ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA EXAMEN PARCIAL-TURNO 2

SEMESTRE ACADÉMICO 2023-1

SOLUCIONES PROPUESTAS

Pregunta 1

Considere la siguiente ecuación

$$k^3(x+1)^2 + y^2 - 4y - k^2 + 4 = 0.$$

Analice qué forma tiene su gráfica en cada uno de los siguientes casos:

a) $k = 1$. (1 punto)
b) $k = 0$. (1 punto)
c) $k > 1$. (2 puntos)

Pregunta 2

Considere la cónica $\mathcal{C}$ cuya ecuación es la siguiente:

$$\mathcal{C}: 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60\,x - 80\,y + 100 = 0$$

a) Mediante una rotación adecuada de los ejes de coordenadas, demuestre que dicha ecuación corresponde a una parábola. (2 puntos)
b) Halle las coordenadas del vértice de $\mathcal{C}$ y la ecuación de su eje focal en el sistema XY. (1 punto)
c) Grafique la cónica $\mathcal{C}$ en el sistema XY, mostrando su vértice y eje focal. (1 punto)

Pregunta 3

Considere el triángulo ABC, donde:

- El vértice A tiene coordenadas $(1; 7)$.
- La recta $\mathcal{L}$: $y = 4$ contiene a la altura del triángulo, trazada desde el vértice B.
- El punto $O(\frac{7}{4}; 4)$ es el ortocentro (punto de intersección de las alturas del triángulo).
- La recta que pasa por los puntos O y C tiene pendiente $\frac{8}{3}$.

a) Halle las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC. (2,5 puntos)
b) Describa con un sistema de inecuaciones el interior del triángulo ABC con su frontera. (1,5 puntos)

Pregunta 4

Considere los lugares geométricos siguientes:

- $\mathcal{P}$ es la parábola con ecuación $(x-1)^2 = 2\,(y - \frac{3}{2})$.
- $\mathcal{L}$ es la recta de ecuación $3x - 4y - 4 = 0$.

- $\mathcal{E}$ es la elipse con eje focal paralelo al eje X, con centro en el foco de $\mathcal{P}$, que tiene un vértice en la recta $\mathcal{L}$ y tal que uno de sus lados rectos mide $\frac{10}{3}$.
- $\mathcal{H}$ es la hipérbola cuyos focos son los focos de $\mathcal{E}$ y la distancia entre sus vértices es 2

unidades.

a) Halle la ecuación de $\mathcal{E}$. (2 puntos)

b) Halle la ecuación de $\mathcal{H}$. (2 puntos)

Pregunta 5

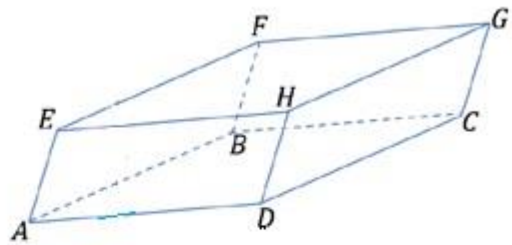
a) Considere los vectores

$$\vec{c} = (0; 4),\ \vec{b} \text{ vector paralelo al vector } (1; -1) \text{ y } \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{c} + \vec{b}.$$

Si además se sabe que $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$ y que la segunda componente del vector $\vec{b}$ es positiva, halle

el vector $\vec{b}$. (2 puntos)

b) En la figura se muestra un paralelepípedo ABCD – EFGH



Si se sabe que $E(2; -3; 2)$, $G(-1; 1; 2)$, $\overrightarrow{DE} = (2; -4; 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (-3; 5; 1)$, halle las coordenadas de A, B, C, D, F y H; explique cómo las obtiene. (2 puntos)

Año

2	0	2	3

Número

3	7	4	0

Código de alumno

Primer examen

Montesinos García Juan Pablo

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H-117

Fecha: 15 / 05 / 2023

Nombre del profesor: J. Crisóstomo

Nota

20

Firma del profesor

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1

$$k^3(x+1)^2 + y^2 - 4y - k^2 + 4 = 0$$

a) $k = 1$

$$(1)^3(x+1)^2 + y^2 - 4y + 4 - (1)^2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

1 Es una circunferencia.

porque tiene forma: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

b) $k = 0$

$$(0)^3(x+1)^2 + y^2 - 4y + 4 - (0)^2 = 0$$

$$0 + (y-2)^2 = 0$$

$$y = 2$$

1 Es una recta horizontal

paralela al eje X.

c) $k > 1$

$$k^3(x+1)^2 + y^2 - 4y + 4 - k^2 = 0$$

$$\frac{k^3(x+1)^2}{k^2} + \frac{(y-2)^2}{k^2} = \frac{k^2}{k^2}$$

$$k(x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{k^2} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{k}} + \frac{(y-2)^2}{k^2} = 1$$

2 0

Se sabe: $k > 1 \longrightarrow \frac{1}{k} < 1$

$k > 1 \longrightarrow k^2 > 1$

~~Por lo tanto~~

Por lo tanto tiene la forma:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-2)^2}{k^2} + \frac{(x+1)^2}{\frac{1}{k}} = 1$$

$k^2 > \frac{1}{k}$

∴ Es una elipse cuyo eje focal es paralelo al eje y

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2. $\mathcal{C}: 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

a) Recordar: $\tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C}$

$B = -24$
$A = 16$
$C = 9$

$\tan 2\theta = \dfrac{-24}{16-9} = -\dfrac{24}{7}$

Se sabe: $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$-\dfrac{\overset{12}{\cancel{24}}}{7} = \dfrac{\cancel{2}\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$-12 + 12\tan^2\theta = 7\tan\theta$

$12\tan^2\theta - 7\tan\theta - 12 = 0$
$4\tan\theta \quad +3$
$3\tan\theta \quad -4$

$(4\tan\theta + 3)(3\tan\theta - 4) = 0$

$\tan\theta = -\dfrac{3}{4} \vee \tan\theta = \dfrac{4}{3}$

OJO: la tangente de theta no puede ser negativa!! entonces

$\tan\theta \neq -\dfrac{3}{4}$

$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)$ $\quad \operatorname{sen} 53° = \dfrac{4}{5}$

$\theta = 53°$ $\quad \cos 53° = \dfrac{3}{5}$

$x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta$ ~~$x = \frac{3u-4v}{5}$~~
$y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta$ ~~$y =$~~

$x = u\left(\dfrac{3}{5}\right) - v\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3u-4v}{5}$

~~$y = u\left(\frac{4}{5}\right)$~~

$y = u\left(\dfrac{4}{5}\right) + v\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4u+3v}{5}$

Prese... aqui su trabajo

...xclusiva para
...s y desarrollos
...orrador)

Continuación de la 2 a)

$$16x^2-24xy+9y^2-60x-80y+100=0$$

$$16\left(\frac{3u-4v}{5}\right)^2-24\left(\frac{3u-4v}{5}\right)\left(\frac{4u+3v}{5}\right)+9\left(\frac{4u+3v}{5}\right)^2-60\left(\frac{3u-4v}{5}\right)$$
$$-80\left(\frac{4u+3v}{5}\right)+100=0$$

$$\frac{16}{25}(9u^2+16v^2-24uv)-\frac{24}{25}(12u^2\underbrace{+9uv-16uv}_{-7uv}-12v^2)+\frac{9}{25}(16u^2+9v^2+2\ldots$$
$$-36u\,\cancel{+48v}-64u\,\cancel{-48v}+100=0$$

$$\frac{144}{25}u^2+\frac{256}{25}v^2-\frac{384}{25}uv-\frac{288}{25}u^2\ \frac{336}{25}uv-$$

$$\cancel{\frac{144}{25}u^2}+\frac{256}{25}v^2\cancel{-\frac{384}{25}uv}\cancel{-\frac{288}{25}u^2}\cancel{+\frac{168}{25}uv}+\frac{288}{25}v^2\cancel{+\frac{144}{25}u^2}+\frac{81}{25}v^2+\ldots$$
$$-36u-64u+100=0$$

$$25v^2-100u+100=0$$

$$\frac{1}{25}(25v^2)=(100u-100)\frac{1}{25}$$

$$v^2=4u-4$$
$$(v-0)^2=4(u-1)$$

tiene la forma:
$(y-k)^2=4p(x-h)$

$\therefore$ Es una parábola.

2/

Presente aquí su trab...

...para cálculos y desarrollo (borrador)

2.

b) ~~Usando lo~~

Usando lo hallado en el ítem a):

$$(v-0)^2 = 4(u-1)$$

<u>En UV:</u>

Vértice: $(1;0)$

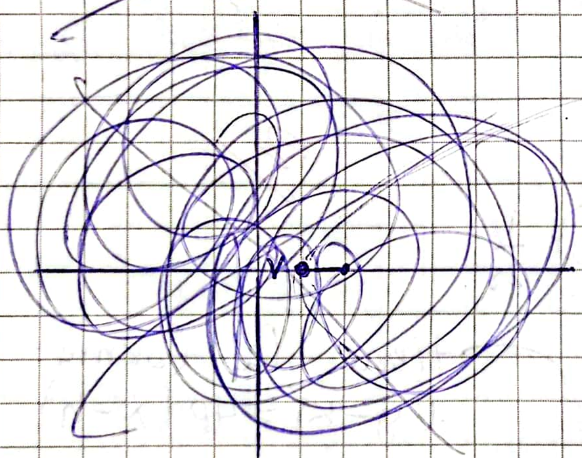
$$x = \frac{3u-4v}{5} = \frac{3(1)-4(0)}{5} = \frac{3}{5}$$

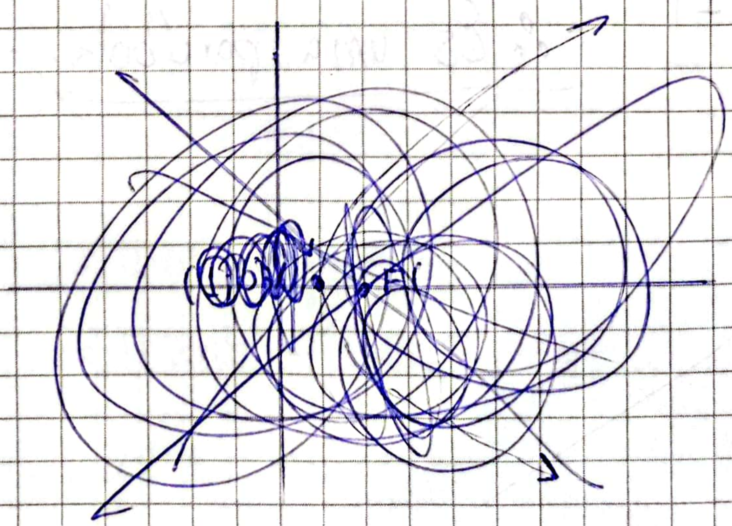
$$y = \frac{4u+3v}{5} = \frac{4(1)+3(0)}{5} = \frac{4}{5}$$

<u>En XY:</u>

Vértice: $\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

~~$(v-0)^2 = 4(u-1)$~~



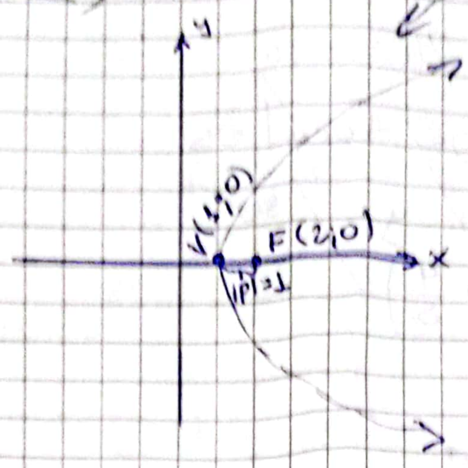


Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$(\Leftarrow)$

$$(v-0)^2 = 4(u-1)$$
$$4p = 4$$
$$p = 1$$



En UV:

F(2;0)

$$x = \frac{3u-4v}{5} = \frac{3(2)-4(0)}{5} = \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{4u+3v}{5} = \frac{4(2)+3(0)}{5} = \frac{8}{5}$$

En XY:

Vértice: $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Foco: $\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$

Recordar: El eje focal de una parábola es la recta que pasa por el vértice y el foco.

~~Sea d_F la ecuación del~~

~~Sea d_F la recta focal~~

Sea d_F el eje focal:

$$m_F = \frac{\frac{8}{5}-\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

~~Ec. de d_F:~~

~~$\left[y-\frac{4}{5} = \frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{5}\right)\right]3$~~

Ec. de d_F:

$$3\left(y-\frac{4}{5}\right) = \left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{5}\right)\right]3$$

$$3y - \cancel{\frac{12}{5}} = 4x - \cancel{\frac{12}{5}}$$

$$0 = 4x - 3y : d_F$$

Presente aquí su trabajo

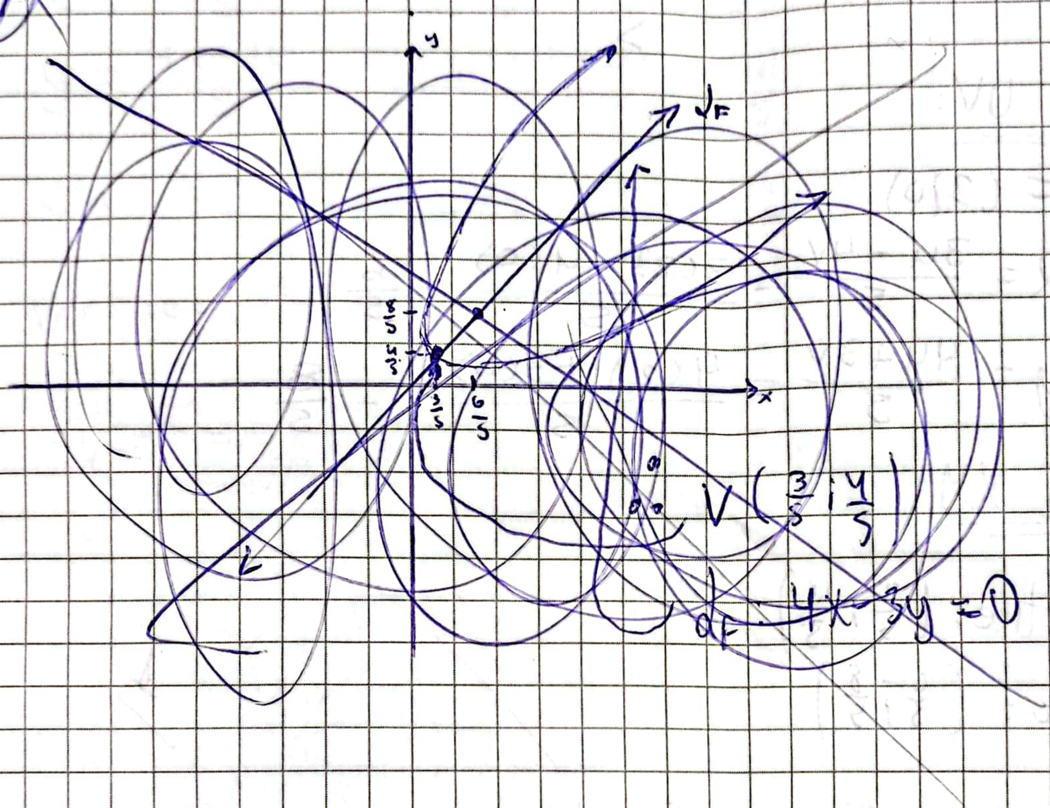
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Continuación de la 2b):

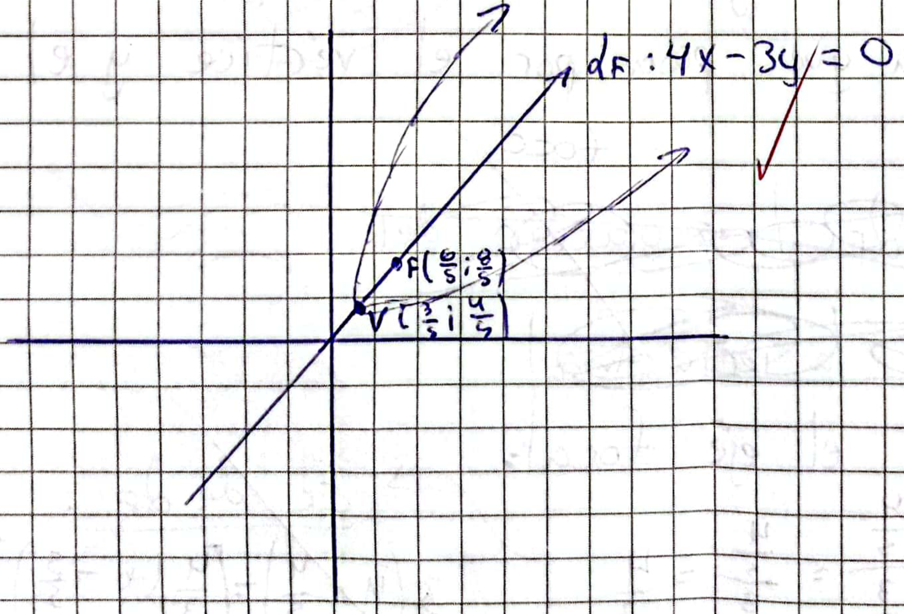
∴ La ecuación del eje focal es

$\mathcal{L}_F : 4x - 3y = 0$ y su

vértice es $V\left(\frac{3}{5} ; \frac{4}{5}\right)$



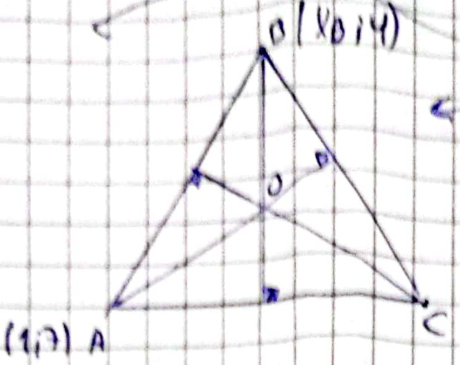
c)



Presen... aquí su trabajo

...a exclusiva para
...ulos y desarrollos
(borrador)

3.



El triángulo no está bien graficado, lo dibujé de esa forma para poder guiarme mejor.

Datos del problema

$B \in \mathcal{L}: y = 4 \rightarrow B(x_B;4)$

$O\left(\frac{7}{4};4\right)$

$A(1;7)$

$m_\alpha = \frac{8}{3}$

a) Sea $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por O y C.

$m_{\mathcal{L}_1} = \frac{8}{3}$

$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_{AB} \longrightarrow m_1 \cdot m_{AB} = -1$

$\frac{8}{3} \cdot m_{AB} = -1$

$m_{AB} = -\frac{3}{8}$

$A(1;7)$

$B(x_B;4)$

$m_{AB} = -\frac{3}{8} = \frac{7-4}{1-x_B}$

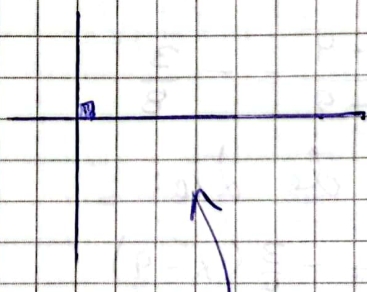
$-\frac{\cancel{3}}{8} = \frac{\cancel{3}}{1-x_B}$

$8 = x_B - 1$

$x_B = 9$

$B(9;4)$

OBS: Como $y=4$ es la altura trazada desde B, la única forma en la que será perpendicular al lado $\overline{AC}$, es que A y C tengan misma abscisa.



Del gráfico: Una recta horizontal solo podrá ser perpendicular a una recta vertical y viceversa.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3. Continuación de la 3a):

a) $A(1;7)$

$B(9;4)$

$C(1;y_c)$

$O\left(\frac{7}{4};4\right)$

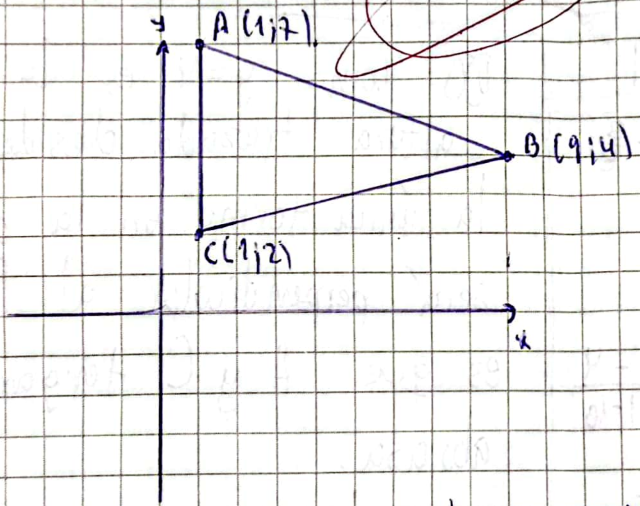
$m_{OC}=\frac{8}{3}$

$$\frac{y_c-4}{1-\frac{7}{4}}=\frac{8}{3}$$

$$3y_c-12=8-14$$

$$3y_c=6$$

$$y_c=2 \longrightarrow C(1;2)$$



$$m_{AB}=\frac{7-4}{1-9}=-\frac{3}{8}$$

Ec. de L_{AB}:

$$y-4=-\frac{3}{8}(x-9)$$

$$8y-32=27-3x$$

$$3x+8y-59=0$$

$$m_{BC}=\frac{4-2}{9-1}=\frac{1}{4}$$

Ec. de L_{BC}:

$$y-2=\frac{1}{4}(x-1)$$

$$4y-8=x-1$$

$$0=x-4y+7$$

$\therefore$ $L_{AB}: 3x+8y-59=0$

$L_{BC}: x-4y+7=0$

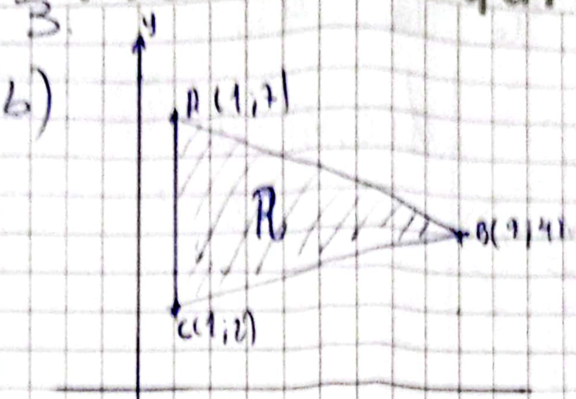
$L_{AC}: \boxed{x=1}$ → Es lo mismo a decir: $x-1=0$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3.

b)



Usando como punto de referencia al $(2;3)$

$d_{AB}: 3(2)+8(3)-59=-29\leq 0$

$d_{BC}: 1(2)-4(3)+7=-3\leq 0$

$d_{AC}: 2-1=1\geq 0$

$$R=\begin{cases} 3x+8y-59\leq 0 \\ x-4y+7\leq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$$

4.

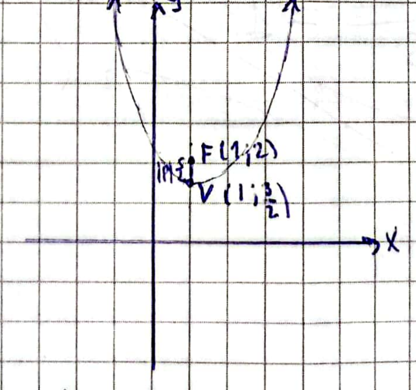
a) $P: (x-1)^2=2\left(y-\frac{3}{2}\right)$

$d: 3x-4y-4=0$

$V\left(1;\frac{3}{2}\right)$

$4p=2$

$p=\frac{1}{2}$



Del gráfico:

$F(1;2)$

$C_{\varepsilon}(1;2)$

$V_1(x_1;y_1)\in d: 3x-4y-4$

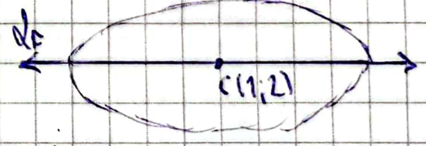
$3x-4=4y$

$y=\frac{3}{4}x-1$

entonces:

$V_{1\varepsilon}\left(x_1;\frac{3}{4}x_1-1\right)$

Eje focal paralelo a eje



$d_F: y=2$

$V_1\in d_F:$

$\frac{3}{4}x_1-1=2$

$\frac{3}{4}x_1=3$

$x_1=4$

$V_1(4;2)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\Longleftrightarrow$ Continuación de la 4a):

$d(c;V_1) = a = \sqrt{(4-1)^2+(2-2)^2}$

$a = 3$

$LR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{\cancel{10}^{\,5}}{3}$

$b^2 = \dfrac{5a}{3} \longrightarrow b^2 = \dfrac{5(\cancel{3})}{\cancel{3}}$

$b = \sqrt{5}$

RECORDAR: La elipse con eje focal paralelo al eje X tiene esta ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$\therefore\ \mathcal{E}: \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{5} = 1$

Presente aquí su trabajo

4.

b)

$a^2 = b^2 + c^2$

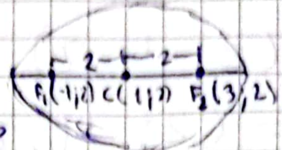
$(3)^2 = (\sqrt{5})^2 + c^2$

$9 - 5 = c^2$

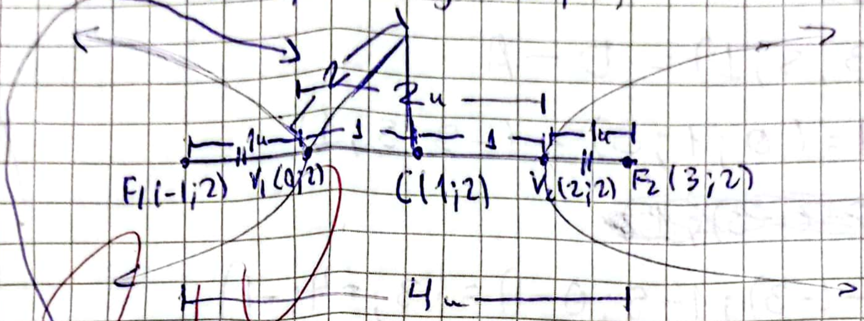
$c = 2$

$d(C;F_1) = 2$

$d(C;F_2) = 2$



Los focos de la elipse que también son los de la hipérbola son $(-1;2)$ y $(3;2)$



$2c = 4$

$c = 2$

$b^2 + a^2 = c^2$

$b^2 + 1^2 = 2^2$

$b = \sqrt{3}$

Recordar: La hipérbola con eje focal paralelo al eje X tiene esta ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \mathcal{H}: \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

5.

a) $\vec{c} = (0;4)$

$\vec{b} = \alpha(1;-1)$

$\vec{b} = (\alpha;-\alpha)$

$\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{c} + \vec{b}$

$\vec{a} = \frac{1}{4}(0;4) + (\alpha;-\alpha)$

$\vec{a} = (0;1) + (\alpha;-\alpha)$

$\vec{a} = (\alpha;1-\alpha)$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$

$\sqrt{(\alpha)^2 + (1-\alpha)^2} = \sqrt{5}$

$\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 5$

$2\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0$

$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$\alpha = 2 \vee \alpha = -1$

$\alpha = -1$, porque nos indican que la segunda componente de $\vec{b}$ es positiva, entonces...

$\therefore \vec{b} = (-1;1)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5.

b) Datos:

$E(2;-3;2)$, $G(-1;1;2)$, $\overrightarrow{DE}=(2;-4;2)$ y $\overrightarrow{BC}=(-3;5;1)$

$\overrightarrow{DE}=(2;-4;2)$

$E-D=(2;-4;2)$

$(2;-3;2)-(2;-4;2)=D$

$D=(2-2;-3-(-4);2-2)=(0;1;0)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

$(-3;5;1)=D-A$

$A=(0;1;0)-(-3;5;1)$

$A=(0-(-3);1-5;0-1)=(3;-4;-1)$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DH}$

$(2;-3;2)-(3;-4;-1)=H-(0;1;0)$

$H=(2-3+0;-3-(-4)+1;2-(-1)+0)=(-1;1;3)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FG}$

$(0;1;0)-(3;-4;-1)=(-1;1;2)-F$

$F=(-1+3-0;1+(-4)-1;2+(-1)-0)=(2;-4;1)$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$

$(2;-4;1)-(2;-3;2)=B-(3;-4;-1)$

$B=(2-2+3;-4-(-3)-4;1-2-1)=(3;-5;-2)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ → $C-(3;-5;-2)=(0;1;0)-(3;-4;-1)$

$C=(0-3+3;1-(-4)-5;0-(-1)-2)$

$C=(0;0;-1)$

2.0

$A = (3; -4; -1)$

$B = (3; -5; -2)$

$C = (0; 0; -1)$

$D = (0; 1; 0)$

$F = (2; -4; 1)$

$H = (-1; 1; 3)$