PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Álgebra Matricial y Geometría Analítica
Solución Cuarta Práctica Calificada

(2017-1)

---

1. Sea A una matriz simétrica de orden 3×3, definida por $a_{ij} = 2i + j, i \geq j$.

   a) Halle la matriz X tal que
$$\frac{1}{5}(X - 2A) = A^t - 2A$$
(2 pts)

   Solución.-

   - La matriz A está dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
   - Usando el dato que $A = A^t$ simplificamos la ecuación $\frac{1}{5}(X - 2A) = A^t - 2A$, obteniendo $X = -3A$.
   - Reemplazando en A, tenemos $X = \begin{pmatrix} -9 & -15 & -21 \\ -15 & -18 & -24 \\ -21 & -24 & -27 \end{pmatrix}$

   b) Halle el determinante de $A^t X$. (2 pts)

   Solución.-

$$\det(A^t X) = \det(AX) = \det(-3A^2) = -27\det(A^2) = -27(\det(A))^2 = -27(11)^2 = -3267$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 3×3. (2 pts)

   Solución.-

   - Hallamos la matriz $A - \lambda I$, es decir,
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$
   - Hallamos el determinante de $A - \lambda I$, es decir,
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

- Resolvemos la ecuación $\det(A-\lambda I)=0 \leftrightarrow \lambda=-2, \lambda=3, \lambda=4$.

b) Sea la matriz $X=\begin{pmatrix} x & 2 & 2\end{pmatrix}_{1\times 3}$, determine los valores de $x\in\mathbb{R}$ tal que $X\cdot A\cdot X^t = \Theta$, siendo Θ la matriz nula. (3 pts)

Solución.-

- Por hallar la matriz

$$\begin{pmatrix} x & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 2 & 2\end{pmatrix}^t = 2x^2+16x+4$$

- Por resolver la ecuación $2x^2+16x+4=0 \leftrightarrow x=-\sqrt{14}-4 \vee x=\sqrt{14}-4$.

3. a) ¿Para qué valores de k los vectores $(1,3,-1),(2k,k+1,k)$ y $(1+k,k,1)$ son linealmente independientes? (3 pts)
Solución.-
Calculamos el producto mixto de los vectores, es decir,

$$\begin{aligned}(1+k,k,1)\cdot((1,3,-1)\times(2k,k+1,k)) &= (1+k,k,1)\cdot(1+4k,-3k,1-5k)\\ &= k^2+2\neq 0\end{aligned}$$

Esto nos indica que los vectores son linealmente independientes para cualquier valor de k.

b) ¿El conjunto $S=\{(1,2,3),(2,0,1),(0,0,0)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$? (2 pts)
Solución.- Dado que el vector $(0,0,0)$ se puede escribir como combinación lineal de los otros vectores de S, es decir,

$$0 = 0(1,2,3)+0(2,0,1)$$

se concluye que tales vectores no son linealmente independientes y por lo tanto no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(1,0,2)$ y $(0,1,1)$. Jutifique su respuesta. (2 pts)
Solución.- Es suficiente elegir al vector $u=(1,0,2)\times(0,1,1)=(-2,-1,1)$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} = 6$$

se concluye que tales vectores son linealmente independientes. Además generan a $\mathbb{R}^3$, por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^3$.

4. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas.

a) Si A es una matriz simétrica de orden $p\times p$ y B es una matriz de orden $p\times q$ entonces B^tAB es simétrica. (1 pt)
Solución.- Verdad, dado que

$$(B^tAB)^t = (AB)^t(B^t)^t = (B^tA^t)B = B^tAB$$

b) Sean A, B y C matrices de orden 2×2. Si $AC = BC$ y $C \neq 0$ entonces $A = B$. (1 pt)

Solución.- Falso. Es suficiente considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Si $A = I - 2(B \cdot B^t)$, donde B es una matriz de orden 3×1 e I la matriz identidad de orden 3×3, entonces $A \cdot A = I$. (1 pt)

Solución.- Falso, es suficiente considerar el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de donde $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego, $A \cdot A = (I - 2B \cdot B^t)(I - 2B \cdot B^t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) Si $u, v \in \mathbb{R}^2$ son vectores ortogonales, entonces el conjunto $S = \{u - v, u + v\}$ es linealmente independiente. (1 pt)

Solución.- Falso. Para $u = (0, 0)$ se tiene $S = \{-v, v\}$ que es linealmente dependiente.

Turno: 19:00 - 21:00.

San Miguel, 15 de junio de 2017.