Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Solución De La Cuarta Práctica Dirigida

Semestre Académico 2021 -1

Horario: Todos.

---

1. La recta ℓ pasa por el punto $P(1;-1;1)$ y tiene vector dirección $\overrightarrow{v}=(2;3;-1)$. Para cada uno de los siguientes planos $\mathscr{P}$, determine si ℓ y $\mathscr{P}$ son paralelos, perpendiculares o ninguno de los dos.

   a) $2x+3y-z=1$.

   b) $4x-y+5z=0$.

   c) $x-y-z=3$.

   d) $4x+6y-2z=0$.

   Solución. El vector dirección de la recta es $\vec{v}=(2;3;-1)$.

   a) El vector normal del plano es $\vec{n}=(2;3;-1)$. Como $\vec{v}\parallel\vec{n}$, decimos que la recta ℓ es paralela al plano $\mathscr{P}$. Además, notemos que $P(1;-1;1)$ no pertenece al plano $\mathscr{P}$, por lo tanto $\ell\cap\mathscr{P}=\phi$.

   b) En este caso, el vector normal del plano es $\vec{n}=(4;-1;5)$. Como $\vec{v}\bullet\vec{n}=0$, decimos que la recta ℓ es perpendicular al plano $\mathscr{P}$.

   c) En este caso, el vector normal del plano es $\vec{n}=(1;-1;-1)$. Como $\vec{v}\bullet\vec{n}=0$, decimos que la recta ℓ es perpendicular al plano $\mathscr{P}$.

   d) En este caso, el vector normal del plano es $\vec{n}=(4;6;-2)$. Como $\vec{v}\parallel\vec{n}$, decimos que la recta ℓ es paralela al plano $\mathscr{P}$. Además, notemos que $P(1;-1;1)$ no pertenece al plano $\mathscr{P}$, por lo tanto $\ell\cap\mathscr{P}=\phi$.

2. Considere las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ cuyas ecuaciones son

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=81 \quad \text{y} \quad (x-9)^2+(y-7)^2+(z-6)^2=9,$$

   respectivamente.

   a) Determine la posición relativa entre $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.

   b) Una recta $\mathscr{L}$ que pasa por los centros de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ interseca a la esfera $\mathcal{S}_2$ en el punto Q, cuya tercera coordenada es diferente de 5. Halle una ecuación de la recta $\mathscr{L}$ y la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}_2$ en el punto Q.

   Solución:

   a) Los centros de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son $C_1(1;-1;2)$ y $C_1(9;7;6)$, respectivamente. Además, como

$$d(C_1,C_2)=r_1+r_2,$$

   concluimos que dichas esferas son tangentes exteriormente.

   b) • La ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por los centros de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, es $\mathscr{L}:P=(1,-1,2)+t(8,8,4), t\in\mathbb{R}$. Además, como $Q\in\mathscr{L}\cap\mathcal{S}_2$, resulta que $Q(1+8t;1+8t;2+4t)$.
   Asimismo, como $Q(1+8t;-1+8t;2+4t)\in\mathcal{S}_2$, obtenemos $t=\dfrac{5}{4}$ o $t=\dfrac{3}{4}$. Para $t=\dfrac{5}{4}$ se tiene $Q(11;9;7)$, que cumple con la condición del problema.

- Podemos considerar como vector normal del plano al vector $\vec{N}=(8;8;4)$. Así, la ecuación cartesiana del plano es
$$\mathscr{P}: 2x+2y+z=47.$$

3. Sean las matrices
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \\ 1 & d \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=(c_{ij})_{2\times 2}\quad \text{tal que}\quad c_{ij}=\begin{cases} i\cdot j & ,\text{si} \quad i\geq j \\ 2i-3j & ,\text{si} \quad i<j \end{cases}.$$
Si se cumple $X^tA=C$, halle los valores de a, b, c y d.

Solución. La matriz C es de la forma:
$$C=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
Luego,
$$X^tA=C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & 1 \\ b & 2 & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a+2c-1 & 2a-c+2 \\ b-d+4 & 2b+2d-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
De donde obtenemos: $a=-2, b=\dfrac{1}{2}, c=2$ y $d=\dfrac{5}{2}$.

4. Sean $A_{3\times 3}$ y $B_{3\times 3}$ matrices que cumplen las siguientes propiedades $AA^t=9I$ y $BB=I$.
Halle las matrices X e Y que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales
$$\begin{cases} A^tX+Y=I \\ BY=I \end{cases}.$$
Solución:
De la primera ecuación se tiene $A(A^tX+Y)=AI$, de donde resulta $9X+AY=A$. Además, en la segunda ecuación tenemos $B(BY)=BI$, de donde obtenemos $Y=B$.
Así, $X=\dfrac{1}{9}(A-AB)$.

5. Considere el siguiente determinante:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ x & y & z & w \end{vmatrix}=\kappa.$$
Calcule el valor de R en términos de κ
$$R=\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ \frac{x}{2}+4a & \frac{y}{2}+4b & \frac{z}{2}+4c & \frac{w}{2}+4d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m & n & 0 & p & r \\ x & y & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Solución. Calculamos los determinantes de manera independiente.

- $$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ \frac{x}{2}+4a & \frac{y}{2}+4b & \frac{z}{2}+4c & \frac{w}{2}+4d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} & \frac{w}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ 4a & 4b & 4c & 4d \end{vmatrix}$$
$$= \frac{3}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ x & y & z & w \end{vmatrix} + 0$$
$$= \frac{3}{2}\kappa$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m & n & 0 & p & r \\ x & y & 0 & z & w \end{vmatrix} = 1(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & b & c & d \\ m & n & p & r \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = \frac{\kappa}{2}$$

Luego, $R = \frac{5}{2}\kappa$.

6. Sea P un plano tangente a la esfera $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0$ en el punto Q. Además, la recta $\mathcal{L} : P = (4;1;1)+t(4;3;1), t \in R$ que pasa por el punto Q, está contenida en el plano $\mathcal{P}$.

   a) Halle la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$.

   b) Si la esfera $\mathcal{S}$ interseca al plano $\mathcal{P}_1 : x-y+z=1$ en una circunferencia $\mathcal{C}$, halle las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$.

   Solución:

   a) • Como $Q \in \mathcal{L}$ tenemos $Q(4t+4;3t+1;1+t)$. Además, $Q \in \mathcal{S}$, de donde obtenemos $t=-1$. Así, $Q(0;-2;0)$.

   • Podemos considerar como vector normal del plano $\mathcal{P}$ al vector $\overrightarrow{QC_0} = (1;-1;-1)$, donde C_0 es el centro de la esfera. Asimismo, teniendo en cuenta que $Q \in \mathcal{P}$, concluimos que la ecuación cartesiana del plano es
   $$\mathcal{P} : x-y-z=2.$$

   b) • La ecuación de la recta que pasa por el centro de $\mathcal{S}$ y es perpendicular al plano $\mathcal{P}_1$ es
   $$\mathcal{L}_1 : P = (1;-3;-1)+t(1;-1,1), t \in R.$$

   • Sea C_1 el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$. Además, teniendo en cuenta que $C_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{P}_1$, se tiene $C_1\left(\frac{1}{3};-\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)$. Asimismo, el radio de dicha circunferencia es $r = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

7. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

   a) Sean A y B matrices de orden $n \times n$. Si $AB = A$ y $BA = B$, entonces $A^2 = A$.

b) Si X es una matriz triangular superior de orden 2×2 que satisface la siguiente ecuación matricial

$$X^2 - X - 2I = \Theta,$$

siendo Θ la matriz nula, entonces se cumple que $X = -I$ o $X = 2I$.

Solución:

a) **(Verdadero)**

$$\begin{aligned} A = AB &= A(BA) \\ &= (AB)A \\ &= A^2. \end{aligned}$$

b) **(Falso)**

Consideremos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Además,

$$X^2 - X - 2I = \begin{pmatrix} a^2 - a - 2 & ab + bc - b \\ 0 & c^2 - c - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, al resolver el sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} a = 2;\ c = 2;\ b = 0 \\ a = -1;\ c = -1;\ b = 0 \\ a = 2;\ c = -1;\ b \in \mathbb{R} \\ a = -1;\ c = 2;\ b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por tanto, la proposición es falso porque hay más soluciones, además de las que se indican en la proposición.
Nota. También se puede considerar un caso particular.

San Miguel, 21 de junio de 2021.