ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PUCP

Primer examen

Año	Número
2022	0427

Código de alumno

Iturrizaga Robles, David Matthew
Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FCAL

Horario: 105 – 1

Fecha: 16 / 05 / 2022

Nombre del profesor: Roy Sánchez

Nota
20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

EXAMEN PARCIAL

SEMESTRE ACADÉMICO 2022 -1

Horarios del Turno 1. **Duración: 3 horas**

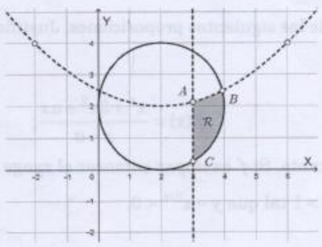
Prueba elaborada por todos los profesores del curso.

INDICACIONES:

- Todo dispositivo electrónico deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos durante la evaluación.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.
- No se pueden usar apuntes de clase, libros, tablas, calculadora o computadora personal.

---

1. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por una parábola, una circunferencia y una recta como se muestra a continuación.



a) Escriba las ecuaciones de las curvas que acotan la región $\mathcal{R}$. **(1.5 ptos)**

b) Halle las coordenadas de los puntos A y B. **(1.5 ptos)**

c) Describa la región $\mathcal{R}$ en términos de inecuaciones. **(2 ptos)**

Continúa...

2. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{(x-3)^3} - 1, & x \geq 3 \\ \\ \sqrt{6x - x^2} + 1, & 0 < x < 3. \end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de f, halle los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados y determine el rango de f. **(3 ptos)**

b) Halle el valor mínimo de f. **(1 pto)**

3. Sea f la función **(4 ptos)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x > 2 \\ x^2 - 3x + 5, & x \leq 1 \end{cases}$$

y sea $g(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

Halle $f \circ g$, especificando el dominio de cada tramo, y halle su rango.

4. Dada la función **(4 ptos)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2}, & 0 < x \leq 8 \\ \\ \sqrt{1 + x^2} - 8, & 8 < x < 10. \end{cases}$$

Halle la regla de correspondencia, esboce la gráfica y halle el rango de la función impar

$$h :]-10, 10[\to \mathbb{R},$$

tal que $h(x) = f(x)$ para $x \in]0, 10[$.

5. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su procedimiento en cada caso.

a) Sea la función **(2 ptos)**

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + ax}{x - a},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante. Si f es impar entonces el rango de f es $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Para todo $x > 1$, existe $y > 1$ tal que $y - x^{3/4} < 0$. **(1 pto)**

Prof. Roy W. Sánchez Gutiérrez
Coordinador del curso

San Miguel, 13 de mayo de 2022

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$16-4(-16)$

$-4 \pm$

144
16
128

$16-4(-16)$
80
$\sqrt{80}$
$4\sqrt{5}$

$16-4(36-16\sqrt{5})$
$-128+64\sqrt{5}$
$64(\sqrt{5}-2)$

Presente aquí su trabajo

1) a)

5

I. $\mathcal{C}: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ → Circunferencia

II. $P: (x-2)^2 = 4p(y-2) \wedge (-2;4) \in P$

$16 = 4p(2) \rightarrow p=2$

$P: (x-2)^2 = 8(y-2)$ → Parábola

III. $\mathcal{L}: x=3$ → Recta vertical

b) $\mathcal{L} \cap P$: $1 = 8(y-2)$ → $A(3; \frac{17}{8})$
$y = \frac{17}{8}$

$P \cap \mathcal{C}$: (I) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$
(II) $(x-2)^2 - 8(y-2) = 0$ $)(-1)$

$(y-2)^2 + 8(y-2) - 4 = 0$

$y^2 - 4y + 4 + 8y - 20 = 0$

$y^2 + 4y - 16 = 0$

$y = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2}$ < $-2 \pm 2\sqrt{5}$

* En B; $y = -2+2\sqrt{5}$ (*)

↳ (*) en (II):

$x^2 - 4x + 4 - 8(-4+2\sqrt{5}) = 0$

$x^2 - 4x + 4 + 32 - 16\sqrt{5} = 0$

$x^2 - 4x + 36 - 16\sqrt{5} = 0$

$x = \frac{4 \pm 8\sqrt{(\sqrt{5}-2)}}{2} = 2 \pm 4\sqrt{(\sqrt{5}-2)}$

* En B, $x = 2 + 4\sqrt{(\sqrt{5}-2)}$

$B = (2+4\sqrt{(\sqrt{5}-2)}; -2+2\sqrt{5})$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

c) Curvas (puntos de prueba)

i. $(2;2)$ en $\mathscr{C}: (x-2)^2+(y-2)^2=4$

$\to 0 \leq 4 \quad \to (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 4$

ii. $(2;4)$ en $\mathscr{P}: (x-2)^2 = 8(y-2)$

$\to 0 < 16 \quad \to (x-2)^2 > 8(y-2)$

iii. $x > 3$

$$\mathscr{R}: \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 4 \\ (x-2)^2 > 8(y-2) \\ x > 3 \end{cases}$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

4.0

$\boxed{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{(x-3)^3} - 1, & x \geq 3 \quad (I) \\ \sqrt{6x - x^2} + 1, & 0 < x < 3 \quad (II) \end{cases}$$

(I) $(x-3)^{\frac{3}{4}} - 1$

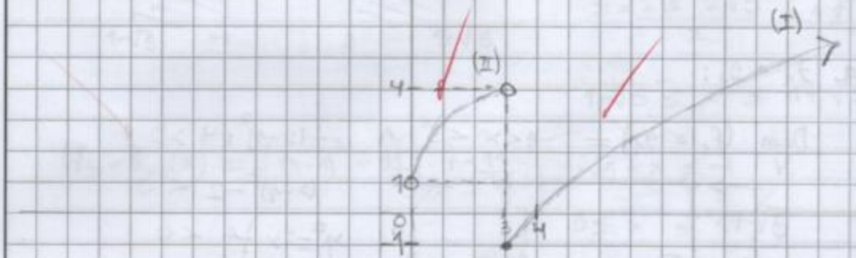
(II) $y - 1 = \sqrt{6x - x^2}$

$(y-1)^2 = -(x^2 - 6x + 9 - 9)$

$(y-1)^2 = -(x-3)^2 + 9$

$C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ → Centro $(3;1)$
→ Radio $= 3$

a)



(I) Función base: i. $x^{\frac{3}{4}}$, $x \geq 0$

ii. $(x-3)^{\frac{3}{4}}$ → 3u a la derecha

iii. $(x-3)^{\frac{3}{4}} - 1$ → 1u hacia abajo

- Corte con Y: No existe

Corte con X: En (I), $(x-3)^{\frac{3}{4}} - 1 = 0$

$(x-3)^{\frac{3}{4}} = 1$

$x = 4$ → $(4;0)$

- Ran f $= [-1; \infty^+[$

b) f mín en $x = 3$ → $f_{mín} = -1$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)

3)

4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x > 2 \quad \dots f_1 \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4}, & x \leq 1 \quad \dots f_2 \end{cases}$$

$$|(x-1)^2-4| = \begin{cases} -(x-1)^2+4, & -1 < x < 3 \quad (\mathrm{I}) \\ (x-1)^2-4, & x \leq -1 \ \vee \ x \geq 3 \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

En (I), $(x-1)^2-4 < 0$

$x^2-2x-3 < 0$

$(x-3)(x+1) < 0 \rightarrow -1 < x < 3$

En (II), $(x-1)^2-4 \geq 0 \rightarrow x \leq -1 \ \vee \ x \geq 3$

$$\hookrightarrow g(x) = \begin{cases} -(x-1)^2+4, & -1 < x < 3 \quad \dots g_1 \\ (x-1)^2-4, & x \leq -1 \ \vee \ x \geq 3 \quad \dots g_2 \end{cases}$$

1. $f_1 \circ g_1$:

$\mathrm{Dom}(f_1 \circ g_1) = -1 < x < 3 \ \wedge \ -(x-1)^2+4 > 2$

$(x-1)^2-2 < 0$

$x^2-2x-1 < 0$

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$

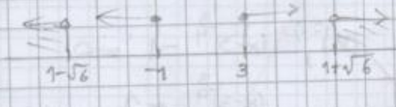
$(f_1 \circ g_1)(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2-3}, \ 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$

2. $f_1 \circ g_2$:

$x^2-2x-5 > 0$

$\mathrm{Dom}(f_1 \circ g_2) = (x \leq -1 \vee x \geq 3) \wedge (x-1)^2-4 > 2$

$x^2-2x-5 > 0$



$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}$

$x < 1-\sqrt{6} \ \vee \ x > 1+\sqrt{6}$

$(f_1 \circ g_2)(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2-5}, \ x < 1-\sqrt{6} \ \vee \ x > 1+\sqrt{6}$

$x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{20}{4}$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

$x^2-2x-3+1-1$

$(x-1)^2-4$

$4-4(-1)$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$4-4(-2)$

$-(x-1)^2+4 \ldots g_1$

$(x-\frac{5}{2})^2+\frac{11}{4} \ldots f_2$

$\left(-(x-1)^2+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

$(x-1)^2-4 \ldots g_2$

$\left((x-1)^2-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

Presente aquí su trabajo

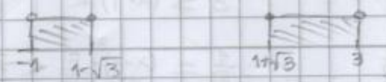
3. $f_2 \circ g_1$:

g_1

$\mathrm{Dom}\,(f_2 \circ g_1) = -1 < x < 3 \ \wedge \ -(x-1)^2+4 \leq 1$

$(x-1)^2 - 3 \geq 0$

$x^2-2x-2 \geq 0$



$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

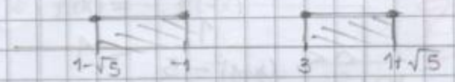
$x \leq 1-\sqrt{3} \ \vee \ x \geq 1+\sqrt{3}$

$(f_2 \circ g_1)(x) = \left((x-1)^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}, \ -1 < x \leq 1-\sqrt{3} \ \vee \ 1+\sqrt{3} \leq x < 3$

4. $f_2 \circ g_2$:

$\mathrm{Dom}\,(f_2 \circ g_2) = (x \leq -1 \ \vee \ x \geq 3) \ \wedge \ (x-1)^2 - 4 \leq 1$

$x^2-2x-4 \leq 0$



$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

$1-\sqrt{5} \leq x \leq 1+\sqrt{5}$

$(f_2 \circ g_2)(x) = \left((x-1)^2 - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}, \ 1-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \ \vee \ 3 \leq x \leq 1+\sqrt{5}$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2-3}, & 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \quad (A) \\ \dfrac{1}{(x-1)^2-5}, & x < 1-\sqrt{6} \ \vee \ x > 1+\sqrt{6} \quad (B) \\ \left((x-1)^2-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}, & -1 < x \leq 1-\sqrt{3} \ \vee \ 1+\sqrt{3} \leq x < 3 \\ \left((x-1)^2-\frac{11}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}, & 1-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \ \vee \ 3 \leq x \leq 1+\sqrt{5} \quad (D) \end{cases}$$

$\mathrm{Ran}\,(D)$:

- $1-\sqrt{5} \leq x \leq -1$

$-\sqrt{5} \leq x-1 \leq -2$

$4 \leq (x-1)^2 \leq 5$

$-\frac{3}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{11}{2} \leq -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \leq \left((x-1)^2-\frac{11}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

$3 \leq (D) \leq 5$

- $3 \leq x \leq 1+\sqrt{5}$

$2 \leq x-1 \leq \sqrt{5}$

$4 \leq (x-1)^2 \leq 5$

$-\frac{3}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{11}{2} \leq -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \leq \left((x-1)^2-\frac{11}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

$\boxed{3 \leq (D) \leq 5}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva cálculos y desa (borrador)

* Ran (C): • $-1 < x \leq 1-\sqrt{3}$

$-2 < x-1 \leq -\sqrt{3}$

$3 \leq (x-1)^2 < 4$

$\frac{1}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{5}{2} < \frac{3}{2}$

$\frac{1}{4} \leq \left((x-1)^2 - \frac{5}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$

$3 \leq (C) < 5$

• $1+\sqrt{3} \leq x < 3$

$\sqrt{3} \leq x-1 < 2$

$3 \leq (x-1)^2 < 4$

$\frac{1}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{5}{2} < \frac{3}{2}$

$\boxed{3 \leq (C) < 5}$

* Ran (B): • $x < 1-\sqrt{6}$

$x-1 < -\sqrt{6}$

$(x-1)^2 > 6$

$(x-1)^2 - 5 > 1 > 0$

$0 < \frac{1}{(x-1)^2-5} < 1$

• $x > 1+\sqrt{6}$

$x-1 > \sqrt{6}$

$(x-1)^2 > 6$

$(x-1)^2 - 5 > 1 > 0$

$\boxed{0 < \frac{1}{(x-1)^2-5} < 1}$

* Ran (A): $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < x-1 < \sqrt{2}$ (Constante)

$f(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$

$f(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$

$f(1) = \frac{1}{3}$

$\boxed{\text{Ran } (A) = \frac{1}{3}}$

$\therefore$ Ran $(f \circ g) =]0;1[\cup [3;5]$

$\frac{1}{(x-1)^2-5}$

$\left((x-1)^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{}$

$\frac{-1}{(x-1)^2-3}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$y^2+16y+64 = x^2+1$

$(y-8)^2 = x^2+1$

$2y$

4)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+64}, & 0 < x \leq 8 \ \ldots \ (\text{I}) \\ \sqrt{x^2+1} - 8, & 8 < x < 10 \ \ldots \ (\text{II}) \end{cases}$$

(I) $2y = \sqrt{-x^2+64}$

$4y^2 = -x^2+64 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{4y^2}{64} = \frac{64}{64}$

E(elipse): $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow$ Cantro $(0;0)$

(II) $(y+8)^2 = x^2+1$

$\hookrightarrow H$(hipérbola): $(y+8)^2 - x^2 = 1 \rightarrow$ Cantro $(0;-8)$

$f(x) = -f(-x)$

2.0

(I) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+64}, \ -8 \leq x < 0$

(II) $f(x) = -\sqrt{x^2+1} + 8, \ -10 < x < -8$

$$F(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2+1} + 8, & -10 < x < -8 \ (\text{III}) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+64}, & -8 \leq x < 0 \ (\text{IV}) \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+64}, & 0 < x \leq 8 \ (\text{I}) \\ \sqrt{x^2+1} - 8, & 8 < x < 10 \ (\text{II}) \end{cases}$$

Gráfica, Rango,

Presente aquí su trabajo

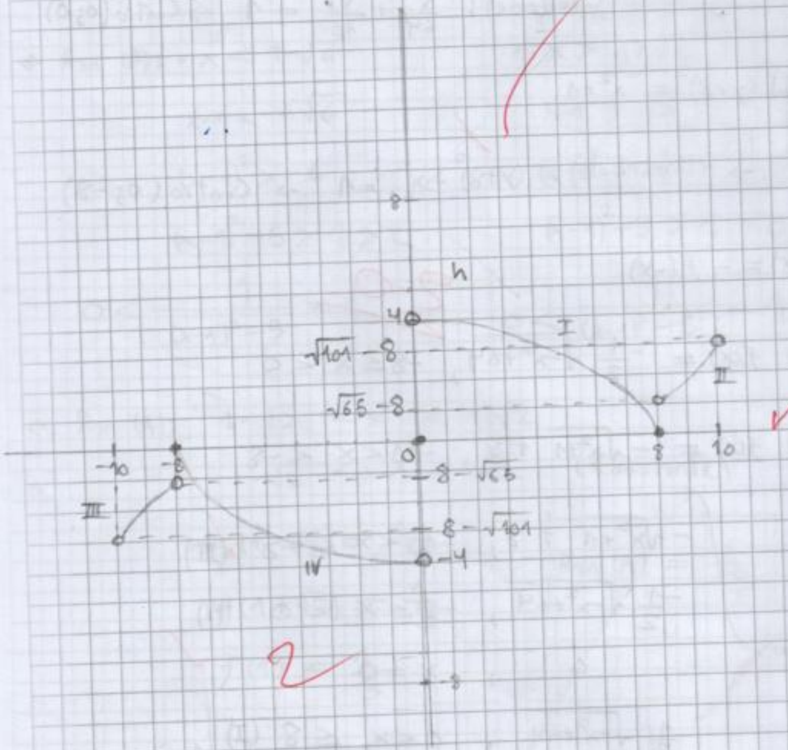
Zona exclusiva pa
cálculos y desarrol
(borrador)

(I) $\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, $0 < x \leq 8$, $a = 8$, $b = 4$

(II) $\mathcal{H}: (y+8)^2 - x^2 = 1$, $8 < x < 10$, $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$

(III) $(y-8)^2 = x^2 + 1 \rightarrow \mathcal{H}: (y-8)^2 - x^2 = 1$, $-10 < x < -8$, $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$

(IV) $4y^2 = -x^2 + 64 \rightarrow \mathcal{E}: \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, $-8 \leq x < 0$



2

$\text{Ran } h = \,]-4; 4[$

$f(-8) = -\sqrt{65} + 8$

$f(-10) = 8 - \sqrt{101}$

$f(8) = \sqrt{65} - 8$

$f(10) = \sqrt{101} - 8$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

5

a)

$$f(x) = \frac{\overbrace{x^4 + 3x^2 + ax}^{(*)}}{x-a}, \quad x \neq a$$

f impar $\rightarrow$ Ran f = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f(-x) = \frac{x^4 + 3x^2 - ax}{-x-a}$$

$$-f(-x) = \frac{-x^4 - 3x^2 + ax}{-x-a} = \frac{x^4 + 3x^2 - ax}{x+a}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2 + ax}{(x-a)}, & x \neq a \quad (I) \\ \dfrac{x^4 + 3x^2 - ax}{x+a}, & x \neq -a \quad (II) \end{cases}$$

(I) = (II), solo hay una asíntota.

$\hookrightarrow a = 0 \wedge x \neq 0$

2.0

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x}, \quad x \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x} = 0$$

$x = 0$, pero $x \neq 0$

(No hay corte con "y".)

$\Rightarrow$ Ran f = $\mathbb{R} - \{0\}$ $\equiv$ (V)

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva
cálculos y desa
(borrador,

b) $\forall x > 1, \exists y > 1 / y - x^{\frac{3}{4}} < 0$

$x^{\frac{3}{4}} > y$

$x > 1$

$x^{\frac{3}{4}} > 1 \wedge \left(x^{\frac{m}{n}} > x \leftrightarrow \frac{m}{n} > 1\right) \rightarrow \exists y / x^{\frac{3}{4}} > y > 1 \equiv (V)$

$x > x^{\frac{3}{4}} > 1$

$\therefore$ Existen ilimitados "y" entre $x^{\frac{3}{4}}$ y 1.

$\therefore$ (V)