

1주차 (2차시)-근방, 경계점, 합성함수, 역함수

수학적 표현의 기본인 집합과 함수에 대하여 말씀드리겠습니다.

집합

집합: 수학적 적용이 가능하도록 명확한 조건을 충족하는 개체들의 모임.

예 $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 5, x \text{는 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 키가 큰사람}\}$

본 과정에서 자주 나타나는 대표적인 집합:

- 1) $R = \{x \mid x \text{는 실수}\}$ 2) $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \text{는 실수}\}$
3) $R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \text{는 실수}\}$ 4) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
5) $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 6) $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 7) $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

함수

집합 A 를 정의역, B 를 공역으로 하는 A 에서 B 로의 함수 $f: A \rightarrow B$ 는 A 의 각각의 점 x 를 B 의 어떤 한 점 $f(x)$ 로만 대응시키는 규칙.

$x \in A$: 독립변수, $f(x)$: 종속변수

치역: $x \in A$ 에 대응한 $f(x)$ 값들로만 된 집합 즉, $\{f(x) \mid x \in A\}$.

합성함수

$f: A \rightarrow B$ 와 $g: B \rightarrow C$ 에 대하여 $g \circ f(x) = g(f(x))$ 로 정의한 함수 $g \circ f: A \rightarrow C$ 를 g 와 f 의 합성함수라고 합니다.

단사함수(일대일 함수), 전사함수, 역함수

함수 $f: A \rightarrow B$ 가 단사함수란?

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수(역함수 존재의 필요조건)

함수 $f: A \rightarrow B$ 가 전사함수란?

함수 f 의 치역과 공역이 같은 경우. 즉 $\{f(x) \mid x \in A\} = B$ 를 만족하는 함수

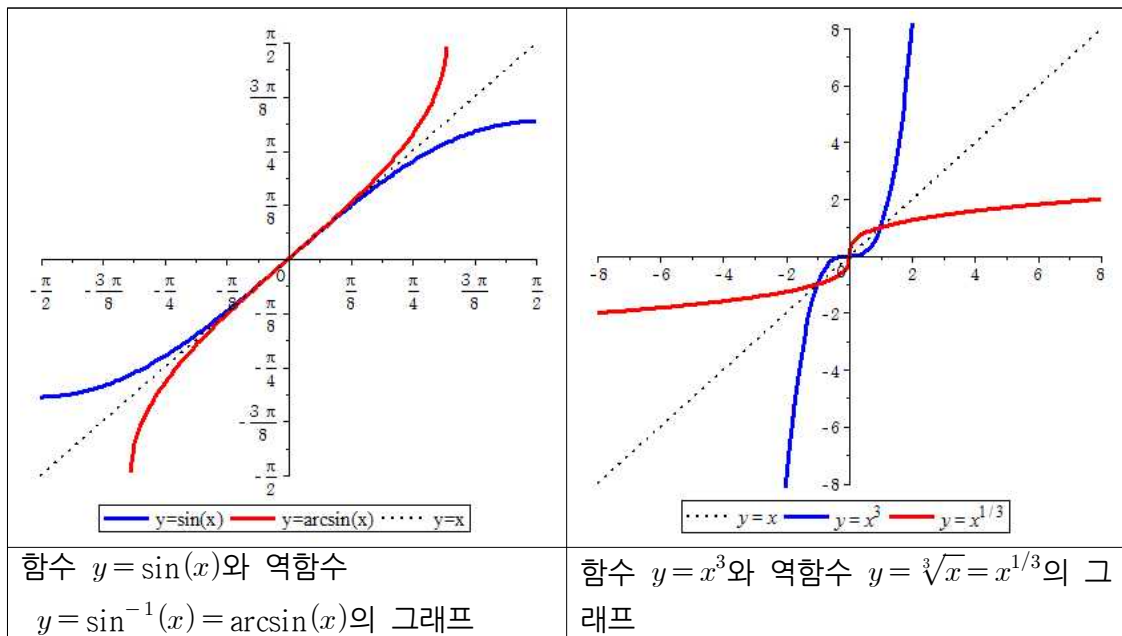
전사함수이고 단사함수인 $f: A \rightarrow B$ 의 경우 f 의 반대방향으로의 적용규칙 즉, 역함수 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 가 정의됩니다.

$$f: x \rightarrow f(x) \text{ 이면 } f^{-1}: f(x) \rightarrow x$$

B 가 치역인 단사함수 $f: A \rightarrow B$ 에 대하여 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 가 f 의 역함수이면 $x \in A, y \in B$ 에 대하여

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{이고 } f(f^{-1}(y)) = y$$

다음의 예시를 통해 역함수는 기존의 함수와 $y=x$ 에 대해 대칭인 것을 관찰할 수 있습니다.



여러 가지 함수들

1) 상수함수 : $f(x) = c$

2) 다항함수 : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$,

$$f(x) = x^a \text{ (} a \text{는 실수)}$$

3) 지수함수 : $f(x) = a^x$

4) 로그함수 : $f(x) = \log_a x$

5) 삼각함수 : $f(x) = \cos x, \sin x, \tan x, \sec x, \csc x, \cot x$

6) 역삼각함수 : $f(x) = \sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$

7) 쌍곡함수 : $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.