FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

SEGUNDA PRÁCTICA CALIFICADA-SOLUCIONES PROPUESTAS
SEMESTRE ACADÉMICO 2022-1

Horario: Turno 1.

Duración: 110 minutos

---

1. Una función f está definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{|3-x|-|x|}}{x+\sqrt{2-x}},$$

halle el dominio implícito de f. (3 puntos)

Solución:
El dominio implícito está formado por todos los x tales que

$$(|3-x|-|x| \geq 0) \wedge (2-x \geq 0) \wedge \left(x+\sqrt{2-x} \neq 0\right)$$

La primera inecuación es equivalente a:

$$|3 - x| \geq |x| \Leftrightarrow (3-x)^2 \geq x^2 \Leftrightarrow 6x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, juntando las dos primeras condiciones obtenemos que

$$x \leq \frac{3}{2}.$$

Ahora resolvemos la ecuación

$$x+\sqrt{2-x} = 0,$$

Como $\sqrt{2-x} = -x$, elevando al cuadrado obtenemos

$$2-x = x^2 \text{ o } x^2+x-2 = 0$$

que es una ecuación cuadrática y cuyas raíces son $x_1 = 1\ y\ x_2 = -2$.

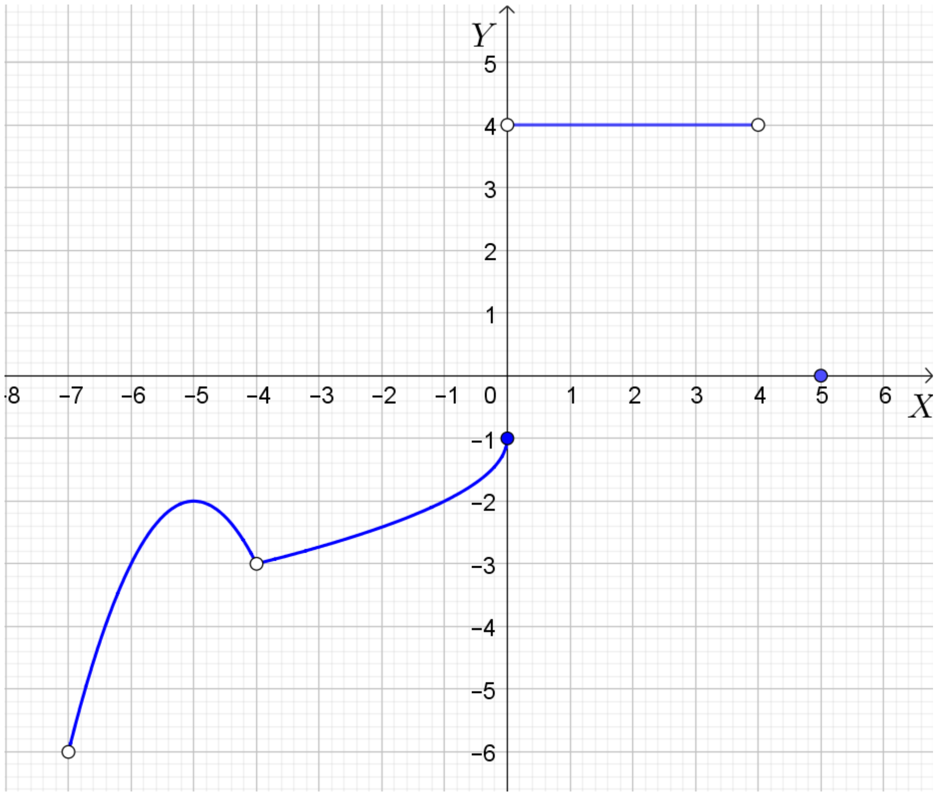
Reemplazando en la ecuación

$$x+\sqrt{2-x} = 0,$$

notamos que solo cumple $x_2 = -2$. Luego, al conjunto que obtuvimos con las dos primeras condiciones debemos quitarle el número -2. Es decir, el dominio implícito es:

$$\left]-\infty, \frac{3}{2}\right] - \{-2\} =]-\infty,-2[\cup \left]-2, \frac{3}{2}\right].$$

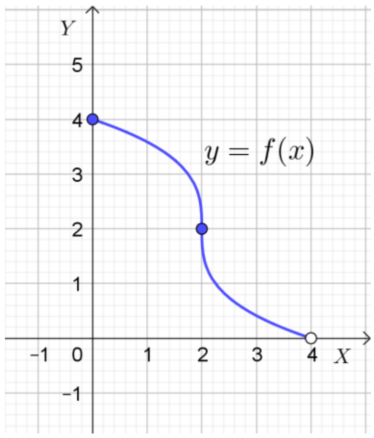
2. A continuación, se muestra la gráfica de la función f.



a) Encuentre el dominio y rango de la función f. (2 puntos)
b) Determine si f tiene un máximo, y en caso afirmativo, indique los valores de x donde alcanza su máximo valor. (1 punto)
c) Halle todos los valores de x para los cuales $f(x) > -2$. (1 punto)

Solución:
a) $Dom(f) =]-7,-4[\cup]-4,4[\cup \{5\}$.
$Ran(f) =]-6,-1] \cup \{0,4\}$.
b) f si tiene máximo.
Los valores de x pedidos son todos los del intervalo $]0,4[$.
c) Los valores pedidos de x son los del conjunto
$$]-1,4[\cup \{5\}$$

3. Sea f una función, cuya gráfica se muestra a continuación.

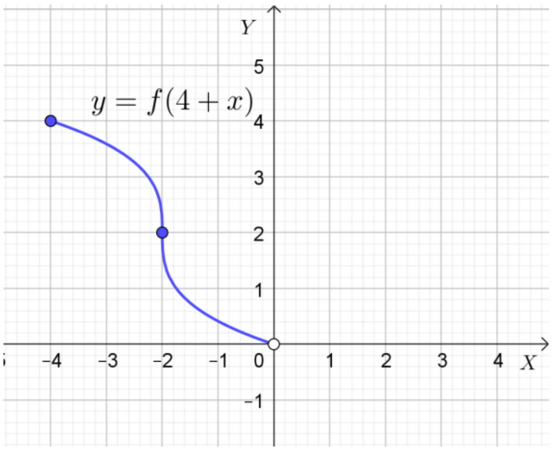


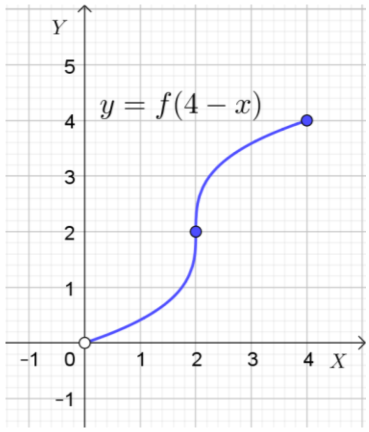
Determine la gráfica, el dominio y el rango de la función $g(x) = \frac{1}{2} f(4-2x)$. (3 puntos)

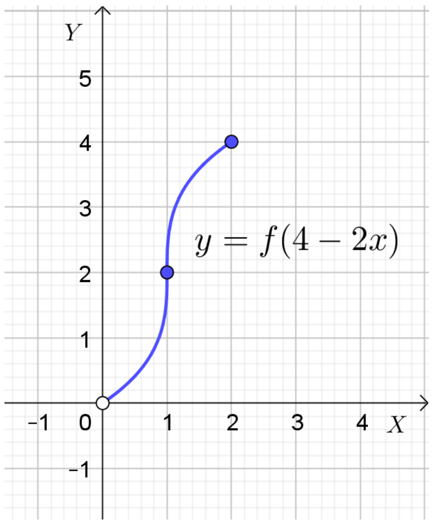
Solución:

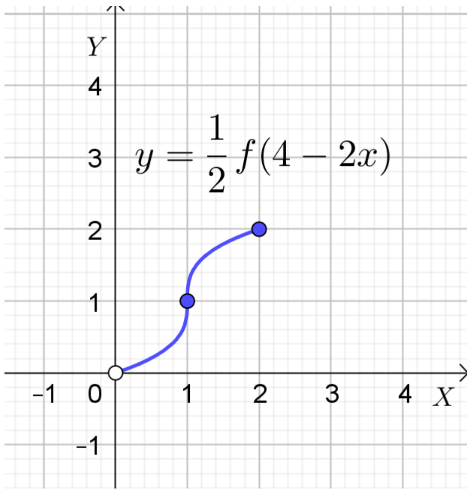
Realizaremos las siguientes transformaciones:

- $x \longrightarrow x+4$.
- $x \longrightarrow -x$.
- $x \longrightarrow 2x$.
- $f(4-2x) \longrightarrow \frac{1}{2} f(4-2x)$.









$Dom(g) =]0,2]$.
$Ran(g) =]0,2]$.

4. Sea $t \in \mathbb{R}$ una constante. Considere las funciones

$$f(x) = tx - 1 \ \text{ y } \ g(x) = x - t.$$

a) Halle todos los valores de t para los cuales se cumple que la gráfica de la función fog contiene al punto $(-4,2)$. (2 puntos)

b) Halle todos los valores de t para los cuales se cumple que el rango de la función gof es un conjunto unitario. (2 puntos)

Solución:

a) Como el dominio de f y g son ambos $\mathbb{R}$ entonces el dominio de fog también es $\mathbb{R}$. La gráfica de fog contiene al punto $(-4, 2)$ si y solo si $(fog)(-4) = 2$ (note que -4 pertenece al dominio de la composición). Como $g(-4) = -4 - t$ entonces

$$(fog)(-4) = f(g(-4)) = f(-4-t) = t(-4-t) - 1.$$

Luego, debemos hallar todos los t tales que

$$t(-4-t)-1=2,$$

resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos que t puede ser -1 o -3.

b) De forma similar al ítem anterior, el dominio de gof es $\mathbb{R}$. Por otro lado, su regla de correspondencia es:

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=g(tx-1)=tx-1-t.$$

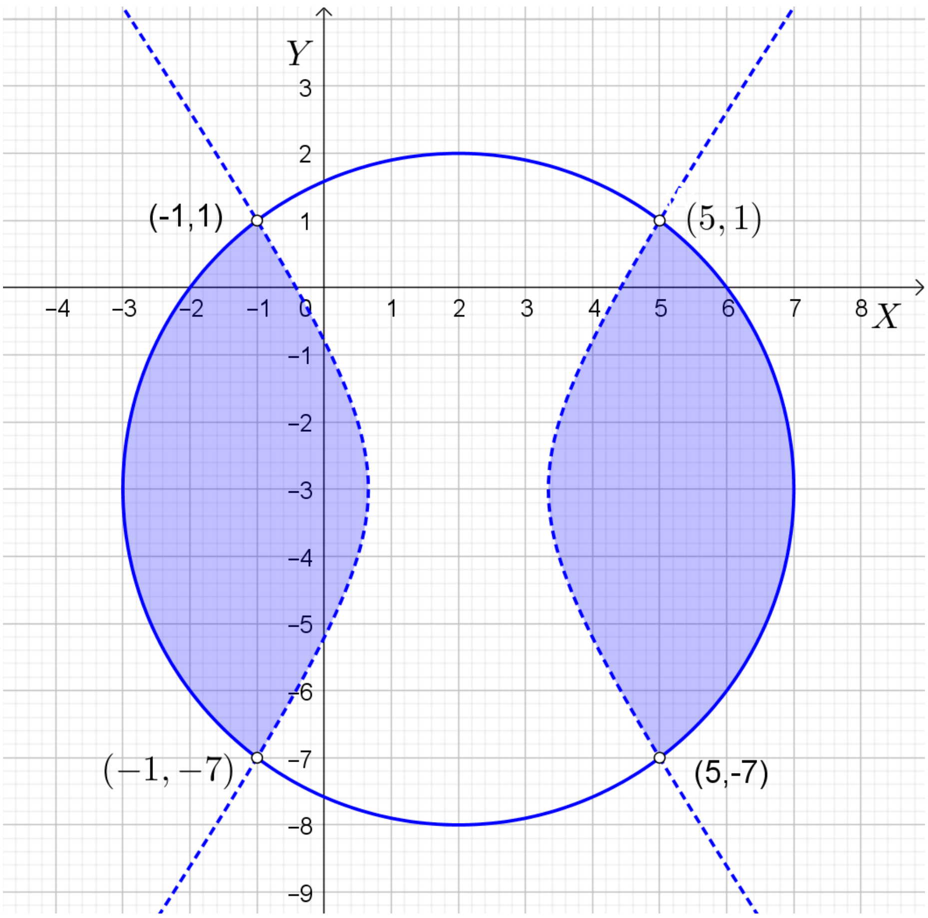
Notamos que gof es una función lineal de dominio $\mathbb{R}$. Si $t\neq 0$, sabemos que su rango es $\mathbb{R}$ (la pendiente de la recta es $t\neq 0$) y si $t=0$, sería la función constante -1, es decir, su rango sería el conjunto unitario $\{-1\}$. Por lo tanto, el único valor posible del parámetro t es 0.

5. Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{5(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{4}>1,\\ (x-2)^2+(y+3)^2\leq 25.\end{cases}$$

Esboce la gráfica de las regiones que generan el sistema anterior e indique las coordenadas de los puntos de intersección entre las curvas que forman la frontera (borde) de la región. (2 puntos)

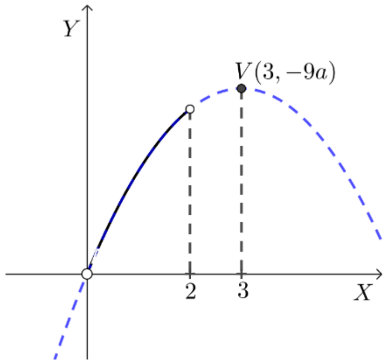
Solución:



6. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Para todo $a \in]-\infty, 0[$, la función $f(x) = ax^2 - 6ax$ con $x \in]0,2[$ tiene un máximo valor. (1 punto)

Solución:
FALSO. Al calcular el vértice de la curva $y = ax^2 - 6ax$ se tiene $V = (3, -9a)$.
Como $f(x) = ax^2 - 6ax$ está definida en $]0,2[$ y $a < 0$ su gráfica es



Podemos observar que la gráfica de la función no tiene valor máximo.

b) Sea la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+3x-x^2}}$. Existe $x_0 \in]-\infty, -4]$ tal que f está definida en x_0. (1 punto)

Solución:
FALSO. Al resolver la inecuación $4 + 3x - x^2 > 0$ se tiene $Dom(f) =]-1; 4[$, es decir f está definida en ese intervalo.

c) Existe $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x(ax+1) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (1 punto)

Solución:
VERDADERO. Considere $f(x) = x(ax+1) = a\left(x - \left(-{}^{1}/_{2a}\right)\right)^2 - {}^{1}/_{4a}$, $x \in \mathbb{R}$.
Si $a < 0$ entonces la gráfica de f se abre hacia abajo y el $máx\, f = -{}^{1}/_{4a} > 0$. Al resolver la inecuación

$$-\frac{1}{4a} < 1$$

se obtiene, $a \in]-\infty ; -{}^{1}/_{4}[$.
Si tomamos $a = -1$ se cumple que $x(-x+1) \leq {}^{1}/_{4} < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si $(f.g)(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (1 punto)

Solución:
FALSO. Definamos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se cumple que $(f.g)(x) = 0$ pero $f(x)$ y $g(x)$ no son funciones nulas.

San Miguel, 05 de mayo de 2022
Coordinadora PC2: Iris Flores.