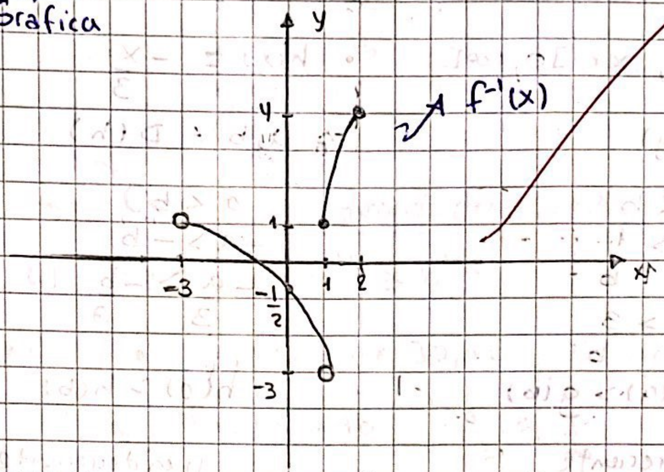
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-2}, & -3 < x < 1 \\ -(x-3)^2+5, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$D(f^{-1}) =]-3, 2]$$

Gráfica



② a) $f(x) = 5^x + x^5$

$f(x) = g(x) + h(x) = (g+h)_{(x)}$

$\Rightarrow$ Si $a, b \in D(g+h) \wedge a < b \longrightarrow f(a) < f(b)$??

Como $a, b \in D(g+h)$: $a, b \in D(g) \cap D(h)$

- $g(x) = 5^x$

$a < b$

$5^a < 5^b$

$g(a) < g(b)$

g es creciente

- $h(x) = x^5$

$a < b$

$a^5 < b^5$

$h(a) < h(b)$

h es creciente

$$\Rightarrow \begin{array}{l} g(a) < g(b) \\ h(a) < h(b) \\ \hline g(a)+h(a) < g(b)+h(b) \\ (g+h)_{(a)} < (g+h)_{(b)} \\ f(a) < f(b) \end{array} \quad (+)$$

f es creciente

b) $5^x + x^5 \geq 6$, piden hallar el C.S.

i) $5^x + x^5 = 6$

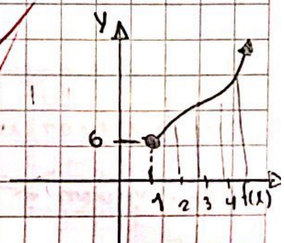
$x = 1$

- Como f es creciente :

$5^x + x^5 \geq 6$

$f(x) \geq f(1)$

$x \geq 1$



$\Rightarrow$ C.S $= [1, +\infty\rangle$

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

③ $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$, $x \neq 0$

3.0

a) $x \in]0, +\infty[$

$f(x) = \underbrace{\frac{3}{x}}_{g(x)} - \underbrace{\frac{x}{3}}_{h(x)}$

Si $a, b \in D(f)$:

• $g(x) = \frac{3}{x}$, $x \in]0, +\infty[$

$\Rightarrow a, b \in D(g)$

$a < b$

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$\frac{3}{a} > \frac{3}{b}$

$g(a) > g(b)$

g es decreciente

• $h(x) = -\frac{x}{3}$

$\Rightarrow a, b \in D(h)$

$a < b$

$-a > -b$

$-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$

$h(a) > h(b)$

h es decreciente

$\Rightarrow$ $g(a) > g(b)$

$h(a) > h(b)$

$(g+h)_{(a)} > (g+h)_{(b)}$

$f(a) > f(b) \rightarrow$ es decreciente

b) $x \in]-\infty, 0[$

$f(x) = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$

$f(x) = g(x) + h(x) = (g+h)_{(x)}$

* Si $a, b \in D(f)$:

• $g(x) = \frac{3}{x}$

$a < b$

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$\frac{3}{a} > \frac{3}{b}$

$g(a) > g(b)$

• $h(x) = -\frac{x}{3}$

$a < b$

$-a > -b$

$-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$

$h(a) > h(b)$

$\Rightarrow$ $g(a) > g(b)$

$h(a) > h(b)$

$(g+h)_{(a)} > (g+h)_{(b)}$

$f(a) > f(b) \rightarrow$ es decreciente

Scanned with CamScanner

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

c) Sí es inyectiva

$\Rightarrow$ $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{x}{3} = g(x) + h(x)$; $x \neq 0$

En la parte a y b; demostramos que g(x) y h(x) son decrecientes en todo su dominio

Si $a, b \in D(f)$; $a < b \rightarrow f(a) > f(b)$??

$\Rightarrow$ $g(a) > g(b)$
$h(a) > h(b)$ +
$f(a) > f(b)$; f es decreciente en todo su dominio

$\Rightarrow$ Como es una función decreciente, f es inyectiva.

4 a) $b > 0 \rightarrow b^{1/3} \geq b^{1/4}$

(falso) • cuando $b \in]0,1[$, la funcion b^x es decreciente

Por lo tanto: $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}$

$b^{1/3} \leq b^{1/4}$

No se cumple (F)

b) f y g son decrecientes $\rightarrow$ fog es creciente ??

Si $a, b \in D(fog) \wedge a < b \rightarrow (fog)(a) < (fog)(b)$

$\Rightarrow$ $a < b$
$g(a) > g(b)$, pues g es decreciente
$f(g(a)) < f(g(b))$, pues f es decreciente
$(fog)(a) < (fog)(b)$
fog es creciente (V)

c) Max valor de $f(x) = e^{-x^2}$ igual a 1 ??

$f(x) = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$

$\rightarrow$ Como $x^2 \geq 0$, el "e" estará elevado a un exponente mayor o igual a cero

• Cuando $x^2 \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow f(x)$ no tiene minimo

• Máx valor cuando $x = 0$; $\frac{1}{e^{0^2}} = 1 \rightarrow$ máximo valor

(V)

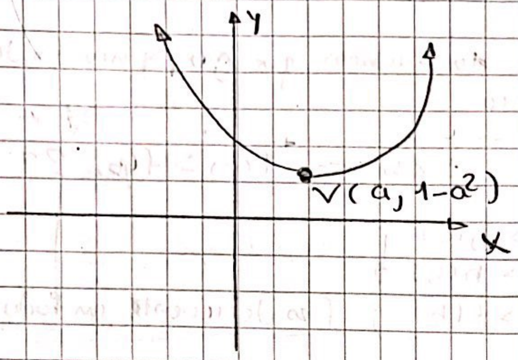
Vo
0
No.
3.

Presente aquí su trabajo

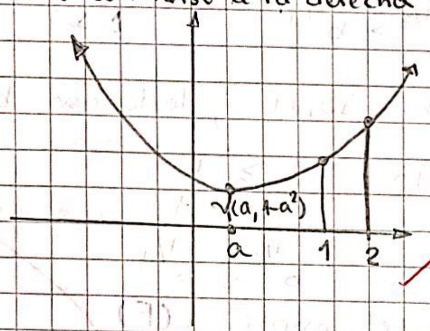
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(5) $f(x) = x^2 - 2ax + 1$

$$f(x) = (x-a)^2 + (1-a^2), \quad x \in \mathbb{R}$$



a) Para que f sea creciente en $[1,2]$, este intervalo debe encontrarse a la derecha del vertice

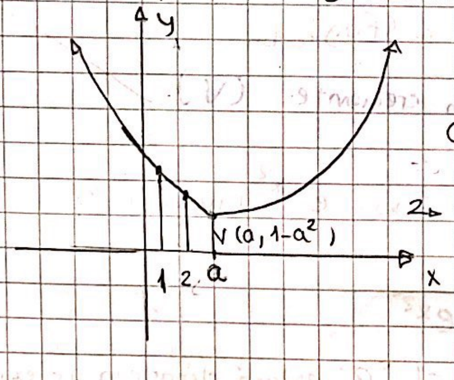


$\Rightarrow \quad a \leq 1 < 2$

$a \leq 1 \quad \Rightarrow \quad C.S =]-\infty, 1]$

b) Para que f sea inyectiva en el intervalo $[1,2]$, no debe haber ninguna recta horizontal que cruze a la gráfica en más de un punto. Hay tres casos.

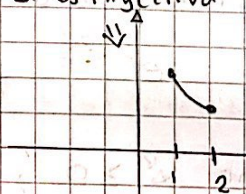
i)



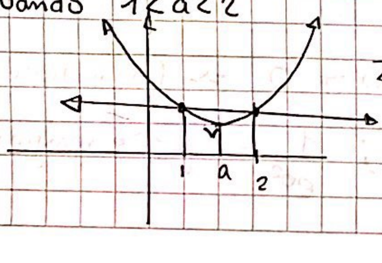
Cuando: $a \geq 2$

$\Rightarrow$ Sí es inyectiva

$\Downarrow$

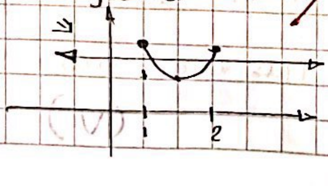


ii) Cuando $1 < a < 2$



$\Rightarrow$ No es inyectiva

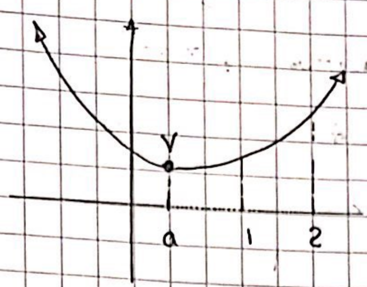
$\Rightarrow$



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

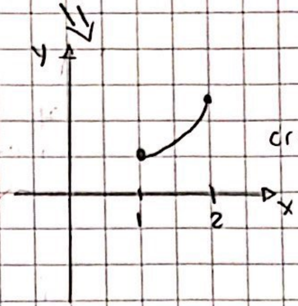
Presente aquí su trabajo

iii) cuando $a \leq 1$



Sí es inyectiva

$\Downarrow$



creciente

$\Rightarrow C.S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$