PUCP

Estudios
Generales Ciencias

Fundamentos de Cálculo

Primera Práctica Calificada

Semestre Académico 2024 -1

Horarios: 0101 al 0116.

Duración: 110 minutos
Elaborada por todos los profesores.

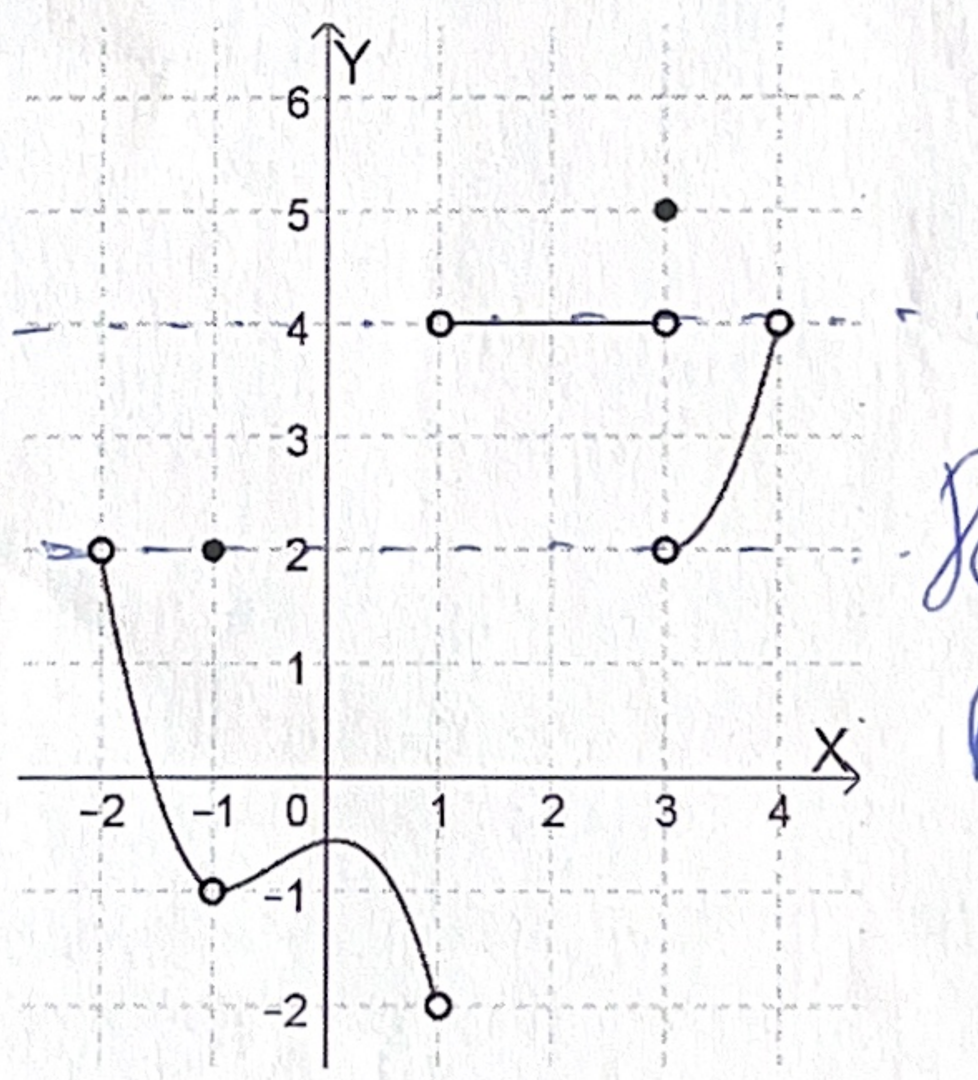
Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Si se detecta omisión al punto anterior, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

Indicaciones:

- El desarrollo de todos los ejercicios siguientes debe realizarse **detallando sus procedimientos** y justificando todas sus respuestas.
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros, calculadoras, tablas o computadora personal.
- La presentación, ortografía y gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

1. En la siguiente figura se muestra la gráfica de una función f:



Dom: $]-2;4[-\{1\}$

Rang: $]-2;4[\cup\{5\}$

$]1;3[$

Determine:

a) El dominio y el rango de f. (2 puntos)

b) Los valores máximo y mínimo de f (en caso existan). (1 punto)

c) El conjunto de todos los valores de x para los cuales $f(x)=4$. (1 punto)

d) El conjunto de todos los valores de x para los cuales $2 \leq f(x) < 4$. (1 punto)

2. Halle el conjunto solución de las inecuaciones:

$-\frac{1}{2} < \frac{2+2}{-2+1}$ $\quad$ $\frac{0+1}{-1} > -1$

a) $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{2-x}{x+1}$. $\quad$ $]-1;0[$ (2 puntos)

$-\frac{1}{2} \leq \frac{4}{-1}$

b) $\dfrac{|x+1|-x}{x} > x$. (3 puntos)

$\frac{1}{2} \geq 4$

3. Sea a una constante real. Considere la inecuación:

$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{a\,x} \geq 0.$$

Resuelva en $\mathbb{R}$ la inecuación cuando:

a) $a = 2$. (1.5 puntos)

b) $a < 0$. (1.5 puntos)

4. Halle el dominio (implícito) de la función con regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{7x - x^2 - 6}}{\sqrt{|2x - 5| - 2x}}.$$ (3 puntos)

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 + y^2 > x + y$. (1 punto)

b) Existen $a > 0$, $b > 0$, tales que $a - \frac{1}{b} < 0$. (1 punto)

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = x - 1$. (1 punto)

d) Una condición necesaria para que $x^2 + y^4 > 9$ es que $x + y^2 > 3$. (1 punto)

San Miguel, 18 de abril de 2024.

PUCP

Año 2024 Número 1028

Código de alumno

Práctica

Gastelo Marchán Juan Antonio

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: Fundamentos del Cálculo

Práctica Nº: 1

Horario de práctica: P102

Fecha: 18/04/24

Nombre del profesor: R. Ramos

Nota

18

Firma del jefe de práctica

Nombre y apellido: (iniciales) FBH

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

1- a) Dom f: $]-2;1[\,\cup\,]1;4[$ 2

Rang f: ~~$]-2;4[\,\cup\{5\}$~~ $]-2;4]\cup\{5\}$

b- Valor máximo: $F(x)=5$ 1

Valor mínimo: No existe.

c) $F(x)=4$ cuando $x\in\,]1;3[$ 1

d) ~~$\Delta\ F(x)$~~ Si $2\leq F(x)<4$, ~~$x\in\{2\}$~~ $x\in\{-1\}\cup\,]3;4[$ 1

2- a) $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{2-x}{x+1}$ Rest: $x\neq 0$; $x+1\neq 0$, $x\neq -1$

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{2-x}{x+1}\leq 0$

$\dfrac{1(x+1)}{x(x+1)}-\dfrac{2-x(x)}{x+1(x)}$

$\dfrac{x+1-(x)(2-x)}{x(x+1)}\leq 0$

$\dfrac{x+1-(2x-x^2)}{x(x+1)}\leq 0$ 2,0

$\dfrac{x+1-2x+x^2}{x(x+1)}\leq 0$

$x^2-2x+x+1$

x^2-x+1

$\dfrac{x^2-x+1}{x(x+1)}\leq 0$ → $\Delta=(-1)^2-4(1)(1)$

$\Delta=1-4=-3<0$

$\Delta<0$

$a>0$, la expresión es siempre positiva

~~$x(x+1)<0$~~

~~P.C $\begin{cases}x=0\\x+1=0;\ x=-1\end{cases}$~~

$x(x+1)<0$

P.C $\begin{cases}x=0\\x=-1\end{cases}$

$x\neq-1$ $x\neq 0$

+	−	+
	-1	0

Ley de signos:

x	−	−	+
$x+1$	−	+	+

C.S: $]-1;0[$

6) $\frac{|x+1|-x}{x} > x$ Restricción: $x \neq 0$

$\frac{|x+1|-x}{x} - x > 0$

$\frac{|x+1|-x-x^2}{x} > 0$

$\frac{x^2+x-|x+1|}{x} < 0$

3,0

$x < -1$ -1 $x \geq -1$

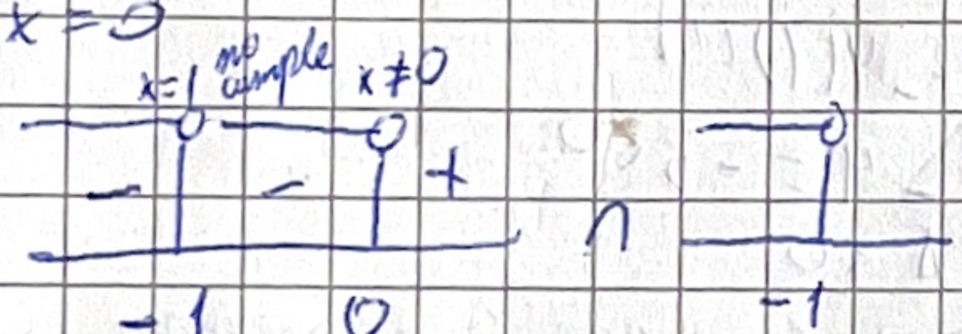
$0 > \frac{x^2+x-(-x-1)}{x} \wedge x<-1$; $0 > \frac{x^2+x-(x+1)}{x} \wedge x \geq -1$

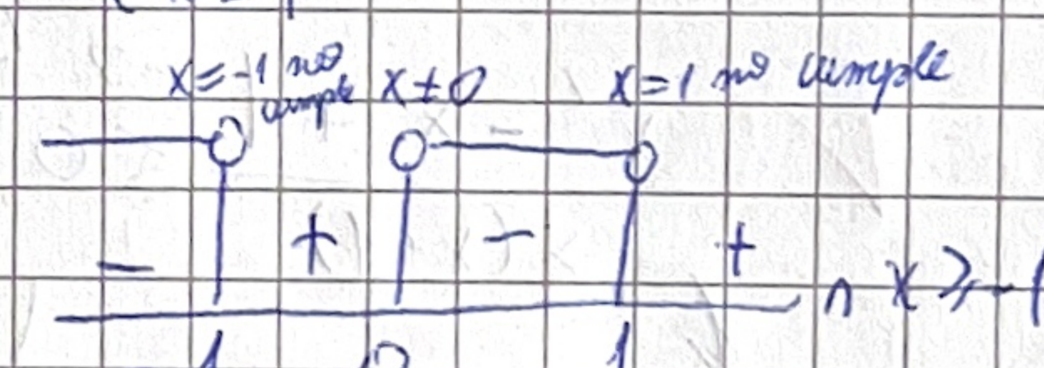
$\frac{x^2+x+x+1}{x} < 0 \wedge x<-1$; $\frac{x^2+x-x-1}{x} < 0 \wedge x \geq -1$

$\frac{x^2+2x+1}{x} < 0 \wedge x<-1$; $\frac{x^2-1}{x} < 0 \wedge x \geq -1$

$\frac{(x+1)^2}{x} < 0 \wedge x<-1$; $\frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0 \wedge x \geq -1$

P.C $\begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$; P.C $\begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$

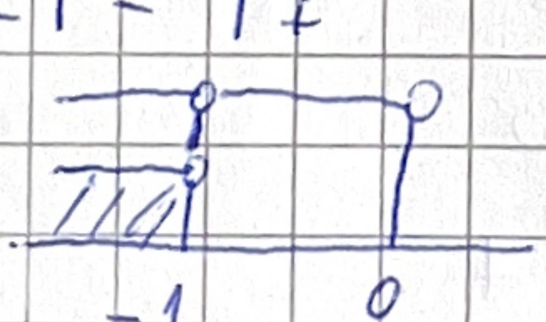




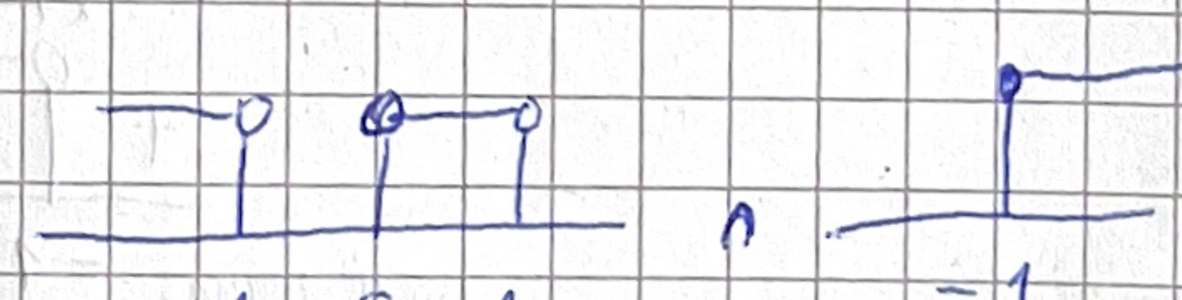
Ley de signos:

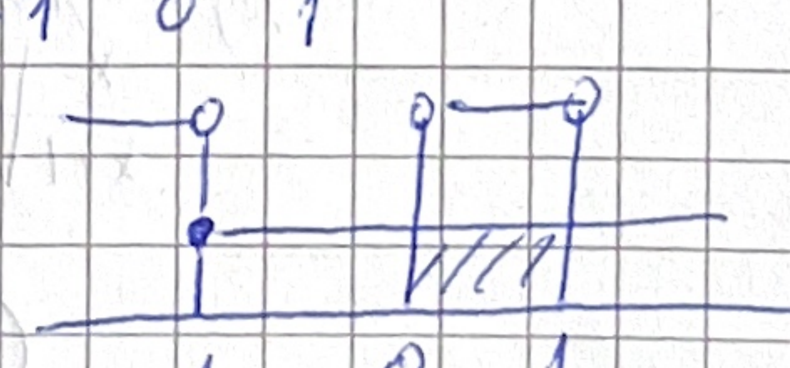
$(x+1)^2$	+	+	+
x	-	-	+

$x-1$	-	-	-	+
x	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+



C.S₁: $]-\infty;-1[$





C.S₂: $]0;1[$

C.S final: $]-\infty;-1[\cup]0;1[$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$x^2 - 2x - 8$

$\begin{array}{ll} x & -5 \\ x & 3 \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} -5x \\ +3x \\ \hline -2x \end{array}$

$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a^2 - \frac{a^2}{2}$

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{-2a^2}{1} + \frac{-a^2}{2}$

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{-4a^2 - a^2}{2}$

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{5a^2}{2}$

$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$a = 1$
$b = -a$
$c = -2a^2$

$x = \frac{+a \pm \sqrt{a^2 - 4(1)(-2a^2)}}{2}$

$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2}$

$x = \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{2}$

$x = \frac{a \pm 3a}{2}$

$x = \frac{4a}{2} \;;\; x = \frac{2a}{2}$

$x = 2a \;;\; x = a$

$x^2 - ax - 2a^2$

$\begin{array}{ll} x & -2a \\ x & a \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} -2ax \\ +ax \end{array}$

3: $a \in \mathbb{R}$

$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{ax} \geq 0 \rightarrow$ Rest: $ax \neq 0$; $a \neq 0$; $x \neq 0$

a) $a = 2$

$\frac{x^2 - 2x - 2 \cdot 4}{2x} \geq 0$

$\frac{x^2 - 2x - 8}{2x} \geq 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = (x-5)(x+3)$

$\begin{array}{ll} x & -5 \\ x & 3 \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} -5x \\ +3x \\ \hline -2x \end{array}$

0,0

$\cancel{x^2 - 2x + 1}$ $\frac{(x-5)(x+3)}{2x} \geq 0$ P.C $\begin{cases} x = 5 \\ x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

$x = -3$ ✓ $x \neq 0$ $x = 5$ ✓

	−	+	−	+
	-3	0	5	
$x-5$	−	−	−	+
$2x$	−	−	+	+
$x+3$	−	+	+	+

Error al factorizar

C.S: $[-3; 0[\cup [5; +\infty[$

b) $a < 0$

$\cancel{\frac{x^2 - ax - 2a^2}{ax} \geq 0}$

$x^2 - ax - 2a^2 = (x - 2a)(x + a)$

$\begin{array}{ll} x & -2a \\ x & a \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} -2ax \\ +ax \\ \hline -ax \end{array}$

$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{ax} \geq 0 \rightarrow x^2 - ax - 2a^2$

$a = 1 \quad b = -a \quad c = -2a^2$

P.C: $x = \frac{+a \pm \sqrt{(-a)^2 + 4(2a^2)(1)}}{2} \rightarrow$ $\Delta = (-a)^2 - 4(1)(-2a^2)$; $\Delta = 8a^2 + a^2$; $\Delta = 9a^2$

$\frac{(x-2a)(x+a)}{ax} \geq 0$

$x = \frac{a \pm \sqrt{8a^2 + a^2}}{2}$

$x = \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{2} \rightarrow$ en $\mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$; $9a^2 \geq 0$; $\Delta = 9a^2 \geq 0$

1,0

$x = 2a$ ✓ $x \neq 0$ $x = -a$ ✓

	−	+	−	+
	$+2a$	0	$-a$	
$x-2a$	−	+	+	+
ax	−	−	+	+
$x+a$	−	−	−	+

$x = \frac{a \pm 3a}{2}$

$x = \frac{4a}{2} = 2a$; $x = \frac{-2a}{2} = -a$

C.S: $[2a; 0[\cup [a; +\infty[$

P.C $\begin{cases} x = 2a \;; \\ x = 0 \;; \\ x = -a \;; \end{cases}$ $\cancel{x = a} \rightarrow \cancel{(x-2a)(x-a)}$

$\rightarrow$ $a < 0$; $2a < 0$; $0 < -a$

$2a < 0 < -a$

Presente aquí su trabajo

4: $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{7x-x^2-6}}{\sqrt{|2x-5|-2x}}$

Para que $f(x)$ exista:

$7x-x^2-6 \geq 0 \cap |2x-5|-2x \geq 0 \cap \sqrt{|2x-5|-2x} \neq 0$

$x^2-7x+6 \leq 0 \cap |2x-5| \geq 2x \cap |2x-5|-2x \neq 0$

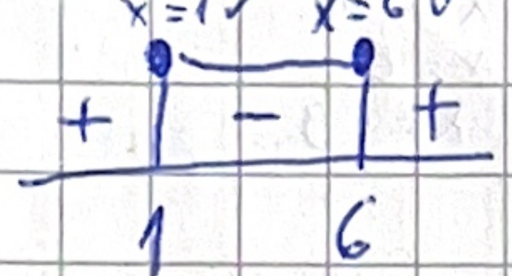
$\begin{matrix} x & -6 \\ x & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -6x \\ -x \\ -7x \end{matrix}$ $\cap\ (2x-5 \geq 2x \cup 2x-5 \leq -2x) \cap |2x-5| \neq 2x$

$\cap\ (-5 \geq 0 \cup 4x \leq 5) \cap (2x-5 \neq 2x \cap 2x-5 \neq -2x)$

$(x-6)(x-1) \leq 0 \cap (\ \emptyset \cup x \leq \frac{5}{4}) \cap (-5 \neq 0 \cap 4x \neq 5)$

$\cap\ (\mathbb{R} \cap x \neq \frac{5}{4})$

$x=1$ $x=6$

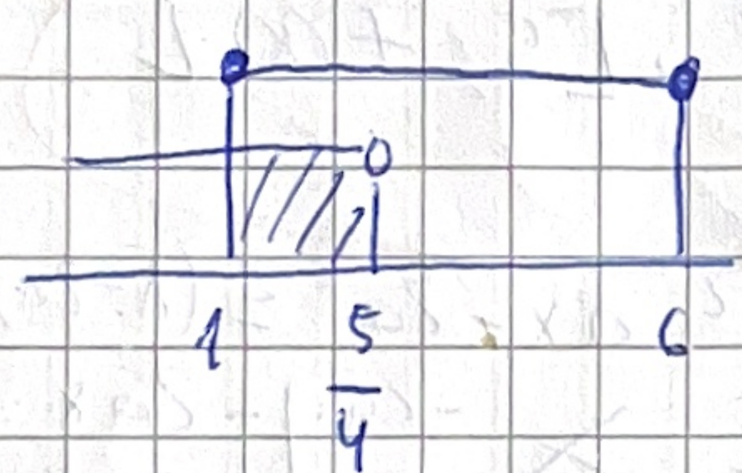


$\cap \quad x \leq \frac{5}{4} \quad \cap \quad x \neq \frac{5}{4}$

$x-6$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$

$\cap \quad x < \frac{5}{4}$

$1 \leq x \leq 6 \quad \cap \quad x < \frac{5}{4}$



Dom f: $[1; \frac{5}{4}[$

3

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$|-3| = b = 3$

$|a| = b$

$a = +b$

$a = -b$

$-3 = +b$

$-3 = -b$

$|b| = 3$

$b = 3$

$b = -3$

$|2(\frac{5}{4})-5| - 2(\frac{5}{4}) =$

$= |\frac{5}{2}-5| - \frac{5}{2} =$

$= |\frac{5}{2}-\frac{10}{2}| - \frac{5}{2} =$

$= |-\frac{5}{2}| - \frac{5}{2} =$

$= \sqrt{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}} =$

$= \sqrt{0} = 0$

$|2x-5| - 2x \geq 0$

$2x-5 > 2x \cup 2x-5 < -2x$

$\emptyset \cup 4x < 5$

$x < \frac{5}{4}$

$|2(2)-5| - 2(2)$

$|-1| - 4$

$1-4 = \sqrt{-3} = \emptyset$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$(0)^2 + (1)^2 > 0+1$

$1 > 1$

$a = 1$

$b = \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} < 0$

$1 - 1\left(\frac{2}{1}\right) < 0$

$1 - 2 < 0$

$x^2 + 2xy^2 + y^4 > 3^2$

$x^2 + y^4 > 9 - 2xy^2$

$-2xy^2 > 0$

$0 > 2xy^2$

$y \neq 0$

$0 > 2x$

$0 > x$

$(3)^2 + (1)^4 > 9$

$9 + 1 > 9$

$3 + (1)^2 > 3$

$(-3)^2 + (1)^4 > 9$

$9 + 1 > 9$

$-3 + (1)^2 > 3$

$-3 + 1 > 3$

$-2 > 3$

$0 > 5$

Presente aquí su trabajo

5: a) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 + y^2 > x + y$

Por contraejemplo:

Si $x = 0 \in \mathbb{R}$; $y = 1 \in \mathbb{R}$ $\quad (0)^2 + (1)^2 > 0 + 1$

1,0

$1 > 1 \rightarrow$ Falso

La proposición es falsa.

b) Existen $a > 0$, $b > 0$, tales que $a - \frac{1}{b} < 0$

Existen $a = 1 > 0$; $b = \frac{1}{2} > 0$

1,0

$1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} < 0$

$1 - 2 < 0$

La proposición es verdadera. $\quad -1 < 0 \rightarrow$ Verdadero

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, Existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / xy = x - 1$

$y = \frac{x-1}{x}$; $x \neq 0$

$y = 1 - \frac{1}{x}$; $x \neq 0$

1,0

Para $x = 0 \in \mathbb{R}$, no existe ningún $y \in \mathbb{R}$ que cumpla $xy = x - 1$.

~~∴ No para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = x-1$.~~

La proposición es falsa.

d) Una condición necesaria para que $x^2 + y^4 > 9$ es que $x + y^2 > 3$

Si $x^2 + y^4 > 9$, entonces $x + y^2 > 3$

Por contraejemplo:

Si $x = -3$; $y = 1$, se cumple $(-3)^2 + (1)^4 > 9$, pero no se cumple $-3 + 1^2 > 3$

$9 + 1 > 9 \quad\quad -2 > 3$ ✗ Falso

$10 > 9$ ✓

1,0

La proposición es falsa.