Fundamentos de Cálculo

Examen Especial

Semestre Académico 2020 -2

Horario: Todos. Elaborado por todos los profesores.

Indicaciones:

- El desarrollo de **todos** los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando todos sus procedimientos**. En particular, si hace uso de la forma de la gráfica de una función, debe justificar con los contenidos vistos en clase cómo obtuvo dicha forma.
- Debe escribir su desarrollo a mano, en hojas físicas y colocando su nombre completo y código en cada hoja utilizada. Luego debe presentar las imágenes de sus soluciones en un solo archivo Word o PDF en la tarea correspondiente al Examen especial.
- El puntaje máximo obtenible es 20 puntos.
- El plazo de entrega es hasta las 7:00 pm.

---

1. Encuentre el dominio implícito de la función (2.5 pt)

$$f(x) = \frac{\ln\left(\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)\ln\left(x^2 - 3x - 53\right)\right)}{\sqrt{1+\cos(3x)}}.$$

2. La función f es definida como

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{k}{x}\right), & x > 0\,, \\ \\ k\pi + k\operatorname{arc\,sen}(x), & x < 0\,. \end{cases}$$

Donde k es una constante no nula.

a) Para $k = -2$, encuentre el rango de f. (1.5 pt)

b) Determine para que valores de k la función es inyectiva. (2 pt)

3. Sea f una función que satisface las siguientes condiciones:

- El dominio de f es $[-12, 12]$ y su rango es un intervalo.
- f es impar.
- f es inyectiva.
- Para $x \in \,]0,4[\,$, $f(x)$ es de la forma $f(x) = 10\operatorname{sen}(ax)$, donde $a > 0$ es una constante.
- Para $x \in [4,12]$, la gráfica de f está contenida en la parábola de ecuación $4x = y^2 + 6y + 21$.

a) Halle una regla de correspondencia de f (indicando el valor de a). (3 pt)

b) Esboce la gráfica de f. (2 pt)

---

4. a) Calcule el valor del siguiente límite o explique por qué no está definido: (2 pt)

$$\lim_{x\to 1}\left[e^{\frac{1}{\ln(x)}}+2^{\frac{x}{1-x}}\right]$$

b) Calcule en términos de n el valor de la siguiente suma: (2 pt)

$$\sum_{k=2}^{n+1} 2^n(-1)^k\left[\binom{n+1}{k-1}+7^{2n-4k}\right].$$

c) Sean $a_0=1$, $a_1=7$, y (2 pt)

$$a_{n+1}=a_n a_{n-1}-2^n, \quad \text{para todo entero } n\geq 1.$$

Demuestre que $a_n>2^n$ para todo entero $n\geq 1$.
Sugerencia. Use Inducción matemática.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Si $xy\geq 1$ entonces $y\geq \dfrac{1}{x}$ o $x\leq \dfrac{1}{2y}$. (1 pt)

b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Si $g(x)=(x^3-x)f(x)$ es una función par entonces f es una función impar. (1 pt)

c) Si la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ posee valor máximo y valor mínimo entonces la función $h(x)=(f(x))^2$ posee valor mínimo. (1 pt)

San Miguel, 28 de diciembre de 2020.