ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

TREGADO

14 JUL 2017

Segundo examen

Año				Número			
2	0	1	7	0	9	2	9

Código de alumno

Chire Portocarrero, Alejandro Martín

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: F. Cal

Horario: H-107

Fecha: 03 / 07 / 2017

Nombre del profesor: M. Martínez

Nota

19

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

Segundo examen

Semestre académico 2017-1
Horarios: del H101 al H117

Indicaciones generales:

- No se permite el uso de apuntes de clase, libros ni calculadoras.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomados en cuenta en la calificación.
- Enumere las páginas del cuadernillo y resuelva las preguntas de acuerdo a la distribución siguiente:

Pregunta	1	2	3	4	5
Páginas	1 y 2	3 y 4	5 y 6	7 y 8	9 y 10

---

1) Analice la verdad o falsedad de cada proposición, justificando adecuadamente su respuesta.

   a) Si f y g son funciones impares con dominio $I\!R$, entonces la función h definida por $h(x) = \text{sen}((f \circ g)(x)) - 2\cos((f.g)(x))$ es una función par. **(1 punto)**

   b) Si f es una función decreciente en $I\!R$ y $b \in I\!R$, entonces la función g definida por $g(x) = f(-2x + b)$ es una función creciente en todo $I\!R$. **(1 punto)**

   c) Las funciones f y g definidas por
   $$f(x) = \log((x-1)^2)$$
   $$g(x) = 2\log(|x-1|)$$
   tienen el mismo dominio. **(1 punto)**

   d) La función h definida por
   $$h(x) = 2 + 3\cos(2x)$$
   tiene periodo π y en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es decreciente. **(1 punto)**

2) Dada la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\arctan(x+1), & x < -1 \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & -1 < x \leq a \end{cases}$$

   a) Determine el mayor valor que pueda tomar a para que f sea inyectiva.

   b) Halle la regla de correspondencia de la función inversa de f.

   c) Grafique f^{-1} e indique su rango. **(4 puntos)**

Continúa...

3)

a) Dada la función inyectiva f, cuya regla de correspondencia es $f(x) = (x + 1)^2 - 2$, con $]-\infty, -1]$, halle el valor de $f^{-1}(14) + f^{-1}(0)$. **(1 punto)**

b) Sabiendo que $a < 0 < c$, halle las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de la función f definida por $f(x) = e^{ax^2} - e^{-c}$ con el eje X, si existen.

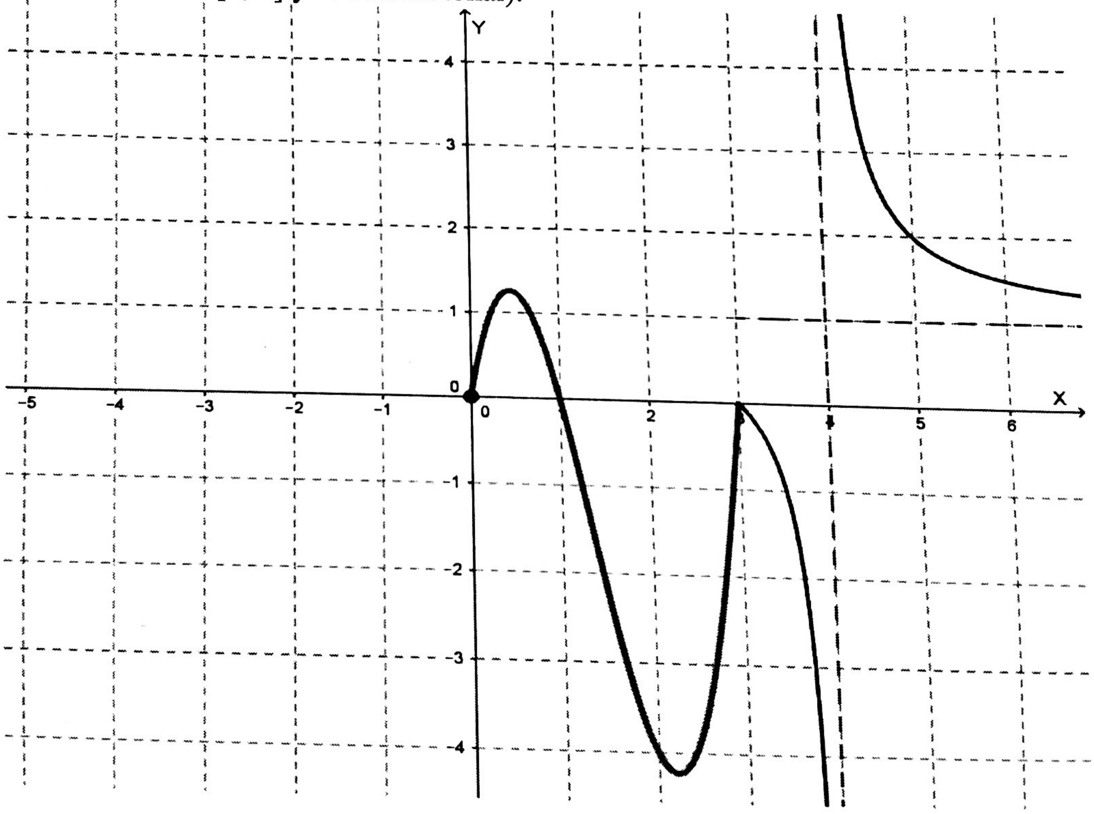
(2 puntos)

4) Con un plan de recuperación y conservación de aves en peligro de extinción se logró que la población de aves de cierta especie, que en un inicio era de 50, se triplique cada dos años. Sin embargo, al culminar el plan al cabo de 16 años y por la deforestación de los bosques, cada año muere la mitad de la población existente.

a) Halle la cantidad de aves de esta especie en función del tiempo t. **(3 puntos)**
b) ¿Cuál fue la cantidad máxima de aves de esta especie? **(1 punto)**
c) ¿Cuánto tiempo después habrá nuevamente 50 aves de esta especie?

(1 punto)

5) Dada la gráfica de la función f, definida por dos secciones (una polinómica de grado 3 en el intervalo [0, 3] y la otra racional).



a) Halle la regla de correspondencia de f. **(2 puntos)**
b) Determine la regla de correspondencia de una función g **impar** y represéntela gráficamente, si cumple lo siguiente:
(i) Dominio de g es el conjunto de $I\!R - \{-4, 4\}$.
(ii) $g(x) = f(x)$, para todo $x \geq 0$, $x \neq 4$ **(2 puntos)**

Elaborado por los profesores del curso

San Miguel, 3 de julio de 2017

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 1:

a) $f(x) = -f(-x) \quad \wedge \quad g(x) = -g(-x)$

$h(x) = \text{Sen}[(f \circ g)(x)] - 2\cos[(f \cdot g)(x)]$

$\hookrightarrow \text{Sen}[f(g(x))] = \text{Sen}[-f(-g(x))] = -\text{Sen}[f(g(-x))] = -\text{Sen}[(f \circ g)(-x)]$

$\hookrightarrow 2\cos[f(x) \cdot g(x)] = 2\cos\{[-f(-x)][-g(-x)]\}$

$= 2\cos[f(-x) \cdot g(-x)\} = 2\cos[(f \cdot g)(-x)]$

$\therefore h(x) = \text{Sen}[(f \circ g)(x)] - 2\cos[(f \cdot g)(x)] = -\text{Sen}[(f \circ g)(-x)] - 2\cos[(f \cdot g)(-x)]$

Como se puede ver, la función h no es par. La proposición es falsa.

1,0

c) $f(x) = \underbrace{\log((x-1)^2)} \quad \wedge \quad g(x) = 2\log(|x-1|)$

$\log[(x-1)^2] > 0 \qquad\qquad 2\log(|x-1|) > 0$

$(x-1)^2 > 0 \qquad\qquad |x-1| > 0$

$x - 1 > 0 \quad \vee \quad x - 1 < 0$

$x > 1 \quad \vee \quad x < 1$

Dom $f =]1, +\infty[$

Dom $g = \mathbb{R} - \{1\}$

$\therefore$ La proposición es falsa.

0,5

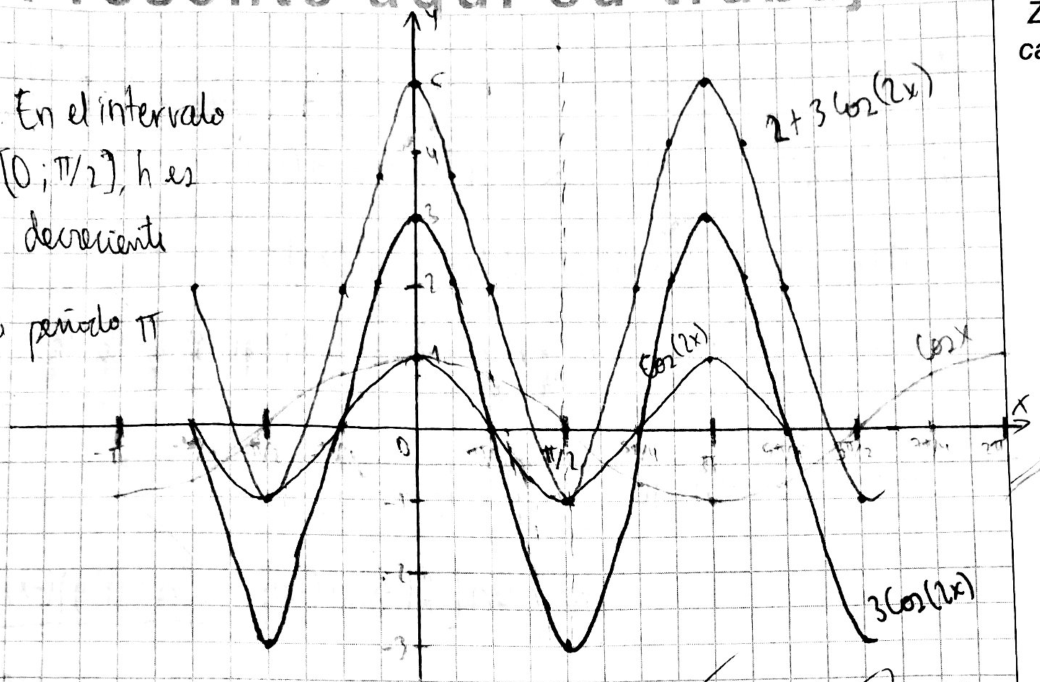
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

d)

En el intervalo $[0; \pi/2]$, h es decreciente

Tiene periodo π



∴ La proposición es verdadera

b)

f es decreciente $\rightarrow$ $x_1 \wedge x_2 \in Dom\, f = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x_1 > x_2} \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$2x_1 > 2x_2$

$-2x_1 < -2x_2$

$-2x_1 + b < -2x_2 + b \quad ; \; b \in \mathbb{R}$

$f(-2x_1+b) > f(-2x_2+b)$ X

g es decreciente en $\mathbb{R}$ $\leftarrow$ $g(x_1) < g(x_2)$ para $x_1 > x_2$

∴ la proposición es falsa X

0,5

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{(x+1)-2}{x+1}$

$1-\frac{2}{x+1}$

$\frac{x-1}{x+1}$

$\frac{x-1}{x+1} \leq 0$

$x-1 \leq 0$

$x \leq 1$

$xy+y=x-1$

$xy-x=-y-1$

$x(y-1)=-y-1$

$x=\frac{-y-1}{y-1}$

$\frac{-(y+1)}{y-1}$

$\frac{y+1}{1-y}$

Pregunta 2:

$$f(x)\begin{cases} -\arctan(x+1); & x<-1 \\ \frac{x-1}{x+1}; & -1<x\leq a \end{cases}$$

Si $x=-1$ Para $f(x)=-\arctan(x+1)$

$\hookrightarrow -\arctan(0)=\boxed{0=f(x)}$ abierto

a) $\frac{x-1}{x+1}\leq 0 \rightarrow x-1\leq 0$

$x\leq 1$

cerrado porque x no puede tomar (-1) en el otro tramo.

$\hookrightarrow$ El mayor valor que puede tomar x es 1

$\boxed{\cancel{x}\,a=1}$

b) $f^{-1}(x)$

* Primer tramo:

$y=-\arctan(x+1)$

$\tan(-y)=\tan(\arctan(x+1))$

$f^{-1}(x)=\tan(-x)-1 \quad ; \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

* Segundo tramo:

$y=\frac{x-1}{x+1} \rightarrow xy+y=x-1$

$x(y-1)=-y-1$

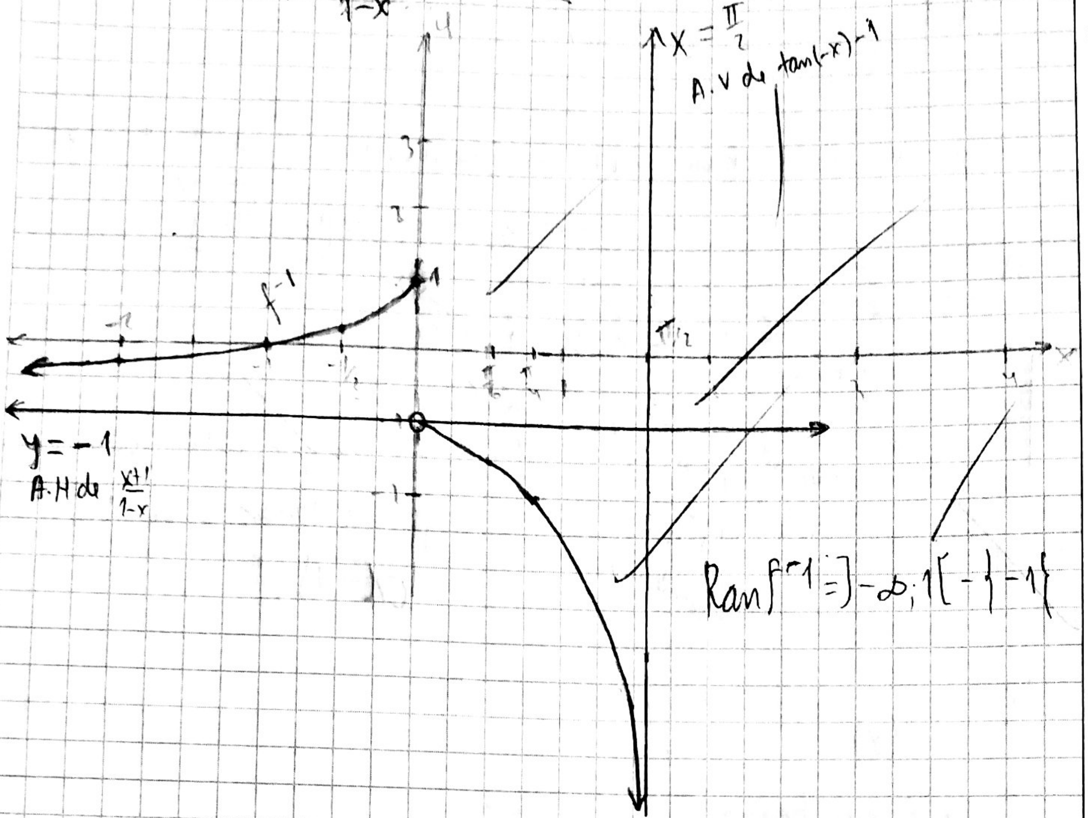
$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{1-x} \quad ; \quad x\leq 0$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c)

$$f^{-1}(x)\begin{cases} \tan(-x)-1 \ ; & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x+1}{1-x} \ ; & x \leq 0 \end{cases}$$



$\operatorname{Ran} f^{-1} =]-\infty; 1[- \{-1\}$

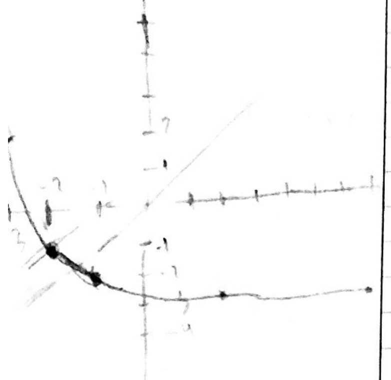
$\tan 30° = $

3,1416

3,14
1,50
0,02
1,57
0,785

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$x \leq -1$

$x \leq -1$

$x+2 \leq 1$

$\sqrt{x+2} \leq 1$

$\sqrt{x+2}+1 \leq 2$

Pregunta 3°:

a) $f(x) = (x+1)^2 - 2 \quad ; \quad x \leq -1$

$y = (x+1)^2 - 2 \rightarrow \quad y+2 = (x+1)^2$

$\sqrt{y+2} = \pm(x+1)$

↳ Primer caso:

$\sqrt{y+2} = -x-1$

$-\sqrt{x+2} - 1 = f^{-1}(x)$ ✓

Segundo caso:

$\sqrt{y+2} = y+1$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} - 1$

Esta no cumple porque su gráfica se cruza con la de f.

$\therefore \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x+2} - 1 \quad ; \quad -2 \leq x$

$\hookrightarrow \quad f^{-1}(14) + f^{-1}(0) = \left[-\sqrt{14+2} - 1\right] + \left[-\sqrt{0+2} - 1\right]$

$= \left[-\sqrt{16} - 1\right] + \left[-\sqrt{2} - 1\right]$

$= \left[-4-1\right] + \left[-\sqrt{2} - 1\right]$

$= -5 - \sqrt{2} - 1$

$f^{-1}(14) + f^{-1}(0) = -6 - \sqrt{2}$

$f^{-1}(14) + f^{-1}(0) \approx -7{,}41$

b) $a < 0 < c$

$c > 0 \wedge a < 0$

$\boxed{-c < 0}$

$\hookrightarrow \frac{-c}{a} > 0$

$\therefore \frac{-c}{a}$ tiene raíz cuadrada

Intersección con el eje $X \rightarrow y = 0$

$0 = e^{ax^2} - e^{-c}$

$e^{-c} = e^{ax^2}$

$\ln(e^{-c}) = \ln(e^{ax^2})$

$-c = ax^2$

$x^2 = \frac{-c}{a}$

$\pm x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Las coordenadas de los interceptos son $\left(\sqrt{\frac{-c}{a}} ; 0\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}} ; 0\right)$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

Pregunta 4°

a) $A_0 = 50$ aves

Primer periodo:

$$A(t) = 50(3^{t/2})$$
$$0 \leq t \leq 16$$

t (años)	A
0	50
2	50 . 3
4	$50 . 3^2$
6	$50 . 3^3$
⋮	

Segundo periodo:

Para $t=16$: $A(t) = 50(3^8) = 328050$

t (años)	A
16	328050
17	$328050 . \frac{1}{2}$
18	$328050 . \frac{1}{4}$
19	$328050 . \frac{1}{8}$
⋮	

$$A(t) = 328050\left(\frac{1}{2}\right)^{t-16}$$

$$A(t) \begin{cases} 50(3^{\frac{t}{2}}) & ; 0 \leq t \leq 16 \\ 328050\left(\frac{1}{2}\right)^{t-16} & ; 16 \leq t \end{cases}$$

b) la máxima cantidad de aves fue la alcanzada a los 16 años, en el primer periodo:

$$A(t) = 50\left(3^{\frac{16}{2}}\right) = 50(3^8) = \underline{328050 \text{ aves}}$$

c) Esto ocurrirá en el 2^{do} periodo:

$$\cancel{50} = \cancel{50}(3^8)\left(\frac{1}{2}\right)^{t-16}$$

$$\frac{1}{3^8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-16}$$

$$3^{-8} = 2^{16-t}$$

$$\log_2(3^{-8}) = \log_2(2^{16-t})$$

$$\hookrightarrow -8\log_2 3 = 16-t$$

$$\boxed{t = 16 + 8\log_2 3}$$

A los $(16 + 8\log_2 3)$ años habrán 50 aves otra vez.

Borrador:

$3 \cdot 3 = 9$, $9 \cdot 9 = 81$, $81 \cdot 81 = 6561$, $6561 \cdot 5 = 32805$, 328050

$328050\left(\frac{1}{2}\right)^{t-16}$; $t < 16$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{t-16} = 0$

$0 = \cancel{328050}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-16}$

$0 = 2^{16-t}$

$\log_2(0) = 16-t$

$t = 16 - \log_2(0)$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{1}{x}$

$\frac{1}{x-4}+1$

$\frac{1+x-4}{x-4} = \frac{x-3}{x-4}$

$xy - 4y = x-3$

$xy - x = 4y-3$

$x(y-1) = \frac{4y-3}{y-1}$

Presente aquí su trabajo

Pregunta 5°

Polinómica (grado 3) $\rightarrow$ ceros son: $0;\ 1;\ 3$

Racional

$f(x) = a(x)(1-x)(3-x)$

Pasa por $[2; -4]$ (x, y)

$+4 = a(2)(+1)(1)$

$\boxed{a=2}$

$f(x) = 2x(1-x)(3-x)\ ;\ 0 \leq x \leq 3$

En cuanto a la racional, esta parte de $\frac{1}{x}$

↳ No hay elongación: $\frac{1}{x}$

↳ Se mueve 4 unidades a la derecha: $\frac{1}{x-4}$

↳ Sube 1 unidad: $\frac{1}{x-4}+1 = \frac{x-4+1}{x-4} = \frac{x-3}{x-4}$

$f(x) = \frac{x-3}{x-4}\ ;\ 3 < x$

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x(1-x)(3-x)\ ; & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x-3}{x-4}\ ; & 3 < x \end{cases}$$

b) Para que sea impar: $g(x) = -g(-x)$

↳ 1er tramo:

$g(x) = -\left[2(-x)(1-(-x))(3-(-x))\right]$

$= -\left[-2x(x+1)(x+3)\right]$

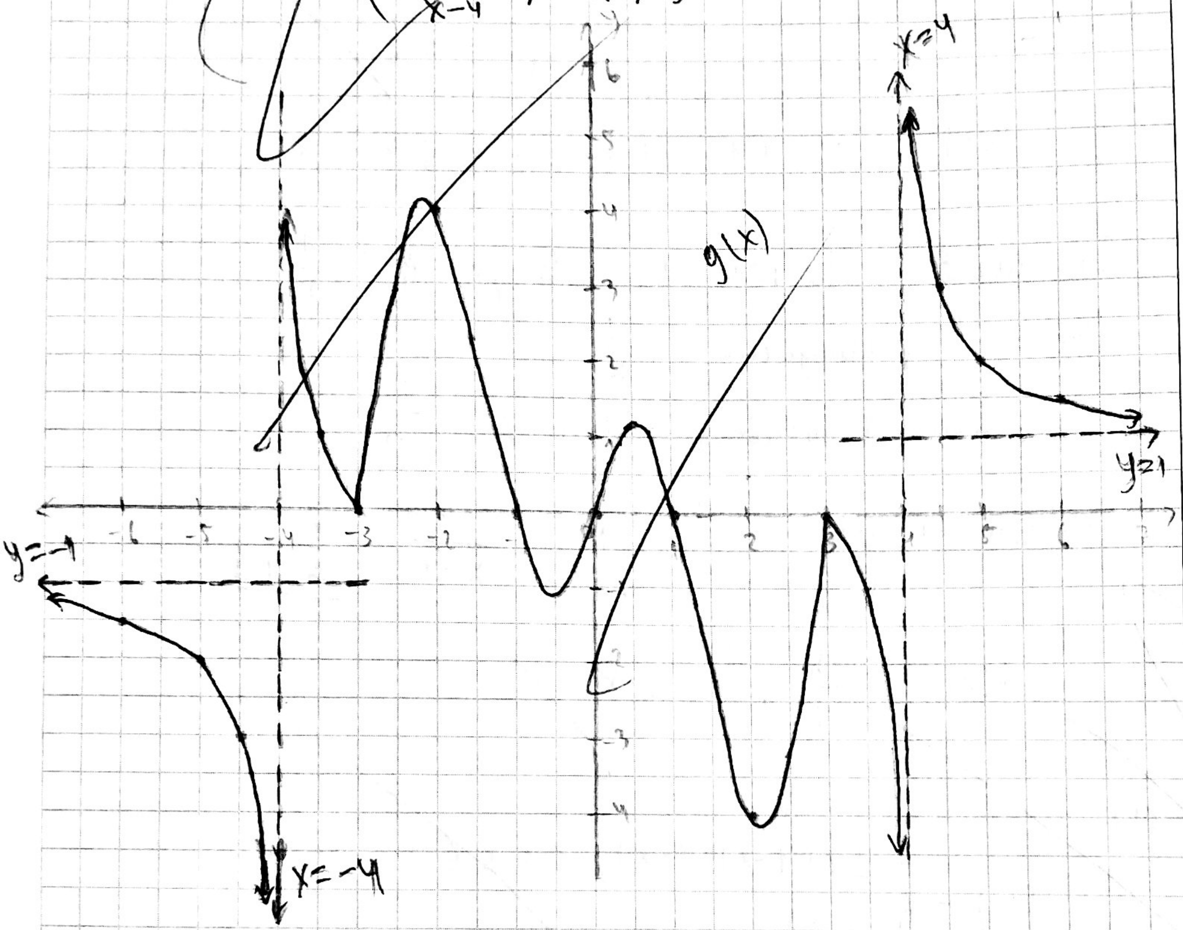
$g(x) = 2x(x+1)(x+3)\ ;\ -3 \leq x < 0$

Presente aquí su trabajo

↳ Segundo tramo:

$$g(x) = -\left[\frac{-x-3}{-x-4}\right] = -\left[\frac{x+3}{x+4}\right] = \frac{-x-3}{x+4} \; ; \; x < -3$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-3}{x+4} \; ; & x < -3 \\ 2x(x+1)(x+3) \; ; & -3 \leq x < 0 \\ 2x(1-x)(3-x) \; ; & 0 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{x-3}{x-4} \; ; & x > 3 \end{cases}$$



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$xy+4y=-x-3$

$xy+x=-4y-3$