# Fundamentos de Cálculo

Cuarta Práctica Calificada-Soluciones

Semestre Académico 2024 -1

1. Determine el dominio implícito de la función $f$, definida por: (2 puntos)

$$f(x)=\sqrt{1-\log_3(x^2-2x)}$$

**Solución** Restricciones

$$1-\log_3(x^2-2x)\geq 0 \ \ ...(1)$$

de donde

$$0<x^2-2x\leq 3 \ \ ...(2)$$

Luego, $Dom(f)=[-1;0[\cup]2;3]$

2. Sea $a$ un parámetro real positivo.

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\log_5(x-1)-1 & , \quad \frac{6}{5}\leq x<6 \\ 3a+\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) & , \quad 0\leq x<1 \end{cases}$$

a) Para $a=1$, justifique que $f$ es inyectiva. (2.5 puntos)

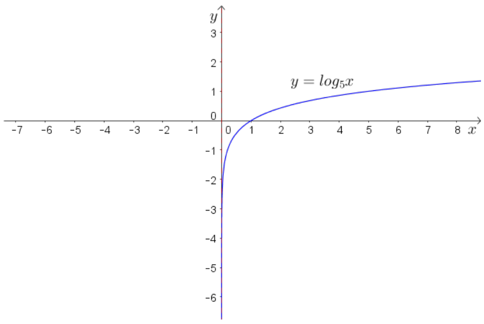
b) Para $a=1$, grafique $f^{-1}$, la inversa de $f$. (2 puntos)

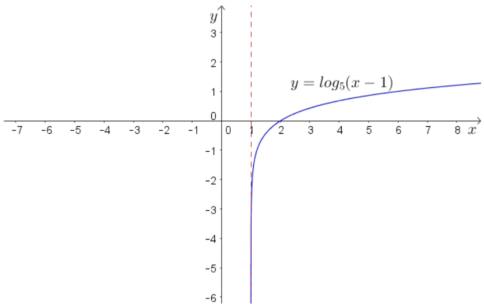
c) Encuentre los valores de $a$ para los cuales $f$ posee inversa. (2.5 puntos)

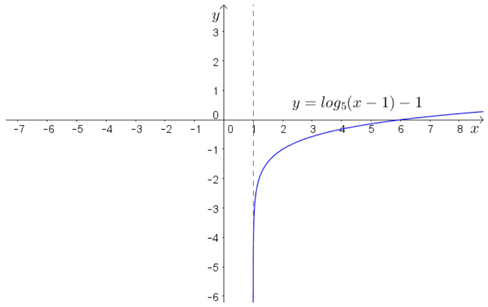
**Solución**

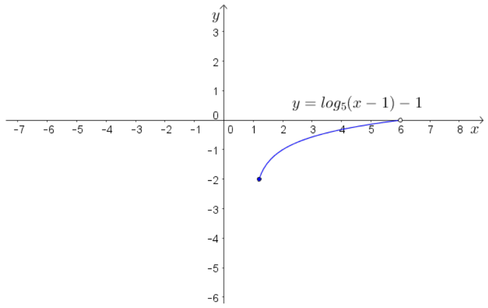
a)

Graficamos el primer tramo usando transformaciones:

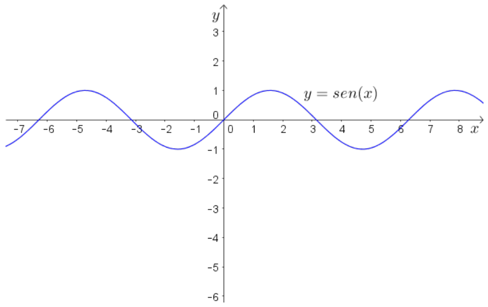


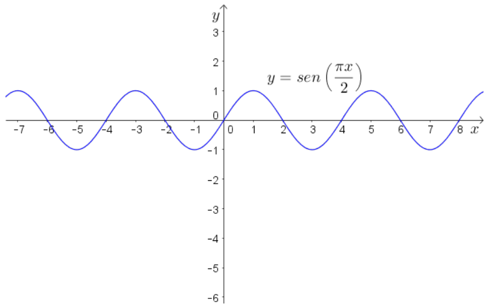



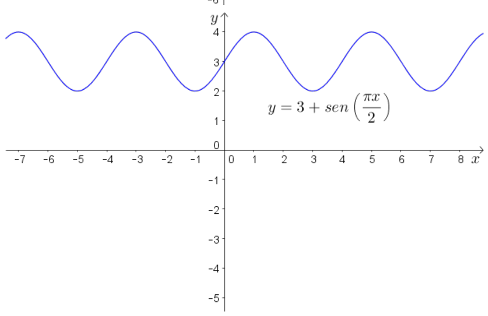


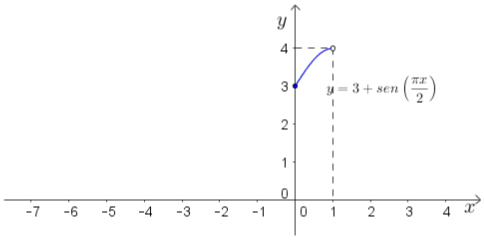




Graficamos el segundo tramo usando transformaciones:

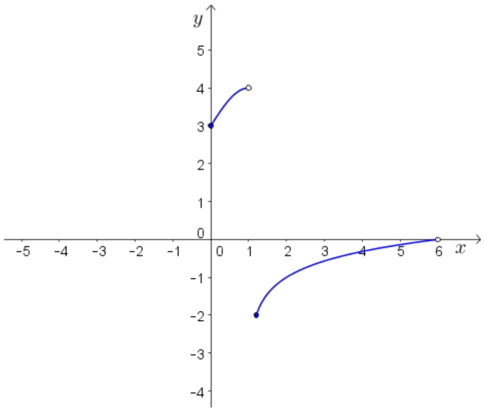


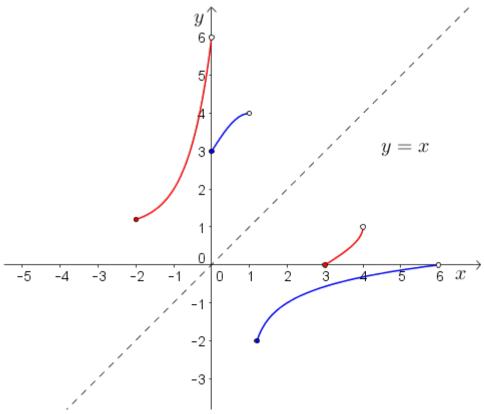



Luego la gráfica de $f$ es:




De la figura, por el criterio de la recta horizontal se observa que $f$ es inyectiva.

b)




c) Solución 1:

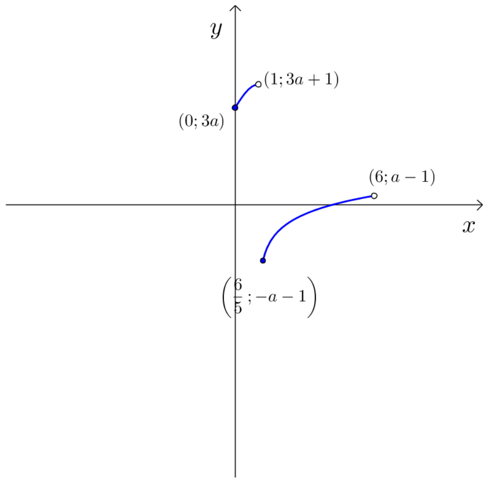
Si $a > 0$

$Ran(f_1) = [-a-1, a-1[$ y $Ran(f_2) = [3a; 3a+1[$.

Al resolver $a - 1 < 3a \vee 3a + 1 < -a - 1$, se obtiene $a \in ]0, +\infty[$

Por lo tanto $a \in ]0, +\infty[$

Solución 2:




Como $a>0$ entonces $3a>a-1$. .....(1)

Por lo tanto, $a\in]0,+\infty[$

3. Dada la función

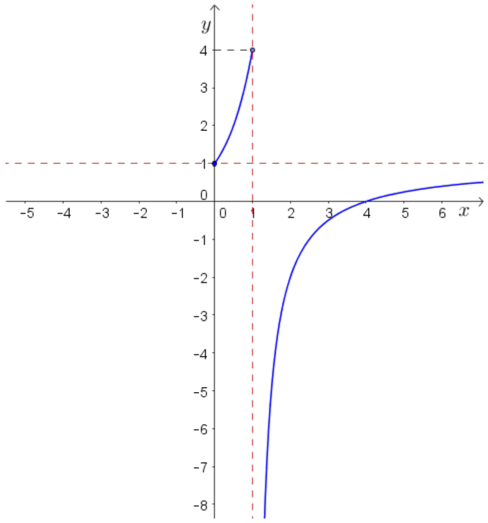
$$f(x)=\begin{cases} 4^x & , \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{4-x}{1-x} & , \quad x>1 \end{cases}$$

a) Justifique que $f$ es inyectiva. (2 puntos)

b) Halle la función inversa de $f$ y grafique. (3 puntos)

**Solución**

a) Justificaremos usando la gráfica. El segundo tramo se puede graficar usando asíntotas o con transformaciones.

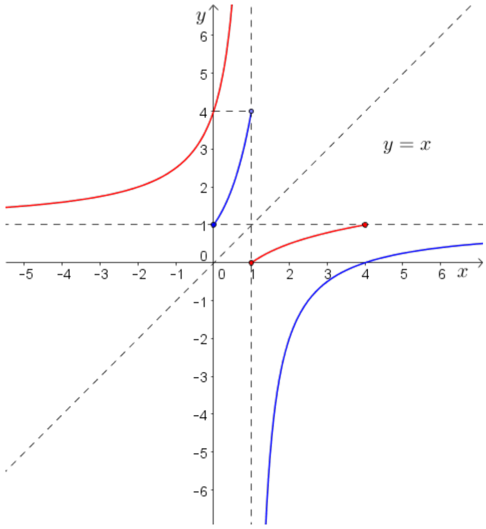



De la figura, por el criterio de la recta horizontal se observa que $f$ es inyectiva.

Nota: La gráfica del segundo tramo la pueden hacer usando asintotas o transformaciones.

b)

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \log_4 x & , \quad 1\le x\le 4 \\ \dfrac{x-4}{x-1} & , \quad x<1 \end{cases}$$




4. Halle la regla de correspondencia y esboce la gráfica de la función $f$ que cumple las siguientes condiciones: (4 puntos)

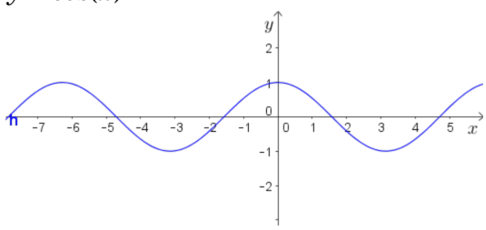
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $f$ es impar.
- Para $x \in ]0;1]$, $f$ se define por $f(x) = \dfrac{1+\cos(\pi x)}{2}$.
- Para $x \in ]1;+\infty[$, $f$ se define por $f(x) = ln(4x^2 - 4x + 1)$.

**Solución**

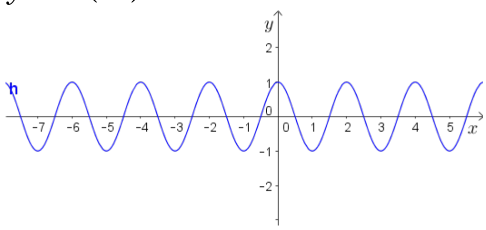
$$f(x) = \begin{cases} -\ln(4x^2+4x+1) & , \quad x < -1 \\ \dfrac{-1-\cos(\pi x)}{2} & , \quad -1 \le x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ \dfrac{1+\cos(\pi x)}{2} & , \quad 0 < x \le 1 \\ \ln(4x^2 - 4x + 1) & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Para graficar la función en el tramo $]0,1]$, realizamos las transformaciones:

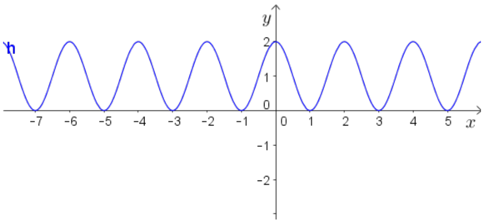
- $y = \cos(x)$



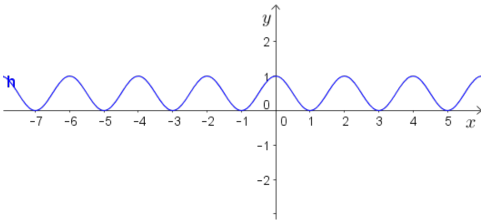

- $y = \cos(\pi x)$



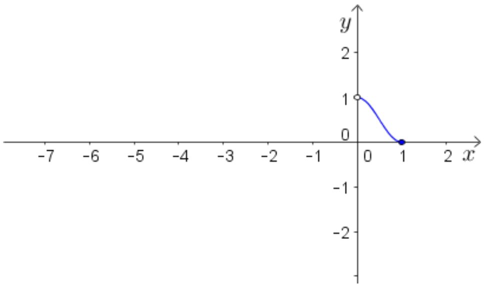
- $y = 1 + \cos(\pi x)$



- $y = \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{2}$

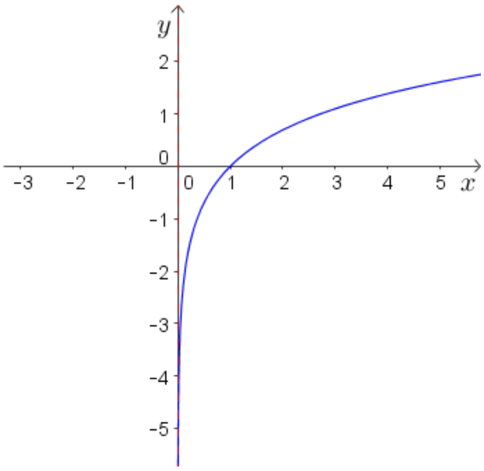


- $y = \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{2}, 0 < x \leq 1$

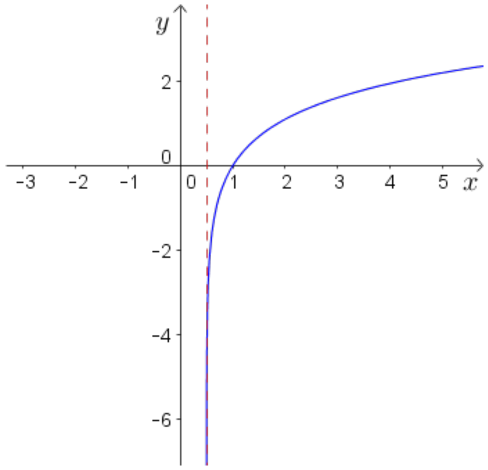


Para graficar la función en el tramo $]0, +\infty[$, escribimos $f(x) = \ln(4x^2 - 4x + 1) = 2\ln(2x - 1), x > 1$ y realizamos las transformaciones:

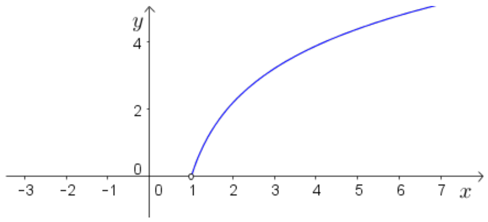
- $y = \ln(x)$



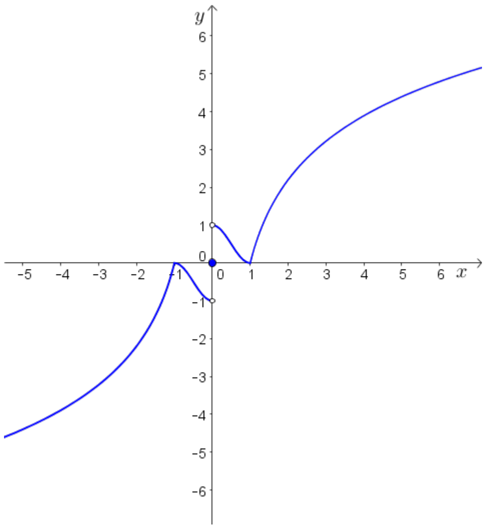
- $y = \ln(2x - 1)$




- $y = 2\ln(2x-1), x > 1$




Por último, usamos la simetría de la gráfica de $f$ con el origen y obtenemos.




5. Justifique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.
   a) Existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\log_3(x) + \log_5(x+2) = 2$. (1 punto)
   b) La función definida por $f(x) = \operatorname{sen}(-x^2 + 6x - 2)$; $x \in [0;1]$ es creciente (1 punto)

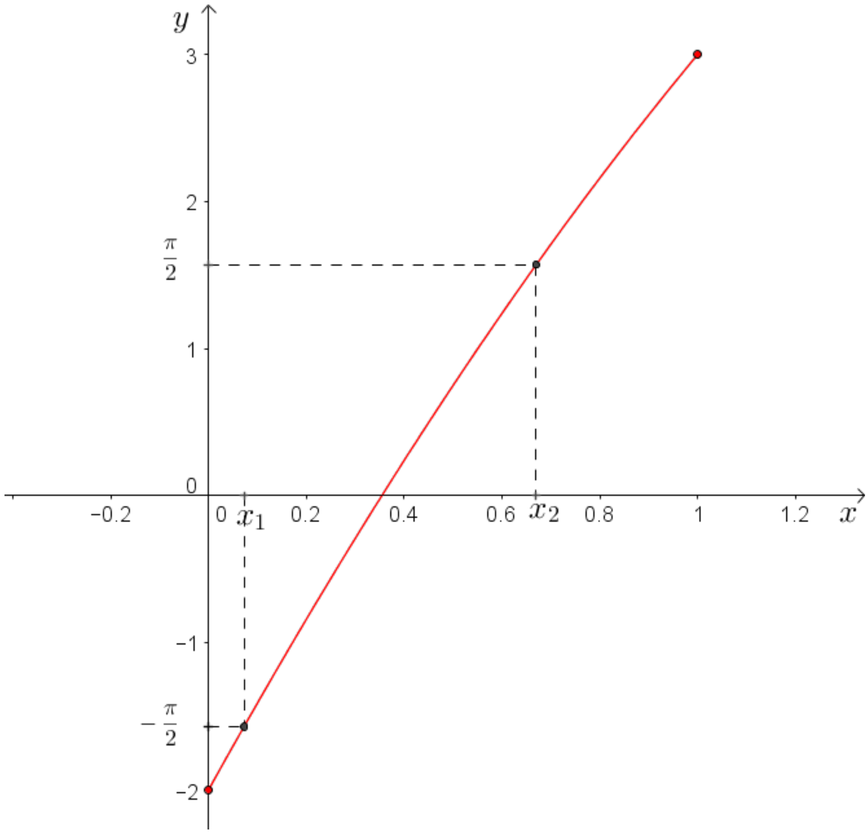
**Solución**

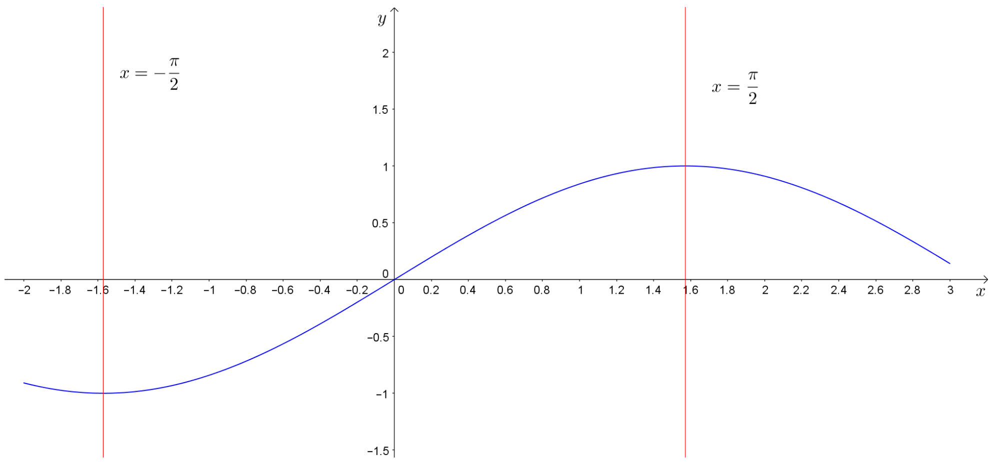
a) La proposición es verdadera.

Se observa que $x=3$ cumple la ecuación, además la función $f(x)=\log_3(x)+\log_5(x+1)$ es creciente por ser suma de crecientes, por tanto es inyectiva, por tanto $f(x)=2$ tiene a lo más una solución y como $f(3)=2$ entonces $x=3$ es la única solución.

b) La proposición es falsa.

$f$ se puede ver como la composición de $h(x)=-x^2+6x-2$ y $g(x)=\text{sen}(x)$.




De las gráficas, se observan que en $[0,x_1]$ la función $h$ es creciente y $h(x)$ toma valores en $[-2,-\frac{\pi}{2}]$; la función $g$ es decreciente en $[-2,-\frac{\pi}{2}]$. Luego $f=g\circ h$ es decreciente en $[0,x_1]$.

En $[x_1,x_2]$ la función $h$ es creciente y $h(x)$ toma valores en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$; la función $g$ es creciente en

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Luego $f = g \circ h$ es creciente en $[x_1, x_2]$.

En $[x_2, 1]$ la función $h$ es creciente y $h(x)$ toma valores en $[\frac{\pi}{2}, 3]$; la función $g$ es decreciente en $[\frac{\pi}{2}, 3]$. Luego $f = g \circ h$ es decreciente en $[x_2, 1]$.

Por lo tanto $f = g \circ h$ no es creciente en $[0, 1]$.

San Miguel, 13 de junio de 2024.