ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE ACADÉMICO 2019-2

Horarios: TODOS

Duración: 180 minutos

ADVERTENCIAS:
- Todo dispositivo electrónico (teléfono, tableta, computadora, calculadora u otro) deberá permanecer apagado durante la evaluación. - Coloque todo aquello que no sean útiles de uso autorizado durante la evaluación en la parte delantera del aula, por ejemplo, mochila, maletín, cartera o similar, y procure que contenga todas sus propiedades. La apropiada identificación de las pertenencias es su responsabilidad. - Si se detecta omisión a los dos puntos anteriores, la evaluación será considerada nula y podrá conllevar el inicio de un procedimiento disciplinario en determinados casos. - Es su responsabilidad tomar las precauciones necesarias para no requerir la utilización de servicios higiénicos: durante la evaluación, no podrá acceder a ellos, de tener alguna emergencia comunicárselo a su jefe de práctica. - Quienes deseen retirarse del aula y dar por concluida su evaluación no lo podrán hacer dentro de la primera mitad del tiempo de duración destinado a ella.

INDICACIONES:
- No está permitido el uso de apuntes ni calculadoras. - **Debe contestar solo 5 de las 6 preguntas.** Marque con una X en la cara final del cuadernillo la pregunta que no debe corregirse. - En caso resuelva las 6 preguntas y no indique cuál no debe corregirse, se anulará la pregunta en la que obtuvo el mayor puntaje.

---

1. La recta $L: x - y - 7 = 0$ es tangente en el punto T, simultáneamente, a las circunferencias $C_1: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 50$ y C_2. Si se sabe además que la distancia del centro de C_1 al centro de C_2 es a la distancia del centro de C_2 al punto T como 3 es a 2, halle la ecuación de la circunferencia C_2. 4 puntos

2. Sean los puntos $A(2; 3)$ y $B(3; 7)$, vértices del triángulo APB, tal que el ángulo interior de lado inicial PB y lado final PA, medido en sentido antihorario, mide $\frac{\pi}{4}$. Demuestre que la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P está contenido en una circunferencia.

   4 puntos

3. La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene eje focal paralelo a la recta $\mathcal{L}_1: x = 4$ y como una de sus asíntotas a la recta $\mathcal{L}_2: 4x - 3y + 6 = 0$.

   a) Si se sabe además que el punto Q, resultado de la intersección de $\mathcal{L}_1$ con la recta que contiene al eje conjugado de $\mathcal{H}$, dista de la recta $\mathcal{L}_2$ en $\frac{28}{5}$, determine las coordenadas de Q. 2 puntos

   b) Considerando los resultados de la parte a) y, sabiendo además que la abscisa del centro de $\mathcal{H}$ es negativa y que el punto $A(3\sqrt{3} - 3; -10)$ pertenece a $\mathcal{H}$, determine la ecuación de $\mathcal{H}$. 2 puntos

4. Los puntos $A(8; 1; 1)$, $B(4; 6; 2)$ y $C(3; 5; 2)$ son vértices del tetraedro $ABCD$ cuyo volumen es $\frac{88}{3}$. Desde el vértice D se traza un segmento perpendicular a la base ABC, siendo el otro extremo de dicho segmento el baricentro del triángulo ABC.

a) Halle la altura del tetraedro $ABCD$. 2 puntos

b) Halle las coordenadas del vértice D. Dé todas las soluciones. 2 puntos

5. Justifique la veracidad de las siguientes proposiciones.

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores unitarios tales que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ entonces $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

2 puntos

b) Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores no nulos tales que $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$ y $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ entonces el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es obtuso y el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ es agudo. 2 puntos

6. Considere la siguiente ecuación en las variables x y y:

$$x^2 + y^2 + 2(1-2k)xy = k$$

Determine:

a) Qué valor debe tomar k para que la ecuación corresponda a una circunferencia.

0,5 puntos

b) El lugar geométrico que se obtiene cuando $k = 1$. 1 punto

c) Qué valor debe tomar k para que la ecuación corresponda a una elipse con eje mayor de longitud 2. 2,5 puntos

Evaluación elaborada por los profesores del curso
Coordinadora de teoría: Prof. Cecilia Gaita

Lima, 18 de octubre del 2019

Año: 2019 Número: 6114

Código de alumno

Primer examen

Alquipa Carrasco, Jerry Fernando

Apellidos y nombres del alumno (letra de imprenta)

Firma del alumno

ENTREGADO 05 NOV. 2019

Curso: AMGA

Horario: H 101

Fecha: 18 / 10 / 2019

Nombre del profesor: N. Chau

Nota

18

Firma del profesor

INDICACIONES

1. Llene todos los datos que se solicitan en la carátula, tanto los personales como los del curso.
2. Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio. Queda terminantemente prohibido el uso de hojas sueltas.
3. Presente su trabajo final con la mayor claridad posible. No desglose ninguna hoja de este cuadernillo. Indique de una manera adecuada si desea que no se tome en cuenta alguna parte de su desarrollo.
4. Presente su trabajo final con la mayor pulcritud posible. Esto incluye lo siguiente:
   - cuidar el orden, la redacción, la claridad de expresión, la corrección gramatical, la ortografía y la puntuación en su desarrollo;
   - escribir con letra legible, dejando márgenes y espacios que permitan una lectura fácil;
   - evitar borrones, manchas o roturas;
   - no usar corrector líquido;
   - realizar los dibujos, gráficos o cuadros requeridos con la mayor exactitud y definición posibles.
5. No seguir estas indicaciones influirá negativamente en su calificación.
6. Al recibir este examen calificado, tome nota de las sugerencias que se le dan en la contracarátula del cuadernillo.

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$|\bar{u}+\bar{v}| = \frac{3}{2}$

$\bar{u},\bar{v}$ unid $\|u\|=\|v\|=1$

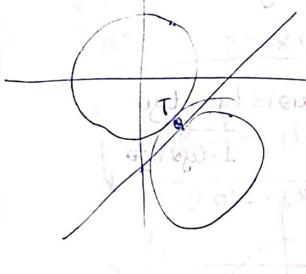
$tg\theta = 45$ $\sqrt{50}$

$2\times r$

$tg 2\theta = 90$ $5\sqrt{2}$

$5.1{,}4$

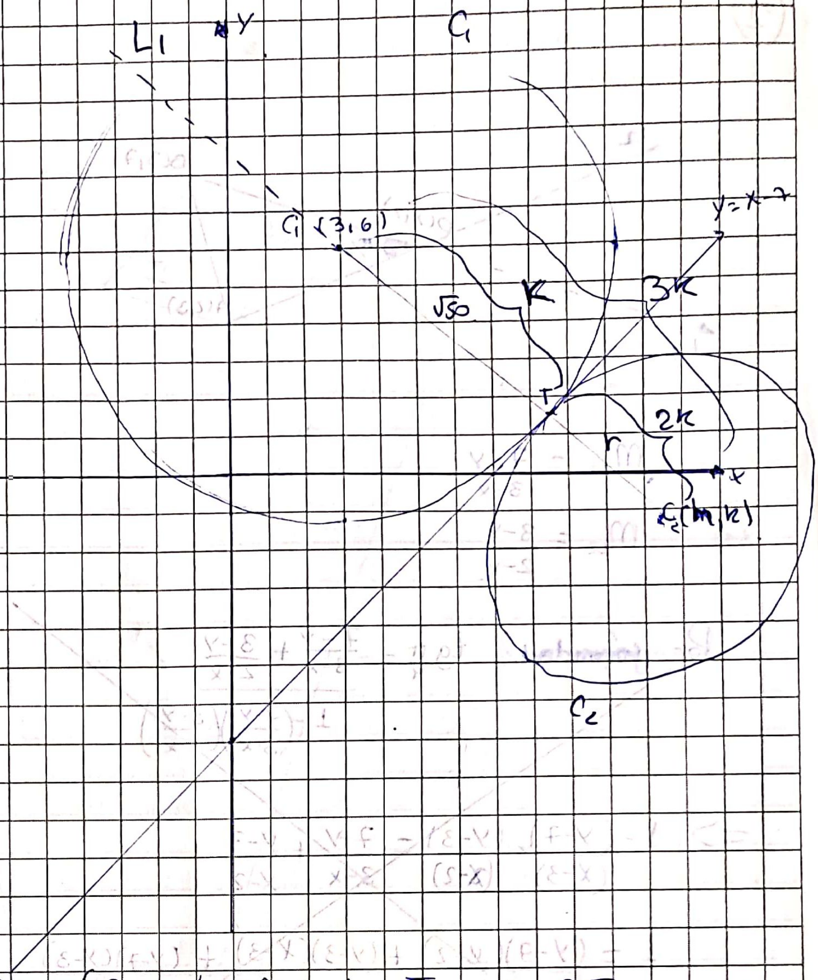
$5+0$



$T(x,y)$

1)

4



$\frac{\sqrt{50}+r}{|h-k-7|} = \frac{3}{2}$ (Por gráfica) $\Rightarrow k=\sqrt{50}$, $r = 2\sqrt{50}$

de la gráfica tenemos: $L_1 \perp L$:

$m_{L_1} \times m_L = -1$

$\boxed{m_{L_1} = -1}$

$L_1: y = -x + b$ (Pasa por $(3,6)$)

$6 = -3 + b$

$\boxed{9 = b}$

$L_1: y = -x + 9$

Como $C_2 \in L_1$, $C_2(h, -h+9)$

$d(C_1, C_2) = 3\sqrt{50}$

$\sqrt{(h-3)^2 + (-h+3)^2} = 3\sqrt{50}$

$2(h^2 - 6h + 9) = 9 \times 50$ 25

$(h-3)^2 = 9 \times 25$

$|h-3| = 3 \times 5$

$h = -12 \quad \vee \quad h = 18$ POR GRÁFICA

$\therefore C_2(18, -9)$

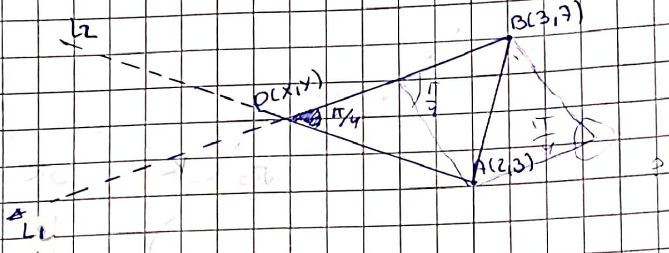
$\mathcal{C}_2: (x-18)^2 + (y+9)^2 = (2\sqrt{50})^2$

$(x-18)^2 + (y+9)^2 = 200$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

(2)



$m_{L1} = \frac{7-y}{3-x}$

$m_{L2} = \frac{3-y}{2-x}$

Por fórmula: $tg\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{7-y}{3-x} + \frac{3-y}{2-x}}{1 - \left(\frac{7-y}{3-x}\right)\left(\frac{3-y}{2-x}\right)}$

$\Rightarrow 1 - \frac{(y-7)}{(x-3)} \cdot \frac{(y-3)}{(x-2)} = \frac{7-y}{3-x} + \frac{y-3}{x-2}$

$1 = \frac{(y-7)(x-2) + (y-3)(x-3) + (y-7)(y-3)}{(x-3)(x-2)}$

$x^2 - 5x + 6 = xy - 2y - 7x + xy$

Por fórmula:

$tg\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{7-y}{3-x} - \frac{3-y}{2-x}}{1 + \left(\frac{7-y}{3-x}\right)\left(\frac{3-y}{2-x}\right)}$

3.0

$\Rightarrow 1 + \frac{(y-7)(y-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x-2)(y-7) - (x-3)(y-3)}{(x-3)(x-2)}$

$1 = \frac{xy - 7x - 2y + 14 - xy + 3x + 3y - 9 - (y^2 - 10y + 21)}{x^2 - 5x + 6}$

$x^2 - 5x + 6 = -4x + y + 5 - y^2 + 10y - 21$

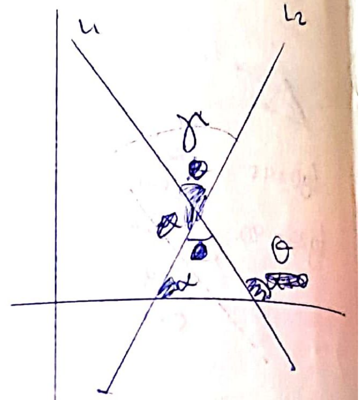
$(x - \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{9}{2})^2 = \frac{17}{2}$

$x^2 + y^2 - 9x - 11y + 22 = 0$: Este tiene la forma general de la circunferencia

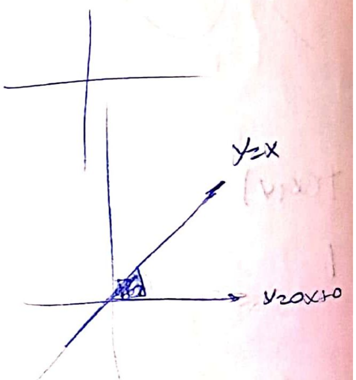
9

$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$

$tg\theta = \frac{m_1 \cdot m_2}{1 - m_1 m_2}$



$tg(\alpha + \theta) = \frac{tg\alpha + tg\theta}{1 - tg\alpha\, tg\theta}$



$tg 45 = \frac{1 \cdot 0}{1}$

$\frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2} = tg\theta$

$tg(\alpha + \theta) = \frac{tg\alpha + tg\theta}{1 - tg\alpha\, tg\theta}$

$m_1 = \frac{m_2 + tg\theta}{1 - m_2 tg\theta}$

$m_1(1 - m_2 tg\theta) = m_2 + tg\theta$

$\alpha + \gamma = \theta$

$\gamma = \theta - \alpha$

$tg\gamma = \frac{tg\theta - tg\alpha}{1 + tg\theta\, tg\alpha}$

$tg\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

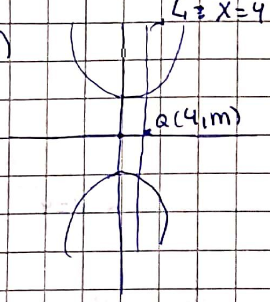
3) Eje focal // Eje Y ($x=4$)

∴ Ecuación general: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

asíntota: $L_2: 4x-3y+6=0 \Rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0 \Rightarrow y-k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$

$L: x=4$

a)



$Q(4,m)$

$d(Q, L_2) = \frac{28}{5}$

$\frac{|16-3m+6|}{\cancel{5}} = \frac{28}{\cancel{5}}$

$|-3m+22| = 28$

$-3m+22 = 28 \quad \vee \quad -3m+22 = -28$

$m = -2 \quad \vee \quad m = \frac{50}{3}$

2.0

$Q: Q_1(4,-2)\ ,\ Q_2\left(4, \frac{50}{3}\right)$

b) Centro de H es $\left(x, \frac{4x+6}{3}\right)$

Como Q está en el eje conjugado, $m = \frac{4x+6}{3}$

I) $-2 = \frac{4x+6}{3}$

$-3 = x$

Por dato, $x<0$

II) $\frac{50}{3} = \frac{4x+6}{3}$

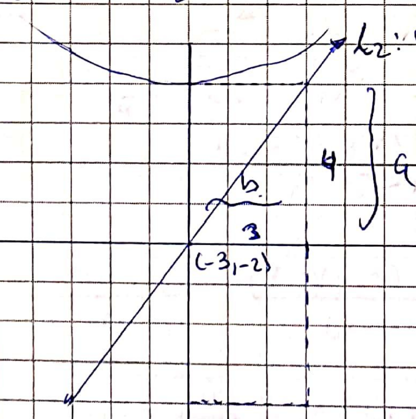
$11 = x$

Centro $(-3,-2)$

$\frac{(y+2)^2}{a^2} - \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1$

UNC

$\frac{a}{b} = \frac{3k}{4k} \Rightarrow A \in H \Rightarrow k=1$



$L_2: 4x-3y+6=0$

2.5

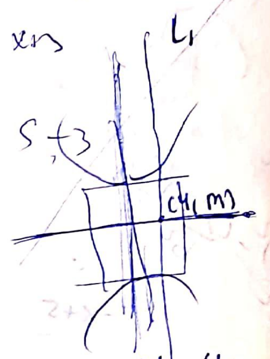
$\Rightarrow H: \frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

$4x = 3y-6+6$

$4(x-0) = 3(y-2)$

$y-2 = \frac{4}{3}(x-0)$

$4\left(x+\frac{3}{2}\right) = 3(y-0)$



$y = \frac{4x}{3} + 2$

$7-4$

$\left(x, \frac{3y-6}{4}\right)$

$\left(x, \frac{4x+6}{3}\right)$

$\frac{4x+6}{3} = -2$

$4x+6 = -6$

$4x = -12$

$x = -3$

$\frac{(-8)^2}{16}$ $-\frac{(3\sqrt{3})^2}{9}$ -3

$\frac{4(-3)+6}{3}$ $-12+6$ $\frac{-6}{3}$

$a=4$

$b=3$

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

$\frac{(-8)^2}{16} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{9} = 1$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

5) a) Sean:

$\bar{u}(x,y)$

$\bar{v}(m,n)$

caso particular

• $|\bar{u}| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$|\bar{v}| = 1 \Rightarrow \sqrt{m^2+n^2} = 1$

$\|\bar{u}+\bar{v}\| = \frac{3}{2}$

$\|(x+m, y+n)\| = \frac{3}{2}$

$\sqrt{(x+m)^2+(y+n)^2} = \frac{3}{2}$

$\underbrace{x^2+y^2+m^2+n^2}+2xm+2yn = \frac{9}{4}$

$2+2(xm+yn) = \frac{9}{4}$

$xm+yn = \frac{1}{8}$

1,0

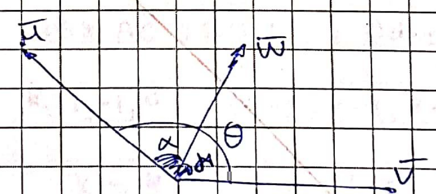
• $\|\bar{u}-\bar{v}\| = \|(x-m, y-n)\| = \sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+y^2+m^2+n^2-2xm-2yn} = \sqrt{2-2(xm+yn)}$

$\Rightarrow \sqrt{2-2\left(\frac{1}{8}\right)} \Rightarrow \sqrt{2-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

VERDADERO

b) tenemos:



$\bar{u}+\bar{v} = \bar{w}$

$|\bar{u}| = |\bar{v}| = |\bar{w}|$

(1) • $\cos\alpha = \frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{|\bar{u}||\bar{w}|} \Rightarrow \frac{\bar{u}\cdot(\bar{u}+\bar{v})}{|\bar{u}||\bar{u}|} = \frac{|u|^2+\bar{u}\cdot\bar{v}}{|u|^2}$

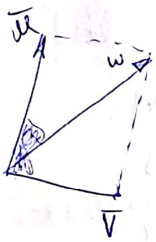
• Cos

(2) • $\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = \cos\theta\,|u|^2$

$\Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = |u|^2\cos\alpha - |u|^2 = |u|^2(\cos\alpha - 1)$

$\cancel{|u|^2}\cos\theta = \cancel{|u|^2}(\cos\alpha - 1)$

$\cos\theta = \cos\alpha - 1$



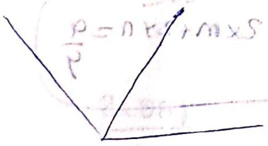
$\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{u}\cdot\bar{w}}$ = cos α

$\frac{9-2}{4}$

$\frac{1}{4}$

$|u|^2\cos\alpha - |u|^2$

$|u|^2(\cos\alpha - 1)$



$u(x,y)$

$\sqrt{x^2+y^2} = |u|^2$

$\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \cos\theta$

$u\cdot u = x^2+y^2$

$\bar{u}\cdot\bar{u} = |u|^2$

$\frac{\bar{u}\cdot(\bar{u}+\bar{v})}{|\bar{u}||\bar{w}|}$

$\bar{u}\cdot\bar{u} + \bar{u}\cdot\bar{v}$

Cos $\|u\|^2 + u\cdot v$

$\cos\theta = \cos\alpha - 1$

$\cos\theta = \cos\alpha - \cos_\theta^2 - \operatorname{sen}_\theta^2$

~~$\cos\theta(1+\cos\theta) = \cos$~~

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

ANALOGAMENTE COMO EN $\cos\alpha$

$\cos\gamma = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{\mu}||\bar{\mu}|} \Rightarrow \frac{|\mu|^2 + \bar{\mu}\cdot\bar{v}}{|\mu|^2} \Rightarrow |\mu|^2 \cos\gamma = \overset{|\mu||\mu|}{|\mu|^2} + \bar{\mu}\cdot\bar{v}$

$\rightarrow |\mu|^2(\cos\gamma - 1) = \bar{\mu}\cdot\bar{v}$

De (1) $\rightarrow |\mu|^2(\cos\alpha - 1) = \bar{\mu}\cdot v$

$\therefore \alpha = \gamma$

$\boxed{\theta = \alpha + \gamma = 2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos\alpha - 1$

$\cos^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha = \cos\alpha - \text{Sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$

2ω

$2\cos^2\alpha = \cos\alpha$

$\cos\alpha(2\cos\alpha - 1) = 0$

$\cos\alpha = 0 \quad \vee \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha \neq 90 \quad \vee \quad \alpha = 60$

Si $\alpha = 90$, $|\mu| \neq |v| \neq |w|$

$\Delta \quad \alpha = 60 \quad \wedge \quad \theta = 120$

AGUDO OBTUSO

$\bar{\mu}$, $\bar{v}$

$\bar{\mu} = (x, y)$

$\bar{v} = (m, n)$

$\sqrt{x^2+y^2} = 1$

$\sqrt{m^2+n^2} = 1$

$x^2+y^2 = 1$

$m^2+n^2 = 1$

$|\bar{\mu}| = 1$

$|\bar{v}| = 1$

$|(x+m, y+n)|$

$\sqrt{(x+m)^2+(y+n)^2}$

$1+1+2xm+2yn = \frac{3}{2}$

$\boxed{2+2xm+2yn = \frac{9}{4}}$

$-\text{Sen}^2$

2

α

1

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$x^2+xy+y^2=1$

$tg\,2\theta =$

$x^2+x^2+2(1-2)xy=1$

$-16+25$

$\frac{2(88)}{\sqrt{83}}$

176

$k(1,-1,9)=\vec{GD}$

$(k,-k,9k)=D-G$

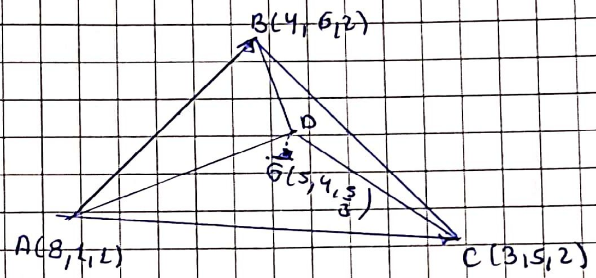
$(k,-k,9k)=(x-5,y-4,z-\frac{5}{3})$

$$\boxed{\begin{aligned}x&=k+5\\ y&=4-k\\ z&=9k+\frac{5}{3}\end{aligned}}$$

$\frac{5}{3}-1$

4.0

4) Volumen $=\frac{88}{3}$



"$\bar{G}$" Baricentro $\bar{G}=\left(\frac{8+4+3}{3},\frac{1+6+5}{3},\frac{1+2+2}{3}\right)=\left(5,4,\frac{5}{3}\right)$

Volumen (tetraedro) $=\frac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|\cdot h}{6}=\frac{88}{3}$

$\vec{AB}=\bar{B}-\bar{A}=(-4,5,1)$

$\vec{AC}=\bar{C}-\bar{A}=(-5,4,1)$

$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-4&5&1\\-5&4&1\end{vmatrix}=(5-4,-(-4+5),-16+25)$

$(1,-1,9)$

$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+9^2}=\sqrt{83}$

De volumen:

$\frac{\sqrt{83}\,h}{6}=\frac{88}{3}\Rightarrow h=\frac{88\times 6}{\sqrt{83}\times 3}=\frac{176}{\sqrt{83}}$ Altura

b) $\vec{AB}\times\vec{AC}\parallel\underbrace{\vec{GD}}_{(D-G)}$: Además $D(x,y,z)$

$k(1,-1,9)=(x-5,y-4,z-\frac{5}{3})$

$\therefore\ x=k+5,\quad y=4-k,\quad z=9k+\frac{5}{3}$

Volumen (tetraedro) $=\frac{|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}|}{6}=\frac{88}{3}$

$\frac{|(1,-1,9)\cdot\overbrace{(k-3,3-k,9k+\frac{2}{3})}^{(D-A)}|}{6}=\frac{88}{3}$

$\frac{|k-3+k-3+81k+6|}{6}=\frac{88}{3}$

$\frac{|83k|}{6}=\frac{88}{3}$

$|k|=\frac{88\times 2}{83}$

$k=\frac{88\times2}{83}\ \vee\ k=-\frac{88\times2}{83}$

$k=\frac{176}{83}\ \vee\ k=\frac{-176}{83}$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$$\therefore \quad D_1 = \left(\frac{176}{83}+5,\ 4-\frac{176}{83},\ \frac{9(176)}{83}+\frac{5}{3}\right) \quad D_2 = \left(-\frac{176}{83}+5,\ 4+\frac{176}{83},\ -\frac{9(176)}{83}+\frac{5}{3}\right)$$