ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA
SEMESTRE ACADÉMICO 2018-2

Horarios: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116

Duración: 110 minutos

Elaborado por todos los profesores del curso.

ADVERTENCIAS:
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación. - Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad. - Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos. - Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica. - En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables. - Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:
- No se permite el uso de apuntes de clase, libros ni calculadoras. - Explique detalladamente las soluciones. - La presentación, la ortografía, y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando adecuadamente su respuesta.
   a. La función g, definida por $g(x) = \ln(e^{x} + e^{-x})$, es una función par. 1 punto
   b. La función f, definida por $f(x) = \cos(x+1) - 1$, es decreciente en el intervalo $]-1{,}2[$. 1 punto
   c. El mayor valor de la función g, definida por $g(t) = |\tan t|$ en el intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right]$ es $\sqrt{3}$. 1 punto

2. Sean $P(c, y_2)$ un punto en la gráfica de la función f, definida por $f(x) = log_2(x)$ y $Q(c, y_1)$ un punto en la gráfica de la función g, definida por $g(x) = log_2(x-3)$, tales que la distancia entre P y Q es de 4 unidades. Halle el valor de c. 2 puntos

3. Dada la función f definida por
$$f(x) = e^{(-x+1+\ln 2)} - 2.$$
   a. Esboce la gráfica de la función f indicando las ecuaciones de sus asíntotas y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados, si existieran. 1.5 puntos
   b. Halle los valores de x para los cuales $f(x) < -1$ y los valores de x para los cuales $f(x) > -1$. 1.5 puntos

4. Considere la función f, definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3-x) + 1$.
   a. Halle el conjunto solución de $f^{-1}(-1) + e^{2x} = e^{x} + 1$, si se sabe que f^{-1} es la función inversa de f. 1 punto
   b. Halle la regla de correspondencia de f^{-1}, indicando su dominio. 1 punto
   c. Grafique f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas. 2 puntos

5. Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x\,, & 0 < x \leq b \\ 2^x + b - 5, & x > b \end{cases}.$$

a. Encuentre el menor valor entero que puede tomar b para que la función f sea inyectiva. 2 puntos

b. Para $b = 9$, halle la función inversa f^{-1}. 2 puntos

6. El plan teórico-práctico para un experimento de laboratorio es el siguiente:
Inicialmente se coloca en una caja de Petri un cultivo de 10 bacterias, cuyo número de bacterias se duplica cada 3 horas, siendo el número de bacterias modelado por $N(t) = Ab^{kt}$, donde t es el número de horas transcurridas desde iniciado el experimento. Cuando el cultivo alcance 5120 bacterias se agregará una dosis de cierto antibiótico causando que el número de bacterias permanezca constante por las siguientes 4 horas. Luego de este tiempo, el número de bacterias disminuye en 60 % cada hora.

a. Determine cuántas bacterias habrá en el cultivo luego de 30 horas de iniciado el experimento. 1 punto

b. Halle el número de bacterias en el cultivo en función de t. 3 puntos

Coordinadora de práctica: Iris Flores

San Miguel, 24 de noviembre de 2018

Año: 2018 Número: 5549

Código de alumno

Práctica

Ramírez Huamán Wilver Aldo

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

ENTREGADO 03 DIC. 20

Curso: FCAL

Práctica Nº: P°N. 4

Horario de práctica: P- 109

Fecha: 24/11/18

Nombre del profesor: D. BONCES

Nota: 20

Firma del jefe de práctica

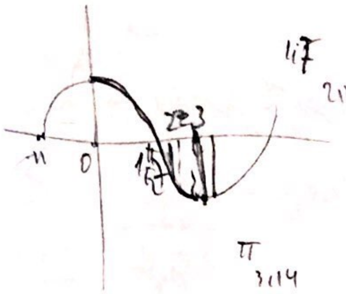
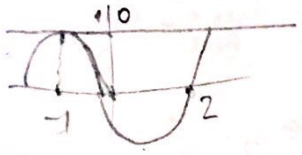
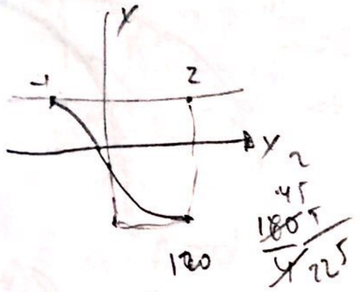
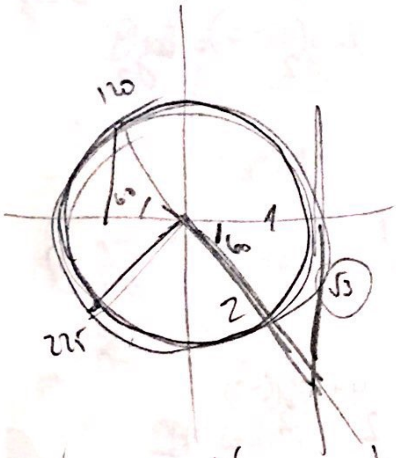
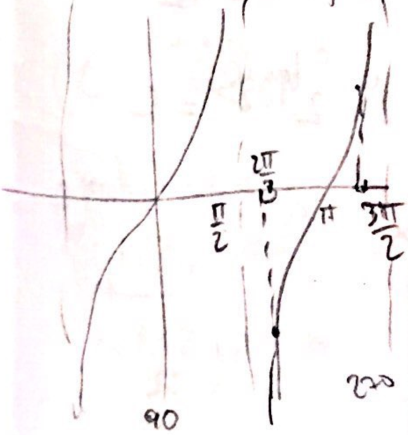
Nombre y apellido: (iniciales) LP

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcridad posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posible.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir esta práctica calificada, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Setiembre 2017

(borrador)

1) ~~Si $x_1, x_2 \in Dom\, g$~~

~~$g(x_1) = g(x_2)$~~

~~$\ln(e^{x_1} + e^{-x_1}) = \ln(e^{x_2} + e^{-x_2})$~~

a) $g(x)$ es par si $g(-x) = g(x)$

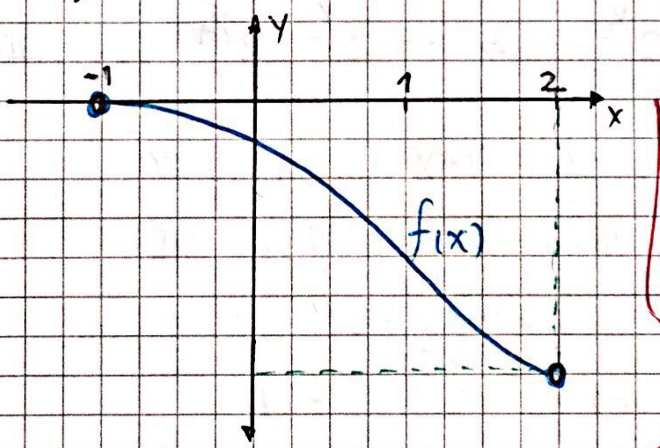
En efecto:

$$g(-x) = \ln(e^{-x} + e^{-(-x)})$$
$$g(-x) = \ln(e^{-x} + e^{x})$$
$$g(-x) = g(x)$$

⇒ $g(x)$ es una función par

⇒ La proposición es verdadera.

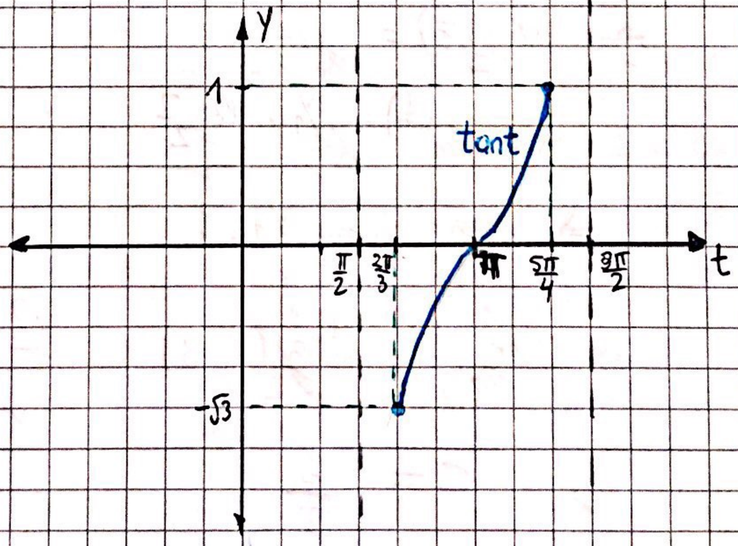
b) $f(x) = \cos(x+1) - 1$



del gráfico f es decreciente en el intervalo $]-1,2[$

⇒ La proposición es VERDADERO

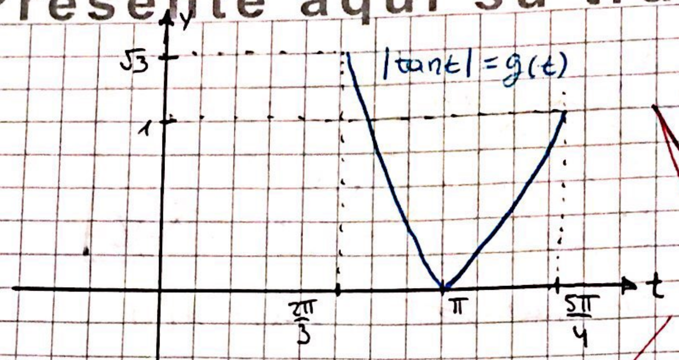
c)



$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$

$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

Presente aquí su trabajo



$Rang = [0, \sqrt{3}] \Rightarrow$ El máximo valor de $g_{(t)}$ es $\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ La proposición es verdadera.

2)

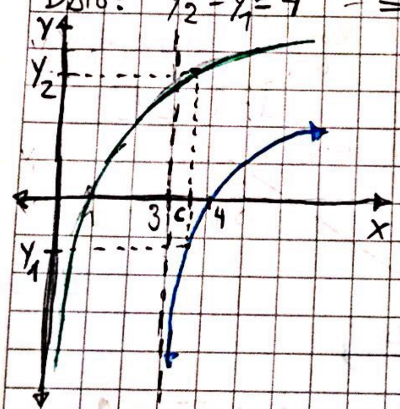
$\Rightarrow \log_2 c = Y_2 \Rightarrow 2^{Y_2} = c$ .... (I)

$\log_2 (c-3) = Y_1 \Rightarrow 2^{Y_1} = c-3$ .... (II)

reemplazando (I) en (II)

$2^{Y_1} = 2^{Y_2} - 3 \Rightarrow 3 = 2^{Y_2} - 2^{Y_1}$ ...... (III)

Dato: $Y_2 - Y_1 = 4 \Rightarrow Y_2 = 4 + Y_1$ ...... (IV)



reemplazando (IV) en (III)

$3 = 2^{Y_1+4} - 2^{Y_1}$

$\Rightarrow 3 = 2^{Y_1}(2^4 - 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{5} = 2^{Y_1}$

$\Rightarrow \log_2(\frac{1}{5}) = \log_2 2^{Y_1}$

$\Rightarrow \log_2(\frac{1}{5}) = Y_1 \cdot \log_2 2$

$\Rightarrow \log_2(\frac{1}{5}) = Y_1 \cdot 1$

$\Rightarrow \log_2(\frac{1}{5}) = \log_2 (c-3)$

$\Rightarrow \frac{1}{5} = c-3 \Rightarrow c = \frac{16}{5}$

2

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\log_2 c - \log_2(c-3) = 2^2$

$\log_2 c - \log_2(c-3) = 4$

$2^a = c \quad 2^b = c-3$

$\log_2 c - \frac{\log_2 c}{\log_3 c}$

$\log_2 c \left(\frac{\log_3 c - 1}{\log_3 c}\right)$

$3 = 2^a - 2^b$

$3 = 2^{(a-4)}(2^4 \ldots)$

$a - b = 2^2$

$\log_2(a-b) = \log_2 4$

$\log_2 c = 4 + \log_2(c-3)$

$2^{4+\log_2(c-3)} = c$

$2^4 \cdot 2^{\log_2(c-3)} = c$

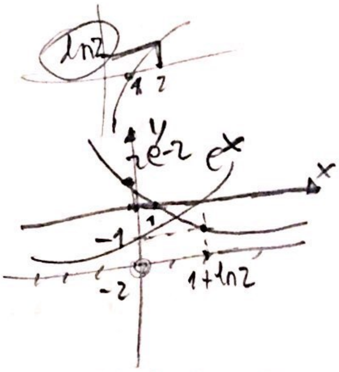
$\frac{15}{0,2}$

$2^{4+1} = 32$

$\frac{32}{10}$

3,2

cálculos y desarrollos (borrador)



$-x+1+\ln 2=0$

$\boxed{1+\ln 2 = x}$

$e^{1+\ln 2} - 2$

$e \cdot e^{\ln 2} - 2$

$\boxed{2e-2}$

$e^{\ln 2} = a - 2$

$\ln a = \ln 2$

$e^{(-x+1+\ln 2)} - 2 < -1$

$e^{(-x+1+\ln 2)} = 1$

$\ln 1 = -x+1 \ln 2$

$x = 1+\ln 2 - \ln 1$

$e^{(-x_1+1+\ln 2)} < e^0$

$-x_1+1+\ln 2 < 0$

$\boxed{1+\ln 2 < x}$

$1+\ln 2 > x$

3) a) intersección con eje Y $\Rightarrow$ $x=0$

$f(0) = e^{(-0+1+\ln 2)} - 2$

$f(0) = e^{1+\ln 2} - 2$

$f(0) = e \cdot \underbrace{e^{\ln 2}}_{2} - 2$

$f(0) = 2e-2$ ✓ coordenada $(0, 2e-2)$ ✓

intersección con eje X $\Rightarrow$ $y=0$

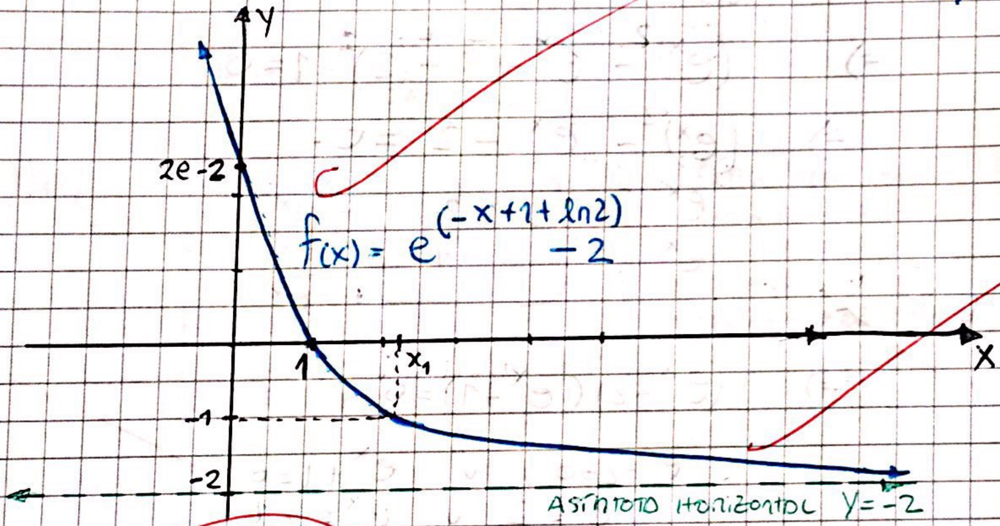
$0 = e^{(-x+1+\ln 2)} - 2$

$2 = e^{(-x+1+\ln 2)} \Rightarrow \cancel{\ln 2} = -x+1+\cancel{\ln 2}$

$\Rightarrow x = 1$ coordenada $(1,0)$ ✓

1.5

Asíntotos: Solo tiene asíntoto horizontal: $y=-2$ ✓



b) $f(x) < -1 \Rightarrow e^{(-x+1+\ln 2)} - 2 < -1$

$\Rightarrow e^{(-x+1+\ln 2)} < 1$

$\Rightarrow e^{(-x+1+\ln 2)} < e^0$ ..... (como $e>1$)

$\Rightarrow -x+1+\ln 2 < 0$

$\Rightarrow 1+\ln 2 < x \Rightarrow$ los valores de x / $f(x) < -1$ son: $]1+\ln 2, +\infty[$ ✓

1.5

$f(x) > -1 \Rightarrow e^{(-x+1+\ln 2)} - 2 > -1$

$\Rightarrow e^{(-x+1+\ln 2)} > 1 \Rightarrow e^{(-x+1+\ln 2)} > e^0$

$\Rightarrow -x+1+\ln 2 > 0 \Rightarrow 1+\ln 2 > x$

$\Rightarrow$ los valores de x / $f(x) > -1$ son: $]-\infty, 1+\ln 2[$ ✓

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

4) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3-x)+1$

a) $f(f^{-1}_{(x)}) = x \Rightarrow x = \log_{\frac{1}{2}}(3 - f^{-1}_{(x)}) + 1$

$\Rightarrow x - 1 = \log_{\frac{1}{2}}(3 - f^{-1}_{(x)})$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 3 - f^{-1}_{(x)}$

$\Rightarrow f^{-1}_{(x)} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

Falta Do

$\Rightarrow f^{-1}_{(-1)} + e^{2x} = e^{x} + 1$

$\Rightarrow 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1} + e^{2x} = e^{x} + 1$

$\Rightarrow (e^{x})^2 - e^{x} + 3 - (2)^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (e^{x})^2 - e^{x} - 2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} e^{x} & -2 & -2e^{x} \\ e^{x} & 1 & e^{x} \\ & & -e^{x} \end{array}$$

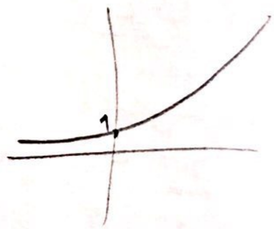
$\Rightarrow (e^{x}-2)(e^{x}+1) = 0$

$e^{x} - 2 = 0 \quad \vee \quad e^{x} + 1 = 0$

$e^{x} = 2 \quad \vee \quad e^{x} = -1$

$\ln 2 = x \quad \vee \quad \emptyset \Rightarrow x = \ln 2$

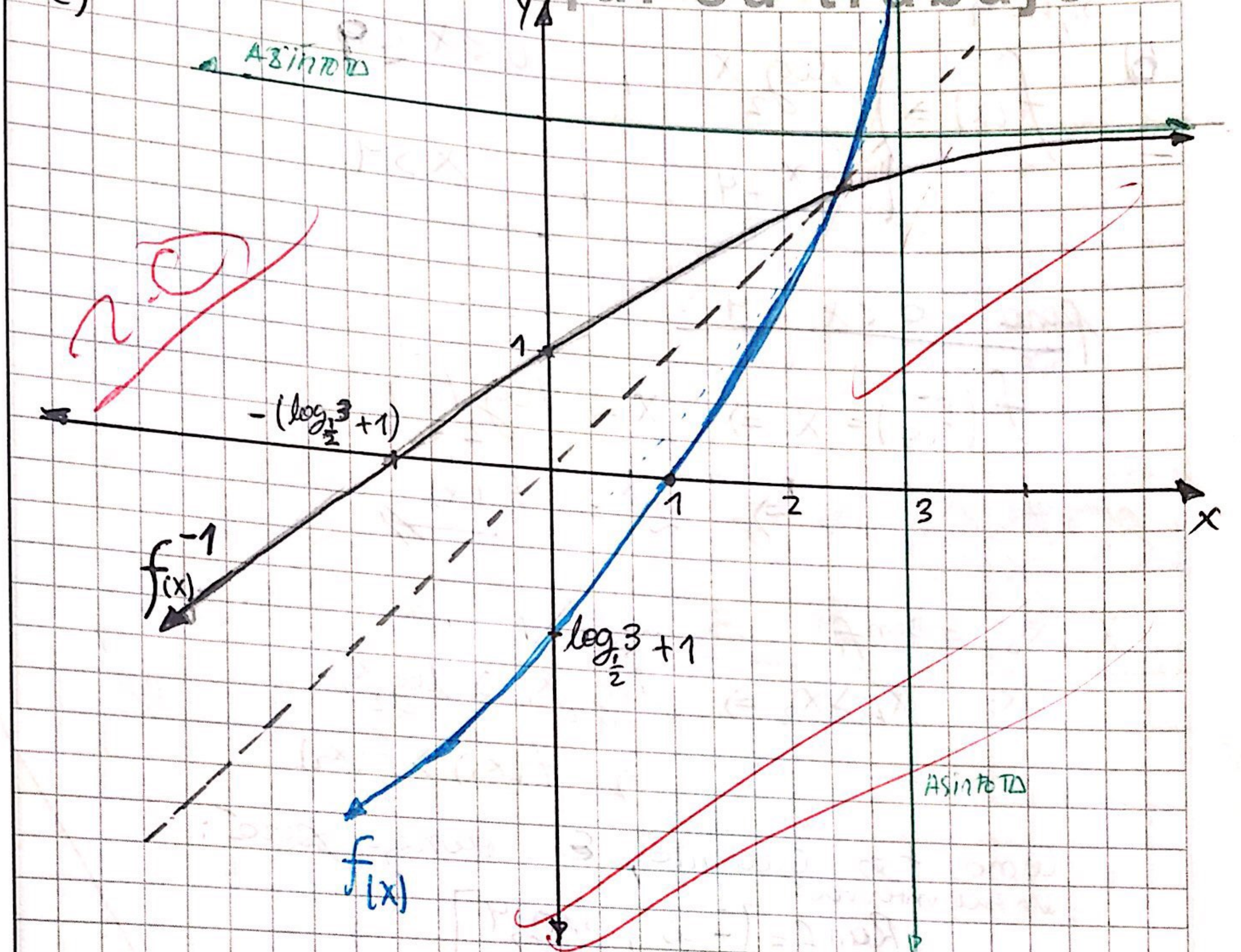
$C.S = \{\ln 2\}$



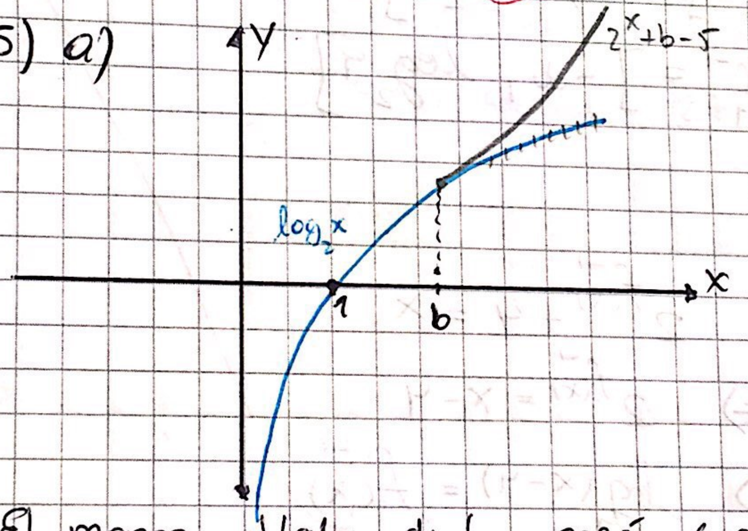
b) El desarrollo de la correspondencia de f^{-1} se realizo en el inciso a)

$\Rightarrow f^{-1}_{(x)} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ No hay restricciones para x

$\Rightarrow \text{Dom}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$



5) a)



para que sea ~~inyectiva~~ sus ~~rangos~~ no deben ~~intersectarse~~.

⇒ El menor valor de b será cuando:

$$\log_2 b = 2^b + b - 5$$

tanteando ⇒ b=2

$$\log_2 2 = 2^2 + 2 - 5$$

$$1 = 4 + 2 - 5$$

$$1 = 1$$

⇒ $b = 2$, menor valor de b para que f sea inyectiva

Presente aquí su trabajo

si, b = 9

b) $f(x) = \begin{cases} \log_2 x & , \quad 0 < x \leq 9 \\ 2^x + 4 & , \quad x > 9 \end{cases}$

para $0 < x \leq 9$:

$f(f^{-1}_{(x)}) = x \Rightarrow x = \log_2 f^{-1}_{(x)}$

$\Rightarrow 2^x = f^{-1}_{(x)}$ //

$x_1, x_2 \in Dom f_1$

si $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_2 x_1 > \log_2 x_2$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Como f es creciente, El rango será:
en este intervalo

$Ran f_1 =]-\infty, \log_2 9]$

$\Rightarrow Dom f_1^{-1} =]-\infty, \log_2 9]$

para $9 < x$:

$f(f^{-1}_{(x)}) = x \Rightarrow 2^{f^{-1}_{(x)}} + 4 = x$

$\Rightarrow 2^{f^{-1}_{(x)}} = x - 4$

$\Rightarrow \log_2 (x-4) = f^{-1}_{(x)}$ //

$x_1, x_2 \in Dom f_2$

si $x_1 > x_2 \Rightarrow 2^{x_1} + 4 > 2^{x_2} + 4$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

f es creciente, El rango será:
en este intervalo

$Ran f_2 =]516, +\infty[$

$\Rightarrow Dom f_2^{-1} =]516, +\infty[$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \quad f^{-1}_{(x)} = \begin{cases} 2^{x}, & x \leq \log_2 9 \\ \log_2(x-4), & 516 < x \end{cases}$$

6)

~~a) $N_{(t)} = 10 \times 2^{t/3}$ bacterias / $N_{(0)} = 10$ bacterias~~

~~$N(30) = 10 \times 2^{30/3}$ bacterias $= 10240$ bacterias~~

b) $\quad 512\cancel{0} = 1\cancel{0} \times 2^{t_1/3}$ $\quad$ 2,5

$\Rightarrow \quad t_1 = 27$ horas

$$N(t) = \begin{cases} 10 \times 2^{t/3} \text{ bacterias} & 0 \leq t \leq 27 \text{ horas} \\ 5120 \text{ bacterias} & 27 < t \leq 31 \text{ horas} \\ (\cancel{0,6})^{(t-31)} \times 5120 \text{ bacterias} & 31 < t \text{ horas} \end{cases}$$

0,4

a) $\quad N(30) = 5120$ bacterias $\quad$ 1,5