ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII **PUCP**

Año: 2 0 2 3 Número: 3 4 4 3

Código de alumno

Práctica

Tipso Rios Hantor Leandro

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Práctica Nº: PC03

Horario de práctica: J-101

Fecha: 06 / 11 / 23

Nombre del profesor: O. Cárdenas

Nota

20

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: J. P
(iniciales)

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Tercera Práctica Calificada

Semestre Académico 2023 -2

Horario: Todos

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores

Advertencias:

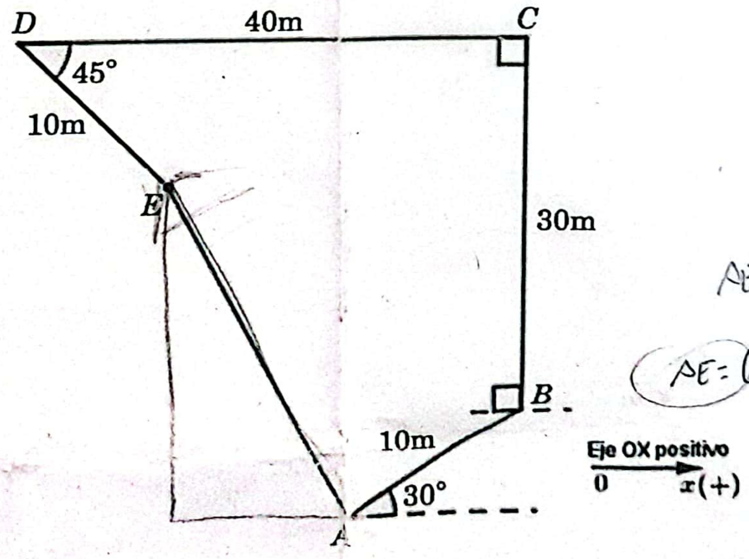
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación sólo podrán hacerlo después de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas ni computadora personal.
- Puede usar cualquier calculadora que no realice gráficas ni sea programable (Calculadora sugerida $fx-991SPX$).
- Resuelva en forma detallada las siguientes preguntas.

1. a) Considere que la Figura 1 se encuentra en $\mathbb{R}^2$ y con la información mostrada, halle las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{AE}$.

(2 pt)



AE = (5√3-40+5√2; 3

AE = (5√3-40+5√2; 35

Figura 1

K = { -4/3

b) Dados los vectores $\vec{u} = (1;-2;3)$, $\vec{v} = (1;-2k;$ [illegible]$)$ y $\vec{w} = (k;-2;1)$, halle el valor (o valores) que debe tomar k para que el volumen del paralelepípedo generado por tales vectores sea $14\ u^3$.

K = √20/3

(3 pt)

| | = 43,64

√7+1

-√7+1

2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que,

- $\|\vec{a}\| = 2$; $\|\vec{b}\| = 5$,
- $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 45°.

$\|a\,b\|$

Calcule

a) el área del paralelogramo generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $5\sqrt{2}\ u^2$ (2 pt)

b) el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{a}$, $(\vec{a}+\vec{b})$ y $(2\vec{a}-\vec{b})\times(4\vec{a}+3\vec{b})$. $500\ u^3$ (3 pt)

3. Considere las rectas

$$\mathscr{L}_1 \ : \ P = (5;1;3) + r(2;1;3), \qquad r \in \mathbb{R}$$
$$\mathscr{L}_2 \ : \ Q = (1;0;2) + t(-1;0;1), \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$\mathscr{L}_3 \ : \ x - 1 = \frac{1-y}{5} = z - 1$$

alabeadas

a) Determine la posición relativa entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$, es decir, analice si tales rectas son paralelas, secantes o alabeadas. (2 pt)

b) Halle la ecuación cartesiana del plano que es paralelo a las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y pasa por el punto (2;2;2).

$x - 5y + z = -6$ (3 pt)

4. a) Sean $A(6;8;0)$, $B(-5;7;-10)$ y $C(7;-5;14)$ los vértices del triángulo ABC. Halle las coordenadas del punto H si se sabe que el segmento $\overline{AH}$ es la altura de dicho triángulo trazada desde el vértice A.

$H_0(0;2;0)$

(2.5 pt)

b) Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y cumplen que $\|\vec{v}-\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$, halle el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}-\vec{u}$. (2.5 pt)

$\frac{2\pi}{3}$ o 120°

$u \cdot v - u \cdot u$

$\frac{u \cdot (v-u)}{\|u\|\,\|v-u\|}$ $\quad \frac{-\|u\|^2}{2\|u\|\,\|u\|}$ $\quad -\frac{1}{2}$

Coordinador de prácticas: Elton Barrantes

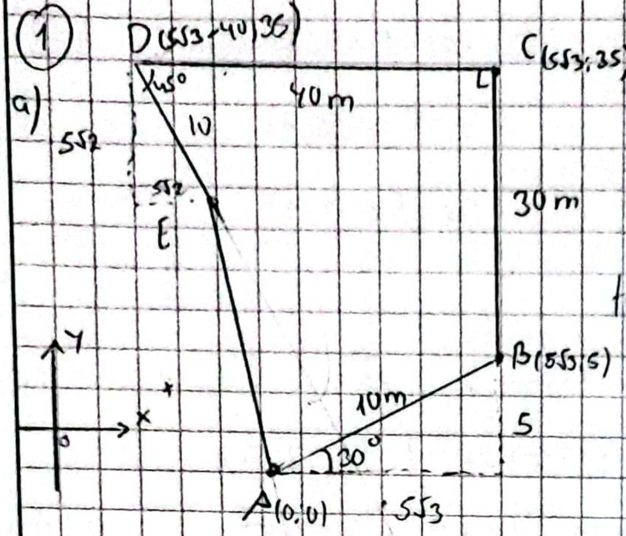
San Miguel, 06 de noviembre de 2023.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

1

a)



Tomando a A como el origen y completando las componentes descomponiendo los vectores usando su distancia

tenemos que:

$B = (5\sqrt{3};\ 5)$

$C = (5\sqrt{3};\ 35)$

$D = (5\sqrt{3}-40;\ 35)$

$E = (5\sqrt{3}-40+5\sqrt{2};\ 35-5\sqrt{2})$

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{AB} &= \vec{B}-\vec{A} = (5\sqrt{3};5)\\
\vec{BC} &= \vec{C}-\vec{B} = (0;30)\\
\vec{CD} &= \vec{D}-\vec{C} = (-40;0)\\
\vec{DE} &= \vec{E}-\vec{D} = (5\sqrt{2};-5\sqrt{2})\\
\vec{AE} &= \vec{E}-\vec{A} = (5\sqrt{3}-40+5\sqrt{2};\ 35-5\sqrt{2})
\end{aligned}}$$

Rpta

también:

$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE}=\vec{AE}$

2

b)

$V_{paralelepipedo} \to |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = |\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})| = 14$

$\vec{u}\times\vec{v} \to (1;-2;3)\times(1;-2k;1) \qquad \vec{w} = (k;-2;1)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2k & 1 \end{vmatrix} = (-2+6k;\ 2;\ -2k+2)$$

$|w\cdot(u\times v)| = |(-2+6k;2;-2k+2)\cdot(k;-2;1)| = 14$

$-2k+6k^2-4-2k+2$

$|6k^2+2k-4+\dots$

atrás →

$(1;-2;3)(-5{,}29;\sqrt{7};24{,}58)$

$-5{,}29$

$-2-(-2k\cdot k)$

$-2+2k^2$

$3k^2+2k-18$

3

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) $V_{\square} = |[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]| = 14$

$\vec{u} = (1; -2; 3)$

$\vec{v} = (1; -2k; 1)$

$\vec{w} = (k; -2; 1)$

$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = \pm 14 = u \cdot (v \times w)$

$v \times w =$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ 1 & -2k & 1 \\ k & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2k+2; k-1; -2+2k^2)$$

$V_{\square} = (v \times w) \cdot \vec{u}$

$= (-2k+2; k-1; -2+2k^2) \cdot (1; -2; 3)$

$= 2k+2 - 2k+2 - 6 + 6k^2$

$|6k^2 - 4k - 2| = 14$

$6k^2 - 4k - 2 = 14 \quad \wedge \quad 6k^2 - 4k - 2 = -14$

$6k^2 - 4k - 16 = 0 \quad \wedge \quad 6k^2 - 4k + 12 = 0$

$3k^2 - 2k - 8 = 0 \quad \wedge \quad 3k^2 - 2k + 6 = 0$

$3k \quad 4$

$k \quad -2$

$\dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(6)(3)}}{6}$ ← No existe

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$(3k+4)(k-2) = 0$

$k = \{-\frac{4}{3}; 2\} \quad \wedge \quad \varnothing$

$\boxed{\therefore k \text{ puede tomar los valores de } -\frac{4}{3} \text{ o } 2}$ Rpta

3

u

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

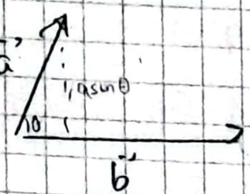
$\cos\theta =$

$\frac{x}{a} = \sin\theta$

$\vec{a} \cdot \vec{a}$

(2) $\|a\| = 2 \wedge \|b\| = 5 \qquad \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

a)



$A_{\square} = \|a \times b\|$

$A_{\square} \quad \|a\| \cdot \|b\| \sin\theta$ ← propiedad

$A_{\square} = 2 \cdot 5 \cdot \sin 45^\circ$

$\boxed{A_{\square} = 5\sqrt{2}\ u^2}$ Área del paralelogramo

Rpta

2

b)

$V = |[u; v; w]|$

Sean: $\vec{u} = \vec{a}$, $\vec{v} = (\vec{a} + \vec{b})$; $\vec{w} = (2\vec{a} - \vec{b}) \times (4\vec{a} + 3\vec{b})$

$\vec{w} = (2\vec{a} - \vec{b}) \times (4\vec{a} + 3\vec{b})$

$\underbrace{\cancel{8\vec{a} \times \vec{a}}}_{0} + 6a \times b \underbrace{- 4 b \times a}_{+4a \times b} \underbrace{- \cancel{3 b \times b}}_{0} \Rightarrow \vec{w} = 10(\vec{a} \times \vec{b})$

$V = |[u; v; w]| = |[w; u; v]|$

$V = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$

$10(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}))$

$\cancel{\vec{a} \times \vec{a}} + \vec{a} \times \vec{b}$

$10(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ← $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

$10 \|a \times b\|^2$

$10 (\|a\| \cdot \|b\| \sin\theta)^2$ ← del ejercicio (a)

$V = |10 (5\sqrt{2})^2|$

$\boxed{V = 500\ u^3}$ Volumen del paralelepípedo

Rpta

3

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

3) Usando las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ tenemos:

a)

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} x = 5+2r \\ y = 1+r \ ; r\in\mathbb{R} \\ z = 3+3r \end{cases} \wedge \ \mathcal{L}_2: \begin{cases} x = q+1 \\ y = 1-5q \ , q\in\mathbb{R} \\ z = q+1 \end{cases}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{L}_1} = (2;1;3) \quad \wedge \quad \vec{v}_{\mathcal{L}_2} = (1;-5;1)$$

Caso I: ¿$v_{\mathcal{L}_1} \parallel v_{\mathcal{L}_2}$? $\Rightarrow (2;1;3) = k(1;-5;1)$

$k = \emptyset$

∴ No son paralelos (i) (ni iguales)

Caso II: ¿$v_{\mathcal{L}_1}$ es secante a $v_{\mathcal{L}_2}$?

$$\left.\begin{array}{l} x = 5+2r = q+1 \\ y = 1+r = 1-5q \\ z = 3+3r = q+1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} 5+2r = 3+3r \\ 2 = r \\ \downarrow \\ q = 9 \end{array}$$

en $y \rightarrow$ $1+r = 1-5q$

$1+2 = 1-5(9)$

$3 = -44$ ¿? Absurdo FALSO

∴ No son secantes (ii)

$\Rightarrow$ Al no ser paralelas ni secantes:

$\boxed{\mathcal{L}_1 \text{ y } \mathcal{L}_3 \text{ son alabeadas}}$ Rpta

b) Para el plano P: $\quad \vec{PP_0} \cdot \vec{n} = 0$

$P_0 = (2;2;2)$

$\vec{n} \parallel (\vec{v}_{\mathcal{L}_1} \times v_{\mathcal{L}_2}) \rightarrow \vec{n} = v_{\mathcal{L}_1} \times v_{\mathcal{L}_2}$

Donde:

$\vec{v}_{\mathcal{L}_1} = (2;1;3)$

$v_{\mathcal{L}_2} = (-1;0;1)$

no son paralelos por lo cual el producto vectorial es válido.

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1;-5;1) = \vec{n}$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

Entonces

$\vec{P \cdot P_0} \cdot n = 0$

$(x-2, y-2, z-2) \cdot (1, -5, 1) = 0$

$x - 2 - 5y + 10 + z - 2 = 0$

$\boxed{P: x - 5y + z = -6}$ Ecuación cartesiana

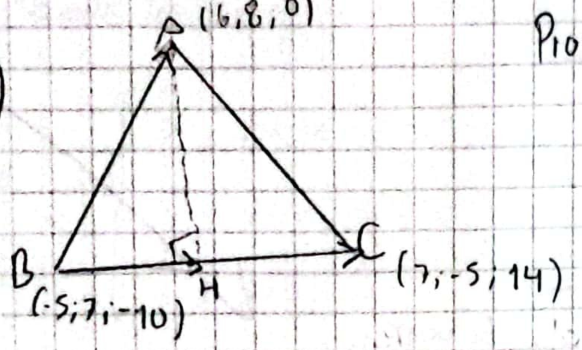
3

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(4)

a)



Por proyecciones ortogonales:

$$Proy_{\vec{BC}} \vec{BA} = \vec{BH} = \vec{H} - \vec{B}$$

Donde:

$\vec{BA} = (-11; 1; 10)$

$\vec{BC} = (12; -12; 24)$

$$Proy_{\vec{BC}} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2} \cdot \vec{BC}$$

$$\vec{BH} = \frac{\cancel{360}}{\cancel{864}} \cdot (12;-12;24)$$

$$\vec{BH} = \frac{5}{12}(12;-12;24)$$

$$\vec{BH} = (5;-5;10) = H - B$$

$$(5;-5;10) + (-5;7;-10) = H$$

$$\boxed{H = (0;2;0)}$$

2,5

$BC \cdot AH = 0$

$(12;-12;24) \cdot (6;6;0) = 0$

$+72 - 72 + 0$

Presente aquí su trabajo

ona exclusiva para
álculos y desarrollos
(borrador)

b) $\|\overset{\vec a}{\vec v - \vec u}\| = 2\|\overset{\vec b}{\vec u}\|$ $\rightarrow$ Sean $\vec a = \vec v - \vec u$

$\vec b = \vec u$

Además:

θ de $\vec u$ y $\vec v$ es $\frac{\pi}{2}$

Para

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}$$

$$\cos\theta = \frac{(\vec v - \vec u)\cdot \vec u}{\|\vec u\|\|\vec v - \vec u\|} = \frac{\overset{\text{ortogonales}}{\overset{0}{\vec v \cdot \vec u}} - \overset{\text{propiedad}}{\vec u \cdot \vec u}}{2\|\vec u\|\|\vec u\|} = \frac{-\|\vec u\|^2}{2\|\vec u\|^2}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120° \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$\boxed{\therefore \text{ El ángulo que forman es } \frac{2\pi}{3}}$

2,5