Taller #3
Sistemas en Cascada

José Daniel Martínez Cáceres
e-mail: josedaniel.martinez@uptc.edu.co
Carolina Mesa Martínez
e-mail: carolina.mesa@uptc.edu.co
Deisy Viviana Orduz Nuñez
e-mail: deisy.orduz@uptc.edu.co

Para cada uno de los casos de los sistemas en cascada encontrar la entropía de los sistemas con verificación.

1.

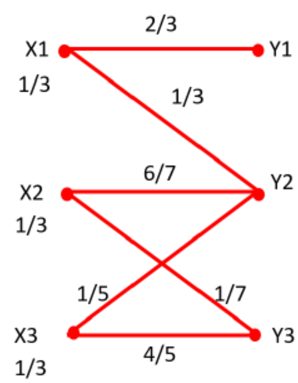


Figura 1. Modelo 1.

- **Probabilidades de entrada:**

$$P(X1) = P(X2) = P(X3) = \frac{1}{3}$$

- **Entropía de entrada:**

$$H(X) = \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) = 1.587$$

- **Probabilidad de Y:**

$$P(Y1) = P(X1) * P\left(\frac{Y1}{X1}\right) = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(Y2) = P(X1) * P\left(\frac{Y2}{X1}\right) + P(X2) * P\left(\frac{Y2}{X2}\right) + P(X3) * P\left(\frac{Y2}{X3}\right) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{6}{7} + \frac{1}{3} * \frac{1}{5} = \frac{146}{315}$$

$$P(Y3) = P(X2) * P\left(\frac{Y3}{X2}\right) + P(X3) * P\left(\frac{Y3}{X3}\right) = \frac{1}{3} * \frac{1}{7} + \frac{1}{3} * \frac{4}{5} = \frac{11}{35}$$

- **Entropía de salida:**

$$H(Y) = \frac{2}{9}\log_2\left(\frac{1}{\frac{2}{9}}\right) + \frac{146}{315}\log_2\left(\frac{1}{\frac{146}{315}}\right) + \frac{11}{35}\log_2\left(\frac{1}{\frac{11}{35}}\right) = 1.5212$$

- **Matriz condicional:**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} Y1 & Y2 & Y3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6/7 & 1/7 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{array} \end{array}$$

La suma de cada una de las filas de la matriz es igual a 1.

- **Matriz de intersección:**

Aplicamos la siguiente fórmula para calcular la matriz de intersección, $P(X, Y) = P(X) * P(Y/X)$

$$P(X,Y) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} Y1 & Y2 & Y3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 2/7 & 1/21 \\ 0 & 1/15 & 4/15 \end{pmatrix} \begin{array}{c} = 1/3 \\ = 1/3 \\ = 1/3 \end{array} \Bigg\} \\ & \begin{array}{ccc} \frac{2}{9} & \frac{146}{315} & \frac{11}{35} \end{array} \Big\} \end{array}$$

La suma de cada una de las filas es igual a la probabilidad de X (entrada).

La suma de cada una de las columnas es igual a la probabilidad de Y (salida).

Ahora dividimos la matriz que se obtuvo anteriormente entre P (Y),

$$P(X/Y) = \frac{P(X)}{P(Y)} * P(Y/X)$$

$$P(X/Y) = \begin{pmatrix} 1 & 35/146 & 0 \\ 0 & 45/73 & 5/33 \\ 0 & 21/146 & 28/33 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} \Big\}$$

La suma de cada una de las columnas es igual a 1.

- **Entropía H(X/Y), H(Y/X):**

$$H(X/Y) = \sum P(X,Y) * \log_2\left(\frac{1}{P(X/Y)}\right)$$

$$H(X/Y) = \frac{2}{9}\log_2\left(\frac{1}{1}\right) + \frac{1}{9}\log_2\left(\frac{1}{35/146}\right) + \frac{2}{7}\log_2\left(\frac{1}{45/73}\right) + \frac{1}{21}\log_2\left(\frac{1}{5/33}\right) + \frac{1}{15}\log_2\left(\frac{1}{21/146}\right) + \frac{4}{15}\log_2\left(\frac{1}{28/33}\right) = 0.81 \text{ bits/símbolo}$$

$$H(Y/X) = H(Y) - H(X) + H(X/Y) = 1.5212 - 1.587 + 0.81 = 0.7439 \ \ bits/simbolo$$

- **Información mutua:**

$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H(X/Y) = 1.587 - 0.81 = 0.77 \ bits/simbolo$$

2.

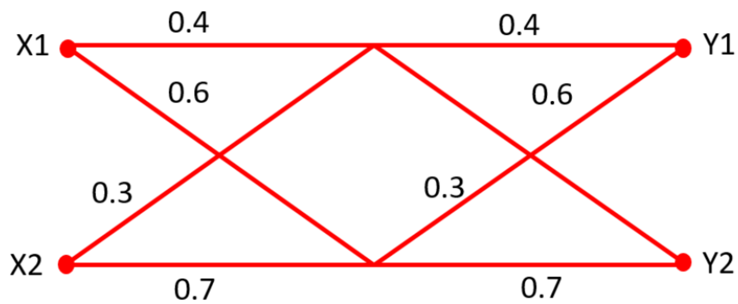


Figura 2. Modelo 2.

- **Probabilidades de entrada:**

$P(X1) = 0.6$
$P(X2) = 0.4$

Como los canales son simétricos se realiza lo siguiente:

- **Matriz condicional:**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Y1 & Y2 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}^2 \end{array} = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.66 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = 1 \\ = 1 \end{array}$$

La suma de cada una de las filas de la matriz es igual a 1.

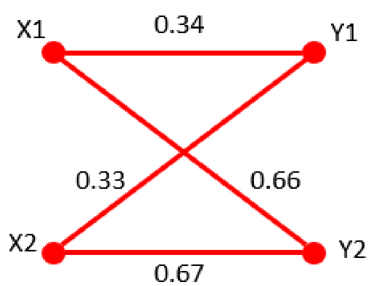


Figura 3. Modelo 2 simplificado.

- **Entropía de entrada:**

$$H(X) = 0.6 * \log_2\left(\frac{1}{0.6}\right) + 0.4 * \log_2\left(\frac{1}{0.4}\right) = 0.97095\ bits/simbolo$$

- **Probabilidad de Y:**

$$P(Y1) = P(X1) * P\left(\frac{Y1}{X1}\right) + P(X2) * P\left(\frac{Y1}{X2}\right) = 0.6 * 0.34 + 0.4 * 0.33 = 0.336$$

$$P(Y2) = P(X1) * P\left(\frac{Y2}{X1}\right) + P(X2) * P\left(\frac{Y2}{X2}\right) = 0.4 * 0.67 + 0.6 * 0.66 = 0.664$$

- **Entropía de salida:**

$$H(Y) = 0.336 * \log_2\left(\frac{1}{0.336}\right) + 0.664 * \log_2\left(\frac{1}{0.664}\right) = 0.92093\ bits/simbolo$$

- **Matriz de intersección:**

Aplicamos la siguiente fórmula para calcular la matriz de intersección, $P(X,Y) = P(X) * P(Y/X)$

$$P(X,Y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Y1 & Y2 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array} & \begin{pmatrix} 51/250 & 99/250 \\ 33/250 & 67/250 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} = 0.6 \\ = 0.4 \end{array} \Big\}$$ La suma de cada una de las filas es igual a la probabilidad de X (entrada).

$$0.336 \qquad 0.664$$ } La suma de cada una de las columnas es igual a la probabilidad de Y (salida).

Ahora dividimos la matriz que se obtuvo anteriormente entre P (Y),

$$P(X/Y) = \frac{P(X)}{P(Y)} * P(Y/X)$$

$$P(X/Y) = \begin{pmatrix} 0.607 & 0.596 \\ 0.393 & 0.404 \end{pmatrix}$$

$$1 \qquad 1$$ } La suma de cada una de las columnas es igual a 1.

- **Entropía H(X/Y), H(Y/X):**

$$H(X/Y) = \sum P(X,Y) * \log_2\left(\frac{1}{P(X/Y)}\right)$$

$$H(X/Y) = \frac{51}{250}\log_2\left(\frac{1}{0.607}\right) + \frac{99}{250}\log_2\left(\frac{1}{0.596}\right) + \frac{33}{250}\log_2\left(\frac{1}{0.393}\right) + \frac{67}{250}\log_2\left(\frac{1}{0.404}\right) = 0.97089\ bits/simbolo$$

$$H(Y/X) = H(Y) - H(X) + H(X/Y) = 0.92093 - 0.97095 + 0.97089 = 0.92087\ \ bits/simbolo$$

- **Información mutua:**

$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H(X/Y) = 0.97095 - 0.97089 = 0.00006\ bits/simbolo$$

3.

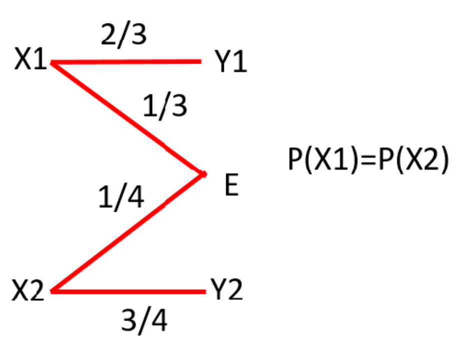


Figura 4. Modelo 4

- **Probabilidades de entrada:**

$$P(X1) = P(X2) = \frac{1}{2}$$

- **Entropía de entrada:**

$$H(X) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 1$$

- **Probabilidad de Y:**

$$P(Y1) = P(X1) * P\left(\frac{Y1}{X1}\right) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = P(X1) * P\left(\frac{E}{X1}\right) + P(X2) * P\left(\frac{E}{X2}\right) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{7}{24}$$

$$P(Y2) = P(X2) * P\left(\frac{Y2}{X2}\right) = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

- **Entropía de salida:**

$$H(Y) = \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) + \frac{7}{24}\log_2\left(\frac{1}{\frac{7}{24}}\right) + \frac{3}{8}\log_2\left(\frac{1}{\frac{3}{8}}\right) = 1.57743$$

- **Matriz condicional:**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Y1 & E & Y3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{array}$$

La suma de cada una de las filas de la matriz es igual a 1.

- **Matriz de intersección:**

Aplicamos la siguiente fórmula para calcular la matriz de intersección, $P(X,Y) = P(X) * P(Y/X)$

$$P(X,Y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Y1 & E & Y3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \end{array} \left.\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array}\right\}$$

La suma de cada una de las filas es igual a la probabilidad de X (entrada).

$1/3 \quad 7/24 \quad 3/8$ → La suma de cada una de las columnas es igual a la probabilidad de Y (salida).

Ahora dividimos la matriz que se obtuvo anteriormente entre P (Y),

$$P(X/Y) = \frac{P(X)}{P(Y)} * P(Y/X)$$

$$P(X/Y) = \begin{pmatrix} 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 3/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \quad 1 \quad 1$ } La suma de cada una de las columnas es igual a 1.

- **Entropía H(X/Y), H(Y/X):**

$$H(X/Y) = \sum P(X,Y) * \log_2\left(\frac{1}{P(X/Y)}\right)$$

$$H(X/Y) = 1/3\log_2\left(\frac{1}{1}\right) + 1/6\log_2\left(\frac{1}{4/7}\right) + 1/8\log_2\left(\frac{1}{3/7}\right) + 3/8\log_2\left(\frac{1}{1}\right) = 0.287358 \text{ bits/símbolo}$$

$$H(Y/X) = 1/3\log_2\left(\frac{1}{2/3}\right) + 1/6\log_2\left(\frac{1}{1/3}\right) + 1/8\log_2\left(\frac{1}{1/4}\right) + 3/8\log_2\left(\frac{1}{3/4}\right) = 0.864787 \text{ bits/símbolo}$$

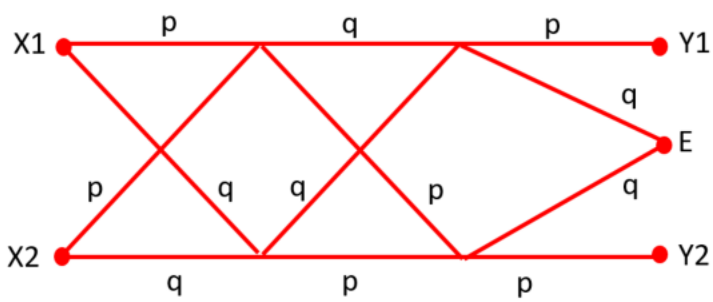
Hallando $H(Y/X)$ teniendo en cuenta la definición de información mutua

$$H\left(\frac{Y}{X}\right) = H(Y) - H(X) + H\left(\frac{X}{Y}\right) = 1.57743 - 1 + 0.287358 = 0.864788 \;\; bits/simbolo$$

- **Información mutua:**

$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H(X/Y) = 1 - 0.287358 = 0.712642 \; bits/simbolo$$

4.



- **Probabilidades de entrada:**

$$P(X1) = P(X2) = \frac{1}{2}$$

$$p + q = 1$$

- **Entropía de entrada:**

$$H(X) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 1$$

- **Probabilidad de Y:**

$$P(Y1) = P(X1) * [p^2q + q^2p] + P(X2) * [p^2q + q^2p] \; = [p+q]\, pq$$

$$P(E) = P(X1) * [2q^2p + q^3 + p^2q] + P(X2) * [2q^2p + q^3 + p^2q] = [2q^2p + q^3 + p^2q]$$

$$P(Y2) = P(X1) * [p^3 + p^2 q] + P(X2) * [p^3 + p^2 q] = [p + q]\, p^2$$

- **Entropía de salida:**

$$H(Y) = P(Y1) \log_2 \left(\frac{1}{P(Y1)}\right) + P(E) \log_2 \left(\frac{1}{P(E)}\right) + P(Y2) \log_2 \left(\frac{1}{P(Y2)}\right)$$

- **Matriz condicional:**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Y1 & E & Y3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array} & \begin{pmatrix} [p+q]\, pq & [2q^2 p + q^3 + p^2 q] & [p+q]\, p^2 \\ [p+q]\, pq & [2q^2 p + q^3 + p^2 q] & [p+q]\, p^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La suma de cada una de las filas de la matriz es igual a 1.

- **Matriz de intersección:**

Aplicamos la siguiente fórmula para calcular la matriz de intersección, $P(X,Y) = P(X) * P(Y/X)$

$$P(X,Y) = \begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array} \begin{pmatrix} P(X1) * [p^2 q + q^2 p] & P(X1) * [2q^2 p + q^3 + p^2 q] & P(X1) * [p^3 + p^2 q] \\ P(X1) * [p^2 q + q^2 p] & P(X1) * [2q^2 p + q^3 + p^2 q] & P(X1) * [p^3 + p^2 q] \end{pmatrix}$$

Ahora dividimos la matriz que se obtuvo anteriormente entre P (Y),

$$P(X/Y) = \frac{P(X)}{P(Y)} * P(Y/X)$$

$$P(X/Y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\,\} \end{array}$$

La suma de cada una de las columnas es igual a 1.

- **Entropía H(X/Y), H(Y/X):**

$$H(X/Y) = \sum P(X,Y) * \log_2 \left(\frac{1}{P(X/Y)}\right)$$

$$H(X/Y) = \frac{1}{2} * pq * \log_2(2) + \frac{1}{2} * q * \log_2(2) + \frac{1}{2} * p^2 * \log_2(2) + \frac{1}{2} * pq * \log_2(2) + \frac{1}{2} * q * \log_2(2) + \frac{1}{2} * p^2 * \log_2(2) = 1\ bit/simbolo$$

Hallando $H(Y/X)$ teniendo en cuenta la definición de información mutua

$$H\left(\frac{Y}{X}\right) = H(Y) - H(X) + H\left(\frac{X}{Y}\right) = pq * \log_2 \left(\frac{1}{pq}\right) + q * \log_2 \left(\frac{1}{p^2}\right) + p^2 * \log_2 \left(\frac{1}{P(Y2)}\right)$$

- **Información mutua:**

$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H(X/Y) = 1 - 1 = 0\ bits/simbolo$$