ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

SEGUNDA PRÁCTICA CALIFICADA - PARTE II
SEMESTRE ACADÉMICO 2020 -1

Horario: Todos.

Elaborada por todos los profesores.

Parte II: Entrega de Soluciones Desarrolladas

1. Halle la regla de correspondencia y esboce la gráfica de la función f que cumple las condiciones siguientes: (2 puntos).

   - f es par.
   - $Dom(f) = [-4,-2] \cup [-1,1] \cup [2,4]$, $\quad Ran(f) = [0, e]$.
   - Para $x \in [-4,-2] : f(x) = b - \log_2(-x)$ donde b es una constante real.
   - Para $x \in [0,1] : f(x) = e^x$.

2. Sea la función f cuya regla de correspondencia está dada por

$$f(x) = \begin{cases} |\log_{1/2}(-2x+8)| - 3 & ; \quad -2 \le x \le a \\ x^2 - 6x + 10 & ; \quad x > a \end{cases}$$

   a) Para $a = 15/4$, grafique f y determine los intervalos donde la función f es creciente y los intervalos donde es decreciente. (1.5 puntos).

   b) Para $a = 3$, halle la función inversa de f y esboce la gráfica de f^{-1}. (1.5 puntos).

   c) Determine todos los valores de a tales que la función f sea inyectiva. (1 punto).

3. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) La función $f(x) = 2e^{-x} - 3e^{2x+1}$ es inyectiva. (1 punto).

   b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que $f(a) = b$, entonces el conjunto solución de $f(x) \ge b$ es $[a, +\infty[$. (1 punto).

San Miguel, 25 de junio de 2020.

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

1) Por dato:

$$\begin{cases} b - \log_2(-x) & , -4 \le x \le -2 \\ e^x & , 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

; ya que la función es par, hallaremos su extensión par:

$$\begin{cases} b - \log_2(-x) & , -4 \le x \le -2 \\ e^x & , 0 \le x \le 1 \\ b - \log_2(x) & , 2 \le x \le 4 \\ e^{-x} & , -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

; para calcular el valor de b, analizaremos el rango por partes

- Rangos:
  - Para e^x ; $1 \le f(x) \le e$
  - Para e^{-x} ; $1 \le f(x) \le e$
  - Para $b - \log_2(-x)$; $b-2 \le f(x) \le b-1$

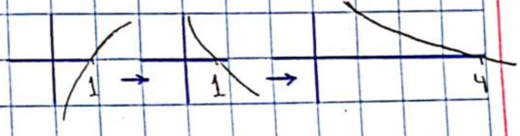
Sabemos que el rango pertenece a $[0, e]$

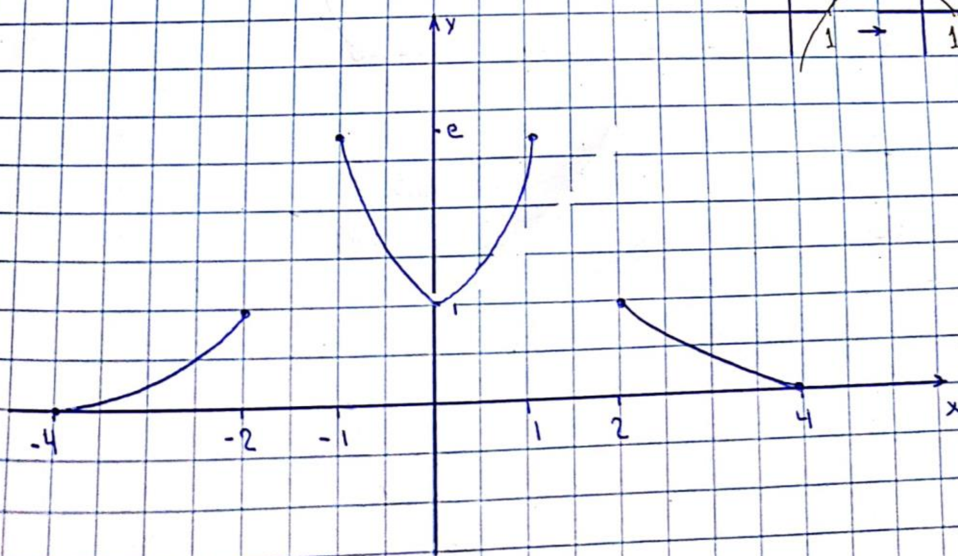
$\therefore \quad b - 2 = 0 \longrightarrow b = 2$

Regla de correspondencia:

$$f(x) \begin{cases} 2 - \log_2(-x) & , -4 \le x \le -2 \\ e^{-x} & , -1 \le x \le 0 \\ e^x & , 0 \le x \le 1 \\ 2 - \log_2(x) & , 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

ojo: $\log_2(x)$ $\downarrow \cdot(-1)$ en y
$-\log_2(x)$ $\downarrow +2$ en y
$2 - \log_2(x)$





Maribeña

Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

2) a) Para $a = 15/4$. Haremos el gráfico de la función para analizar los intervalos.

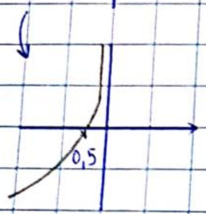
- Para el primer tramo: $\log_{1/2}(x)$ $\Big\downarrow \cdot(-2)$ a x

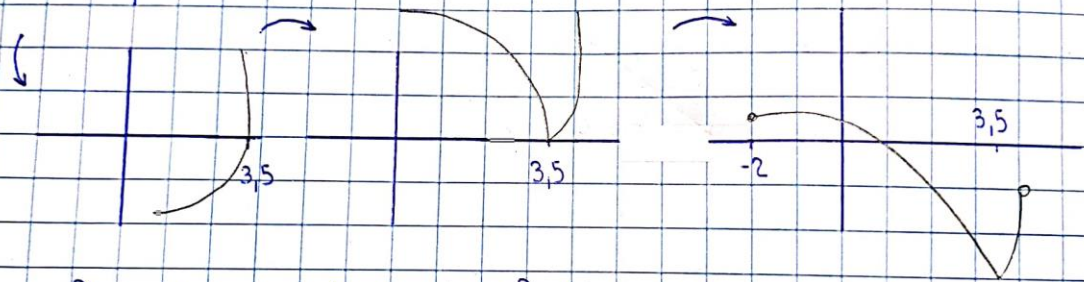
$\log_{1/2}(-2x)$ $\Big\downarrow -4$ a x

$\log_{1/2}(-2x+8)$ $\Big\downarrow$ valor absoluto (reflejar)

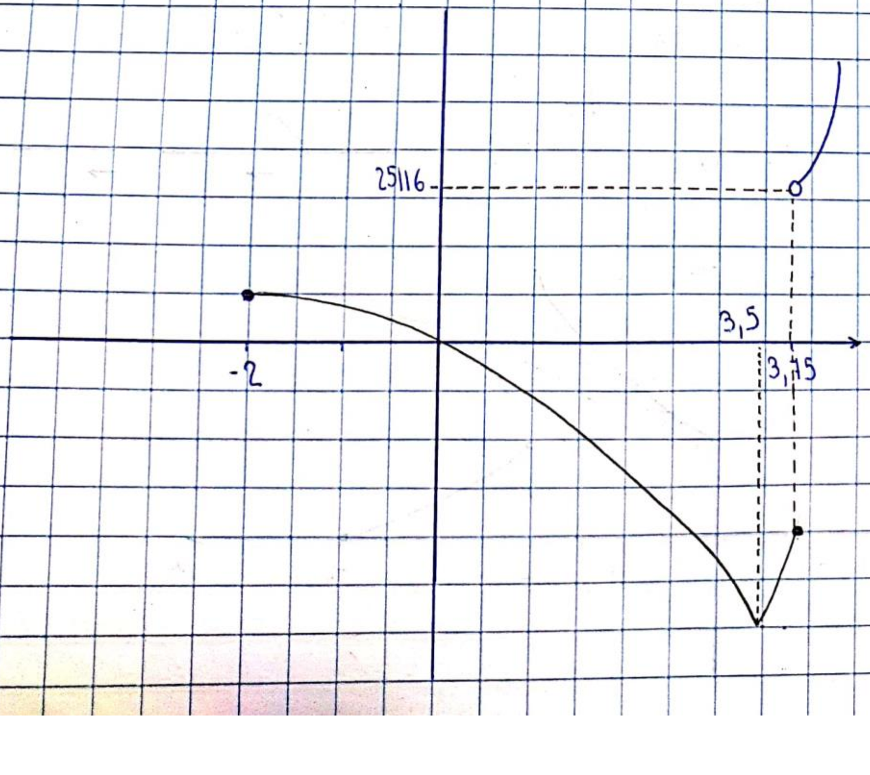
$|\log_{1/2}(-2x+8)|$ $\Big\downarrow -3$ a y

$|\log_{1/2}(-2x+8)| - 3$





- Para el segundo tramo: $(x-3)^2+1$, $x > 15/4$
$V(3,1)$



Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

Intervalos de crecimiento: $[3,5 ; 3,75] \cup]3,75 ; +\infty[$

Intervalos de decrecimiento: $[-2 ; 3,5]$

b) Para $a = 3$

- Primer tramo:

$$|\log_{1/2}(-2x+8)| - 3 = y$$
$$|\log_{1/2}(-2x+8)| = y+3$$
$$-\log_{1/2}(-2x+8) = y+3$$
$$\log_{1/2}(-2x+8) = -y-3$$
$$(-2x+8) = 0,5^{(-y-3)}$$
$$+2x = 8 - 0,5^{(-y-3)}$$
$$x = \frac{8-0,5^{(-y-3)}}{2} \longrightarrow f^{-1}: \frac{8-0,5^{(-x-3)}}{2} = \frac{8-2^{(x+3)}}{2}$$

analizamos el V.A.:
$$-2 \leq x \leq 3$$
$$-6 \leq -2x \leq 4$$
$$2 \leq 8-2x \leq 12$$
$$-1 \leq \log_{1/2}(-2x+8) \leq -3,58$$

- Segundo tramo:

$$x^2 - 6x + 10 = y$$
$$(x-3)^2 + 1 = y$$
$$(x-3)^2 = y-1$$
$$x = 3 + \sqrt{y-1} \longrightarrow f^{-1}: 3 + \sqrt{x-1}, \quad x > 1$$

- La función inversa sería:

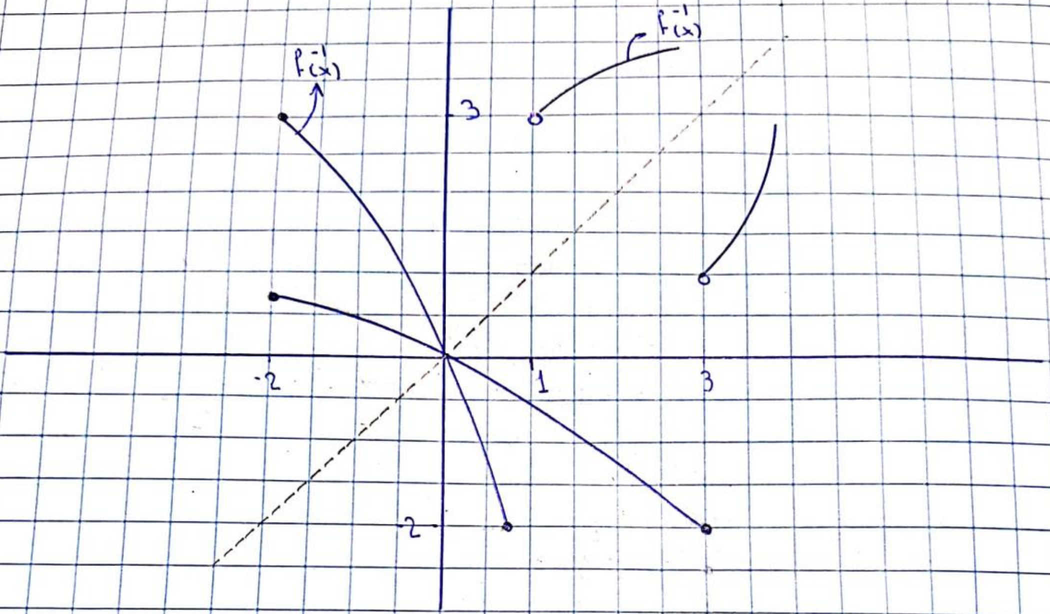
$$f^{-1}(x) \begin{cases} \dfrac{8-2^{(x+3)}}{2}, & -2 \leq x \leq -\log_{1/2} 12 - 3 \\ 3 + \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

ojo: para hallar los dominios de la inversa, debemos analizar su rango (de la función normal)

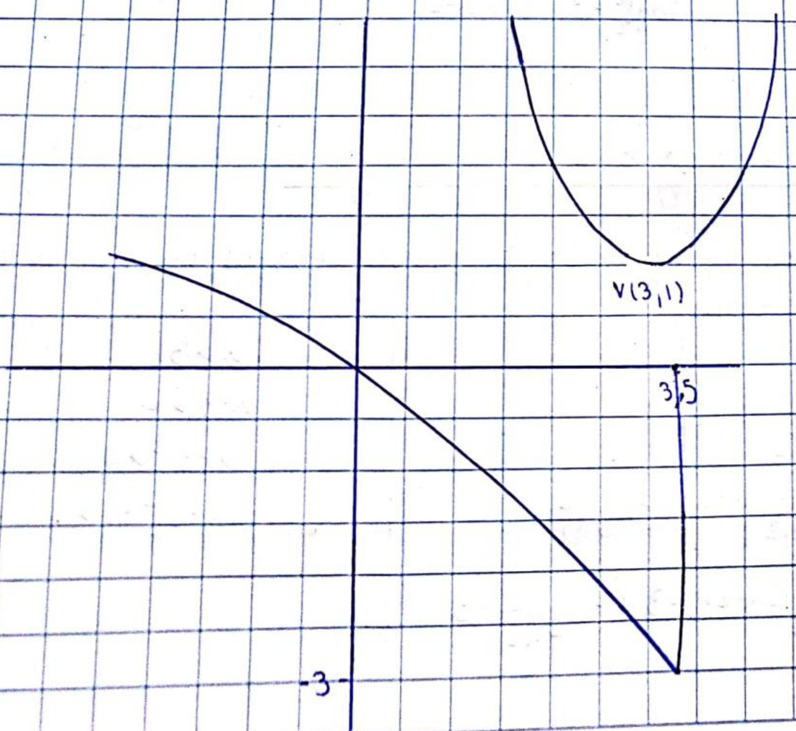
$$-6 \leq -2x \leq 4$$
$$2 \leq -2x+8 \leq 12$$
$$\log_{1/2} 12 \leq \log_{1/2}(-2x+8) \leq -\log_{1/2} 12$$
$$-2 \leq |\log_{1/2}(-2x+8)| - 3 \leq -\log_{1/2} 12 - 3$$

$$x > 3$$
$$x - 3 > 0$$
$$(x-3)^2 > 0$$
$$(x-3)^2 + 1 > 1$$

Para hacer la gráfica de la función inversa, reflejaremos la función normal a través de la función identidad (utilizaremos los gráficos hallados en la parte a, sin tener en cuenta el anterior dominio)



c) Para probar la inyectividad de esta función (porque es una función por tramos), primero probaremos la inyectividad local. Para ello, analizaremos el gráfico:



Acosta Muñoz, Andrea Celeste (20202085)

- Para que la función cuadrática sea inyectiva, notamos que $x<3$ o $x>3$; sin embargo, elegiremos la segunda opción porque el dominio dado tiene esa forma
- Para que la función logaritmo sea inyectiva, notamos que el x no puede exceder a 3,5.

En un principio, tendremos que: $3 \leq a \leq 3,5$

Ya que hemos demostrado la inyectividad local, faltaría demostrar la inyectividad global; para ello, es necesario corroborar que los rangos no se intercepten; sin embargo, según las condiciones que "a" debe cumplir (halladas arriba) notamos que los rangos nunca se van a interceptar.

Por lo tanto, los valores que a debe asumir son de 3 a 3,5

Rpta: $a \in [3;3,5]$

3) a) la función: $f(x) = 2e^{-x} - 3e^{2x+1}$ es inyectiva

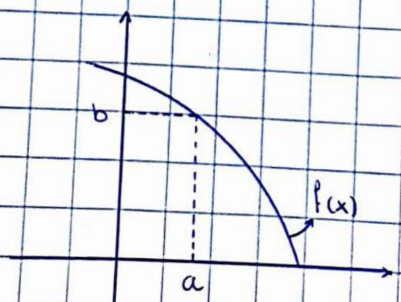
- Sabemos que la función $2e^{x}$ es creciente; por lo tanto, al transformarla, $2e^{-x}$ será decreciente
- Sabemos que $3e^{2x+1}$ es creciente; por lo tanto $-3e^{2x+1}$ será decreciente

$\therefore$ decreciente + decreciente = decreciente

- Tenemos que la función $f(x)$ es decreciente y, para que sea decreciente, esta debe ser inyectiva

Rpta: Verdadero

b)



$f(x)$ cumple las condiciones dadas; sin embargo, para $f(x) \geq b$, tenemos que $x \in]-\infty, a]$

Rpta: Falso