Fundamentos de Cálculo

Primera Práctica Dirigida - Soluciones propuestas

Semestre Académico 2021 -2

Problemas Obligatorios

1. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}$.

Solución:
Equivale a resolver: $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} > 0 \iff \dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2} < 0.$

$$\boxed{C.S. =]-\infty, 1[- \{-1\}.}$$

b) $\dfrac{1}{|x+4|} > \dfrac{1}{2|x|-4}$.

Solución:
Equivale a resolver: $\dfrac{1}{|x+4|} - \dfrac{1}{2|x|-4} > 0.$

Se considerarán los siguientes casos o zonas:

I) $\underline{x < -4}$: En este caso tenemos $|x+4| = -(x+4)$, $|x| = -x$. Luego la inecuación equivale a resolver: $-\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{2x+4} > 0 \wedge x < -4. \iff \dfrac{x}{(x+4)(x+2)} < 0 \wedge x < -4$ $\quad C.S._I =]-\infty, -4[$.

II) $\underline{-4 \leq x < 0}$: En este caso tenemos $|x+4| = x+4$, $|x| = -x$. Luego la inecuación equivale a resolver $\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{2x+4} > 0 \wedge -4 \leq x < 0 \iff \dfrac{3x+8}{(x+4)(x+2)} > 0 \wedge -4 \leq x < 0$
$C.S._{II} = \left]-4, -\frac{8}{3}\right[\cup]-2, 0[$.

III) $\underline{x \geq 0}$: En este caso tenemos $|x+4| = x+4$, $|x| = x$. Luego la inecuación en este caso equivale a resolver $\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{1}{2x-4} > 0 \wedge x \geq 0 \iff \dfrac{x-8}{(x+4)(x-2)} > 0 \wedge x \geq 0$
$C.S._{III} = [0, 2[\cup]8, +\infty[$.

Finalmente unimos los conjuntos solución: $\boxed{C.S. =]-\infty, -4[\cup \left]-4, -\dfrac{8}{3}\right[\cup]-2, 2[\cup]8, +\infty[.}$

---

2. Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

Es suficiente que $2x-1<|2x-1|$ para que x sea un número real negativo.

Solución:
Falso. Basta dar $x=0$ como contraejemplo. $2(0)-1=-1<1=|2(0)-1|$ pero 0 no es negativo.

Problemas Complementarios

1. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{x+1}{x^5+9x^4+22x^3+26x^2+12x}>0.$

Solución:
Factorizando el denominador se obtiene:

$$\frac{x+1}{x(x+1)(x+6)(x^2+2x+2)}>0 \iff \frac{1}{x(x+6)}>0 \wedge x\neq -1.$$

$$\boxed{C.S.=]-\infty,-6[\cup]0,+\infty[.}$$

b) $\left(\dfrac{-x^2-2x+3}{|x|+1}\right)\sqrt{\left|1-\dfrac{3}{x+2}\right|-2}>0.$

Solución:
La restricción por la raíz cuadrada es $\left|1-\dfrac{3}{x+2}\right|-2\geq 0$. Sabemos que $\sqrt{\ldots}$ nunca será negativo. Como el producto debe ser estrictamente positivo, la inecuación se reduce a resolver:

$$\left|1-\frac{3}{x+2}\right|-2>0 \qquad \wedge \qquad \frac{-x^2-2x+3}{|x|+1}>0$$

$$\iff \left(1-\frac{3}{x+2}<-2 \vee 1-\frac{3}{x+2}>2\right)\wedge \quad -x^2-2x+3>0$$

$$\iff \left(\frac{3(x+1)}{x+2}<0 \vee \frac{x+5}{x+2}<0\right) \quad \wedge \quad (x+3)(x-1)<0$$

$$\iff x\in]-5,-1[-\{-2\} \quad \cap \quad]-3,1[.$$

$$\boxed{C.S.=]-3,-1[-\{-2\}.}$$

c) $\sqrt{x^2-1}<x.$

Solución:
En primer lugar tenemos la restricción por la raíz cuadrada:
$x^2-1\geq 0 \iff x\in C.R.=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[.$
Además debe cumplirse $x>0 \wedge x^2-1<x^2$, esto se cumple para todo $x>0$.
Finalmente $\boxed{C.S.=[1,+\infty[.}$

d) $2-|x-1| \leq \sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+2}$.

Solución:

En primer lugar tenemos la restricción por la raíz cuadrada: $x^2-\dfrac{x}{2}+2 \geq 0$, esto se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tenemos los siguientes casos:

- $\underline{2-|x-1| \leq 0}$, es decir $x \leq -1$ ó $x \geq 3$, en este caso la desigualdad se cumple.

  $C.S._I =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$.

- $\underline{2-|x-1| > 0}$, es decir $-1 < x < 3$, en este caso se puede elevar al cuadrado y resolver $(2-|x-1|)^2 \leq x^2-\dfrac{x}{2}+2 \iff \left(x<1 \wedge (x+1)^2 \leq x^2-\dfrac{x}{2}+2\right) \vee \left(x \geq 1 \wedge (3-x)^2 \leq x^2-\dfrac{x}{2}+2\right)$

  Tendría en este caso: $\left(x<1 \wedge \dfrac{5x}{2}-1 \leq 0\right) \vee \left(x \geq 1 \wedge \dfrac{11x}{2}-7 \geq 0\right) \quad \wedge \quad -1<x<3$

  $\iff x \in \left(\left]-\infty,\dfrac{2}{5}\right] \cup \left[\dfrac{14}{11},+\infty\right[\right) \cap [-1,3] = \left]-1,\dfrac{2}{5}\right] \cup \left[\dfrac{14}{11},3\right[$.

Luego de unir los casos se obtiene: $\boxed{C.S. = \left]-\infty,\dfrac{2}{5}\right] \cup \left[\dfrac{14}{11},+\infty\right[}$

2. Sea a una constante real tal que $-1<a<0$. Para cada valor de a resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{(-ax-1)(2x^2-4x-2ax+4a)}{(1-x)^6(x+3)^3(\sqrt{x^4+1})} \leq 0$.

Solución:

Factorizando se obtiene

$$\frac{-2a\left(x+\frac{1}{a}\right)(x-2)(x-a)}{(x-1)^6(x+3)^3(\sqrt{x^4+1})} \leq 0$$

Como $\sqrt{x^4+1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $-2a > 0$, equivale a resolver

$$\frac{\left(x+\frac{1}{a}\right)(x-2)(x-a)}{(x-1)^6(x+3)^3} \leq 0$$

Los puntos de referencia del numerador son $-\frac{1}{a}, 2, a$ y del denominador son 1 y -3 con multiplicidades 6 y 3 respectivamente. Como $-1<a<0$ podemos ordenar $-3<a<1<2$ pero para analizar el punto de referencia $-\frac{1}{a} > 1$ debemos analizar por separado las siguientes situaciones:

I) $\underline{\text{Si } -1<a<-\dfrac{1}{2}}$: En este caso $1 < -\dfrac{1}{a} < 2$, entonces $\boxed{C.S. =]-3,a] \cup \left[-\dfrac{1}{a},2\right]}$.

II) $\underline{\text{Si } a=-\dfrac{1}{2}}$: En este caso $-\dfrac{1}{a}=2$, entonces $\boxed{C.S. = \left]-3,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \{2\}}$.

III) $\underline{\text{Si } -\dfrac{1}{2}<a<0}$: En este caso $-\dfrac{1}{a}>2$, entonces $\boxed{C.S. =]-3,a] \cup \left[2,-\dfrac{1}{a}\right]}$.

Obs: Estos conjuntos solución corresponden a situaciones diferentes, no se unen ni intersectan, se presenta el C.S. correspondiente a valores diferentes de la constante a, es decir inecuaciones diferentes.

b) $\dfrac{x+\sqrt{x^2+ax}}{a+x} \le 1.$

Solución:

Es equivalente a resolver $\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-a}{a+x} \le 0$. En primer lugar tenemos la restricción por la raíz cuadrada $x^2+ax = x(x+a) \ge 0$, donde $-1 < a < 0$ y la restricción por denominador $x \ne -a$. $C.R. =]-\infty, 0] \cup]-a, +\infty[$.

Analizamos los siguientes casos:

I) $a+x > 0$: Este caso se dará en $C.R.$ para $x > -a$, entonces debemos resolver $\sqrt{x^2+ax}-a \le 0$, es decir $\sqrt{x^2+ax} \le a$, pero como $a < 0$ esto no es posible. $C.S._I = \emptyset$.

II) $a+x < 0$: Este caso se dará en $C.R$ para $x \le 0$, entonces debemos resolver $\sqrt{x^2+ax}-a \ge 0$, al ser $a < 0$ esto siempre se cumple. $C.S._{II} =]-\infty, 0]$.

El conjunto solución final es la unión de ambos casos $\boxed{C.S. =]-\infty, 0].}$

3. Sea b una constante real positiva, resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación

$$\frac{1}{x+b+1} > \frac{2x}{2x-b}$$

en los siguientes casos:

a) $b = 2$.

Solución:

$$\frac{1}{x+3} > \frac{2x}{2x-2} \iff \frac{-2(x+1)^2}{2(x+3)(x-1)} > 0 \iff \frac{(x+1)^2}{(x+3)(x-1)} < 0$$

$$\boxed{C.S. =]-3, 1[- \{-1\}.}$$

b) $0 < b < 2$.

Solución:

$$\frac{1}{x+b+1} > \frac{2x}{2x-b} \iff \frac{2x^2+2bx+b}{2(x+b+1)\left(x-\frac{b}{2}\right)} < 0$$

Como $0 < b < 2$ entonces $4b(b-2) < 0$ y $2x^2+2bx+b > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces se reduce a analizar: $\dfrac{1}{(x+b+1)\left(x-\frac{b}{2}\right)} < 0.$

Ordenamos los puntos de referencia: $-b-1 < b/2$. Entonces $\boxed{C.S. = \left]-b-1, \frac{b}{2}\right[}$

c) $b > 2$.

Solución:

$$\frac{1}{x+b+1} > \frac{2x}{2x-b} \iff \frac{2x^2+2bx+b}{2(x+b+1)\left(x-\frac{b}{2}\right)} < 0$$

Como $b > 2$ entonces $4b(b-2) > 0$ entonces $2x^2+2bx+b = 2\left[x-\left(-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}\right)\right]$.

Tenemos 4 puntos de referencia: $-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}$, $-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}$, $-b-1$, $\frac{b}{2}$.
Sabemos que $b>2$ entonces $\frac{b}{2}>1>0$, $-b-1<-3<0$, además $-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}<-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}<0$ por ser $b>0$. Sólo faltaría comparar $-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}$ con $-b-1$.
Como $b>\sqrt{b^2-2b} \Rightarrow -b<-\sqrt{b^2-2b} \Rightarrow -2b<-b-\sqrt{b^2-2b} \Rightarrow -b<-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}$
$\Rightarrow -b-1<-b<-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}$.

Ordenamos los puntos de referencia: $-b-1<-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}<-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}<\frac{b}{2}$

$$\boxed{C.S.=\left]-b-1,-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2}\right[\cup\left]-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-2b}}{2},\frac{b}{2}\right[.}$$

4. Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas:

   a) Sean a,b,c,d números reales **positivos**. Una condición suficiente para que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$ es que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$.

   Solución:
   Para a,b,c,d números reales positivos, debemos demostrar:
   $$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$
   Como todos son positivos, de $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ llegamos a $ad-bc<0$.
   $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a(b+d)-b(a+c)}{b(b+d)}=\dfrac{ad-bc}{b(b+d)}<0$ pues $b>0$, $b+d>0$ y $ad-bc<0$.
   Luego $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+d}<0$, entonces $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}$.
   $\dfrac{a+c}{b+d}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{d(a+c)-c(b+d)}{d(b+d)}=\dfrac{ad-bc}{d(b+d)}<0$ pues $b+d>0$, $d>0$ y $ad-bc<0$.
   Luego $\dfrac{a+c}{b+d}-\dfrac{c}{d}<0$, entonces $\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$.
   Se cumplen ambas desigualdades, entonces se cumple $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$.

   b) Una condición necesaria para que $8a<-1$ es que $-2x^2+x+a<0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

   Solución:
   Se pide demostrar $8a<-1 \Rightarrow -2x^2+x+a<0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

   Como $8a<-1$ entonces $\Delta=8a+1<0$, como $-2<0$, se tiene que $-2x^2+x+a<0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Puede verse de la siguiente manera: $-2x^2+x+a=-2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8a+1}{8}<0$.

   c) Una condición suficiente y necesaria para que $x\in]2,+\infty[$ es que $1<|x-1|\leq x+1$.

   Solución:
   Debemos probar $1<|x-1|\leq x+1 \iff x>2$.

   $$1<|x-1|\leq x+1 \iff 1<|x-1| \wedge |x-1|\leq x+1 \iff (x<0\vee x>2)\wedge(-x-1\leq x-1\leq x+1)$$
   $$\iff (x<0\vee x>2)\wedge(x\geq 0) \iff x>2.$$

Obs: En este proceso se ha trabajado con equivalencias, se ha hallado el C.S. de la inecuación, luego esto sirve para probar que es condición suficiente y necesaria a la vez. Pero también pudo analizarse de la siguiente manera:

i) $1 < |x-1| \le x+1 \Rightarrow x > 2$: Equivale a su contrarrecíproca: $x \le 2 \Rightarrow 1 \ge |x-1| \vee |x-1| > x+1$. Separando en casos:

- $x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 \Rightarrow |x-1| = 1-x > 1 \wedge x+1 < 1 \Rightarrow 1-x > x+1$ se cumple.
- $0 \le x \le 2 \Rightarrow -1 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 0 \le |x-1| \le 1$ se cumple.

ii) $x > 2 \Rightarrow 1 < |x-1| \le x+1$: Es fácil ver que si $x > 2$ entonces $x-1 > 1 > 0$, luego $|x-1| = x-1 > 1$, como $-1 \le 1 \Rightarrow x-1 \le x+1$, se tiene $1 < |x-1| \le x+1$.

Como se cumplen $i)$ y $ii)$ la proposición es verdadera.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Para todo $x > y$ se cumple que $x^{2021} + \frac{1}{x} > y^{2021} + \frac{1}{y}$.

Solución:
Falso. Contraejemplo: Si $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, se tiene $x > y$ pero $1^{2021} + \frac{1}{1} = 2 \not> \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} + 2$

b) Sean m, n y p constantes reales. Si $n^2 < 4mp$ entonces el conjunto solución de la inecuación $mx^3 + nx^2 + px > 0$ es $]0, +\infty[$.

Solución:
Falso. Contrajemplo: Si $m = -1$, $n = 1$, $p = -1$; en este caso $-x^3 + x^2 - x = -x(x^2 - x + 1) > 0$ tiene $C.S. =]-\infty, 0[$.
Obs: Como $mx^3 + nx^2 + px = x(mx^2 + nx + p)$ y el discriminante del factor cuadrático $\Delta < 0$, entonces si $m < 0$ tendrá que $(mx^2 + nx + p) < 0$ y el $C.S.$ será $]-\infty, 0[$.

c) Existe $x > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple que $xy(y+2) > -1$.

Solución:
Verdadero. Existe $x = \dfrac{1}{2}$ tal que $y \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{2}y(y+2)+1 = \dfrac{1}{2}((y+1)^2-1)+1 = \dfrac{1}{2}(y+1)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$, luego $\dfrac{1}{2}y(y+2) > -1$.

d) Para todo $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 2$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + 4x + a \le 0$.

Solución:
Verdadero. Tenemos los casos:

- Si $a = 0$ basta tomar $x = 0$.
- Si $a \neq 0$, como $-2 < a < 2$, entonces $16 - 4a^2 > 0$, entonces $ax^2 + 4x + a = a(x-x_1)(x-x_2)$ donde $x_1 = -\frac{2}{a} - \frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$, $x_2 = -\frac{2}{a} + \frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$. Basta tomar $x = x_1$.

e) $x^2 > y$ es condición suficiente para que $2x^2 - y \geq |y|$.

Solución:

Es equivalente a $x^2 > y \Rightarrow 2x^2 - y \geq |y|$.

Verdadera. Tenemos los siguientes casos:

- $y < 0 \leq x^2$: $|y| = -y \wedge 2x^2 \geq 0$ entonces $2x^2 - y \geq -y = |y|$.
- $0 \leq y < x^2$: como $x^2 > y \Rightarrow 2x^2 > 2y \Rightarrow 2x^2 \geq y + |y| \Rightarrow 2x^2 - y \geq |y|$.

San Miguel, 11 de setiembre de 2021.