ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

Año: 2023 | Número: 3443

Código de alumno

Práctica

Tipso Rios Hanter Leandro

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Práctica Nº: PC04

Horario de práctica: J104

Fecha: 16/11/23

Nombre del profesor: M. Flores

Nota

20

JYa.

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) Josep Yazingaño

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

Cuarta Práctica Calificada

Semestre Académico 2023 -2

Elaborada por todos los profesores. Duración: 110 minutos

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

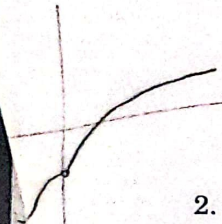
Indicaciones:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, calculadoras, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}-\arccos(x+2), & -3\leq x\leq -1,\\ x^2+2x+1, & x>-1.\end{cases}$$



   a) Justifique que f es inyectiva. Sí (2.0 puntos)

   b) Determine f^{-1}, función inversa de f. $\cos(-x)-2;\ -\pi\leq x\leq 0 \wedge \sqrt{x}-1;\ x>0$ (2.0 puntos)

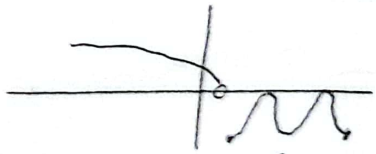
   c) Esboce la gráfica de f^{-1}. (2.0 puntos)

2. Halle el dominio de la función f definida por

$$f(x)=\frac{2\operatorname{sen}(x)-3}{\sqrt{2-2\cos(x)}}.\quad \mathbb{R}-\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$ (2.0 puntos)

3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}-\arctan(x-1), & x<1,\\ \cos(2x)-1, & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{5\pi}{2}.=\frac{10\pi}{4}\end{cases}$$



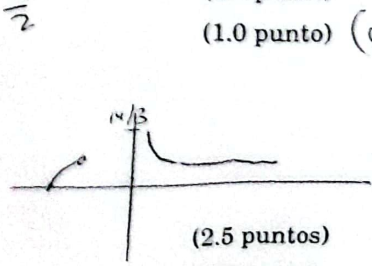
   a) Esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados. (3.0 puntos) $(\pi;0)$ $(2\pi;0)$

   b) Determine las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de f. $Y=\frac{\pi}{2}$ (1.0 punto) $(0;\frac{\pi}{4})$

   c) Halle el rango de f. Ran $[-2;\frac{\pi}{2}[$ (1.0 punto)

4. Sea a una constante real y f la función definida por

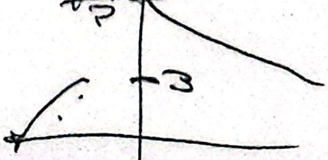
$$f(x)=\begin{cases}a+\frac{3}{2}\sqrt{2x+10}, & -5\leq x\leq -3,\\ 8(3^{-x})+2, & x\geq 1.\end{cases}$$



   a) Para $a=0$, esboce la gráfica de f. (2.5 puntos)

   b) Para $a=0$ ¿Es f inyectiva? Justifique su respuesta. NO (1.0 punto)

   c) Halle todos los valores de a para los cuales f es inyectiva. $]-\infty;-1]\cup[\frac{14}{3};+\infty[$ (1.5 puntos)



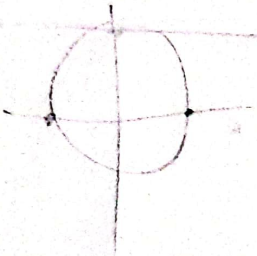
5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

-3 y 2

a) La función definida por $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 2x + 1}$ es inyectiva. F (1.0 punto)

b) La función definida por $f(x) = \tan(2x - x^2)$, $x \in [0;1]$, es creciente. V (1.0 punto)

San Miguel, 16 de noviembre de 2023.



Presente aquí su trabajo

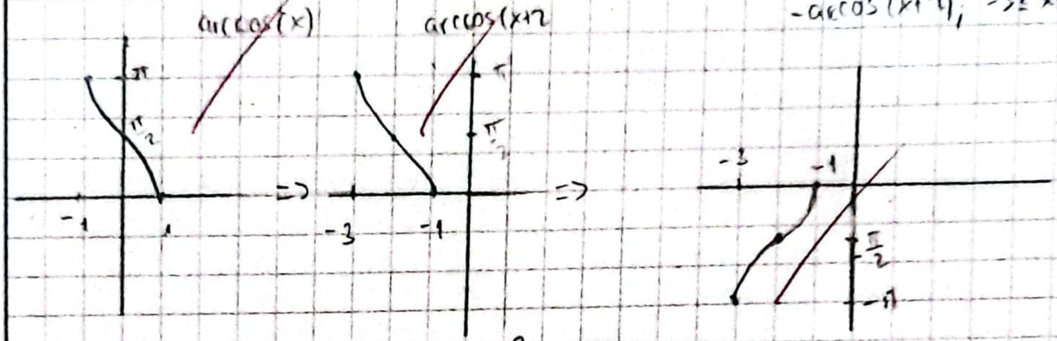
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Problema 1

$\frac{6.0}{6.0}$

Sea la gráfica de $f(x)$

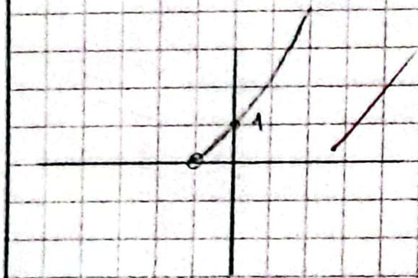
Para $f_1(x) = -\arccos(x+2)$, $-3 \le x \le -1$

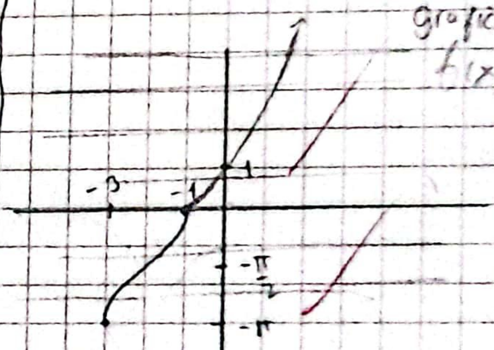


Para $f_2(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$, $x > -1$

Sea el vertice $\left(\frac{-b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = (-1; 0)$

Uniendo $f(1)$ y f_2





a) i) $f_1(x) = -\arccos(x+2)$, es inyectiva en su dominio

ii) $f_2(x) = x^2+2x+1$; es inyectiva en su dominio

iii) $\operatorname{Ran} f_1 \cap \operatorname{Ran} f_2 = \emptyset$

iv) Al trazar rectas horizontales solo se intersecta 1 punto

$\boxed{\therefore f(x) \text{ es inyectiva}}$

2.0/2.0

b) Para $f_1(x)$:

$y = -\arccos(x+2)$

$\cos(-y) = (x+2)$

$\cos(-y) - 2 = x$

$f_1^{-1} = \cos(-x) - 2$

$\operatorname{Ran} f_{1(x)} = \operatorname{Dom} f_1^{-1}(x) = [-\pi, 0]$

según la gráfica

Para $f_2(x)$:

$(x+1)^2 = y$

$x = \sqrt{y} - 1$

$f_2^{-1} = \sqrt{x} - 1$

$\operatorname{Ran} f_2(x) = \operatorname{Dom} f_2^{-1} =]0; +\infty[$

según la gráfica

2.0/2.0

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

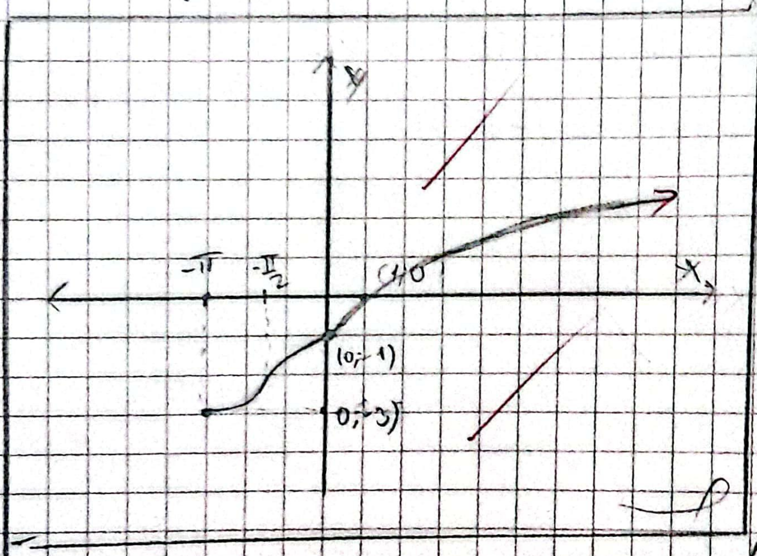
$\therefore$ $f^{-1}(x) \begin{cases} \cos(-x)-2 & ; -\pi \le x \le 0 \\ \sqrt{x}-1 & ; x > 0 \end{cases}$

Rpta

c) Usando la gráfica de $f(x)$ y sabiendo que para $f^{-1}(x)$ se cumple que:

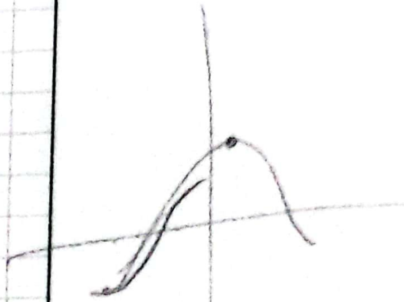
$(x_f ; y_f) = (y_{f^{-1}} ; x_{f^{-1}})$

La gráfica de f^{-1}:

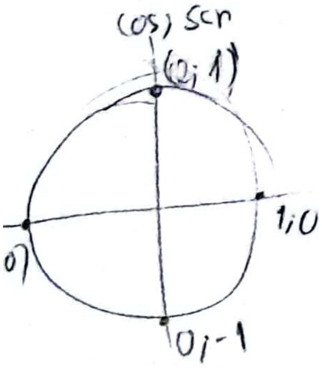


$\frac{2-0}{2-0}$

Rpta



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



Presente aquí su trabajo

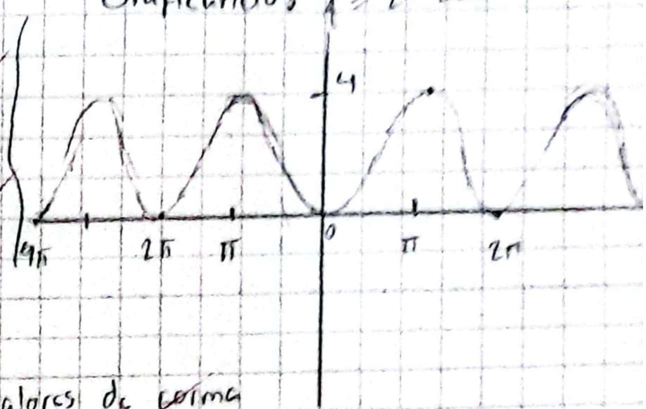
Problema 2

$f(x) = \dfrac{2\operatorname{sen}(x) - 3}{\sqrt{2 - 2\cos(x)}}$ $x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$2 - 2\cos(x) > 0$

Graficando: $y = 2 - 2\cos(x)$



∴ X no puede tomar valores de forma $2k\pi$; donde $k \in \mathbb{Z}$ (enteros)

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$ Rpta

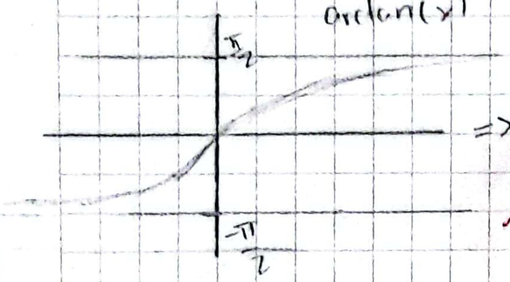
2.0 / 2.0

Problema 3:

5.0/5.0

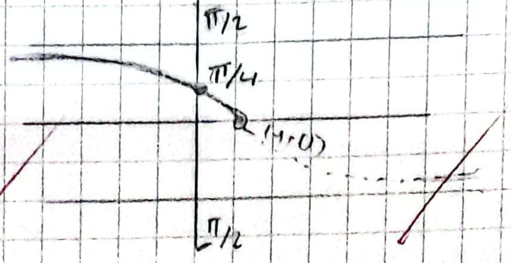
a) Para $f_1(x) = -\arctan(x-1)$

arctan(x)

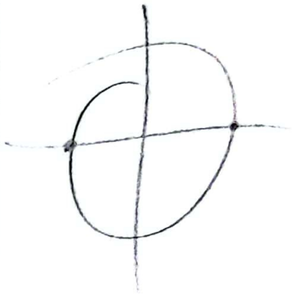


⇒

$-\arctan(x-1)$; $x<1$

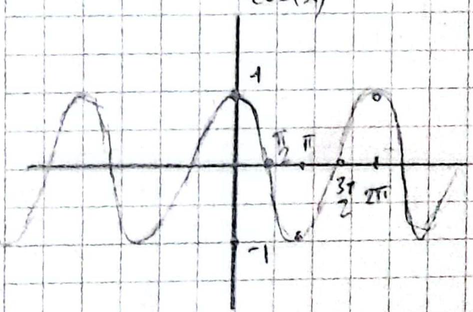


$-\arctan(-1)$



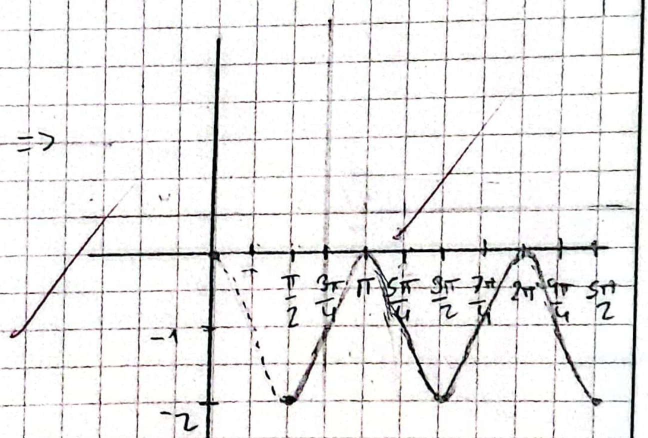
Para $f_2(x) = \cos(2x) - 1$

cos(x)



⇒

$\cos(2x) - 1$



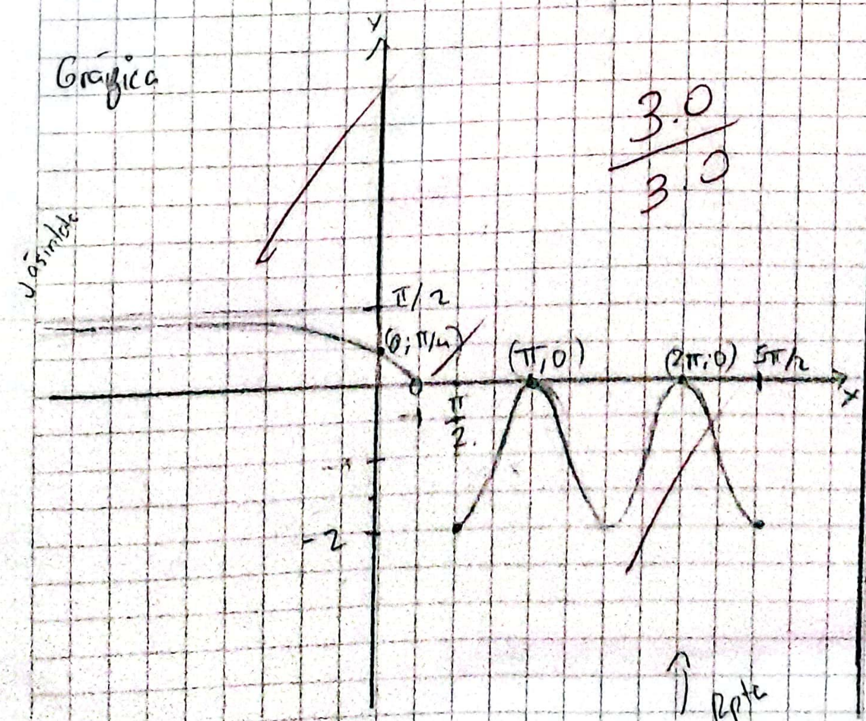
$\cos\frac{5\pi}{4} - 1$

$\cos(\pi) - 1$

Uniendo gráficos:

Gráfica

3.0/3.0



Intersecta en los ejes coordenados en:

En x:

- $P(\pi;0)$
- $P(2\pi;0)$

En y:

- $P(0;\frac{\pi}{4})$

Rpta

...a exclusiva para
...ulos y desarrollos
(borrador)

Presente aquí su trabajo

b) Ecuaciones de asíntotas

Según la gráfica:

$\boxed{\therefore \quad y = \frac{\pi}{2}}$ — $\frac{1.0}{1.0}$ 1 ppta

c) Ran f(x)

Según la gráfica:

$\boxed{\therefore \quad Ran\, f(x) = \left[-2 ; \frac{\pi}{2}\right[}$ — $\frac{1.0}{1.0}$ 1 ppta

$\frac{5.0}{5.0}$

Problema 4

a) Si a = 0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{2x+10} ; & -5 \le x \le -3 \quad f_1 \\ 8(3^{-x})+2 ; & x \geq 1 \quad f_2 \end{cases}$$

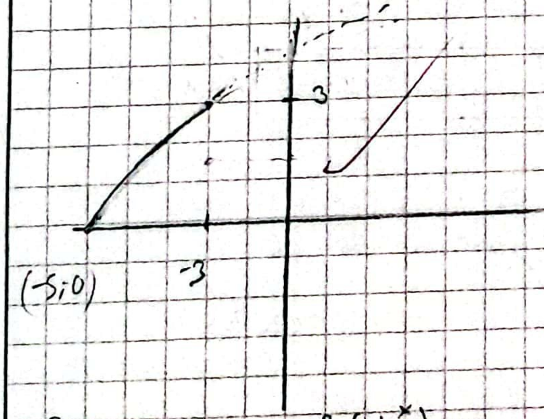
Para f_1:

$f(x) \geq 0$

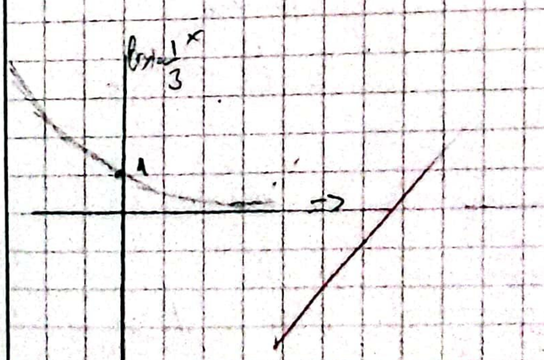
$y = \frac{3}{2}\sqrt{2x+10} \rightarrow \frac{2y}{3} = \sqrt{2x+10} \Rightarrow \frac{4y^2}{9} = 2x+10$

$y^2 = \frac{18x+90}{4} \rightarrow y^2 = \frac{9x}{2} + \frac{45}{2} \rightarrow y^2 = \frac{9}{2}(x+5)$ parábola

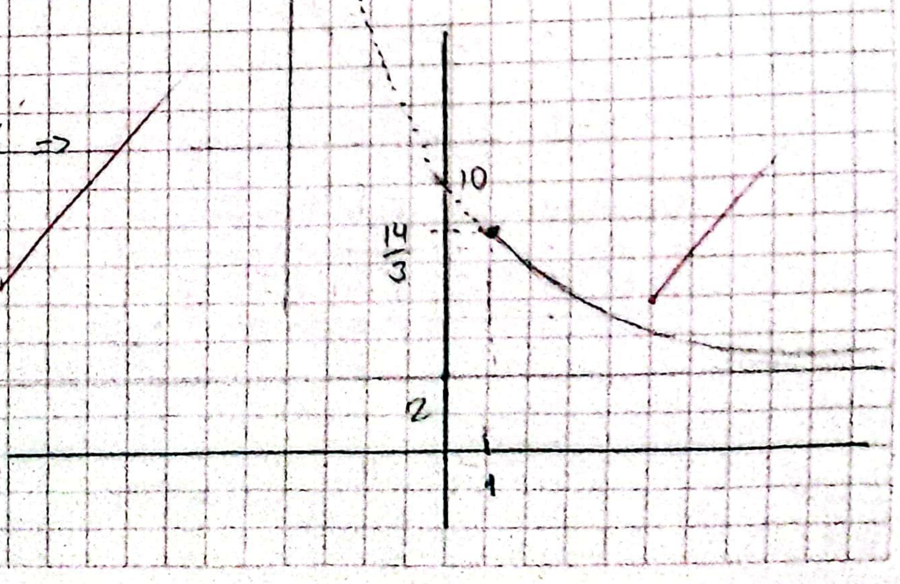
$p > 0$



Para $f_{(2)}$: $8\left(\frac{1}{3}^x\right)+2$



$f(x) = 8\left(\frac{1}{3}^x\right)+2 ; x \geq 1$



$\frac{8}{3}+2$

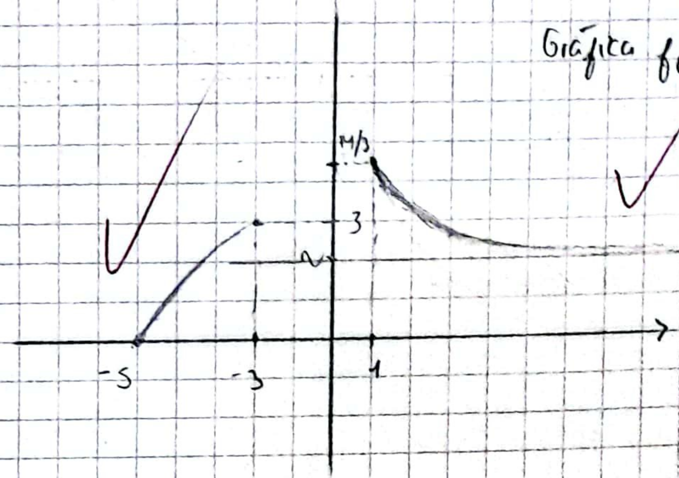
$\frac{9}{3}$

$\frac{14}{3}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)

Uniendo gráficas:

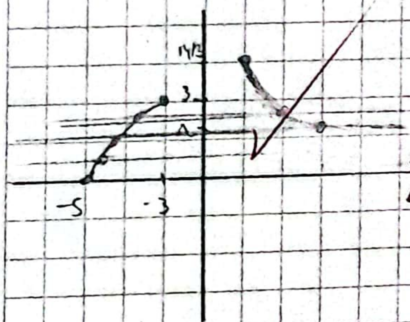


2.5/2.5

Rpta

b) Para $a=0$, f no es inyectiva, ya que:

En la gráfica:



i) f_1 es inyectiva en su Dom

ii) f_2 es inyectiva en su Dom

iii) $Ran f_1 \cap Ran f_2 \neq \emptyset$

iv) Al trazar rectas horizontales en la gráfica intersecta 2 puntos

1.0/1.0

$\boxed{\therefore\ f \text{ no es inyectiva}}$ para $a=0$

c) Para ser inyectiva la función, f_1 debe ser trasladado en el eje y, usando al a. Estos son dos casos:

Caso I: arriba diferente de 14/3

$0+a > \frac{14}{3} \rightarrow a > \frac{14}{3}$

Caso II: abajo igual a 2

$3+a \leq 2$

$a \leq -1$

Usando los extremos de los rangos para que su intersección de $Ran f_1 \cap Ran f_2 = \emptyset$

$\therefore$ Los valores que puede tomar a son:

$\boxed{C.S =]-\infty; -1] \cup [\frac{14}{3}; +\infty[}$

Rpta

1.5/1.5

$\frac{14}{3}$

$4+\frac{2}{3}$

$\frac{8}{3}+2 = \frac{14}{3}$

$8(\frac{1}{3})^x + 2 = 3$

$8(\frac{1}{3})^x = 1$

$(\frac{1}{3})^x = (\frac{1}{8})^{-1}$

$3^x = 8$

Presente aquí su trabajo

a exclusiva para
ulos y desarrollos
(borrador)

Problema 5

$\frac{2.0}{2.0}$

a) $f(x) = 2\sqrt{x^2+2x+1} = 2\sqrt{(x+1)^2} = 2|x+1|$

Contra ejemplo:

Para ser inyectiva se cumple que: $a = b \rightarrow f(a) = f(b)$

Sean: $a = -3 \rightarrow f(a) = 4$
$b = 2 \qquad f(b) = 4$

$a \neq b \rightarrow f(a) = f(b)$ ¿?

$\frac{1.0}{1.0}$

$\boxed{\therefore \text{La proposición es FALSA}}$ Rpta

b) Sea $f(x)$ definida por $f(x) = g(h(x))$ donde:

$g(x) = \tan(x) \wedge h(x) = 2x - x^2$

i) Para $h(x)$ en $[0;1]$ $\qquad h(x) = -x^2 + 2x$

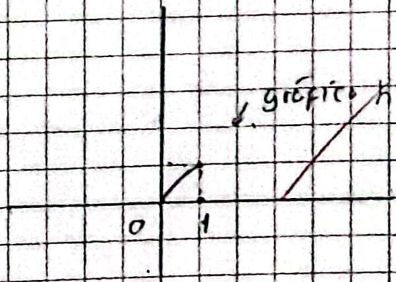


gráfico $h(x)$

$h(x)$ es creciente

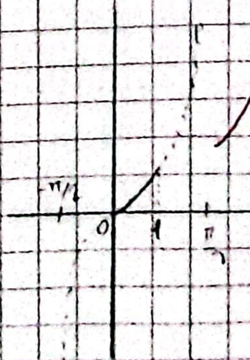
Por lo tanto sea f:

$f(x) = \underset{\text{creciente}}{g} \circ \underset{\text{creciente}}{h}$

$\frac{1.0}{1.0}$

$f(x)$ es creciente

ii) Para $g(x)$ en $[0;1]$



$g(x)$ es creciente

$\boxed{\therefore \text{La proposición es VERDADERA}}$ Rpta

3 , 8

$1(x+1)^2$

$c - \frac{b^2}{4a}$

-4