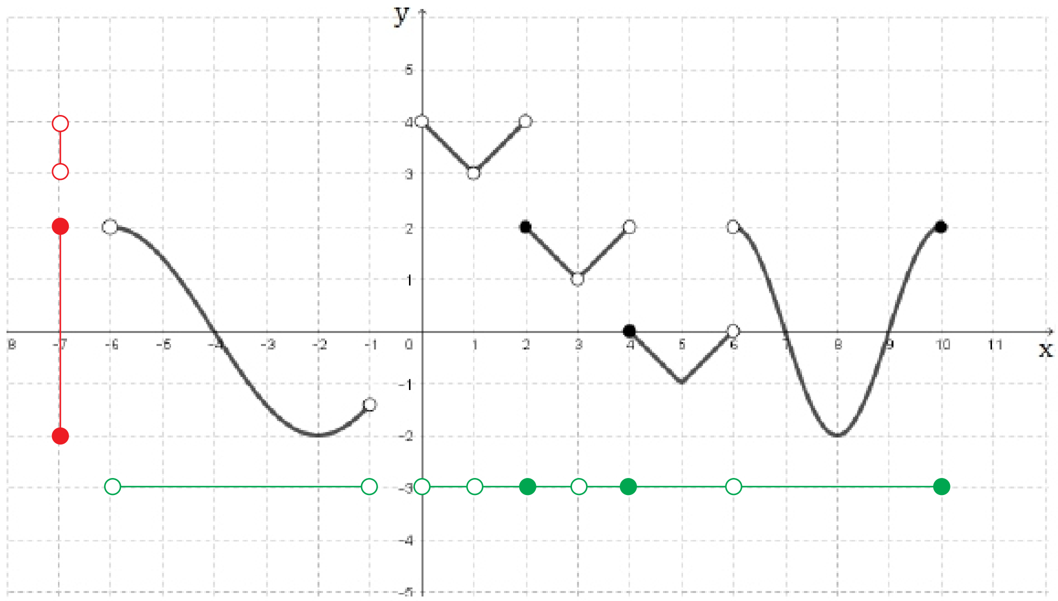
1. Dada la gráfica de la función f.

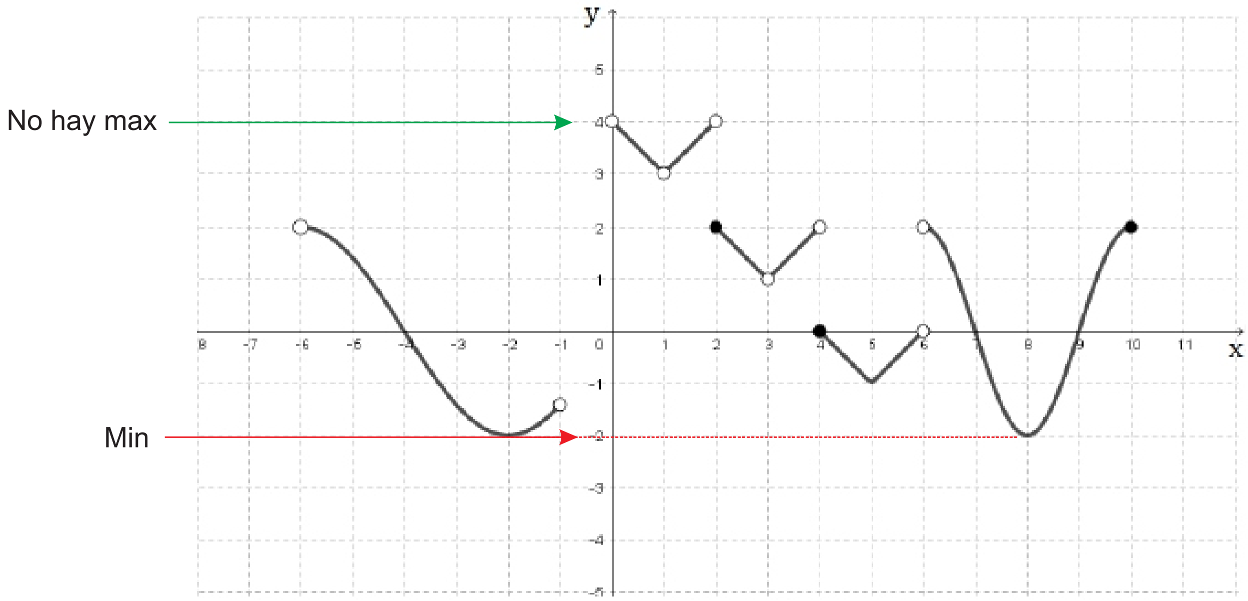
CAAS



a) Halle el dominio y rango de f. (1 p.)

Dom:]-6;-1[U]0;10] - {1; 3; 6}

Ran: [-2;2] U]3;4[



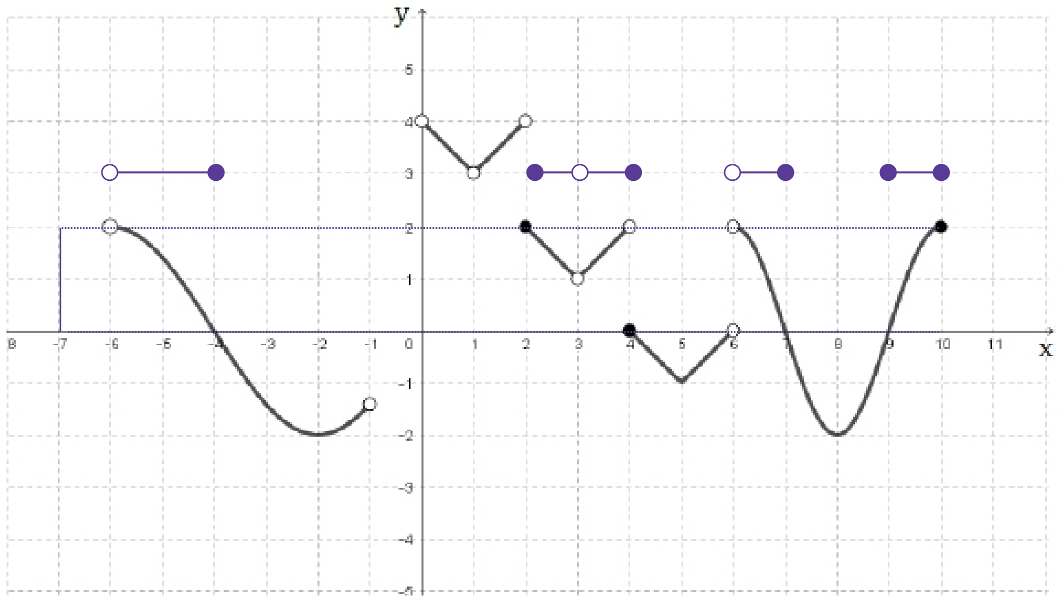
b) Determine, si existen, el valor máximo y mínimo de f e indique para qué valor(es) de x se alcanzan. (1.5 p.)

Max: f(x) no alcanza un máximo valor

Min: f(x) tiene su mínimo en -2 cuando x =-2 o x=9

1. Dada la gráfica de la función f.

CAAS



c) Encuentre el conjunto de todos los valores de x tales que $0 \leq f(x) \leq 2$. (1.5 p.)

f(x) ϵ [0;2] cuando x ϵ]-6; -4] U [2;3[U]3;4] U]6;7] U [9;10]

CAAS

2)

$0 < a < b$

$0 < 1 < b/a$

$$\frac{bx-a}{ax-b} \geq 1$$

$$\frac{bx-a}{ax-b} - 1 \geq 0$$

$$\frac{bx-a-ax+b}{ax-b} \geq 0$$

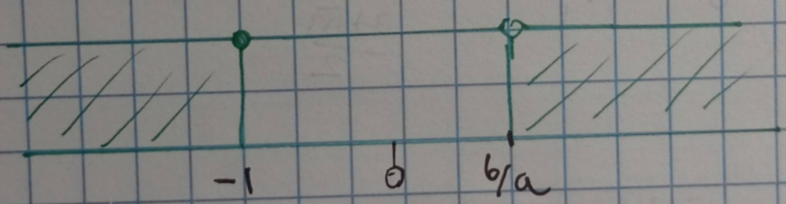
$a < b$

$0 < b-a$ $\rightsquigarrow$ $$\frac{\overset{+}{(b-a)}(x+1)}{ax-b} \geq 0$$

$$\frac{x+1}{ax-b} \geq 0$$

Puntos críticos

$x = -1$ $x = b/a$



Probamos intervalos:

- Si $x = -2 \rightarrow \frac{-2+1}{-2a-b} = \frac{-1}{-2a-b} > 0$ ... Sí cumple
- Si $x = 0 \rightarrow \frac{1}{-b} < 0$ ... No cumple
- Si $x = \frac{b+1}{a} \rightarrow \frac{\frac{b+1+a}{a}}{1} = \frac{b+1+a}{a} > 0$ ... Sí cumple

$\rightarrow$ C.S. $=]-\infty; -1] \cup]b/a; +\infty[$

Pregunta 3: Resolver

a) $(x^2-2x+1)\cdot\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}-x\right)\geq 0$

* Notemos que (x^2-2x+1) es un TCP, es decir, $(x^2-2x+1)=(x-1)^2$

* Además $2x^2+3x+1$ por aspa simple es equivalente a $(2x+1)(x+1)$

- Reemplazando:

$$(x-1)^2\cdot\left(\frac{(2x+1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}-x\right)\geq 0,$$

* Restricción I: Notemos que $x=1$ y $x=-1$

- Simplificando:

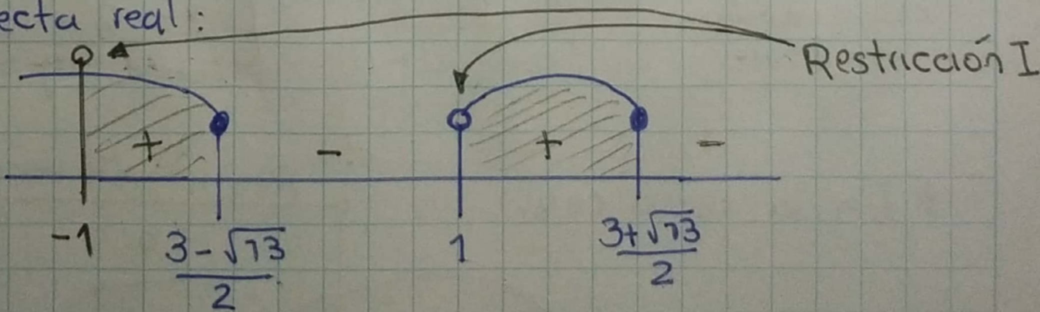
$$(x-1)^{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{2x+1-x^2+x}{\cancel{(x-1)}}\right)\geq 0$$

Aplicar fórmula general

- Finalmente: $(x-1)(-x^2+3x+1)\geq 0$

Tendremos las raíces: $x=1$, $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $X=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

- En la recta real:



$$\boxed{\therefore\ X\in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]-1,\tfrac{3-\sqrt{13}}{2}]\ \cup\ ]1,\tfrac{3+\sqrt{13}}{2}]}$$

$\ast$ Restricción inicial:

b) $4x^2 < \dfrac{x}{|x-1|}$, Se sabe que $x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ además $|x-1| > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ entonces, necesariamente, $x > 0 - \{1\}$

$\ast$ Observemos que de la inecuación

$$4x^2 < \frac{x}{|x-1|} \Rightarrow 16x^4 < \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

$\ast$ Ahora simplificamos, $16x^4 \cdot \cancel{\dfrac{1}{x^2}} \cdot (x-1)^2 < \cancel{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}} \cdot \cancel{\dfrac{1}{x^2}} \cdot \cancel{(x-1)^2}$

$\ast$ Nos quedaría, $16x^2(x-1)^2 < 1 \Rightarrow (4x(x-1))^2 - 1 < 0$

$\ast$ Factorizamos, $[4x(x-1)+1][4x(x-1)-1] < 0$

$$\Rightarrow (4x^2 - 4x + 1)(4x^2 - 4x - 1) < 0$$

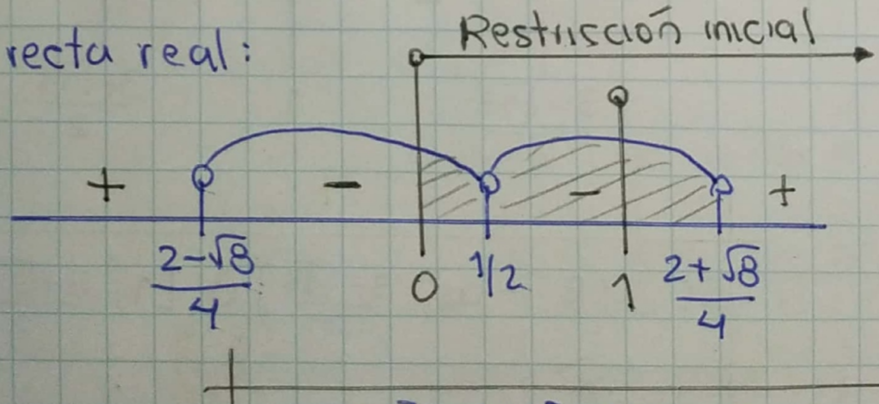
$$\Rightarrow (2x-1)^2 \cdot (4x^2 - 4x - 1) < 0$$

Tendremos las raíces: $x = 1/2$ (multiplicidad 2)

Obtenidas de resolver $(4x^2 - 4x - 1) = 0$ por medio de la fórmula general.

$$\begin{cases} x = \dfrac{2+\sqrt{8}}{4} \\ \\ x = \dfrac{2-\sqrt{8}}{4} \end{cases}$$

$\ast$ En la recta real:



$$\boxed{\therefore x \in \,]0, 1/2[\, \cup \,]1/2, 1[\, \cup \,]1, \tfrac{2+\sqrt{8}}{4}[}$$

Aclaración de la Restricción inicial en el problema 3b.

Tenemos, $\underbrace{4x^2}_{\text{positivo}} < \frac{x}{|x-1|}$

→ Entonces, $\frac{x}{|x-1|}$ tambien debe ser <u>positivo</u>.

Ahora, $\frac{x}{|x-1|} > 0$, sin embargo, sabemos que $|x-1| > 0$, <u>$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$</u>.

Por lo tanto, $\cancel{|x-1|} \cdot \frac{x}{\cancel{|x-1|}} > 0 \cdot |x-1|$

<u>$x > 0$ y $x \neq 1$</u>

4)

$$f(x) = \frac{\sqrt{bx + \frac{1}{x}}}{1 + \sqrt{b^2 - x^2}}$$

a) $b > 0$

→ $bx + 1/x > 0$

$$\frac{bx^2+1}{x} > 0$$

bx^2+1 siempre es positivo ---→ $x > 0$

→ $b^2 - x^2 > 0$

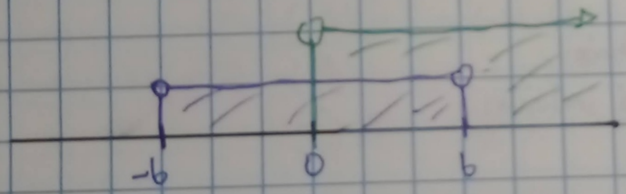
$(b-x)(b+x) > 0$

$(b - x > 0 \wedge b+x > 0) \vee (b-x < 0 \wedge b+x < 0)$

$(b > x \wedge x > -b) \vee (b < x \wedge x < -b)$

$C.S. =]-b; b[$

→ Intersectamos las restricciones:

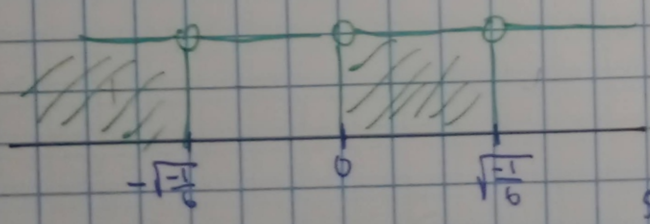


$\therefore\ x \in]0; b[$

$\sqrt{\frac{-1}{b}} < 1 \qquad -\sqrt{\frac{-1}{b}} > -1$

b) $b < -1$

→ $\frac{bx^2+1}{x} > 0$ Puntos críticos: $x = 0 \quad x = \sqrt{\frac{-1}{b}} \quad x = -\sqrt{\frac{-1}{b}}$



• Si $x = -1$

→ $\frac{b+1}{-1} > 0$ Cumple

• Si $x = 1$

→ $\frac{b+1}{1} < 0$ No cumple

Si $x = \sqrt{\frac{-1}{b}} \cdot \frac{1}{2}$

→ $(+)/(+) > 0$ Si cumple

$CS =]-\infty; -\sqrt{\frac{-1}{b}}[\cup]0; \sqrt{\frac{-1}{b}}[$

• Si $x = -\sqrt{\frac{-1}{b}} \cdot \frac{1}{2}$

→ $(-)/(+) < 0$ No cumple

CAAS

→ $6^2 - x^2 > 0$

$(6-x)(6+x) > 0$

Mismo procedimiento de antes:

$$6 < x < -6$$

→ Intersectamos restricciones:

$\therefore$ C.S. $=]6; -\sqrt{\frac{-1}{6}}[\cup]0; \sqrt{\frac{-1}{6}}[$

Pregunta 5: Justifique la veracidad y falsedad

a) $\forall\, x>0,\ \exists\, y<0$ tal que $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$

Analicemos, $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = xy$

$$\Rightarrow 0 = y^2 - (x).y - (x^2)$$

De la ecuación $y^2 - (x).y - x^2 = 0$, tenemos que las soluciones de esta serán:

$$y_1 = \frac{x + \sqrt{(-x)^2 - 4(1)(-x^2)}}{2(1)} = \frac{x + \sqrt{5x^2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{x - \sqrt{(-x)^2 - 4(1)(-x^2)}}{2(1)} = \frac{x - \sqrt{5x^2}}{2}$$

Observemos que si $x>0$:

$y_2 = \frac{(1-\sqrt{5}).x}{2} < 0$; Es decir, para todo $x>0$ existirá almenos un $y<0$ tal que

$$0 = y^2 - (x)y - x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$$

∴ La proposición es VERDADERA.

b) Si $|x^5+3x-1| \leq 36 \Rightarrow |x| \leq 2$

Por contrarecíproca:

$$|x| > 2 \Rightarrow |x^5+3x-1| > 36$$

Es decir, $x>2 \vee x<-2 \Rightarrow 3x-1>5 \vee 3x-1<-7 \ldots (\alpha)$

Además, $x>2 \vee x<-2 \Rightarrow x^5>32 \vee x^5<-32 \ldots (\beta)$

De $(\alpha)+(\beta)$: $x^5+3x-1>37 \vee x^5+3x-1<-39$

Es decir, $|x^5+3x-1|>39$. Por lo tanto,

$|x^5+3x-1|>39>36$.

$\therefore$ La proposición es VERDADERA

c) $\exists\, x>0$ tal que $\forall\, y>0$ se cumple $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y+2}$

Sea $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y+2}$ con $x>$ y $y>0$

$$\Rightarrow x+2\sqrt{x}.\sqrt{y}+y>x+y+2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{xy}>2 \Rightarrow \sqrt{xy}>1$$

Notemos que si $x=\dfrac{2}{y}$ tendremos $\sqrt{\dfrac{2}{y}.y}>1$

$\underbrace{\sqrt{2}>1}_{\text{Correcto } \forall y>0}$

En conclusión, para un $x=2/y$ tal que $\forall y>0$ se cumple $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y+2}$.

¡LA PROPOSICIÓN ES V!