

최신 상태추정 이론 및 유도조종 응용

2017-06-13

School of Mechanical and Control Engineering

Prof. Won-Sang Ra

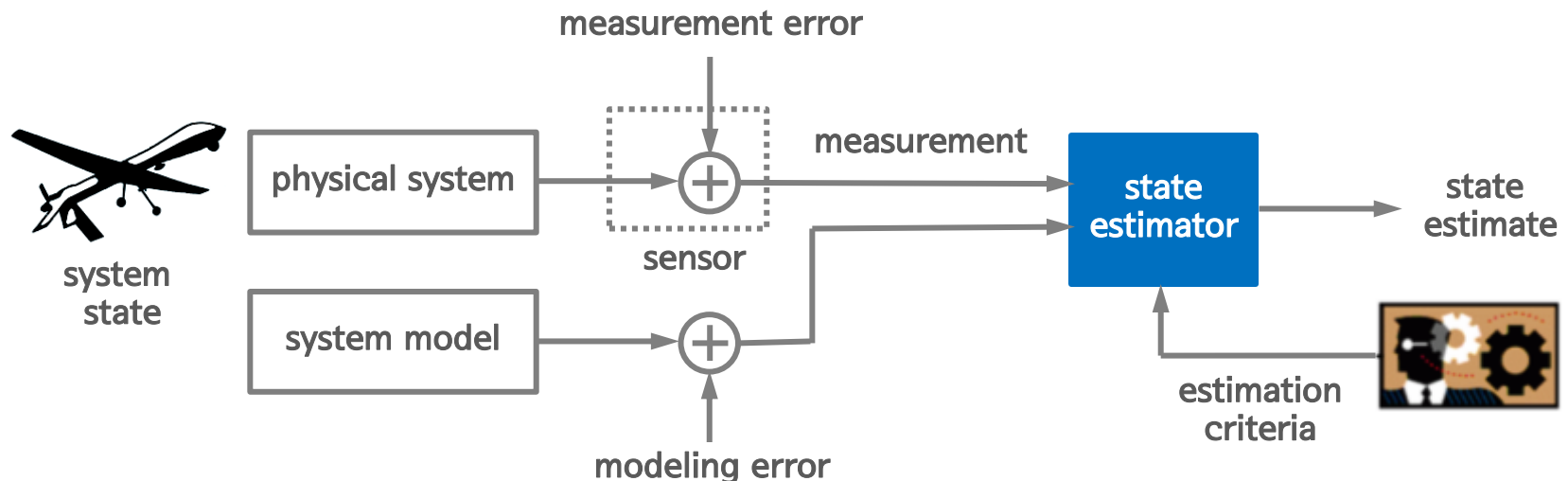
선형 확률 동적 시스템 상태추정

• 문제정의

: 오차가 수반된 시스템 모델과 측정치를 이용하여 실제 시스템의 상태변수를 그 측정가능 여부와 상관없이 유추(probabilistic inference)하는 과정

– 구성요소

- 시스템모델 예) 선형 상태공간 방정식 (Gauss-Markov model)
- 잡음에 관한 확률모델 예) 영평균 백색 정규분포 (white Gaussian distribution)
- 상태추정기 설계 기준 예) 최소분산(MV), 최대사후확률(MAP), 최소자승(LS)



상태추정이론 발달사 (1/2)

• 정적시스템 상태변수 추정

- 1809 Gauss 최소자승 추정기법(Least Squares Estimation)
- 1912 Fisher 최대우도 추정기법(Maximum Likelihood Estimation)
- 1941 Kolmogorov 선형최소자승추정기법(Linear Least Mean Squares Estimation)

• 동적시스템 상태변수 추정 : 1960 R.E. Kalman

- 기본가정

- 완벽한 시스템 모델(불규칙 오차를 제외한 파라미터 불확실성을 포함하지 않음)
- 사전에 불규칙 오차에 관한 통계적 특성(1,2차 모멘트)이 정확히 알려져 있음

- 특성

- 통계적 최소자승 기법을 활용하여 선형 동적시스템 상태추정 문제 최초해결
- 칼만필터 추정치 = 해석학적 관점: 측정치에 대한 조건부 평균
대수학적 관점: 측정치 벡터공간 위로의 정사영
- Linear Least Mean Squares Estimation 관점에서 최적 무편향(unbiased) 추정기
- 불규칙 오차가 단봉 확률밀도함수를 갖는 경우, MAP/MV 관점에서도 최적

선형 확률 동적 시스템 (1/4)

• 동적 시스템이란?

– 정의

- 특정한 기능을 수행하기 위하여 여러 구성요소가 서로 유기적으로 결합되어 서로 영향을 주며 작동되는 통합체
- 주어진 입력에 대하여 어떤 작용을 하여 출력을 산출
- 시간에 대한 입출력 관계의 변화(dynamics)를 포함

– 구분

- 선형 동적 시스템
: relaxed condition에서 입출력이 선형성(superposition)을 만족
- 확률 동적 시스템
: 시스템 모델과 실제 시스템 간의 차이(불확실성 혹은 모델링오차) 반영
 - a) 공정잡음(process noise) - 불규칙한 시스템 모델링 오차
 - b) 측정잡음(measurement noise) - 불규칙한 측정오차

선형 확률 동적 시스템 (2/4)

- 시스템 상태변수

- 시스템 특성이 집약된 시스템 동작특성 파악을 위한 필수정보

- 시스템에 인가된 모든 과거 입력의 영향이 농축된 정보
 - 입력이 주어지면 시스템의 미래 거동특성을 유일하게 결정

- 시스템 모델링

- 모델링

- 시스템 상태변수의 시간에 따른 변화(dynamics)를 개략적으로 묘사하는 수학적 결과물(미분 혹은 차분방정식)을 도출하는 과정
 - 시스템의 특성을 정확히 묘사하되, 복잡하지 않은 적절한 수준 필요
→ 필연적으로 모델링 오차를 포함하게 됨

- 필요성

- 시스템의 특성해석, 거동예측, 제어기 및 상태추정기 설계에 활용

선형 확률 동적 시스템 (3/4)

• 모델링 사례: 질점운동(1차원)

- 실제운동 = 근사적인 등속직선운동 + 환경변화에 따른 불규칙 오차(영평균 백색잡음)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B^c u^c(t) + Bw(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}, \quad u^c = a, \quad w = \delta a \sim N(0, Q_w), \quad Q_w = \text{var}\{w\} = q,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 이산 선형 확률 동적 시스템 : 상태천이행렬로 표현되는 미분방정식의 해로부터 유도

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k^c u_k^c + u_k$$

$$F_k = \Phi((k+1)T, kT) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_k^c = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau) B^c(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix}$$

$$u_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau) B(\tau) w(\tau) d\tau, \quad \text{: 영평균 백색잡음에 대한 Ito integral}$$

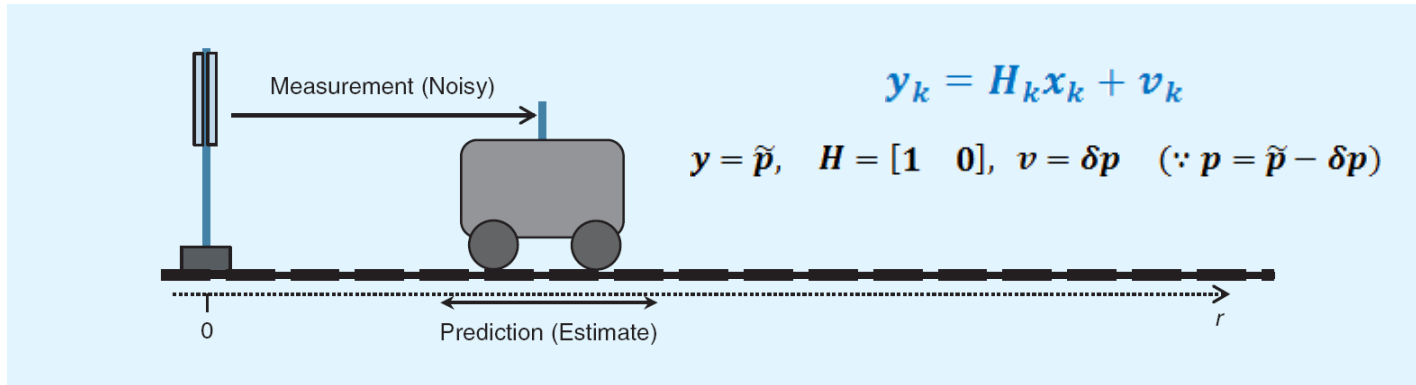
(= 샘플링 시간 동안의 Brownian motion process의 증분)

$$E\{u_k u_j^T\} = Q_k \delta_{k,j} = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau) B(\tau) Q_w(\tau) G^T(\tau) \Phi^T((k+1)T, \tau) d\tau \approx q \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T^3 & \frac{1}{2} T^2 \\ \frac{1}{2} T^2 & T \end{bmatrix} \delta_{k,j}$$

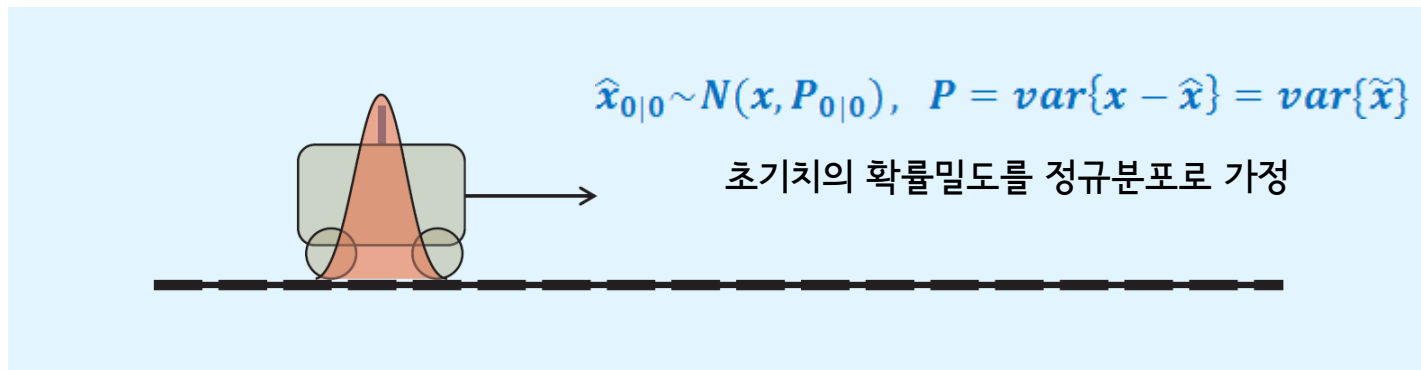
: 샘플링 구간 별로 독립적인 영평균 정규분포 프로세스)

선형 확률 동적 시스템 (4/4)

• 모델링 사례: 로봇 위치 측정



• 모델링 사례: 로봇의 초기 ($k = 0$) 상태변수 추정치 및 오차



초기상태추정치 = 정규분포의 평균(최대확률) : 논리적으로 타당한 방법에 의해 추측(guess)

초기상태추정오차 = 정규분포의 분산 : 추측에 의해 결정된 상태추정치의 부정확도

확률모형

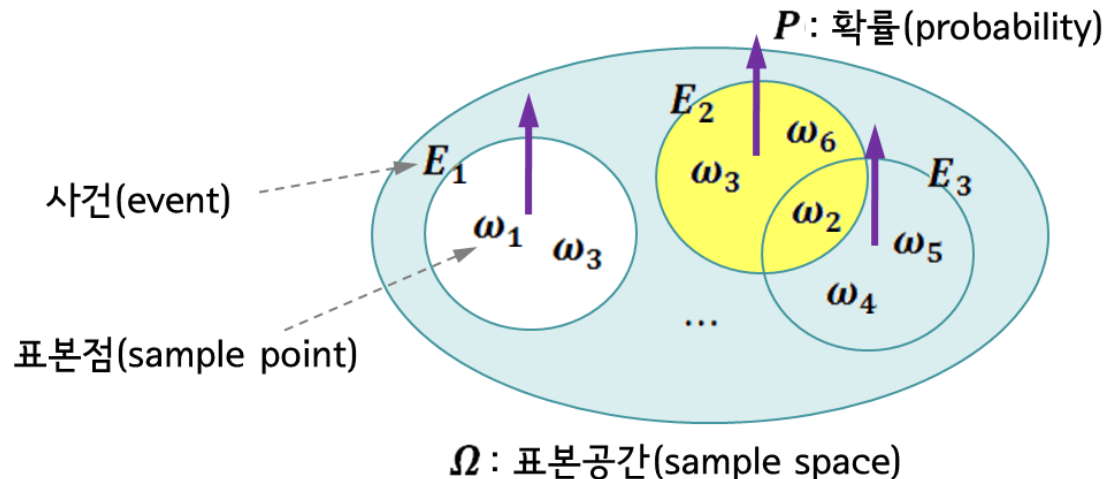
• 정보관리모델: 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P)

– 확률론

- 확률현상에 대한 수학적인 모형을 만들고 이에 대한 성질을 규명

– 확률공간 = 가측(measurable) 사건공간

- 관심사건들의 집합(정보)에 확률(신뢰도)이 정의된 공간
- 원소의 개수를 셀 수 없는 비가산 무한집합인 연속표본공간 Ω 에 대한 확률 P 지정
 - ▶ 관심사건을 모두 포함하는 최소 완전덧셈꼴 부분집합족(σ -algebra) \mathcal{F} 도출
 - ▶ \mathcal{F} 에 대해 공리적 확률 정의 (probability measure)

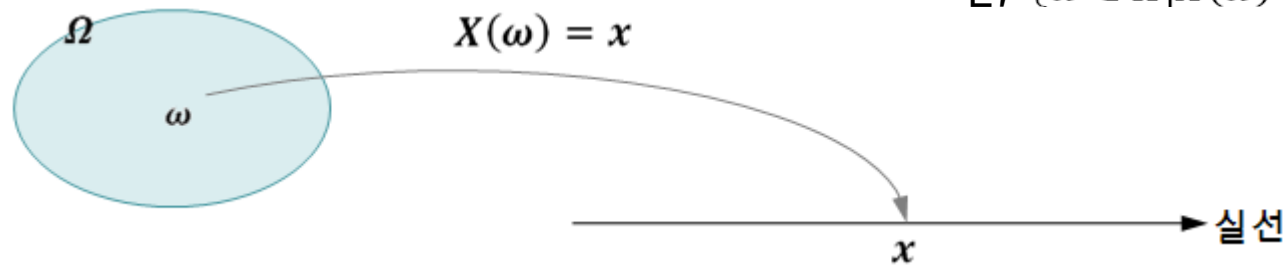


확률공간의 변환 (1/2)

- 확률변수(RV: random variable)

: 확률실험 ε 의 표본공간 Ω 위에서 정의되는 실가함수 $X: \Omega \rightarrow R^1$.

단, $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$



- RV는 표본공간의 모든 원소를 하나도 빠짐없이 하나의 실수에 대응시키는 함수이나, 일대일 대응함수는 아닐 수 있음(예: RV = 동전 3개를 던져 앞면이 나오는 개수)
- RV는 명백한 함수이지만, 함수가 취하는 값이 중요하게 사용되므로 변수로 명명
- RV의 불규칙성(randomness)은 정의역을 구성하는 확률실험의 불규칙성에 기인
- RV의 확률을 이용하여 확률실험에 의한 표본점 혹은 사건에 대한 확률산출 가능
- 구체적인 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 을 기술하는 대신 RV를 도입함으로써 표본공간에 대한 수학적 추상화가 가능해짐

확률공간의 변환 (2/2)

• (누적) 분포함수(cdf)

: 실선 위에서 정의된 사건 $\{X \leq x\}$ 의 확률

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

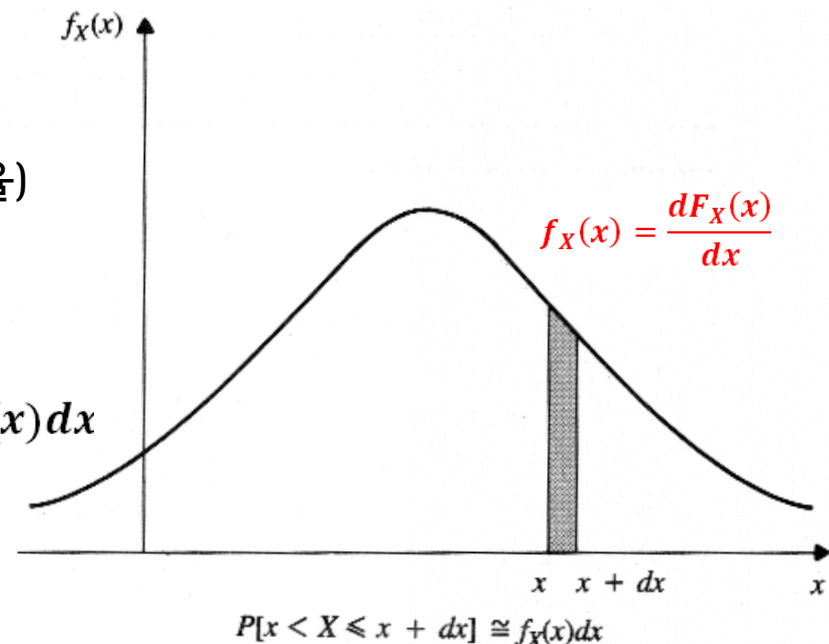
- 반무한구간(semi-infinite interval)의 확률을 실선 상에 지정할 수 있게 됨
- 집합의 원소(실선 위의 한 점)에 대한 확률을 지정하는데 도움을 줌

• 확률밀도함수(pdf)

: 점 x 에서의 확률밀도

(미소구간에 대한 확률 혹은 확률의 순간 변화율)

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{dx \rightarrow 0} P(x < X \leq x + dx) \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} [F_X(x + dx) - F_X(x)] = f_X(x) dx \\ &= f_X(x) dx \end{aligned}$$



확률공간의 축소 (1/2)

• 조건부확률 (conditional probability)

– 정의

: 주어진 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 에서, $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ 이고 $P(E_2) > 0$ 이라면,

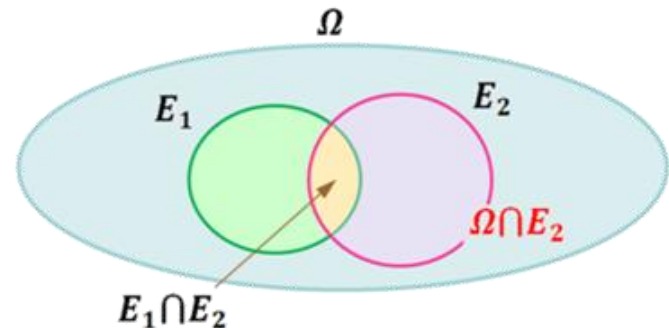
$$E_2 \text{에 대한 } E_1 \text{의 조건부확률 } P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

– 물리적 의미

- 사건 E_2 가 일어난 조건에서 E_1 도 일어날 확률(E_2 결과가 E_1 의 확률에 영향을 줌)
- 실험결과로 이루어지는 전체 표본공간 Ω 가 E_2 로 국한되는, 즉

E_2 에 의해 새롭게 축소 설정된 표본공간 $\Omega \cap E_2$ 에서 E_1 이 일어날 확률을 의미
(칼만필터의 측정치 갱신과정)

$$P(E_1) = \frac{\text{green circle}}{\text{light blue oval}}$$
$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\text{yellow circle}}{\text{pink circle}}$$



확률공간의 축소 (1/2)

• 조건부확률의 성질

– 곱의 법칙

상호배반(mutual disjoint) 사건, $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$P(E_1 E_2 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1) \cdots P(E_n|E_1 E_2 \cdots E_{n-1})$$

– 전확률의 법칙(Rule of Total Probability)

: $\{E_i\}$ 이 표본공간의 분할, 즉 배반사건이라면, 임의의 사건 $F \in \mathcal{F}$ 에 대하여

$$P(F) = \sum_i P(E_i)P(F|E_i)$$

– 베이즈 법칙(Bayesian Rule) : 칼만필터의 사후확률밀도함수 산출과 관련

$$P(E_i|F) = \frac{P(E_i)P(F|E_i)}{P(F)} = \frac{P(E_i)P(F|E_i)}{\sum_i P(E_i)P(F|E_i)}$$

- $P(E_i)$ = 사건 F 가 일어나기 전에 계산된 사건 E_i 의 확률(사전(a priori) 확률)
- $P(E_i|F)$ = 사건 F 가 일어난 후에 계산된 사건 E_i 의 조건부확률(사후(a posteriori) 확률)
- 사후확률 $P(E_i|F)$ 은 사건 E_i 가 일어난 원인이 사건 F 에 있음을 의미하므로, 베이즈법칙을 ‘원인의 확률(probability of causes)’을 산출하기 위한 공식으로 해석 가능

적률

- 기대값(expectation) / 평균(mean = first moment)

$$E\{X\} = \int_{\Omega_X} X dP = \int_{\Omega_X} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

- 조건부 평균(conditional mean/expectation)

$$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x) dy$$

$$\begin{aligned} E_{X,Y|X}[E[Y|x]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|x] f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x) dy \right] f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_Y(y|x) f_X(x)}_{=f_{X,Y}(x,y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E[Y] \end{aligned}$$

- 중심적률(central moment)

$$E\{|X - E\{X\}|^n\}$$

- 분산(variance = second moment)

: 평균을 중심으로 한 확률변수 값의 변화 크기(mean-squared variation)

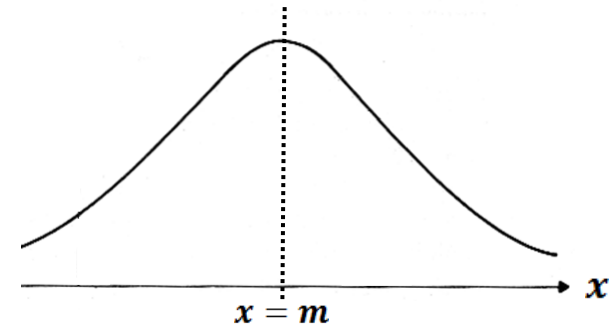
$$\text{var}\{X\} = E\{(X - E\{X\})^2\} = E\{X^2 - 2E\{X\}X + E\{X\}^2\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

정규확률변수

- 정규(Normal or Gaussian) RV $X \sim N(m, P)$

- 확률밀도함수

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T P^{-1}(x-m)}$$



- 특성

- Gaussian RV의 특성은 평균과 분산만으로 모두 표현
- Gaussian RV의 선형변환 역시 Gaussian RV임

$$X \sim N(m, P), Y = AX + b \rightarrow Y \sim N(Am + b, APA^T)$$

- Gaussian RV의 확률밀도함수는 평균에서 최대값을 가짐
- 비상관(uncorrelated)되어 있는 Gaussian RVs는 서로 독립(independent)임

$$E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

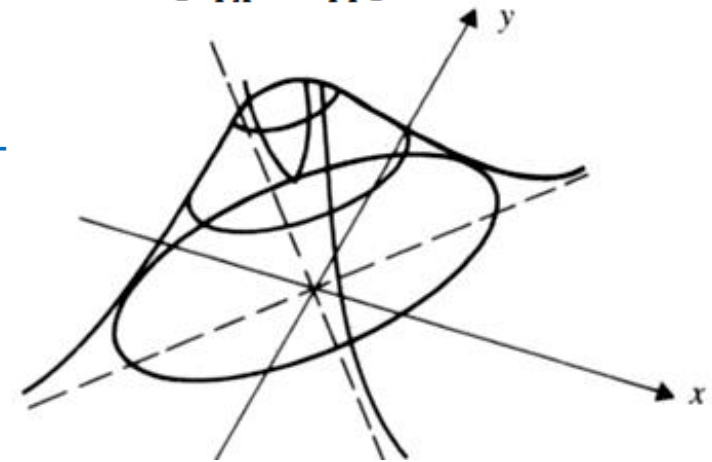
서로 독립인 RVs는 서로에 대한 정보를 포함하고 있지 않음

Jointly Gaussian RVs

- 결합확률밀도함수

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \Sigma}} e^{-\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \right)^T \Sigma^{-1} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \right)}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}$$

- Jointly Gaussian RVs의 결합 확률밀도함수는 각 RV의 평균/분산과 공분산만으로 표현 가능함



- 조건부 확률밀도함수

- $f_{X|Y}(x|Y=y)$ 역시 정규분포를 이룸

- 조건부 평균 $E\{X|Y=y\} = \bar{x} + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}(y - \bar{y})$
- 조건부 분산 $var\{X|Y=y\} = \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}$

확률과정(Random Process) (1/2)

• 확률과정 $X(t)$

– 정의 및 특성

- 모든 사건 ζ 를 함수 $X(\zeta, t)$ 에 대응시키는 방법, 즉 시간에 따라 변화하는 확률변수
- 고정된 시점에서 확률과정은 확률변수로 간주됨(ensemble analysis)
 - : 확률과정의 특성 역시 시간에 따른 확률변수의 pdf 로 설명될 수 있음
 - : 일반적으로 확률과정의 특성(평균, 분산 등)은 시변함수가 됨
- (참고) stationary process : 시간 간격을 이동하여도 확률과정의 특성이 변화하지 않는 경우
- wide sense stationary : 기대값이 일정, 확률적 특성이 시간 간격의 함수로 기술

– 확률과정의 예

- 확률실험 : 동전던지기
- 확률과정 : k 번째 시행까지 앞면이 나온 누적회수 $X_{k+1} = X_k + N_k$ ($X_0 = 0$)

X_k	k=0	k=1	k=2	k=3
0	1	1/2	1/4	1/8
1		1/2	2/4	3/8
2			1/4	3/8
3				1/8

...

앞면이면 1 뒷면이면 0

확률과정(Random Process) (2/2)

- Markov Process

- 정의

- If $k_1 < k_2 < \dots < k_m < k$, and the pdf of x_k conditioned on $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$ is simply the pdf of x_k conditioned on x_{k_m} , then $\{x_k\}$ is a Markov process.
 - Markov process는 ODE의 state 개념을 확률과정에 도입한 것임

- Chapman-Kolmogorov Equation

$$p(x_n|x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n|x_m)p(x_m|x_k)dx_m \quad \text{where } n > m > k$$

$$\begin{aligned} (pf) \quad p(x_n|x_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n|x_m, x_k)p(x_m|x_k)dx_m && \text{..... marginal density (p.12)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n|x_m)p(x_m|x_k)dx_m && \text{..... Markov process} \end{aligned}$$

Gauss-Markov 모델 (1/2)

• 이산시간 Gauss-Markov 모델

– 선형 확률 동적시스템

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k$$

$$z_k = y_k + v_k = H_k x_k + v_k$$

- 가정 #1. 모델링 오차 및 측정오차 $\{w_k\}$, $\{v_k\}$ 가 독립인 영평균 Gaussian 백색잡음
분산 = $E\{w_k w_l^T\} = Q_k \delta_{kl}$, $E\{v_k v_l^T\} = R_k \delta_{kl}$
- 가정 #2. 초기 상태변수 x_0 는 Gaussian RV 임
평균 = \bar{x}_0 , 공분산 = $E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = P_0$

– 특성

- 선형 동적 확률시스템의 상태변수 x_k 는 Gaussian RV 임

$$x_k = \Phi_{k,0} x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi_{k,l+1} G_l w_l \quad \leftarrow \dots \quad \Phi_{k,l} = F_{k-1} F_{k-2} \cdots F_l \quad (k > l)$$

- 상태변수열 $\{x_k\}$ 역시 Gauss-Markov process 임 : $x_k = \Phi_{k,k_m} x_{k_m} + \sum_{l=k_m}^{k-1} \Phi_{k,l+1} G_l w_l$
- $\{x_k\}$, $\{z_k\}$ 은 jointly Gaussian

$$\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ H_k \bar{x}_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_k & P_k H_k^T \\ H_k P_k & H_k P_k H_k^T + R_k \end{bmatrix} \right)$$

Gauss-Markov 모델 (2/2)

- 선형 확률 동적시스템의 상태변수 = Gauss-Markov 모델

: 상태변수 열 $\{x_k\}$ 이 Gaussian 이므로, 평균과 분산만으로 확률밀도함수 기술 가능

- 평균의 전파

- 시스템 및 측정방정식의 양변에 expectation을 취하면,

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1} &= F_k \bar{x}_k \\ \bar{z}_k &= H_k \bar{x}_k\end{aligned}$$

- 분산의 전파

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \bar{x}_{k+1} = F_k \tilde{x}_k + G_k w_k$$

$$P_{k+1} = E\{\tilde{x}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}^T\} = F_k E\{\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T\} F_k^T + G_k E\{w_k w_k^T\} G_k^T$$

$$\tilde{z}_k = z_k - \bar{z}_k = H_k \tilde{x}_k + v_k$$

$$\begin{aligned}P_{k+1} &= F_k P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ S_k &= E\{(z_k - \bar{z}_k)(z_k - \bar{z}_k)^T\} = H_k P_k H_k^T + R_k\end{aligned}$$

추정문제의 일반 해 - 최소평균자승추정 (1/2)

- LLMSE(Linear Least Mean Squares Estimation)

- 측정방정식

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V}, \quad E\{\mathbf{V}\} = \mathbf{0}$$

- 추정문제

- 가용한 RV(예를 들면 측정치) \mathbf{Z} 를 이용하여, 미지의 RV \mathbf{X} 를 추정
 - 추정치는 측정치의 선형함수로 표현됨 $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{b}$
 - 평균자승 추정오차를 최소화

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{X}}} J_{LLMSE} &= \min_{\hat{\mathbf{X}}} E\{(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})\} \\ &= \min_{\mathbf{A}, \mathbf{b}} \text{tr}(E\{((\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) - (\mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{b} - \bar{\mathbf{X}}))((\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) - (\mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{b} - \bar{\mathbf{X}}))^T\}) \end{aligned}$$

- 추정치

$$J_{LLMSE} = \text{tr}(\Sigma_{XX} + \mathbf{A}(\Sigma_{ZZ} + \bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{Z}}^T)\mathbf{A}^T + (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{X}})^T + 2\mathbf{A}\bar{\mathbf{Z}}(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{X}})^T - 2\mathbf{A}\Sigma_{ZX})$$

$$\frac{\partial J_{LLMSE}}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}(\Sigma_{ZZ} + \bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{Z}}^T) - 2\Sigma_{XZ} + 2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{X}})\bar{\mathbf{Z}}^T = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial J_{LLMSE}}{\partial \mathbf{b}} = 2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{X}}) + 2\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}} + \Sigma_{XZ}\Sigma_{ZZ}^{-1}(\mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}})$$

추정문제의 일반 해 - 최소평균자승추정 (2/2)

- LLMSE(Linear Least Mean Squares Estimation)

- 특성

- LLMSE는 영평균 추정오차 특성(무편향성; unbiasedness)을 가짐

$$E\{\hat{X}\} = E\{\bar{X} + \Sigma_{XZ}\Sigma_{ZZ}^{-1}(Z - \bar{Z})\} = E\{\bar{X}\} + \Sigma_{XZ}\Sigma_{ZZ}^{-1}(E\{Z\} - \bar{Z}) = E\{\bar{X}\}$$

(참고) LLMSE의 분산

$$\text{var}\{\hat{X} - X\} = \Sigma_{XX} - \Sigma_{XZ}\Sigma_{ZZ}^{-1}\Sigma_{ZX}$$

- LMSE 문제를 통계적 최소자승(stochastic least squares) 문제라고 하기도 함
: RVs에 대한 어떠한 가정도 필요로 하지 않으므로
RVs가 비선형 관계를 갖더라도 적용 가능한 추정기법임
 - RVs가 jointly Gaussian 인 경우, LLMSE는 MLE와 같아짐
 - RVs가 jointly Gaussian 인 경우, LMSE는 선형추정기가 됨(LMSE = LLMSE)

추정문제의 일반 해 - 최소분산추정 (1/2)

• MVE(Minimum Variance Estimation)

– 추정문제

- 측정치 $Z = z$ 가 주어진 경우, 조건부 분산을 최소화하는 추정치 \hat{x} 를 산출
- 모든 y 에 대해 다음 조건을 만족하여야 함

$$E\{(X - \hat{X})(X - \hat{X})|Z = z\} \leq E\{(X - y)(X - y)|Z = z\}$$

– 최소분산 추정치

- 조건부 평균 $E\{X|Z = z\}$ 이 유일한 최소분산추정치 임

$$\begin{aligned} E\{(X - y)(X - y)^T|Z = z\} &= \int (x - y)(x - y)^T p_{X|Z}(x|z) dx \\ &= \int x x^T p_{X|Z}(x|z) dx - y \int x^T p_{X|Z}(x|z) dx - y^T \int x p_{X|Z}(x|z) dx + y y^T \\ &= \left[y - \int x p_{X|Z}(x|z) dx \right] \left[y^T - \int x^T p_{X|Z}(x|z) dx \right] + \int x x^T p_{X|Z}(x|z) dx - \left| \int x p_{X|Z}(x|z) dx \right|^2 \end{aligned}$$

- 조건부 평균에 의해 산출된 최소분산추정치는 무편향 추정치임

$$E_{X,Z}\{\hat{X}\} \leq E_Z\{E_{X|Z}(\hat{X})\} = E_Z\{E_{X|Z}(x|Z)\} = E_X\{x\} \leftarrow \text{conditional expectation의 속성 (p.13)}$$

추정문제의 일반 해 - 최소분산추정 (2/2)

• 선형 Gaussian 측정모델에 대한 최소분산 추정기

– 측정방정식

$$z = Hx + v$$

$$x \sim N(\bar{x}, P_x), \quad v \sim N(0, R), \quad x, v \text{ 는 상호 비상관}$$

- 측정치가 정규확률변수의 선형 합으로 표현되므로 측정치도 정규확률변수

$$z \sim N(\bar{z}, P_z)$$

$$\bar{z} = E\{Hx + v\} = H\bar{x}, \quad P_z = E\{(z - \bar{z})(z - \bar{z})^T\} = HP_xH^T + R$$

- 조건부 평균을 정의하기 위한 공분산행렬

$$P_{xz} = P_{zx}^T = E\{(x - \bar{x})(z - \bar{z})^T\} = HP_x$$

- MVE

$$\begin{aligned}\hat{x}_{MV} &= E\{x|z\} = \bar{x} + P_{xz}P_z^{-1}(z - \bar{z}) = \bar{x} + P_xH^T(HP_xH^T + R)^{-1}(z - H\bar{x}) : 23p \\ &= \bar{x} + P_{x|z}H^TR^{-1}(z - H\bar{x})\end{aligned}$$

$$P_{x|z} = \text{var}\{\hat{x}_{MV} - x\} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} = P_x - P_x(HP_xH^T + R)^{-1}HP_x$$

추정문제의 일반 해 - 최소분산추정 (2/2)

• 선형 Gaussian 측정모델에 대한 최소분산 추정기

– 측정방정식

$$z = Hx + v$$

$$x \sim N(\bar{x}, P_x), \quad v \sim N(0, R), \quad x, v \text{ 는 상호 비상관}$$

- 측정치가 정규확률변수의 선형 합으로 표현되므로 측정치도 정규확률변수

$$z \sim N(\bar{z}, P_z)$$

$$\bar{z} = E\{Hx + v\} = H\bar{x}, \quad P_z = E\{(z - \bar{z})(z - \bar{z})^T\} = HP_xH^T + R$$

- 조건부 평균을 정의하기 위한 공분산행렬

$$P_{xz} = P_{zx}^T = E\{(x - \bar{x})(z - \bar{z})^T\} = HP_x$$

- MVE

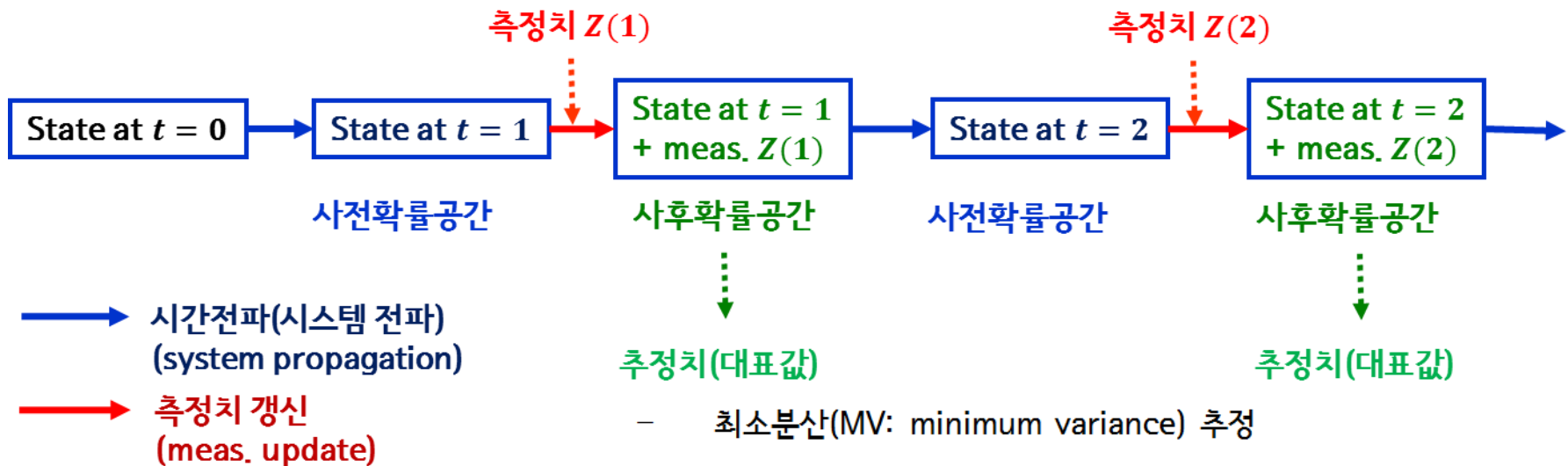
$$\begin{aligned}\hat{x}_{MV} &= E\{x|z\} = \bar{x} + P_{xz}P_z^{-1}(z - \bar{z}) = \bar{x} + P_xH^T(HP_xH^T + R)^{-1}(z - H\bar{x}) : 15p \\ &= \bar{x} + P_{x|z}H^TR^{-1}(z - H\bar{x})\end{aligned}$$

$$P_{x|z} = \text{var}\{\hat{x}_{MV} - x\} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} = P_x - P_x(HP_xH^T + R)^{-1}HP_x$$

확률 동적시스템 상태추정 문제

• 확률론적 관점에서 바라본 추정문제의 본질

: 불규칙 시스템의 **상태변수**에 포함되어 있는 정보를 표현하는 **확률공간**이
시간전파 및 **측정치 획득**에 따라 어떻게 변화하는 지 알아내는 것
(= 시간에 따라 확률공간을 정의하는 **조건부 확률밀도함수의 변화**를 추적)



$$\text{find } \hat{x}_k \text{ minimizing } E\{(X - \hat{x}_k)^2 | Z^k\}$$

- 최대사후확률(MAP: maximum a posteriori probability) 추정

$$\text{find } \hat{x}_k \text{ maximizing } p_{X|Z}(x_k | Z^k)$$

상태추정을 위한 조건부확률 산출

- 사전 확률밀도함수(a priori probability density) $p(x_k|Z^{k-1})$

- 시스템전파(system propagation) 혹은 시간갱신(time update)과 관련
 - Chapman-Kolmogorov 방정식(p.17)로부터 유도

$$p(x_k|Z^{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|Z^{k-1})dx_{k-1}$$

- 사후 확률밀도함수(a posteriori probability density) $p(x_k|Z^k)$

- 측정치갱신(measurement update)과 관련
 - Bayesian Rule(p.12)를 이용하여 유도

$$\begin{aligned} p(x_k|Z^k) &= p(x_k|z_k, Z^{k-1}) = \frac{p(z_k|x_k, Z^{k-1})p(x_k|Z^{k-1})}{p(z_k|Z^{k-1})} \\ &= \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|Z^{k-1})}{p(z_k|Z^{k-1})} \\ &= \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|Z^{k-1})}{\int p(z_k|x_k)p(x_k|Z^{k-1})dx_k} \end{aligned}$$

이산시간 칼만필터 (1/3)

• 이산시간 칼만필터 순환식 유도과정

: 칼만필터 = 조건부 확률밀도 함수를 순차적으로 산출하는 과정

– 조건부 확률밀도함수 산출

- $k = 0$: 초기화

초기치에 대한 가정 $x(0) \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ 으로부터, $\hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0, P_{0|0} = P_0$

- $k = 1$: 시스템전파(사전 확률밀도함수)

Gauss-Markov 모델의 성질(p.19)에 의해, $x_1 \sim N(\hat{x}_{1|0}, P_{1|0})$ 도 정규분포를 따름

$$\hat{x}_{1|0} = F_0 \bar{x}_0, P_{1|0} = F_0 P_0 F_0^T + G_0 Q_0 G_0^T$$

- $k = 1$: 측정치갱신(사후 확률밀도함수)

Gauss-Markov 모델의 성질(p.18)에 의해, 결합확률분포가 정규분포를 따르게 됨

$$\begin{bmatrix} x_{1|0} \\ z_1 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \hat{x}_{1|0} \\ H \hat{x}_{1|0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{1|0} & P_{1|0} H_1^T \\ H_1 P_{1|0} & H_1 P_{1|0} H_1^T + R_1 \end{bmatrix} \right)$$

따라서, 누적측정치 $Z^1 = \{z_1\}$ 에 대한 x_1 의 조건부확률분포(p.23) 역시 $N(\hat{x}_{1|1}, P_{1|1})$

$$\hat{x}_{1|1} = \hat{x}_{1|0} + K_1 (z_1 - H_1 \hat{x}_{1|0}), \quad K_1 = P_{1|0} H_1^T (H_1 P_{1|0} H_1^T + R_1)^{-1},$$

$$P_{1|1} = P_{1|0} - P_{1|0} H_1 (H_1^T P_{1|0} H_1 + R_1)^{-1} H_1^T P_{1|0}$$

이산시간 칼만필터 (2/3)

- 이산시간 칼만필터 순환식 (p.27의 일반화)

- 시간 갱신식

- 사전 확률밀도함수 $p(x_{k+1}|Z^k)$ 의 평균과 분산

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= F_k \hat{x}_{k|k}, \\ P_{k+1|k} &= F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T\end{aligned}$$

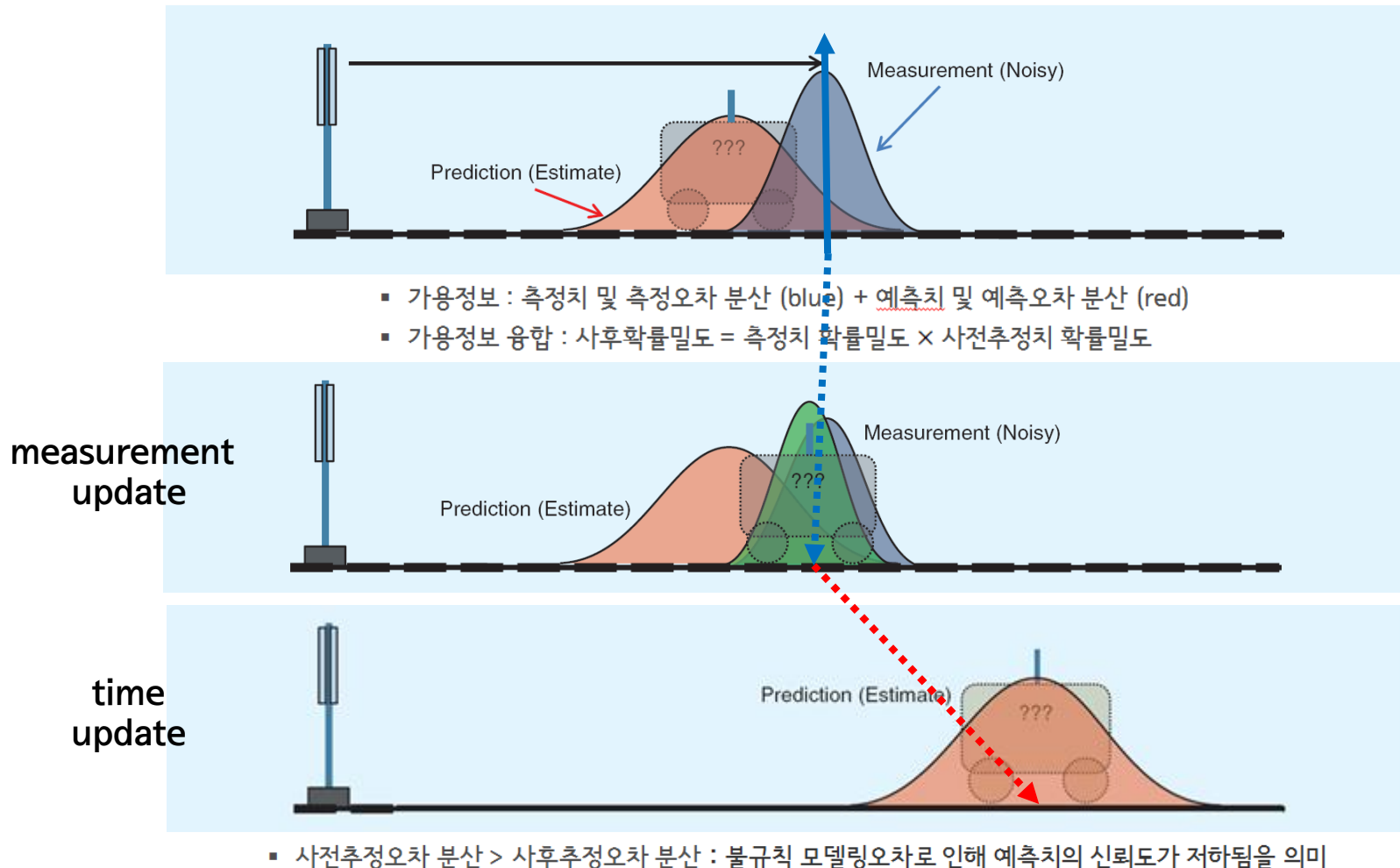
- 측정치 갱신식

- 사후 확률밀도함수 $p(x_{k+1}|Z^{k+1})$ 의 평균과 분산

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}), \\ K_{k+1} &= P_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}, \\ P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - P_{k+1|k} H_{k+1} (H_{k+1}^T P_{k+1|k} H_{k+1} + R_{k+1})^{-1} H_{k+1}^T P_{k+1|k} \\ &= \left(P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \right)^{-1}\end{aligned}$$

이산시간 칼만필터 (3/3)

• 칼만필터에 의한 조건부 확률밀도함수 산출과정



이산시간 칼만필터의 특성 (1/3)

• 선형 시불변 시스템에 대한 칼만필터 오차특성

– 사전추정오차 동특성

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \\ &= Fx_k + Gu_k - F(I - K_kH) \hat{x}_{k|k-1} - FK_k(Hx_k + v_k) \\ &= F(I - K_kH) \tilde{x}_k + Gu_k - FK_kv_k\end{aligned}$$

▪ 무편향성

$E\{\tilde{x}_{k+1}\} = F(I - K_kH)E\{\tilde{x}_k\}$ 이므로, 행렬 $F(I - K_kH)$ 가 점근적으로 안정하면 칼만필터는 무편향필터라 할 수 있음

▪ 추정오차 공분산

칼만필터 추정오차 공분산은 다음 Riccati 방정식을 만족함

$$\begin{aligned}P_{k+1|k} &= E\{\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^T\} \\ &= F \left[(I - K_kH) P_{k|k-1} (I - K_kH)^T + K_k R K_k^T \right] F^T + G Q G^T \\ &= F \left[P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H^T (H P_{k|k-1} H^T + R)^{-1} H P_{k|k-1} \right] F^T + G Q G^T\end{aligned}$$

이산시간 칼만필터의 특성 (2/3)

• 선형 시불변 시스템에 대한 칼만필터 오차특성

– 통계적 정상상태

- 시간이 지남에 따라 칼만필터의 오차공분산이 유한한 값으로 수렴

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{k|k-1} = P$$

- 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation)

$$P = F \left[P - PH^T (HPH^T + R)^{-1} HP \right] F^T + GQG^T$$

- 정상상태 칼만필터 이득

(F, H) 가 detectable($F - LH$ 를 점근 안정하게 하는 행렬 L 이 존재)이면, P_0 와 무관하게 ARE를 만족하는 반양한정 행렬 $P \geq 0$ 이 항상 존재

이 경우, 정상상태에서 추정오차를 0으로 수렴시키는 정상상태 칼만필터 이득 존재

$$\tilde{x}_{k+1} = F(I - KH)\tilde{x}_k + Gu_k - FKv_k \quad \leftarrow \dots K = PH^T (HPH^T + R)^{-1}$$

- 가관측성

시스템이 observable하면 detectable 하므로, 가관측성을 확인함으로써 오차공분산의 유한성 및 칼만필터의 무편향성을 확인할 수 있음 (칼만필터 설계를 위한 필수조건)

Deterministic Least Squares Method (1/3)

- **Optimal Weighted Least Squares Estimation Problem**

- measurement equation

$$y = \mathcal{H}x + v$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

$x \in \mathbf{R}^n$ state vector should be estimated

$y \in \mathbf{R}^m$ measurement vector

$v \in \mathbf{R}^m$ zero-mean white additive noise with variance \mathcal{R}

- cost function

$$J_{OWLS} = (y - \mathcal{H}x)^T \mathcal{R}^{-1} (y - \mathcal{H}x)$$

OWLS estimation problem is to find the minimizing solution of J_{OWLS}

- **Optimality Condition**

$$\frac{\partial J_{OWLS}}{\partial x} = -\mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} (y - \mathcal{H}x) = 0$$

$$\hat{x}_{OWLS} = (\mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} y$$

: stationarizing point

Deterministic Least Squares Method (2/3)

- **Minimum Condition**

- **existence condition of OWLS estimate**

- OWLS estimate becomes minimizing solution of the given cost function iff

$$\frac{\partial^2 J_{OWLS}}{\partial x^2} = \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H} > 0$$

- in general, if the weighting matrix of measurement error, \mathcal{R} , is chosen as the covariance of measurement noise, the OWLS estimate becomes the minimum variance estimate (equivalently, least mean squares estimate)
 - since $\mathcal{R} > 0$, the least squares estimate always exists in Hilbert space

Deterministic Least Squares Method (3/3)

- Normal Equation

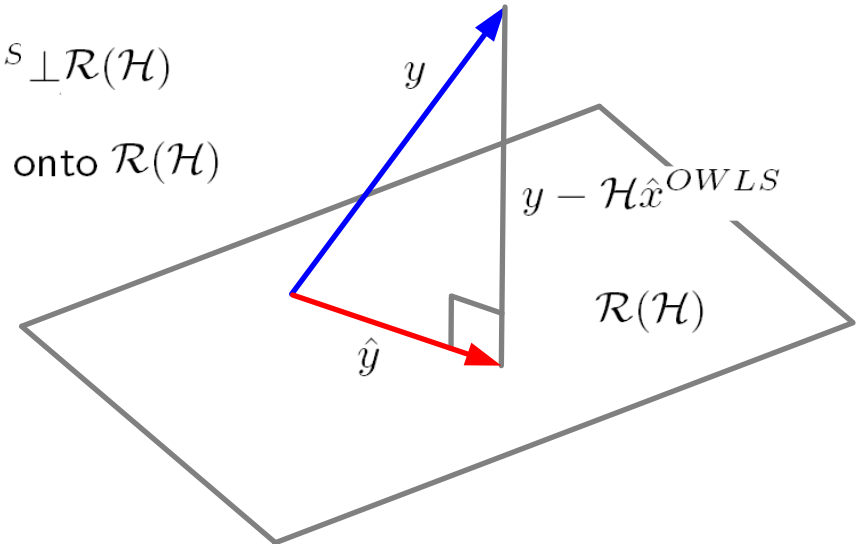
from the optimality condition of LS estimate

$$\mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} (y - \mathcal{H} \hat{x}^{OWLS}) = 0$$

- Orthogonal Projections

$$y - \mathcal{H} \hat{x}^{OWLS} \in \mathcal{N}(\mathcal{H}^T), y - \mathcal{H} \hat{x}^{OWLS} \perp \mathcal{R}(\mathcal{H})$$

$\therefore \hat{y} = \mathcal{H} \hat{x}^{OWLS}$: orthogonal projection of y onto $\mathcal{R}(\mathcal{H})$

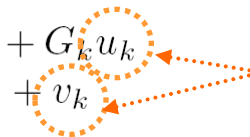


$\mathcal{R}(\bullet)$ and $\mathcal{N}(\bullet)$ be the column and null space

Kalman Filter as a WLS Estimator (1/4)

• Stochastic Linear Dynamic System

– state-space representation

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \\ y_k = H_k x_k + v_k \end{cases}$$


mutually uncorrelated white noises

$$\text{cov} \langle u_k, u_k \rangle = Q_k, \quad \text{cov} \langle v_k, v_k \rangle = R_k$$

– vector-valued representation

$$y^k \triangleq \mathcal{H}^k x_k + \epsilon^k = H^k \Phi^k x_k + v^k - H^k F^k G^{k-1} u^{k-1}$$

$$x^k \triangleq \begin{bmatrix} x^{k-1} \\ x_k \end{bmatrix}, \quad x^0 = x_0, \quad y^k \triangleq \begin{bmatrix} y^{k-1} \\ y_k \end{bmatrix}, \quad y^0 = y_0, \quad u^{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} u^{k-2} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad u^0 = u_0, \quad v^k \triangleq \begin{bmatrix} v^{k-1} \\ v_k \end{bmatrix}, \quad v^0 = v_0,$$

$$Q^{k-1} = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{k-2} & 0 \\ 0 & Q_{k-1} \end{bmatrix}, \quad R^k = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{k-1} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}, \quad H^k = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{k-1} & 0 \\ 0 & H_k \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \Phi(j, k) \triangleq F_{j-1} \times \cdots \times F_k & (j > k) \\ \Phi(j, k) \triangleq I & (j = k) \\ \Phi(j, k) \triangleq (F_{k-1} \times \cdots \times F_j)^{-1} & (j < k) \end{cases}, \quad \Phi^k = \begin{bmatrix} \Phi(0, k) \\ \Phi(1, k) \\ \vdots \\ \Phi(k-1, k) \\ \Phi(k, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(0, k-1)F_{k-1}^{-1} \\ \Phi(1, k-1)F_{k-1}^{-1} \\ \vdots \\ \Phi(k-1, k-1)F_{k-1}^{-1} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1} \\ I \end{bmatrix}, \quad F^k = \begin{bmatrix} F^{k-1} & \Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kalman Filter as a WLS Estimator (2/4)

- Weighted Least Squares Estimation

$$\text{minimize } J(x_k) = (y^k - \mathcal{H}^k x_k)^T \mathcal{M}_k^{-1} (y^k - \mathcal{H}^k x_k) = \begin{bmatrix} u^{k-1} \\ v^k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{k-1} & 0 \\ 0 & R^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u^{k-1} \\ v^k \end{bmatrix}$$

$$y^{k-1} = H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1} x_k + \epsilon^{k-1} - H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1} G_{k-1} u_{k-1} = H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1} x_k + \bar{\epsilon}^{k-1}$$

$$\mathcal{M}_k = \text{cov} < \epsilon^k, \epsilon^k > = H^k F^k G^{k-1} Q^{k-1} (H^k F^k G^{k-1})^T + R^k$$

$$\bar{\mathcal{M}}_{k-1} = \mathcal{M}_{k-1} + H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1} G_{k-1} Q_{k-1} (H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1} G_{k-1})^T$$

- A Posteriori Estimates as a Least Squares Solution

$$\hat{x}_{k|k} = ((\mathcal{H}^k)^T \mathcal{M}_k^{-1} \mathcal{H}^k)^{-1} (\mathcal{H}^k)^T \mathcal{M}_k^{-1} y^k = P_{k|k} (H^k \Phi^k)^T \mathcal{M}_k^{-1} y^k$$

$$P_{k|k} = \text{cov} < x_k - \hat{x}_{k|k}, x_k - \hat{x}_{k|k} > = ((\mathcal{H}^k)^T \mathcal{M}_k^{-1} \mathcal{H}^k)^{-1} = ((H^k \Phi^k)^T \mathcal{M}_k^{-1} H^k \Phi^k)^{-1}$$

- A Priori Estimates as a Least Squares Solution

$$\hat{x}_{k|k-1} = P_{k|k-1} (H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1})^T \bar{\mathcal{M}}_{k-1}^{-1} y^{k-1}$$

$$P_{k|k-1} = \text{cov} < x_k - \hat{x}_{k|k-1}, x_k - \hat{x}_{k|k-1} > = ((H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1})^T \bar{\mathcal{M}}_{k-1}^{-1} H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1})^{-1}$$

Kalman Filter as a WLS Estimator (3/4)

- Time Update

$$\bar{\mathcal{M}}_{k-1}^{-1} = \left(\underbrace{\mathcal{M}_{k-1}}_A + \underbrace{H^{k-1}\Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1}}_B \underbrace{G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T}_{C} \underbrace{(H^{k-1}\Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1})^T}_D \right)^{-1}$$

substituting the above equation for
a priori estimation error covariance

$$P_{k|k-1}^{-1} = \mathcal{A}_{k-1}^{-1} - \mathcal{A}_{k-1}^{-1} \left(\mathcal{A}_{k-1}^{-1} + \underbrace{(G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T)^{-1}}_{\triangleq C_{k-1}^{-1}} \right)^{-1} \mathcal{A}_{k-1}^{-1}$$

$$\mathcal{A}_{k-1}^{-1} \triangleq (H^{k-1}\Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1})^T \mathcal{M}_{k-1}^{-1} H^{k-1}\Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1} = \left(F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T \right)^{-1}$$

matrix inversion lemma

$$P_{k|k-1} = \mathcal{A}_{k-1} + \mathcal{C}_{k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T$$

$$(H^{k-1}\Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1})^T \bar{\mathcal{M}}_{k-1}^{-1} = \left(I - \mathcal{A}_{k-1}^{-1}(\mathcal{A}_{k-1}^{-1} + C_{k-1}^{-1})^{-1} \right) (H^{k-1}\Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1})^T \mathcal{M}_{k-1}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= P_{k|k-1} (H^{k-1}\Phi^{k-1}F_{k-1}^{-1})^T \bar{\mathcal{M}}_{k-1}^{-1} y^{k-1} \\ &= F_{k-1}P_{k-1|k-1} (H^{k-1}\Phi^{k-1})^T \mathcal{M}_{k-1}^{-1} y^{k-1} \\ &= F_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \end{aligned}$$

Kalman Filter as a WLS Estimator (4/4)

- Measurement Update

$$\mathcal{M}_k = H^k F^k G^{k-1} Q^{k-1} (H^k F^k G^{k-1})^T + R^k = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{M}}_{k-1} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}$$

substituting the above equation for
a posteriori estimation error covariance

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{-1} &= (H^k \Phi^k)^T \mathcal{M}_k^{-1} H^k \Phi^k \\ &= \begin{bmatrix} H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1} \\ H_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{M}}_{k-1}^{-1} & 0 \\ 0 & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1} \\ H_k \end{bmatrix} \\ &= P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= P_{k|k} (H^k \Phi^k)^T \mathcal{M}_k^{-1} y^k \\ &= P_{k|k} ((H^{k-1} \Phi^{k-1} F_{k-1}^{-1})^T \bar{\mathcal{M}}_{k-1}^{-1} y^{k-1} + H_k^T R_k^{-1} y_k) \\ &= \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k} H_k^T R_k^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \end{aligned}$$

Kalman filter is a special form of recursive least squares estimator for first order Markov system.
(Kalman filter is a generalized Gauss/Markov estimator)

• 칼만필터의 성질

– 확률론적 관점

- 칼만필터는 상태변수의 조건부 확률밀도를 갱신하는 과정
- Gaussian 잡음을 가정하면 조건부 확률밀도도 정규분포로 표현
: 칼만필터 추정치 = 최소분산 추정치이자, 최대사후확률 추정치 임

– 최소자승 관점

- Gaussian 잡음을 가정하지 않더라도 칼만필터는 최소자승 관점에서 최적 상태추정 해
- 잡음의 분산이 정확히 설정되지 않더라도, 칼만필터는 특정 목적함수의 최소화 해 임

강인 칼만필터링 문제

• 연구배경

– 칼만필터

: 추정오차 분산을 최소화하는 최적 상태추정기

기본 가정

- 외부잡음의 통계적 속성에 관한 사전정보가 주어짐
- 시스템 모델에 불확실성이 존재하지 않음

➔ 실제 상황에서는 흔히 위배되는 가정

➔ 이 경우, 칼만필터의 추정성능이 심각하게 저하되거나 심지어는 발산할 수도 있음

– 강인 칼만필터

설계목적

- 모델링 오차에 대한 견실성 확보
- 최악의 경우(worst-case)에 대해서도 acceptable한 추정성능 제공

의사최적 강인 칼만필터링 문제

• 불확정 시스템 모델

$$\begin{cases} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k u_k \\ y_k &= H_k x_k + v_k = [\tilde{\mathcal{H}}_k - \Delta H_k] x_k + v_k \end{cases}$$

– 사전 정보

$$\text{cov} \left\langle \begin{bmatrix} \tilde{x}_{0|-1} \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{x}_{0|-1} \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} P_{0|-1} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \delta_{kj} \end{bmatrix}$$

$$E\{\Delta H_k^T R_k^{-1} \Delta H_k\} = W_k, \quad E\{\Delta H_k^T u_k\} = 0, \quad E\{\Delta H_k^T R_k^{-1} v_k\} = V_k$$

• 의사최적 강인 칼만필터링 문제 IET Control Theory Appl., 3(9),2009, pp.1226~1236

- 파라미터 불확실성이 없는 경우, 칼만필터는 무편향 최소분산 추정기 임
- 통계적 파라미터 불확실성이 존재하는 상황에서도 대등한 성능을 얻을 수 있는가?
 - 추정오차평균 관점에서 최적 상태추정기 설계
 - 단, 추정오차 분산의 최소화는 고려하지 않음 (quasi-optimality)

다양한 형태의 강인 상태추정 문제들

filtering scheme	vector-valued system model	uncertainty description	given data
deterministic RKF	$y = [\mathcal{H} + \Delta\mathcal{H}] x + v$	$\ \Delta\mathcal{H}\ \leq \epsilon$	$y, \mathcal{H}(\text{deterministic})$
stochastic RKF	$y = [\mathcal{H} + \Delta\mathcal{H}] x + v$	$E\{\Delta\mathcal{H}\} = 0,$ $E\{\Delta\mathcal{H}\Delta\mathcal{H}^T\} = W,$ $E\{\Delta\mathcal{H}v^T\} = 0$	$y, \mathcal{H}(\text{deterministic})$
TLS	$y = [\tilde{\mathcal{H}} - \Delta\mathcal{H}] x + v$	singular value deviation	$y, \tilde{\mathcal{H}}(\text{stochastic})$
robust LS / Non-conservative RKF	$y = [\tilde{\mathcal{H}} - \Delta\mathcal{H}] x + v$	$E\{\Delta\mathcal{H}\} = 0,$ $E\{\Delta\mathcal{H}\Delta\mathcal{H}^T\} = W,$ $E\{\Delta\mathcal{H}v^T\} = V$	$y, \tilde{\mathcal{H}}(\text{stochastic})$

In the above table, it has been defined that $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \Delta\mathcal{H}$

기존 강인 칼만필터링 기법의 한계 및 해법^(1/2)

- **Existing Deterministic Robust Kalman Filters**

- design scheme

- model validation based on deterministic descriptions of uncertainties
 - minimization of guaranteed cost : **overly conservative**

- disadvantages

- mathematically complex
 - hard to tackle the finite-horizon filtering problem
 - hard to analyze the statistical behavior of the filter such as unbiasedness

- **Existing Stochastic Robust Kalman Filters**

- design scheme

- model validation based on stochastic descriptions of uncertainties
 - minimization of the estimation error variance

- disadvantages

- **restrictive to the many actual applications** especially when the nominal value of a measurement matrix is not deterministic

기존 강인 칼만필터링 기법의 한계 및 해법(2/2)

- **Total Least Squares Estimator**

- design scheme
 - errors-in-variables model
 - minimization of the worst-case statistical distance
- disadvantages
 - heavy computational burden due to the recursive SVD
 - cannot applied for the state estimation problem of time-varying system
 - the estimation performance might be degraded when the noisy measurement matrix is correlated with the additive noise

- **Non-conservative Robust Kalman Filter(NCRKF)**

- design objective
 - guarantee the quasi-optimal performance as close to that of the optimal KF
- advantages
 - possible to handle the quiet large class of LTV systems
 - possible to analyze the statistical properties of the estimator (e.g. weak/strong consistency, limiting distribution)

불확실성에 의해 유발되는 칼만필터 추정오차

	최적 최소자승 추정	공칭 최소자승 추정
회귀모델	$\mathbf{y}^k = \mathcal{H}^k \mathbf{x} + \mathbf{e}^k$	$\mathbf{y}^k = \mathcal{H}^k \mathbf{x} + \mathbf{e}^k$ $\tilde{\mathcal{H}}^k = \mathcal{H}^k + \Delta \mathcal{H}^k$
사전정보	$E\{\mathbf{e}^k\} = 0, \mathcal{H}^k \text{ is available}$	$E\{\mathbf{e}^k\} = 0, \tilde{\mathcal{H}}^k \text{ is available}$
목적함수	$J_k^{OLS} = (\mathbf{y}^k - \mathcal{H}^k \mathbf{x})^T (\mathbf{y}^k - \mathcal{H}^k \mathbf{x})$	$J_k^{NoLS} = (\mathbf{y}^k - \tilde{\mathcal{H}}^k \mathbf{x})^T (\mathbf{y}^k - \tilde{\mathcal{H}}^k \mathbf{x})$
추정치	$\hat{\mathbf{x}}_{ k}^{OLS} = P_{ k}^{OLS} (\mathcal{H}^k)^T \mathbf{y}^k$ $P_{ k}^{OLS} = ((\mathcal{H}^k)^T \mathcal{H}^k)^{-1}$	$\hat{\mathbf{x}}_{ k}^{NoLS} = P_{ k}^{NoLS} (\tilde{\mathcal{H}}^k)^T \mathbf{y}^k$ $P_{ k}^{NoLS} = ((\tilde{\mathcal{H}}^k)^T \tilde{\mathcal{H}}^k)^{-1}$
추정오차	$E\{\hat{\mathbf{x}}_{ k}^{OLS} - \mathbf{x}\} = 0$ Unbiased Estimates (but not implementable)	$E\{\hat{\mathbf{x}}_{ k}^{NoLS} - \mathbf{x}\} = \alpha_{ k} \mathbf{x} + \beta_{ k}$ Scale Factor Error $\alpha_{ k} = E\{P_{ k}^{NoLS} (\tilde{\mathcal{H}}^k)^T (-\Delta \mathcal{H}^k)\}$ occurs due to the autocorrelation of $\Delta \mathcal{H}^k$ Bias Error $\beta_{ k} = E\{P_{ k}^{NoLS} (\tilde{\mathcal{H}}^k)^T \mathbf{e}^k\}$ due to the correlation between $\Delta \mathcal{H}^k$ and \mathbf{e}^k

의사최적 강인 칼만필터(1/2)

• 설계목적

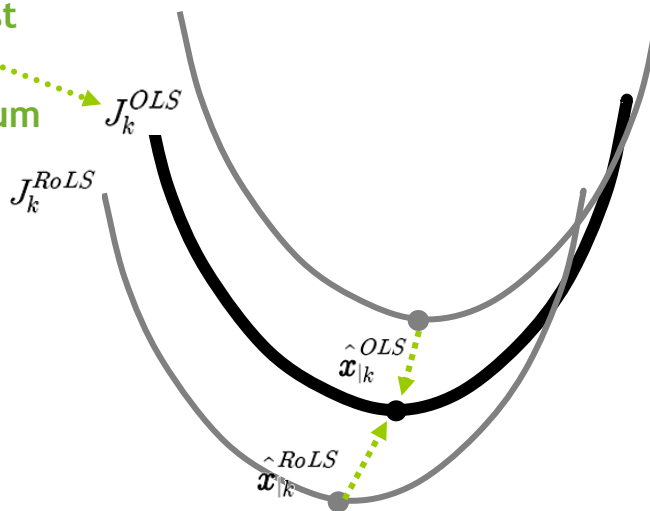
- 센서 출력으로 구성된 측정행렬 관측치 $\tilde{\mathcal{H}}^k$ 와 불확실성 행렬 $\Delta \mathcal{H}^k$ 의 통계적 속성을 사용하여 최적 최소자승 추정기법과 오차 평균 관점에서 대등한 성능 획득

• 목적함수

$$J_k^{RoLS} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}^k \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{H}}^k \\ -I \end{bmatrix} \mathbf{x} \right)^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -(\Phi^k)^T W^k (\Phi^k) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}^k \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{H}}^k \\ -I \end{bmatrix} \mathbf{x} \right) + \mathbf{x}^T (\Phi^k)^T V^k + (V^k)^T (\Phi^k) \mathbf{x}$$

indefinite

quadratic cost
with
unique minimum



$$\hat{\mathbf{x}}_{|k}^{RoLS} = P_{|k}^{RoLS} ((\tilde{\mathcal{H}}^k)^T \mathbf{y}^k - (\Phi^k)^T V^k),$$

$$P_{|k}^{RoLS} = ((\tilde{\mathcal{H}}^k)^T (\tilde{\mathcal{H}}^k) - (\Phi^k)^T W^k (\Phi^k))^{-1} > 0$$

$$\frac{1}{k} J_k^{RoLS} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{k} J_k^{OLS}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{|k}^{RoLS} \xrightarrow{a.s.} \hat{\mathbf{x}}_{|k}^{OLS}$$

의사최적 강인 칼만필터(2/2)

• 점근특성(Limiting Behavior)

잡음 시계열의 독립동일분포(i.i.d.)를 가정하면,

- 추정오차 점근분포 $\sqrt{k}(\hat{\mathbf{x}}_{|k-1}^{RoLS} - \mathbf{x}) \xrightarrow{D} N(0, k \cdot P_{|k-1}^{RoLS})$
- Gramian 행렬의 점근특성 $k \cdot P_{|k}^{RoLS} \xrightarrow{P} k \cdot P_{|k}^{OLS}$

• 의사최적 강인 칼만필터 순환식

$$\hat{x}_{k|k} = (I + \underbrace{P_{k|k} W_k}_{\text{scale-factor error compensation}}) \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{K_{f,k}}_{\text{filter gain}} \left(\underbrace{y_k - \tilde{H}_k \hat{x}_{k|k-1}}_{\text{residual}} \right) - \underbrace{P_{k|k} V_k}_{\text{bias error compensation}}$$

$$K_{f,k} = P_{k|k} \tilde{H}_k^T R_k^{-1}$$

$$P_{k|k}^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} + \tilde{H}_k^T R_k^{-1} \tilde{H}_k - \underbrace{W_k}_{\text{scale-factor error compensation}}$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}$$

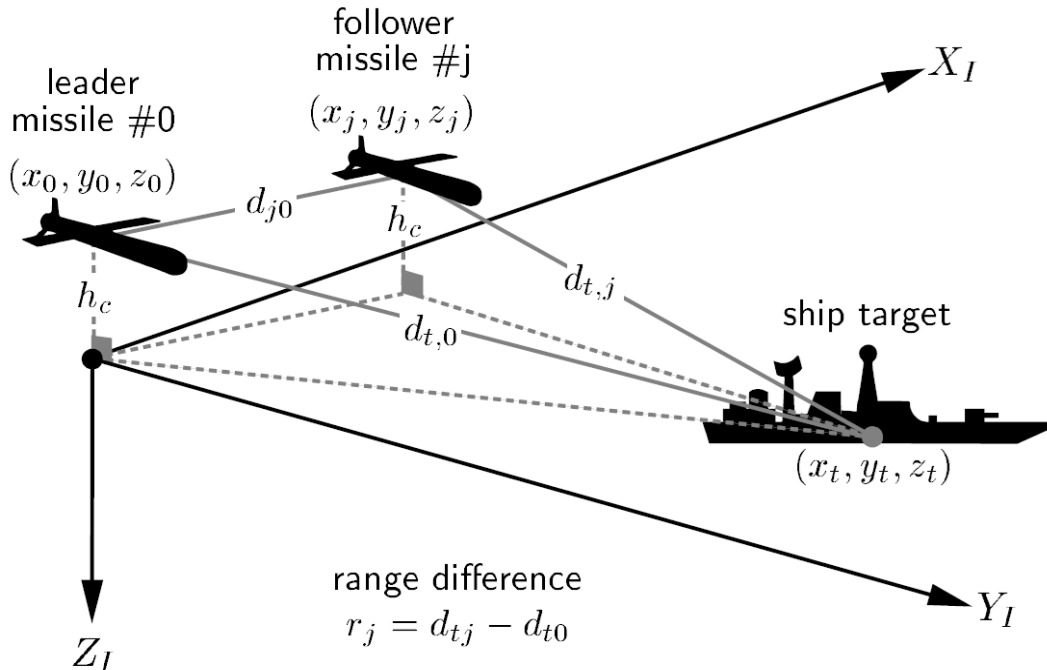
$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

Passive Target Tracking Filter for Cooperative Sea-Skimming ASMs

IET Radar, Sonar, and Navigation, 2014.8, pp. 805–814

협력 피동 표적추적 문제

• 교전기하



– 기본가정

- 다중 유도탄은 일정 고도를 유지하며 함표적으로 호밍
- 탐색기 및 항법장치로부터 피동 표적정보 및 유도탄 항법정보 획득 가능
- Leader 유도탄에서 무선통신을 통해 Follower 유도탄에서 측정된 정보 취합
: Leader 유도탄 내 컴퓨터에 피동 표적추적 필터 구현

협력 피동 표적추적을 위한 시스템 모델링(1/4)

• 불확정 선형 회귀모델 유도

$$(r_j + d_{t,0})^2 = d_{t,j}^2$$

$$r_j^2 - d_{j,0}^2 = h_j \begin{bmatrix} x_t - x_0 \\ y_t - y_0 \\ d_{t,0} \end{bmatrix}, \quad h_j \triangleq -2 \begin{bmatrix} x_j - x_0 & y_j - y_0 & r_j \end{bmatrix}$$

Linear Relation

between the function of range difference and the relative target position

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_j \\ \tilde{r}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ r_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta r_j \end{bmatrix} \quad \text{var} \left\{ \begin{bmatrix} \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta r_j \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_j}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_j}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{r_j}^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_j = \left[\tilde{h}_j - \Delta h_j \right] \begin{bmatrix} x_t - x_0 \\ y_t - y_0 \\ d_{t,0} \end{bmatrix} + \bar{v}_j$$

$$\bar{y}_j \triangleq \tilde{r}_j^2 - (\tilde{x}_j - \tilde{x}_0)^2 - (\tilde{y}_j - \tilde{y}_0)^2, \quad \Delta h_j \triangleq -2 \begin{bmatrix} \delta x_j - \delta x_0 & \delta y_j - \delta y_0 & \delta r_j \end{bmatrix},$$

$$\bar{v}_j \triangleq (\delta x_j - \delta x_0)^2 + (\delta y_j - \delta y_0)^2 - 2(\tilde{x}_j - \tilde{x}_0)(\delta x_j - \delta x_0) - 2(\tilde{y}_j - \tilde{y}_0)(\delta y_j - \delta y_0) + 2\tilde{r}_j\delta r_j - \delta r_j^2$$

협력 피동 표적추적을 위한 시스템 모델링(2/4)

• 불확정 선형 회귀모델 유도(continued)

$$b_j \triangleq E\{\bar{v}_j\} = \sigma_{r_j}^2 - (\sigma_{x_j}^2 + \sigma_{x_0}^2) - (\sigma_{y_j}^2 + \sigma_{y_0}^2)$$

$$y_j \triangleq \bar{y}_j - b_j \quad \Downarrow \quad v_j \triangleq \bar{v}_j - b_j,$$

$$y_j = [\tilde{h}_j - \Delta h_j] \begin{bmatrix} x_t - x_0 \\ y_t - y_0 \\ d_{t,0} \end{bmatrix} + v_j,$$

uncertain linear regression model

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j \triangleq \text{var}\{v_j\} &= 2(2r_j^2 + \sigma_{r_j}^2)\sigma_{r_j}^2 - 2(\sigma_{x_j}^2 + \sigma_{x_0}^2)(\sigma_{y_j}^2 + \sigma_{y_0}^2) \\ &\quad + 2(\sigma_{x_j}^2 + \sigma_{x_0}^2)(2(x_j - x_0)^2 + (\sigma_{x_j}^2 + \sigma_{x_0}^2)) \\ &\quad + 2(\sigma_{y_j}^2 + \sigma_{y_0}^2)(2(y_j - y_0)^2 + (\sigma_{y_j}^2 + \sigma_{y_0}^2)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_j \triangleq E\{\Delta h_j^T \Delta h_j\} = 4 \begin{bmatrix} \sigma_{x_j}^2 + \sigma_{x_0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_j}^2 + \sigma_{y_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{r_j}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}_j \triangleq E\{\Delta h_j^T v_j\} = 4 \begin{bmatrix} (x_j - x_0)(\sigma_{x_j}^2 + \sigma_{x_0}^2) \\ (y_j - y_0)(\sigma_{y_j}^2 + \sigma_{y_0}^2) \\ -r_j \sigma_{r_j}^2 \end{bmatrix}$$

협력 피동 표적추적을 위한 시스템 모델링(3/4)

• 불확정 선형 측정방정식

측정치 벡터 \mathbf{y}_k (측정행렬 참조 (unavailable)) \mathbf{x}_k (상태변수) \mathbf{v}_k (측정행렬관측치 (available)) \mathbf{H}_k (통계적 파라미터 불확실성 (영평균)) \mathbf{v}_k (영평균 백색 측정잡음 벡터)

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k = [\tilde{\mathbf{H}}_k - \Delta \mathbf{H}_k] \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

불확정 선형 측정 방정식

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_t - x_0 \\ y_t - y_0 \\ d_{t,0} \\ \dot{x}_t - \dot{x}_0 \\ \dot{y}_t - \dot{y}_0 \\ \dot{d}_{t,0} \\ \ddot{x}_t - \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_t - \ddot{y}_0 \\ \ddot{d}_{t,0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \vdots \\ y_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} \triangleq \begin{bmatrix} \vdots \\ v_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \vdots \\ h_j & \mathbf{0}^{1 \times 6} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} \triangleq \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{h}_j & \mathbf{0}^{1 \times 6} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta h_j & \mathbf{0}^{1 \times 6} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} \triangleq \text{var}\{\mathbf{v}\} = \text{diag}([\cdots \mathcal{R}_j \cdots]),$$

$$\mathbf{W} \triangleq E\{\Delta \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{H}\} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{W}_j}{\mathcal{R}_j} & \mathbf{0}^{3 \times 6} \\ \mathbf{0}^{6 \times 3} & \mathbf{0}^{6 \times 6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} \triangleq E\{\Delta \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}\} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{V}_j}{\mathcal{R}_j} \\ \mathbf{0}^{6 \times 1} \end{bmatrix}$$

협력 피동 표적추적을 위한 시스템 모델링(4/4)

• 표적 운동모델

- Leader 유도탄에 대한 표적의 상대운동
- 등가속도 운동모델 (1st-order Gauss-Markov model)로 근사

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k^c \mathbf{u}_k^c + G_k \mathbf{u}_k,$$

relative motion modeling error (target acceleration)
 $\mathbf{u}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q_k)$

constant acceleration motion model

$$F = \begin{bmatrix} I^{3 \times 3} & T \cdot I^{3 \times 3} & \frac{1}{2} T^2 \cdot I^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & I^{3 \times 3} & T \cdot I^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 3} & I^{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad G^c = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^2 \cdot I^{3 \times 3} \\ T \cdot I^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^2 \cdot I^{3 \times 3} \\ T \cdot I^{3 \times 3} \\ I^{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}^c = \begin{bmatrix} -\ddot{x}_0 \\ -\ddot{y}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x^t \\ u_y^t \\ u_d \end{bmatrix}$$

obtained from INS

협력 피동 표적추적필터 구현

• 대칭대형에 대한 추적필터 설계 파라미터 근사

– 가정

- 표적 상대거리 > 유도탄 대형 크기
- 표적 상대거리 > 유도탄 비행고도
- 유사한 센서 잡음 특성

$$\begin{aligned} r_1 &= L \left(\sqrt{1 + \epsilon^2 + \eta^2 - 2\epsilon \cos \lambda} - \sqrt{\eta^2 + 1} \right) \approx -d \cos \lambda, \\ r_2 &= L \left(\sqrt{1 + \epsilon^2 + \eta^2 - 2\epsilon \sin \lambda} - \sqrt{\eta^2 + 1} \right) \approx -d \sin \lambda, \\ r_3 &= L \left(\sqrt{1 + \epsilon^2 + \eta^2 + 2\epsilon \cos \lambda} - \sqrt{\eta^2 + 1} \right) \approx d \cos \lambda, \\ r_4 &= L \left(\sqrt{1 + \epsilon^2 + \eta^2 + 2\epsilon \sin \lambda} - \sqrt{\eta^2 + 1} \right) \approx d \sin \lambda \end{aligned}$$

$$\epsilon \triangleq \frac{d}{L} \ll 1$$

$$\eta \triangleq \frac{h}{L} \ll 1$$

$$\bar{\sigma}_r \triangleq \frac{\sigma_{r_j}}{d}, \quad \bar{\sigma}_{xy} \triangleq \frac{\sigma_{x_j}}{d} = \frac{\sigma_{y_j}}{d}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \mathcal{R}_3 \approx d^4 [8\bar{\sigma}_{xy}^4 + 2\bar{\sigma}_r^4 + 4(\bar{\sigma}_r^2 \cos^2 \lambda + 2\bar{\sigma}_{xy}^2)], \\ \mathcal{R}_2 &= \mathcal{R}_4 \approx d^4 [8\bar{\sigma}_{xy}^4 + 2\bar{\sigma}_r^4 + 4(\bar{\sigma}_r^2 \sin^2 \lambda + 2\bar{\sigma}_{xy}^2)] \end{aligned}$$

– 설계변수

$$W \approx \begin{bmatrix} \rho \cdot \mathcal{W} & \mathbf{0}^{3 \times 6} \\ \mathbf{0}^{6 \times 3} & \mathbf{0}^{6 \times 6} \end{bmatrix}, \quad V \approx \mathbf{0}^{9 \times 1}$$

$$\mathcal{W} \triangleq 4d^2 \begin{bmatrix} 2\bar{\sigma}_{xy}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\bar{\sigma}_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix}, \quad \rho \approx \frac{1}{d^4} \left(\frac{1}{4\bar{\sigma}_{xy}^2(1 + \bar{\sigma}_{xy}^2) + \bar{\sigma}_r^2(2 + \bar{\sigma}_r^2)} + \frac{1}{4\bar{\sigma}_{xy}^2(1 + \bar{\sigma}_{xy}^2) + \bar{\sigma}_r^4} \right)$$

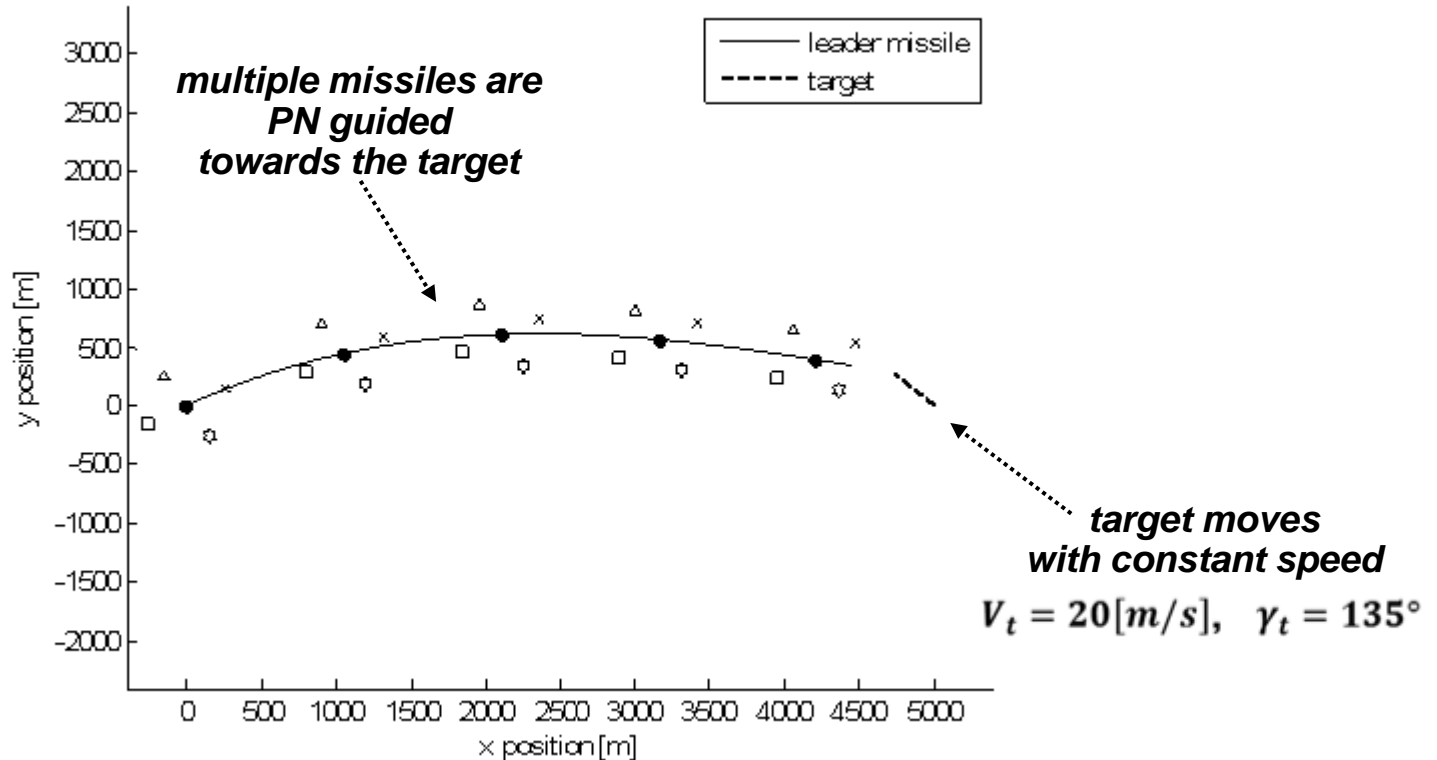
$$|\lambda| \ll 1$$

협력 피동 표적추적 필터 성능분석(1/2)

• 모의 실험 시나리오

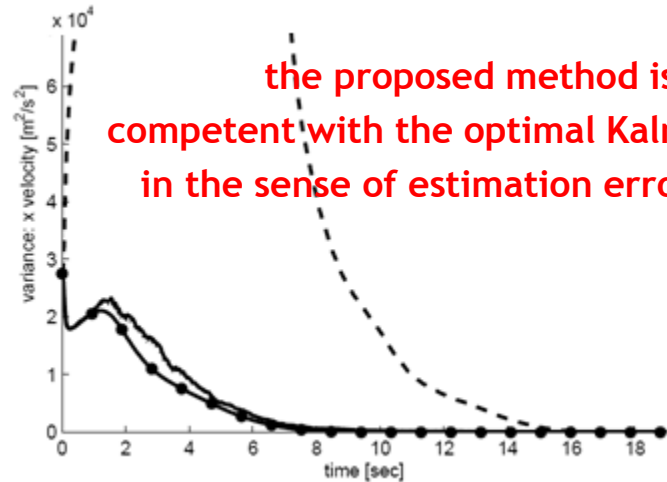
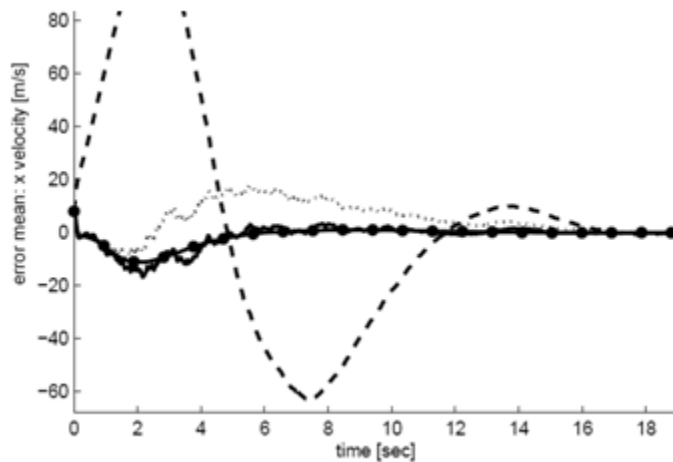
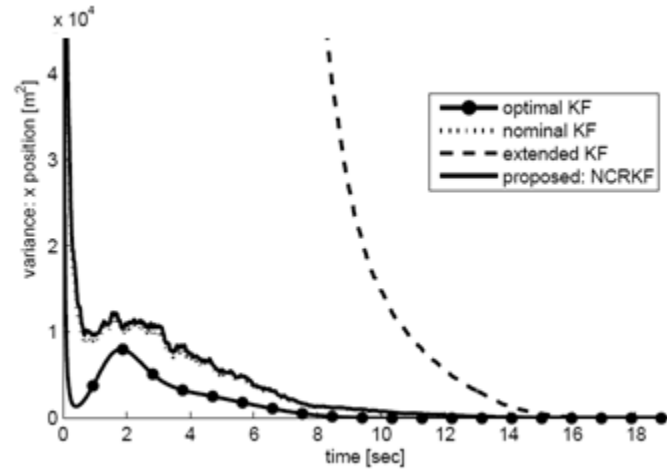
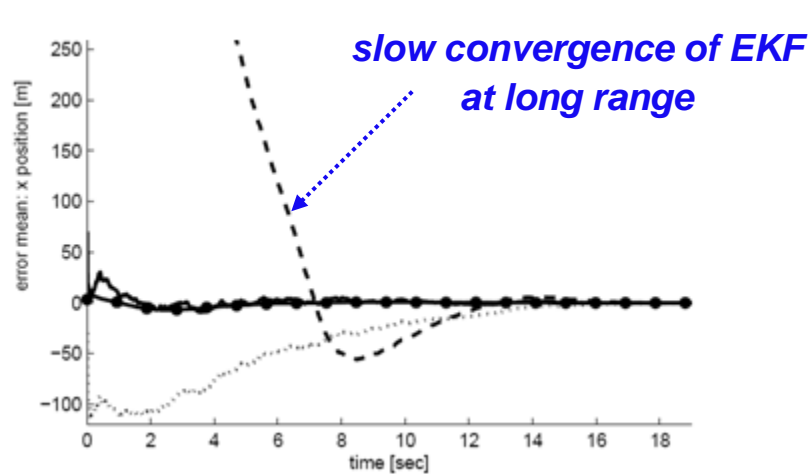
$$V_m = 270[m/s], \quad \gamma_m = 30^\circ, \quad d = 300[m],$$

$$\sigma_r = 0.5[m], \quad \sigma_x = 0.5[m], \quad \sigma_y = 0.5[m], \quad T = 20[ms]$$



협력 피동 표적추적 필터 성능분석(2/2)

• 시뮬레이션 결과 (200 M/C Trials)



the proposed method is competent with the optimal Kalman filter in the sense of estimation error mean

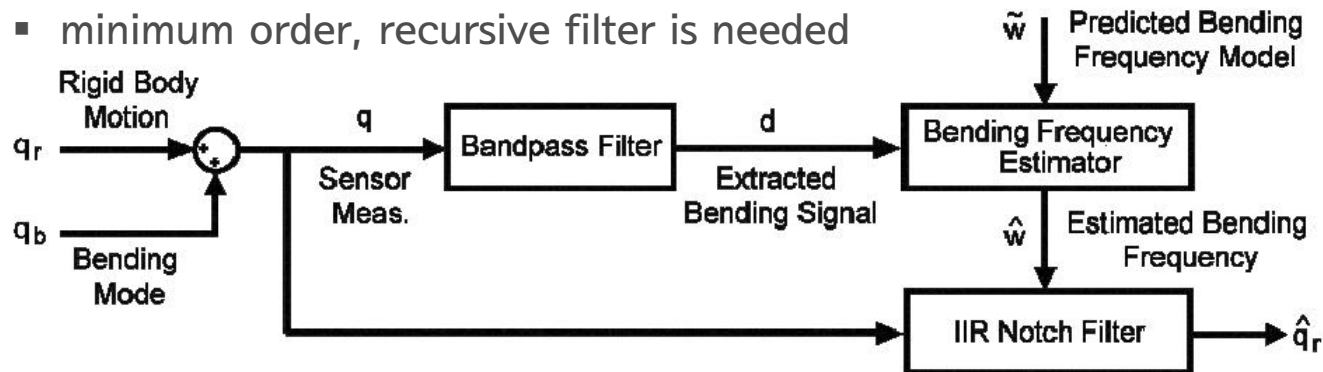
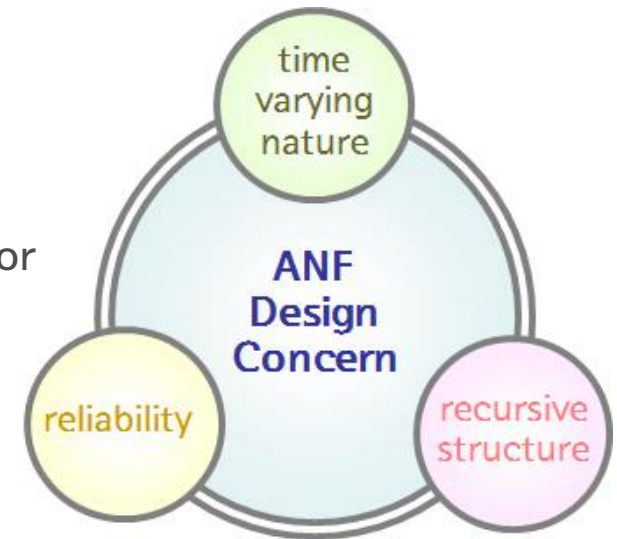
Adaptive Missile Bending Frequency Estimation

IEE Electronics Letters, 2005, 41, (5) pp. 228-229

Adaptive Notch Filtering Problem

- Design Concern

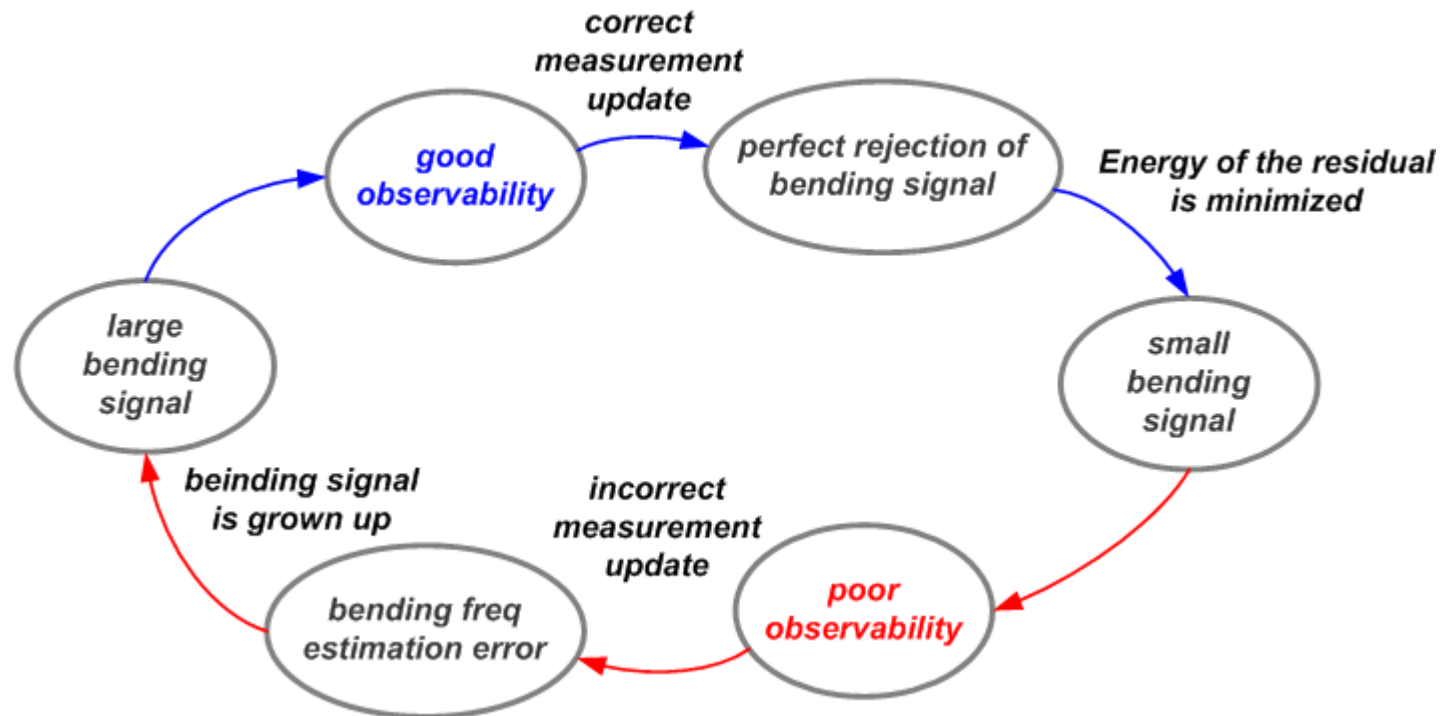
- time-varying nature of missile bending mode
 - mass variation → bending frequency의 시변특성
 - ground test → bending mode 예측치 존재
 - predicted frequency usually contains a bias error
- reliability
 - abrupt magnitude and phase changes of the bending signal
 - robust filtering scheme is required
- real-time implementation
 - minimum order, recursive filter is needed



Observability Issue

- **Solution to the Observability Problem**

- use of the predicted bending mode
 - predicted frequency reflects the time-varying nature of bending mode
 - bending frequency prediction error can be regarded as the slowly-varying bias



Bending Frequency Estimator

- Noisy Bending Signal

$$d_k = s_k + \bar{v}_k = A \cos(\omega k + \phi) + \bar{v}_k, \quad \omega = 2\pi f_b T_s$$

$$s_k + s_{k-2} = 2s_{k-1} \cos \omega$$

$$d_k + d_{k-2} = 2(d_{k-1} - \bar{v}_k) \cos \omega + \bar{v}_k + \bar{v}_{k-2}$$

$$\cos \omega = \cos(\bar{\omega} + \delta\omega) \simeq \cos \bar{\omega} - \sin \bar{\omega} \sin \delta\omega$$

- Uncertain Linear System

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k \\ y_k &= (\tilde{H}_k - \Delta H_k)x_k + v_k \end{cases}$$

$$\hat{\omega}_k = \bar{\omega}_k + \sin^{-1} \hat{x}_k$$

$$x_k = \sin \delta\omega_k$$

$$H_k = -2d_{k-1} \sin \bar{\omega}_k,$$

$$y_k = d_k - 2d_{k-1} \cos \bar{\omega}_k + d_{k-2}$$

$$\Delta H_k = -2\bar{v}_{k-1} \sin \bar{\omega}_k.$$

$$v_k = \bar{v}_k - 2\bar{v}_{k-1} \cos \bar{\omega}_k + \bar{v}_{k-2}$$

- known statistics

$$\begin{aligned} W_k &= E \{ \Delta H_k^T \cdot \Delta H_k \} = 4\bar{R}_{k-1} \sin^2 \bar{\omega}_k, \\ V_k &= E \{ \Delta H_k^T \cdot v_k \} = 4\bar{R}_{k-1} \sin \bar{\omega}_k \cos \bar{\omega}_k \end{aligned}$$

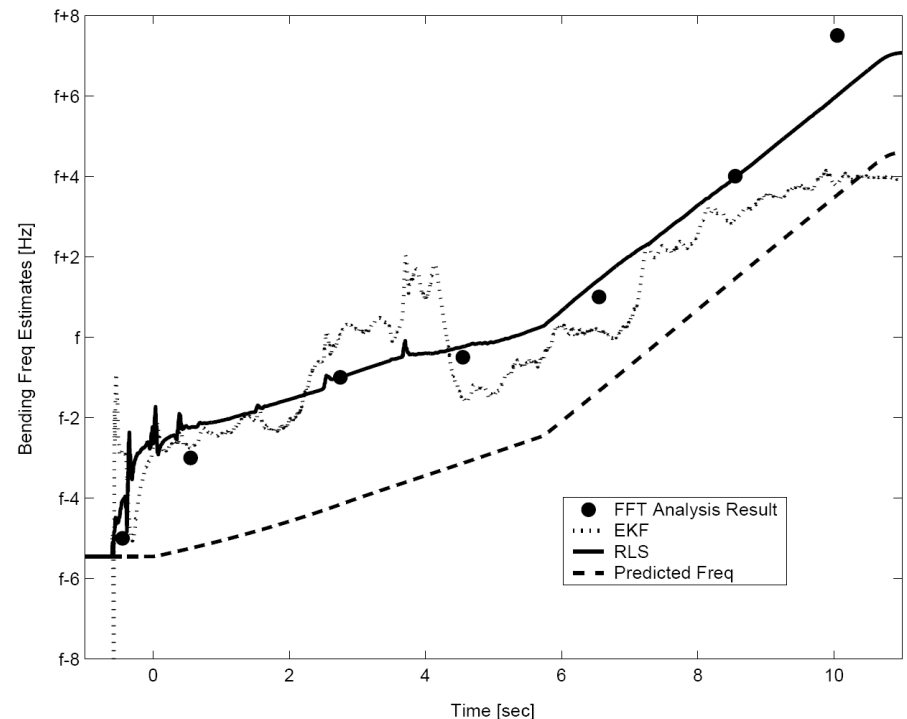
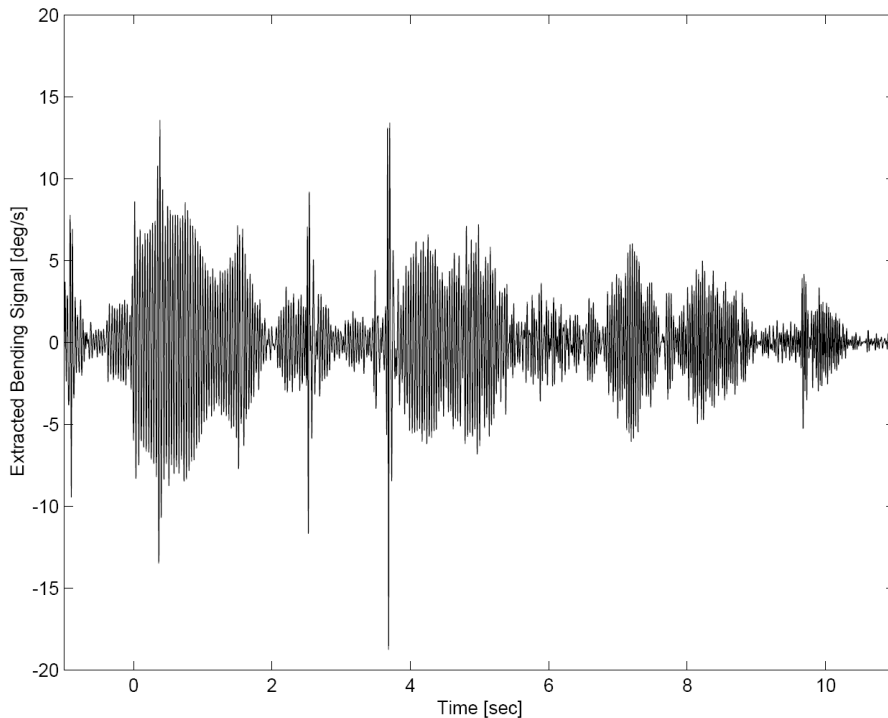
- Bending frequency estimate

$$\hat{\omega}_k = \bar{\omega}_k + \sin^{-1} \hat{x}_k$$

Experimental Results

• Flight Test Results

- bending frequency estimation error $< 1\text{Hz}$
- reliable estimation performance under the low observability cond.
- robust to the abrupt phase/amplitude changes of the bending signal
- real-time implementable : 1st order recursive filter structure



Range Estimation Using LOS/LOS Rate Information

IEE Electronics Letters, 2006, 42, (22) pp. 1265-1266

Int. J. Control, Automation, Sys., 2005, 3, (3) pp. 486-492

Introduction

- **Passive Ranging Problem**

- range estimation using the LOS angle and/or rate information
- should consider the observability problem
- requirements
 - fast convergence
 - reliable estimation performance regardless of the engagement geometry

- **Comparison of Range Estimation Schemes**

	Previous Method	Proposed Method
Model	indirect nonlinear range kinematics	direct linear range kinematics (uncertain linear model)
Estimator	nonlinear filter(EKF/MGEKF/UKF/PF)	linear filter(NCRKF)
Characteristics	much computations slow convergence nonlinear filter structure	small amount of computation fast convergence linear filter structure

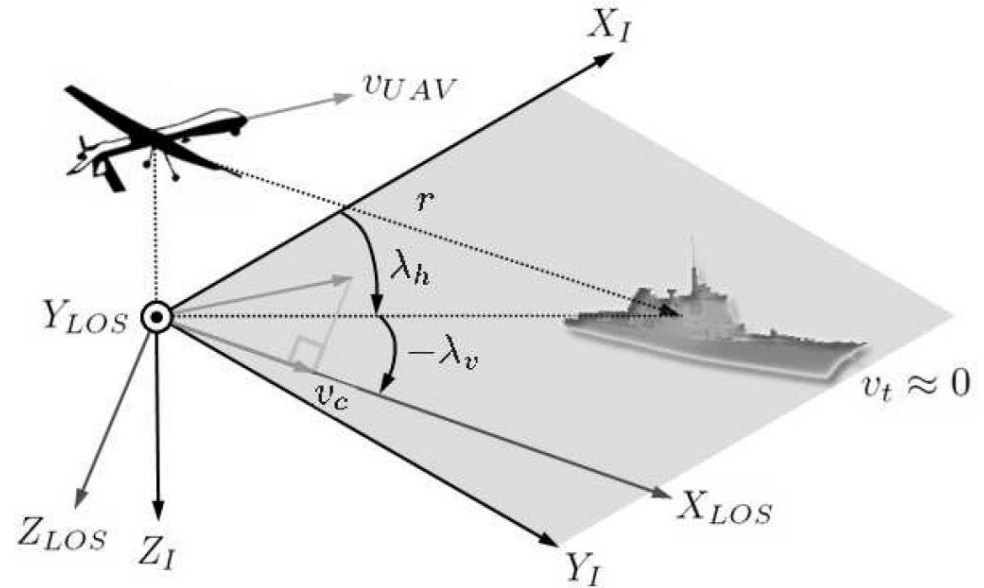
Kinematics for Range Estimation

- Relative Geometry

$$\boxed{v_k^p = \omega_k r_k}$$

$$\tilde{v}_k^p - \delta v_k^p = [\tilde{\omega}_k - \delta \omega_k] r_k$$

measurable



- System Model

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k^c + u_k \\ y_k = [\tilde{H}_k - \Delta H_k] x_k + v_k \end{cases}$$

where

$$x_k = r_k, \quad u_k^d = -\Delta t \cdot \tilde{v}_k^c, \quad u_k = \Delta t \cdot \delta v_k^c, \\ y_k = \tilde{v}_k^p, \quad \tilde{H}_k = \tilde{\omega}_k, \quad \Delta H_k = \delta \omega_k, \quad v_k = \delta v_k^p.$$

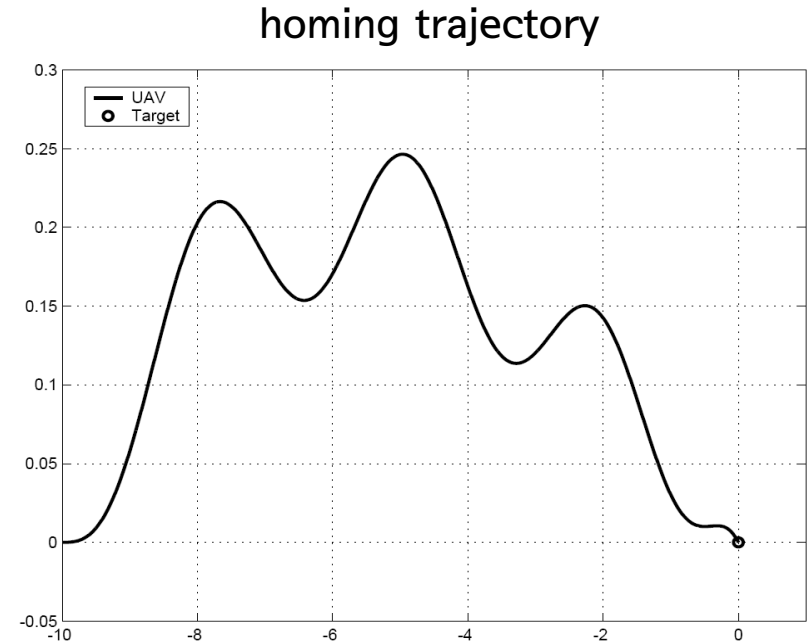
given noise statistics

$$\text{cov}\langle \delta \omega_k, \delta \omega_k \rangle = W_k$$

Simulation Results (1/2)

• Simulation Condition

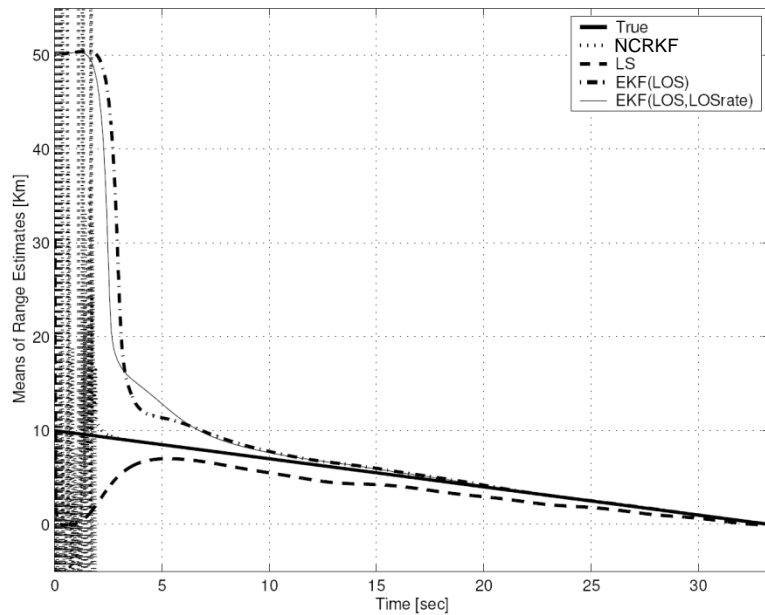
subsystem	simulation parameters
target	fixed position : $[0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T(\text{km})$
UAV	initial position : $[-10.0, \ 0.0, \ 0.0]^T(\text{km})$ magnitude of velocity : $\ v_{UAV}\ = 300.0(\text{m/s})$ initial heading : 0°
guidance	$a_c = -3.0v_c(k)\omega_z(k) + 20 \sin(0.315t_{go})$
noise	variance of LOS meas. noise : $(0.1^\circ)^2$
statistics	variance of LOS rate meas. noise : $(0.1^\circ/s)^2$
EKF	initial guess of rel. pos. : $\hat{p}_0 = -[-49.9 \ 0.58 \ 0.0]^T(\text{km})$ initial guess of rel. vel. : $\hat{v}_0 = [250.0 \ 0.0 \ 0.0]^T(\text{m/s})$ $Q_k = 0.01^2, R_k = \text{diag}((0.1^\circ)^2, (0.1^\circ/s)^2)$
SRKF	$\hat{r}_0 = 50.0(\text{km}), \mathcal{P}_{k k} = 2 \cdot 10^3, W_k = (0.1^\circ/s)^2$



Simulation Results (2/2)

- Range Estimation Performance

Mean of Range Estimates



RMS Errors of Range Estimates

