CAAS

Solucionario PC3

①

$$f(x) = \begin{cases} ① \sqrt{1+2^x}, & x < 4 \\ ② \sqrt{3 - \log_2 x}, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

②a

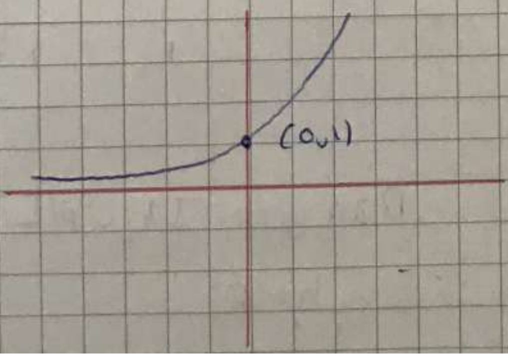
para ①

$g(x) = \sqrt{x}$; $h_{①}(x) = 1+2^x$

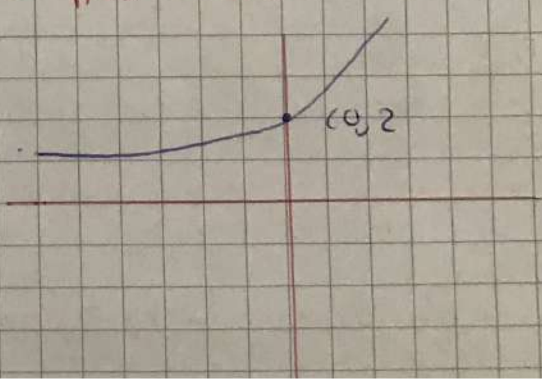
$$g \circ h = g(hx) = \sqrt{1+2^x}$$

① Graficaremos por transformaciones h(x)

① $h(x) = 2^x$

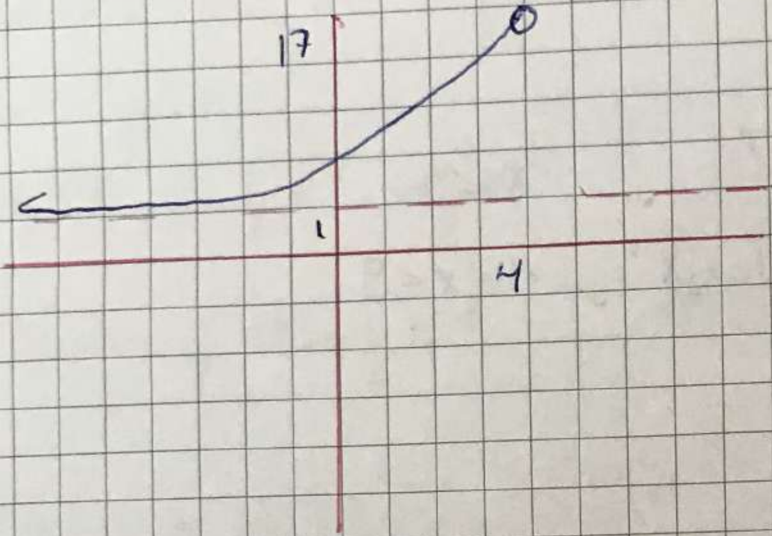


② $h(x) = 1+2^x$



CAAS

③ Restringimos el Dom

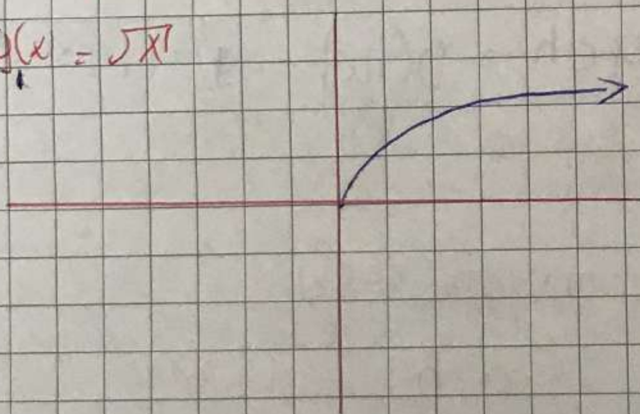


Dom $h_1(x) =]-\infty; 4[$

Rang $h_1(x) =]1; 17[$

→ ahora graficaremos $g_1(x)$

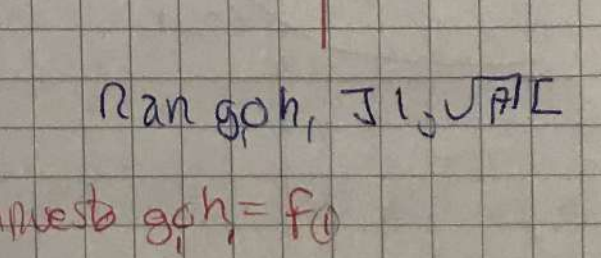
① $g_1(x) = \sqrt{x}$



② $x < 4$

el Rango de h_1 es el Dom de $g_1 \circ h_1$

② $g_1 \circ h_1$, Dom $g_1 \circ h_1$ $]1; 17[$



Ran $g_1 \circ h_1$ $]1; \sqrt{17}[$

Así, concluimos que la función compuesta $g_1 \circ h_1 = f_1$ tiene:

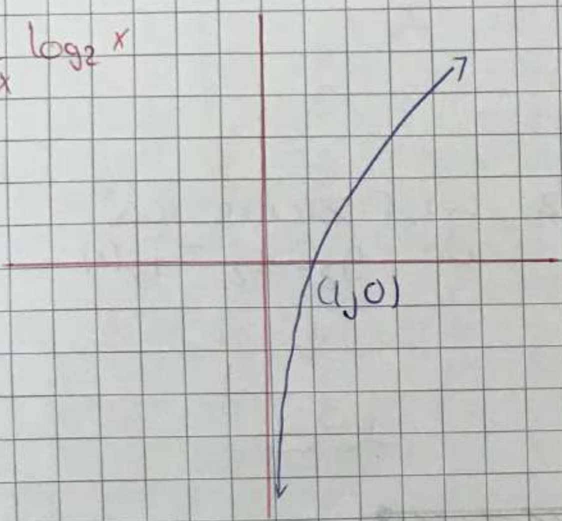
Dom $g_1 \circ h_1$ $]1; 17[$

Ran $g_1 \circ h_1$ $]1; \sqrt{17}[$

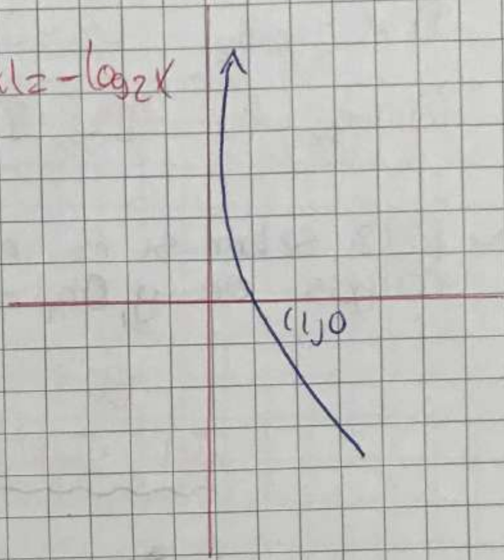
② $g_2(x) = \sqrt{x}$; $h_2(x) = 3 - \log_2 x$ $\{ g \circ h = g(h(x)) = \sqrt{3 - \log_2 x}$

o graficamos $h_2(x)$

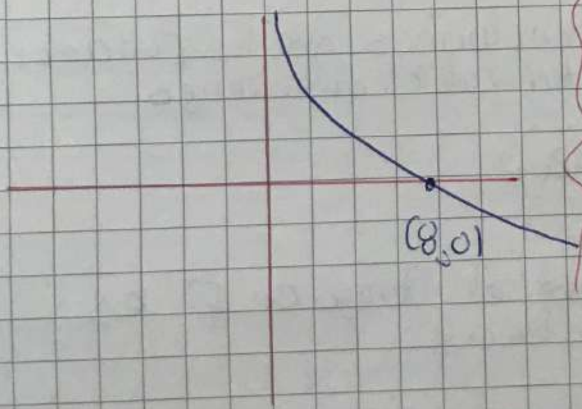
① $h_{2}(x) = \log_2 x$



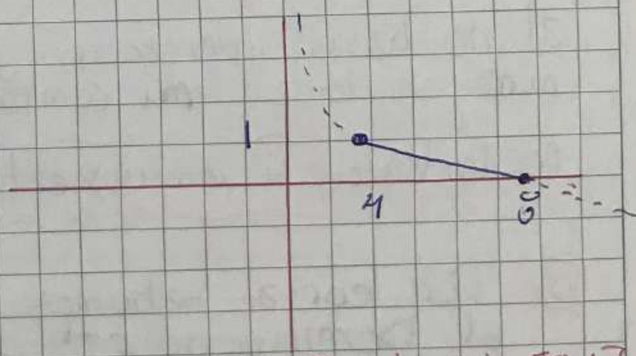
② $h_2(x) = -\log_2 x$



③ $h_2(x) = 3 - \log_2 x$



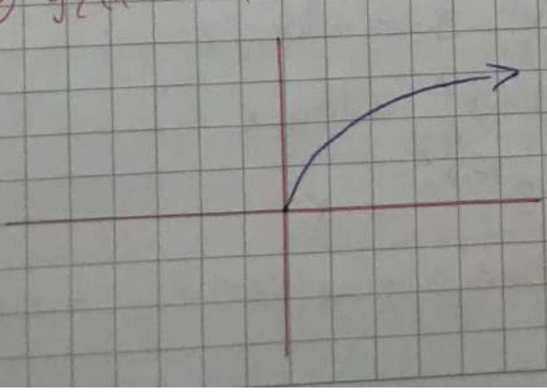
④ Restringiendo dominio $4 \leq x \leq 8$



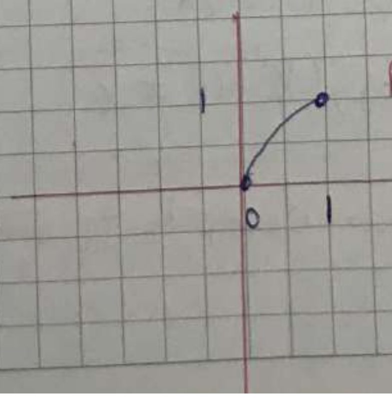
$Ran\ h_2(x) = [0, 1]$

o ahora graficamos $g_2(x)$

① $g_2(x) = \sqrt{x}$



② el rango de h_2 es el Dom de $g_2 \circ h_2$



$Ran\ g_2 \circ h_2 = [0, 1]$

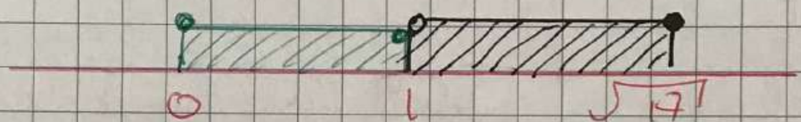
Así concluimos que la función compuesta $g_2 o h_2 = f_2$ tiene:

Dom $g_2 o h_2$ $[4, 8]$

Ran $g_2 o h_2$ $[0, 1]$

→ Para saber si es inyectiva, verificaremos los rangos de $g_1 o h_1 = f_1(x)$ y de $g_2 o h_2 = f_2(x)$

$\Downarrow$ $]1, \sqrt{17}]$ $\quad\quad$ $\Downarrow$ $[0, 1[$



al no haber intersección, concluimos que las funciones nunca se tocan ni comparten valores en su rango

por lo tanto si es inyectiva.

(b) Por teoría sabemos que el Rango de f es el Dominio de f^{-1}, entonces

$$y_1 = \sqrt{1 + 2^x}$$
$$y_1^2 = 1 + 2^x$$
$$y_1^2 - 1 = 2^x$$
$$\log_2(y_1^2 - 1) = x$$

$$y_2 = \sqrt{3 - \log_2 x}$$
$$y_2^2 = 3 - \log_2 x$$
$$y_2^2 - 3 = -\log_2 x$$
$$3 - y_2^2 = \log_2 x$$
$$2^{3 - y_2^2} = x$$

Ran $g_1 o h_1$ = Dom f_1^{-1} = $]1, \sqrt{17}[$

Ran $g_2 o h_2$ = Dom f_2^{-1} = $[0, 1[$

$$f^{-1} = \begin{cases} \log_2(x^2-1) & ; \ 1 < x < \sqrt{17} \\ 2^{3-x^2} & ; \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\text{Dom } f^{-1} \ [0 ; \sqrt{17}[$

CAAS

2)

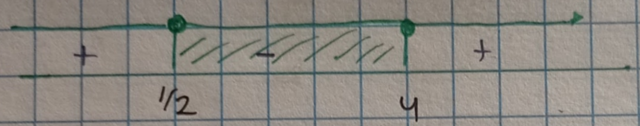
a) $-4^x + 9 \cdot 2^{x-1} - 2 \geq 0$

Sea $2^x = \alpha$

$$-\alpha^2 + \frac{9}{2}\alpha - 2 \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{-\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 8}}{+2} = \frac{+\frac{9}{2} \pm \frac{7}{2}}{+2}$$

$$\alpha^2 - \frac{9}{2}\alpha + 2 \leq 0 \qquad = 4 \wedge \frac{1}{2}$$

$$(\alpha - 4)(\alpha - \tfrac{1}{2}) \leq 0$$



$\rightarrow \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 4$

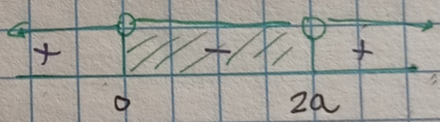
$\log_2 \hookrightarrow \frac{1}{2} \leq 2^x \leq 4 \qquad \rightarrow x \in [-1; 2]$

$-1 \leq x \leq 2$

b)

Dom f $\Rightarrow \quad 2ax - x^2 > 0$

$x(x - 2a) < 0$



$\rightarrow x \in]0; 2a[$

Ran f:

Sea $g(x) = 2ax - x^2$, $x \in]0; 2a[$

Como el término cuadrático es negativo, la parábola se abre hacia abajo y su valor máximo está en el vértice.

$\frac{-2a}{-2} = a \quad \rightarrow$ Valor max de g: $(a; g(a))$

Valor mín de g: $(0; 0)$ No definido, pero se acerca

Entonces, $\text{Ran}\, g =]0; a^2]$

Usamos el rango de g como Dominio en f para componer $f \circ g$. Como $\log_{\sqrt{a}}$ es creciente, bastará reemplazar para hallar el rango:

$\log_{\sqrt{a}}(0) \rightarrow -\infty \qquad \log_{\sqrt{a}}(a^2) = \frac{2}{1/2}\log_a(a) = 4 \Rightarrow \text{Ran}\, f =]-\infty; 4]$

CAAS

3)

a) Primer tramo:

$$f(x) = -5 + \sqrt{16 - 4(x+1)^2}$$

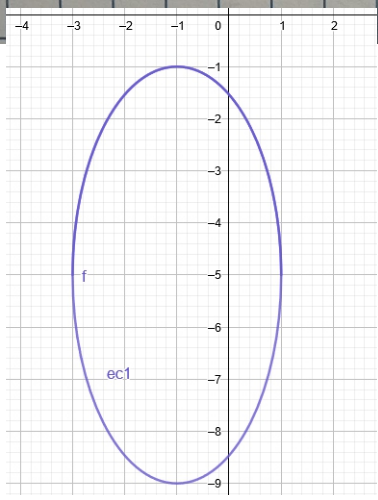
$$y + 5 = \sqrt{12 - 4x^2 - 8x}$$

$$y^2 + 10y + 25 = 12 - 4x^2 - 8x$$

$$y^2 + 4x^2 + 10y + 8x + 13 = 0$$

$$(y+5)^2 + 4(x+1)^2 = 16$$

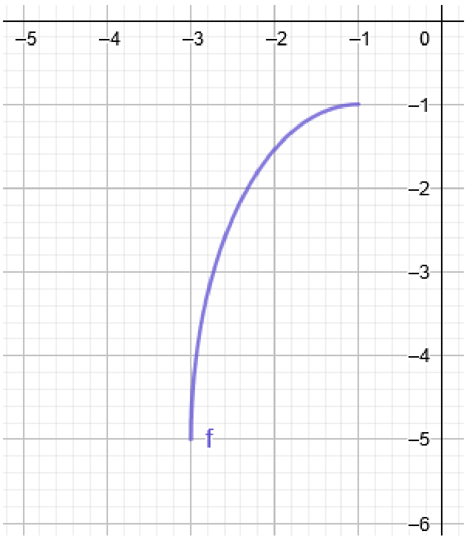
$$\frac{(y+5)^2}{16} + \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$ Es una elipse



Probamos algún valor:

$x = -2 \rightarrow -5 + \sqrt{16-4} = -5 + 2\sqrt{3}$ $\rightarrow > -5$

Nos quedamos con el tramo de arriba y recortamos en el dominio dado.



Identificamos las asíntotas en el segundo tramo:

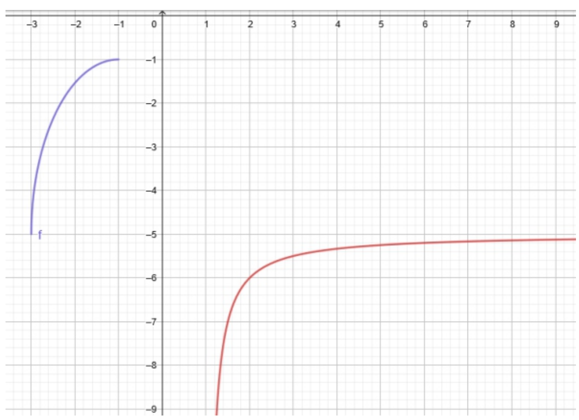
y=-5/1=-5　　　　　x=-(-1)/1=1

Probamos algunos valores de x para identificar las tendencias de la gráfica:

g(1,01)=-1,05/0,05=-21　　g(2)=-6/1=-6　　　g(4)=-16/3

Entonces, el segundo tramo será:

Los juntamos:



Con el gráfico, podemos afirmar que el rango de f(x) es]-∞;-5[U]-5;-1] y tiene como asíntotas a las rectas x=-1 y y=-5

3b Sea $f(x) = \dfrac{ax+4}{x-1}$, $x>1$

Reescribiendo, $f(x) = a + \dfrac{4+a}{x-1}$, $x>1$

Hallemos los valores de a tq $f(x)$ sea creciente, es decir,

* Sean $a, b \in \text{Dom} f$, si $m>n \Rightarrow f(m) > f(n)$

Entonces, si $m>n>1 \Rightarrow m-1 > n-1 > 0$

$$0 < \frac{1}{m-1} < \frac{1}{n-1}$$

multiplicamos por (4+a) teniendo en cuenta que (4+a) deberá ser negativo (ver NOTA)

$$0 < \frac{(4+a)}{m-1} > \frac{4+a}{n-1}$$

$$a + \frac{4+a}{m-1} > a + \frac{4+a}{n-1}$$

Es decir, $\underbrace{f(m) > f(n)}$.

Lo que se necesitaba

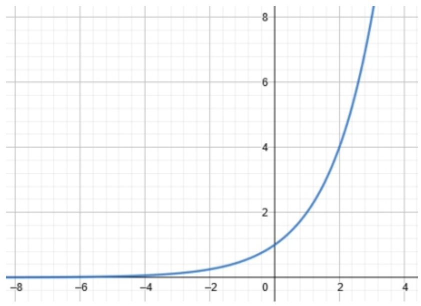
Entonces, con $(4+a)<0$, $f(x)$ será creciente, es decir, para $a<-4$, f creciente.

* NOTA: Recordar la propiedad: si $c>0$, $a>b \Rightarrow a.c > c.b$
si $c<0$, $a>b \Rightarrow a.c < c.b$

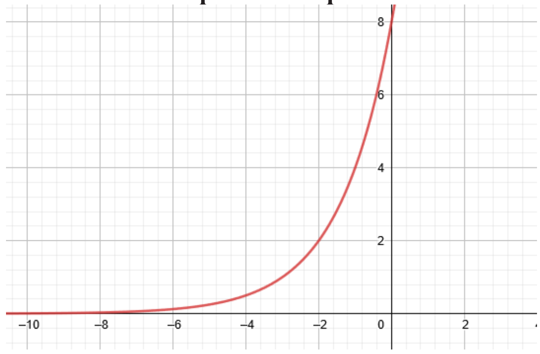
En nuestro caso teníamos $\dfrac{1}{m-1} < \dfrac{1}{n-1}$, de haber multiplicado por $(4+a)>0$, hubieramos obtenido $f(m)<f(n)$, sin embargo se necesitaba $f(m)>f(n)$. Por eso se tomó $(4+a)<0$.

4) a)

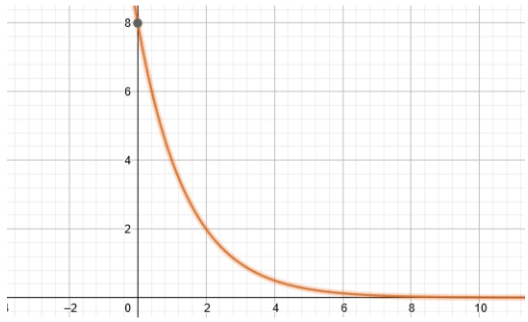
Empezamos con la gráfica de 2^x



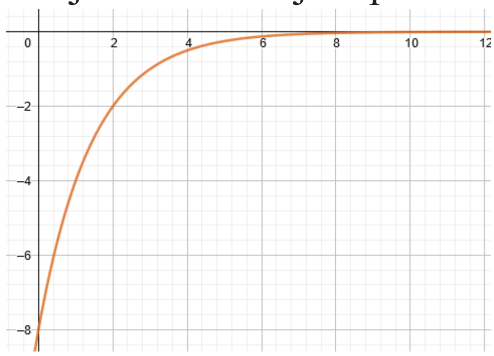
Desplazamos 3 unidades a la izquierda para 2^{x+3}



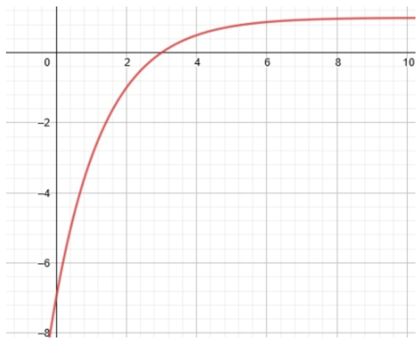
Reflejamos en el eje y para 2^{-x+3}



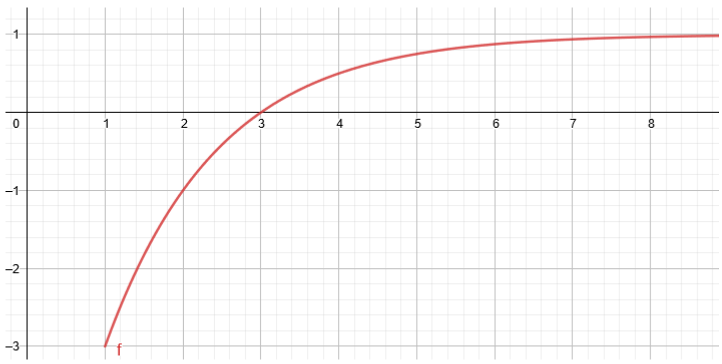
Reflejamos en el eje x para -2^{-x+3}



Desplazamos 1 unidad abajo para $1-2^{-x+3}$



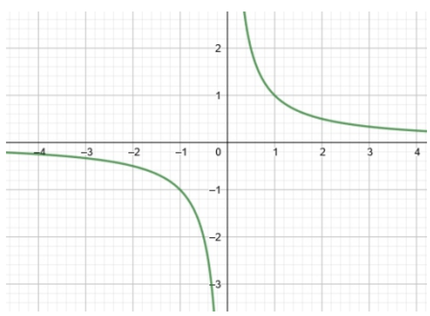
Finalmente, recortamos en el dominio dado para f(x)



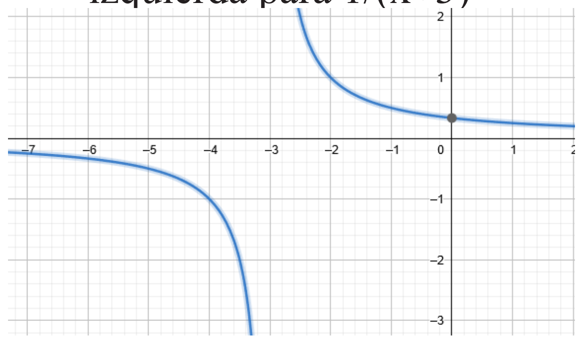
Con ayuda de la gráfica, podemos afirmar que el rango de f(x) es [-3;1[y tiene como asíntota a la recta y=1.

b) Para empezar este inciso, graficaremos a la función g(x)

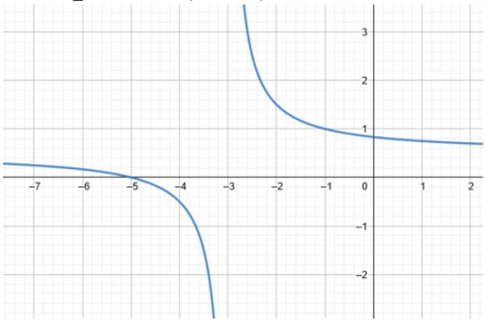
Iniciamos con la gráfica de 1/x



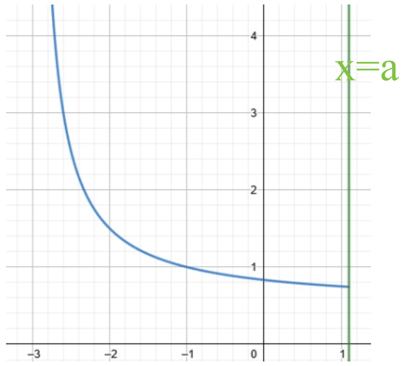
Desplazamos 3 unidades a la izquierda para 1/(x+3)



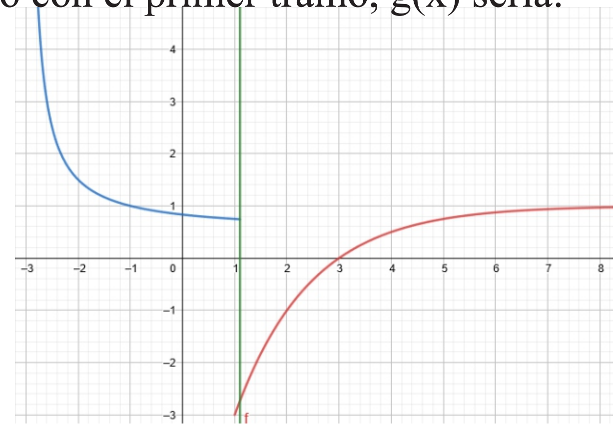
Trasladamos media undiad arriba para 1(x+3) +1/2



Recortamos en el dominio dado para el primer tramo de g(x)



Entonces, uniéndolo con el primer tramo, g(x) sería:



Cada tramo es inyectivo por sí mismo; sin embargo, necesitamos que los rangos de cada tramo no coincidan. Es decir, g(a), el valor mínimo del primer tramo, debe ser ≥1.

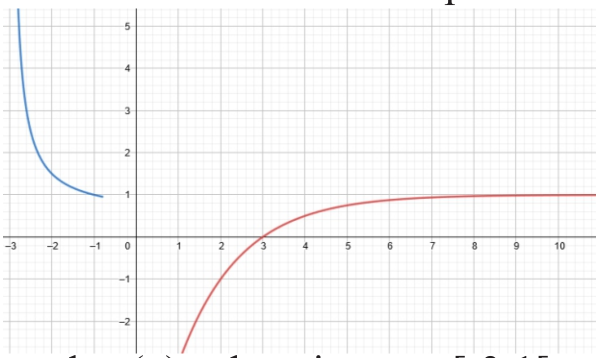
$$1/(a+3)+1/2\geq 1$$

$$1/(a+3)\geq 1/2$$

$$2\geq a+3$$

$$-1\geq a$$

c) Usaremos la gráfica anterioremente obtenida para analizar este inciso.



Notamos que el rango de g(x) cubre siempre [-3;1[, por lo que debemos buscar a que cubran [1;+∞[. Es decir 1 ≥ g(a)

$$1\geq 1/(a+3)+1/2$$

$$1/2\geq 1/(a+3)$$

$$a+3\geq 2$$

$$a\geq -1$$

5. Justifique la verdad y falsedad:

a) Se sabe $|x| \geq 0 \Rightarrow |x+1| \geq 0$

$-|x+1| \leq 0$

e^{M} función creciente $\rightarrow$ $e^{-|x+1|} \leq e^{0}$

Sea $f(x) = e^{-|x+1|}$

Tendremos, $f(x) \leq 1$

$* \; MAX(f(x)) = 1$

$\therefore$ Máximo valor de $f(x)$ es 1, es VERDAD.

b) Sea $f(x) = -e^{x}$ y $g(x) = [f(x)]^{2}$, es decir,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ← No, necesariamente, es el Rango.

Dom

$g(x) = e^{2x}$ (creciente)

Sin embargo, $f(x) = -e^{x}$ es decreciente $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Si $g(x) = [f(x)]^{2}$ creciente $\rightarrow$ $f(x)$ creciente. ES FALSO.

c) Sea $f(x) = 3^{x} - 2^{x}$, $x \in]0, +\infty[$

Sean $a, b \in Dom f$ tq $a > b > 0$ → 2^{x} creciente

$2^{a} > 2^{b} > 2^{0}$

$2^{a} > 2^{b} > 1 \ldots (\alpha)$

Además, $a > b > 0 \Rightarrow (3/2)^{a} > (3/2)^{b} > (3/2)^{0}$ → $(3/2)^{x}$ creciente

$(3/2)^{a} - 1 > (3/2)^{b} - 1 > 0 \ldots (\beta)$

Ahora, $(\alpha) \cdot (\beta) = 2^{a}((3/2)^{a} - 1) > 2^{b}((3/2)^{b} - 1) > 0$

$\Rightarrow f(a) > f(b) > 0$

Tenemos $f(x)$ estrictamente creciente, por lo tanto, $f(x)$ es inyectiva.

$\therefore$ VERDAD.