ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

SEGUNDO EXAMEN

SEMESTRE ACADÉMICO 2018-2

Horario: Todos | Duración: 3 horas

Elaborado por todos los profesores del curso

ADVERTENCIAS:

- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación.
- Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad.
- Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos.
- Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica.
- En caso de que el tipo de evaluación permita el uso de calculadoras, estas no podrán ser programables.
- Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:

- Se prohíbe el uso de apuntes de clase, libros, tablas, calculadora y de computadora personal.
- Debe explicar detalladamente sus soluciones.
- La presentación, la ortografía y la gramática serán tomadas en cuenta en la calificación.
- Enumere las páginas del cuadernillo en la parte superior del 1 al 12 y reserve **dos** páginas para resolver cada una de las preguntas, según la distribución siguiente:

Pregunta	1	2	3	4	5
Páginas	1 y 2	3 y 4	5 y 6	7 y 8	9 y 10

1. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta adecuadamente.

   a) Una condición necesaria para que las funciones f y g sean impar y par en $\mathbb{R}$, respectivamente, es que la función compuesta $g \circ f$ sea par. 1 punto

   b) La función f, definida por $f(x) = e^{x^2}$, tiene inversa. 1 punto

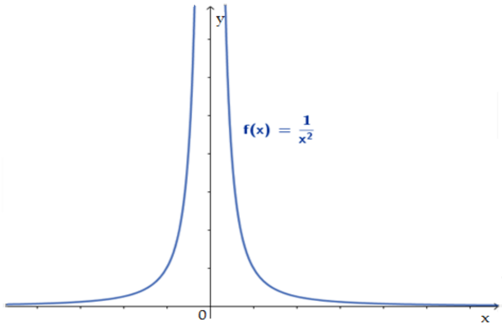
   c) La gráfica de la función f, definida por $f(x) = log_2(-x+1)$ para $x < 1$, **no** tiene asíntota vertical. 1 punto

   d) El rango de la función f, definida por $f(x) = |arcsen(x)| + 1$, es $\left[1, \frac{\pi}{2}+1\right]$. 1 punto

2. En cada caso, esboce la gráfica de la función g, indicando (i) las coordenadas de los puntos de intersección de g con los ejes coordenados, (ii) las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de g, si las tuviese.

   a) $g(x) = kx^3 - 3k^3x - 2k^4$, con $k < 0$. 1.5 puntos

   b) $g(x) = f(x-2) - 4$, si se sabe que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y la gráfica de f tiene asíntotas, cuyas ecuaciones son $x = 0$ y $y = 0$, como se muestra en la siguiente figura. 1.5 puntos



3. Dada la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & -2 < x < -1 \\ \arccos(x-1), & 0 \leq x < 2 \end{cases}.$$

a) Justifique que f es una función inyectiva. 1 punto

b) Determine la regla de correspondencia de la función inversa, f^{-1}. 2 puntos

c) Esboce la gráfica de f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano. 1 punto

4. Sea f una función que cumple las condiciones siguientes:

- $Dom(f) = [0, +\infty[- \{4\}$.
- La gráfica de f pasa por los puntos $(3, -2)$, $(5, 4)$ y $(6, 6)$.
- Para $0 \leq x < 4$, se tiene un tramo polinómico de grado 3, cuyas únicas raíces reales son 1 y 2.
- Para $0 < x \leq 2$, la función es no negativa; es decir $f(x) \geq 0$.
- Para $x > 4$, se tiene un tramo logarítmico de la forma $f(x) = 4 + C\, log_a(x - a)$.

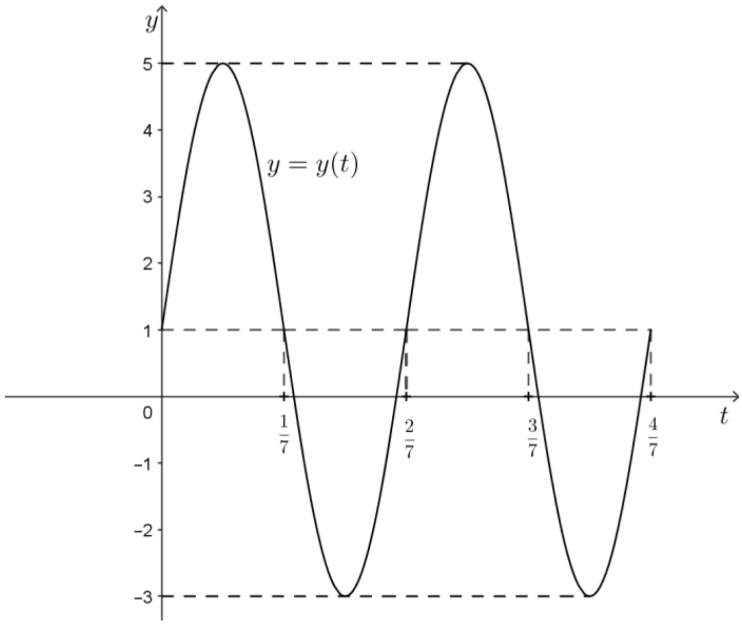
Determine lo siguiente:

a) La regla de correspondencia f, indicando su dominio. 3.5 puntos

b) Las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de f. 0.5 puntos

c) Los valores de $x \in Dom(f)$ tales que $f(x) \leq 0$. 1 punto

5. a) La gráfica mostrada representa la posición $y = y(t)$ de un objeto en función del tiempo y tiene la forma $y(t) = a \operatorname{sen} \omega t + b$.



Determine la amplitud, la frecuencia ω y la constante b. 1.5 puntos

b) Dada la función f, definida por $f(x) = \arccos(2x - x^2)$ determine lo siguiente:

b_1) El dominio de la función f. 1 punto

b_2) Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con la recta $y = \frac{\pi}{3}$. 1.5 puntos

Coordinadora de teoría: Norma Rubio

San Miguel, 03 de diciembre de 2018

Año 2018 Número 5549

Código de alumno

Segundo examen

Ramírez Huamán, Wilven Aldo

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

ENTREGADO 17 DIC. 2018

Curso: FCAL

Horario: H-109

Fecha: 03/12/18

Nombre del profesor: BANCES

Nota

20

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la correción gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\log_2 x$

$f(x) = e^{x^2}$

$e^{x_1^2} = e^{x_2^2}$

$x_1^2 = x_2^2$

$\log_2(-x+1)$ $\log(x)$

$\log_2 1 = 0$

$\log_2 2 = 1$

$f(x) = -\infty$

$\to 1$

---

1) ①

a) Una proposición equivalente será:

Si, f es impar y g es par → gof es par

Si: f es impar ⇒ $f(-x) = -f(x)$

g es par ⇒ $g(-x) = g(x)$

Si f es impar y g es par → $gof_{(-x)} = g(f_{(-x)})$

por ser f impar

→ $gof_{(-x)} = g(-f_{(x)})$

por ser g par

→ $gof_{(-x)} = g(f_{(x)})$ =s

→ gof es una función par

Explique mejor su proceso

1.0

⇒ La proposición es Verdadera.

b) X_1 y $X_2 \in$ Dom f

Si: $f(x_1) = f(x_2) \to e^{x_1^2} = e^{x_2^2}$

$\to \ln e^{x_1^2} = \ln e^{x_2^2}$

$\to x_1^2 \cdot \ln e = x_2^2 \cdot \ln e$

$\to x_1^2 = x_2^2$

$\to x_1 = x_2 \lor x_1 = -x_2$

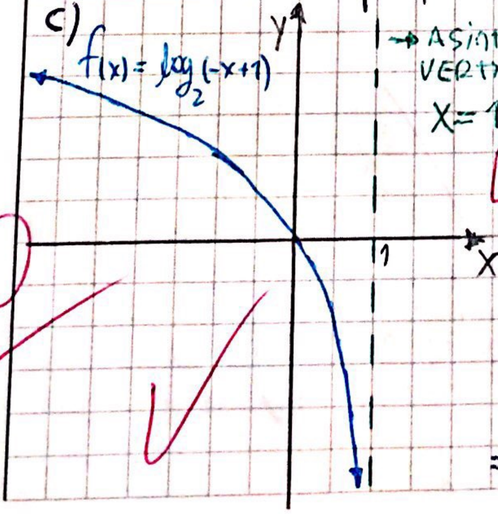
→ f no es inyectiva

→ f no admite inversa.

1.0

⇒ La proposición Es Falsa.

c)



⇒ de la grafica:

Dom f = $]-\infty, 1[$

f tiene asíntota Vertical: X=1 pues, la asíntota no necesariamente debe pertenecer al domin

1.0

⇒ La proposición es Falsa.

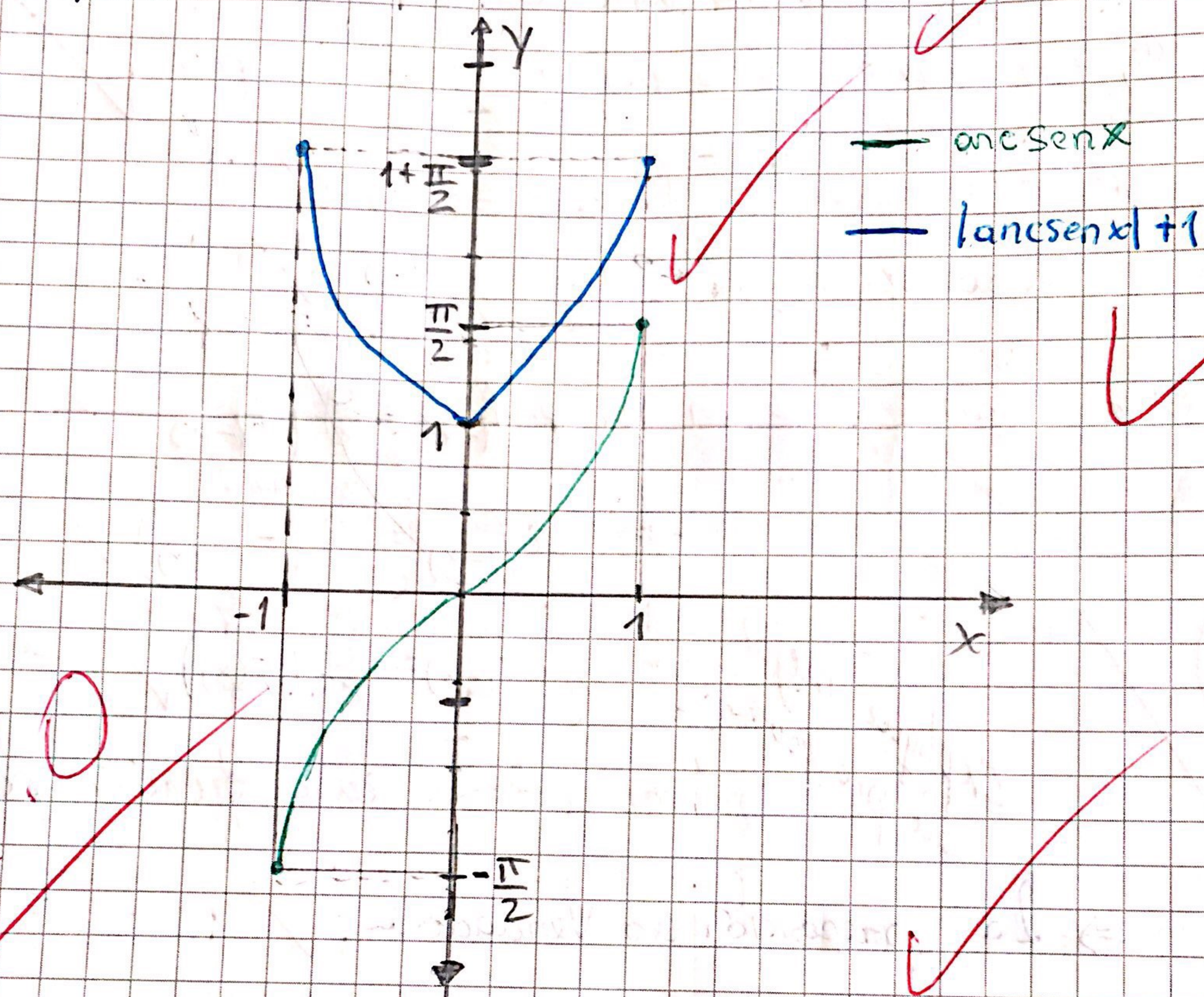
Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

Zona ex
cálculos
(b

$f(x) = |\arcsen(x)| + 1$ ②

d)



3,14
1,6

1.0

De la grafica El $\operatorname{Ran} f = \left[1,\ 1+\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$ La proposición Es VERDADERA

Scanned with CamScanner

Presente aquí su trabajo

2) a) $g(x) = kx^3 - 3k^3x - 2k^4$, $k<0$ ③

$\Rightarrow$ Dom $g = \mathbb{R}$, Pues no hay restricciones

$g(x) = k(x^3 - 3k^2x - 2k^3)$

$g(x) = k(x^3 - k^2x - 2k^2x - 2k^3)$

$g(x) = k[x(x^2 - k^2) - 2k^2(x+k)]$

$g(x) = k[x(x-k)(x+k) - 2k^2(x+k)]$

$g(x) = k[(x+k)(x^2 - xk - 2k^2)]$

$x \quad -2k$

$x \quad +k$

$\Rightarrow g(x) = k(x+k)(x-2k)(x+k)$

$\Rightarrow g(x) = k(x+k)^2(x-2k)$, $k<0$

i) Coordenadas de los puntos de intersección

Con eje X: $k(x+k)^2(x-2k) = 0 \Rightarrow x = -k \vee x = 2k$

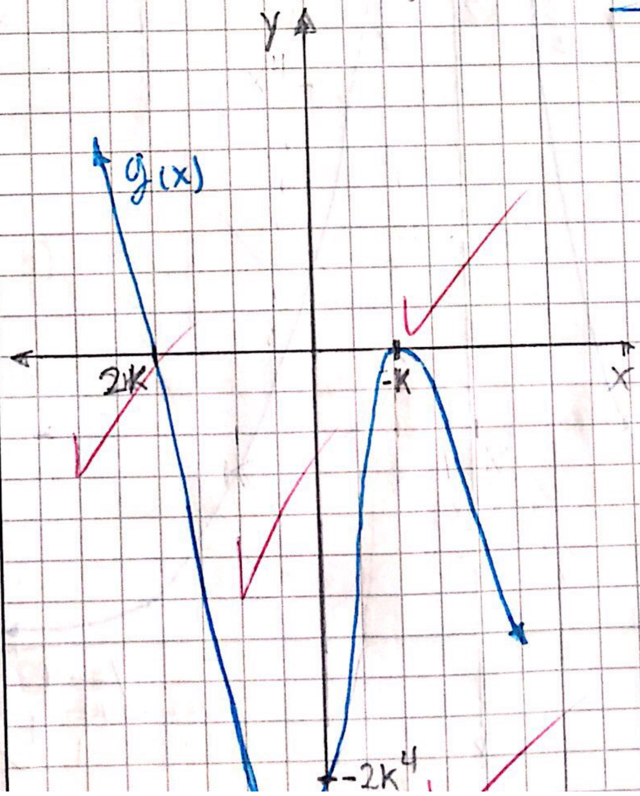
$\Rightarrow (-k, 0) \vee (2k, 0)$

Con eje Y: $k(0+k)^2(0-2k) = y \Rightarrow y = -2k^4$

$\Rightarrow (0, -2k^4)$

ii) g es polinomial Dom $g = \mathbb{R}$ $\wedge$ Ran $g = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ No hay asíntotas.



1,5

Presente aquí su trabajo (4)

Zona exclusiva para cálculos y desarrollo (borrador)

b) $g(x) = f(x-2) - 4$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

i) $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} - 4$ $\quad$ Coordenadas de intersección de g.

Con eje y:

$\dfrac{1}{(0-2)^2} - 4 = y$

$\Rightarrow y = -\dfrac{15}{4} \Rightarrow \left(0, -\dfrac{15}{4}\right)$

Con eje x

$\dfrac{1}{(x-2)^2} - 4 = 0 \Rightarrow |x-2| = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{5}{2} \vee x = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{5}{2}, 0\right) \vee \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

ii) $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} - 4$

- Asíntota Horizontal: $y = -4$
- Asíntota Vertical: $x = 2$

$2+\frac{1}{2}$ $\quad 2-\frac{1}{2}$

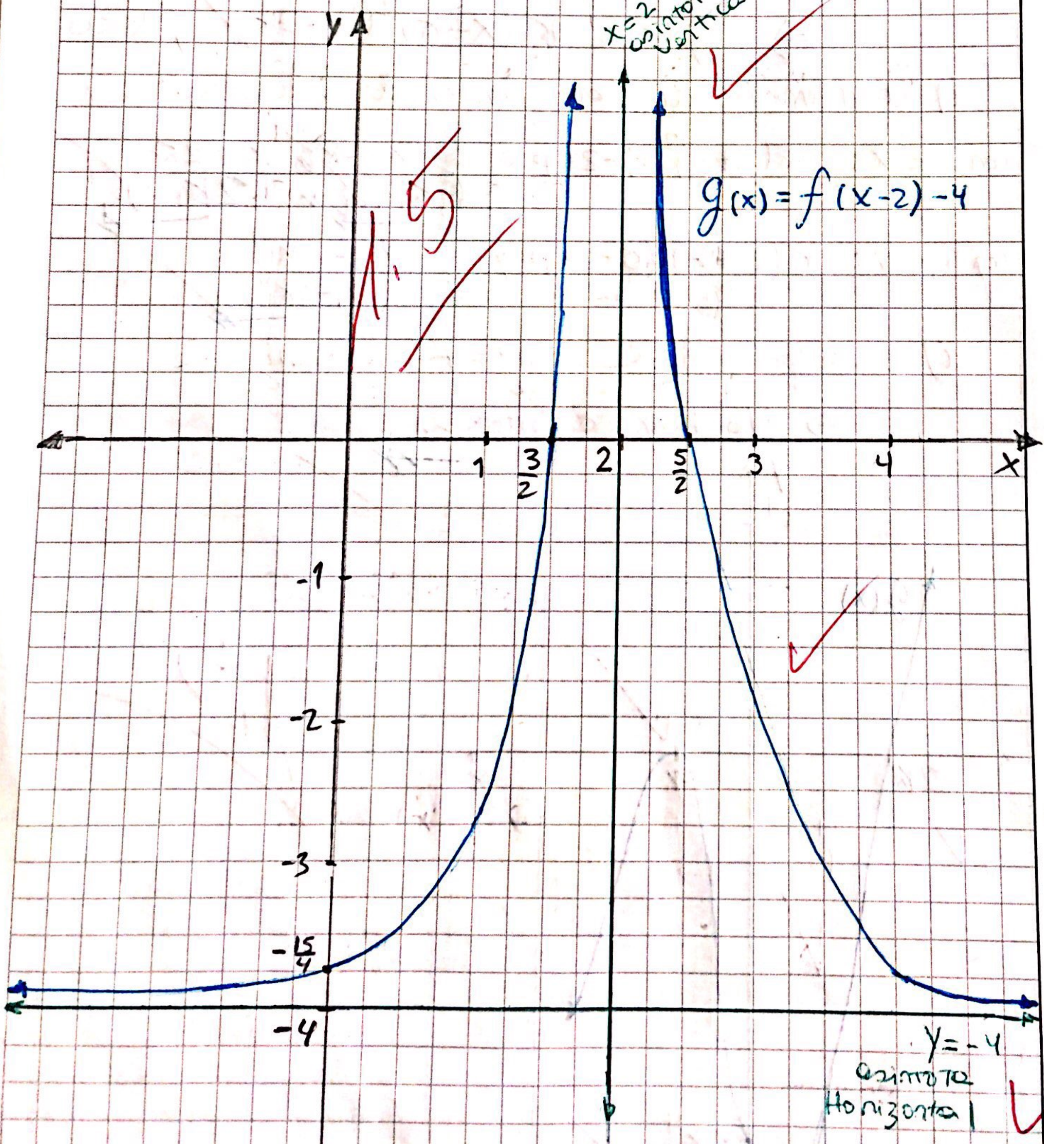
$\frac{1}{4} - 4$

$\frac{1-16}{4}$

$-\frac{15}{4}$

15 | 4
12 3,75
30
16
2

1,5



lusiva para
desarrollos
rador)

5

3) a) Tramo 1:

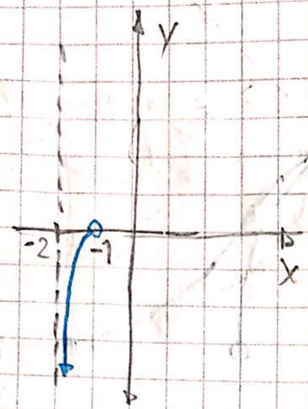
x_1 y $x_2 \in \,]-2,-1[\,$, $m \in Ranf$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \ln(x_1+2)=\ln(x_2+2)=m$

$\Rightarrow e^m = x_1+2 \wedge e^m = x_2+2$

$\Rightarrow x_1+2 = x_2+2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ es inyectivo en $]-2,1[$



$Ranf =]-\infty, 0[$

tramo 2: x_1 y $x_2 \in [0,2[$, $\theta \in Ranf$

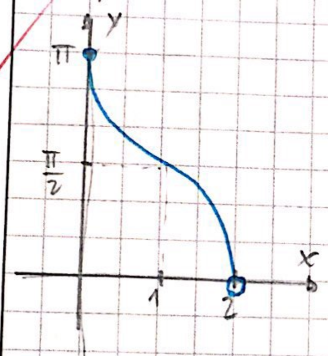
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \arccos(x_1-1)=\arccos(x_2-1)=\theta$

$\Rightarrow \arccos(x_1-1)=\theta \wedge \arccos(x_2-1)=\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = x_1-1 \wedge \cos\theta = x_2-1$

$\Rightarrow x_1-1 = x_2-1$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ es inyectivo en $[0,2[$



$Ranf =]0,\pi]$

1.0

Rango de tramo1 $\cap$ Rango de tramo 2 $= \phi$

$\Rightarrow f$ es inyectiva en todo su dominio

$Dom f =]-2,-1[\cup [0,2[$

b) tramo 1: $f(f^{-1}_{(x)}) = x \Rightarrow x = \ln(f^{-1}_{(x)}+2)$

$\Rightarrow e^x = f^{-1}(x)+2$

$Dom f^{-1} = Ran f =]-\infty,0[$;

$\Rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 2$

2.0

tramo 2: $f(f^{-1}_{(x)}) = x \Rightarrow x = \arccos(f^{-1}_{(x)}-1)$

$Dom f^{-1} = Ran f =]0,\pi]$;

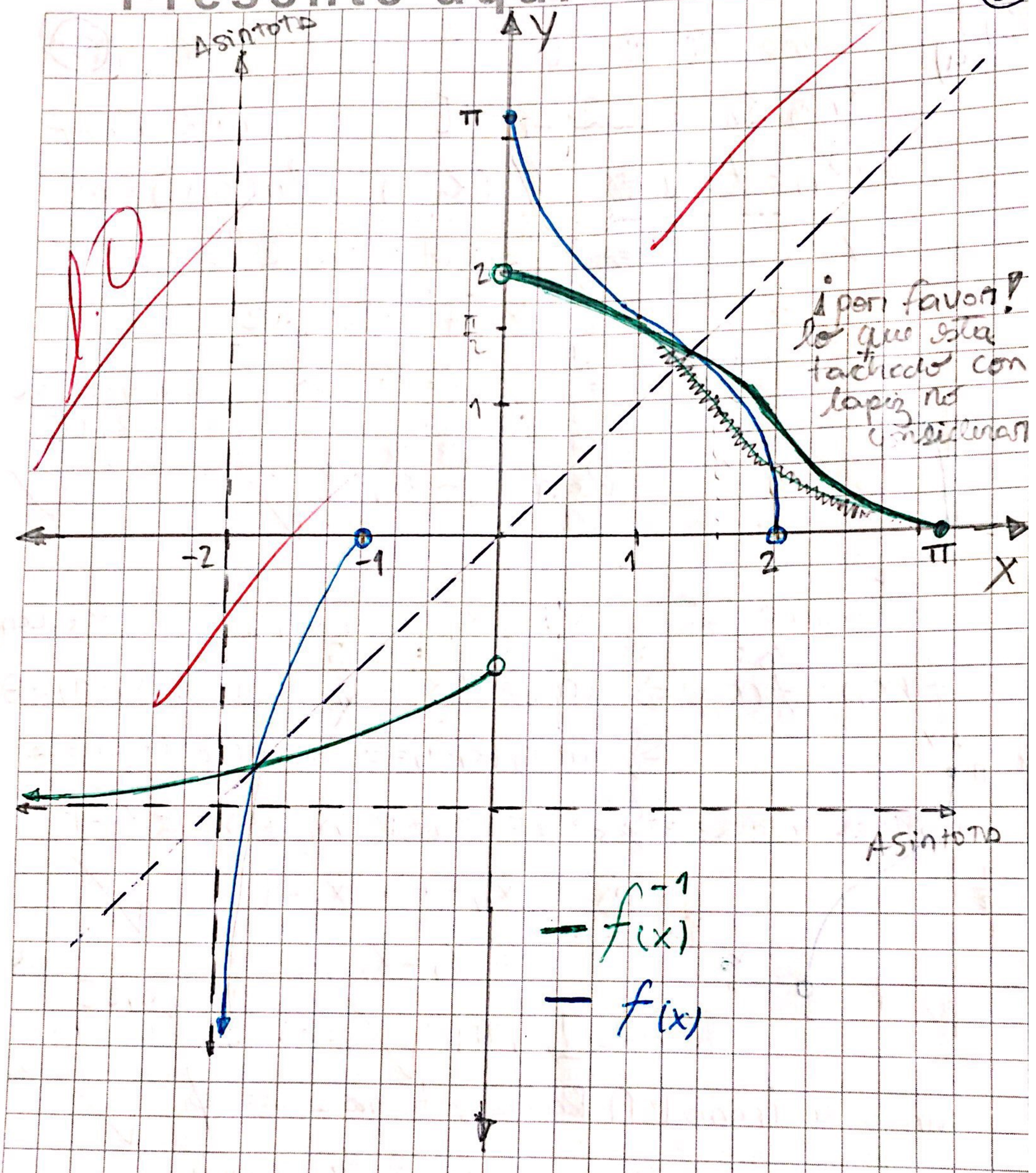
$\Rightarrow \cos x = f^{-1}(x) - 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \cos x + 1$

Regla de correspondencia

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^x - 2, & x < 0 \\ \cos x + 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Presente aquí su trabajo



¡por favor! lo que esta tachado con lapiz no considerar

7

4) a) • Tramo: $4<x$

$f(x) = 4 + C\log_a(x-a)$ / $(6,6) \to (x, f(x))$, $(5,4) \to (x, f(x))$

$\Rightarrow 6 = 4 + C\log_a(6-a)$ | $4 = 4 + C\log_a(5-a)$

$\Rightarrow 2 = C\log_a(6-a)$ | $\Rightarrow 0 = \underbrace{C\log_a(5-a)}_{=0}$

Reemplazando a (I) | $\Rightarrow a^0 = 5-a$

$\Rightarrow 2 = C\log_4(6-4)$ | $\Rightarrow a = 5-1 \Rightarrow a = 4 \ldots (I)$

$\Rightarrow \frac{2}{C} = \log_4(2)$

$\Rightarrow 4^{(\frac{2}{c})} = 2 \Rightarrow (2^2)^{(\frac{2}{c})} = 2^1 \Rightarrow 2^{4/c} = 2^1$

$\Rightarrow \frac{4}{c} = 1 \Rightarrow C = 4$

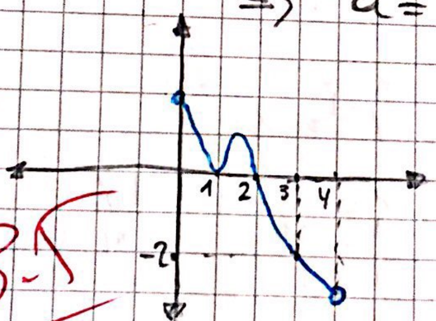
$f(x) = 4 + 4\log_4(x-4)$

• Tramo: $0 \leq x < 4$ / función polinomial (grado 3) con raíces $x=1$ y $x=2$

$\Rightarrow f(x) = a(x-1)^2(x-2)$ / $(3,-2) \in [0,4[$

$\Rightarrow -2 = a(3-1)^2(3-2)$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)$



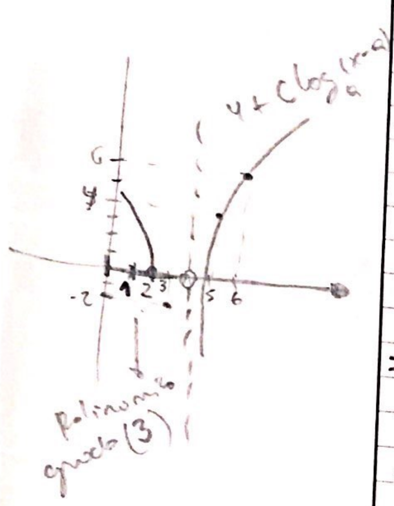
Como muestra la gráfica en: $0 \leq x < 2$ $f(x) \geq 0$

3.5

Regla de correspondencia

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2), & 0 \leq x < 4 \\ 4 + 4\log_4(x-4), & 4 < x \end{cases}$$

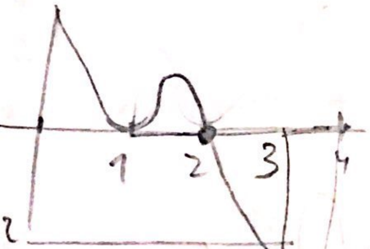
$\text{Dom} f = [0, +\infty[- \{4\}$



$4 + 4\log_4(1)$

$4 + 4\log_4(2)$

$x=1$ $x=2$



$(x-1)^2(x-2) = f(x)$

$(3-1)^2(3-2) = -2$

$a4(1) = -2$

$a =$

$-\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)$

1

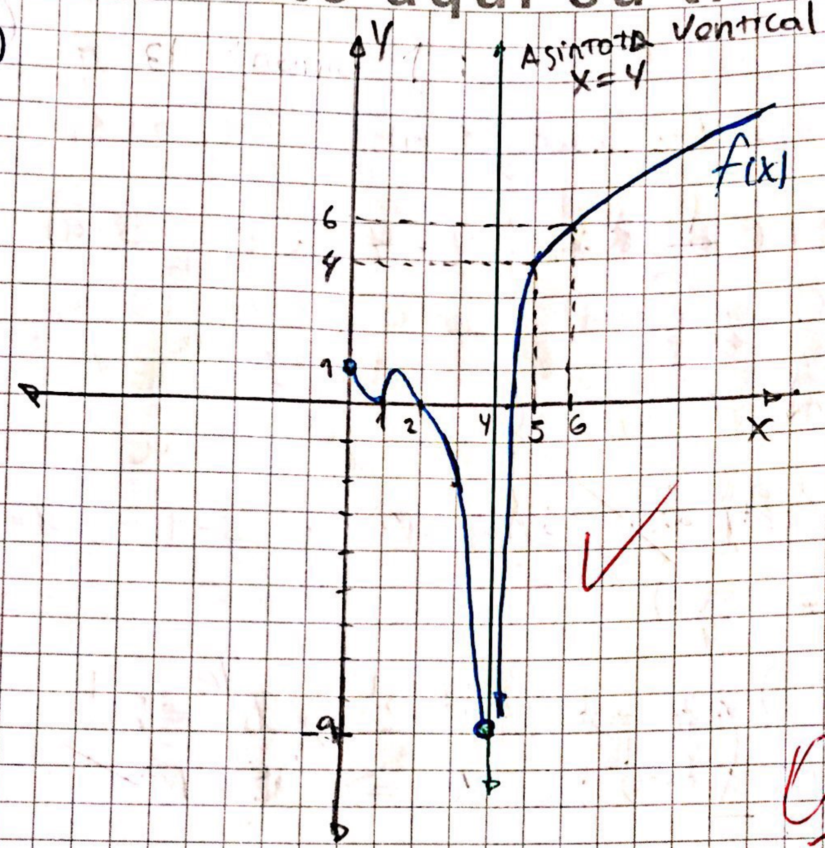
$(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})$

$-\frac{1}{2}(3)^2(2)$

-9

Zona exclu... cálculos y ... (borra...

b)



0.5

DE la grafica tenemos 1 solo asintota Vertical:

$$X = 4$$

c) DE la grafica:

En: $X \in [2, 4[\rightarrow f(x) \leq 0$

para $f(x) = 0 = 4 + 4\log_4(x-4)$

$$\Rightarrow \cancel{-4} = \cancel{4}\log_4(x-4) \Rightarrow 4^{-1} = x - 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

1.0

En: $X \in]4, \frac{17}{4}] \rightarrow f(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ Los Valores de $X \in Dom f \,/\, f(x) \leq 0$

Son: $X \in [2, 4[\cup]4, \frac{17}{4}]$

{1}∪

2.0

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

Presente aquí su trabajo

9

5) del gráfico:

a) • Amplitud $= 5-1 = 4 = a$

• frecuencia: ω

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{7}{2}\pi \cdot 2$

error $\quad \omega = 7\pi$

1.0

• Constante b: desplazamiento en eje Y:

$b = 1$

b) $f(x) = \arccos(2x - x^2)$

b1) $-1 \leq 2x - x^2 \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq 2x - x^2 \quad \wedge \quad 2x - x^2 \leq 1$

$x^2 - 2x - 1 \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq x^2 - 2x + 1$

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2}$

$[x - (1+\sqrt{2})][x - (1-\sqrt{2})] \leq 0 \wedge 0 \leq (x-1)^2$

$+ \quad - \quad +$

$1-\sqrt{2} \qquad 1+\sqrt{2}$

$x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \wedge x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

1.0

$\Rightarrow \operatorname{Dom} f = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

b2) Los puntos de f que intersecten a la recta $y = \frac{\pi}{3}$ tendrían como coordenada en el eje Y a $\frac{\pi}{3}$

$(x, \frac{\pi}{3}) \in (x, f(x)) \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \arccos(2x - x^2)$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = 2x - x^2$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(-1)$

$16+4$

$\frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

$1 \pm \sqrt{5}$

$[x - (1+\sqrt{5})][x - (1-\sqrt{5})]$

$4+4$

$2\sqrt{2}$

$\frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{4+4}$

$1 \pm \sqrt{2}$

$x - 1$

$2+2\sqrt{2} - (\sqrt{2}+1)^2$

$-(3+2\sqrt{2})$

$-3-2\sqrt{2}$

$\arccos(2x - x^2)$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{2}\right)}}{1 \times 2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica f con la recta $y = \frac{\pi}{3}$ serán:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ y } \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$$