PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Fundamentos de Cálculo
Práctica Calificada Nº 3
Semestre académico 2017-1
H-101, H-102, H-104, H-105, H-107, H-108, H-109, H-110, H-111, H-112, H-131, H-132

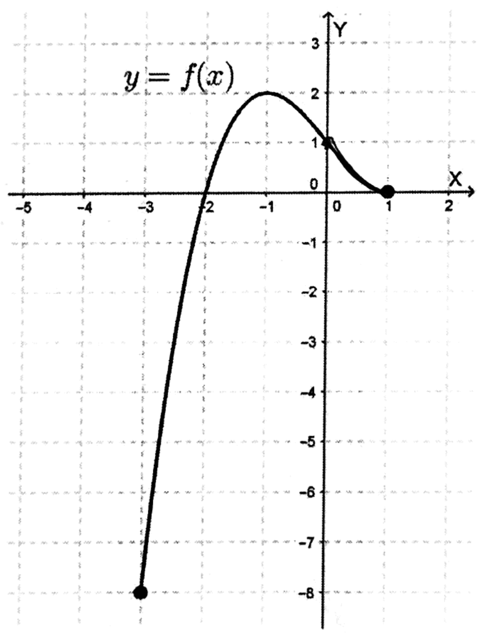
Indicaciones generales:

- Tiempo de duración: 1 h 50 min.
- No se permite el uso de apuntes de clase ni libros.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomados en cuenta en la calificación.

---

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente su respuesta:
   a) La función f definida por $f(x) = |x| + x,\ x < 0$ es inyectiva. **(1.0 punto)**
   b) La función f definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ es inyectiva y su inversa es la función definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{-x+2}{x-1}$. **(2.5 puntos)**
   c) Si f y g son funciones impares y con el mismo dominio, entonces la función $f.g$ es una función par. **(1.5 puntos)**

2. Dada la gráfica de la función f, **usando transformaciones** determine la gráfica de la función g definida por $g(x) = \dfrac{1}{2}f(2-x)+4$, indique su dominio y rango. **(3.0 puntos)**



Continúa...

3. Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} |x-4| - x; & -3 < x < 0 \\ x^2 + 5; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{x-2}, \quad x \geq 3$$

Halle $f \circ g$. **(4.0 puntos)**

4. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2, \quad -4 \leq x \leq -1$.

a) Determine la función f^{-1}, si existe. **(3.0 puntos)**

b) En caso exista la función f^{-1}, represente gráficamente f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano. **(2.0 puntos)**

5. Una ardilla se encuentra en la base de un árbol y un galgo está a 10m de distancia del árbol. En el instante en que se ven, el galgo corre en línea recta hasta la base del árbol con una velocidad constante de 4m/s y la ardilla trepa verticalmente el árbol con una velocidad constante de 2m/s.

a) Exprese la distancia entre el galgo y la ardilla como una función del tiempo (en segundos) transcurrido desde el instante en que se ven, indicando el dominio de la función. **(1.5 puntos)**

b) Determine la distancia mínima entre el galgo y la ardilla. **(1.5 puntos)**

Elaborado por los profesores del curso
San Miguel, 5 de junio de 2017

Práctica

Año	Número
2 0 1 7	0 9 2 9

Código de alumno

ENTREGADO
14 JUN. 2017

Chire Portocarrero, Alejandro Martín
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: Fundamentos de cálculo

Práctica N°: 3

Horario de práctica: P-107

Fecha: 05/06/17

Nombre del profesor: Mihály Martínez

Nota
19

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) ELL

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

$\frac{-3+2}{-3+1} = \frac{-1}{-2}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{3}{4}$

$\frac{5}{4} = 1{,}25$

$|x| \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$|x| > 1$

$x < -1 \vee x > 1$

$x = 0 \rightarrow y = 2$

$x = 1 \rightarrow y = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$x = 2 \rightarrow y = \frac{4}{3} = 1{,}3$

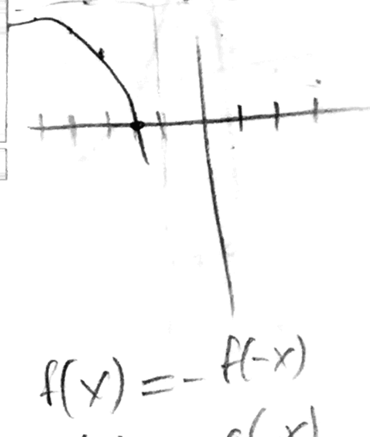
$x = -1 \rightarrow y \nexists$

$x = -2 \rightarrow y = 0$

$x = -3 \rightarrow y = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$x = -4 \rightarrow y = \frac{2}{3} = 0{,}6$

$x = -5 \rightarrow y = \frac{3}{4} = 0{,}75$



$f(x) = -f(-x)$

$g(x) = -g(-x)$

$(f\,g)(x)$

$f(x) \cdot g(x)$

$-f(-x) \cdot -g(-x)$

$(f\,g)(-x)$

Presente aquí su trabajo

1) b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \rightarrow$ su inversa:

Se reemplaza y con f(x): $y = \frac{x+2}{x+1}$

$xy + y = x + 2$

$xy - x = 2 - y$

$x(y-1) = 2 - y$

$y = \frac{2-x}{x-1} \xleftarrow{\text{se sustituye x con y}} x = \frac{2-y}{y-1}$

Esto, además, me indica ~~que~~ $y=1$ es una asíntota horizontal de $f(x)$

$y \neq 1$

$f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x-1}$ $\quad x \neq 1$

Su gráfica (de f) presentará 2 asíntotas:

$y = 1 \wedge x = -1$; lo que quiere decir que si $x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in Dom\,f$ Entonces, $f(x_1) \neq f(x_2)$ y por lo tanto la función será inyectiva. La proposición es verdadera.

Bien

c) $-f(x) = f(-x)$ $\qquad -g(x) = g(-x)$

$\hookrightarrow f(x) = -f(-x)$ $\qquad \hookrightarrow g(x) = -g(-x)$

ya que ambas son impares

$\therefore (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$= -f(-x) \cdot -g(-x)$

$= f(-x) \cdot g(-x)$

$(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(-x) \rightarrow$ Por lo tanto, $f \cdot g$ es una función par y la proposición es verdadera.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3)

$$f(x)\begin{cases} |x-4|-x \; ; \; -3 < x < 0 \\ x^2+5 \; ; \; x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{x-2} \; ; \; x \geq 3$$

fog se tiene que trabajar por dominios comunes : $[3 ; \infty[$

$$\begin{cases} f_2(x) = x^2+5 \; ; \; x \geq 0 \longrightarrow \text{Dom} f_2 = [0, \infty[\\ g(x) = \sqrt{x-2} \; ; \; x \geq 3 \longrightarrow \text{Dom} g = [3 ; \infty[\end{cases}$$

Falta

$\hookrightarrow (f_2 o g) = f_2(g(x)) = f_2(\sqrt{x-2})$ analizar en cada uno de los tramos.

$$= (\sqrt{x-2})^2+5 = x-2+5$$

$$(f_2 o g)(x) = x+3$$

Falta

$$\text{Dom} f_2 o g = \{x / x \in \text{Dom} g \wedge g(x) \in \text{Dom} f\}$$

$$x \geq 3 \wedge \sqrt{x-2} \geq 0$$

$$x-2 \geq 0$$

$$x \geq 3 \wedge x \geq 2$$

$\therefore \text{Dom} f_2 o g = [+3 ; \infty[$

$(f_2 o g)(x) = x+3$

Dom fog = {x / x ∈ Dom g ∧ g(...

$x \geq 3 \wedge$

Definir

$x \geq 3$

2

$\frac{9}{2}$

$\frac{9-4}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$) \in Dom f \}$

$\sqrt{x-2} \geq 0$

$x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

$]3; \infty[$

$2-2=0$

$\frac{1}{2}-2$

$-\frac{3}{2}$

$a(x-h)^2+k$ $\quad \frac{1}{2}-2$

$h=-4$

$k=-2$

$V(-4;-2)$

$\frac{(4-1)^2}{2}-2 = \frac{(3)^2}{2}-2 = \frac{9}{2}-2 = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2-2 \quad ; \quad -4 \leq x \leq -1$

a) Hay 2 maneras de hacerlo:

I) Con el vértice

El vértice de $\frac{1}{2}(x+4)^2-2$ es el punto $(-4;-2)$.

En ese punto, salen los 2 "brazos" de la parábola, lo cual haría que no fuera inyectiva (por definición).

Sin embargo, el dominio que me dan me dice que solo toma valores desde el vértice hasta el -1, lo que quiere decir que se cumple la definición:

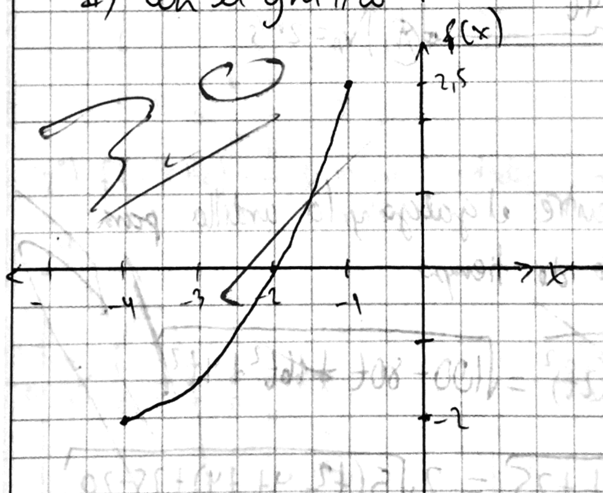
$x_1 = -4 \; ; \; x_2 = -3 ; \; x_3 = -2 \; ; \; x_4 = -1$

$f(-4) = -2 \; ; \; f(-3) = -1{,}5 \; ; \; f(-2) = 0 \; ; \; f(-1) = 2{,}5$

$\hookrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \neq f(x_3) \neq f(x_4)$

Cuando $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4$

II) Con el gráfico



Se puede ver que, si se trazara una recta horizontal, sólo cortaría a la función f en un punto, lo cual la haría inyectiva.

Por lo tanto, como la función f es inyectiva, f^{-1} sí existe.

$\hookrightarrow$ la inversa: $y = \frac{1}{2}(x+4)^2-2$

$\rightarrow \sqrt{2y+4}-4 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{2x+4}-4$, $\quad Dom\, f^{-1} = [-2; \frac{5}{2}]$

$Ran\, f^{-1} = [-4; -1]$

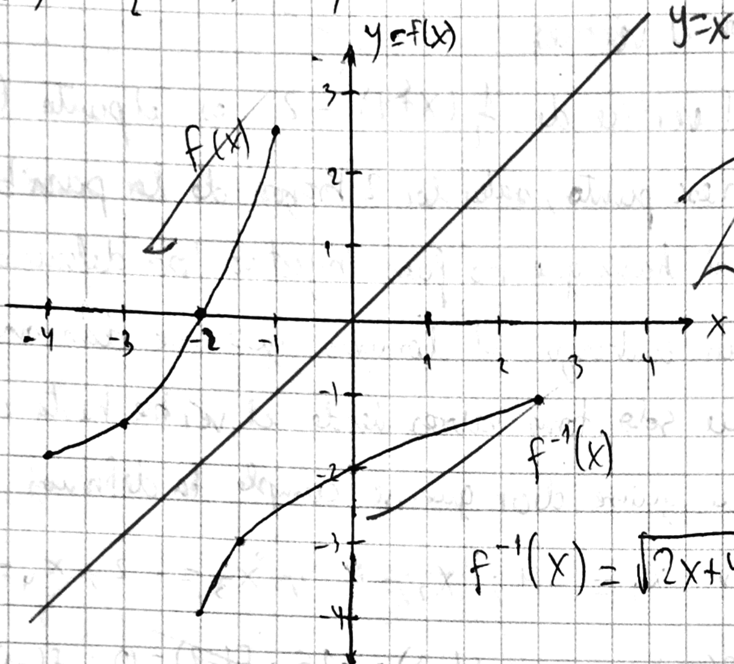
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) La gráfica de f^{-1} es el reflejo de la gráfica de f sobre la recta $y=x$ (~~se multiplica por (-1) a las coordenadas de f~~)

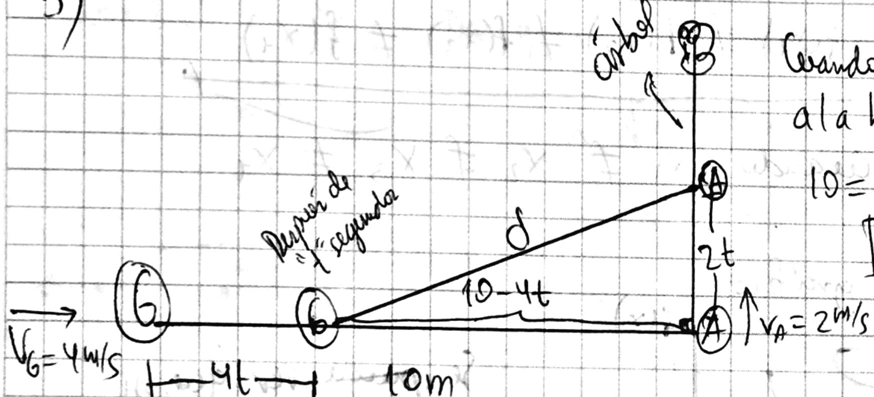
$$f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2 \; ; -4 \leq x \leq 1$$

↳



$$f^{-1}(x) = \sqrt{2x+4} - 4$$

5)



Cuando el galgo llegue a la base del árbol:

$10 = 4t$

$\boxed{t = \frac{5}{2}\,s}$

a) ∴ d → distancia entre el galgo y la ardilla para todo instante de tiempo

$$d_{(t)} = \sqrt{(10-4t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{100 - 80t + 16t^2 + 4t^2}$$

$$d_{(t)} = 2\sqrt{5t^2 - 20t + 25} = 2\sqrt{5(t^2 - 4t + 4) + 25 - 20}$$

$$d(t) = 2\sqrt{5(t-2)^2 + 5} \; ; \; 0 \leq t \leq \frac{5}{2}\,s$$

$\sqrt{2(y+2)}$

$\sqrt{2y+4} - 4 = x$

$-4 + \sqrt{2x+4} = y = f^{-1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{2x+4} - 4$

$-4t+4)+15$

$2\sqrt{5(t-2)^2+5}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$|x| \rightarrow$ si $x>0 \rightarrow$

si

$5(t-2)^2=0$

$t-2=0$

$t=2$

$(-5)t-5$

$3t-5=0$

$\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

$4 \pm \sqrt{16-4(5)}$

b) $d_{(t)} = 2\sqrt{5(t-2)^2+5}$; $0 \leq t \leq \frac{5}{2}$ s

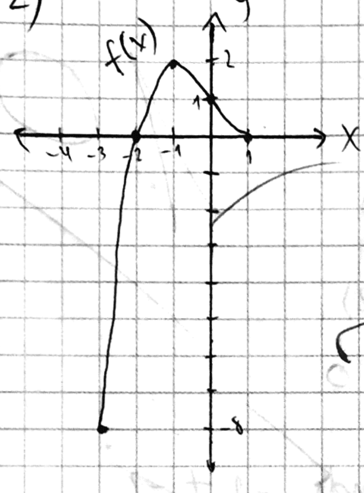
Para que la distancia sea mínima, $5(t-2)^2$ debe tomar el mínimo valor (cero) ya que 5 va a ser una constante para todo valor que tome t.

$\therefore \; d_{(t)_{MINIMA}} = 2\sqrt{\underbrace{5(t-2)^2}_{0}+5}$

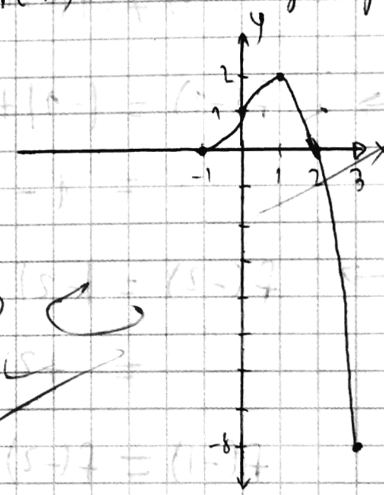
$d_{(t)_{MINIMA}} = 2\sqrt{5}$ m

$\hookrightarrow d_{(t)_{MINIMA}} = 2(2,23) = 4,46$m

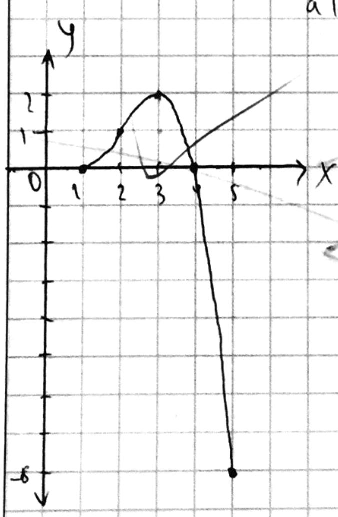
2)



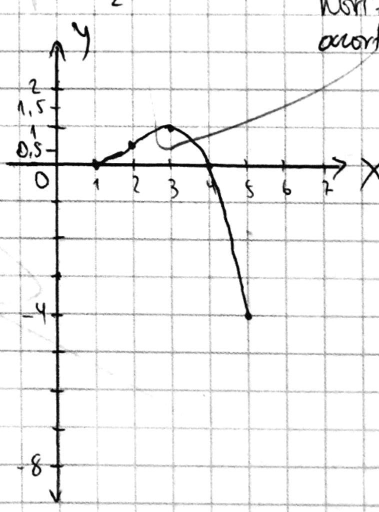
1°) $f(-x) \rightarrow$ se refleja respecto al eje y



2°) $f(-x+2) \rightarrow$ se mueve 2 unidades a la derecha



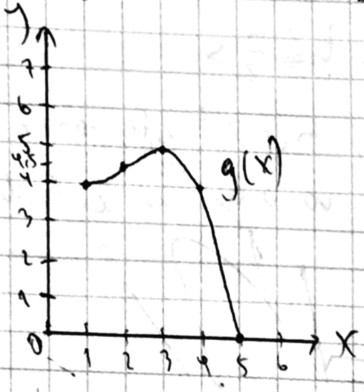
3°) $\frac{1}{2}f(2-x) \rightarrow$ se ensancha horizontalmente (o acorta verticalmente)



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4°) $\frac{1}{2}f(2-x)+4 \rightarrow$ se sube 4 unidades horizontalmente hacia arriba



Dom $g = [1;5]$

Rang $= [0;5]$

1)

a) $f(x) = |x| + x \ ;\ x < 0$

Contraejemplo:

Si f es inyectiva, entonces cumple que:

Si $-1 \wedge -2$ ($-1 \wedge -2 \in \text{Dom} f$) son diferentes, entonces $f(-1) \neq f(-2)$

↳ $f(-1) = |-1| + (-1)$
$= 1 - 1 = 0$

↳ $f(-2) = |-2| + (-2)$
$= +2 - 2 = 0$

$f(-1) = f(-2)$ cuando $-1 \neq -2$

Por lo tanto, la proposición es falsa.