ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Fundamentos de Cálculo

Examen Final

Semestre Académico 2019-1

Horario: Todos. Duración: 180 minutos.

Elaborado por todos los profesores.

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

1. Considere la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} a-\arctan\left(x-\frac{\pi}{2}\right), & \text{si } x\geq \frac{\pi}{2}\,; \\ \pi-\dfrac{1}{x-\dfrac{\pi}{2}}, & \text{si } x<\frac{\pi}{2}\,; \end{cases}$$

Donde a es una constante real.

a) Haga un esbozo de f cuando $a=\dfrac{\pi}{2}$. (2 pt)

b) Halle todos los valores de a para los cuales la función f es inyectiva. (1 pt)

c) Calcule los siguientes límites: (1 pt)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

2. Sea

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^x+1}{2^x}, & \text{si } x\leq 0\,; \\ -\dfrac{4\arcsin(1-x)}{\pi}, & \text{si } 0<x\leq 2\,. \end{cases}$$

a) Haga un esbozo de la gráfica de f. (2 pt)

b) Encuentre el dominio y la regla de correspondencia de la función inversa de f. (2 pt)

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

   - f es una función par.
   - Para $x\in\,]2,+\infty[$, $f(x)$ es de la forma $f(x)=\log_a(x-2)+5a$, donde $a>0$ es una constante.
   - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.
   - La gráfica de f pasa por el punto $\left(a+2,2a^2+3\right)$.
   - Para $x\in[-2,0]$, $f(x)=2\cos(\pi x)+2$.

   a) Encuentre el valor de a. (1 pt)

   b) Determine las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados. (1.5 pt)

   c) Haga un esbozo de la gráfica de f indicando lo encontrado en la parte b). (2.5 pt)

4. a) Calcule la siguiente suma en términos de n. (2 pt)

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\left[k2^k-(-1)^k\right].$$

   b) Demuestre que $(3n)!>2^{6n-3}$ para todo entero $n\geq 2$. (2 pt)
   Sugerencia. Use inducción matemática.

5. Los números $a_0,a_1,a_2,\ldots,$ se definen recursivamente por: (3 pt)

$$\begin{cases} a_0=0,\\ a_1=1,\\ a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}-\dfrac{1}{n(n+1)}, \text{ para todo } n\geq 1.\end{cases}$$

   Demuestre que $a_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j}$ para todo entero positivo n.

   Sugerencia. Use inducción matemática.

San Miguel, 01 de julio de 2019.

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

Año: 2019   Número: 1043
Código de alumno

Segundo examen

ENTREGADO
15 JUL. 2019

Gonzales Huisa Omar Andrés
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Horario: H-110

Fecha: 01 / 07 / 2019

Nombre del profesor: J. Flores

Nota
20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 1 :

a) $a = \frac{\pi}{2}$

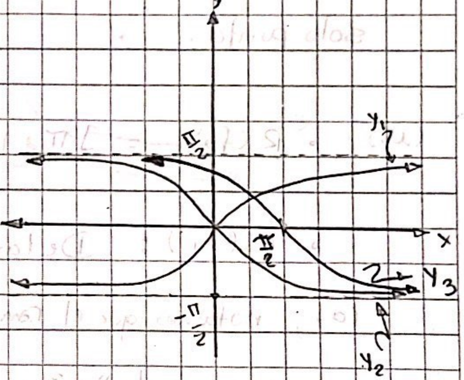
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & x \geq \frac{\pi}{2} \quad \cdots f_1 \\ \pi - \frac{2}{2x - \pi}, & x < \pi/2 \quad \cdots f_2 \end{cases}$$

(i) f_1 : $y_1 = \arctan(x)$

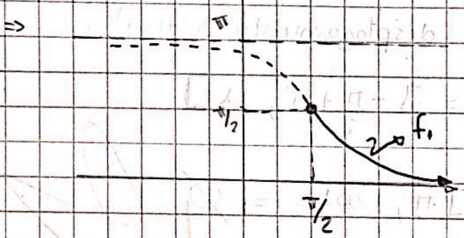
$y_2 = -\arctan(x)$

$y_3 = -\arctan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$y_4 = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



$\Rightarrow$



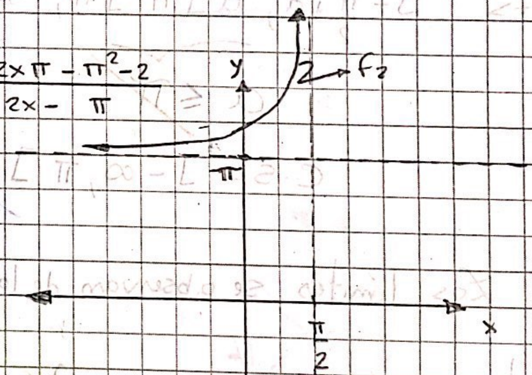
(ii) f_2 : $\pi - \frac{2}{2x - \pi} = \frac{2x\pi - \pi^2 - 2}{2x - \pi}$

$\boxed{x < \pi/2}$

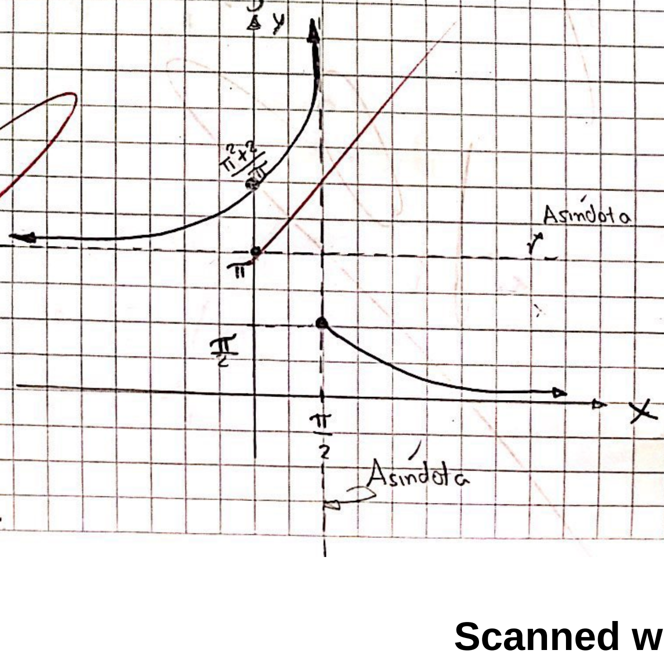
A.V : $x = \pi/2$

A.H : $y = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$y = \pi$



(iii) Uniendo las gráficas



20

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(b) Para que f sea inyectiva:

- f_1 y f_2 deben ser inyectivas
- $R(f_1) \cap R(f_2) = \emptyset$

(i) De la parte (a) pudimos observar que f_1 y f_2 eran inyectivas pues cualquier recta horizontal las cortaba en un solo punto.

(ii) • $R(f_2) =]\pi, +\infty[$

• $R(f_1)$: De las transformaciones hechas en la parte (a), notamos que el rango de $-\arctan(x-\frac{\pi}{2})$ es $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ y el sumarle "a" es un desplazamiento vertical.

Por lo tanto, $R(f_1) =]-\frac{\pi}{2}+a, a]$

$\Rightarrow \quad]-\frac{\pi}{2}+a, a] \cap]\pi, +\infty[= \emptyset$

$a \leq \pi$

$C.S =]-\infty, \pi]$

(c) Los límites se observan de la gráfica:

• $\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2}^- \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$ • $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pi$

1,0

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

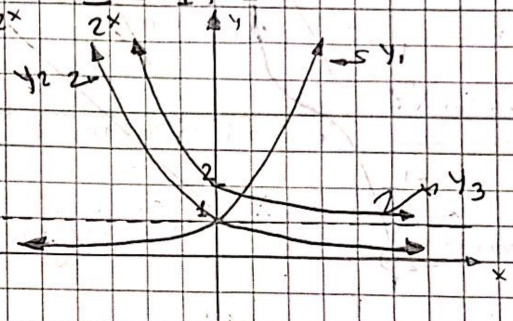
Presente aquí su trabajo

Pregunta 2 :

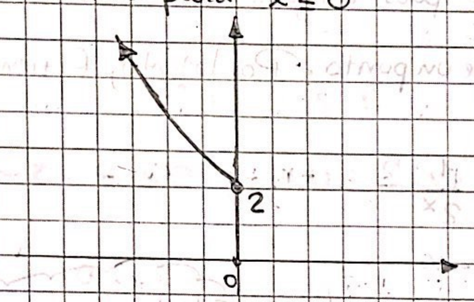
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x+1}{2^x}, & x \le 0 \quad \ldots\ (f_1) \\ -4\,\dfrac{\operatorname{arcSen}(1-x)}{\pi}, & 0 < x < 2 \quad \ldots\ (f_2) \end{cases}$$

a) f_1 : $\dfrac{2^x+1}{2^x} = \dfrac{2^x}{2^x} + \dfrac{1}{2^x} = 1 + 2^{-x}$

- $y_1 = 2^x$
- $y_2 = 2^{-x}$
- $y_2 = 2^{-x} + 1$

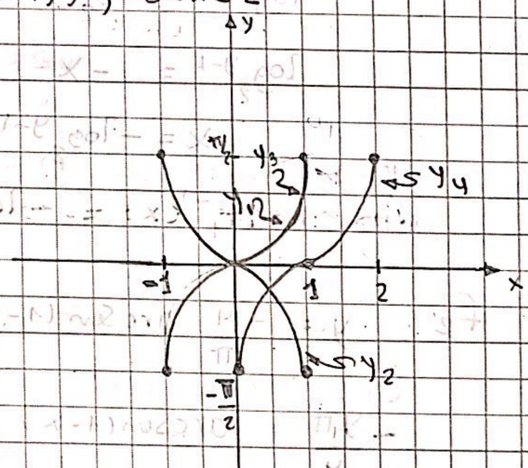


$\Rightarrow$ Acotamos para $x \le 0$

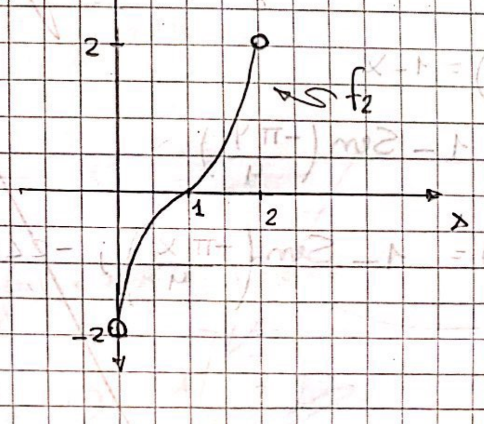


f_2 : $\dfrac{y}{\pi} = -\operatorname{arcSen}(-(x-1))$, $0 < x < 2$

- $y_1 = \operatorname{arcSen}(x)$
- $y_2 = \operatorname{arcSen}(-x)$
- $y_3 = -\operatorname{arcSen}(-x)$
- $y_4 = -\operatorname{arcSen}(-(x-1))$
- $y_5 = \dfrac{y}{\pi} = -\operatorname{arcSen}(-(x-1))$



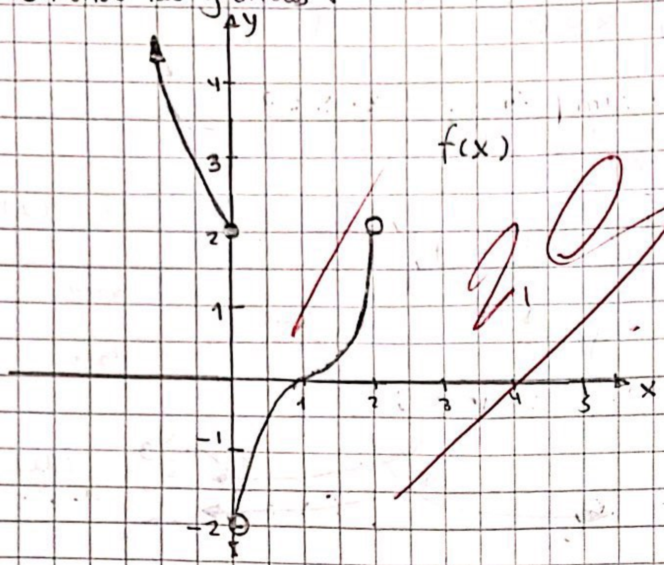
$\Rightarrow$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Uniendo las gráficas:



(b) * f es inyectiva pues ninguna recta horizontal la corta en más de un punto. Por lo tanto, f tiene inversa.

(i) f_1:

$$y = 1 + \frac{1}{2^x}$$

$$y - 1 = 2^{-x}$$

$$\log_2 (y-1) = \log_2 2^{-x}$$

$$\log_2 (y-1) = -x$$

$$x = -\log_2 (y-1)$$

$$\therefore \quad f_1^{-1}(x) = -\log_2 (x-1) \; ; \; 2 \leq x < \infty$$

Nota: $R(f) = D(f^{-1})$

f_2:

$$y = -\frac{4}{\pi} \operatorname{arcSen}(1-x)$$

$$-\frac{y\pi}{4} = \operatorname{arcSen}(1-x)$$

$$\operatorname{Sen}\left(-\frac{y\pi}{4}\right) = 1 - x$$

$$x = 1 - \operatorname{Sen}\left(\frac{-\pi y}{4}\right)$$

$$f_2^{-1}(x) = 1 - \operatorname{Sen}\left(\frac{-\pi x}{4}\right) \; ; \; -2 < x < 2$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\Rightarrow$ $$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\log_2^{x-1} , & 2 \leq x \\ 1 - \operatorname{Sen}\left(\frac{-\pi x}{4}\right) ; & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow D(f^{-1}) =]-2, +\infty[$

Problema 3 :

3,5/0

- f es par (simétrico al eje y)
- $2 < x$, $f(x) = \log_a (x-2) + 5a$, $a > 0$, a es constante
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2^+ \\ x > 2}} f(x) = +\infty$
- $(a+2, 2a^2+3) \in f$
- $-2 \leq x \leq 0$, $f(x) = 2\cos(\pi x) + 2$

a) $a > 0$

$a+2 > 2 \Rightarrow f(a+2) = \log_a (a+2-2) + 5a$

1

$\Rightarrow 2a^2 + 3 = \log_a a + 5a$

$2a^2 + 3 = 1 + 5a$

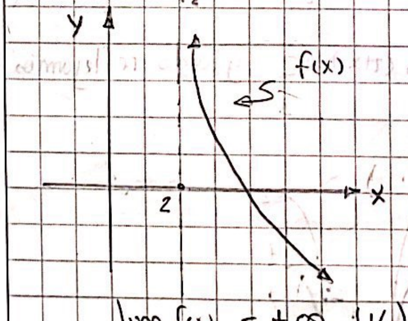
$2a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow (2a-1)(a-2) = 0$

$2a \quad -1$
$a \quad -2$

$a = 1/2 \vee a = 2$

Si $a = 1/2$

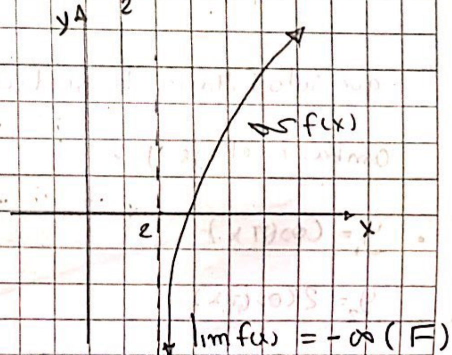
$f(x) = \log_{1/2} (x-2) + \frac{5}{2}$



$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ (V)

Si $a = 2$

$f(x) = \log_2 (x-2) + 10$



$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ (F)

$\therefore a = 1/2$

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) 1,5

- $f(x) = \log_{1/2}(x-2) + \frac{5}{2}$

$\vee$

$0 = \log_{1/2}(x-2) + 5/2$ $\Rightarrow$ Coordenada:

$-5/2 = \log_{1/2}(x-2)$ $\left(2^{+5/2} + 2, 0\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5/2} = x-2$

$2^{+5/2} + 2 = x$

Como f es par: $f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow f(2^{+5/2}+2) = 0$

$f(-2^{+5/2} - 2) = 0$

Otra coordenada: $\left(-2^{5/2} - 2, 0\right)$

- $f(x) = 2\cos(\pi x) + 2$, $x \in [-2, 0]$

$\vee$

$0 = 2\cos(\pi x) + 2$

$-1 = \cos(\pi x)$

$\cos(-\pi) = \cos(\pi x)$

$-1 = x$ $\Rightarrow$ Coordenada: $(-1, 0)$

$\Rightarrow x = 0$; $f(x) = 2+2$

$f(x) = 4$

- Coordenada: $(0, 4)$

Como f es par: la otra coordenada es $(1, 0)$

Coordenadas: $\left(-2^{5/2} - 2, 0\right)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(0, 4)$;

$\left(2^{5/2} + 2, 0\right)$

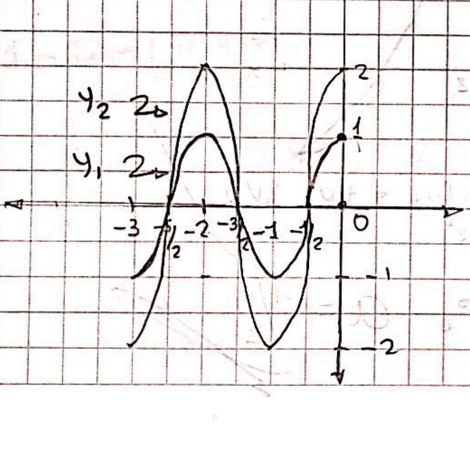
2,5

c) En la parte A hice el esbozo de $f(x) = \log_{1/2}(x-2) + \frac{5}{2}$ por lo que solo faltaría la gráfica de $2\cos(\pi x) + 2$ y luego reflejamos ambas en el eje y.

- $y_1 = \cos(\pi x)$

$y_2 = 2\cos(\pi x)$

$y_3 = 2\cos(\pi x) + 2$

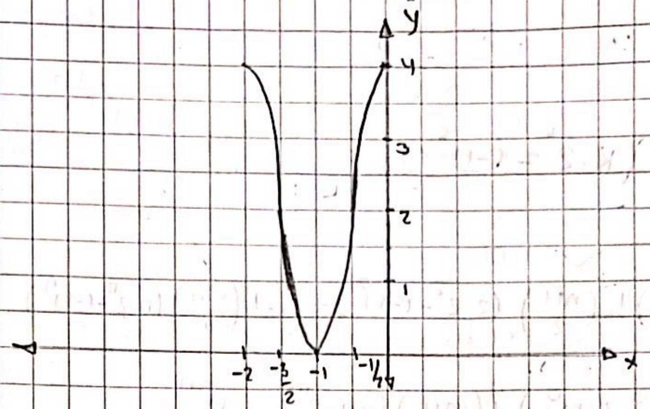


Scanned with CamScanner

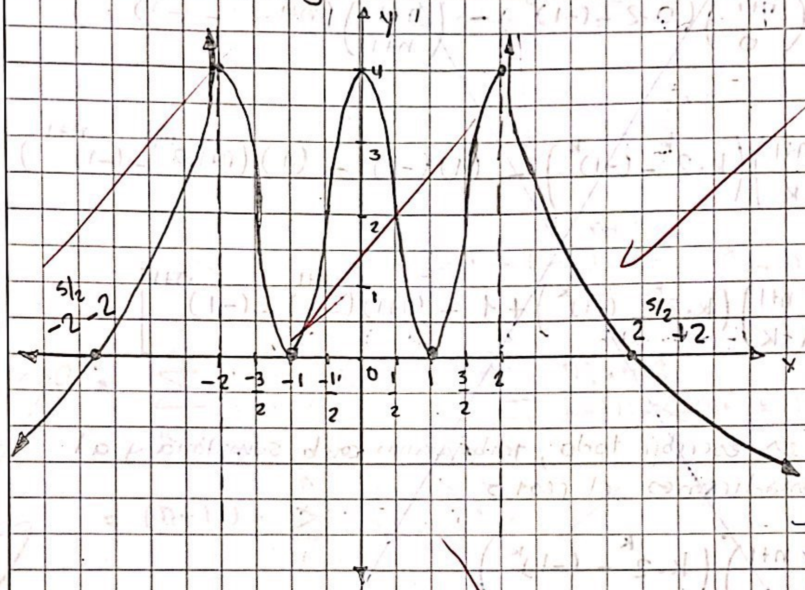
Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

⇒



∴ Uniendo las gráficas



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 4:

a) $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot k \cdot 2^{k}}_{a} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{k}}_{b}$

b: $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{k} = \binom{n+1}{1}(-1)^{1} + \dots + \binom{n+1}{n}(-1)^{n} + \binom{n+1}{0}(-1)^{0} + \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1}$
$- \binom{n+1}{0}(-1)^{0} - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}(-1)^{k} - 1 - (-1)^{n+1}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}(1)^{n+1-k}(-1)^{k} - 1 - (-1)^{n+1}$

$\Rightarrow \cancel{(1-1)^{n+1}} - 1 - (-1)^{n+1} = -1 - (-1)^{n+1}$

a: $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot k \cdot 2^{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n! \cdot n+1}{(k-1)! \cdot \cancel{k} \cdot (n+1-k)!} \cdot \cancel{k} \cdot 2^{k}$

$= (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot 2^{k}$

$= (n+1) \cdot \left[\binom{n}{0} \cdot 2^{1} + \binom{n}{1} \cdot 2^{2} + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot 2^{n} + \binom{n}{n} \cdot 2^{n+1} - \binom{n}{n} \cdot 2^{n+1} \right]$

$= (n+1) \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{k+1} - 2^{n+1} \right]$

$= (n+1) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (1)^{n-k} \cdot 2 \cdot 2^{k} - (n+1) \cdot 2^{n+1}$

$= 2(n+1) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (1)^{n-k} \cdot 2^{k} - (n+1) \cdot 2^{n+1}$

$= 2(n+1)(3)^{n} - (n+1)(2^{n+1})$

$\therefore a - b = 2(n+1)(3^{n}) - (n+1)(2^{n+1}) + (-1)^{n+1} + 1$

20

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

b) $(3n)! > 2^{6n-3}$, $\forall\, n \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}$

Etapa base:

$n=2$, $(3.2)! > 2^{6(2)-3}$

$6! > 2^{9}$

$720 > 512$ (v)

Etapa inductiva:

Hipótesis inductiva:

$n=h,\ h \in \mathbb{Z},\ h \geq 2$

$(3h)! > 2^{6h-3}$

Tesis inductiva:

$n=h+1$, se debe demostrar que: $(3h+3)! > 2^{6h+3}$

de la hipótesis: $\left((3h)! > 2^{6h-3}\right) \cdot (3h+1)(3h+2)(3h+3)$

$(3h+3)! > 2^{6h-3} \cdot (3h+1)(3h+2)(3h+3)$

$\Rightarrow$ $h \geq 2$
$3h \geq 6$
$3h+1 \geq 7$
$3h+2 \geq 8$
$3h+3 \geq 9$

$(3h+1)(3h+2) \geq 7(3h+2) \geq 7 \cdot 8$

$(3h+1)(3h+2) \geq 56$

$\Rightarrow$ $(3h+1)(3h+2)(3h+3) \geq 56(3h+3) \geq 56(9)$

$(3h+1)(3h+2)(3h+3) \geq 534 > 64$

$\Rightarrow$ Entonces: $\left((3h+1)(3h+2)(3h+3) > 64\right) \cdot 2^{6h-3}$

$2^{6h-3}(3h+1)(3h+2)(3h+3) > 2^{6} \cdot 2^{6h-3}$

$(3h+3)! > 2^{6h-3}(3h+1)(3h+2)(3h+3) > 2^{6h+3}$

$\therefore (3h+3)! > 2^{6h+3}$

20

$2^{6h-3} \cdot (3h+1)(3h+2)(3h+3)$

2^{6h-3}

$(3h+1)(3h+2)(3$

$3h \geq 6$

$3h+1 \geq 7$
$3h+2 \geq 8$
$3h+3 \geq 9$

80

56×45
9
534

5

45

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$> 2^{6h+3}$

$> 2^{6h-3}(2^6)$

$(h+3) > 2^6$

2^6 32

Problema 5:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - \frac{1}{n(n+1)}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Demostrar: $a_n = \sum_{J=1}^{n} \frac{1}{J}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Etapa base:

$n = 1$; $a_1 = \sum_{J=1}^{1} \frac{1}{J}$

$1 = 1$ (V)

$n=2$ Falta

Etapa inductiva:

Hipótesis Inductiva: $1 \leq K \leq h$, $K \in \mathbb{Z}^+$ $h \geq 2$

$$a_K = \sum_{J=1}^{K} \frac{1}{J}$$

Tesis Inductiva:

$n = h+1$, se debe demostrar que: $a_{h+1} = \sum_{J=1}^{h+1} \frac{1}{J}$

$$\Rightarrow a_{h+1} = 2a_h - a_{h-1} - \frac{1}{h(h+1)}$$

$$= 2\sum_{J=1}^{h} \frac{1}{J} - \sum_{J=1}^{h-1} \frac{1}{J} - \frac{1}{h(h+1)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1} + \frac{1}{h}\right] - \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1}\right] - \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1} + \frac{2}{h} - \frac{1}{h} + \frac{1}{h+1}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h+1} = \sum_{J=1}^{h+1} \frac{1}{J}$$

2,3