PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Álgebra Matricial y Geometría Analítica
Examen 2
(2017-2)

Indicaciones:

* No se permite el uso de apuntes de clase ni libros ni calculadoras.
* Explique detalladamente las soluciones.
* Duración: 3 horas.
* Resuelva **cinco** de las siguientes **seis** preguntas de acuerdo a la siguiente distribución:

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Página	1 y 2	3 y 4	5 y 6	7 y 8	9 y 10	11 y 12

* En la parte posterior del cuadernillo marque con una X la pregunta que no quiere que se corrija.

---

1. *a*) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 - 2A + 3I = 0$, donde I representa la matriz identidad. Demuestre que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(2I - A)$$

(2 pts)

b) Considere los vectores $\mathbf{u} = (1, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, 1)$. Demuestre que el conjunto $\{\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ siempre forma una base de $\mathbb{R}^2$, para todo vector $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^2$, no nulo y no paralelo a $\mathbf{v}$.

(2 pts)

2. Dados el plano $\mathcal{P} : x - z = 0$ y la recta $\mathcal{L} : P = (1, 1, 0) + t(k, -1, 2)$, $t \in R$.

a) Halle el valor de k, para que la recta $\mathcal{L}$ y el plano $\mathcal{P}$ sean paralelos. (1,5 pts)

b) Para el valor de k, hallado en la parte a), obtenga una ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}_1$ que sea paralela al plano $\mathcal{P}$ y corta perpendicularmente a $\mathcal{L}$ en el punto $Q = (1, 1, 0)$ (2,5 pts)

3. Determine el valor de k para que el siguiente sistema tenga solución única y luego encuentre dicha solución

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x - 5y - z &= -1 \\ 2x + y &= 2 \\ x + y + kz &= 5 \end{aligned}$$

(4 pts)

CONTINÚA...

4. Demuestre que el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 2 & 1 & y & y \\ 4 & 2 & 1 & z \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es $(1-2x)(1-2y)(1-2z)$ (4 pts)

5. Dados los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,0,-1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,1,6)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,k-1,-3)$ y $\mathbf{v}_4 = (1,3,k,3)$. Determine los valores de k, si existen, para que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ forme una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ (4 pts)

6. Dados los números complejos

$$z = -2i, \quad w = -\sqrt{3} + i, \quad v = 2 + 2i$$

Exprese el número complejo

$$\frac{1}{|z|^3}\left(\frac{\overline{v}}{w}\right)^{12}$$

en forma binómica. (4 pts)

Examen elaborado por los profesores del curso.

San Miguel, 1 de diciembre de 2017.

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ENTREGADO 13 DIC. 2017

Segundo examen

Año: 2019 Número: 6154

Código de alumno

GRANADOS SUAREZ ALVARO ALONSO

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: MOR-H-104

Fecha: 01/12/2017

Nombre del profesor: PERCY FERNANDEZ

Nota: 20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Noviembre 2016

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

① a) A orden $m \times m$ → tal que $A^2 - 2A + 3I = 0$, I_m matriz identidad

entonces, $A^{-1} = \frac{1}{3}(2I - A)$

$A^2 - 2A + 3I = 0$ Si A es invertible, es decir, $\det(A) \neq 0$, entonces, $A \cdot A^{-1} = I$

$3I = 2A - A^2$

$3I = (2I - A)A$

$3 \cdot AA^{-1} = (2I - A)A$ ← No se dá por hipotesis q' A^{-1} existe, hay q' probarlo

$3 \cdot A \cdot A^{-1} = (2I - A)A$

$3A^{-1} \cdot AA^{-1} = (2I - A) \cdot (A)A^{-1}$

$3A^{-1} \cdot I = (2I - A) \cdot I$

$3A^{-1} = 2I - A$

$A^{-1} = \frac{1}{3}(2I - A)$ ↔ $\det(A) \neq 0$

2,0

b) $u = (1,2)$ y $v = (2,1)$ $\text{Proy}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|} \frac{v}{\|v\|} = \frac{(1,2)\cdot(2,1)}{\sqrt{5}} \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$

$\vec{a} = \text{Proy}_v u = \frac{4}{5}(2,1)$

entonces, sea $\boxed{w : (w_1, w_2)}$

$\left\{ \frac{4}{5}(2,1) ; (w_1, w_2) \right\}$ forman base de R^2 $\begin{cases} - li \\ - \text{Generar } R^3 \end{cases}$

pero para que formen una base, también se cumple lo siguiente:

$\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow w_1\left(\frac{4}{5}\right) - w_2\left(\frac{8}{5}\right)$

$w_1\left(\frac{4}{5}\right) - w_2\left(\frac{8}{5}\right) \neq 0$

$w_1 \neq 2w_2 \to \boxed{\frac{w_1}{w_2} \neq \frac{2k}{1k}}$ ↔ forman base

2,0

$(w_1, w_2) \cdot (2,1)$
$2w_1 + w_2 = 0$
$w = 2$

$w \parallel (2,1)$

$w = (\alpha$
$w = (2\alpha, \alpha)$

(✓) Analizamos,

& Si $w_2 = 0$, entonces $w_1 = 0$ y así, $w_1 = 2w_2$, $0 = 2(0)$ } y la igualdad no debe cumplirse

→ w_1, w_2 no son nulos

& Si w es paralelo a $v(2,1)$ → $\exists\, \alpha$ / $w = \alpha(v)$

$w = \alpha(2,1)$

$w = (2\alpha, \alpha)$

$w = (w_1, w_2)$

$w_1 = 2\alpha$, $w_2 = \alpha$

w_1 no es paralelo a V.

$2\alpha = 2(\alpha)$
$w_1 = 2(w_2)$ } y esto no debe cumplirse

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

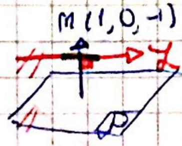
② $\rho: x - z = 0$

$x + 0y - z = 0$ $\wedge$ $\mathcal{L}: P = (1,1,0) + t(k,-1,2)$, $t \in \mathbb{R}$

$1.x + 0y - 1.z = 0$

NORMAL: $(1, 0, -1)$

a)



PARA QUE PLANO ρ y RECTA $\mathcal{L}$ SEA PARALELOS.

↳ LA NORMAL de ρ es ORTOGONAL A $\mathcal{L}$.

1,5

~~$\mathcal{L}: (1,1,0) + t(k,-1,2)$~~

~~PRODUCTO PUNTO~~

~~$(1+t(k,-1,2)) \circ (1,0,-1)$~~ $= 0 \leftrightarrow (a \circ b = 0 \leftrightarrow a \perp b)$

~~$(1+tk)(1,-1,0)+(2+t)=0$~~

es decir, el vector dirección de $\mathcal{L}$ es ortogonal a la normal

$a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$

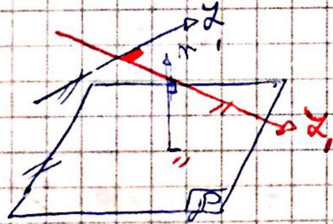
$(k,-1,2) \circ (1,0,-1) = k - 2 = 0$

$\underline{k = 2}$

b) Sea: $k=2 \rightarrow \mathcal{L} \parallel \rho$

$\mathcal{L}: P = (1,1,0) + t(2,-1,2)$, $t \in \mathbb{R}$ $\wedge$ $\rho: x - z = 0$

$n: (1,0,-1)$



⊙ entonces, si $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L} \Rightarrow$

vector dirección $\mathcal{L}_1$ $\circ$ vector dirección $\mathcal{L}$ $= 0$

⊙ $\mathcal{L}_1 \parallel \rho \Rightarrow n_\rho \circ$ vector dirección $\mathcal{L}_1$ $= 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1: (x_0, y_0, z_0) + s(a, b, c)$ / $s \in \mathbb{R}$

entonces y

$(a,b,c) \circ (2,-1,2) = 2a - b + 2c = 0$ $\qquad$ $(a,b,c) \circ (1,0,-1) = 0$

$2a + 2(a) = b$ $\qquad$ $a - c = 0$

$4a = b$ $\qquad$ $a = c$

Por ejemplo, $\boxed{a = 1, \ c = 1, \ b = 4}$

$t = 0$

$\mathcal{L}_1 = (x_0, y_0, z_0) + s(1,4,1)$, y un punto $Q(1,1,0)$ que le pertenece

$s = 0$

$x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $z_0 = 0$ $\qquad$ ATRÁS

entonces, una ecuación vectorial podría ser: $\mathcal{L}_1: P = (1,1,0) + s(1,4,1)$, $s \in \mathbb{R}$

$(1,0,-1)$ $(1+t(k,...$

$(2,-1,2) \cdot (a,b,c)$

$2a - b + 2c = 0$

$2a + 2$

$(a, b, c)(1, 0, -1)$

$a - c = 0$

$a = c$

$(1+s, 4s+1, s) = (1+2t, -t+1, 2t)$

$4s + 1 = -t + 1$

$4s = -t$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

~~L_1: P = (x0, y0, z0) + S(1,1,1) // L s~~

~~y en (...) punto (1,1,0)~~

$L_1: (1,1,0) + s(1,4,1)$ y $L: (1,1,0) + t(2,-1,2)$

y L_1 y L se intersectan en $(1,1,0)$

esto ocurre cuando $t=0$ y $s=0$, veamos

$(1+s,\ 1+4s,\ s) = (1+2t,\ 1-t,\ 2t)$

$1+s = 1+2t$ $\quad$ $1+4s = 1-t$ $\quad$ $s = 2t$

$s = 2t$ $\quad$ $4s = -t$ $\quad$ $s = 2t$

$s = t = 0$

entonces sí hay un punto de intersección el cual es $(1,1,0)$

por ende,

$L_1 = (1,1,0) + s(1,4,1),\ s \in \mathbb{R}$

2 pts

$(1,1,0)+$

③ **Presente aquí su trabajo**

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4,0

$x+2y+z=3$
$x-5y-z=-1$
$2x+y=2$
$x+y+kz=5$

MATRIZ ASOCIADA:

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & k & 5 \end{array}\right| \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & k-1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4-F_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & k-1 & 2 \end{array}\right| F_2+F_1 \rightarrow \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 2 \end{array}\right| F_3-F_2$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 2 \end{array}\right| F_1-\frac{1}{2}F_3 \rightarrow \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right| \frac{1}{4}F_3+F_4$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right| F_2+\frac{3}{4}F_3 \rightarrow \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right|$$

$x+z=3$
$2x=2 \rightarrow \underline{x=1} \Rightarrow \underline{z=2}$
$4y=0$
$(k-1)z=2 \Rightarrow (k-1)2=2$
$\boxed{k=2} \Rightarrow$ SOLUCIÓN ÚNICA

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 2 & 1 & y & y \\ 4 & 2 & 1 & z \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 2 & 1 & z \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-2z) - y(2-4z) + \cancel{y(4-4)} = (1-2z) + y(4z-2)$$

$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & y & y \\ 4 & 1 & z \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\left[2(1-2z) - y(4-8z) + \cancel{y(8-8)}\right] =$$

$$= -\left[2(1-2z) + y(8z-4)\right]$$

$$= -2(1-2z) - y(8z-4)$$

$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 1 & y \\ 4 & 2 & z \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-4z) + \cancel{y(16-16)} - 1(4-8z)$$

$$= 2(2-4z) + (8z-4)$$

$$A_{14} = (-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 1 & y \\ 4 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\left[2(4-4) - 1(8-8) + y(16-16)\right] = 0$$

entonces, reemplazando:

$$\Rightarrow 1(1-2z) + y(4z-2) + x\{-2(1-2z) - y(8z-4)\} + x\{2(2-4z) + (8z-4)\}$$

$$(1-2z) + y(4z-2) + x\left[-2(1-2z) - y(8z-4) + 4(1-2z) + 8z-4\right]$$

$$x\left[(1-2z)(-2+4) + (8z-4)(1-y)\right]$$

$$(1-2z) + y(4z-2) + x\left[2(1-2z) + 2(4z-2)(1-y)\right]$$

$$+x\left[2(1-2z) + 4(2z-1)(1-y)\right]$$

$$x\left[2(1-2z) + 4(1-2z)(y-1)\right]$$

$$x\left[(1-2z)(2+4(y-1))\right]$$

$$x\left[(1-2z)(4y-2)\right]$$

$2+4y-4$

$$(1-2z) + y(4z-2) + x(1-2z)(4y-2)$$

$$(1-2z) + 2y(2z-1) + x(1-2z)(4y-2)$$

$$(1-2z) - 2y(1-2z) + x(1-2z)(4y-2)$$

$$(1-2z)\left[1 - 2y + x(4y-2)\right]$$

$$\left[(1-2y) + 2x(2y-1)\right]$$

$$\left[(1-2y) - 2x(1-2y)\right]$$

$$(1-2z)\left[(1-2y)(1-2x)\right]$$

$$(1-2z)(1-2y)(1-2x)$$

10

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(6) $z = -2i$, $w = -\sqrt{3}+i$, $v = 2+2i$

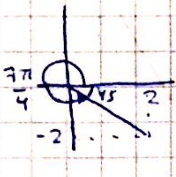
expresse $\dfrac{1}{|z|^3}\left(\dfrac{\bar{v}}{w}\right)^{12}$ en forma binómica

$z = -2i \to |z| = \sqrt{0^2+2^2} = 2 \to |z|^3 = 2^3 = 8$

$= 0 - 2i$

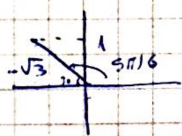
$\bar{v} \Rightarrow v = 2+2i$

$\bar{v} = 2-2i \Rightarrow v = |2-2i|\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$



$\bar{v} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

$w = \sqrt{3}+i \Rightarrow w = |-\sqrt{3}+i|\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$



$2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

entonces: $\dfrac{1}{|z|^3}\left(\dfrac{\bar{v}}{w}\right) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)}{\cancel{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)}\right)$

$\frac{1}{8}\left(\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)\right)^{12}$

$\frac{1}{8}\left[\left(2^{1/2}\right)\cdot\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]^{12}$

$\frac{1}{8}\cdot\left(2^{1/2}\right)^{12}\cdot\cos\left(\frac{11\pi}{\cancel{12}}\cdot 12\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{\cancel{12}}\, 12\right)$

$\frac{2^6}{2^3}\cdot\cos(10\pi+\pi) + i\,\text{sen}(10\pi+\pi)$

$2^3\cdot\cos(\cancel{2\pi\cdot 5}+\pi) + i\,\text{sen}(\cancel{2\pi\cdot 5}+\pi)$

$8\cdot(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\,\underbrace{\text{sen}\,\pi}_{0})$

$8(-1)+0i$

$= -8 + 0i$

40

$2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

2

$2\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2^2+2^2}$

$\frac{3}{3}\cdot\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\cdot\frac{2}{2}$

$21-10$