ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

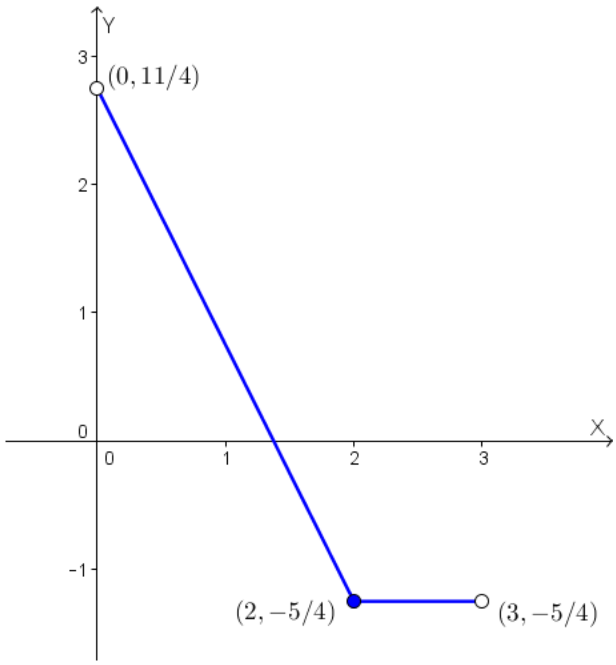
SEGUNDA PRÁCTICA CALIFICADA
SEMESTRE ACADÉMICO 2020 - 2

Horario: Todos. Elaborada por todos los profesores.

INDICACIONES:
El desarrollo de TODOS los ejercicios siguientes debe realizarse a mano detallando sus procedimientos, colocando sus datos en cada hoja utilizada, y presentarse las imágenes de sus soluciones compiladas en un único archivo Word o PDF en la TAREA correspondiente a la PC2. El puntaje máximo obtenible es 20 puntos. El plazo de entrega es hasta las 4:00 p.m.

---

1. La gráfica de la función g, que se muestra a continuación, está formada por dos segmentos de rectas.



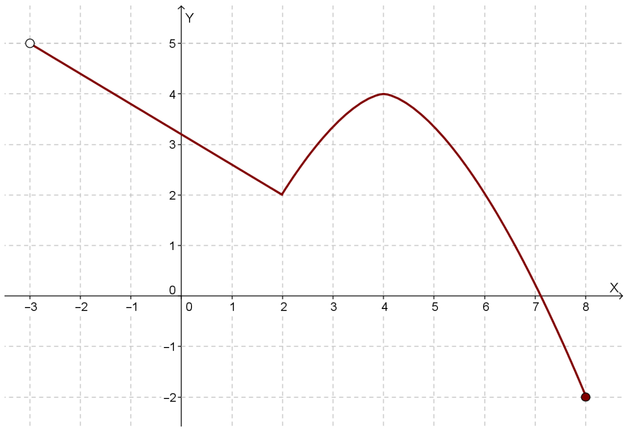
Sea f la función que cumple todas las siguientes condiciones:

- f es impar.
- $Dom(f) = [-8, 8] - \{0\}$.
- $f(x) = g(x)$ para todo $x \in Dom(g)$.
- Para $x \in [-8, -3]$, la gráfica de f corresponde a un trozo de parábola cuyo vértice tiene abscisa -5 y que pasa por los puntos $\left(-3; \frac{5}{4}\right)$ y $(-8; 0)$.

a) Determine la regla de correspondencia de f, indicando su dominio. (2.5 p)

b) Esboce la gráfica de f. (1.5 p)

2. Sea f una función real cuya gráfica se muestra a continuación.



Esboce la gráfica de la función h definida por $h(x) = \dfrac{1}{2} f(3-x)$ e indique su dominio y rango. (4 p.)

3. Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x - 3, \; -2 < x < 3 \quad y$$

$$g(x) = \begin{cases} |x+3| - 2, & x < 0 \\ \sqrt{(x-5)^2 + 4}, & x > 5. \end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de g. (2 p.)

b) Halle el dominio y la regla de correspondencia de la función $\dfrac{f}{g}$, y esboce su gráfica. (2 p.)

c) Determine la regla de correspondencia de la función $g \circ f$, indicando su dominio. (2 p.)

4. Grafique la región del plano representada por el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \\ y^2 > -4x + 8. \end{cases}$$

(3 p.)

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Si $1 < a < 3$ entonces la función $f(x) = ax^2 + ax + 1$, $x \in \mathbb{R}$, toma valores positivos para todo $x \in \mathbb{R}$. (1 p.)

b) La función definida por $f(x) = |x+1| - |x-1|$ es una función impar. (1 p.)

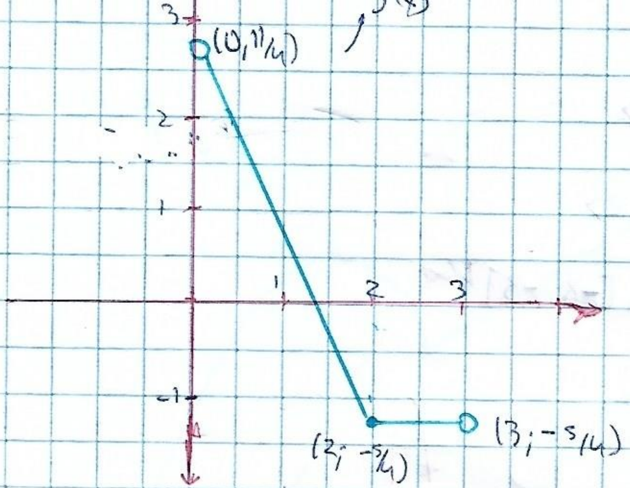
c) Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$. Si f es una función par entonces el rango de f no es igual a $\mathbb{R}$. (1 p.)

San Miguel, 17 de octubre de 2020.

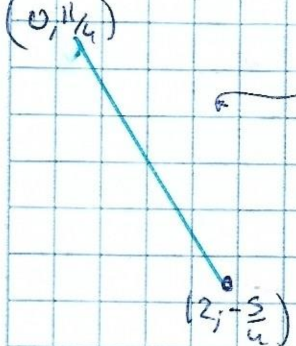
- Brian Ramirez Fernandez
- Código = 20206397
- H-107

- Brian

①



$$g(x) = \begin{cases} -\frac{5}{4} & ; x \in [2;3\rangle \\ -2x + \frac{11}{4} & ; \langle 0;2\rangle \end{cases}$$



$$m = \frac{\frac{11}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right)}{0-2} = \boxed{-2}$$

- $y - \frac{11}{4} = -2(x-0)$

$$\boxed{y = -2x + \frac{11}{4}}$$

a) Regla de correspondencia de f. $\begin{cases} Dom = [-8;8] - \{0\} \\ \text{Impar} \end{cases}$

- $g(x) = f(x) \rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ es } \begin{cases} -5/4 & ; x \in [2;3\rangle \\ -2x + \frac{11}{4} & ; x \in \langle 0;2\rangle \end{cases}}$ i)

- $f(x) = a(x+5)^2 + k$

$(-3; \frac{5}{4})$

$\frac{5}{4} = a(-3+5)^2 + k$

- $\frac{5}{4} = 4a + k$

$(-8; 0)$

$0 = a(-8+5)^2 + k$

$\underline{0 = 9a + k}$

$9a + k = 0$

$4a + k = \frac{5}{4}$

$\boxed{a = -\frac{1}{4}}$ $\boxed{k = \frac{9}{4}}$

$\boxed{f(x) = -\frac{1}{4}(x+5)^2 + \frac{9}{4}}$ ii)

$x \in [-8; -3]$

$\frac{16}{4}$ $\frac{16}{-8}$

CLASS & WORK

- Brian Ramirez Fernandez - Brian

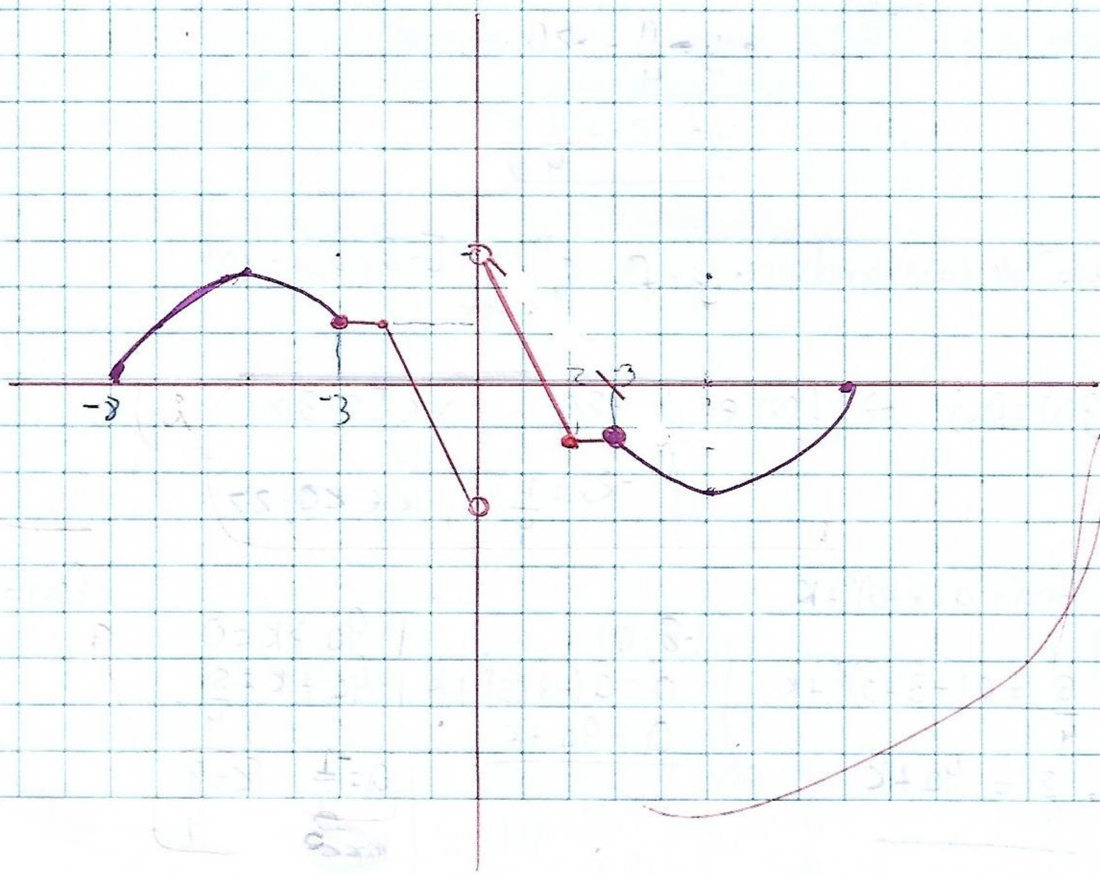
- Código - 20206397

- H - 107

- Regla de correspondencia de f, Dom = [-8, 8] - {0} ∧ es impar

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{4} \; ; & x \in [2;3\rangle \\ -2x + \frac{11}{4} \; ; & x \in \langle 0;2\rangle \\ -\frac{1}{4}(x+5)^2 + \frac{9}{4} \; ; & x \in [-8;-3] \\ \frac{5}{4} \; ; & x \in \langle -3;-2] \\ -2x - \frac{11}{4} \; ; & x \in \langle -2;0\rangle \\ \frac{1}{4}(5-x)^2 - \frac{9}{4} \; , & x \in [3;8] \end{cases}$$

Gráfico

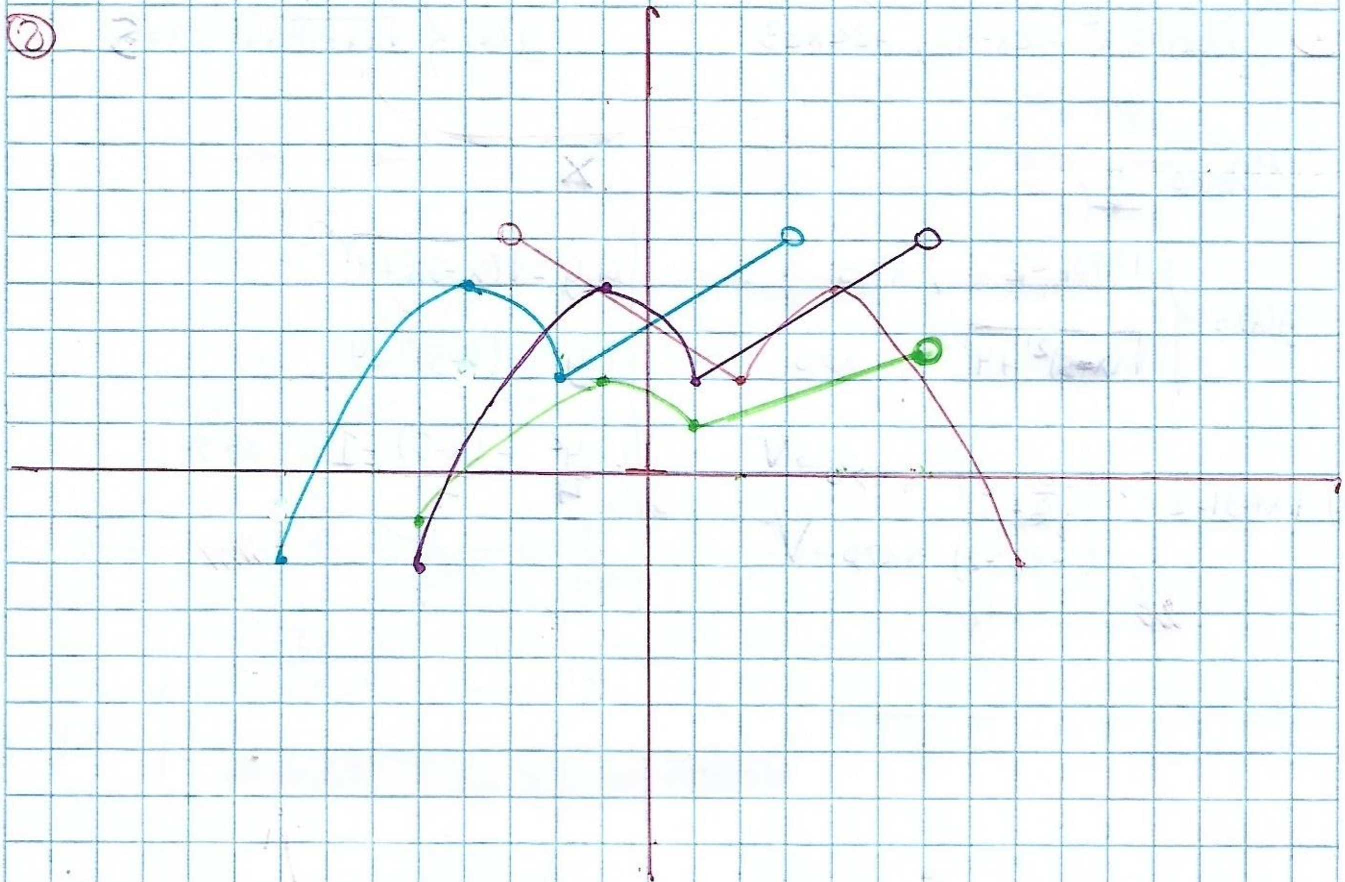


- Brian Ramirez Fernandez - Brian

Código = 20206397

- H-107

(2)



hallo $h(x)=\frac{1}{2}f(3-x)$

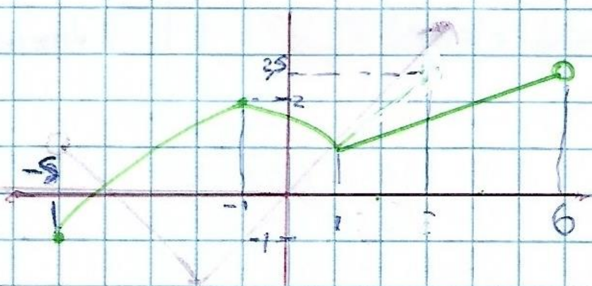
$f(x)$

$f(-x)$

$f(-(x-3))$

$\frac{1}{2}f(3-x)$

→



Rpta =

Dom(h) = [-5 ; 6⟩

Ran(h) = [-1 ; $\frac{5}{2}$⟩

- Brian Ramirez fernandez
- Código = 20206397
- H-107

- Brian

③ $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $-2 < x < 3$

$g(x) \begin{cases} |x+3| - 2 & ; x < 0 \\ \sqrt{(x-5)^2+4} & ; x > 5 \end{cases}$

a) Esboce g.

X

$g(x) = \begin{cases} |x+3| - 2 & , x < 0 \\ \sqrt{(\cancel{x+5})^2+4} & ; x > 0 \end{cases}$

i) $|x+3| - 2 \to \left(-\frac{b}{a} ; d\right) \wedge c > 0 \to V$

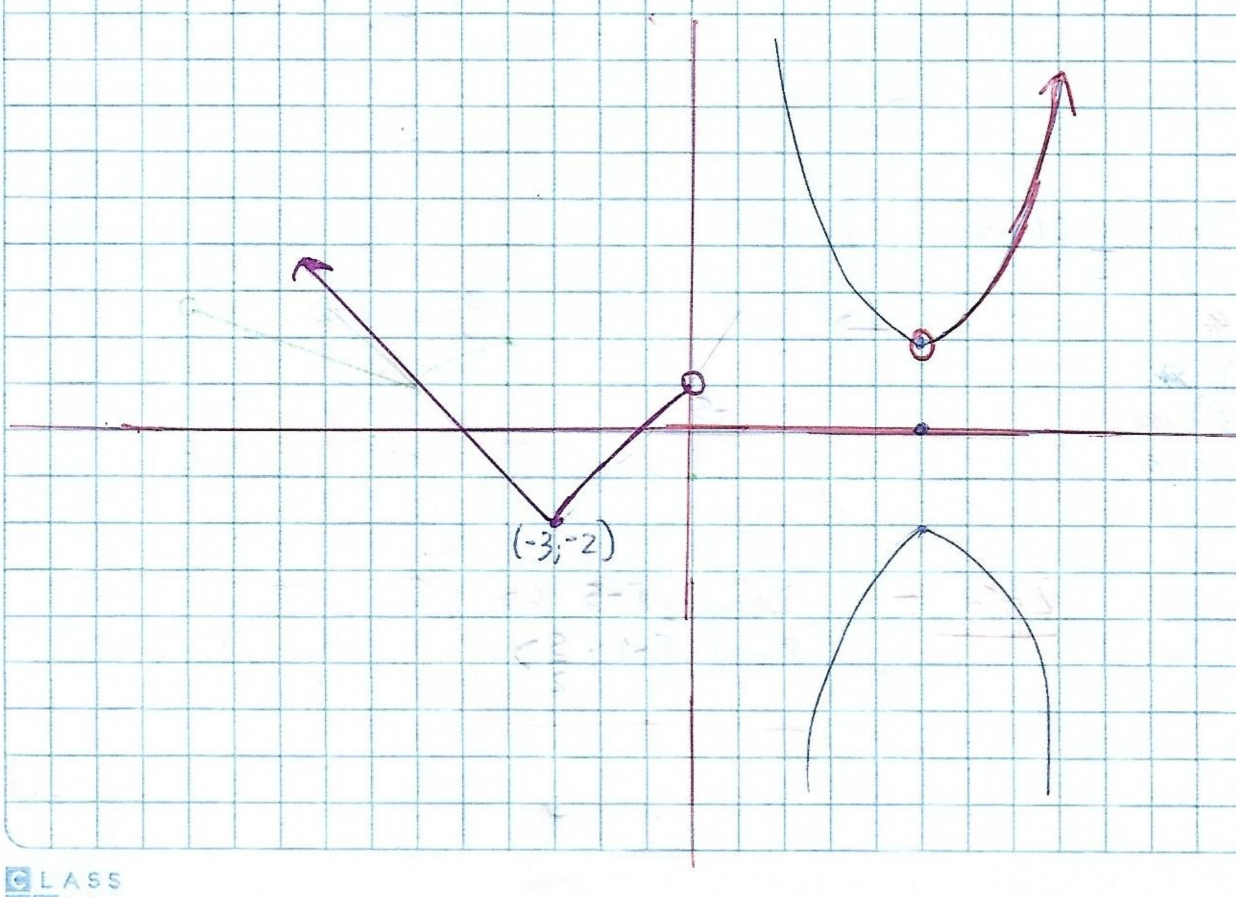
$(-3 ; -2) \wedge 1 > 0 \to V$

ii) $\left(y = \sqrt{(x-5)^2+4}\right)^2$

$y^2 = (x-5)^2 + 4$

$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-5)}{4} = 1$ $x > 5$

$a = 2$ $b = 2$

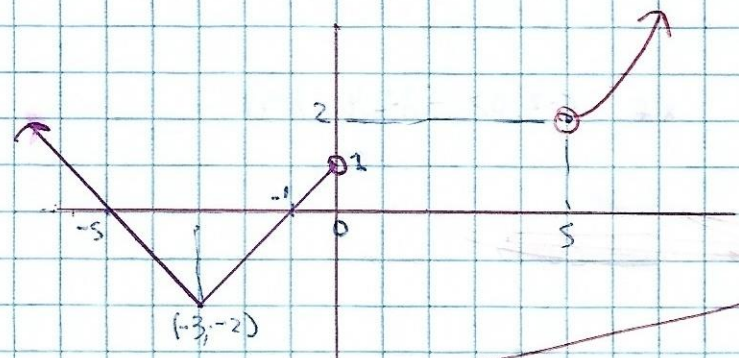


- Brian Ramírez Fernandez - Brian

- Código = 20206397

- W-107

Rpta



Rpta

b) dom, regla de correspondencia y la gráfica de $\frac{f}{g}$:

$$\frac{f}{g} = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{|x+3|-2}, & Dom1 \rightarrow \langle -2;0\rangle - \{-1\} \cap \{-5\} \\ \cancel{\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{(x-5)^2+4}}}, & \cancel{Dom2 \rightarrow} \end{cases}$$

No cumple, por la intersección de dominios.

i) - Dom1 : Domf(x) ∩ g(x) − {g(x)=0}

$x \in \langle -2;3\rangle \cap x \in \langle -\infty;0\rangle - \{g(x) \neq 0\}$

$\langle -2;0\rangle - \{g(x)=0\}$

$|x+3|-2=0$

$|x+3|=2$

$x=-1 \wedge x=-5$

Dom1: $\langle -2;0\rangle - \{-1\} \cap \{-5\}$

~~- Dom2: $x \in \langle -2;3\rangle \cap x \in \langle 0;+\infty\rangle - \{g(x)$~~

~~$\langle 0;3\rangle - \{g(x)=0\}$~~

~~$\sqrt{(x-5)^2+4}=0$~~

~~$(x-5)^2+4=0$~~

~~$(x-5)^2=-4$~~

~~$x \notin \mathbb{R}$ porque ningún valor de x hace que la función g sea 0.~~

~~- Dom2 = $\langle 0;3\rangle$~~

Coloqué mal el dato y me di cuenta que está mal.

- Brian Ramirez Fernandez — Brian

- Código : 20206397

- H-107

ii) Su esbozo es

$$\frac{f}{g} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{|x+3| - 2} \; ; \; x \in \langle -2; 0\rangle - \{-1\} \wedge \{-5\} \\ \cancel{\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{(x+3)^2} + 1} \; ; \; x \in \langle 0; 3\rangle} \end{cases}$$

Parte 1

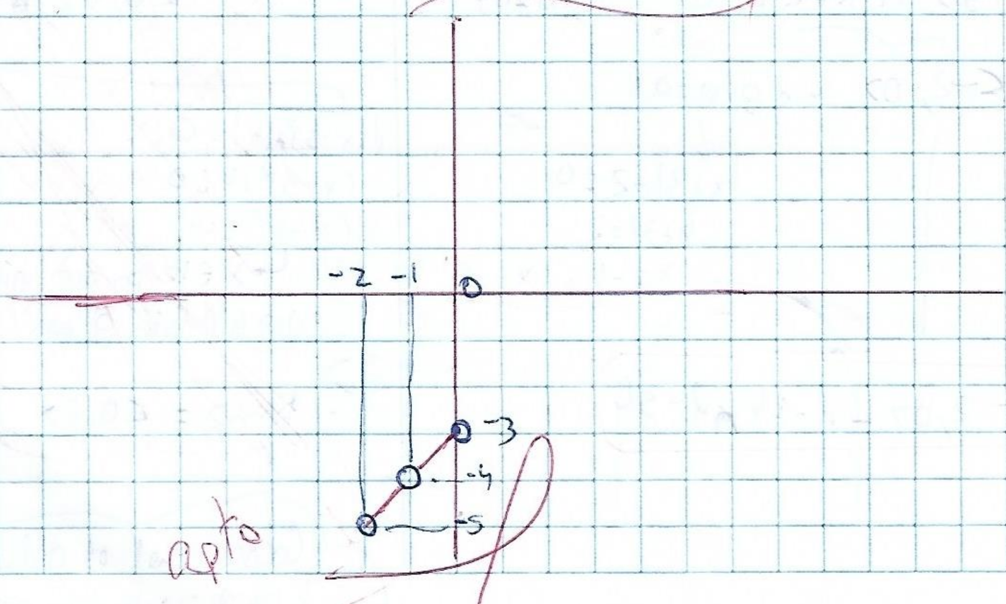
$$\frac{x^2 - 2x - 3}{|x+3| - 2} \; , \; x \in \langle -2; 0\rangle - \{-1\} \wedge \{-5\}$$

$f(x) > 0$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 3 - 2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \frac{(x-3)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x - 3$$

~~Parte 2~~

Rpta $\frac{f}{g} = \{ x - 3 \; ; \; x \in \langle -2; 0\rangle - \{-1\} \wedge \{-5\}$



- Brian Ramírez Fernandez
- Código : 20206347
- W-107

- Brian

c) $g \circ f =$ $g(f(x))$ $\begin{cases} |x^2-2x-\cancel{3}+\cancel{3}|-2 \;;\; \text{Dom1} \\ \sqrt{(x^2-2x-3-5)^2+4} \;;\; \text{Dom2} \end{cases}$

$\{x / x \in \text{Dom}f \wedge f \in \text{Dom}g\}$

- Dom1 $\Rightarrow x \in \langle -2;3 \rangle$

$x^2-2x-3<0$

$(x-3)(x+1)<0$

$x \in \langle -1;3 \rangle$

$\cap \; \boxed{x \in \langle -1;3 \rangle}$

- Dom2 $\Rightarrow x \in \langle -2;3 \rangle$

$x^2-2x-3>5$

$x^2-2x-8>0$

$(x-4)(x+2)>0$

$x \in \langle -\infty;-2 \rangle \cup \langle 4;+\infty \rangle$

$\cap \; x \in \emptyset$

eso quiere decir que ese tramo no tomará la composición

Rpta

$\therefore g(f) = \begin{cases} |x^2-2x|-2 \;;\; x \in \langle -1;3 \rangle \end{cases}$

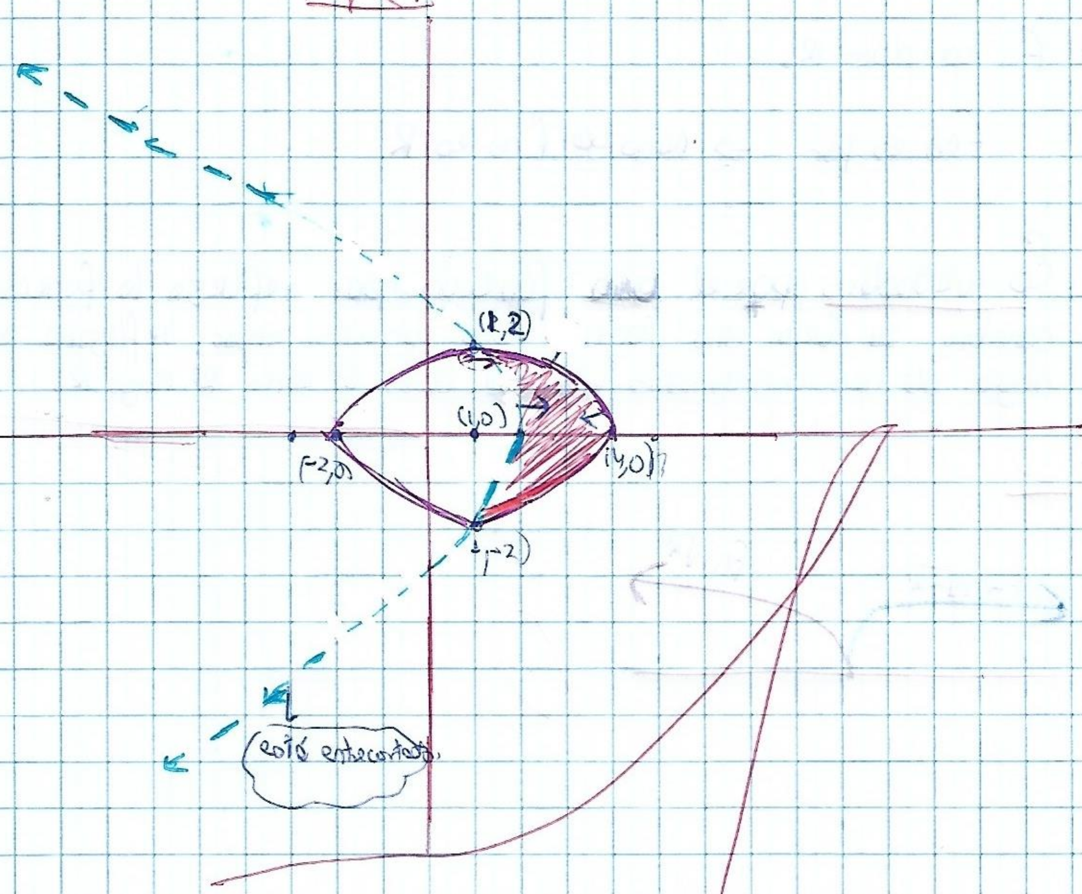
- Brian Ramirez Fernandez - Brian
- Codigo = 20206397
- H-107

④ $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \\ y^2 > -4x + 8 \end{cases}$

$\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \rightarrow C(1,0)$, $a=3$, $b=2$

$y^2 = -4(x-2) \rightarrow p = -1$, $C = (2;0)$

Rpta.



⑤ a) $1 < a < 3 \rightarrow f(x) = ax^2 + ax + 1$; $f(x) > 0, \forall x$

$\Delta < 0$
$a^2 - 4a < 0$
$a(a-4) < 0$
$a \in \langle 0, 4 \rangle$

V

Rpta: El enunciado es verdadero

Brian Ramírez fernandez
20206397

Brian

b) $f(x) = |x+1| - |x-1|$ es una función impar.

Rpta: Es verdadero porque

$$\boxed{f(x) = |x+1| - |x-1|}$$

$$f(-x) = |1-x| - |-1-x|$$
$$f(-x) = |x-1| - |x+1|$$

$$f(-x) = |x-1| - |x+1|$$
$$f(-x) = -(|x+1| - |x-1|)$$
$$f(-x) = -\underbrace{\quad}_{f(x)}$$

Es impar, por lo tanto es verdadero

c) f con dom $\mathbb{R}$.

$f(x)$ es par $\rightarrow$ rango de f no es $\mathbb{R}$

Es verdadero porque el una función par refleja la función en el eje y, en cambio, si fuera una función una función impar, reflejaría sobre el punto del origen de las coordenadas y en ese caso si sería el rango $\mathbb{R}$.

Ejm: