ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

PUCP

Año: 2022 Número: 0675

Código de alumno

Primer examen

Eelada Flores Adrián Josué

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

Curso: FUCAL

Horario: 172-1

Fecha: 13/10/22

Nombre del profesor: J. Arce

Nota

18

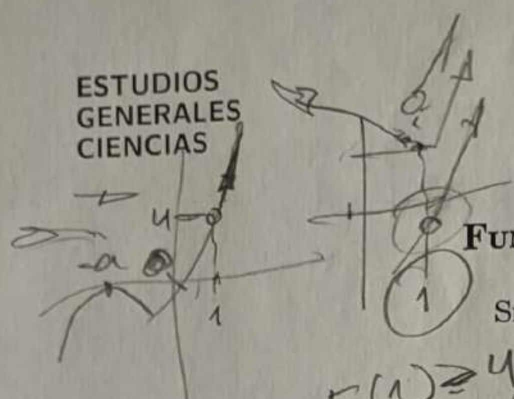
Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ



Fundamentos de Cálculo

Examen Parcial

Semestre Académico 2022-2

$F(1) \geq 4$

$(1)^3 + 2a(1) + a^2(1) \geq 4$

Horario: Todos. Duración: 180 minutos.

Elaborado por todos los profesores.

Advertencias:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

---

1. Determine el dominio (implícito) de la función (2 pt)

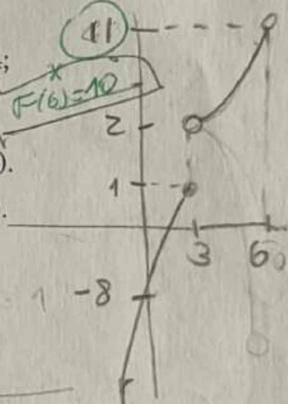
$D_f =]-2;2] - \{1\}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x^2 + x - 2} - \sqrt{\frac{2 - |x|}{2 + |x|}}.$$

2. Considere las funciones

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 6 - x, & -5 < x < 4; \\ |x - 4| + 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$F(6) = 10$

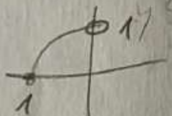


a) Halle la función $f + g$ (indicando su dominio y su regla de correspondencia). (1,5 pt)

b) Halle la función $g \circ f$ (indicando su dominio y su regla de correspondencia). (2 pt)

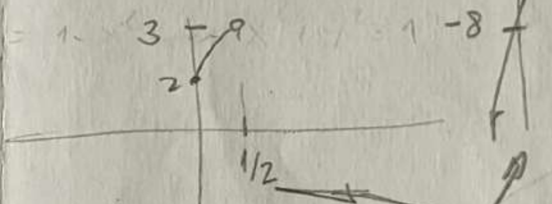
c) Esboce la gráfica de la función $g \circ f$. (1,5 pt)

3. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 0[$.



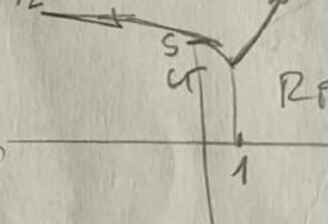
a) Esboce la gráfica de f. (1,5 pt)

b) Esboce la gráfica de $g(x) = 2 + f(2x - 1)$. (1,5 pt)



4. Sea $a > 0$ una constante real. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 + (x + a)^{\frac{2}{3}}, & \text{si } x \leq 1; \\ x^3 + 2ax^2 + a^2 x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



$R_f\, [4; +\infty[$

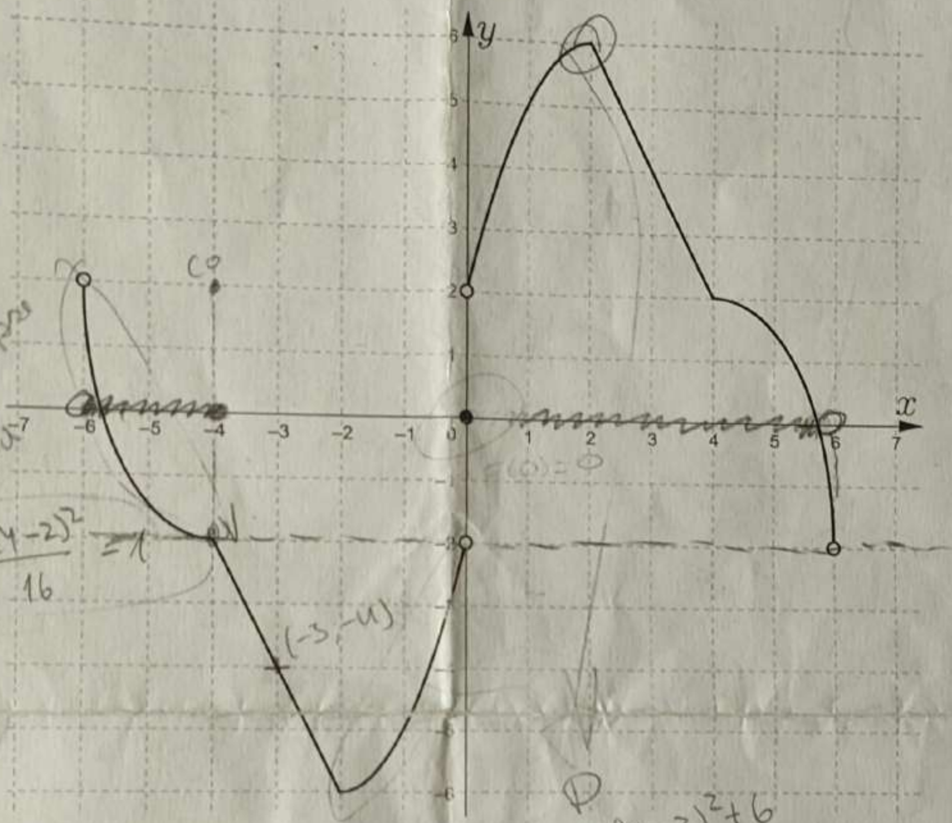
a) Cuando $a = 1$, esboce la gráfica de f y calcule su rango. (2 pt)

b) Encuentre el conjunto de todos los valores de a para los cuales el rango de f es $[4, +\infty[$. (2 pt)

$a =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

4p

5. A continuación, se muestra la gráfica de la función f.



Se sabe que:

- f es una función impar. $f(x)=-f(-x)$
- Para $x \in]-6,-4]$, la gráfica consiste de un cuarto de elipse con centro en $(-4,2)$ y vértice en $(-4,-2)$.
- Para $x \in]-4,-2]$, la gráfica corresponde a un segmento de recta.
- Para $x \in]0,2[$, la gráfica es una porción de parábola de vértice $(2,6)$.

$y+4=m(x+3)$

$m=-2=\frac{-4+2}{-3+4}=-2$

$y=-2(x+3)-4$

$\boxed{y=-2x-10}$

a) Determine la regla de correspondencia de f (indicando su dominio). (3,5 pt)

b) Encuentre el conjunto de los valores de x para los cuales $f(x) \geq -2$. (0,5 pt)

$]-6;-4] \cup [0;6[$

6. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función cuadrática tal que $f(2)=f(4)=0$ entonces $f(1)f(3)<0$. (V) (1 pt)

b) Si $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ cumple que $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$ y $f(3)=3$, entonces el rango de f es $[0,+\infty[$. (1 pt)

(F)

San Miguel, 13 de octubre de 2022.

3

3

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

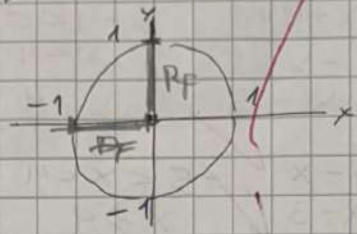
$\boxed{3}$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad x \in [-1;0[$

$y=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$c_0=(0;0)$ $\quad r=1$

gr:



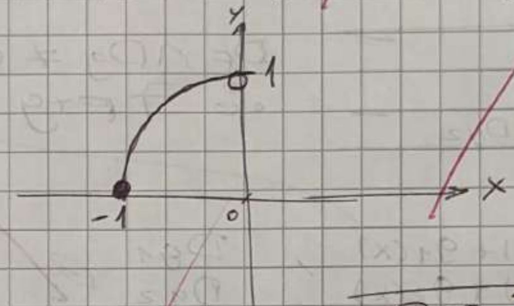
$\sqrt{1-x^2}\geq 0$

$f(x)\geq 0$

parte del Ran

Con las restricciones del rango y el dominio

gr(f):



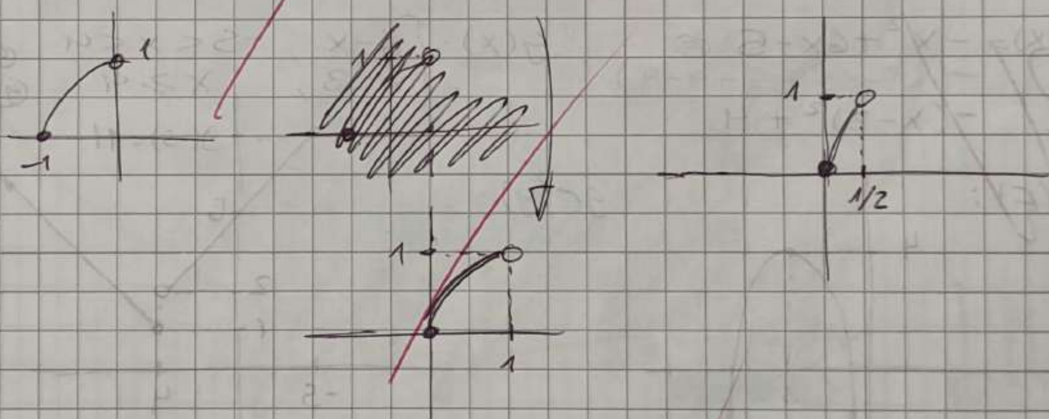
Rpta a)

a) 1,5

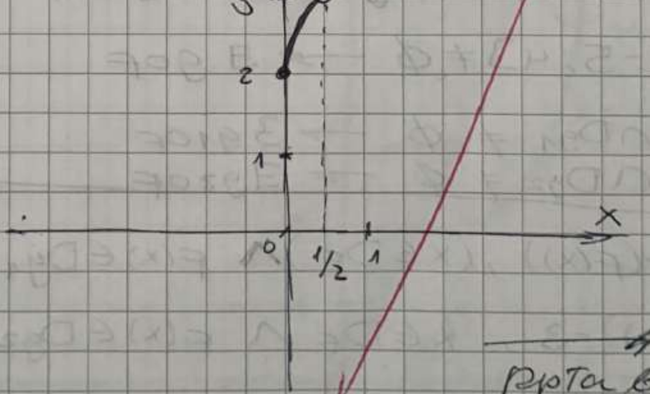
b) 1,5

b) $g(x)=2+f(2x-1)$

$f(x)=y \to f(x-1)=y \to f(2x-1)=y$



$\to f(2x-1)+2=y+2=g(x)$



Rpta b)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

2

$f(x) = -x^2+6x-5$ $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \begin{cases} 6-x, & -5<x<4 \\ |x-4|+1, & x \geq 4 \end{cases}$

$-x+4+1$, $x-4<0$ ⟸ no hay ∩
$-x+5$, $x<4$
$x-3$, $x \geq 4$

$g(x) = \begin{cases} 6-x & -5<x<4 \\ x-3 & x \geq 4 \end{cases}$

a) Para f+g

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g =$ D_{g1} D_{g2} (−5, 4)

$D_f \cap D_g \neq \emptyset$
$\therefore \exists f+g$

$(f+g)(x) = \begin{cases} f(x)+g_1(x), & D_{g1} \\ f(x)+g_2(x), & D_{g2} \end{cases}$

$(f+g)(x) = \begin{cases} -x^2+5x+1, & -5<x<4 \\ -x^2+7x-8, & x \geq 4 \end{cases}$

$-x^2+6x-5+6-x$
$-x^2+5x+1$

$-x^2+6x-5+x-3$
$-x^2+7x-8$

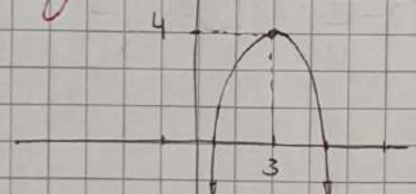
gof:
$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$
$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g$
$\exists g o f \Leftrightarrow R_f \cap D_g \neq \emptyset$

b) Para gof

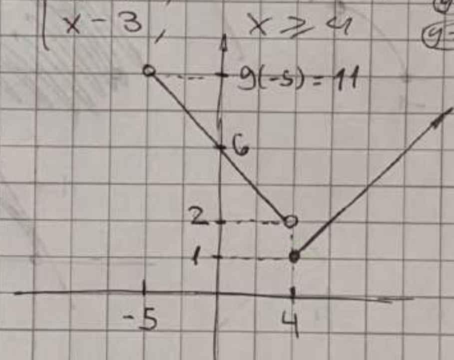
$f(x) = -x^2+6x-5$
$-(x^2-6x+5+9-9)$
$-(x-3)^2+4$

$g(x) = \begin{cases} 6-x, & -5<x<4 & (g_1) \\ x-3, & x \geq 4 & (g_2) \end{cases}$

gr(f):



gr(g):



$D_f = \mathbb{R}$
$R_f =]-\infty; 4]$

$D_g =]-5; +\infty[$
$R_g = [1; +\infty[$

$R_f \cap D_g =]-5; 4] \neq \emptyset \rightarrow \exists g o f$

para $g_1 o f$ = $R_f \cap D_{g1} \neq \emptyset \rightarrow \exists g_1 o f$
$g_2 o f$ = $R_f \cap D_{g2} \neq \emptyset \rightarrow \exists g_2 o f$

R_f D_{g1} D_{g2} −5 4

$R_f \cap D_{g1} =$ −5 4
$=]-5; 4[$

$R_f \cap D_{g2} =$ 4
$= \{4\}$

$(g o f)(x) = \begin{cases} 6-(f(x)), & (x \in D_f) \wedge f(x) \in D_{g1} \\ (f(x))-3, & x \in D_f \wedge f(x) \in D_{g2} \end{cases}$

$4 > f(x) > -5$
$4 > \underbrace{-x^2+6x-5}$ > -5

$-x^2+6x-9<0$ ∧
$-x$ $3x$ 3
x $+3x$ -3
$6x$

$(-x+3)(x-3)<0$
$x=3$ $x=3$

+ 3

$x \in]3; +\infty[$

Para $g_1 o f$: $D_{g_1 o f} = x \in \mathbb{R} \wedge -5 < f(x) < 4$
$4 > -x^2+6x-5 > -5$
$4 > -x^2+6x-5$ $\wedge -x^2+6x-5 > -5$
$(-x+3)(x-3)<0$ $\wedge (x)(x-6)<0$
~~$x > 3$~~ $\wedge 0<x<6$
$x \in \mathbb{R}-\{3\}$
$-(x-3)^2 < 0$

$D_{g_1 o f} =]3; 6[$ ≠ $\mathrm{Dom}\, g_1 o f =]0; 6[-\{3\}$.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-x^2+6x-9 \geq 0$

$-(x^2-6x+3) \geq 0$

$(x-3)^2 \leq 0$

$x \in]-\infty;3]$

$6-(-(x-3)^2+4)$

$6+(x-3)^2-4$

$(x-3)^2+2$

$-(x-3)^2+4 -3$

$6-(-x^2+6x-5)$

$6+x^2-6x+5$

$x^2-6x+11$

$(x^2-6x+9\boxed{-9+11})$

$(x-3)^2+2$

$-(x^2-6x)>0$

$(x^2-6x)<0$

$(x)(x-6)<0$

$\boxed{x \in]0;6[}$

$-x^2+6x>0$

$-(x^2-6x+9)$

$-(x-3)^2 \leq 0$

$(x-3)^2 \geq 0$

Presente aquí su trabajo

para $g_2 \circ F$: $D_{g_2 \circ F} = x \in D_F \wedge F(x) \in D_{g_2}$

$x = \mathbb{R} \wedge -x^2+6x-5 \geq 4$

$(x-3)^2 \leq 0$

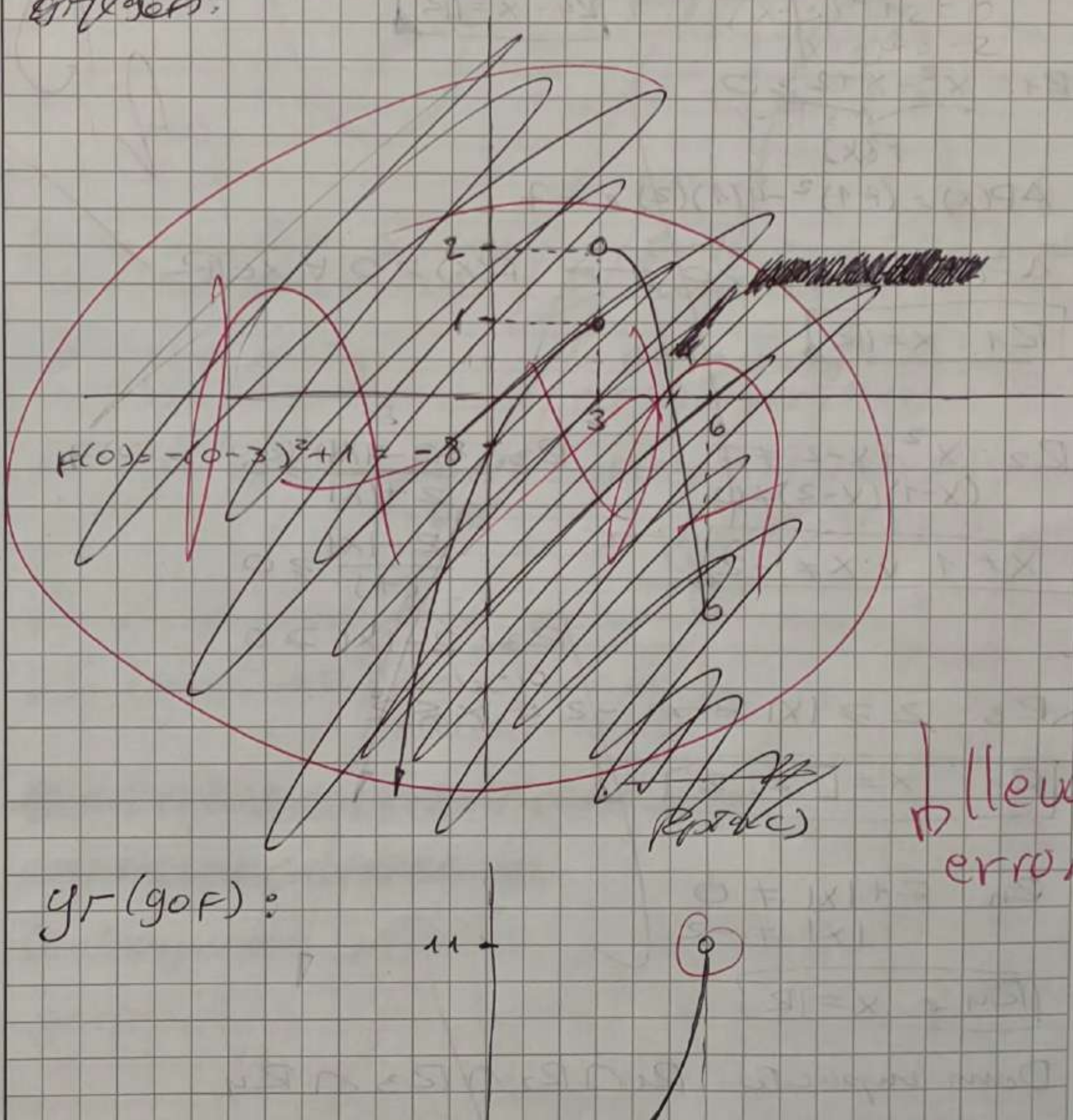
$3^2+2=11$ $\quad D_{g_2\circ F} = x \cancel{\in]-\infty;3]}$ $x=3$ solo

$(6-3)^2+2$

$$(g\circ F)(x) = \begin{cases} (x-3)^2+2, & 3<x<6 \; ; x\neq 3 \\ -(x-3)^2+1, & x \leq 3 \end{cases}$$

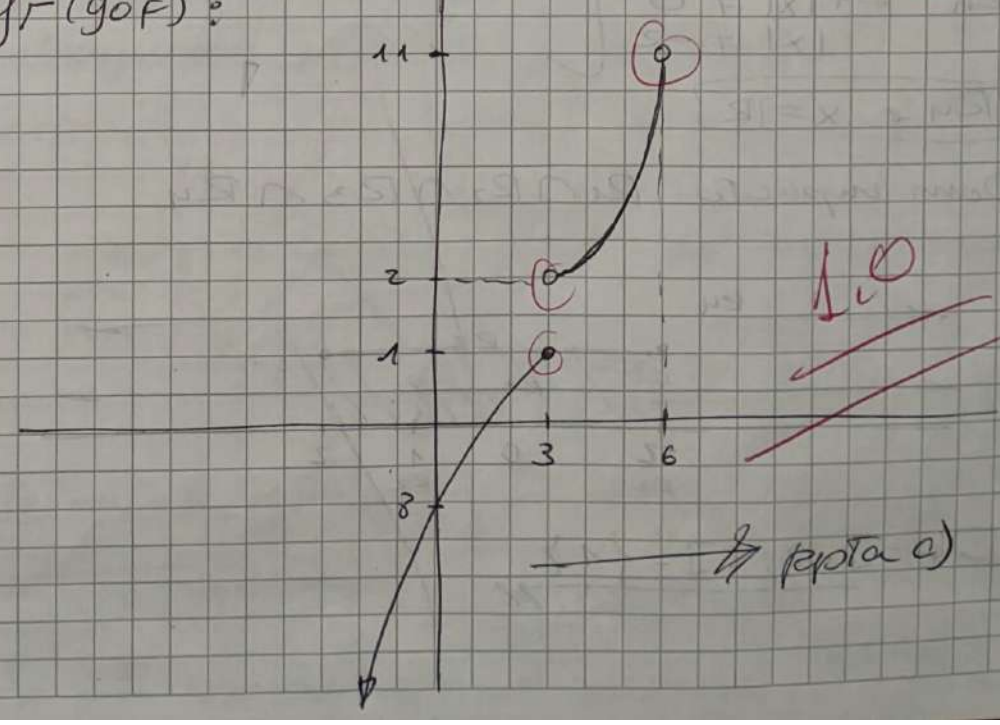
Rpta b)

~~Gr(gof):~~



b) llevo error

gr(gof):



1.0

1

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x^2+x-2}-\sqrt{\frac{2-|x|}{2+|x|}}$$

Restricciones:

$R_1: x^2-x+2 \geq 0$ $\quad R_3: \frac{2-|x|}{2+|x|} \geq 0 \leftrightarrow \frac{2-|x|}{(+)} \geq 0$

$R_2: x^2+x-2 \neq 0$ $\quad 2-|x| \geq 0$

$\boxed{R_3: 2 \geq |x|}$

$R_4: 2+|x| \neq 0$

$|x| \neq -2$

$\boxed{R_4: x = \mathbb{R}}$

$R_1: \underbrace{x^2-x+2}_{P(x)} \geq 0$

$\Delta P(x) = (-1)^2-4(1)(2) = -7$

$\Delta P(x) < 0 \wedge a > 0 \rightarrow P(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{R_1: x = \mathbb{R}}$

2,0

$R_2: x^2+x-2 \neq 0$

$(x-1)(x-2) \neq 0$

$\boxed{R_2: x \neq 1 \vee x \neq -2}$

$R_3: \frac{2-|x|}{2+|x|} \geq 0$

$\frac{2-|x|}{(+)} \geq 0$

$R_3: 2-|x| \geq 0$

$R_3: 2 \geq |x| \leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

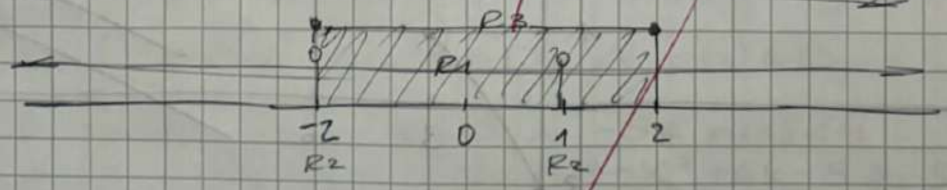
$\boxed{R_3: x = [-2; 2]}$

$R_4: 2+|x| \neq 0$

$|x| \neq -2$

$\boxed{R_4: x = \mathbb{R}}$

Dom implícito: $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$



$D_f =]-2; 2] - \{1\}$

$x^2-x+2 \geq 0$

$x_{1,2}:$

$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$

$1-8$

$\Delta P(x) = (-1)^2-4(1)(2)$

$= -7 < 0$

$\Delta P(x) < 0 \wedge a > 0$

$\therefore P(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2+x-2 \neq 0$

$\frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2-4(\ )(-2)}}{2(1)}$

b)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$a(x-h)^2+K$

$F(2)=F(4)=0$

$a(2-h)^2+K=0$

$a(4-h)^2+K=0$ (=)

$g(x)=x^2$ | $g(2)=4$, $g(4)=16$

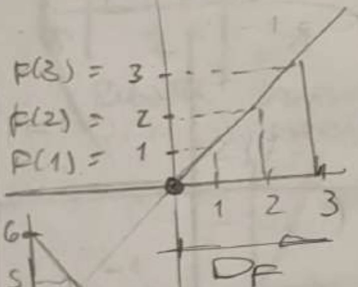
$(x-2)^2$

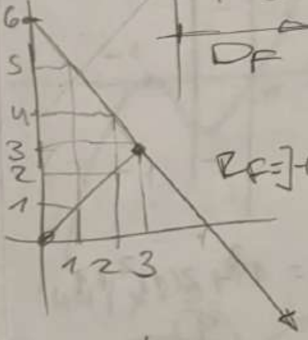
$h(2)=0$ 4

$h(4)=4$

$\boxed{(x-3)^2-1}$

$F'(2)=(2$





$F(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;3] \\ -x+6, & x>3 \end{cases}$

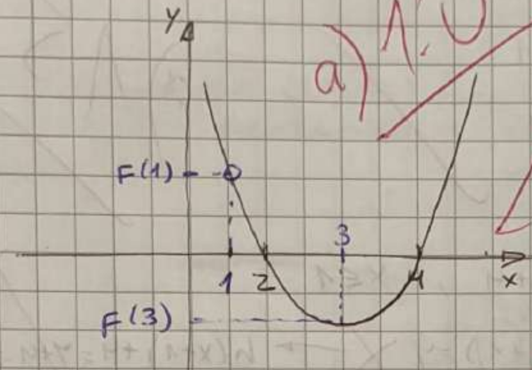
Presente aquí su trabajo

6

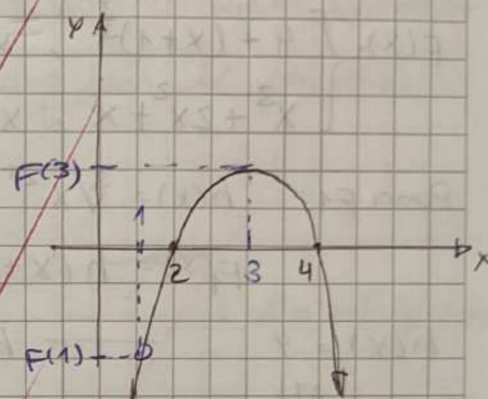
a) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es cuadrática / $F(2)=F(4)=0 \to F(1)F(3)<0$

Si F es cuadrática y $F(2)=F(4)=0$ significa que gr(f) intersecta al eje X en 2 y 4

Opción 1:



Opción 2:



a) 1.0

En la opción 1: cuando evalúas $F(1)$ y $F(3)$:

- $F(1)$ = positivo
- $F(3)$ = negativo

$F(1)F(3)=(\text{pos})(\text{neg})<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

En la opción 2: cuando evalúas $F(1)$ y $F(3)$:

- $F(1)$ = negativo
- $F(3)$ = positivo

$F(1)F(3)=(\text{neg})(\text{pos})<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

(V) unión

∴ La proposición es verdadera (Rpta a)

b) ($F:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$) $F(0)=0$, $F(1)=1$, $F(2)=2$, $F(3)=3$ $\to R_F=[0;+\infty[$

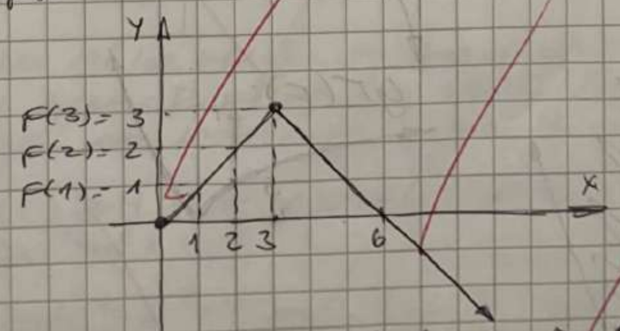
~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

b) 1.0

Contraejemplo: $F(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;3] \\ -x+6, & x>3 \end{cases}$

gr(F):



$\underbrace{F:[0;+\infty[\to\mathbb{R}\,/\,F(0)=0,\ F(1)=1,\ F(2)=2,\ F(3)=3}_{\text{verdadero}} \longrightarrow \underbrace{R_F=[0;+\infty[}_{\text{falso, es }]-\infty;3]}$

(Rpta b)

∴ La proposición es Falsa

Presente aquí su trabajo

4 $a>0$, $a\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}4+(x+a)^{\frac{2}{3}}, & x\le 1\\ x^3+2ax^2+a^2x, & x>1\end{cases}$$

a) $a=1$, esboce $gr(F)$ y halle R_F:

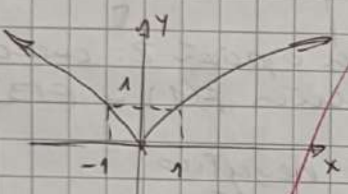
$$f(x)=\begin{cases}4+(x+1)^{\frac{2}{3}}, & x\le 1\\ x^3+2x^2+x, & x>1\end{cases}$$

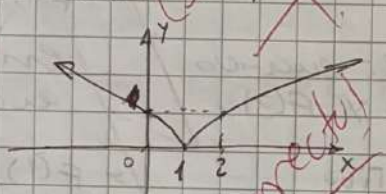
a) 1.5

Para f_1: $h(x)=\sqrt[3]{x^2}$

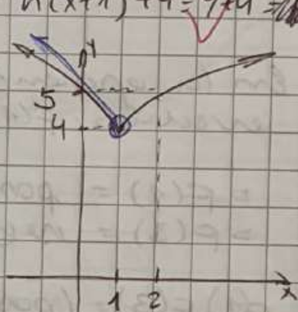
$F_1(x)=h(x+1)+4$, $x\le 1$

$h(x)=y \longrightarrow h(x+1)=y \longrightarrow h(x+1)+4=y+4$





incorrecto



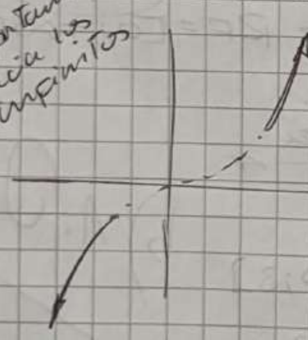
Para F_2: x^3+2x^2+x, $x>1$

Tlicks: x^3 $\quad\rightarrow (x)(x+1)^2$

$n=3$, $a>0$

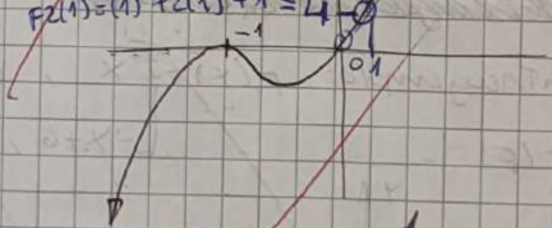
Raíz	-1	0
multiplicidad	2	1

comportamiento hacia los infinitos

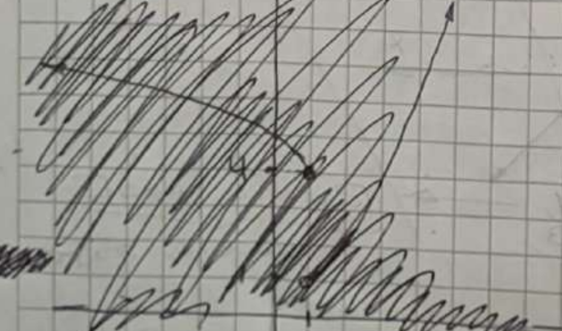


$F_2(x)=y$

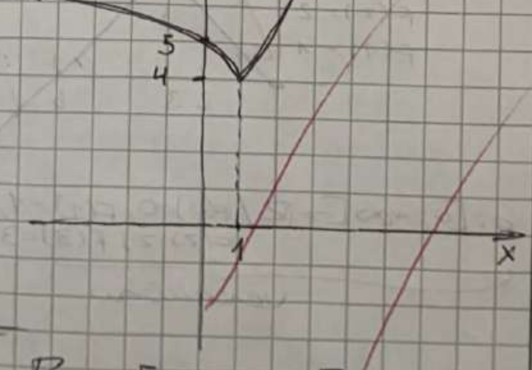
$F_2(1)=(1)^3+2(1)^2+1=4$



~~[illegible]~~



$gr(F)$:



$R_F=[4;+\infty[$

rpta a)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{2}{3}<1 \rightarrow$ valores de decreciente

$x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

entrada

$(+)\xrightarrow{g}(+)^2$

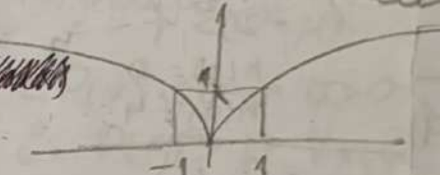
$(-)\longrightarrow(-)^2=(+)$ $g(x)$

$g(x)\xrightarrow{F}$

$(+)\longrightarrow\sqrt[3]{(+)}=(+)$

Saucedo

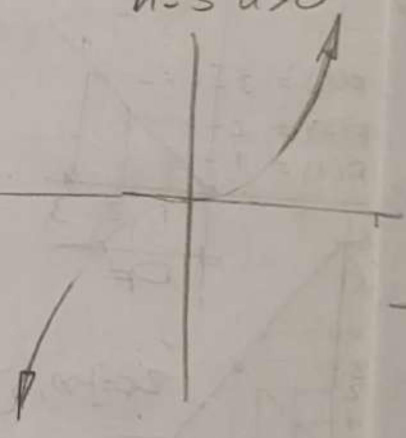
pendiente decreciente



x^3+2x^2+x

Tlicks: x^3

$n=3$ $a>0$



$F_2(1)=1^3+2(1)^2+1$

4

derivada en $X \geq 0$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

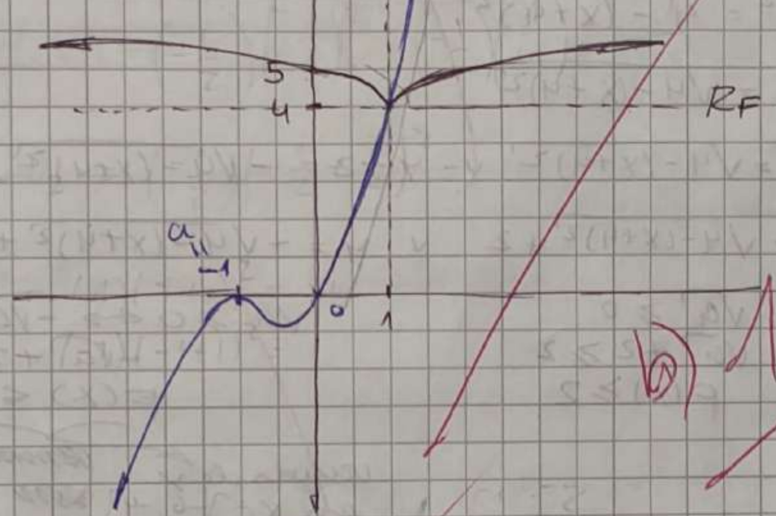
b) $F_1(X) = 4 + (X+a)^{2/3}$

Traslación horizontal

$F_2(X) = (X)(X+a)^2$

define un punto de intersección con el eje X, puede ser vista como una traslación también

Gráficos de ambas funciones en el mismo plano cuando $a = 1$



b) 1.5

En $F_1(X) = (X+a)^{2/3} + 4$ el vértice $\to (a; 4)$ y lo que define el rango de esta función es $K = 4$, ∴ en esta sección a no afecta al rango.

Donde sí lo afecta es en $F_2(X) = (X)(X+a)^2$, entonces para que R_F sea $[4; +\infty[$ las imágenes en $X \geq 1$ deben ser mayores que 4

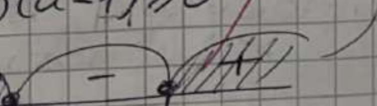
$F_2(1) \geq 4 \Leftrightarrow (1)(1+a)^2 \geq 4$

$X^3 + 2aX^2 + a^2X \geq 4$

$1^3 + 2a(1)^2 + a^2(1) \geq 4$

$a^2 + 2a - 3 \geq 0$

$(a+3)(a-1) \geq 0$



$\Rightarrow a =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

Rpsta b)

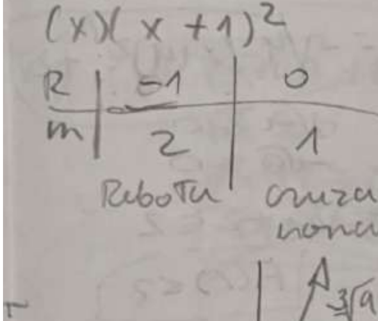
$\boxed{a > 0}$

$(X)(X^2 + 2X + 1)$

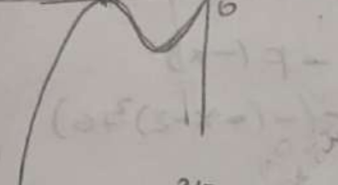
$(X)(X+1)^2$

R	−1	0
m	2	1

Rebota cruza normal



$4 + (X+a)^{2/3}$

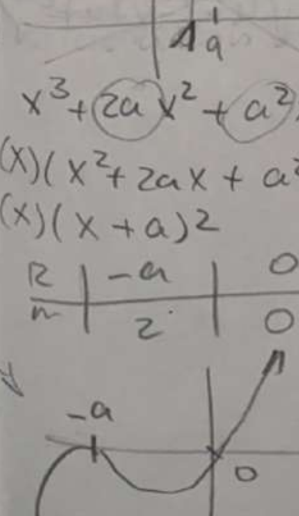


$X^3 + 2aX^2 + a^2X$

$(X)(X^2 + 2aX + a^2)$

$(X)(X+a)^2$

R	−a	0
m	2	0



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

⑤ f es impar $\Leftrightarrow$ $f(x) = -f(-x)$

• en $x \in]-6;-4]$

$C: \dfrac{4\times(x+4)^2}{4\cdot 4} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

$\dfrac{4(x+4)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 4$

$(y-2)^2 = 4 - (x+4)^2$

$|y-2| = \sqrt{4-(x+4)^2}$

$y-2 = \sqrt{4-(x+4)^2} \ \vee \ y-2 = -\sqrt{4-(x+4)^2}$

$y = \sqrt{4-(x+4)^2} + 2 \ \vee \ y = -\sqrt{4-(x+4)^2} + 2$

$\sqrt{a} \geq 0$
$\sqrt{a} + 2 \geq 2$
$f(x) \geq 2$

$\sqrt{a} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq 0$
$-\sqrt{a} + 2 \leq 2$
$f(x) \leq 2$

valores de y en $x \in]-6;-4]$

a) 3

$\therefore$ cuando $x \in]-6;-4]$

$f(x) = -\sqrt{4-(x+4)^2} + 2$

• en $x \in]-4;-2]$ f es de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$

siendo (x_1, y_1) es un punto de paso

$(x_1, y_1) = (-3;-4)$ $m = \dfrac{-4+2}{-3+4} = -2$

$\therefore$ cuando $x \in]-4;-2]$, $f(x) = -2x - 10$

• en $x \in]0;2[$, $(h,k) = (2;6)$ $a = -1$

f es de la forma

$a(x-h)^2 + k \rightarrow f(x) = -(x-2)^2 + 6$, $x \in]0;2[$

• $f(0) = 0$ cuando $x = 0$

$\dfrac{4}{4}\cdot\dfrac{(x+4)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

$\dfrac{4(x+4)^2 + (y-2)^2}{16} = 1$

$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 4$

$\sqrt{(y-2)^2} = \sqrt{4-(x+4)^2}$

$|y-2| = \sqrt{4-(x+4)^2}$

$y - 2 = -\sqrt{4-(x+4)^2}$

$y = -\sqrt{4-(x+4)^2} + 2$

$\sqrt{a} \geq 0$
$-\sqrt{a} \leq 0$
$-\sqrt{a} + 2 \leq 2$
$\boxed{f(x) \leq 2}$

$-f(-x)$

$-(-(-x-2)^2+6)$

$-(-2(-x)-10)$

$-(-\sqrt{4-(-x+4)^2})$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$-6 < x \le -4$
$-4 < x \le -2$
$-2 < x < 0$
$x = 0$
$0 < x < 2$
$2 \le x < 4$
$4 \le x < 6$

$\sqrt{4-(x+4)^2}$

$= \sqrt{4-(x+4)^2} + 2$

$\sqrt{a} \geq 0$

$\sqrt{a} + 2 \geq 2$

$\cancel{F(x) \geq 2}$

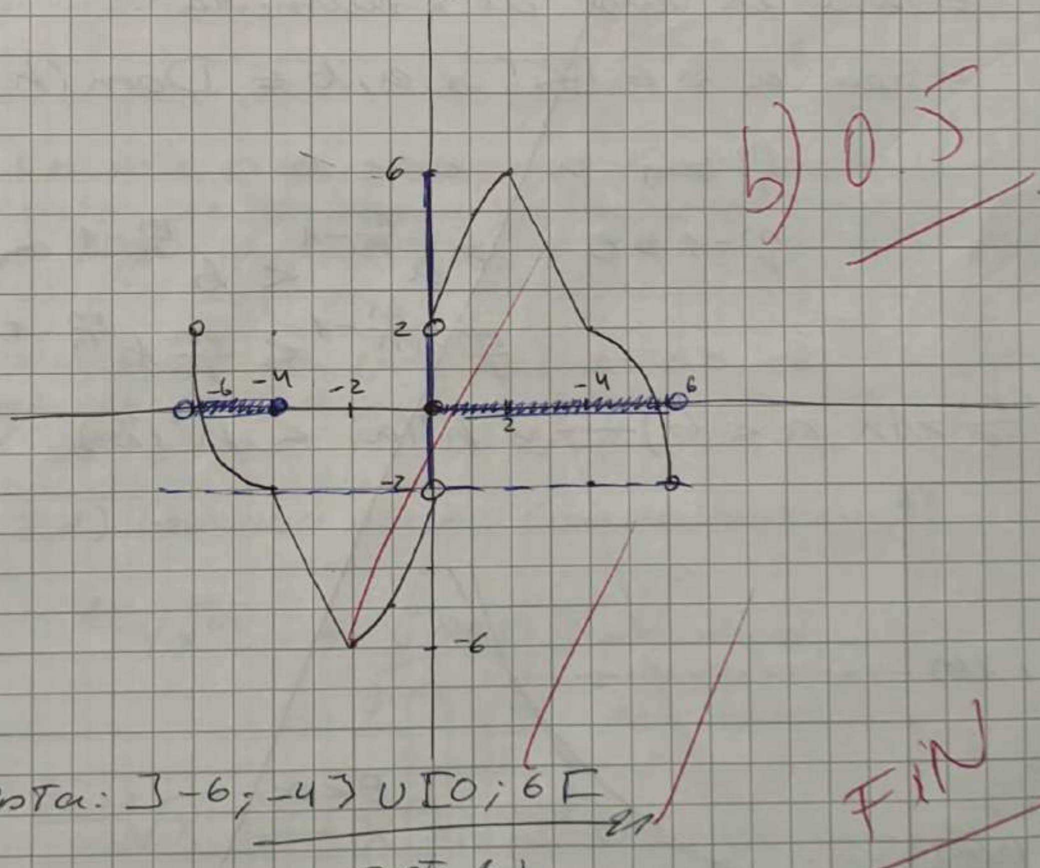
2)

Regla de correspondencia:

$$F(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-(x+4)^2} + 2 \quad F(x)_1, & -6 < x \le -4 \\ -2x - 10 \quad F(x)_2, & -4 < x \le -2 \\ -(-(-x-2)^2 + 6) \quad -F(-x), & -2 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(x-2)^2 + 6, & 0 < x < 2 \\ -(-2(-x) - 10) \quad = -F_2(-x), & 2 \le x < 4 \\ -(-\sqrt{4-(-x+4)^2} + 2) \quad = -F_1(-x), & 4 \le x < 6 \end{cases}$$

Rpta a)

b) A partir de la gráfica:



b) 0.5

Rpta: $]-6; -4] \cup [0; 6[$

Rpta b)

FIN

Presente aquí su trabajo

Método inductivo para graficar funciones con potencia racional

Este método sirve para poder graficar estas funciones a partir de la lógica en vez de memorizar como usualmente los profesores indican.

Sea: $h(x) = (f \circ g)(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

donde $g(x) = x^m$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$

① Análisis de m/n

a) Cuando $\frac{m}{n} > 1$

Para saber si la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo se analiza si la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica aumenta o disminuye conforme el valor de x aumenta.

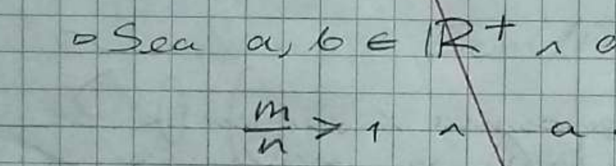
▫ Sea $a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a, b \in Dom(h)$

$$\frac{m}{n} > 1 \wedge a < b$$

$$\frac{m}{n} - 1 > 0 \longrightarrow a^{\frac{m}{n}-1} < b^{\frac{m}{n}-1}$$

$$\frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} < \frac{m}{n} b^{\frac{m}{n}-1}$$

$$\left(\frac{m}{n} > 1 \wedge a < b\right) \longrightarrow h'(a) < h'(b)$$



En este caso la función es cóncava hacia arriba pues el valor de las pendientes aumenta conforme x aumenta.

Nota: Solo se analiza la parte positiva del dominio pues la otra se puede inferir con los siguientes pasos del método.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Conocimiento previo: concepto de derivada

Es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

Se denota como

$f'(x)$

Se halla de diferentes métodos, uno de ellos es a través de las reglas de derivación

Sea $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$

$$\underbrace{f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}}$$

Fórmula para hallar la derivada de ese tipo de funciones

a) $a < b$

$a^{(+)} < b^{(+)}$

conserva la desigualdad

b) $a < b$

$a^{(-)} > b^{(-)}$

Se invierte la desigualdad

Explicación más detallada en el borrador de la pág. 12

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Deduje este método basándome en comprender la lógica detrás de este tema, pues no me parecía correcto memorizar sin entender el porqué de la mate

Este método no es más que una explicación propia del tema, asumo que los profesores no lo enseñan así porque se requieren conocimientos de cálculo diferencial, sin embargo la influencia de la paridad de m y n es conocimiento fundamental de matemática por lo que me parece de todos modos necesaria una explicación del tema como esta.

Espero que a alguien le sirva, mi intención es compartir algo alternativo que puede ser útil, además de aportar al aprendizaje ideal de la matemática :)

Dibujo de regalo:

so handsome

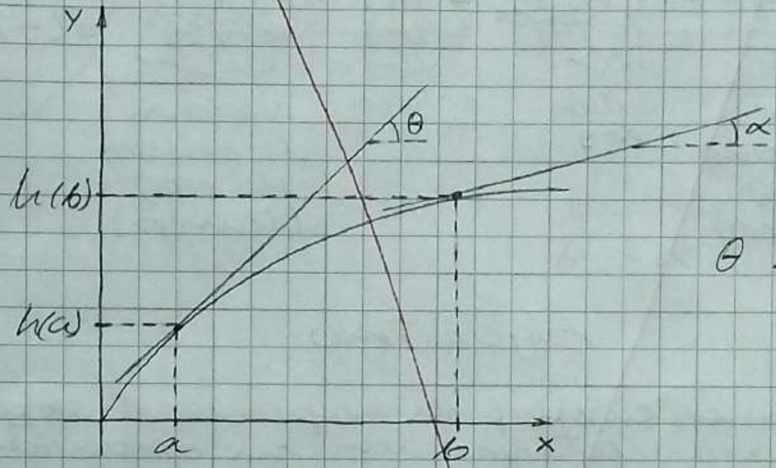
b) Cuando $\frac{m}{n} < 1$

$$\frac{m}{n} < 1 \quad \wedge \quad a < b$$

$$\frac{m}{n} - 1 < 0 \longrightarrow a^{\frac{m}{n}-1} > b^{\frac{m}{n}-1}$$

$$\frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} > \frac{m}{n} b^{\frac{m}{n}-1}$$

$$\left(\frac{m}{n} > 1 \wedge a < b\right) \longrightarrow h'(a) > h'(b)$$



$$\theta > \alpha$$

En este caso, conforme x aumenta, el valor de las pendientes disminuye, por lo tanto la función es cóncava hacia abajo.

(2) Análisis de la influencia de la paridad de m y n a los valores de entrada de F y g.

2.1) Paridad de n: Genera restricciones

$\sqrt[2K]{x^m} \longrightarrow \underbrace{x^m}_{g(x)} \geq 0$: Los valores de entrada de g deben ser positivos

$\sqrt[2K+1]{x^m} \longrightarrow x^m = (+) \vee (-)$: Los valores de entrada de g no tienen restricciones

Presente aquí su trabajo

2.2) Paridad de m: Influye en el cambio de signo del valor de entrada de F∘g al pasar por g.

$$x \xrightarrow{g} x^m \xrightarrow{F} \sqrt[n]{x^m}$$

$$\underset{\text{par}}{m}: \begin{matrix} (+) \xrightarrow{g} (+)^{2K} = (+) \xrightarrow{F} \sqrt[n]{(+)} = (+) \\ (-) \longrightarrow (-)^{2K} = \end{matrix}$$

$$\underset{\text{impar}}{m}: \begin{matrix} \underbrace{(+)}_{\substack{\text{valores de entrada} \\ \text{de } F\circ g \\ \text{(Dominio)}}} \xrightarrow{g} \underbrace{(+)^{2K+1}}_{\text{salida de } g} = \underbrace{(+)}_{\text{entrada de } F} \xrightarrow{F} \underbrace{\sqrt[n]{(+)}}_{\substack{\text{valores de salida} \\ \text{de } F\circ g \\ \text{(Rango)}}} = (+) \\ (-) \longrightarrow (-)^{2K+1} = (-) \longrightarrow \sqrt[n]{(-)} = (-) \end{matrix}$$

Algoritmo

(1.) Analizar el cambio de las pendientes de F∘g o h para determinar su concavidad.

(2.) Analizar la paridad de n para generar restricciones en el dominio de F∘g.

(3) Analizar cómo cambia el signo de los valores de entrada de F∘g al pasar por g según la paridad de m.

Aplicación del algoritmo para obtener la gráfica de la función en cada caso

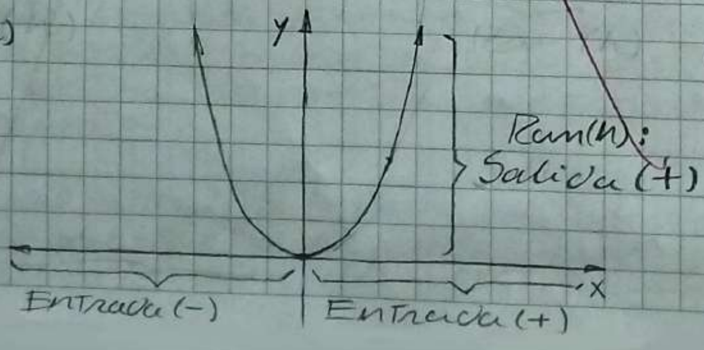
a.) Caso cuando $\frac{m}{n} > 1$

a.1) $x^{\frac{par}{impar}}$

(1) $\frac{m}{n} > 1 \longrightarrow (a < b \longrightarrow h'(a) < h'(b))$ Función cóncava hacia arriba

(2) No hay restricciones pues el radical (n) es impar $\sqrt[impar]{x^m}$

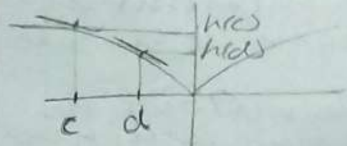
(3) $\underbrace{\begin{matrix}(+) \\ (-)\end{matrix}}_{Dom(h)} \begin{matrix}\xrightarrow{g} (+)^{par} \\ \longrightarrow (-)^{par}\end{matrix} = (+) \xrightarrow{F} \sqrt[impar]{(+)} = \underbrace{(+)}_{Ram(h)}$



Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Nota: El comportamiento de la gráfica en la parte negativa del dominio también se puede deducir con la derivada.

Ejemplo: caso b.1) (ver pág. 13)



Sea c, d ∈ Dom(h) tal que c<0 ∧ d<0

$\frac{m}{n} < 1 \quad \wedge \quad c < d$

$\frac{m}{n} - 1 < 0 \rightarrow c^{\frac{m}{n}-1} > d^{\frac{m}{n}-1}$

$\frac{m}{n} c^{\frac{m}{n}-1} > \frac{m}{n} d^{\frac{m}{n}-1}$

$h'(c) > h'(d)$

Es algo largo comparar derivadas en ambas secciones del dominio, sin embargo, basta con analizar una pues la otra se puede inferir a partir del dominio y rango obtenido del análisis de la paridad de m y n.

Aplicación en el borrador de la pág. (6) durante el examen

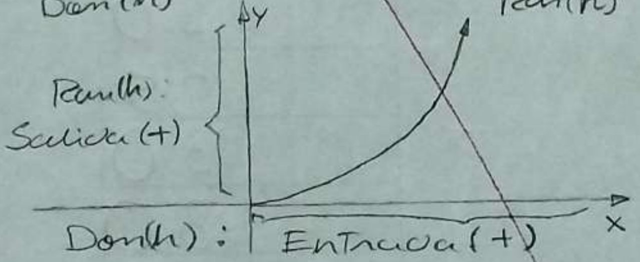
a.2.1) $X^{\frac{impar}{par}}$

① $\frac{m}{n} > 1 \longrightarrow$ Función cóncava hacia arriba en $X > 0$

② $\sqrt[par]{X^{impar}} \longrightarrow X^{impar} = (+)$

Los valores de entrada de g deben ser (+)

③ $\underbrace{(+)}_{Dom(h)} \xrightarrow{g} (+)^{imp} = (+) \xrightarrow{F} \underbrace{\sqrt[par]{(+)} = (+)}_{Ram(h)}$



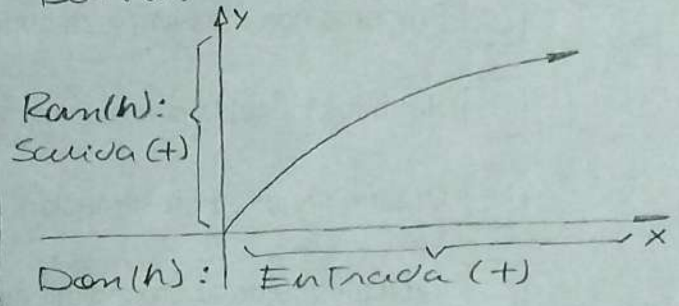
b.2.1) $X^{\frac{impar}{par}}$

① $\frac{m}{n} < 1 \longrightarrow$ Función cóncava hacia abajo en $X > 0$

② $\sqrt[par]{X^{impar}} \longrightarrow X^{impar} = (+)$

Los valores de entrada de g deben ser (+)

③ $\underbrace{(+)}_{Dom(h)} \xrightarrow{g} (+)^{imp} = (+) \xrightarrow{F} \underbrace{\sqrt[par]{(+)} = (+)}_{Ram(h)}$



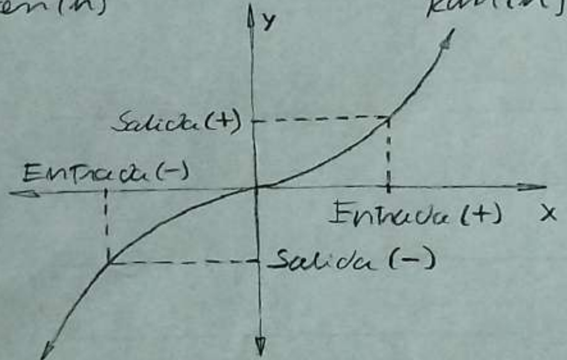
a.2.2) $X^{\frac{impar}{impar}}$

① $\frac{m}{n} > 1 \longrightarrow$ Función cóncava hacia arriba en $X > 0$

② No hay restricción pues n es impar $\sqrt[impar]{X^m}$

③ $(+) \xrightarrow{g} (+)^{imp} = (+) \xrightarrow{F} \sqrt[imp]{(+)} = (+)$

$\underbrace{(-)}_{Dom(h)} \longrightarrow (-)^{imp} = (-) \longrightarrow \underbrace{\sqrt[imp]{(-)} = (-)}_{Ram(h)}$



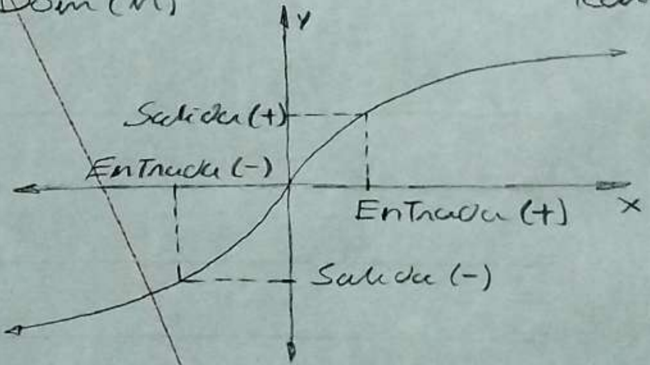
b.2.2) $X^{\frac{impar}{impar}}$

① $\frac{m}{n} < 1 \longrightarrow$ Función cóncava hacia abajo en $X > 0$

② No hay restricción pues n es impar $\sqrt[impar]{X^m}$

③ $(+) \xrightarrow{g} (+)^{imp} = (+) \xrightarrow{F} \sqrt[imp]{(+)} = (+)$

$\underbrace{(-)}_{Dom(h)} \longrightarrow (-)^{imp} = (-) \longrightarrow \underbrace{\sqrt[imp]{(-)} = (-)}_{Ram(h)}$



b.) Caso cuando $\frac{m}{n} < 1$

b.1) $X^{\frac{par}{impar}}$

① $\frac{m}{n} < 1 \longrightarrow (a < b \rightarrow h'(a) > h'(b))$
Función cóncava hacia abajo en $X > 0$

② No hay restricción pues n es impar $\sqrt[impar]{X^m}$

③ $(+) \xrightarrow{g} (+)^{par} = (+) \xrightarrow{F} \sqrt[impar]{(+)} = (+)$

$\underbrace{(-)}_{Dom(h)} \longrightarrow (-)^{par} = \underbrace{(+)}_{Ram(h)}$