Fundamentos de Cálculo

Tercera Práctica Dirigida - Soluciones Propuestas

Semestre Académico 2021 -1

Problemas Obligatorios

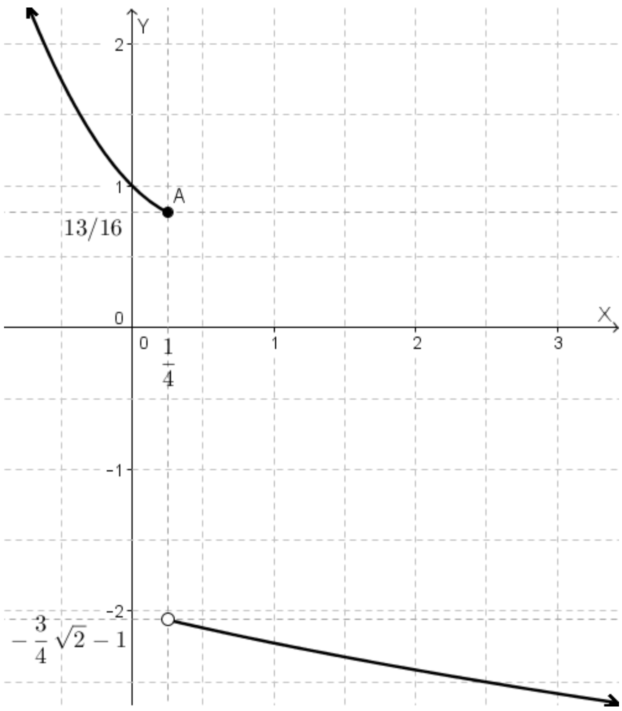
1. Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right] \\ -\sqrt{\frac{1}{2}x + 1} - 1, & x \in \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Justifique que f es inyectiva, halle la función inversa f^{-1} y esboce la gráfica de f^{-1}.

Solución:

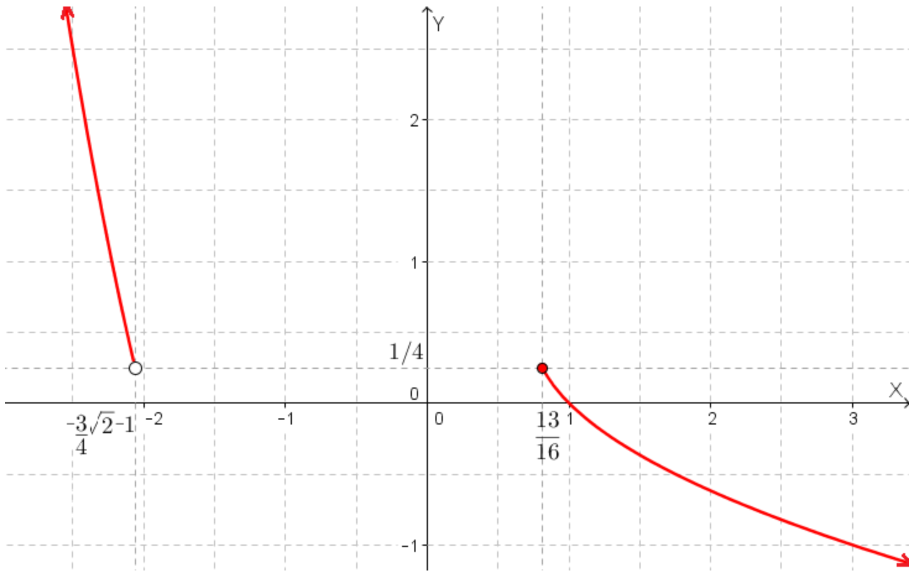
Hacemos una gráfica de la función f. El primer tramo es parte de una parábola, el segundo tramo se halla a partir de transformaciones de $y = \sqrt{x}$.



El primer tramo es inyectivo, el segundo tramo es inyectivo y los rangos de los tramos no se intersectan, luego f es inyectiva.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 - 2, & x \in \left]-\infty, -\frac{3}{4}\sqrt{2} - 1\right[\\ -\sqrt{x - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{13}{16}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Gráfica de f^{-1}



2. Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

$$\text{La función } f(x) = 2^{\frac{1}{2}x} + \ln(2x-1) \text{ es creciente.}$$

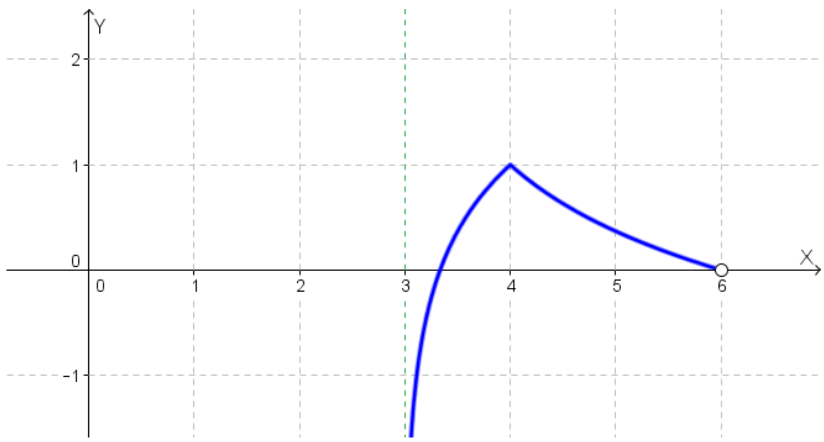
Solución:
Verdadero. El dominio de f es $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, podemos probar que f es creciente en su dominio. La función $g(x) = \sqrt{2}^x$ es creciente en $\mathbb{R}$ pues es exponencial de base $\sqrt{2} > 1$ y $h(x) = \ln(2x-1)$ es creciente en $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ (a esto llegamos a partir de que $\ln(x)$ es creciente en $]0, +\infty[$), luego $f = g + h$ es creciente.

Problemas Complementarios

1. Encuentre el rango de las siguientes funciones

a) $f(x) = 1 - \left|\log_3(x-3)\right|, \quad x \in]3, 6[$

Solución:
Podemos esbozar la gráfica de f a partir de la grafica de $\log_3(x)$.



$Ran(f) =]-\infty, 1]$.

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2-2x+4}{12}\right), \quad x \in [-2,3[$

Solución:
Podemos ver g como la composición de $\dfrac{x^2-2x+4}{12}$ y $\log_{1/4}(x)$.
Cuando x recorre todos los valores en $[-2,3[$, $u = \dfrac{x^2-2x+4}{12}$ recorre todos los valores en $\left[\frac{1}{4},1\right]$, luego $y = \log_{1/4}(u)$ toma todos los valores en $[0,1]$.

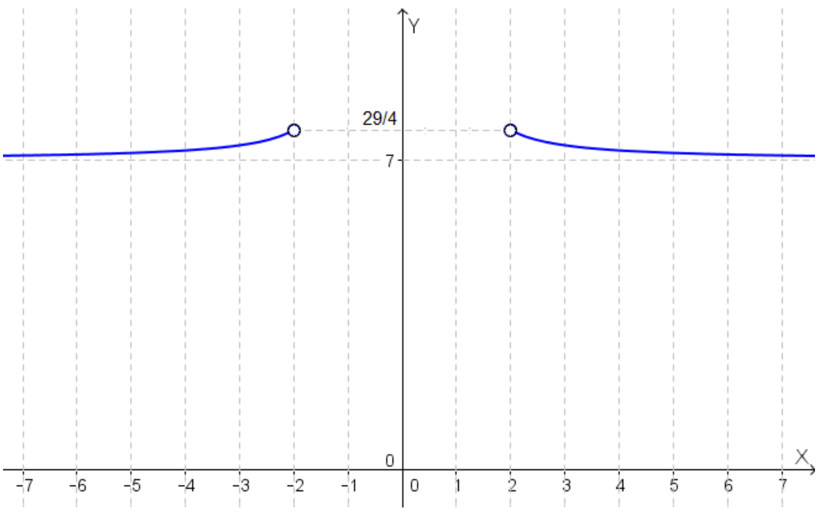
$Ran(g) = [0,1]$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

   - f es una función par.
   - Para $x \in [0,2]$, $f(x)$ es de la forma $f(x) = b - a^x$, donde a y b son constantes positivas.
   - Para $x \in]-\infty,-2[$, se cumple $f(x) = \frac{28x+27}{4x+4}$.
   - El rango de f es $[1,5] \cup \left]7, \frac{29}{4}\right[$.

   Calcule los valores de a y b, y esboce la gráfica de f, indicando las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, si existen.

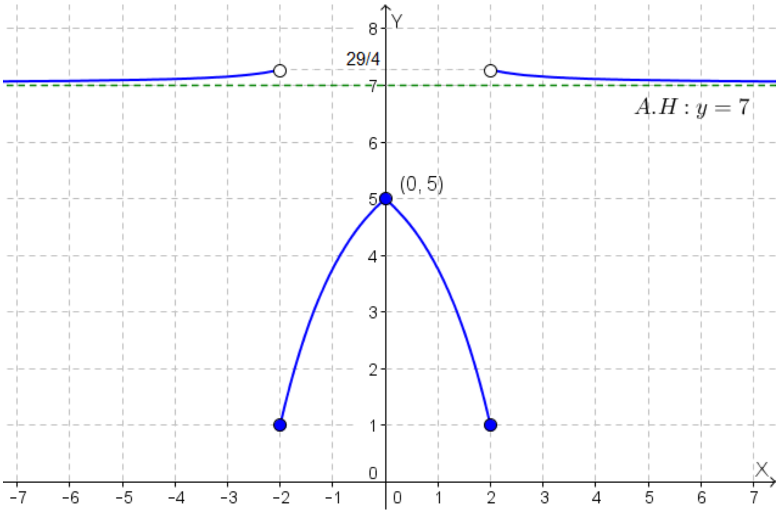
   Solución:
   Podemos hacer un esbozo de los tramos para $x < -2$ y $x > 2$.



   Para estos valores de f tenemos que $f(x)$ toma todos los valores en $\left]7, \frac{29}{4}\right[$, como f es par, necesitamos que para el tramo con $0 \le x \le 2$, $f(x)$ tome todos los valores en $[1,5]$. Entonces $a \neq 1$ y hay dos posibilidades:

   - $0 < a < 1$: En este caso la función es creciente, tendría que cumplirse $b - 1 = 1$ y $b - a^2 = 5$, pero esto nos llevaría a que $b = 2$, $a^2 = -3$ que es imposible en los reales.
   - $a > 1$: En este caso la función es decreciente, tendría que cumplirse $b - 1 = 5$ y $b - a^2 = 1$, esto nos lleva a $b = 6$, $a^2 = 5$, como $a > 0$, esto es $a = \sqrt{5} > 1$ cumple.

Entonces los valores son $a=\sqrt{5}$, $b=6$ y la gráfica pedida es:



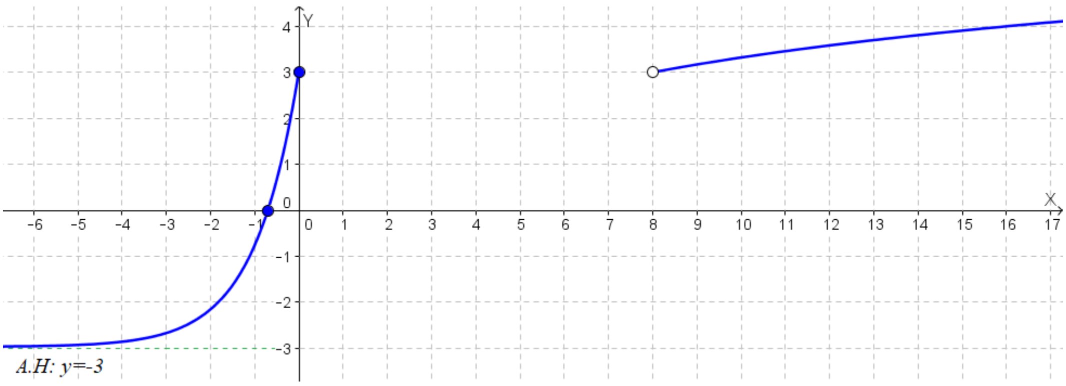
Sólo tiene intersección con el eje Y en $(0,5)$. Sólo tiene asíntota horizontal: $y=7$.

3. Sea $a \geq -2$ constante real y sea la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} ae^x-3, & x\leq 0\\ \log_2(x), & x>a+2. \end{cases}$$

a) Para $a=6$, esboce la gráfica de f, indicando, las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados y las asíntotas, en caso existan.

Solución:
Para $a=6$, se tiene:
$$f(x)=\begin{cases} 6e^x-3, & x\leq 0\\ \log_2(x), & x>8. \end{cases}$$



Puntos de intersección: Con Y: $(0,3)$. Con X: $(-\ln(2),0)$.
Asíntota horizontal: $y=-3$. Asíntota vertical: No tiene.

b) Para $a=6$, ¿es f creciente en su dominio?

Solución:
Sí, para todo x_1,x_2 en $Dom(f)$ se cumple $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Cada tramo es creciente y además para todo $x>8$ se cumple $f(x)>3$. Esto puede verse en la gráfica.

c) Halle todos los valores de a para los cuales f posee inversa pero f no es creciente en todo su dominio, y halle la función inversa f^{-1} para cada uno de estos valores de a.

Solución:

Descartamos $a = 0$ pues f no sería inyectiva. El segundo tramo siempre será creciente, entonces buscamos que el primer tramo no lo sea (se descarta $a > 0$).

Necesitamos que $a < 0$ (primer tramo decreciente) y los rangos de los tramos no se intersecten. Si $a < 0$: $Ran(f_1) = [a-3, -3[$ y $Ran(f_2) =]\log_2(a+2), +\infty[$.

Debe cumplirse $-3 \leq \log_2(a+2)$, esto se cumple para todo a en $\left[-\frac{15}{8}, 0\right[$.

Para estos valores de a: $\quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x+3}{a}\right), & a-3 \leq x < -3 \\ 2^x, & x > \log_2(a+2). \end{cases}$

4. Sea la función $f : [-5, -3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a\left(x^2 + ax\right)$, donde $a > 1$ es una constante real positiva. Determine todos los valores de a tales que f es decreciente y halle la función inversa f^{-1} para estos valores de a.

Solución:

En primer lugar, el dominio de $\phi(x) = \log_a\left(x^2 + ax\right)$ es $Dom(\phi) =]-\infty, -a[\cup]0, +\infty[$. Podemos verla como la compuesta $\phi = g \circ h$, donde $h(x) = x^2 + ax$, $x \in]-\infty, -a[\cup]0, +\infty[$ y $g(x) = \log_a(x)$.

Tenemos que h es decreciente en $]-\infty, -a[$ y h es creciente en $]0, +\infty[$.

Como $g(x) = \log_a(x)$ con $a > 1$ es creciente, entonces la compuesta $\phi(x) = \log_a\left(x^2 + ax\right)$ es decreciente para $x \in]-\infty, -a[$ y es creciente para $x \in]0, +\infty[$.

Buscamos los valores de a tales que ϕ sea decreciente en $[-5, -3]$. Entonces debe cumplirse $-3 < -a$. Los valores pedidos son todos los a en $]1, 3[$.

Para estos valores de a tenemos:

$$
\begin{aligned}
& y = \log_a\left(x^2 + ax\right), \quad -5 \leq x \leq -3, \quad \log_a(9-3a) \leq y \leq \log_a(25-5a) \\
\iff \quad & a^y = x^2 + ax, \quad -5 \leq x \leq -3, \quad \log_a(9-3a) \leq y \leq \log_a(25-5a) \\
\iff \quad & a^y + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2, \quad -5 \leq x \leq -3, \quad \log_a(9-3a) \leq y \leq \log_a(25-5a) \\
\iff \quad & x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^y + \frac{a^2}{4}}, \quad -5 \leq x \leq -3, \quad \log_a(9-3a) \leq y \leq \log_a(25-5a)
\end{aligned}
$$

Obs: Como $1 < a < 3$, entonces $-5 \leq x \leq -3 \Rightarrow x + \frac{a}{2} \leq -3 + \frac{a}{2} < -\frac{3}{2} < 0$.

$$f^{-1}(x) = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^x + \frac{a^2}{4}}, \quad \log_a(9-3a) \leq x \leq \log_a(25-5a).$$

5. En cada caso, halle todos los valores de la constante real a para los cuales la función f es inyectiva. Justifique su respuesta.

   a) $f(x) = \dfrac{a}{3^x + 2^x + a^2}$.

Solución:

Si $a = 0$, la función constante no es inyectiva.

Si $a > 0$, $3^x + 2^x + a^2$ es creciente y positiva, luego f es decreciente.

Si $a < 0$, $3^x + 2^x + a^2$ es creciente y positiva, luego f es creciente.

Los valores pedidos de a son $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = x^2 - 4a^2x + 1$, $x \in]a^4, a^4 + 2[$.

Solución:
El vértice de $y = x^2 - 4a^2x + 1 = \left(x - 2a^2\right)^2 + 1 - 4a^4$ es $(2a^2, 1 - 4a^4)$.
f es decreciente si y solo si $a^4 + 2 \le 2a^2$, pero ningún valor de a real cumple esto.
f es creciente si y solo si $a^4 \ge 2a^2$, esto se cumple para todo $a \in]-\infty, \sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
Para el resto de valores de a tendremos que f sería creciente en una parte del dominio y decreciente en otra parte del dominio.
Luego los valores pedidos son todo $a \in]-\infty, \sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

c) $f(x) = -x^2 + 2ax$, $x \in [-a^2 + 1, a^2 - 1[$.
Obs: Note que en el caso c) para que el intervalo correspondiente al dominio tenga sentido necesita que $a \notin [-1, 1]$.

Solución:
El vértice de $y = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2$ es (a, a^2).
f es creciente si y solo si $a^2 - 1 \le a \iff a^2 - a - 1 \le 0$, esto se cumple para todo a en $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cap (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) = \left]1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.
f es decreciente si y solo si $-a^2 + 1 \ge a \iff a^2 + a - 1 \le 0$, esto se cumple para todo a en $\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cap (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) = \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1\right[$.
Para el resto de valores de a tendremos que f sería creciente en una parte del dominio y decreciente en otra parte del dominio.
Luego los valores pedidos son todo $a \in \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1\right[\cup \left]1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

6. En el proceso de desintegración de cierta sustancia radiactiva, se sabe que la masa restante Q (en gramos) después de t minutos está modelada por $Q(t) = 6{,}6\, e^{kt}$, $t \ge 0$, con k constante real. Tomando en cuenta que cuando $t = 14$ minutos, la masa restante era 3,3 gramos, determine:

a) ¿Cuál fue la cantidad inicial de sustancia radiactiva?

Solución:
$Q(0) = 6{,}6$ gramos.

b) ¿Cuál es el valor de la constante k?

Solución:
Como $Q(14) = 6{,}6\, e^{14k} = 3{,}3$ obtenemos que $k = \dfrac{\ln(1/2)}{14} = -\dfrac{\ln(2)}{14}$.

c) ¿Al cabo de cuánto tiempo quedarán 2,5 gramos de sustancia?

Solución:
$Q(t) = 6{,}6\, e^{\frac{\ln(1/2)}{14} t} = 2{,}5 \iff t = 14 \dfrac{\ln(2{,}5/6{,}6)}{\ln(1/2)} \simeq 19{,}6$ minutos.

7. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) Si $x > 1$, entonces $\log_3 x < \log_5 x$.

   Solución:
   Falso. Por ejemplo, si $x = 5 > 1$ tenemos $\log_3(5) > 1 = \log_5(5)$.

   b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar y decreciente en $[0, +\infty[$ entonces f es decreciente en $]-\infty, 0]$.

   Solución:
   Verdadero.
   Para todo $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$: Si $x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \geq 0$, como f es decreciente en $[0, +\infty[$,
   $$\Rightarrow f(-x_1) < f(-x_2) \Rightarrow -f(-x_1) > -f(-x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

   c) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x < 0 \\ g_2(x), & x \geq 0 \end{cases}$, donde f, g_1 y g_2 son crecientes en sus respectivos dominios, entonces $f \circ g$ es creciente.

   Solución:
   Falso. Tome por ejemplo $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x - 5, & x \geq 0 \end{cases}$, $f \circ g$ no es creciente.

   d) La función definida por $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$ es inyectiva.

   Solución:
   Verdadero.
   Para todo $a, b \in \mathbb{R}$: Si $f(a) = f(b) \Rightarrow a^3 - a^2 + 3a - 3 = b^3 - b^2 + 3b - 3$
   $$\Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - a - b + 3) = 0$$
   Si vemos $a^2 + ab + b^2 - a - b + 3$ como una cuadrática en a: $a^2 + (b-1)a + (b^2 - b + 3)$, su discriminante es $(b-1)^2 - 4(b^2 - b + 3) = -3b^2 + 2b - 11 < 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
   Entonces $a^2 + ab + b^2 - a - b + 3 > 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, de donde $a^2 + ab + b^2 - a - b + 3 \neq 0$.
   Entonces llegamos a $a = b$.

   e) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

   Solución:
   Verdadero. Por las condiciones dadas $Dom(g \circ f) = \mathbb{R}$.
   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, pero como $g \circ f$ es inyectiva, esto implica que $\Rightarrow x_1 = x_2$.

San Miguel, 10 de junio de 2021.