ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

PUCP

ENTREGADO
25 ABR. 2018

Año 2018 Número 3249
Código de alumno

Práctica

Maceda Virhuez Leonardo Jesus
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica Nº: Pd 2

Horario de práctica: H-119

Fecha: 16/04/18

Nombre del profesor: S. Ramirez

Nota
20

Firma del jefe de práctica
Nombre y apellido: (iniciales) MQLL

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcridad posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posible.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Segunda Práctica Calificada

Semestre Académico 2018 -1

Horario: B125, 0113, 0114, 0116 a 0122, 0124 a 0126 (Turno 2) Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. Dada la ecuación $\mathscr{E}: 4x(x-4)+16(y^2-3)=0$, esboce la gráfica de $\mathscr{E}$ indicando las coordenadas de sus vértices, focos y extremos del eje menor. (4 p.)

2. Los focos de una elipse $\mathscr{E}$ cuyo eje focal es paralelo al eje X están en las rectas $\mathscr{L}_1: y=x-8$ y $\mathscr{L}_2: y=-x+8$, uno en cada recta. Uno de los vértices de $\mathscr{E}$ es el punto $V_1=(8-\sqrt{20},4)$. Halle la ecuación de $\mathscr{E}$. (4 p.)

3. Halle la ecuación de la parábola que pasa por los focos de la elipse $\mathscr{E}: \dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{20}=1$, tiene directriz $\mathscr{D}: x=3$ y la abscisa de su vértice es positiva. Además, esboce la gráfica de la parábola. (4 p.)

4. Una circunferencia $\mathscr{C}$ pasa por el punto P que es intersección de las rectas $\mathscr{L}_1: 4x+3y-33=0$ y $\mathscr{L}_2: x+2y-7=0$. El centro de $\mathscr{C}$ está en $\mathscr{L}_2$ y el segmento PQ es una cuerda de longitud 10 unidades, con Q en $\mathscr{L}_1$. Halle:

   a) las coordenadas de Q cuya abscisa es menor que 5. (2 p.)

   b) la ecuación de $\mathscr{C}$. (2 p.)

5. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ circunferencias tangentes exteriores que se intersectan en el punto $M=(3,5)$, con radios $\sqrt{5}$ y r_2, respectivamente. La recta $\mathscr{L}: x-2y+3=0$ es tangente solamente a $\mathscr{C}_2$ en el punto $T=(7,5)$. Halle las ecuaciones de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. (4 p.)

San Miguel, 16 de abril de 2018.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 3 \\ \hline 48 \\ +16 \\ \hline 64 \end{array}$$

$\frac{4}{64} = \frac{4}{8 \cdot 8}$

$\frac{4}{2 \cdot 4 \cdot 8}$

$\frac{4}{16}$

$\frac{4 \cdot 4}{8 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4}$

$\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 3 \\ \hline 48 \end{array}$$

Presente aquí su trabajo

4,0

1) $\mathcal{E}: 4x(x-4) + 16(y^2-3) = 0$

$4x^2 - 16x + 16(y^2-3) = 0$

$4x^2 - 16x + 16y^2 - 48 = 0$

$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 48 + 16y^2 = 0$

$4(x-2)^2 + 16y^2 = 64 \rightarrow \frac{4(x-2)^2}{64} + \frac{16y^2}{64} = 1$

$\mathcal{E}: \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

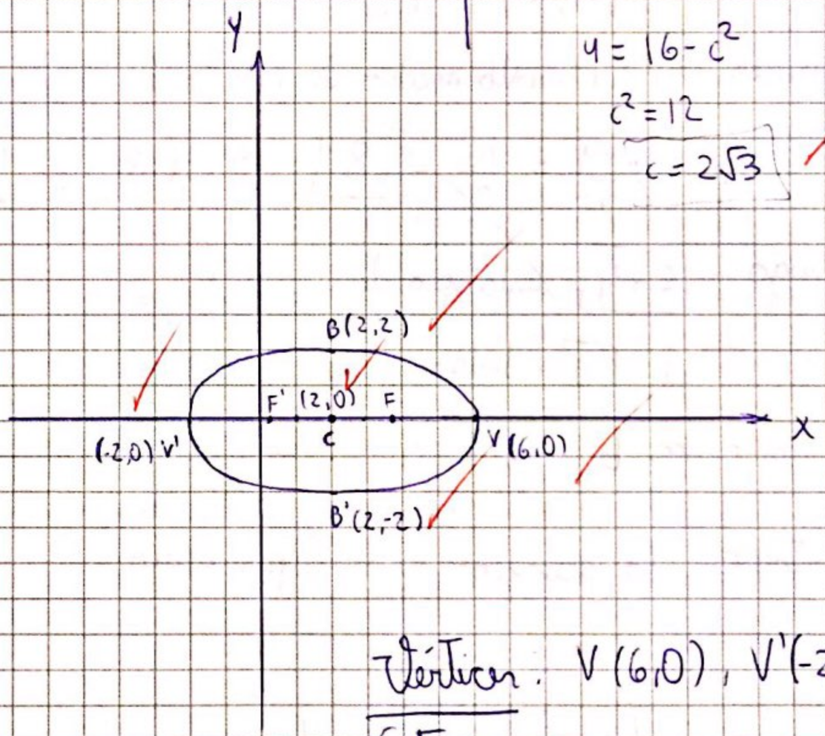
$a = 4$

$b = 2$

$4 = 16 - c^2$

$c^2 = 12$

$c = 2\sqrt{3}$



Vértices: $V(6,0)$, $V'(-2,0)$

Extremos del eje menor: $B(2,2)$, $B'(2,-2)$

Focos: $F(2+2\sqrt{3},0)$

$F'(2-2\sqrt{3},0)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(2) $\mathcal{E} \Rightarrow F_1 \in \mathcal{L}_1 : y = x - 8$

$F_2 \in \mathcal{L}_2 : y = 8 - x$

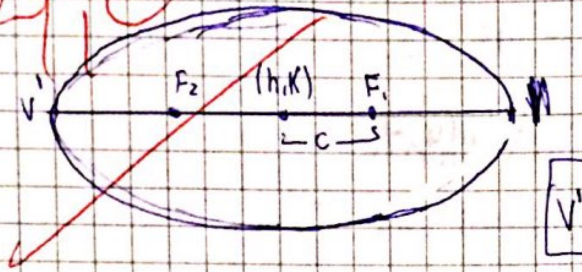
$V_1(8-\sqrt{20}, 4)$

4,0

$\mathcal{E}(h, k)$

$F_1(a, k) \rightarrow (k+8, k)$

$F_2(b, k) \rightarrow (8-k, k)$



$\boxed{V'(8-\sqrt{20}, 4)}$

Como todos están en el mismo eje focal (V', F_1, F_2, C) concluimos que $\boxed{K=4}$

Luego: $F_1(4+8, 4) \rightarrow (12, 4)$

$F_2(8-4, 4) \rightarrow (4, 4)$

calculamos h (punto medio de F_1 y F_2)

$$h = \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = \boxed{8} \rightarrow C(8,4)$$

Luego: $\boxed{c=4}$ (distancia de C a F_1)

$a = \sqrt{20}$ (distancia de C a V')

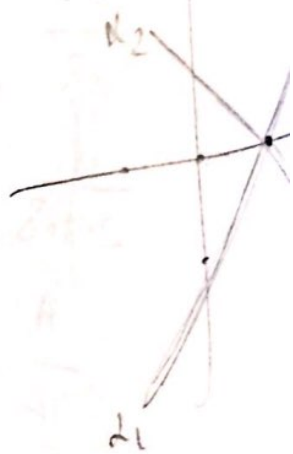
Hallamos b: $b^2 = 20 - 16 \rightarrow \boxed{b^2 = 4}$

Entonces, la ecuación de la elipse sería:

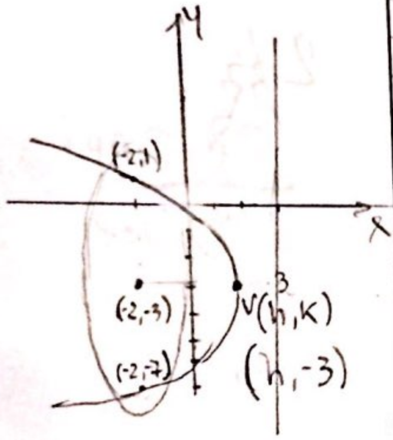
$$\mathcal{E}: \frac{(x-8)^2}{20} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

y	x
0	8
-8	0

y
0
8



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Presente aquí su trabajo

3) $\mathcal{E}: \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$ $\quad C(-2,-3)$

4/10

$a^2 = 20$ $\quad 4 = 20 - c^2 \rightarrow \boxed{c=4}$

$b^2 = 4$

Obtenemos los focos de $\mathcal{E}$ que son $F(-2,1)$ $F'(-2,-7)$ ya que el eje focal de $\mathcal{E}$ es paralelo al eje y

Parabola $\mathcal{P}$ tendrá una ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Como el vertice V está alineado con el centro de $\mathcal{E}$ V tiene cordenadas $(h,-3)$

Remplazamos en los focos de $\mathcal{E}$ que pertenecen a $\mathcal{P}$: Como la directriz de $\mathcal{P}$ es $x=3$ el vertice es de la forma $(3+p;-3)$

$(y+3)^2 = 4p(x-3-p)$ $\leftarrow$ con $F(-2,1)$

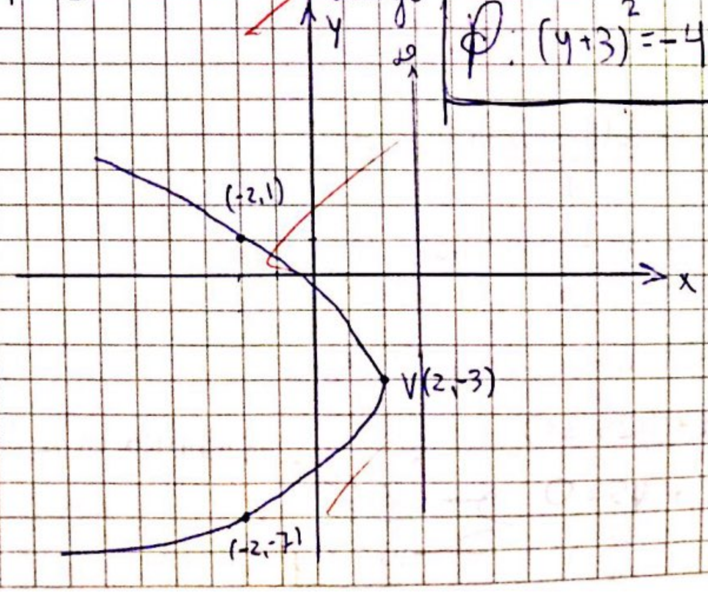
$(4)^2 = 4p(-2-3-p)$ $\quad \rightarrow p^2+5p+4=0$

$16 = 4p(-5-p)$ $\quad p \quad +1 \rightarrow \boxed{p=-1}$

$4 = -5p - p^2$ $\quad p \quad +4 \rightarrow \boxed{p=-4}$

p no puede ser -4 ya que h debe ser > 0

$p=-1 \rightarrow h=2$ Luego $\boxed{\mathcal{P}: (y+3)^2 = -4(x-2)}$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(4) $P \begin{cases} 4x+3y-33=0 \\ x+2y-7=0 \rightarrow x=7-2y \end{cases}$

$\hookrightarrow 4(7-2y)+3y-33=0$

$28-8y+3y-33=0$

$-5y=33-28 \longrightarrow y=-1 \rightarrow x=9$

Luego: $P(9,-1)$

$\mathcal{C}: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \rightarrow C(h,k) \in x+2y-7$

$\hookrightarrow h+2k-7=0$

$C(7-2k,k) \longleftarrow \boxed{h=7-2k}$

a) Sea $Q(a,b) \in L_1: 4x+3y-33=0$

$4a+3b-33=0$

$3b=33-4a$

$Q\left(a, 11-\frac{4a}{3}\right) \longleftarrow b=11-\frac{4a}{3}$

$\rightarrow d(P,Q)=10$

$\sqrt{(a-9)^2+\left(11-\frac{4a}{3}+1\right)^2}=10$

$(a-9)^2+\left(12-\frac{4a}{3}\right)^2=100$

$(a-9)^2+\left(\frac{36-4a}{3}\right)^2=100$

$(a-9)^2+\left(\frac{4(9-a)}{3}\right)^2=100$

$a^2-18a+81+\frac{16(81-18a+a^2)}{9}=100$

$\frac{9(a^2-18a)}{9}+\frac{1296-288a+16a^2}{9}=19$

$9a^2-162a+1296-288a+16a^2=171$

$25a^2-450a+1125=0$

$a^2-18a+45=0 \rightarrow \cancel{a=15}$ → la abscisa es < 5

$\rightarrow \boxed{a=3}$

$a \quad -15$

$a \quad -3$

2
33
28
05

9
100
81
19

16
$\times 81$

$450 \,|\, 25$
$25 \quad 18$
200

$1125 \,|\, 25$
$100 \quad 45$
125

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Luego tenemos que $a = 3$

$b = 11 - \frac{4a}{3} \rightarrow b = 11 - \frac{4(3)}{3}$

$\boxed{b = 7}$

$\Rightarrow Q(3,7)$

b) Sabemos que $C(h,k) \rightarrow C(7-2k, k)$ y sus distancias a P y a Q son iguales, luego.

2

$\sqrt{(7-2k-9)^2+(k+1)^2} = \sqrt{(7-2k-3)^2+(k-7)^2}$

$(-2-2k)^2+(k+1)^2 = (4-2k)^2+(k-7)^2$

$4+8k+\cancel{4k^2}+\cancel{k^2}+2k+1 = 16-16k+\cancel{4k^2}+\cancel{k^2}-14k+49$

$8k+2k+16k+14k = 16+49-1-4$

$40k = 60 \rightarrow k = \frac{6}{4} \rightarrow \boxed{k = \frac{3}{2}} \rightarrow h = 7-3$

$\boxed{h = 4}$

Hallamos el radio

$\sqrt{(4-3)^2+(\frac{3}{2}-7)^2} \rightarrow \sqrt{\frac{125}{4}} = r$

$\sqrt{(1)^2+(\frac{3-14}{2})^2}$

$\boxed{r^2 = \frac{125}{4}}$

$\sqrt{1+(\frac{-11}{2})^2}$

$\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{121}{4}}$

Luego, la ecuación es

$\mathcal{C}: (x-4)^2+(y-\frac{3}{2})^2 = \frac{125}{4}$

$16+49-7-4$

$15+45$

$Q(3,7)$

d_1

d_2

15×15

$125 \,|\, 4$

81×16

486

81

1296

$288 + 162 = 450$

$1296 - 171 = 1125$

418×16

108

78

288

$819 \times 9 = 171$

$718 \times 9 = 162$

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(5) $\mathcal{C}_1 \rightarrow r = \sqrt{5} \rightarrow \mathcal{C}_1 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = 5$

$\mathcal{C}_2 \rightarrow r = r_2 \qquad \mathcal{C}_2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r_2^2$

$M(3,5)$

Hallamos la relación entre a y b

La recta $\mathcal{L}$ es perpendicular al radio trazado desde $C_2(a,b)$ al punto T y la pendiente de esa recta ($\mathcal{L}$) es $\boxed{\frac{1}{2}}$ → Luego: $m_{C,T} : -2$

$\rightarrow \boxed{(y-b) = -2(x-a)}$ → Como $(7,5)$ está en la recta

$(5-b) = -2(7-a)$

$5-b = -14+2a$

$14+5-2a = b$

$\boxed{b = 19-2a}$

$C_2(a, 19-2a)$

→ sabemos que:

$$\frac{|a-2b+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2} \leftarrow \text{remplazamos}$$

$$\frac{|a-2(19-2a)+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(a-3)^2+(19-2a-5)^2}$$

$$\frac{|a-38+4a+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(a-3)^2+(14-2a)^2}$$

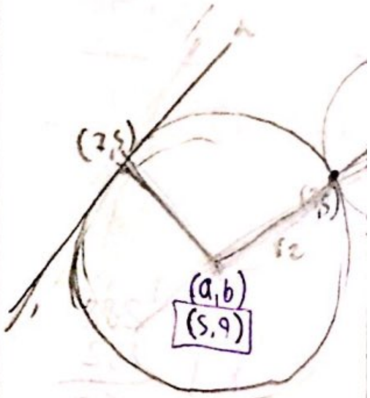
$$\frac{|5a-35|}{\sqrt{5}} = \sqrt{a^2-6a+9+196-56a+4a^2}$$

$$\left(\frac{|5a-35|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5a^2-62a+205}\right)^2 \text{ Elevando al cuadrado}$$

→

$\mathcal{L}: x-2y+3=0$

$\frac{1}{2}x \quad 2y$



$(x-h)(x-h)+(y-k)(y-$

$(7-h)(x-h)+(5-k)(y-k$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times 2 \\ \hline 38 \end{array}$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14+ \\ \hline 196 \end{array}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$$\frac{(5a-35)^2}{5} = 5a^2 - 62a + 205$$

$$\frac{(5(a-7))^2}{5} = 5a^2 - 62a + 205$$

$$5(a-7)^2 = 5a^2 - 62a + 205$$

$$5(a^2 - 14a + 49) = 5a^2 - 62a + 205$$

$$\cancel{5a^2} - 70a + 245 = \cancel{5a^2} - 62a + 205$$

$$245 - 205 = (70 - 62)a$$

$$40 = 8a \longrightarrow \boxed{a = 5} \Rightarrow \boxed{b = 9}$$

Hallamos el radio ~~AA~~ (r_2)

$$\sqrt{(7-5)^2 + (5-9)^2} \rightarrow \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} \Rightarrow \sqrt{4+16} = \boxed{\sqrt{20}}$$

Luego, la ecuación de la segunda circunferencia es:

$$\boxed{C_2 : (x-5)^2 + (y-9)^2 = 20}$$

Vamos con la primera

Sabemos que el $C_1(h,K)$, $M(3,5)$ y $C_2(5,9)$ son colineales ya que las circunferencias son tangentes en el ~~..~~ punto M

Ecuación de la recta C_1C_2

$$(y-5) = \left(\frac{9-5}{5-3}\right)(x-3)$$

$$y - 5 = \frac{4}{2}(x-3) \rightarrow y - 5 = 2(x-3)$$

$$y - 5 = 2x - 6$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Luego, C_1 se puede describir como

$$C_1(h, 2h-1)$$

$2\,14 \times 5 = 70$

$449 \times 5 = 245$

(h,K)

$K) - r^2 = x - 2y + 3$

$) \cdot r^2 = x - 2y + 3$

$196 + 9 = 1205$

$56 \,/\, 6 = 62$

$\times 4 = 56$

$14 \times 4 = 56$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$c(h, 2h-1)$ $M(3,5)$

sabemos que el radio es $\sqrt{5}$, hallemos h con ese data:

$$\sqrt{5} = \sqrt{(h-3)^2 + (2h-1-5)^2}$$

$$5 = (h-3)^2 + (2h-6)^2$$

$$5 = h^2 - 6h + 9 + 4h^2 - 24h + 36$$

$$5 = 5h^2 - 30h + 45 \rightarrow 5h^2 - 30h + 40 = 0$$

$$h^2 - 6h + 8 = 0$$

$$\begin{array}{ll} h & -2 \rightarrow \boxed{h=2} \\ h & -4 \rightarrow \boxed{h=4} \end{array}$$

Luego, sabemos que $K = 2h-1$

$$\hookrightarrow K = 3 \rightarrow h = 2$$

$$K = 7 \rightarrow h = 4$$

Luego, la ecuación de la recta C_1 serían:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{C}_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ \mathcal{C}_1 : (x-4)^2 + (y-7)^2 = 5 \end{array}}$$ y además,

Recordemos que la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}_2$ es

$$\boxed{\mathcal{C}_2 : (x-5)^2 + (y-9)^2 = 20}$$