EXAMEN 2 ALGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 2020-2

ALUMNO: HUARINGA LAURA, ABEL JONATHAN

PARTE 1:

Comenzado el	miércoles, 23 de diciembre de 2020, 08:00
Estado	Finalizado
Finalizado en	miércoles, 23 de diciembre de 2020, 10:46
Tiempo empleado	2 horas 46 minutos
Calificación	**16.00** de 16.00 (**100**%)

Pregunta **1**

Correcta

Puntúa 2.00 sobre 2.00

Marcar pregunta

El volumen de un paralelepípedo, determinado por los vectores $\vec{a}$, $2\vec{b}$ y $5\vec{c}$, es $10\sqrt{10}$ unidades cúbicas.

Calcule el valor absoluto del producto mixto $\left[\sqrt{5}\,\vec{c}+\vec{a},\sqrt{3}\,\vec{b}+\vec{a},\sqrt{2}\,\vec{b}\right]$.

Seleccione una:

- a. $10\sqrt{10}$
- b. $3\sqrt{10}$
- c. $10\sqrt{3}$
- d. $2\sqrt{5}$
- e. 10 ✔
- f. Ninguna de las opciones mostradas es la respuesta.

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: 10

Pregunta **2**

Correcta

Puntúa 2.00 sobre 2.00

Marcar pregunta

Sean a y b números reales tales que los vectores $\overrightarrow{u} = (2; 1; -2a)$ y $\overrightarrow{v} = (-ab; 2; -1)$ no son linealmente independientes.

Halle $2a + \frac{b}{8}$.

Seleccione una:

- a. $\frac{1}{2}$
- b. $-\frac{3}{2}$ ✔
- c. -3
- d. 3
- e. 1
- f. Ninguna de las opciones propuestas es correcta.

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $-\frac{3}{2}$

Pregunta **3**

Correcta

Puntúa 2.00 sobre 2.00

Marcar pregunta

Sean $L_1 : P = (4; -2; 1) + t(\alpha; -4; 2), \quad t \in R$ y $L_2 : P = s(3\alpha; -1; 2), \quad s \in R$, dos rectas en el espacio.

Determine para qué valores reales de α las rectas dadas son alabeadas.

Seleccione una:

- a. $\alpha \neq 4$
- b. $\alpha \neq -\frac{1}{8}$
- c. $\alpha \neq \frac{1}{8}$
- d. $\alpha \neq -8$
- e. $\alpha \neq 8$ ✔
- f. Ninguna de la respuestas mostradas es la solución.

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $\alpha \neq 8$

Pregunta **4**

Correcta

Puntúa 2.00 sobre 2.00

Marcar pregunta

Sean A y B matrices invertibles de orden 3×3 y $M = 5A$.

Al resolver la ecuación matricial:

$$MY^tB^tA^{-1} = |5B|\,I,$$

donde I es la matriz identidad, se obtiene que la matriz Y es igual a:

Seleccione una:

- a. $25Adj(B)$ ✔
- b. $25Adj(A)$
- c. $Adj(B)$
- d. $Adj(A)$
- e. $125Adj(B)$
- f. Ninguna de las opciones mostradas es correcta.

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $25Adj(B)$

Pregunta **5**

Finalizado

Puntúa 3.00 sobre 3.00

Marcar pregunta

Analice la veracidad de la siguiente afirmación. Justifique su respuesta.

"Si X es una matriz triangular inferior 2×2 que satisface la siguiente ecuación matricial: $X^2 + 5X + 6I = \Theta$, con Θ la matriz nula, entonces se cumple que $X = -3I$ o $X = -2I$".

Pregunta 5 - EX2 - ABEL JONATHAN HUARINGA LAURA 20193668.pdf

Comentario:
Ojo, b puede tomar valores reales.

Pregunta **6**

Finalizado

Puntúa 3.00 sobre 3.00

Marcar pregunta

Se sabe que:

$$z = -1 - i.$$

Calcule la siguiente suma de números complejos:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \quad \text{con } n = 39.$$

Exprese el resultado en la forma $a + bi$, con a y b números reales.

Pregunta 6 - EX2 - ABEL JONATHAN HUARINGA LAURA - 20193668.pdf

Comentario:
Es correcto, sin embargo se sugiere resolverlo usando la fórmula de los términos de una progresión geométrica.

Pregunta **7**

Finalizado

Puntúa 2.00 sobre 2.00

Marcar pregunta

Dado el sistema de ecuaciones cuya representación matricial es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & k+1 & k+4 & 12 \\ 0 & 0 & k^2-k-2 & k^2-1 \end{array}\right),$$

halle los valores de k para los cuales dicho sistema tiene infinitas soluciones. Interprete el conjunto solución geométricamente.

Pregunta 7 - EX2 - ABEL JONATHAN HUARINGA LAURA 20193668.pdf

Comentario:

Por factorizar e identificar el valor de k que genera infinitas soluciones	0.5
Por obtener la forma de las infinitas soluciones que luego permitirán reconocer la forma que tiene el CS	0.5
Por decir que el conjunto solución es una recta	0.5
Por analizar los otros dos valores de k de modo que se justifique de alguna manera que no generan infinitas soluciones	0.5

Abel Jonathan Huaringa Laura 20193668

/ /

5) " X es matriz triangular superior 2×2 que satisface $X^2+5X+6I=\Theta$

$\rightarrow \cancel{-3I}$ $X=-3I$ o $X=-2I$ ".

- Si X es triangular superior 2×2

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$X^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$5X=\begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 0 & 5c \end{pmatrix}$$

$$6I=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 0 & 5c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+5a+6 & ab+bc+5b \\ 0 & c^2+5c+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la igualdad:

$a^2+5a+6=0$ | $ab+bc+5b=0$ | $c^2+5c+6=0$

$(a \quad +3)\ 3a$ | $(a+c+5)b=0$ | $(c \quad +3)$

$(a \quad +2)\ 2a$ | | $(c \quad +2)$

$a=\underline{-3}$ o $a=-2$ | $b=0$ o $a+c+5=0$ | $c=-3$ o $c=\underline{-2}$

$a+c=-5$

$\boxed{a=-3}$ $\boxed{c=-5+3=-2}$ $\boxed{a=-2}$ $\boxed{c=-3}$

Primera forma (Reemplazo)

$$X=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ o } X=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{X}\neq\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{-3I} \text{ o } \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{X}\neq\overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}^{-2I}$$

$-2\neq-3$

En la componente fila 2, columna 2

$-3\neq-2$

FALSO: Ninguna igualdad se cumple ($X\neq-3I$ y $X\neq-2I$)

Abel Jonathan Huaringa Laura 20193668

6) $\boxed{z = -1-i}$ Hallar: " $1+z+z^2+z^3+\dots+z^n$ con $n=39$ "

Exprese en forma $a+bi$

$1 =$ $= 1$ $\quad 1 = 1$

$z^1 = -1-i$ $= -1-i$

$z^2 = (-1-i)(-1-i) = 1+i+i+\underbrace{i^2}_{-1} = 0+2i$ $= \cancel{2i}$

$z^3 = z^2 z = 2i(-1-i) = -2i-2\underbrace{i^2}_{-1} = 2-2i$ $= 2 - \cancel{2i}$

Sumo

$-3 - i = 1(-3-i)$

$z^4 = z^2 \cdot z^2 = (2i)(2i) = 4i^2 = -4$ $= -4$

$z^5 = z^4 \cdot z = -4(-1-i) = 4+4i$ $= 4+4i$

$z^6 = z^5 z^1 = (4+4i)(-1-i) = -4-4i-4i-4\underbrace{i^2}_{-1} = -8i$ $= \cancel{-8i}$

Sumo

$12 + 4i = -4(-3-i)$

$z^7 = z^6 (z)^1 = (-8i)(-1-i) = 8i+8\underbrace{i^2}_{-1} = -8+8i$ $= -8 + \cancel{8i}$

$z^8 = z^7(z) = (-8+8i)(-1-i) = 8+8i-8i-8\underbrace{i^2}_{-1} = 16$ $= 16$

$z^9 = z^8 z = 16(-1-i) = -16-16i$ $= -16-16i$

$z^{10} = z^9 z = (-16-16i)(-1-i) = 16+16i+16i+16\underbrace{i^2}_{-1}$ $= \cancel{32i}$

Sumo

$-48 - 16i = 16(-3-i)$

$z^{11} = z^{10} z = 32i(-1-i) = -32i-32i^2 = 32-32i$ $= 32 - \cancel{32i}$

$z^{12} = z^{11} z = (32-32i)(-1-i) = -32-32i+32i+32i^2$ $= -64$

Vemos una tendencia:

$+1 \quad a = -3-i \quad (+1)$ $\quad 1$

de $z^1 \to z^4$: $1(-3-i) = 4^0 (z) = +4^0 (a)$

de $z^5 \to z^8$ $= -4(-3-i) = -4^1 (z) = -4^1 (a)$

de $z^9 \to z^{12}$ $= 16(-3-i) = +4^2 (z) = +4^2 (a)$

13 → 16 $= -4^3\, a$

17 → 20 $= +4^4\, a$ → Deducimos $205\, a$

21 → 24 $= -4^5\, a$

25 → 28 $= +4^6\, a$ → $3072\, a$

29 → 32 $= -4^7\, a$

33 → 36 $= +4^8\, a$ → $49152\, a$

37 → 40 $= -4^9\, a$ → $-262144\, a$

"39"

$-209715\, a \quad +1$

• z^{40} ?

$z^4 = -4 = -4^1$ $\quad z^{28} = -4^7$

$z^8 = 16 = 4^2$ $\quad z^{32} = +4^8$

$z^{12} = -64$ → Seguimos la tendencia $= -4^3$ $\quad z^{36} = -4^9$

$z^{16} = +4^4$ $\quad z^{40} = +4^{10}$

$z^{20} = -4^5$

$z^{24} = +4^6$

Abel Jonathan Huaringa Laura 20193668

$1 + z + z^2 + z^3 ... + z^{39}$

"Como hemos calculado hasta z^{40}, le restamos z^{40} (Que ya deducimos antes)

$\Rightarrow 1 + (-209715\,a) - z^{40}$

$1 - 209715(-3-i) - 4^{10}$

$1 + 209715(+3) + 209715i - 4^{10}$

La sumatoria sale: $(1 + 3(209715) - 4^{10} + 209715i$

Operando:

$\boxed{(-419430 + 209715i)}$

lo colocamos en números porque nos piden que a y b sean $\mathbb{R}$.

Abel Jonathan Huaringa Laura 20193668

/ /

7) $\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & K+1 & K+4 & 12 \\ 0 & 0 & K^2-K-2 & K^2-1 \end{array}\right)$$

$K^2-K-2 = (K-2)(K+1)$ $\qquad$ $K^2-1 = (K-1)(K+1)$

~~Si $K \neq 2$ y $K \neq -1$~~

Si $K \neq -1$ y $K \neq 2$

$(K-2)(K+1)Z = (K-1)(K+1)$

$$Z = \frac{(K-1)\cancel{(K+1)}}{(K-2)\cancel{(K+1)}}$$

$$Z = \frac{K-1}{K-2}$$

como $K \neq -1$ y $K \neq 2$, Z estará igualado a un número real, por lo tanto, existe un valor único por cada k que se elija diferente a -1 y -2.

En tal caso, también se podrá despejar "y" y "x" con valores únicos, y la solución será única (solo que en función de K).

Si $K = 2$

$0Z = 1(3)$

¿ $0 = 3$?

Es absurdo, no existe solución.

Si $K = -1$

$(-1-2)(-1+1)Z = (-2)(0)$

$0Z = 0$

$0 = 0$

Tautología

Z puede tomar cualquier valor (Hay infinitas soluciones)

Para los valores de $K = 1$ hay infinitas soluciones.

$\boxed{K = -1}$

El conjunto solución

$2x + 3y + 3z = 5$ $\qquad$ $\begin{cases} 0y + 3z = 12 \\ z = 4 \end{cases}$

Si $y = t$

$2x + 3t + 12 = 5$

$2x + 3t = -7$

$2x = -7 - 3t$

$x = \dfrac{-7-3t}{2}$

SOL: $\left(\dfrac{-7-3t}{2}, t, 4\right)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}t \\ 0 + t \\ 4 + 0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

$$L_1 = \begin{cases} x = -7/2 - 3/2\, t \\ y = 0 + 1\, t \\ z = 4 + 0\, t \end{cases}$$

Rpta. Para que el sistema tenga infinitas soluciones, K debe ser $\boxed{K = -1}$.

La solución se interpreta geométricamente como una **recta** en el espacio $\mathbb{R}^3$

El CS cuando $K = -1$ representa a una recta.

PARTE 2: (EXPLICACIÓN DEL PROBLEMA ASIGNADO EN VIDEO)

Problema asignado:

Dada el siguiente sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} ax + my + tz = 2 \\ bx + ny + uz = 3 \\ cx + py + vz = 1 \end{cases}$, representado por la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} a & m & t & 2 \\ b & n & u & 3 \\ c & p & v & 1 \end{array}\right)$ con $a, b, c \neq 0$,

muestre qué operaciones elementales debieron realizarse entre las filas de dicha matriz para obtener el siguiente sistema equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & \begin{vmatrix} n & m \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u & b \\ t & a \end{vmatrix} & 3a - 2b \\ 0 & b\begin{vmatrix} a & m \\ c & p \end{vmatrix} & b\begin{vmatrix} a & c \\ t & v \end{vmatrix} & ab - 2bc \end{array}\right).$$

Explique con detalle cómo se va transformando la matriz.

Problema asignado $\quad a, b, c \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & m & t & 2 \\ b & n & u & 3 \\ c & p & v & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}$$

Usando operaciones fila elementales debemos llegar a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & \begin{vmatrix} n & m \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u & b \\ t & a \end{vmatrix} & 3a-2b \\ 0 & b\begin{vmatrix} a & m \\ c & p \end{vmatrix} & b\begin{vmatrix} a & c \\ t & v \end{vmatrix} & ab-2bc \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ab & mb & tb & 2b \\ ab & na & ua & 3a \\ ac & pa & va & a \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ f_2: \\ f_3: \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ab & mb & tb & 2b \\ 0 & na-mb & ua-tb & 3a-2b \\ abc & bpa & bva & ab \end{array}\right)f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & na-mb & ua-tb & 3a-2b \\ abc & bpa & bva & ab \end{array}\right)f_3:$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & na-mb & ua-tb & 3a-2b \\ 0 & \underset{b(pa-mc)}{bpa-bmc} & \underset{b(va-tc)}{bva-tbc} & ab-2bc \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & \begin{vmatrix} n & m \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u & b \\ t & a \end{vmatrix} & 3a-2b \\ 0 & b\begin{vmatrix} a & m \\ c & p \end{vmatrix} & b\begin{vmatrix} a & c \\ t & v \end{vmatrix} & ab-2bc \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ab & mb & tb & 2b \\ ab & na & ua & 3a \\ ac & pa & va & a \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ f_2: f_2 - f_1 \\ f_3: b f_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ab & mb & tb & 2b \\ 0 & na-mb & ua-tb & 3a-2b \\ abc & bpa & bva & ab \end{array}\right)f_1: c f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & na-mb & ua-tb & 3a-2b \\ abc & bpa & bva & ab \end{array}\right)f_3: f_3 - f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & na-mb & ua-tb & 3a-2b \\ 0 & \underset{b(pa-mc)}{bpa-bmc} & \underset{b(va-tc)}{bva-tbc} & ab-2bc \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} abc & mbc & tbc & 2bc \\ 0 & \begin{vmatrix} n & m \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u & b \\ t & a \end{vmatrix} & 3a-2b \\ 0 & b\begin{vmatrix} a & m \\ c & p \end{vmatrix} & b\begin{vmatrix} a & c \\ t & v \end{vmatrix} & ab-2bc \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$