ENTREGADO

09 JUL 2018

Año | Número

2	0	1	8		1	8	3	9

Código de alumno

Segundo examen

ESPIRITU ASTUDILLO, MIRIAM LORENA

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Lorena E.

Firma del alumno

Curso: FCAL

Horario: H-125.1

Fecha: 25/06/2018

Nombre del profesor: J.MENDOZA

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Junio 2015

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO
SEGUNDO EXAMEN
SEMESTRE ACADÉMICO 2018-1

Horario: Todos

Duración: 3 horas

Elaborado por todos los profesores del curso

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- Se prohíbe el uso de apuntes de clase, libros, tablas, calculadora y de computadora personal.
- Debe explicar detalladamente sus soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.
- Enumere las páginas del cuadernillo en la parte superior del 1 al 12 y reserve dos páginas para resolver cada una de las preguntas, según la distribución siguiente:

Pregunta	1	2	3	4	5
Páginas	1 y 2	3 y 4	5 y 6	7 y 8	9 y 10

---

1. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta adecuadamente.

   a) La funciones f y g definidas por

   $$f(x) = x^2 + 2x,$$
   $$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x - 1}, x \neq 1,$$

   tienen el mismo rango. 1 punto

   b) La función f, definida por $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 1)$ para $x > 1$, es inyectiva. 1 punto

   c) $arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$. 1 punto

2. a) Sea f una función impar y polinómica de grado 5, con -1 y -2 dos de sus raíces y cuya gráfica pasa por el punto $(3, 20)$. Halle los intervalos donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$. 2 puntos

   3 puntos

   b) Considere la función g, definida por

   $$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x^2 - x - 1}, \quad x \leq 2.$$

   Esboce la gráfica de g, hallando

   (i) las coordenadas de los puntos de intersección de g con los ejes coordenados;
   (ii) el dominio y el rango de la función g y
   (iii) las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de g, si las tiene.

3. Dada la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & 0 < x < \pi \\ e^{x-4} + 1, & 4 \leq x < 6 \end{cases}.$$

a) Esboce la gráfica de f. 1 punto

b) Justifique que f es una función inyectiva y halle la regla de correspondencia de la función inversa, f^{-1}. 2 puntos

c) Esboce las gráficas de f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano. 1 punto

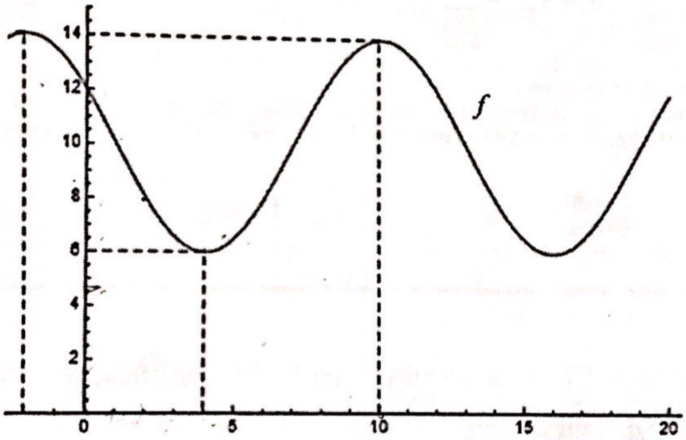
4. Considere $T(t) = Ae^{kt} + 15$ la función que representa la temperatura del café t minutos después de haber salido de una máquina. Se sabe que a los 10 minutos de haber salido de esta máquina la temperatura del café es de 45° y luego, 10 minutos más tarde, es de 30°.

a) Calcule los valores de las constantes k y A. 1.5 puntos

b) ¿Qué temperatura tiene el café después de media hora de haber salido de la máquina? 1 punto

c) ¿Alcanzará el café una temperatura de 14°? Justifique su respuesta. 0.5 puntos

5. a) La siguiente figura muestra la gráfica de una función f, definida por $f(x) = Acos(Bx + C) + D$.



a₁) Calcule el periodo de la función f. 0.5 puntos

a₂) Encuentre los valores de las constantes A, B, C y D. 2.5 puntos

b) Muestre que la función f, definida por 2 puntos

$$f(x) = \tan(2arcsen(x)), x \in [-1,1] - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

se puede expresar de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}, x \in [-1,1] - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Coordinadora de teoría: Norma Rubio

San Miguel, 25 de junio de 2018

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$a(x-h)^2+k$

	1	1	-2	0
1		1	2	0
	1	2	0	0

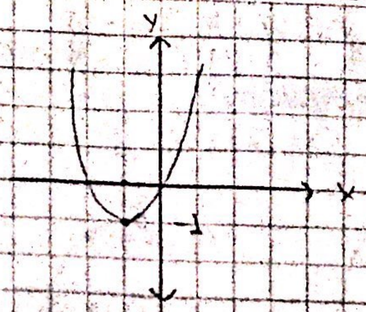
$\log_{\frac{1}{2}}$

1

a) $f(x) = x^2 + 2x$

$= (x+1)^2 - 1$

$V = (-1, -1)$



$R_f = [-1, +\infty[$

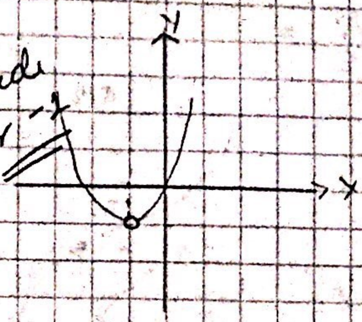
$g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x - 1}, \; x \neq 1$

$= \dfrac{(x-1)(x^2+2x)}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+2)(x)}{(x-1)} \quad x \neq 1$

$= x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

$V = (-1, -1)$

$x \neq -1$ X → X Si puede tomar -1



$R_g =]-1, +\infty[$

$\therefore R_f \neq R_g$

(F)

V

~~(F)~~

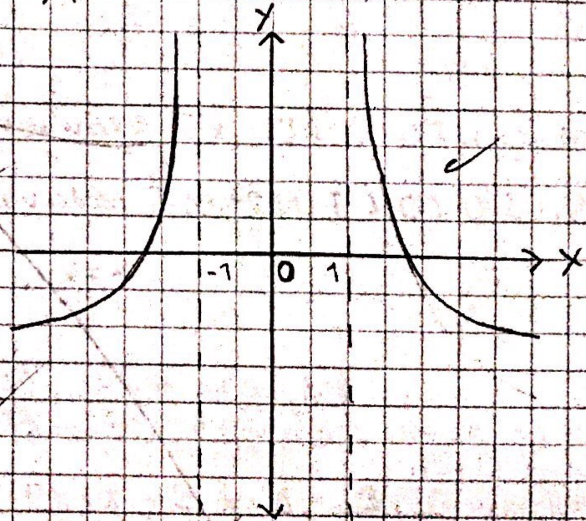
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 1)$, para $x > 1$ es inyectiva

* $x^2 - 2x + 1 > 0$

$(x-1)^2 > 0$

$x < -1 \wedge 1 < x$

* $0 <$ base < 1



Según la gráfica:

Si es inyectiva para $x > 1$ $\therefore$ (V)

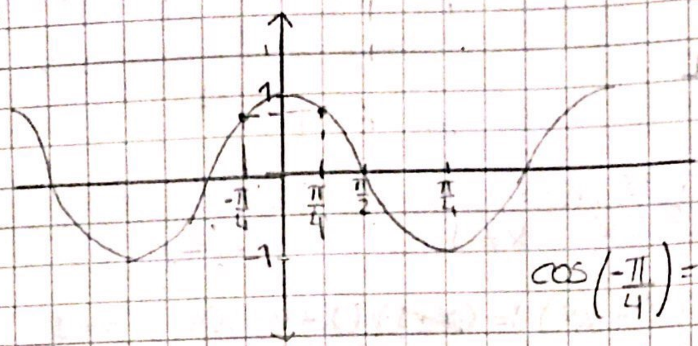
2.

Presente aquí su trabajo

c) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$

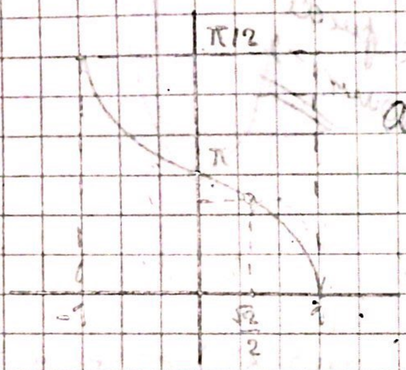
Contraejemplo:

$\cos(x)$:



$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

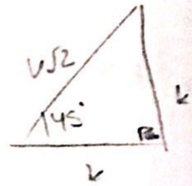


$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

(F)

1

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)



$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$2x^2 - x - 1 = 0$

$2x \quad +1$

$x \quad -1$

$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$2x \quad -2$

$x \quad -1$

$\frac{1}{x-h} + K$

(2)

a) f IMPAR, grado 5 POLINÓMICA

- raíces: $f(-1) = 0 \therefore f(1) = 0$
$f(-2) = 0 \therefore f(2) = 0$
$f(0) = 0$

Luego:

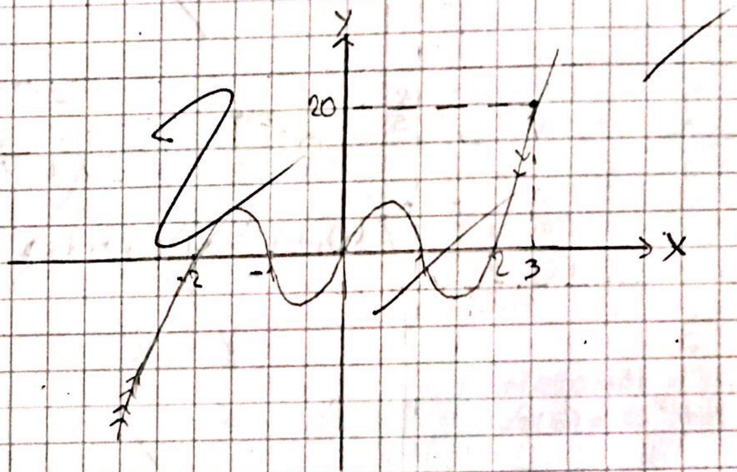
$$f(x) = a(x-2)(x-1)(x)(x+2)(x+1)$$

Dato: $(3,20) \Rightarrow f(3) = a(1)(2)(3)(5)(4) = 20$

$$a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x-1)(x)(x+2)(x+1) \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Gráfica:



$f(x) > 0$ en los intervalos: $[-2,-1] \cup [0,1] \cup [2,+\infty[$

$f(x) < 0$ en los intervalos: $]-\infty,-2] \cup [-1,0] \cup [1,2]$

b) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{2x^2 - x - 1} \; ; \; x \leq 2$

$$g(x) = \frac{(2x-2)\cancel{(x-1)}}{(2x+1)\cancel{(x-1)}} \; , \; x \leq 2 \wedge \boxed{x \neq 1}$$

$$g(x) = \frac{2x-2}{2x+1} = \frac{(2x+1)-3}{2x+1} = 1 - \frac{3}{2x+1}$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntota vertical: $x = -\frac{1}{2}$

Intersectos:

$\underline{x=0} \Rightarrow 1 - \frac{3}{1} = -2 \therefore (0,-2)$

$\underline{y=0} \Rightarrow 0 = 1 - \frac{3}{2x+1} \quad \therefore (1,0)$

$$\frac{3}{2x+1} = 1$$

$$3 = 2x + 1$$

$$1 = x$$

$x \neq 1$

Abierto

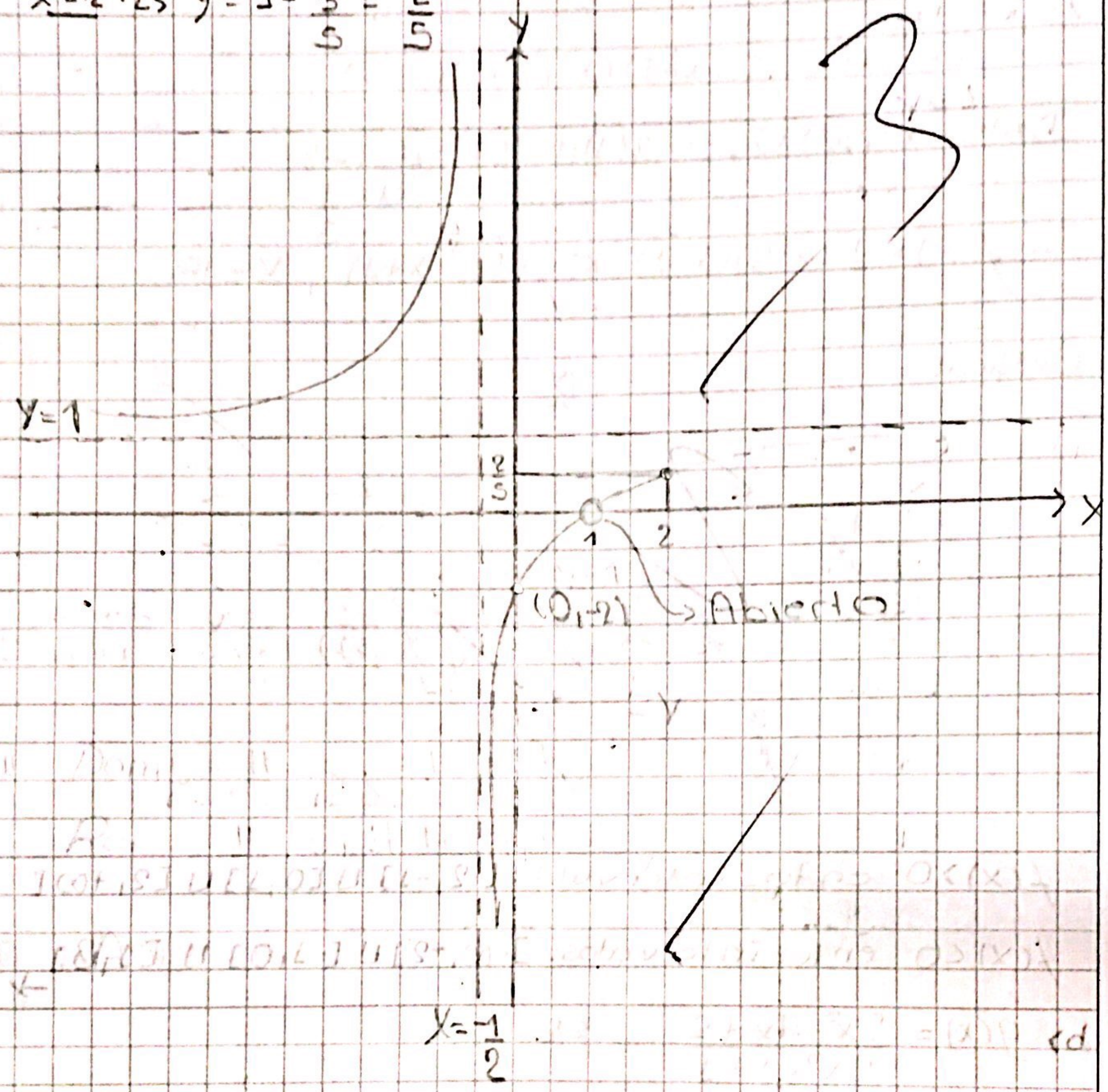
4

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$g(x) = 1 - \frac{3}{2x+1} \; ; \; x \leq 2 \wedge x \neq 1$

$\underline{x=2} \Rightarrow y = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$



(I) Intersección: $(0,-2)$

↳ No toma el punto $(1,0)$ pues $x \neq 1$

(II) Domg: $]-\infty ; 2] - \left\{ -\frac{1}{2} ; 1 \right\}$

Rang: $]-\infty ; \frac{2}{5}] \cup]1 ; +\infty[$

(III) Asíntotas: $y = 1$

$x = -\frac{1}{2}$

③

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & 0 < x < \pi \\ e^{x-4} + 1, & 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

24

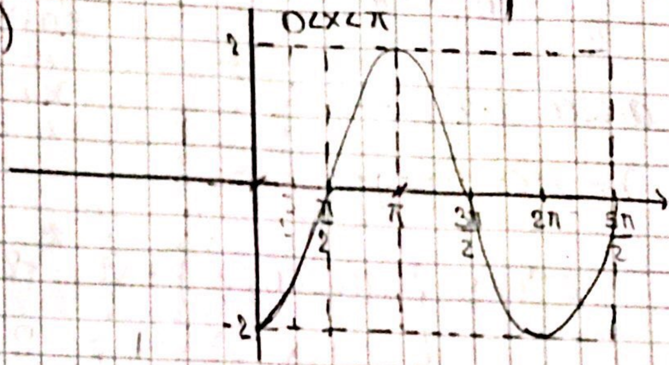
$f_1(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$|A| = 2$

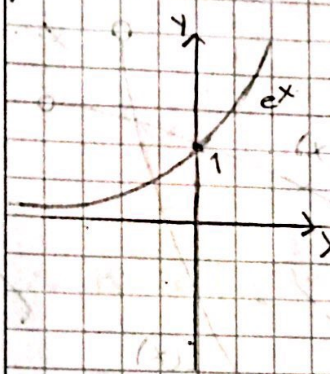
$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

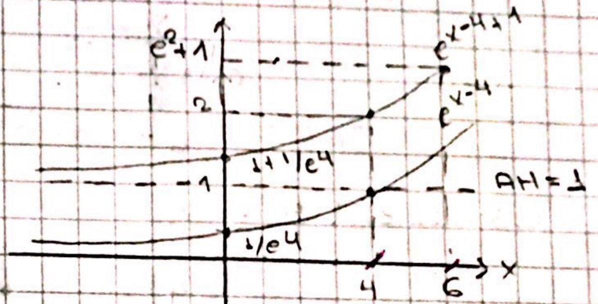
$d = \frac{\pi}{2}$

$2\pi + \frac{\pi}{2} = 5\ldots$



$f_2(x) = e^{x-4} + 1$

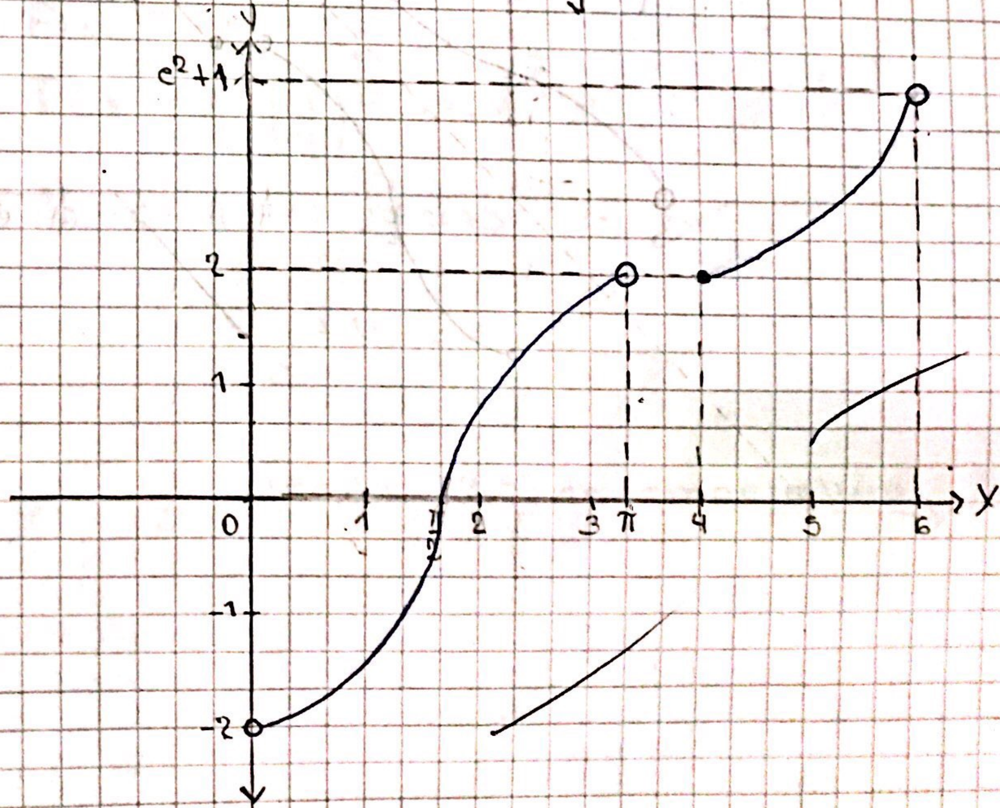




Hallamos:

$f_2(6) = e^2 + 1$

a)



b) Por la gráfica: $f(x)$ es inyectiva

$\text{Ran} f_1(x) =]-2, 2[$ $\quad$ $\text{Ran} f_2(x) = [2; e^2+1[$

No hay intersección de rangos

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pide: $f^{-1}(x)$

1° $y = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{y}{2} = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\text{arcsen}(y/2) = x - \frac{\pi}{2}$

$x = \text{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$

2° $y = e^{x-4} + 1$

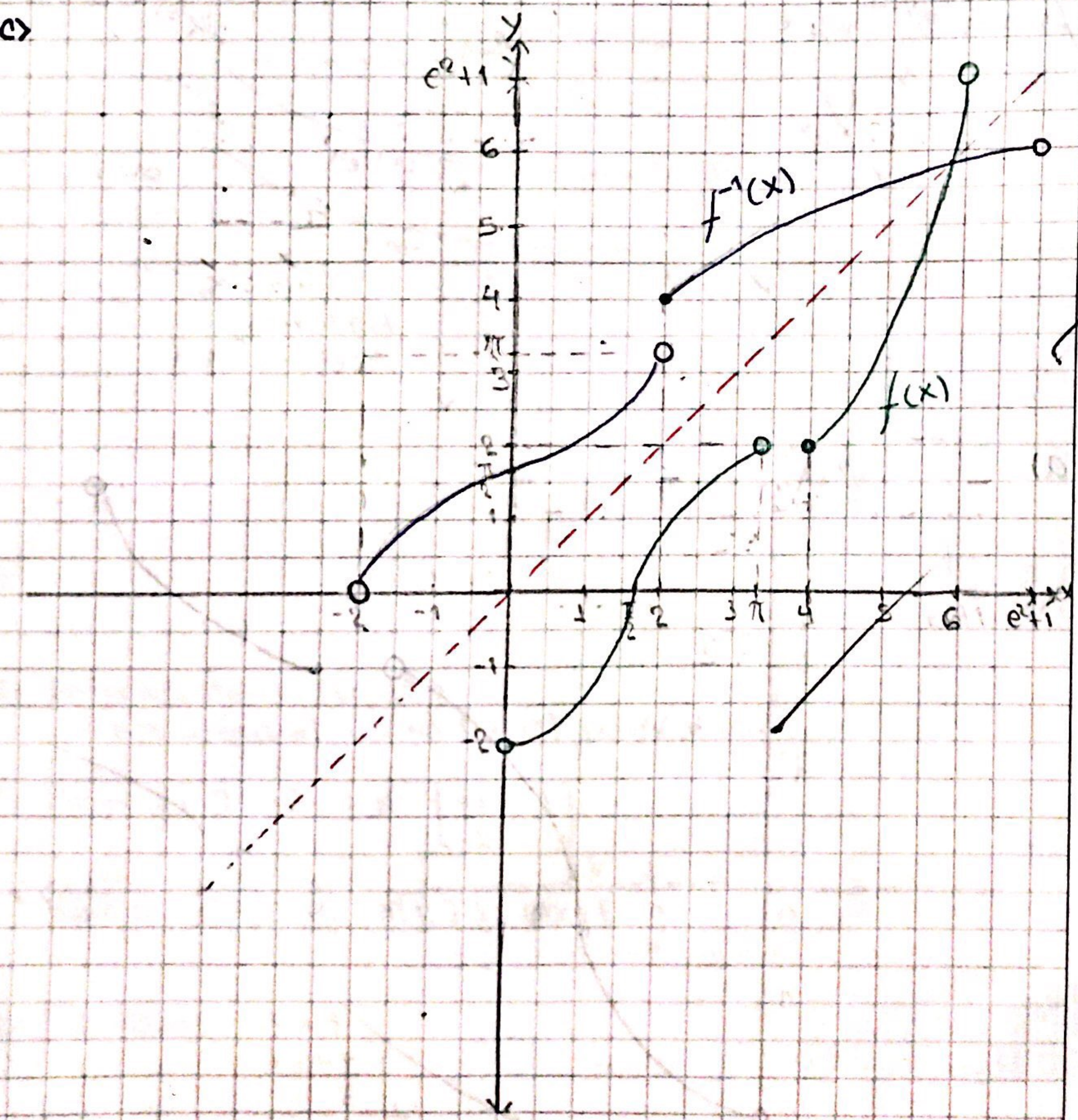
$y - 1 = e^{x-4}$

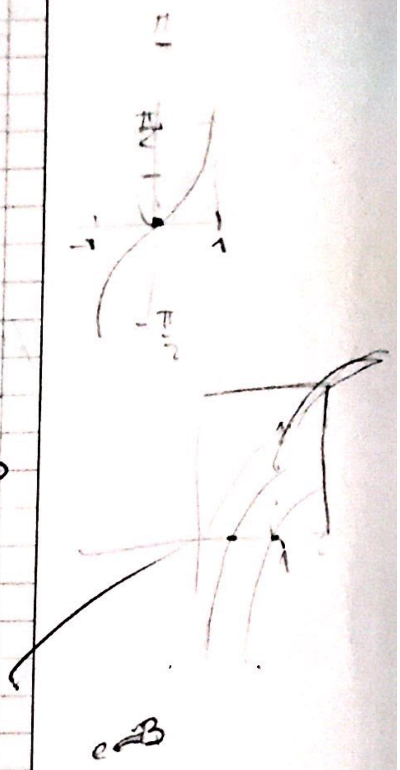
$\ln(y-1) = x - 4$

$x = \ln(y-1) + 4$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2} & ; -2 < x < 2 \\ \ln(x-1) + 4 & ; \; 2 \leq x < e^2 + 1 \end{cases}$$

c)





Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

(4)

a) $T(t) = Ae^{Kt} + 15 \; ; \; t \geq 0$

Dato: $(10, 45) \; ; \; (20, 30)$

$T(10) = Ae^{10K} + 15 = 45$

$Ae^{10K} = 30$

$T(20) = Ae^{20K} + 15 = 30$

$Ae^{20K} = 15$

$\div$

$e^{10K} = \frac{1}{2}$

$(e^{K})^{10} = \frac{1}{2}$

$e^{K} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} \rightsquigarrow K = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}\right)$

$T(t) = A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} + 15$

Reemp: $(20;30) \Rightarrow T(20) = A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{10}} + 15 = 30$

$\frac{A}{4} = 15$

$A = 60$

$\therefore K = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}\right) \wedge A = 60$

b) Pide $T(30)$

$T(t) = 60\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} + 15$

$T(30) = 60\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{10}} + 15$

$\frac{60}{8} + 15 = 22,5°$

Tendrá 22,5° de temperatura

15
8
120

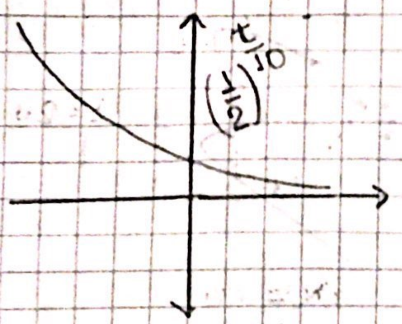
180
22,5
16
20
16
4

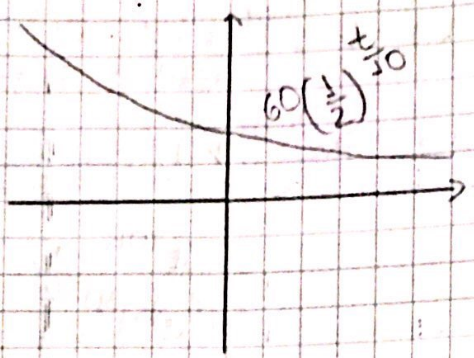
8

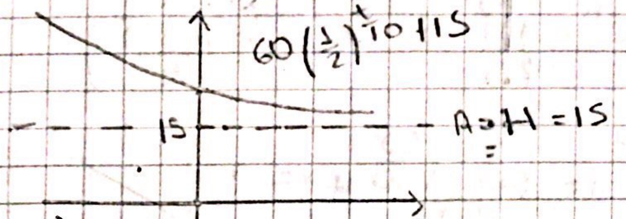
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

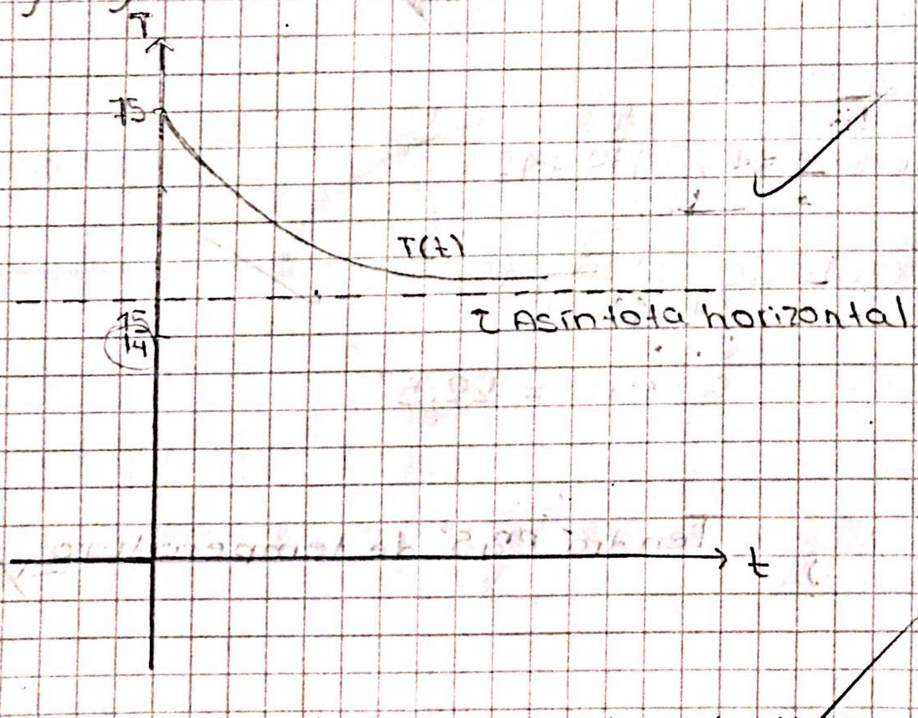
c) $T(t) = 60\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} + 15$







Gráfica final:

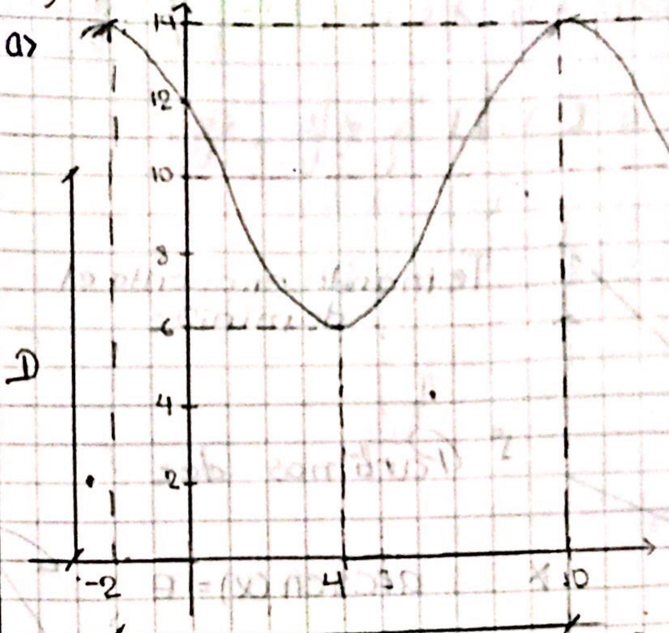


Nunca alcanzará una temperatura de 14°C pues según la gráfica hay una asíntota horizontal en 15°C por lo que jamás llegará a tomar 15°C ni valores menores a este.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

⑤ $f(x) = A\cos(Bx + C) + D$

a)



$2|A|$

$\hookrightarrow 14 - 6 = 2A$

$8 = 2A$

$4 = A$

desplazamiento vertical (D):

$D = 10$

Periodo: $10 - (-2) = 12$

desfase $= -2 = \frac{-C}{B}$

a₁) Periodo $= 12$ ✓

a₂) $A = 4$ ✓

$T = \frac{2\pi}{|B|} = 12$

$\frac{\pi}{6} = B$ ✓

desfase $= -2 = \frac{-C}{B}$

$2B = C$

$2\left(\frac{\pi}{6}\right) = C$

$\frac{\pi}{3} = C$ ✓

$D = 10$ ✓

3

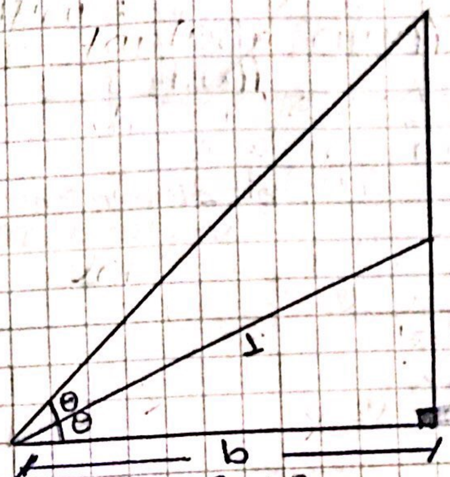
10

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) $f(x) = \tan(2\arcsin(x)),\ x \in [-1, 1] - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$f(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2},\ x \in [-1, 1] - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$



Tomando encuenta el dominio:

1° Partimos de:

$\arcsin(x) = \theta$

$\tan(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Pitágoras: $1 = x^2 + b^2$

$b = \sqrt{1-x^2}$

2° Pide: $\tan(2\arcsin(x)) = \tan(2\theta)$

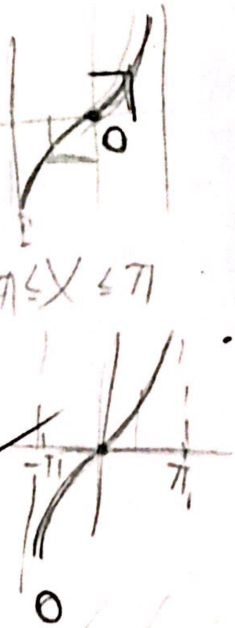
$= \dfrac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$= \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \dfrac{x^2}{1-x^2}} = \dfrac{\dfrac{x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}}{\cancel{1-x^2}}}{\dfrac{1-x^2-x^2}{\cancel{1-x^2}}}$

$= \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$

∴ Se demuestra que:

$\tan(2\arcsin(x)) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2};\ x \in [-1, 1] - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$



$-\pi \le x \le \pi$

arccos(x) ...

$\frac{co}{4}$