ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PUCP

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

ENTREGADO

07 JUN 2018

# Práctica

| Año | | | | Número | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 8 | 3 | 2 | 4 | 9 |

Código de alumno

Maceda Virhuez Leonardo Jesus

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Práctica N°: P3

Horario de práctica: P 119

Fecha: 31/05/18

Nombre del profesor: J. Flores

Nota

18

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales)

## INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS
**GENERALES**
**CIENCIAS**

PONTIFICIA
**UNIVERSIDAD**
**CATÓLICA**
DEL PERÚ

# FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA

SEMESTRE ACADÉMICO 2018-1

Horario: 113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,125,126 y B125

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores del curso.

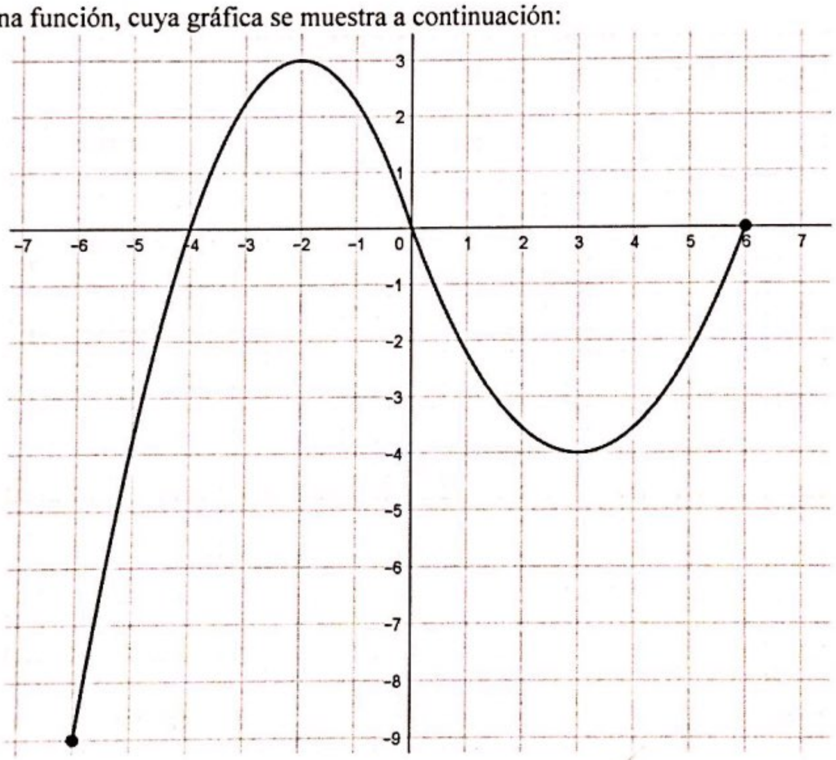
**ADVERTENCIAS:**

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

**INDICACIONES:**

- Tiempo de duración: 1 hora y 50 minutos.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros ni calculadoras.
- Explique detalladamente las soluciones.
- La presentación, la ortografía, y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

1. Sea $f$ una función, cuya gráfica se muestra a continuación:




Esboce la gráfica de la función $h$ definida por $h(x) = -f(-x+5)+2$, mediante transformaciones de funciones e indique su dominio y su rango. 4 puntos

2. Sean las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{x}, \;\; x \geq 0$$
$$g(x) = 4 - 2x^2, x \geq 0$$

a) Halle la función $f \circ g$. 2 puntos

b) Esboce la gráfica de $f \circ g$ y $(f \circ g)^{-1}$ en un mismo plano cartesiano, e indique el dominio y el rango de $(f \circ g)^{-1}$. 2 puntos

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x - 1\,, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0.5x - 2\,, & \text{si} -6 < x < 2 \end{cases};$$

a) Demuestre que $f$ es una función inyectiva, usando la definición. 2.5 puntos

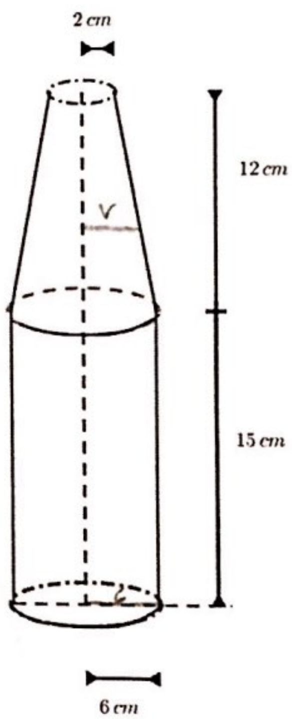
b) Halle la función inversa de $f$, indicando su dominio. 2.5 puntos

4. Se tiene un recipiente con la forma mostrada en la figura.

a) Halle el volumen del líquido almacenado en el recipiente cuando el líquido alcanza una altura $h$. 3 puntos

b) ¿Cuál es la altura que alcanza el líquido en el recipiente cuando su volumen es $692\pi\ cm^3$? 1 punto

Nota: El volumen de un tronco de cono es $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, donde $R$ es el radio de la base mayor, $r$ es el radio de la base menor y $h$ es la altura del tronco de cono.




5. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente su respuesta:

a) Si $f$ es una función creciente entonces la función $g(x) = -f(-x)$ es decreciente. 1.5 puntos

b) Si $f$ es una función impar definida para todo $x \in [-2,2]$, entonces $f$ admite función inversa. 1.5 puntos

Coordinadora de práctica: Iris Flores

San Miguel, 31 de mayo de 2018

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$f(x)$

$f(-x)$

$f(-(x-5))$

$-f(-(x-5))$

$-f(-(x-5))+2$

$f(x)$

$f(-x)$

$f(-(x-5))$

$-f(-(x-5))$

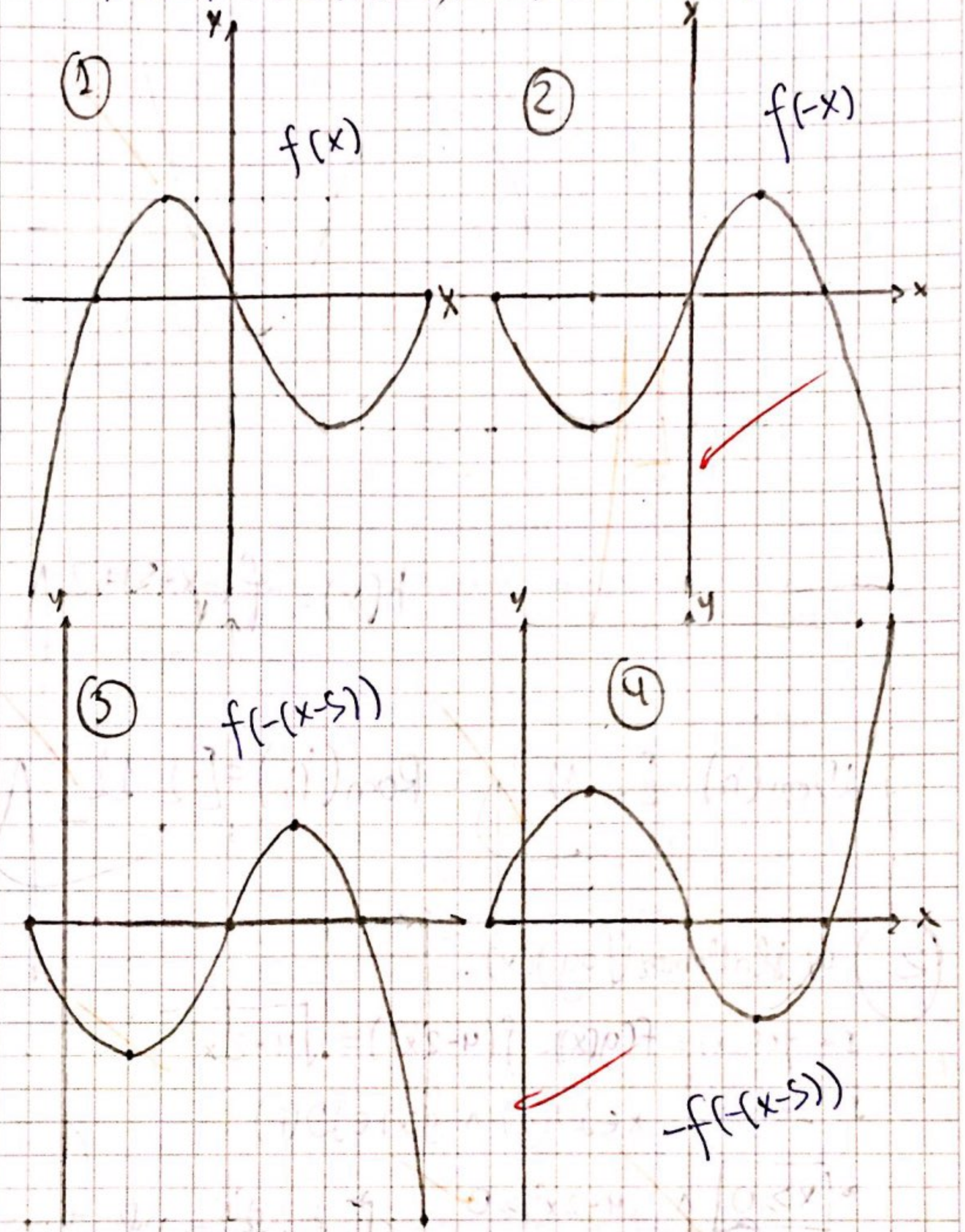
$-f(-(x-5))+2$

$F(-(x-5))$

# Presente aquí su trabajo

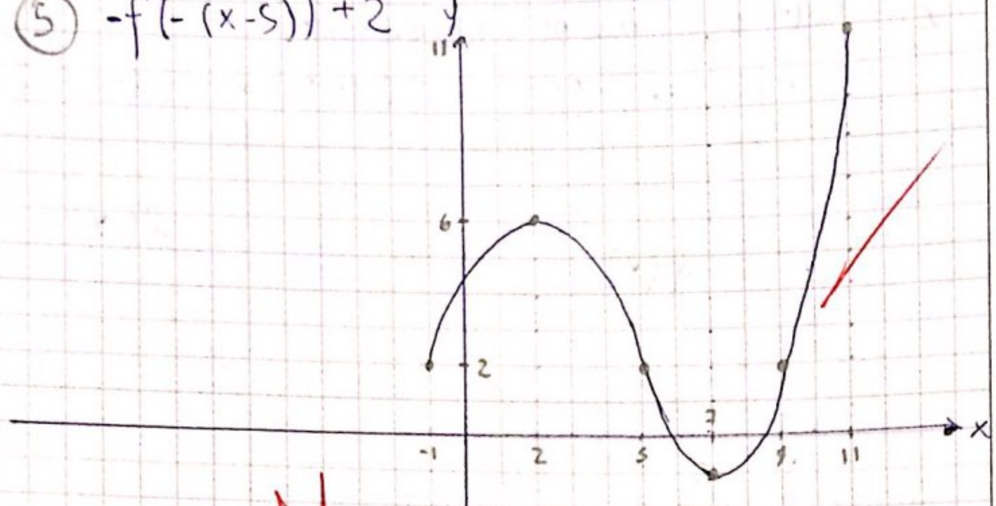
1) Transformamos siguiendo el procedimiento

$f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-(x-5)) \rightarrow -f(-(x-5)) \rightarrow -f(-(x-5))+2$



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5) $-f(-(x-5))+2$




$h(x) = -f(-x+5)+2$

$Dom(h) = [-2, 12] \wedge Ran(h) = [-1; 12]$

2) a) Hallamos $(f \circ g)(x)$:

I → $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(4-2x^2) = \sqrt{4-2x^2}$

I - Dominio: $x \in D(g) \wedge g(x) \in D(f)$

→ $\boxed{x \geq 0}$ (B) $\wedge$ $4-2x^2 \geq 0$

$2x^2-4 \leq 0$

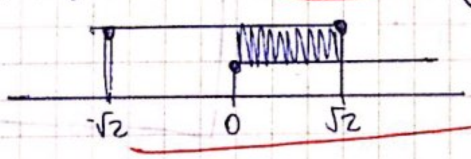
$2(x^2-2) \leq 0$

$2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$

$+ \quad -\sqrt{2} \quad - \quad \sqrt{2} \quad +$

$\boxed{x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}$ (A)

Intersectamos (A) $\wedge$ (B)




Luego: $\boxed{(f \circ g)(x) = \sqrt{4-2x^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}}$

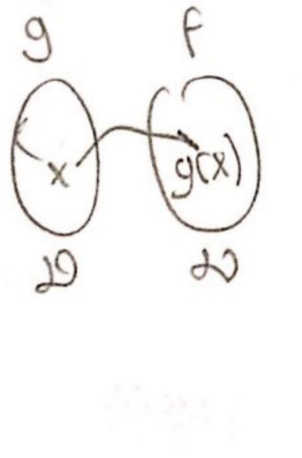
$f(x) = \sqrt{x}, \ x \geq 0$

$g(x) = 4-2x^2, \ x \geq 0$

$2x^2-4 \leq 0$

$2(x^2-2)$

$2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$f(x)=$

$y=\sqrt{4-2x^2}$

$y^2=4-2x^2$

$y^2-4=-2x^2$

$2x^2=4-y^2$

$x=\sqrt{\frac{4-y^2}{2}}$

$\sqrt{4-2x^2}$

$2x^2+y^2=4$

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$

$a=2$

$b=\sqrt{2}$

$x_1^2-2x_1=x_2^2-2x_2$

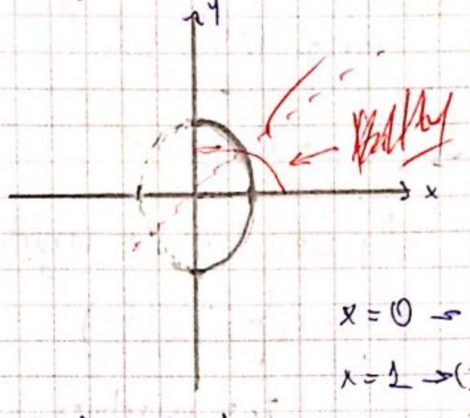
$x_1(x_1-2)=x_2(x_2-2)$

b) $(f\circ g)(x)=\sqrt{4-2x^2}=y$ despejamos para dar forma a la gráfica.

$\Rightarrow y^2=4-2x^2$

$2x^2+y^2=4 \rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ La gráfica será parte de una Elipse

Esbozamos provisoriamente




(Eje focal en el eje y)

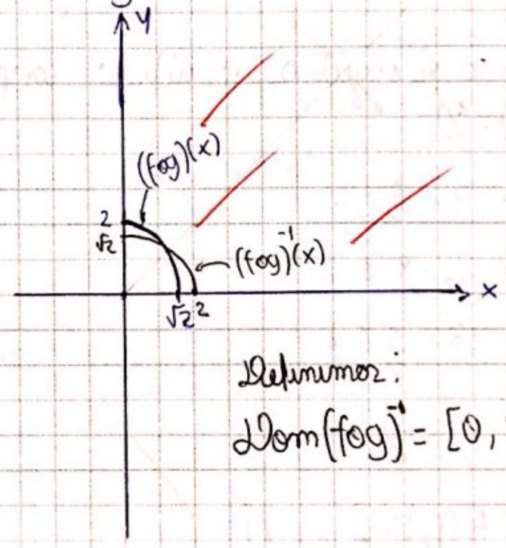
$a=2 \quad b=\sqrt{2}$

Vamos a probar valores para ver donde estará la gráfica

$x=0 \rightarrow (f\circ g)x=\sqrt{4}=2$

$x=1 \rightarrow (f\circ g)x=\sqrt{2}$

Por la regla de correspondencia no presenta el signo menos, además por los valores obtenidos corroboramos que la gráfica de $f\circ g$ es así:




$(f\circ g)(x) \Rightarrow$ azul

Graficamos $(f\circ g)^{-1}(x)$ de color negro, espejando la gráfica azul con la recta $y=x$

Definimos:

$Dom(f\circ g)^{-1}=[0,2] \wedge Ran(f\circ g)^{-1}=[0,\sqrt{2}]$

3 a) Aplicamos la definición en los dos tramos

- $f_1(x)=3x^2-6x-1, \quad 2\leq x\leq 3$

Sean $x_1$ y $x_2 \in Dom(f_1)$, luego, debemos probar que

$$\boxed{f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2}$$

$\rightarrow 3x_1^2-6x_1-\cancel{1}=3x_2^2-6x_2-\cancel{1}$

$3x_1^2-6x_1=3x_2^2-6x_2 \quad (\div 3)$

$x_1^2-2x_1=x_2^2-2x_2$

Presente aquí su trabajo

$f_1(x) = 3x^2 - 6x - 2 \rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$

$f_1(x) = 3(x-1)^2 - 4$

$\rightarrow 3(x_1 - 1)^2 - \cancel{4} = 3(x_2 - 1)^2 - \cancel{4}$

$\cancel{3}(x_1 - 1)^2 = \cancel{3}(x_2 - 1)^2$

$\sqrt{(x_1-1)^2} = \sqrt{(x_2-1)^2} \rightarrow \{x_1 \wedge x_2\} \in [2;3]$, la operación será POSITIVA

$|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$

$x_1 - \cancel{1} = x_2 - \cancel{1} \rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

~~Por lo tanto, demostramos~~ El primer tramo es inyectivo

- $f_2(x) = \frac{x}{2} - 2$, $-6 < x < 2 \rightarrow \{x_1 \wedge x_2\} \in D(f_2)$

$\frac{x_1}{2} - \cancel{2} = \frac{x_2}{2} - \cancel{2}$ $f_2$ es inyectiva

$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \rightarrow \cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

Luego, el segundo tramo es inyectivo. Por último, comprobemos si $R(f_1) \cap R(f_2) = \emptyset$

$f_1 \rightarrow \boxed{y = 3(x-1)^2 - 4}$ $f_2 \rightarrow y = \frac{x}{2} - 2$

$2 \leq x \leq 3$ $-6 < x < 2$

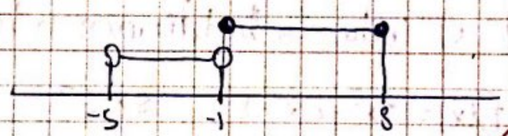
$1 \leq x - 1 \leq 2$ $-3 < \frac{x}{2} < 1$

$1 \leq (x-1)^2 \leq 4$ $-5 < \frac{x}{2} - 5 < -1$

$3 \leq 3(x-1)^2 \leq 12$

$-1 \leq 3(x-1)^2 - 4 \leq 8$ $R(f_2) = ]-5;-1[$

$R(f_1) = [-1;8]$ Luego:




No hay intersección entre los ~~gráficos, luego~~ rangos, por lo tanto $f$ ES INYECTIVA

b) Hallamos las reglas de correspondencia de $f^{-1}$

$f_1 \rightarrow y = 3(x-1)^2 - 4 \rightarrow \frac{y+4}{3} = (x-1)^2$

$y + 4 = 3(x-1)^2$ $\rightarrow x = \sqrt{\frac{y+4}{3}} + 1$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$3x^2 - 6x - 1$

$3(x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$

$x_1 > x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

$36 \times 15$

$180$

$36+$

$540$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\rightarrow f_1^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}} + 2$ ✓

(f₂) → $y = \frac{x}{2} - 2$ → $2y + 4 = x$

$y + 2 = \frac{x}{2}$ ↳ $f^{-1}(x) = 2x + 4$

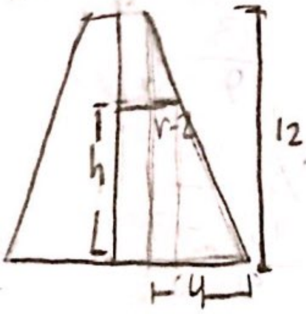
Luego, definimos el dominio de $f^{-1}$ con el rango de $f$ y queda así:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x+4}{3}} + 2, & -1 \leq x \leq 8 \\ 2x+4 ; & -5 < x < -2 \end{cases}}$$

5

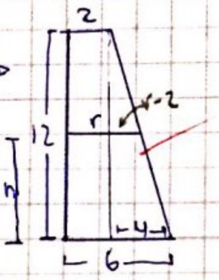
(4) a) Son dos tramos: $T_1$ y $T_2$

$T_1$ → El radio será constante, lo que varía es h, el volumen sería $V = \pi r^2 h = 36\pi h$





$T_2$ →





Por semejanza de triangulos, definimos el r en función de h

$\frac{12}{4} = \frac{(12-h)}{(r-2)}$ ?

$r - 2 = \frac{12-h}{3} \rightarrow r = \frac{12-h}{3} + 2$

$\boxed{r = \frac{18-h}{3}}$ $\frac{33-4}{3}$

Volumen del $T_2$ sería

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(36 + \left(\frac{18-h}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{18-h}{3}\right)\right) = \frac{\pi h}{3}\left[72 - h + \left(\frac{18-h}{3}\right)^2\right]$$

↓

Debemos sumar el volumen del cilindro: $540\pi\ cm^3$

Luego, la función sería (siguiente hoja)

$$\cancel{V(h) = \begin{cases} 36\pi h, & 0 \leq h < 15 \\ \frac{\pi h}{3}\left(36 + \left(\frac{18-h}{3}\right)^2 + 2(18-h)\right) \end{cases}}$$

$$\cancel{V(h) = \begin{cases} 36\pi h, & 0 \leq h \leq 15 \\ \frac{\pi h}{3}\left[72 - h + \left(\frac{18-h}{3}\right)^2\right], & 15 \leq h \end{cases}}$$

18
×2
36
$36\pi r^2 h$
72

$\frac{12}{h} =$

$6 + 3\cancel{6} - h$

$\left(72 - h + \left(\frac{18-h}{3}\right)^2\right)$

$36\pi(15)$

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

$$V(h)=\begin{cases}36\pi h, & 0\le h<15\\ 540\pi+\dfrac{\pi h}{3}\left[72-h+\left(\dfrac{18-h}{3}\right)^2\right], & 15\le h\le 27\end{cases}$$

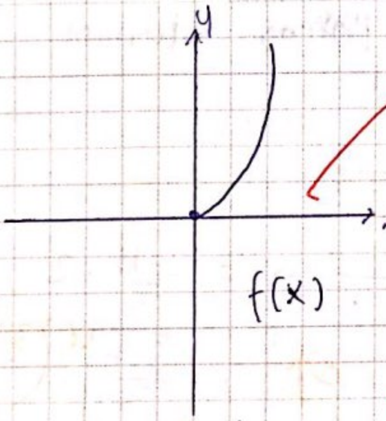
b) ~~Consideremos~~ supongamos el primer tramo:

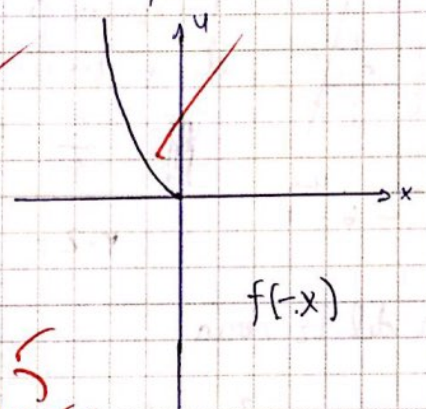
$92\cancel{\pi}\,cm^3 = 36\cancel{\pi}h\ cm^3$

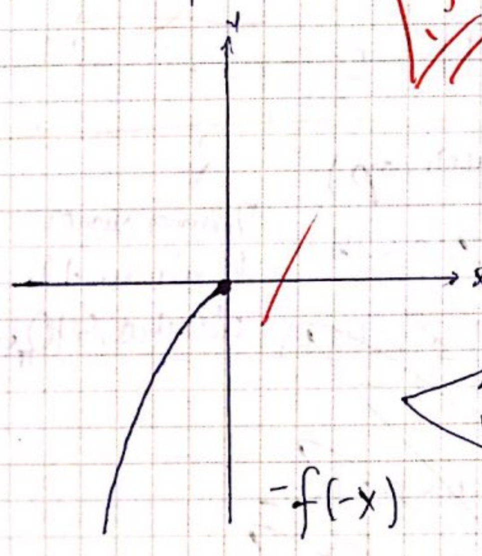
$h=\dfrac{92}{36}=\dfrac{23}{9}\approx 2{,}56\ cm$ (como el valor está entre 0 y 15, realmente se encuentra en el primer tramo)

∴ La altura que alcanza el líquido es de aproximadamente $2{,}56\ cm$

5) a) FALSO. Consideremos el caso particular de la función $f(x)=x^2,\ x\ge 0$




Como se puede observar, luego de transformar la función $f(x)$ a $-f(-x)$, obtuve una FUNCIÓN CRECIENTE pues si $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, luego, la proposición es FALSA

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$15+12=27$

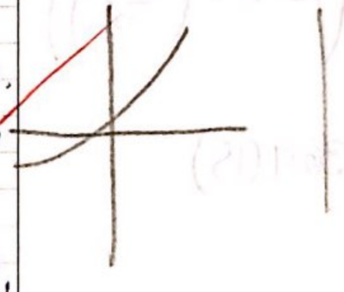
$\dfrac{92}{36}$

$92 \div 4 = 23$; $12$

$\dfrac{23}{9}$

$23 \div 9 = 2{,}56$; $-18$; $50$; $5$

$f(x)=-f(-x)$



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

# Presente aquí su trabajo

b) VERDADERO. Si f es impar, sabemos que

$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

Falso

Para que admita inversa, debe ser inyectiva, es decir:

Para $x_1 \wedge x_2 \in D(f) = [-2,2]$

$$f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$

pero no es dato del problema

Comprobemos: $f(x_1) = f(x_2) \to \boxed{f(x_1) = -f(-x)}$

Ojo

¿? $-f(-x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ Multiplicamos por $-1$

$\boxed{f(-x_1) = -f(x_2)}$ → Como llegamos a esta relación y f es una función IMPAR,

$\boxed{x_1 = x_2}$

Luego, la función es inyectiva y por lo tanto tiene INVERSA

$x \in [-2,2]$

$f(x) = -f(-x)$

$f(-x) = -f(x)$

$f(x_1) = f(x_2)$ $\quad x_1 = y_2$

$-f(-x_1) = f(x_2)$

$-f(x_2) = f(-x_1)$