ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ENTREGADO 17 JUL 2019

Segundo examen

Año				Número			
2	0	1	9	1	0	4	3

Código de alumno

Gonzales Huisa Omar Andrés

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: AMGA

Horario: H-110

Fecha: 04/07/19

Nombre del profesor: M. Hernández

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Mayo 2018

$L: (9,1,7) + t(-3,6,0)$

ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

$P: 2x + y + 2z - 15 = 0$

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN FINAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2019-1

Horarios: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115
Turno 1

Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora ni computadora personal.
- **Justifique sus respuestas.**

---

1. Dados los puntos $A(6;3;0)$, $B(2;7;2)$, $C(3;9;0)$ y $D(9;1;7)$, halle:
   a) La ecuación de la recta $\mathcal{L}$, que pasa por el punto D y es paralela al vector $\overrightarrow{AC}$ y la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que contiene a A, B y C. 1,5 puntos
   b) La ecuación de una recta que sea perpendicular a $\mathcal{P}$ y que corte a $\mathcal{L}$. 1,5 puntos
   c) La distancia de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}$. 1 punto

$AC = (-3,6,0)$

$x = 7$
$y = 5$
$z = 7$

2. a) Considere los números complejos

$$z_1^2 = 2\sqrt{3} + 2i, \quad Re(z_1) < 0$$

$$z_2 = \frac{2+ki}{1-ki}, \qquad k \in \mathbb{R}, k > 0, \ Re(z_2) = 0$$

Calcule $(z_1)^{21}.z_2$. Dé la respuesta en forma polar o exponencial. 2,5 puntos

   b) Halle los números complejos z_1 y z_2 que satisfacen el siguiente sistema:

$$(2+i)z_1 + 2z_2 = 1 + 7i$$

$$(1-i)z_1 + (i)z_2 = 0$$

1,5 puntos

$4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

$(0,\frac{3}{2},0) + r(2,1,2), r \in \mathbb{R}$

$r = \frac{7}{2}$

$\frac{2-k^2+3k\cdot i}{k^2+1}$

3. Analice las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si A, B, X y Z son matrices cuadradas de orden n y se sabe que $X + Z = I$, entonces se cumple que $(AXB + AZB)^t = (AB)^t$. 1,5 puntos

b) Si B, C y D son matrices cuadradas de orden n, y se sabe que $BC = BD$, entonces se cumple que $C = D$. 1,5 puntos

c) Si A, B y C son matrices invertibles entonces ABC también es invertible y

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$ 1,5 puntos

4. Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) Si $z = x + yi$, con $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto solución de la ecuación:

$$z.\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 5$$

corresponde a una circunferencia con centro en 2+0i y radio 3. 1,5 puntos

b) Si el vector $\vec{v}$ es un vector propio de la matriz cuadrada A, asociado al valor propio λ, entonces $\vec{v}$ también es un vector propio de la matriz A^3 pero asociado al valor propio λ^3. 2 puntos

Nota: Dada la matriz cuadrada A, se dice que el número λ es un valor propio de A si existe un vector no nulo $\vec{v}$ tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El vector $\vec{v}$ se llama vector propio de A asociado a λ.

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales en el conjunto de los números reales.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 5x - y + kz &= 6 \end{aligned}$$

Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que:

a) El sistema tiene solución única y cuando eso ocurra, hállela.

b) El sistema tiene infinitas soluciones y cuando eso ocurra, hállelas.

c) El sistema no tiene solución.

4 puntos

Evaluación elaborada por los profesores del curso

Lima, 4 de julio del 2019

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$(2,7,2)$
$(6,3,0)$
$-4\ 4\ 2$

$(3,9,0$
$6,3,0)$
$(-3,6,0)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ $-(-6)$ 6

$i\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$

$+k\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ $-24-(-12)$ $-24+12$ -12

$-12i-6j-12k$

$18-2x_0-y_0+1$

19

$\frac{7}{2}$

7

Presente aquí su trabajo

Pregunta 1:

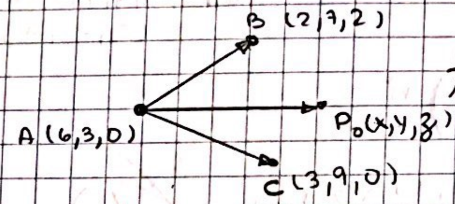
a) $P_0 = D(9,1,7)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3,9,0)-(6,3,0) = (-3,6,0)$

$L: P_0 + t(\vec{v}),\ t\in\mathbb{R}$

Ecuación de la recta $L: (9,1,7) + t(-3,6,0),\ t\in\mathbb{R}$

1



$\overrightarrow{AB} = (-4,4,2)$

$\overrightarrow{AC} = (-3,6,0)$

13

$\Rightarrow \vec{n} = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$

$\vec{n}_0 = (-12,-6,-12) = -6(2,1,2)$ ← vector normal

$\Rightarrow \vec{n} \cdot (P_0 - A) = 0$

$(2,1,2)\cdot((x-6, y-3, z)) = 0$

$2x-12+y-3+2z=0$

ecuación cartesiana del plano $\rightarrow P: 2x+y+2z-15=0$

b) ecuación de L_2: $P_0 + r(\vec{v}),\ r\in\mathbb{R}$

• $L_2 \perp P \rightarrow \vec{v} = \lambda(2,1,2)$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{v} = (2,1,2)$

1

• $L_2 \cap L_1 \Rightarrow L_1: \begin{cases} x = 9-3t \\ y = 1+6t \\ z = 7 \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} x = x_0+2r \\ y = y_0+r \\ z = z_0+2r \end{cases}$

$\Rightarrow$ • $x_0+2r = 9-3t$ • $1+6t = y_0+r$ • $7 = z_0+2r$

$3t+2r = 9-x_0$ (i) $6t-r = y_0-1$ (ii) $7-z_0 = 2r$ (iii)

(i) y (ii): $6t+4r = 18-2x_0$
$6t - r = y_0-1$ (−)

$5r = 19-2x_0-y_0$

$r = \frac{19-2x_0-y_0}{5}$

$r = \frac{7-z_0}{2}$

$\Rightarrow \frac{19-2x_0-y_0}{5} = \frac{7-z_0}{2}$

$38-4x_0-2y_0 = 35-5z_0$

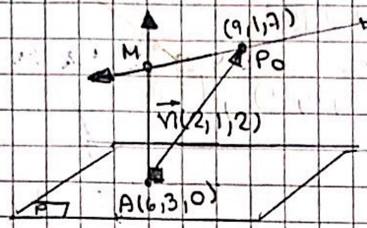
$3 = 4x_0+2y_0-5z_0$ → $P_0(0,\frac{3}{2},0)$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Ecuación de la recta : $\mathcal{L}_2 : (0, \frac{3}{2}, 0) + r(2,1,2),\ r \in \mathbb{R}$

c) distancia de $\mathcal{L}$ a P



$\mathcal{L}: (9,1,7) + t(-3,6,0)$

$P: 2x + y + 2z - 15 = 0$

$\overrightarrow{AP_0} = (9,1,7) - (6,3,0) = (3,-2,7)$

$$Proy_{\vec{n}}^{\overrightarrow{AP_0}} = \left(\frac{\overrightarrow{AP_0} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(3,-2,7)\cdot(2,1,2)}{(2^2+1^2+2^2)}\right)(2,1,2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6-2+14}{9}\right)(2,1,2)$$

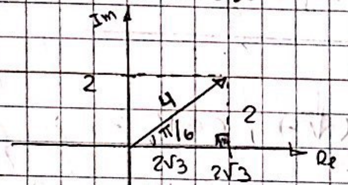
$$\Rightarrow 2(2,1,2) = (4,2,4)$$

$$\Rightarrow \|(4,2,4)\| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

distancia

Pregunta 2 :

a) $z_1^2 = 2\sqrt{3} + 2i$ $\quad Re(z_1) < 0$



$z_1^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{Sen}\frac{\pi}{6}\right)$

$$z_1 = 4^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\pi/6 + 2k\pi}{2}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi/6+2k\pi}{2}\right)\right)$$

$k = 0, 1$

(i) $2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{Sen}\frac{\pi}{12}\right)$ (x) $Re(z_1) > 0$

(ii) $2\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$ (✓) $Re(z_1) < 0$

$$z_2 = \frac{2+ki\ (1+ki)}{(1-ki)(1+ki)} = \frac{2+2ki+ki-k^2}{1+k^2} = \frac{(2-k^2)}{1+k^2} + \frac{3ki}{1+k^2}$$

$Re(z_2) = 0$ $\quad k > 0$

$$\frac{2-k^2}{1+k^2} = 0 \Rightarrow 2 - k^2 = 0$$

(+)

$k^2 = 2$

$k = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{3\sqrt{2}}{1+2} i$$

$z_2 = \sqrt{2}\, i$

(9,1,7)
(6,3,0)
(3, -2, 7)
6 − 2 14
18
2
$2\pi + \frac{\pi}{6}$
2
$\frac{13\pi}{12}$
180 / 12
15 ×
13
45
15
195°

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{5\pi}{4}$ 88

2π

$93 \,\underline{|18}$ 88 5

3π

$1+1-i-i^2$

$1-1$

$1-i-i+i^2$

$1-i^2$

Presente aquí su trabajo

$\Rightarrow (z_1)^{21} \cdot z_2$

$$2^{21}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12_4}\cdot 21^{7}\right)+i\,\mathrm{Sen}\left(\frac{13\pi}{12_4}\cdot 21^{7}\right)\right)\cdot\sqrt{2}\,i$$

$$2^{21}\left(\cos\frac{91\pi}{4}+i\,\mathrm{Sen}\,\frac{91\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{Sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2^{21}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{91\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{Sen}\left(\frac{91\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)\right)$$

$$2^{21}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{93\pi}{4}+i\,\mathrm{Sen}\,\frac{93\pi}{4}\right)$$

$$2^{21}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\mathrm{Sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$$

b) $(2+i)z_1 + 2z_2 = 1+7i \quad \ldots (i)$

$[\,(1-i)z_1 + (i)z_2 = 0\,] \times 2i$

$(2i-2i^2)z_1 + (2i^2)z_2 = 0 \qquad (+)$

$(2+2i)z_1 - 2z_2 = 0 \quad \ldots (ii)$

$(2+i)z_1 + (2+2i)z_1 = 1+7i$

$(4+3i)z_1 = 1+7i$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1+7i\,(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4-3i+28i-21i^2}{16+9}$$

$$z_1 = \frac{25+25i}{25} = 1+i$$

$\Rightarrow (1+i)z_1 + (i)z_2 = 0$

$(1-i)(1+i) + iz_2 = 0$

$-2 + iz_2 = 0$

$z_2 = 2i$

15

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Pregunta 3

a) $X+Z=I \longrightarrow (AXB+AZB)^t=(AB)^t$

$\Rightarrow (AXB+AZB)^T=(A(XB+ZB))^T$

$=(A(X+Z)B)^T=(\underbrace{A\cdot I}_{A}\cdot B)^T=(AB)^T$ (V)

$\Rightarrow$ Entonces se demuestra que es verdadero

1,5

b) $B_{n\times n}, C_{mn}, D_{n\times n}$; $BC=BD \longrightarrow C=D$

Contraejemplo: Si B es una matriz $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}_{2\times 2}$

$\Rightarrow C\begin{pmatrix}2&5\\5&2\end{pmatrix} \wedge D\begin{pmatrix}4&3\\3&4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B\cdot C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}_{2\times 2} \wedge B.D=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}_{2\times 2}$

$\Rightarrow C\neq D \wedge BC=BD$

$\Rightarrow$ Entonces es falso (F)

1,5

c) $\det(A)\neq 0$, $\det(b)\neq 0$, $\det(c)\neq 0 \longrightarrow \det(ABC)\neq 0$

$\wedge (ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

(i) Primero se tiene que demostrar que $\det(ABC)\neq 0$

$\Rightarrow \det(ABC)=\underset{\neq 0}{\det(A)}\cdot\underset{\neq 0}{\det(B)}\cdot\underset{\neq 0}{\det(c)}$

$\det(ABC)\neq 0$ (V)

(ii) Segundo se tiene que demostrar que:

$(ABC)\cdot(C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1})=I$

$\Rightarrow A\cdot B\cdot \underbrace{C\cdot C^{-1}}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$

$\Rightarrow A\cdot B\cdot I\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=A\cdot \underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I}\cdot A^{-1}=A\cdot I\cdot A^{-1}$

$\Rightarrow A\cdot A^{-1}=I$ (V) $\Rightarrow$ Como ambas partes son Verdaderos entonces la afirmación es Verdadera. (V)

1,5

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

det(A$\vec{r}$

A det

A nxn nx1

$A.A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$(A^2 v^2 = A.\lambda\vec{v}).A$

$A^3 v = A^2.\lambda\vec{v}$

$A\vec{r} - \lambda I\vec{r} =$

$(A-\lambda I)\vec{r} = 0$

Presente aquí su trabajo

Problema 4:

a) $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{z} = x - yi$

$\Rightarrow z \cdot \bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 5$

$\|z\|^2 - 2(z + \bar{z}) = 5$

$x^2 + y^2 - 2(2x) = 5$

$x^2 - 4x + y^2 = 5$

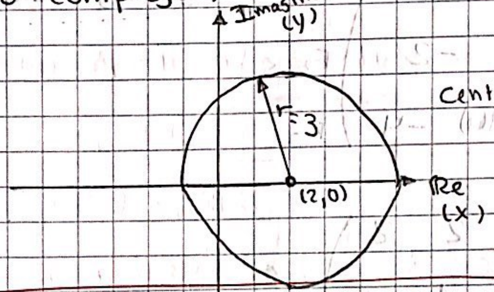
$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 5$

$(x-2)^2 + y^2 = 3^2$ ... Ecuación de una circunferencia

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

1.5

Plano complejo:



centro en $2+0i$

$r = 3$

b) $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \longrightarrow A^3.\vec{v} = \lambda^3.\vec{v}$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$

$(A^2 + A(\lambda I) + (\lambda I)^2) \cdot [(A - \lambda I)\vec{v} = 0]$

$(A^3 - A^2(\lambda I) + A(\lambda I).A - A(\lambda I).\lambda I + (\lambda I)^2.A - (\lambda I)^3).\vec{v} = 0$

$(A^3 - \cancel{\lambda A^2} + \cancel{\lambda . A^2} - \cancel{\lambda^2 A} + \cancel{\lambda^2 A} - \lambda^3.I).\vec{v} = 0$

$(A^3 - \lambda^3.I).\vec{v} = 0$

$A^3.\vec{v} - \lambda^3.\vec{v} = 0$

$A^3.\vec{v} = \lambda^3.\vec{v}$

2

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Problemas :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + kz = 6 \end{cases}$$

Por Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & k & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} F_2 : F_2 - 2F_1 \\ F_3 : F_3 - 5F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & (k-10) & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \qquad F_3 : F_3 - 2(F_2)$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & (k-8) & 0 \end{pmatrix}$$

$(k-8)\,z = 0$

$k = 8$ (i) $\qquad k \neq 8$ (ii)

$\Rightarrow$ (i) : $-3y - z = -2$ $\qquad x + y + 2z = 2$

$3y + z = 2$ $\qquad x + y + 2(2-3y) = 2$

$z = 2 - 3y$ $\qquad x + y + 4 - 6y = 2$

$x - 5y = -2$

$x = 5y - 2$

C.S = $(5y-2,\ y,\ 2-3y)$, $y \in \mathbb{R}$

$k=8$

$-5y + 4 - 2$

$5y - 2$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

$\Rightarrow$ (ii) $k \neq 8$

$$\underbrace{(k-8)}_{\neq 0} \underbrace{z}_{=0} = 0 \qquad \boxed{z=0}$$

$\Rightarrow$ $-3y - z = -2$ $\qquad \Rightarrow$ $x + y + 2z = 2$

$-3y = -2$ $\qquad x + \frac{2}{3} = 2$

$y = \frac{2}{3}$ $\qquad x = 2 - \frac{2}{3}$

$x = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ $k \neq 8 \rightarrow C.S = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

Como ya hallamos las soluciones para todos los valores de K, responderemos las preguntas:

a) Para $k \in \mathbb{R} - \{8\}$

la solución es $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

b) Para $k = 8$

$(5y-2; y; 2-3y)$, $y \in \mathbb{R}$

c) No hay valor de k para que el sistema no tenga solución

4