Fundamentos de Cálculo

Primer examen

Semestre Académico 2018-1

Horario: Todos

Duración: 3 horas

Elaborado por todos los profesores del curso

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- Se prohíbe usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.
- Debe explicar detalladamente sus soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.
- Enumere las páginas del cuadernillo en la parte superior del 1 al 12 y reserve **dos** páginas para resolver cada una de las preguntas, según la distribución siguiente:

Pregunta	1	2	3	4	5
Páginas	1 y 2	3 y 4	5 y 6	7 y 8	9 y 10

1. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta adecuadamente.

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}$ tal que $x^4 - yx^2 + y > 0$. (1 punto)

   b) Si $a \in \mathbb{R} - \{2\}$ tal que $7 < \dfrac{a+1}{a-2} \le 10$, entonces $\dfrac{7}{3} \le a \le \dfrac{5}{2}$. (1 punto)

   c) Si f es una función impar que cumple $f(x_0) > a$, entonces $-x_0$ es solución de $f(x) < -a$. (1 punto)

2. a) Los números a_n, con $n \in \mathbb{Z}^+$, se definen recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},\ n \ge 2. \end{cases}$$

   Demuestre, usando inducción matemática, que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$a_n = 2^{n-1} - 1.$$

   (2 puntos)

   b) Calcule en términos de n la suma siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{k+2} \binom{n}{k+1}.$$

   (2 puntos)

3. a) Sea f una función definida por $f(x) = (m^2 - 4m + 4)x^2 + (5 - 3m)x + 3$. Halle todos los valores de m de modo que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (2 puntos)

   b) Considere las funciones f y g definidas por

$$f(x) = -|x-2| + 2,\ x \le 5 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -x & , x < 2 \\ x^2 + x & , x \ge 3 \end{cases} .$$

   Halle lo siguiente:

   b_1) La regla de correspondencia y el dominio de la función $f + g$. (1.5 puntos)

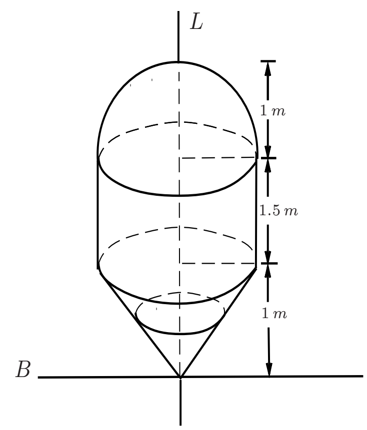
   b_2) El rango de la función $f + g$. (1.5 puntos)

   b_3) El(los) intervalo(s) donde la función $f + g$ es creciente. (1 punto)

4. En el sólido mostrado, formado por un cono recto, un cilindro recto y una semiesfera, se realizan cortes con planos perpendiculares al eje L y las secciones transversales obtenidas son círculos.

   a) Determine el radio r de la sección transversal obtenida como una función de h, donde h es la distancia entre un plano de corte y la base B.

   b) Grafique la función obtenida en a).



(3 puntos)

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple las condiciones siguientes:

- La función f es impar y $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $f(x) = -\sqrt{9 - (x+3)^2} + 3$, cuando $-3 < x < 0$.
- La gráfica de f en $]-\infty, -3]$ es una porción de parábola, cuyo vértice coincide con el vértice de la gráfica de $g(x) = 5x^2 + 30x + 44$, y pasa por el punto $(-4, -3)$.

   a) Halle la regla de correspondencia de f. (2 puntos)

   b) Grafique la función f, indicando las coordenadas de los puntos de intersección de su gráfica con los ejes coordenados. (2 puntos)

Coordinadora de teoría: Norma Rubio

San Miguel, 7 de mayo de 2018.

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

Año | Número

2018 | 1113

Código de alumno

ENTREGADO

23 MAY 2018

Primer examen

Lázaro Carbajal, Diego Estuardo

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Horario: H123-1

Fecha: 07/05/18

Nombre del profesor: N. Rubio

Nota

18

Firma del profesor

I N D I C A C I O N E S

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcridad posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posible.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo ①

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$x^4 - yx^2 + y > 0$

$x^4 - y(x^2-1) > 0$

$x^4 > y(x^2-1)$

Si $x \geq 1 \lor x \leq -1$

$\frac{x^4}{x^2-1} > y$

Si $-1 < x < 1$

$\frac{x^4}{x^2-1} < y$

P①

→ Debe mostrar cuál es este número.

ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z} : x^4 - yx^2 + y > 0$

$\boxed{\text{Es verdadera}}$, basta que y sea un entero menor que $\frac{x^4}{x^2-1}$, ¿pero cuál?

cuando $x > 1 \lor x < -1$; que y sea un entero mayor a $\frac{x^4}{x^2-1}$, ¿pero cuál?

cuando $-1 < x < 1$; que $y \in \mathbb{Z}^+$ si $x = 1 \lor x = -1$.

0.5

ⓑ

Si $a \in \mathbb{R} - \{2\} : 7 < \frac{a+1}{a-2} \leq 10 \rightarrow \frac{7}{3} \leq a \leq \frac{5}{2}$

Resolviendo:

$7 < \frac{a+1}{a-2} \leq 10 \rightarrow 7 < \frac{a-2+3}{a-2} \leq 10 \rightarrow 7 < 1 + \frac{3}{a-2} \leq 10$

$\rightarrow 6 < \frac{3}{a-2} \leq 9 \rightarrow 2 < \frac{1}{a-2} \leq 3$ (dividimos entre 3) (no cambia desigualdad)

$\rightarrow \frac{1}{3} \leq a-2 < \frac{1}{2}$ (podemos invertir puesto que todos son positivos.

$\rightarrow \frac{7}{3} \leq a < \frac{5}{2}$

1.0

Pero $a \neq 2$, por lo que: $a \in [\frac{7}{3}; 2[\cup]2; \frac{5}{2}[$

$\therefore$ $\boxed{\text{La Proposición es Verdadera}}$ Debido a que $[\frac{7}{3}; 2[\cup]2; \frac{5}{2}[$ está incluido en $[\frac{7}{3}; \frac{5}{2}]$.

ⓒ Si f es una función impar que cumple $f(x_0) > a \rightarrow x_0$ es solución de $f(x) < -a$

• Primero, f es impar

$\rightarrow f(-x) = -f(x) \rightarrow f(x) = -f(-x)$

1.0

Así: $f(x_0) = -f(-x_0)$

Luego:

$f(x_0) > a \rightarrow -f(-x_0) > a$ ✓

Multiplicamos por (-1) $\rightarrow \underline{f(-x_0) < -a} \Rightarrow$ Se comprueba que $-x_0$ sí es solución de $f(x) < -a$

$\boxed{\therefore \text{ La proposición es Verdadera.}}$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

P②

ⓐ Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $a_n = 2^{n-1} - 1$,

con $a_n = \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \; n \geq 2 \end{cases}$

• Etapa Base: Para $n=1$ y $n=2$

→ $a_1 = 0 = 2^{1-1} - 1 = 1-1$ // Se cumple.

→ $a_2 = 1 = 2^{2-1} - 1 = 2-1$ // Se cumple.

• Etapa Inductiva:

→ Hipótesis Inductiva: Para un $h \geq 2$

$\forall k \in \mathbb{Z}^+, 2 \leq k \leq h : a_k = 2^{k-1} - 1$

→ Tesis Inductiva: (Por demostrar) Para un $h+1$

$a_{h+1} = 2^h - 1$

En efecto,

→ Primero, por definición:

$$a_{h+1} = 3a_h - 2a_{h-1}$$

→ Luego, por Hipótesis Inductiva:

$$a_{h+1} = 3(2^{h-1} - 1) - 2(2^{h-2} - 1)$$

→ Resolviendo:

$$a_{h+1} = 3 \cdot 2^{h-1} - 3 - 2^{h-1} + 2$$

$$a_{h+1} = (3 \cdot 2^{h-1} - 2^{h-1}) - 3 + 2$$

$$a_{h+1} = (3-1) 2^{h-1} - 1 = 2 \cdot 2^{h-1} - 1$$

$$a_{h+1} = 2^h - 1 \; //$$

∴ Queda demostrada la tesis, luego por Principio de Inducción, Se demuestra que:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \; a_n = 2^{n-1} - 1$$

④ Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

ⓑ

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{k+2}\binom{n}{k+1}$$

Primero:

- Sea el k-ésimo término

$$\frac{k-1}{k+2}\binom{n}{k+1} = \frac{k+2-3}{k+2}\binom{n}{k+1}$$

$$= \left(1-\frac{3}{k+2}\right)\binom{n}{k+1}$$

$$= \binom{n}{k+1} - \frac{3}{k+2}\binom{n}{k+1}$$

$$= \binom{n}{k+1} - \frac{3}{k+2}\cdot\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$= \binom{n}{k+1} - 3\left(\frac{n!}{(k+2)!\,[(n+1)-(k+2)]!}\right)$$

$$= \binom{n}{k+1} - 3\left(\frac{n!}{(k+2)!\,[(n+1)-(k+2)]!}\cdot\frac{n+1}{n+1}\right)$$

$$= \binom{n}{k+1} - \frac{3}{(n+1)}\left(\frac{(n+1)!}{(k+2)!\,[(n+1)-(k+2)]!}\right)$$

$$= \binom{n}{k+1} - \frac{3}{n+1}\binom{n+1}{k+2}$$

Así:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{k+2}\binom{n}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n}{k+1} - \frac{3}{n+1}\binom{n+1}{k+2}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k+1} - \frac{3}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}$$

$$= \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k+1}+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}}-\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\right] + \frac{3}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)-\binom{n}{0}-\binom{n}{1} + \frac{3}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+1}{k+2}+\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{2}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 1 - n + \boxed{\frac{3}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1 - (n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\right]}$$

$$\boxed{= 2^n - 1 - n} + \frac{3}{n+1}\cdot 2^{n+1} - \frac{3}{n+1} - 3 - \frac{3n}{2}$$

2,0

Así:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{k+2}\binom{n}{k+1} = 2^n - 4 + \frac{3}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) - \frac{5n}{2}$$

$$\frac{(n+1)!}{2!\,(n+1-2)!}$$

$$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)!}{1\cdot 2\,(n-1)!}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo ⑤

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$23-\frac{81}{4}$

$\frac{97-81}{4}$

$\frac{11}{4}$

P③:

ⓐ

$$f(x)=(m^2-4m+4)x^2+(5-3m)x+3$$

• Para que f(x) sea sólo positiva o sólo negativa, la gráfica de f(x) no debe cortar al eje x por ningún punto. Con lo que la ecuación $(m^2-4m+4)^2x^2+(5-3m)x+3=0$ no debe tener soluciones reales. Para que esto suceda el discriminante debe ser menor que 0 con lo que:

$$\Delta<0 \to (5-3m)^2-4(m^2-4m+4)(3)<0$$

$$9m^2-30m+25-12m^2+48m-48<0$$

$$(-3m^2+18m-23<0)\times(-1)$$

$$3m^2-18m+23>0$$

Halla raíz de $3m^2-18m+23=0$

$$3(m^2-6m)+23>0$$

$$3(m^2-6m+9)-27+23>0$$

$$\therefore 3(m^2-3)^2-4>0 \to (m-3)^2>\cancel{4} \quad m>\cancel{\frac{1}{3}} \vee \cancel{m<\frac{5}{3}}$$

1.①

$\Rightarrow$ Así: $\boxed{m\in\,]-\infty;\cancel{\tfrac{5}{3}}[\,\cup\,]\cancel{\tfrac{1}{3}};\infty+[}$

∴ Pero para que f(x) sea positiva entonces el coeficiente que acompaña al término cuadrático debe ser mayor a 0. Con lo que:

$$m^2-4m+4>0$$

$$(m-2)^2>0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}-\{2\}$$

Así: $m\in\,]-\infty;\cancel{\tfrac{5}{3}}[\,\cup\,]\cancel{\tfrac{1}{3}};\infty+[$

ⓑ Con:

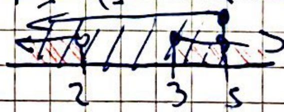
$\to f(x)=-|x+2|+2,\ x\leq 5$

$\to g(x)=\begin{cases}-x, & x<2\\ x^2+x, & x\geq 3\end{cases}$

ⓑ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}-|x+2|+2-x, & x<2\\ x^2+x-|x+2|+2, & 3\leq x\leq 5\end{cases}$

$\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}f\cap\mathrm{Dom}g$

$\mathrm{Dom}(f+g)=\,]-\infty;5]\cap(]-\infty;2[\,\cup\,[3;\infty+[)$



$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f+g)=\,]-\infty;2[\,\cup\,[3;5]$

1.5

⑥ **Presente aquí su trabajo**

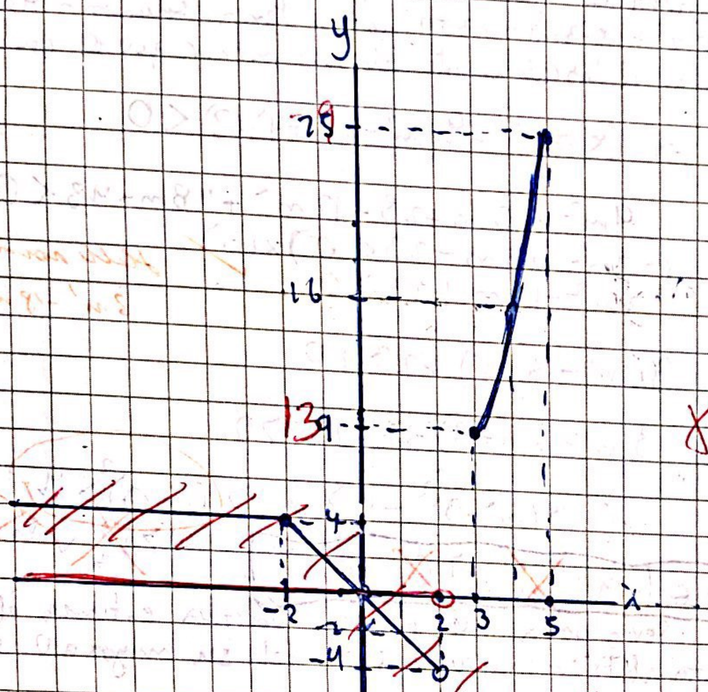
Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(b2) De la gráfica:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}-|x+2|+2-x & , x<2\\ x^2+x-|x+2|+2 & , 3\leq x\leq 5\end{cases}$$

Puntaje a)

$(f+g)(3)$



0.5

$\therefore \operatorname{Ran}(f+g)=]-4;4[\cup[9;25]$

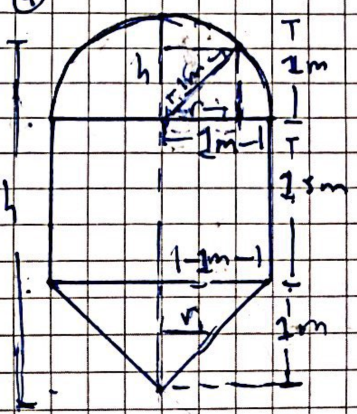
(b3) De la gráfica anterior, se evidencia que la función $(f+g)(x)$ es creciente cuando $3\leq x\leq 5$.

1.0

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo ⑦

④



· En $0 \le h \le 1m$

$\frac{1}{1} = \frac{r}{h} \to r = h$

· En $1 < h \le 2,5m$

$r = 1m$

· En $2,5 < h \le 3,5$

$r^2 + (h-2,5)^2 = 1$

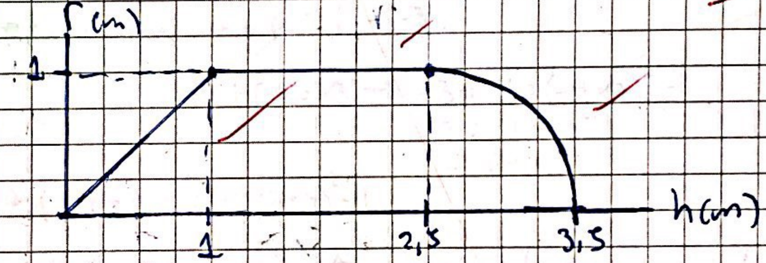
$r = \sqrt{1-(h-2,5)^2}$

ⓐ Así:

$$r(h) = \begin{cases} h & , 0 \le h \le 1m \\ 1 & , 1 < h \le 2,5m \\ \sqrt{1-(h-2,5)^2} & , 2,5 < h \le 3,5 \end{cases}$$

30

ⓑ



Scanned with CamScanner

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo ⑨

$(y+3)^2 = 9-(x-3)^2$

$(y+3)^2+(x-3)^2=9$

$(3;-3)$

P⑤: De los datos:

$$f(x)=\begin{cases} f_I(x) & , \quad x\leq -3 \\ -\sqrt{9-(x+3)^2}+3 & , \quad -3<x<0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ \sqrt{9-(x-3)^2}-3 & , \quad 0<x<3 \\ f_{II}(x) & , \quad x\geq 3 \end{cases}$$

Se deduce por $f(x)$ impar → $f(x)=-f(-x)$

• $g(x)= 5x^2+30x+44$

$= 5(x^2+6x)+44 = 5(x^2+6x+9)-45+44$

$g(x)=5(x+3)^2-1$

→ $(h;k)=(-3;-1)$

→ $f_I(x)$ tiene el mismo vértice, con lo que $f(x)=4p(x+3)^2-1$

• Puesto que pasa por $(-4;-3)$

→ $f(-4)=-3$ → $-3=4p(-4+3)^2-1$

$-2=4p(-1)^2$

$-2=4p$

Así: $F_I(x)=-2(x+3)^2-1$

→ Se deduce también $F_{II}(x)$ por; $f(x)$ es impar → $f(x)=-f(-x)$

Así: $F_{II}(x)=2(x-3)^2+1$

⑨ Luego:

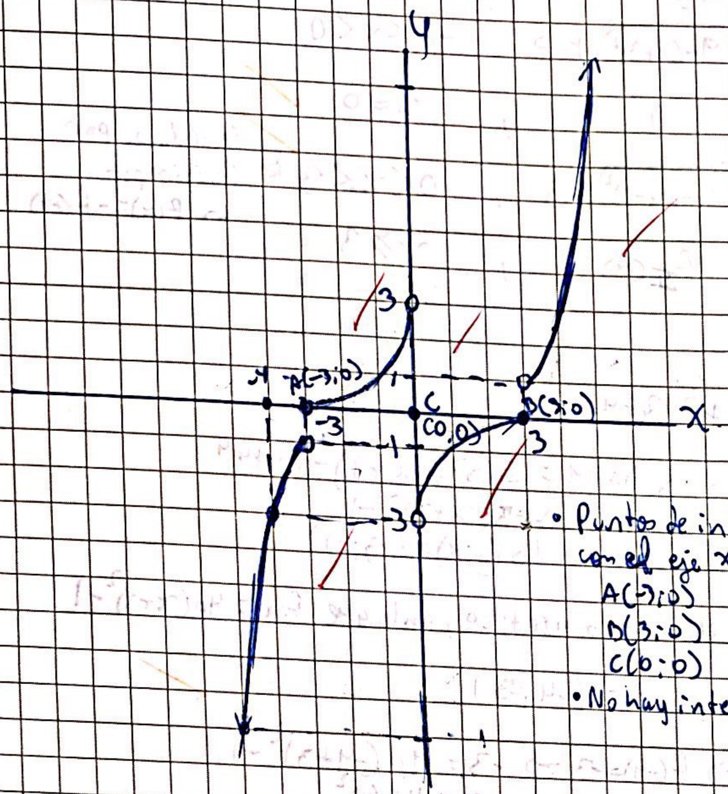
$$f(x)=\begin{cases} -2(x+3)^2-1 & , \quad x\leq -3 \\ -\sqrt{9-(x+3)^2}+3 & , \quad -3<x<0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ \sqrt{9-(x-3)^2}-3 & , \quad 0<x<3 \\ 2(x-3)^2+1 & , \quad x\geq 3 \end{cases}$$

20

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

①



20

- Puntos de intersección con el eje x:
  A(-3;0)
  D(3;0)
  C(0;0)
- No hay intersección con el eje y.

FIN