

UNIDAD II

2 MODELAJE DE SISTEMAS

Uno de los objetivos del curso de modelamiento de sistemas es proporcionar al estudiante las herramientas para modelar, analizar sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) y diseñar controladores analógicos para diferentes sistemas.

2.1 Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI):

Las características principales que permiten identificar un sistema lineal invariante en el tiempo son:

- Están descritos por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.
- Siempre responden de igual forma ante el mismo estímulo.
- Cumplen con el teorema de la superposición.

En esta unidad se desarrollarán cinco formas de representar el modelo matemático de una planta o sistema, entre estas están i) ecuaciones diferenciales, ii) funciones de transferencia, diagramas de bloques, diagramas de flujo y espacio de estados. Para poder realizar cualquiera de estas representaciones matemáticas del modelo, es necesario analizar con leyes físicas el sistema o la planta de interés.

En la práctica realizar un modelo requiere de gran conocimiento de la planta y de un trabajo interdisciplinario que permita conocer detalles y profundizar en las diversas dinámicas que la conforman, hay sistemas tan complejos que obtener un modelo para estos puede convertirse en un reto que se afronta a través de trabajos de grado, tesis de maestría o incluso a través de tesis de doctorado y trabajos de posdoctorado.

A continuación, se presentan algunas generalidades que permiten modelar sistemas LTI, mecánicos, eléctricos, electromecánicos, térmicos y de nivel y caudal, con ecuaciones diferenciales.

2.2 Sistemas Mecánicos

En ésta sección se analizarán los sistemas mecánicos traslacionales y rotacionales, utilizando la segunda ley de Newton, "La aceleración en cualquier cuerpo rígido es directamente proporcional al desequilibrio de fuerza que actúe sobre éste e inversamente proporcional a la masa del cuerpo"

$$\sum F = m \cdot a \quad \text{Ec. 2.1}$$

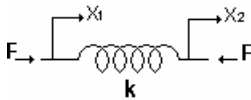
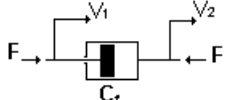
donde ΣF es la sumatoria de Fuerzas que actúan sobre el cuerpo en una dirección específica, ' m ' es la masa del cuerpo y ' a ' la aceleración resultante en esa dirección; de manera análoga para sistemas rotacionales la segunda ley de Newton es la que aparece en Ec. 2.2.

$$\Sigma T = J \cdot \alpha \quad \text{Ec. 2.2}$$

donde ΣT es la sumatoria de torques que actúan alrededor de un eje dado, ' J ' es el momento de inercia alrededor de dicho eje y ' α ' es la aceleración angular.

En la Tabla 2.1 se encuentra descritas las variables, los parámetros y la definición de las fuerzas que hacen parte de un sistema mecánico. Los resortes son elementos que se deforman proporcionalmente a la fuerza que se les aplique, en un sistema traslacional, o al par, en un sistema rotacional. Los amortiguadores son elementos que disipan energía en forma de calor por eso también se conocen como resistencias mecánicas.

Tabla 2.1 Elementos que conforman un sistema mecánico

Movimiento Traslacional				Movimiento Rotacional			
Elemento	Parámetro Asociado	Variable	Fuerza Asociada	Elemento	Parámetro Asociado	Variable	Par Asociado
Resorte Lineal	Constante de elongación ' k ', $\frac{N}{m}$	Posición lineal ' $x(t)$ '	 $F = k(X_1 - X_2)$	Resorte de Torsión	Constante de torsión ' k_r ', $\frac{Nm}{rad}$	Posición angular ' $\theta(t)$ '	$T = k_r(\theta_1(t) - \theta_2(t))$
Amortiguador Traslacional	Coefficiente de fricción viscosa ' C_f ', $\frac{N}{m/s}$ (Resistencia mecánica)	Velocidad lineal ' $v(t)$ '	 $F = C_f(V_1 - V_2)$	Amortiguador Rotacional	Coefficiente de fricción viscosa ' b ', $\frac{Nm}{rad/s}$ (Resistencia mecánica)	Velocidad angular ' $\omega(t)$ '	$T = b(\omega_1(t) - \omega_2(t))$
Masa	' m ', Kg.	Aceleración lineal ' $a(t)$ '	$\Sigma F = ma(t)$	Momento de Inercia	' J '	Aceleración angular ' $\alpha(t)$ '	$\Sigma T = J\alpha(t)$

2.2.1 Sistemas Traslacionales:

En el análisis de sistemas mecánicos traslacionales no se va a tener en cuenta el peso ' mg ', solamente se realizará el análisis de la dinámica del sistema a partir del reposo, ya sea para observar la interacción de sus elementos o los cambios en las variables del sistema debidos a fuerzas externas que hagan salir el conjunto de éste estado.

A continuación, se presenta el análisis de un sistema Masa – Resorte.

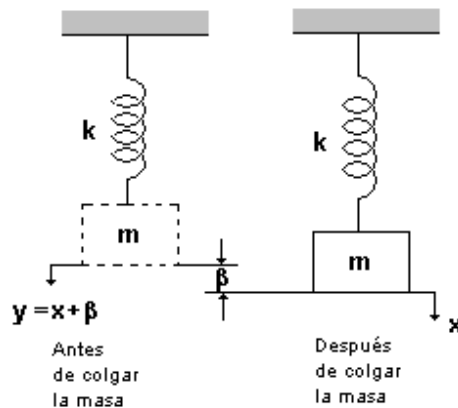
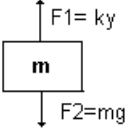


Figura 2.1. Sistema masa-resorte

Como se observa en la Figura 2.1 al colgar la masa hay una pequeña elongación del resorte que contrarresta el peso y para el análisis interesa la dinámica del sistema masa-resorte una vez los dos elementos están unidos

Tabla 2.2 Análisis del sistema masa-resorte

Antes de Colgar la Masa	Después de Colgar la Masa
<p>Existen dos fuerzas la que ejerce el resorte F_1 y el peso del cuerpo F_2</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Por tanto analizando el diagrama de cuerpo libre se tendría que $\sum F = m \cdot a$</p> <p>$F_1 + F_2 = m \cdot a$, donde $a = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ $y(t)$ es la posición inicial.</p> <p>La Ecuación diferencial (Modelo matemático del sistema) sería:</p> $m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -ky(t) + mg \quad \text{Ec. 2.3}$	<p>Pero como $y(t) = x(t) + \beta$, reemplazando en la ecuación Ec 2.3 quedaría:</p> $m \left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right] = -k(x(t) + \beta) + mg = kx(t) - k\beta + mg$ <p>Ec 2.4</p> <p>La elongación del resorte al colgar la masa cambio la posición en una distancia constante de 'β' y el cuerpo quedo en reposo lo que significa que $mg = k\beta$ y $\frac{d^2 \beta}{dt^2} = 0$ por tanto la ecuación quedaría de la forma $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$ ordenándola</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0$ </div> <p style="text-align: right;">Ec. 2.5</p> <p>y la dinámica de interés ahora es con respecto a la posición $x(t)$ y no a $y(t)$ (antes de colgar la masa).</p> <p>Nota:</p> <p>En los ejercicios posteriores el análisis se hará a partir de ésta consideración y por consiguiente no se tendrá en cuenta el peso del cuerpo.</p>

2.2.2 Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

En esta ocasión el análisis se realiza para obtener el modelo matemático de un sistema masa-resorte–amortiguador cuando éste es excitado por una fuerza externa.

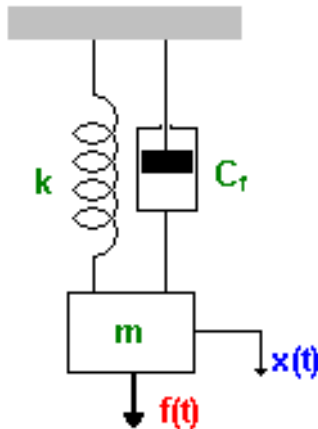


Figura 2.2 Sistema masa-resorte-amortiguador

Como se observa en la Figura 2.2 la señal excitadora es la fuerza $f(t)$ y como salida la señal de posición $x(t)$. Las señales de entrada o excitadoras son las variables independientes, para este caso la fuerza, y las de salida son variables dependientes como por ejemplo la posición, la velocidad o la aceleración de la masa m .

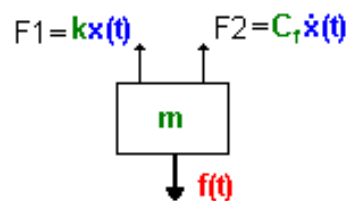


Figura 2.3 Diagrama de cuerpo libre sistema masa-resorte-amortiguador

En la Figura 2.3 se observan las fuerzas que actúan sobre la masa ' m ', se tienen tres fuerzas el estímulo $f(t)$ y las fuerzas que ejercen el resorte y el amortiguador, por tanto:

$$\sum F = m.a = f(t) - F1 - F2$$

El estímulo aplicado se encuentra en sentido contrario a las fuerzas $F1$ y $F2$. Por tanto, reemplazando $F1$ y $F2$ en términos de la posición, la ecuación quedaría:

$$f(t) - kx(t) - C_f \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Ordenándola se tendría un modelo matemático del sistema representado por una ecuación diferencial.

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + C_f \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t) \quad \text{Ec. 2.6}$$

m , C_f y K son parámetros del sistema, estos dependen de las características físicas del sistema, por tanto, se pueden medir directamente u obtenerse en el laboratorio. $x(t)$ es la variable de salida 'posición' y $f(t)$ es la variable de entrada.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

En algunas ocasiones, al analizar sistemas mecánicos, el sentido de las fuerzas no coincide con el que se presenta en los textos guías. Sin embargo, al igual que en los circuitos eléctricos, si una variable se toma en sentido contrario a cómo actúa realmente, al resolver la ecuación diferencial, daría negativa.

A continuación, se presenta un método para definir el sentido de las fuerzas y hacer más sencillo el análisis:

- i. Si existe estímulo externo tómelo como positivo.
- ii. Recuerde que hay dos puntos de no movimientos –nombre para la referencia-, el techo y el piso.
- iii. Coloque flechas indicando el sentido de las fuerzas. Hágalo con respecto a cada masa, o sea, por cada masa dibuje un diagrama de cuerpo libre.
- iv. Todas las fuerzas son positivas. Si una fuerza depende de dos posiciones coloque como positiva la que está en la punta de la flecha y como negativa la que se encuentre en la cola de la flecha.
- v. Por último, escriba la ecuación y ordénela.

Ejemplo 1: Para el siguiente sistema masa-resorte-amortiguador montado sobre un carro obtenga la ecuación diferencial que describe su dinámica, tomando como salida la posición de la masa $y(t)$ y como entrada la posición del carro $u(t)$.

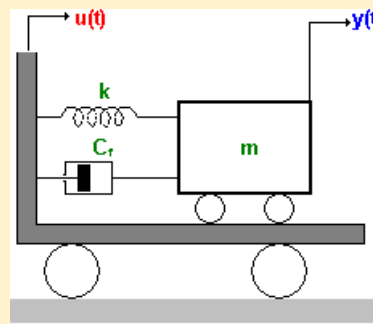


Figura 2.4 sistema masa-resorte-amortiguador sobre un carro

1. No hay estímulo externo de fuerza, la entrada es la posición del carro; en ésta ocasión no interesa como cambia la posición del carro con respecto a un estímulo

externo, sino la dinámica de la posición de la masa dentro del carro con respecto a la del carro.

- El diagrama de cuerpo libre quedaría como lo muestra la Figura 2.5 (No se tiene en cuenta el peso).

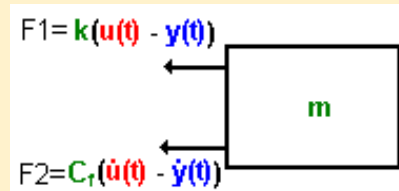


Figura 2.5 Diagrama de cuerpo libre sistema masa-resorte-amortiguador sobre carro

- Observe en la Figura 2.5 las flechas se colocaron en el sentido de las fuerzas, como dependen de dos posiciones éstas se establecen como en la tabla 2.1, la punta de la flecha esta hacia la posición $u(t)$ y la cola hacia $y(t)$, por lo cual las fuerzas se describen como aparece en el gráfico.
- Ahora aplicando segunda ley de Newton, la ecuación: $\sum F = m.a = F1 + F2 = m.a$ reemplazando el valor de $F1$ y $F2$ se tendría que:

$$F1 + F2 = C_f \left[\frac{du(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right] + k(u(t) - y(t)) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \text{ ordenándola:}$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + C_f \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = C_f \frac{du(t)}{dt} + Ku(t) \quad \text{Ec 2.7}$$

La Ecuación diferencial que aparece en Ec 2.7 es la que describe la dinámica del sistema, $y(t)$ es la variable de salida 'posición' y $u(t)$ es la variable de entrada.

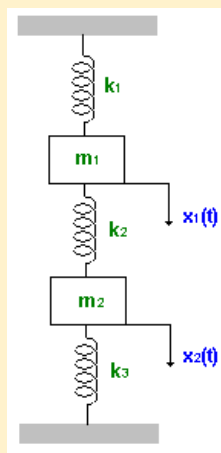


Figura 2.6 Sistema mecánico de dos grados de libertad

Ejemplo 2: Para el sistema que aparece en Figura 2.6 obtenga las ecuaciones que describen su dinámica.

1. No hay estímulo excitador.
2. Los puntos de no movimiento (posición cero) son el techo y el piso.
3. Los diagramas de cuerpo libre de las masas quedan como aparecen en la Figura 2.7.

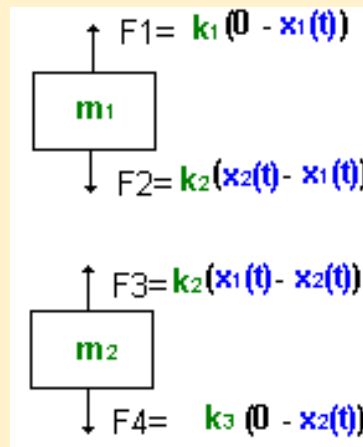


Figura 2.7. Diagramas de cuerpo libre sistema mecánico de dos grados de libertad

Como son dos masas es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre especificando el sentido de las fuerzas en cada una.

4. Las fuerzas dependen de dos posiciones; se coloca como positiva la de la punta de la flecha y como negativa la de la cola de la flecha. En éste ejemplo los puntos de no movimiento o posición cero deben tenerse en cuenta, para el caso de F_1 en la masa ' m_1 ' que es la fuerza ejercida por el resorte con constante de elongación ' k_1 ' quedaría $F_1 = k_1(0 - x_1(t))$ porque la posición que está indicando la punta de la flecha es cero y la que está indicando la cola es $x_1(t)$. Obsérvese también que la fuerza $F_2 = -F_3$; sin embargo, es mejor definir fuerzas por cada masa y así evitar confusiones.
5. En éste ejemplo hay dos ecuaciones por cada masa, una $\sum F = m_1 a_1 = F_1 + F_2 = m_1 a_1$ y $\sum F = m_2 a_2 = F_3 + F_4 = m_2 a_2$.

Reemplazando los valores de las fuerzas en términos de los parámetros quedarían:

$$k_1(0 - x_1(t)) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) = m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \quad \text{y} \quad k_2(x_1(t) - x_2(t)) + k_3(0 - x_2(t)) = m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2}$$

Las Ec 2.8 y 2.9 describen la dinámica del sistema.

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + k_1 x_1(t) + k_2 x_1(t) = k_2 x_2(t) \quad \text{Ec 2.8}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + k_2 x_2(t) + k_3 x_2(t) = k_2 x_1(t) \quad \text{Ec 2.9}$$

2.2.3 Sistemas Rotacionales:

Para los sistemas rotacionales el análisis se realiza a partir de la sumatoria de torques que actúan sobre un eje.

- Sistema rotor montado en cojinetes

El sistema que aparece en la Figura 2.8 muestra la situación en la que se desea mover un rotor, pero existe una inercia inicial y los cojinetes en los cuales está montado presentan resistencia mecánica. Significa que el torque externo aplicado debe ser suficiente para vencer la inercia y la resistencia mecánica.

Utilizando la segunda ley de Newton para sistemas rotacionales (Ec 2.2) se puede obtener la ecuación que determina la dinámica de éste sistema.

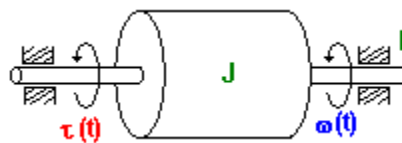


Figura 2.8 Sistema rotor montado en cojinetes.

En esta oportunidad como señal excitadora está el torque $\tau(t)$, como salida se desea observar la velocidad angular $\omega(t)$ (también se puede hacer el análisis con respecto a la posición o la aceleración del rotor, se plantea con respecto a una variable y las otras se pueden obtener a través de su equivalencia), y como parámetros del sistema están el momento de inercia ' J ' y la resistencia mecánica de los cojinetes ' b '; entonces aplicando la Ec 2.2 se tendría:

$$\sum T = J\alpha = \tau(t) - b\omega(t)$$

Existen dos torques, el torque excitador y el torque de frenado que coloca la resistencia mecánica. Por tanto, ordenando la ecuación se tiene que:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = \tau(t) \text{ Ec 2.10}$$

La Ecuación 2.10 contiene el modelo matemático que describe la dinámica del sistema rotor montado en cojinetes. La Ec. 2.11 es la misma dinámica representada en términos de la posición angular.

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} = \tau(t) \text{ Ec 2.11}$$

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

En los sistemas mecánicos rotacionales como el descrito en la Figura 2.8, también se puede hablar de la constante de torsión ' k_r ' cuando se tiene un eje flexible que presente estas características, generalmente los ejes de los sistemas rotacionales son rígidos y este

parámetro se desprecia. Sin embargo, si se tiene en cuenta, el modelo matemático de la dinámica del sistema quedaría:

$$\sum T = J\alpha = \tau(t) - b\omega(t) - k_r \int \omega(t)$$

ordenando la ecuación,

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) + k_r \int \omega(t) dt = \tau(t) \quad \text{Ec. 2.12}$$

en términos de la posición

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + k_r \theta(t) = \tau(t) \quad \text{Ec. 2.13}$$

2.3 Sistemas Eléctricos

En ésta sección se recordarán dos ejemplos de sistemas eléctricos, con el fin de utilizarlos posteriormente en el análisis de sistemas mecánicos por analogías mecánicas-eléctricas; sin entrar a hacer una descripción profunda en el análisis de circuitos.

2.3.1 Circuito RLC en serie:

Para obtener el modelo de un circuito RLC en serie, se va a utilizar la ley de voltaje (mallas) de Kirchhoff. En la Figura 2.9 aparece el circuito y se describen las caídas de tensión en cada uno de sus elementos

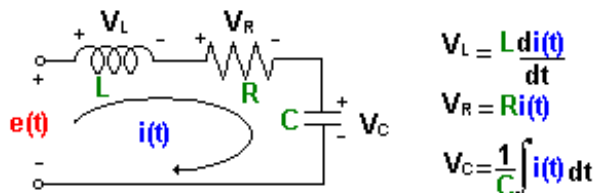


Figura 2.9 Circuito RLC en serie

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se tendría que:

$$e(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_C(t)$$

reemplazando los voltajes en términos de sus parámetros y la corriente, el modelo del sistema quedaría como aparece en la Ec. 2.14

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad \text{Ec. 2.14}$$

Teniendo en cuenta que $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, la dinámica del sistema se puede expresar en términos de la carga (Ec. 2.15)

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = e(t) \quad \text{Ec. 2.15}$$

2.3.2 Circuito RLC en paralelo:

Para obtener la ecuación diferencial que describe la dinámica de un circuito RLC en paralelo, se va a utilizar la ley de corrientes (nodos) de Kirchhoff. En la Figura 2.10 aparece el circuito y se describen las corrientes que circulan a través de cada uno de sus elementos.

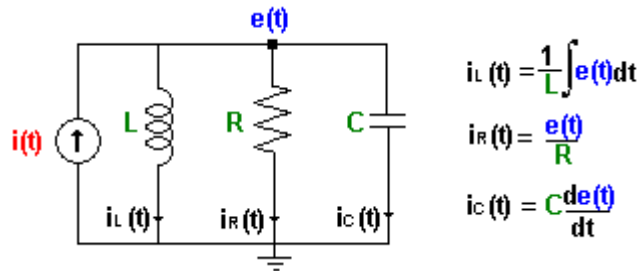


Figura 2.10 Circuito RLC en paralelo

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff se tiene que:

$$i(t) = i_C(t) + i_R(t) + i_L(t)$$

Reemplazando las corrientes en términos de sus parámetros y del voltaje, la ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema tendría la forma que aparece en la Ec. 2.16

$$C \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{R} e(t) + \frac{1}{L} \int e(t) dt = i(t) \quad \text{Ec. 2.16}$$

como $e(t) = \frac{d\phi}{dt}$, en términos del flujo magnético el modelo del sistema quedaría:

$$C \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\phi(t)}{dt} + \frac{1}{L} \phi(t) = i(t) \quad \text{Ec. 2.17}$$

2.4 Analogías entre los sistemas Mecánicos y Eléctricos

El análisis de sistemas mecánicos se puede realizar utilizando las analogías eléctricas-mecánicas que permiten obtener un circuito equivalente eléctrico de un sistema mecánico. Se dice que dos sistemas son "análogos" si sus modelos matemáticos son similares.

Los modelos matemáticos obtenidos anteriormente y representados en las ecuaciones Ec. 2.6, Ec. 2.13, Ec. 2.15 y Ec. 2.17 son modelos análogos y todos tienen la forma:

$$P_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + P_2 \frac{dy(t)}{dt} + P_3 y(t) = u(t) \quad \text{Ec. 2.18}$$

donde P_1 , P_2 y P_3 son parámetros físicos medibles de la planta o el sistema de interés, $y(t)$ es la variable de salida y $u(t)$ la variable excitadora o estímulo.

Tabla 2.3 Modelos análogos Mecánicos – Eléctricos

Clase de sistema	Ecuación Diferencial (modelo matemático)	Parámetro P_1	Parámetro P_2	Parámetro P_3	Señal de salida $y(t)$	Señal de entrada $u(t)$
Mecánico Traslacional	$P_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + P_2 \frac{dy(t)}{dt} + P_3 y(t) = u(t)$					
Mecánico Traslacional	$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + C_f \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$	m Masa	C_f Resistencia mecánica	k Constante de elongación	$x(t)$ Posición lineal	$f(t)$ Fuerza
Mecánico Rotacional	$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + k_r \theta(t) = \tau(t)$	J Momento de inercia	b Resistencia mecánica	k_r Constante de torsión	$\theta(t)$ Posición angular	$\tau(t)$ Torque
Eléctrico RLC serie	$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = e(t)$	L Inductancia	R Resistencia	$1/C$ Inverso de la Capacitancia	$q(t)$ Carga eléctrica	$e(t)$ Voltaje
Eléctrico RLC paralelo	$C \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \phi(t) + \frac{1}{L} \int \phi(t) dt = i(t)$	C Capacitancia	$1/R$ Conductancia	$1/L$ Inverso de la Inductancia	$\phi(t)$ Flujo magnético	$i(t)$ Corriente

Existen dos tipos de analogías. La analogía directa conocida con el nombre de fuerza-corriente o de movilidad y la analogía impedancia (indirecta) o de fuerza-voltaje.

La analogía directa recibe éste nombre porque a través de un método -que se describirá posteriormente-, se puede obtener el circuito eléctrico equivalente 'directamente' del sistema mecánico; en éste caso la señal excitadora es una fuente de corriente (paralelo). La analogía que da como resultado un circuito eléctrico alimentado con fuente de voltaje (serie) se obtiene a partir del circuito de corriente, por eso se conoce con el nombre de analogía indirecta.

En algunos casos a pesar de haber obtenido el circuito de analogía directa se prefiere pasar a fuerza-voltaje para realizar el análisis, trabajar uno u otro circuito depende de la habilidad en el manejo de las leyes de Kirchhoff, o en general en el análisis de circuitos.

Tabla 2.4 Analogías Eléctricas de movilidad e impedancia para sistemas mecánicos.

Sistema Mecánico		Análogo a:	Sistema Eléctrico	
Traslacional	Rotacional		Analogía Directa Fuerza-corriente (Torque-corriente)	Analogía Indirecta Fuerza-voltaje (Torque – voltaje)
$f(t)$ Fuerza	$\tau(t)$ Torque		$i(t)$ Corriente	$e(t)$ Voltaje
$x(t)$ Posición lineal	$\theta(t)$ Posición angular		$\phi(t)$ Flujo magnético	$q(t)$ Carga eléctrica
$v(t)$ Velocidad lineal	$\omega(t)$ Velocidad angular		$e(t)$ Voltaje	$i(t)$ Corriente
m Masa	J Momento de inercia		C Capacitancia	L Inductancia

C_f Resistencia mecánica	b Resistencia mecánica		$1/R$ Conductancia	R Resistencia
k Constante de elongación	k_r Constante de torsión		$1/L$ Inverso de la Inductancia	$1/C$ Inverso de la Capacitancia

La Tabla 2.4 presenta las analogías de movilidad e impedancia para sistemas mecánicos. Las analogías son utilizadas para el análisis de sistemas mecánicos porque en la formación como Ingenieros Electrónicos es más sencillo analizar un circuito eléctrico que un sistema mecánico.

Los puntos 'de no movimiento' son análogos a la tierra eléctrica en los circuitos. Para sistemas que incluyan palancas, poleas, engranajes, etc., se pueden hacer analogías con transformadores eléctricos.

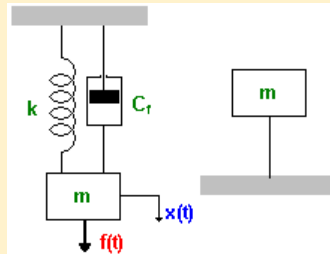
IDEAS COMPLEMENTARIAS...

A continuación, se presenta un método para llevar un sistema mecánico a uno eléctrico. Este método permite obtener la analogía directa, la analogía de impedancia se halla a partir de la directa.

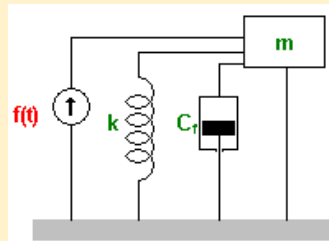
1. Obtener un circuito equivalente mecánico. Para obtener el circuito equivalente mecánico de un sistema mecánico es necesario identificar los puntos 'de no movimiento' y convertirlos en uno solo (generalmente se deja el piso), después se disponen todas las masas con respecto a ese único punto y por último se conectan los demás elementos tal y como aparecen en el sistema a analizar.
2. Reemplazar los elementos mecánicos por sus equivalentes eléctricos, para esto se utiliza la tabla 2.4. Hay que tener en cuenta las unidades de los elementos mecánicos para ser reemplazados por elementos eléctricos de una forma equivalente. Por ejemplo, si hay una masa de 10Kg no se puede colocar un condensador de 10 Faradios, porque en un circuito eléctrico comúnmente no se tienen dimensiones de Capacitancia de ese orden, se podría emular la masa con un capacitor de 10 μF , pero sin olvidar la equivalencia que se estableció para hallar la equivalencia de los demás elementos.
3. Identificar las señales que se deben analizar en el esquema eléctrico con el fin de inferir en el sistema mecánico. Si se desea analizar la velocidad de una masa en el sistema mecánico y se obtiene la analogía directa, entonces el análisis debe realizarse sobre el voltaje en el sistema eléctrico.

Ejemplo 1: Para el sistema masa-resorte-amortiguador presentado en la Figura 2.2 se puede obtener su equivalente eléctrico así:

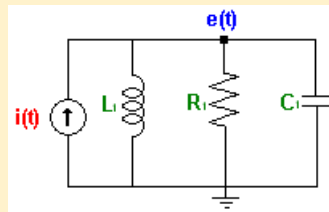
1. El punto de no movimiento es el techo, pero el sistema se referencia con respecto al piso (también es un punto de no movimiento), se dispone la masa con respecto a ese punto como aparece en la Figura 2.11a. Enseguida se colocan los demás elementos (como el resorte y el amortiguador van de la masa al punto de no movimiento, entonces se disponen de igual forma). Para terminar la fuerza que se aplica a la masa se coloca como una fuente de fuerza sobre ésta y referenciada con respecto al piso. El circuito equivalente mecánico se encuentra en la Figura 2.11b



a) Sistema mecánico – masas referenciadas



b) Circuito mecánico equivalente



c) Circuito eléctrico análogo

Figura 2.11 Analogía directa sistema mecánico masa-resorte- amortiguador

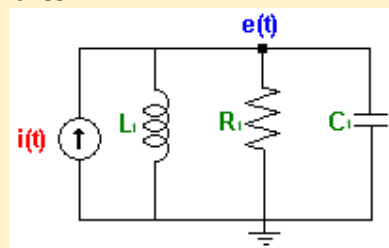
2. Se reemplazan los elementos mecánicos por sus equivalentes eléctricos utilizando la tabla 2.4. El resorte por una inductancia, el amortiguador por una resistencia, la masa por un condensador y la fuente de fuerza por una de corriente. El circuito que obtiene es un RLC en paralelo como el que aparece en la Figura 2.11c. El valor con que se deben escoger los elementos debe mantener la equivalencia, por ejemplo, el C_f resistencia mecánica, es representada por la conductancia de un elemento resistor, si $C_f = 0.5 \text{ ohm}^{-1}$, entonces en el circuito eléctrico se coloca un resistor de valor $R_1 = 2 \text{ ohm}$ para que sean análogos.
3. Cómo la señal de salida que se desea es la posición de la masa significa que en el circuito eléctrico se debe analizar la integral del voltaje $e(t)$.

La analogía de fuerza voltaje se puede obtener a partir del circuito análogo fuerza- corriente así:

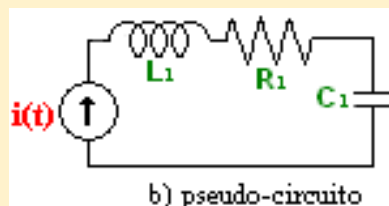
1. Todo lo que está en paralelo se coloca en serie y lo que está en serie en paralelo, así se obtiene un pseudo-circuito equivalente.
2. Una vez se tiene el pseudo-circuito se reemplazan los elementos por los de la analogía indirecta, los condensadores por inductancias, los resistores por resistores, donde su valor análogo ya no es la conductancia sino la resistencia, las inductancias por condensadores y las fuentes de corriente por fuentes de voltaje; no se olvide que éstos deben cumplir con las equivalencias de la tabla 2.4.

Ejemplo 2: Para el sistema masa-resorte- amortiguador presentado en la Figura 2.2 se puede obtener su equivalente eléctrico fuerza voltaje a partir del circuito RLC en paralelo de la Figura 2.11c.

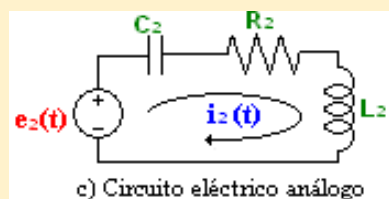
1. Como todos los elementos están en paralelo ahora quedarían en serie.
2. Al reemplazar los elementos se deben tener en cuenta sus nuevas equivalencias, para el ejemplo anterior donde C_f resistencia mecánica era equivalente a la conductancia de un elemento resistor, ahora es representada por su resistencia, por tanto, si $C_f = 0.5$, entonces en el circuito eléctrico análogo de fuerza-voltaje se coloca un resistor de valor $R_2 = 0.5$; la masa va a estar representada por una inductancia y el resorte por un condensador donde $k=1/C$. En la Figura 2.12 aparecen representados de forma gráfica los pasos anteriores.



a) Analogía directa



b) pseudo-circuito



c) Circuito eléctrico análogo

Figura 2.12 Analogía indirecta sistema mecánico masa-resorte- amortiguador

Cómo la señal de salida que se desea es la posición de la masa, entonces el análisis se hace sobre la integral de la corriente $i_2(t)$ en el circuito eléctrico.

Ejemplo 3: Para el sistema de la Figura 2.13 obtenga el circuito equivalente eléctrico de fuerza-corriente y de fuerza-voltaje.

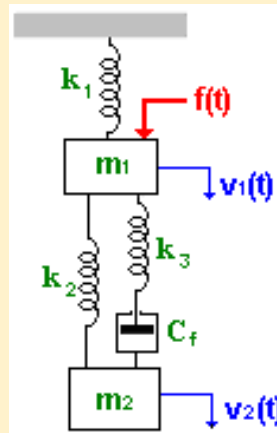
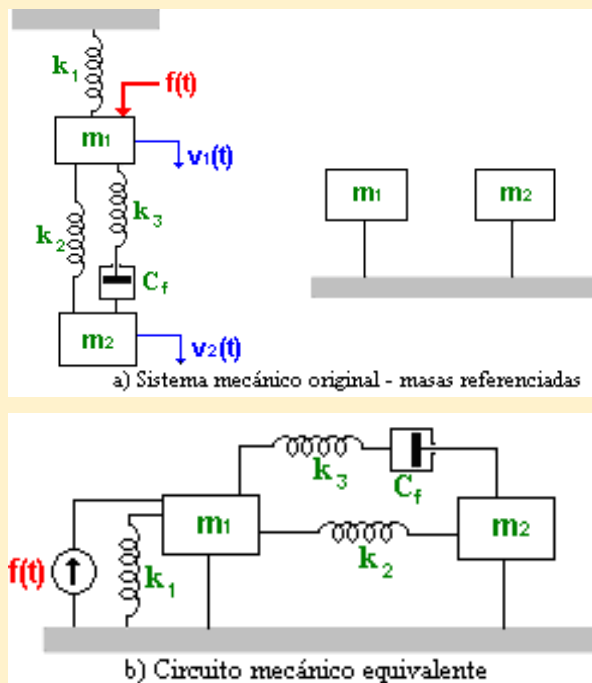


Figura 2.13 Sistema mecánico

Siguiendo el método estudiado se pueden obtener ambos equivalentes (tabla 2.5) tal y como aparecen en las Figuras 2.14 y 2.15

- Equivalente fuerza-corriente: En éste caso se analizan los voltajes en los condensadores C_1 y C_2 , ya que son análogos a las velocidades de las masas



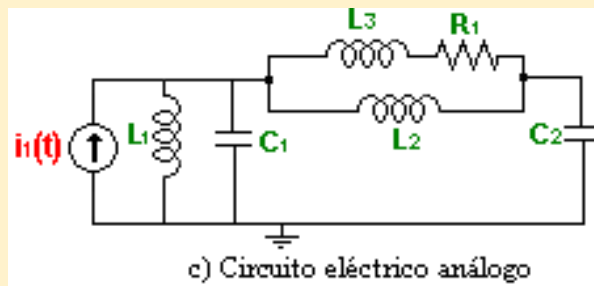


Figura 2.14 Analogía fuerza-corriente

- Equivalente fuerza-voltaje: Las corrientes de las inductancias L_{a1} y L_{a2} serían las salidas a analizar, por ser análogas a las velocidades de las masas.

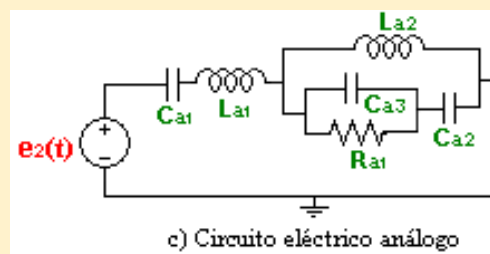
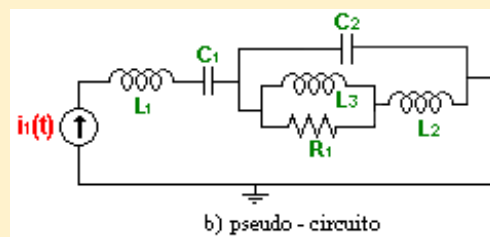
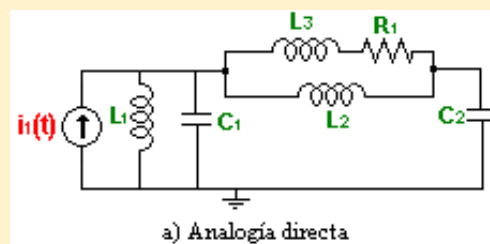


Figura 2.15 Analogía fuerza – voltaje

Tabla 2.5 Equivalencias de los elementos mecánicos en los análogos eléctricos

Sistema Mecánico	Analogía de Movilidad (fuerza-corriente)	Analogía de Impedancia (fuerza-voltaje)
m_1	C_1	L_{a1}
m_2	C_2	L_{a2}
k_1	$1/L_1$	$1/C_{a1}$
k_2	$1/L_2$	$1/C_{a2}$
k_3	$1/L_3$	$1/C_{a3}$
C_f	$1/R_1$	R_{a1}

2.5 Sistemas Electromecánicos

Algunas plantas como las máquinas eléctricas combinan sistemas mecánicos y sistemas eléctricos. Cuando se presenta ésta situación es aconsejable seccionar el problema para obtener el modelo.

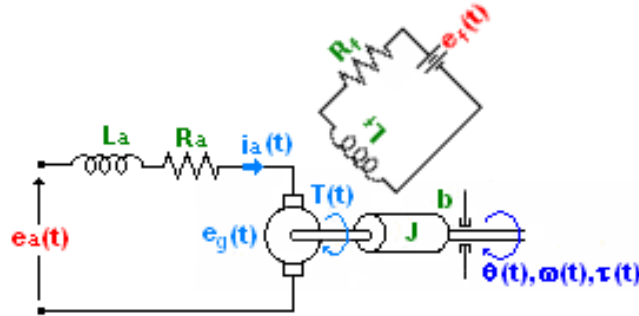


Figura 2.16. Sistema motor eléctrico D. C. controlado por corriente de armadura

En la Figura 2.16 se tiene un motor D.C. controlado por corriente de armadura y excitación de campo constante, para éste ejemplo se va a dividir el sistema en cuatro partes, la parte eléctrica, la transferencia eléctrica-mecánica, la parte mecánica y la transferencia mecánica-eléctrica.

Como variable de entrada se tiene el voltaje de armadura $e_a(t)$ que es la variable independiente y como posibles salidas están el torque $\tau(t)$ (por ejemplo cuando el motor D.C. hace parte de una grúa), la velocidad $\omega(t)$ (en un ventilador) o la posición $\theta(t)$ (en un robot). De acuerdo con la aplicación donde se encuentre ubicado el motor se escogerá una o varias salidas, en esta ocasión el análisis se va a realizar tomando como salida la velocidad $\omega(t)$. En ésta planta existen señales intermedias como la corriente de armadura $i_a(t)$, el torque eléctrico en el eje $T(t)$, el voltaje generado $e_g(t)$; posteriormente cuando se hallen modelos por espacio de estados se observará como éstas señales son candidatas a ser variables de estado.

2.5.1 Parte eléctrica:

Inicialmente se analiza la parte eléctrica del motor D.C. indicada en la Figura 2.17 como salida de la parte eléctrica se tiene la corriente de armadura $i_a(t)$ y como entrada la señal de voltaje $e_a(t)$.

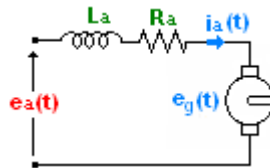


Figura 2.17 Circuito eléctrico motor D.C.

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff se tiene que:

$$e_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_g(t) \quad \text{Ec.2.19}$$

Para definir la dinámica del motor D.C. se requiere más de una ecuación, siendo la primera Ec 2.19, la cual describe la parte eléctrica.

2.5.2 *Transferencia*

Existen dos tipos de transferencia, una eléctrica-mecánica donde como resultado se tiene un torque en función de la corriente, y otra mecánica-eléctrica que da como resultado un voltaje en función de la velocidad angular de la máquina. La Figura 2.18 muestra la dinámica a analizar.

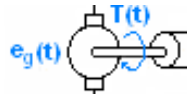


Figura 2.18 Dinámica de transferencia del motor D.C.

Las relaciones entre el torque y la corriente, y la velocidad y el voltaje generado se encuentran en la Ec. 2.20 y Ec. 2.21, éstas ecuaciones describen respectivamente la dinámica de la transferencia de energía eléctrica en mecánica, y a su vez, la retroalimentación interna que existe en la máquina la cual actúa como reguladora ya que a mayor velocidad hay mayor voltaje generado, y por tanto la corriente de armadura se ve afectada.

$$T(t) = K_a i_a(t) \quad \text{Ec 2.20}$$

$$e_g(t) = K \phi \text{rpm} = K_v \omega(t) \quad \text{Ec 2.21}$$

2.5.3 *Parte mecánica:*

En la Figura 2.19 se observa el esquema correspondiente a la parte mecánica del motor D.C. El análisis de éste subsistema da como resultado la Ec. 2.22, que completa el grupo de ecuaciones que contienen la dinámica del motor D.C., controlado por corriente de armadura.

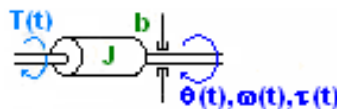


Figura 2.19 Subsistema mecánico motor D.C.

La parte mecánica es similar al sistema mecánico rotacional estudiado anteriormente en la sección 2.2

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = T(t) \quad \text{Ec 2.22}$$

También se puede realizar el análisis para el motor D.C., controlado por campo; la señal de entrada sería el voltaje de excitación de las bobinas de campo $e_f(t)$. Recuerde que los sistemas LTI cumplen con el teorema de la superposición.

2.6 Sistemas de Nivel y Caudal

En la Figura 2.20 aparece el esquema de un tanque, las variables que se encuentran asociadas a éste son el nivel del tanque $H(t)$ y el caudal de salida $Q_o(t)$. Como el sistema tiene un modelo no lineal en ésta sección se trabajará con un modelo linealizado alrededor del punto de operación $\bar{H}(t)$ y $\bar{Q}_o(t)$ respectivamente, donde $h(t)$ son las variaciones alrededor del punto de operación del nivel y $q_o(t)$ las variaciones alrededor de un punto de operación de caudal; lo que significa que $H(t) = \bar{H}(t) + h(t)$ y $Q_o(t) = \bar{Q}_o(t) + q_o(t)$. La linealización de un modelo no lineal se estudiará posteriormente.

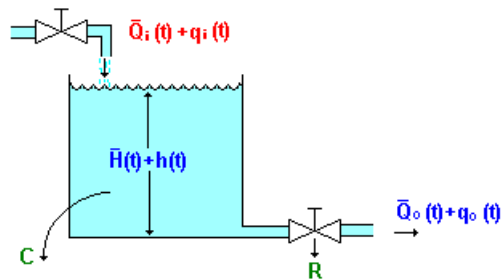


Figura 2.20 Sistema de nivel

Como posibles salidas de interés en este sistema se encuentra el nivel (para situaciones donde éste es indispensable como los tanques de almacenamiento de agua...), o el caudal (sistemas de regadío, acueducto...) y como entrada se tendría un caudal $Q_i(t) = \bar{Q}_i(t) + q_i(t)$.

Para obtener un modelo del tanque bajo las anteriores condiciones es necesario observar los parámetros de la planta; se observan básicamente dos, la capacitancia del tanque C que es un parámetro medible en unidades de área, (en un tanque con área transversal constante sería la parte que no varía cuando se desea medir la capacidad almacenada en el tanque en función del nivel, la capacidad almacenada es igual al área por la altura de la columna de líquido, esta última se conoce como nivel, por tanto, para éste caso C sería la sección transversal del tanque), y la resistencia de la de salida R medida en unidades de longitud/flujo, depende de las característica geométricas de la tubería en la salida del tanque.

Teniendo en cuenta los parámetros del tanque, se puede decir que cualquier variación en el nivel da como resultado un cambio de volumen de líquido almacenado (si C es constante, que es la situación, ya que se habla de sistemas LTI), ese cambio de volumen de líquido almacenado es igual a la diferencia entre la variación del caudal de llegada y la variación del caudal de salida (sí $Q_i(t)$ y $Q_o(t)$ se mantuvieran constantes e iguales, entonces no existiría variación en el nivel).

Las Ec 2.23 y Ec. 2.24 definen la dinámica del sistema de nivel para variaciones de las variables alrededor del punto de operación $\bar{H}(t)$, $\bar{Q}_o(t)$ y $\bar{Q}_i(t)$ respectivamente.

$$C \frac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) \quad \text{Ec 2.23}$$

$$q_o(t) = \frac{h(t)}{R} \quad \text{Ec 2.24}$$

La Ec. 2.25 contiene la dinámica del tanque tomando como salida el nivel $h(t)$ y como entrada el caudal $q_i(t)$.

$$C \frac{dh(t)}{dt} + \frac{h(t)}{R} = q_i(t) \quad \text{Ec 2.25}$$

En la expresión Ec 2.26 se tiene la dinámica del sistema tomando como salida el flujo $q_o(t)$.

$$CR \frac{dq_o(t)}{dt} + q_o(t) = q_i(t) \quad \text{Ec 2.26}$$

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

En los sistemas de nivel y caudal la alimentación del sistema puede provenir de un tanque de almacenamiento de mayor capacitancia, (por ejemplo, un embalse); en consecuencia, la señal de entrada será un nivel. Enseguida se obtendrán las ecuaciones que determinan la dinámica en algunos ejemplos de sistemas de nivel y caudal en los cuales se tienen tanques en serie, en cascada alimentados por flujos o que dependen del nivel de otro tanque.

Ejemplo 1: En la Figura 2.21 se muestran dos tanques en serie. Se tiene como salida el caudal $q_2(t)$ y como entrada el flujo de alimentación $q_i(t)$.

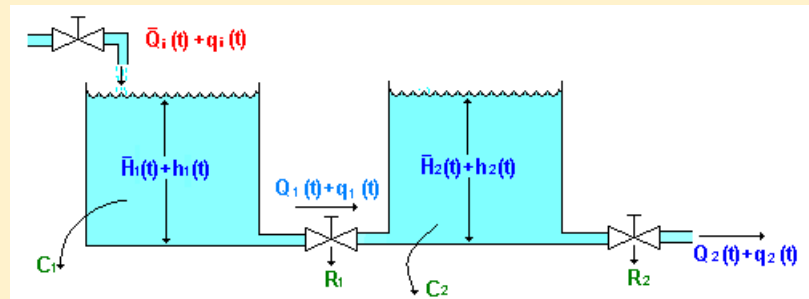


Figura 2.21 Tanques en serie alimentados por un caudal.

Las ecuaciones que expresan la dinámica del sistema serían cuatro.

- La del primer tanque representada en Ec 2.27

$$C_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_i(t) - q_1(t) \quad \text{Ec 2.27}$$

- La del flujo entre los tanques, este depende de ambos niveles Ec 2.28.

$$q_o(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} \quad \text{Ec 2.28}$$

- La del segundo tanque se encuentra en la Ec 2.29

$$C_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) \quad \text{Ec 2.29}$$

- La ecuación del flujo de salida es Ec. 2.30

$$q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2} \quad \text{Ec 2.30}$$

Ejemplo 2: La Figura 2.22 contiene un sistema de nivel-caudal en el cual el segundo tanque se alimenta del nivel del primero, el número de ecuaciones se reduce debido a que el primer tanque funciona como fuente. La dinámica de éste sistema está determinada por las ecuaciones Ec 2.28, Ec 2.29 y Ec 2.30, pero la señal de entrada ahora es $h_1(t)$.

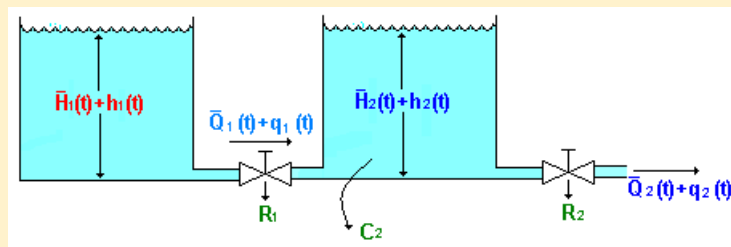


Figura 2.22 Tanques alimentados por un nivel

Ejemplo 3: El funcionamiento de los tanques en cascada difiere de los tanques en serie en que el caudal $q_1(t)$ ya no depende del nivel del segundo tanque; pues no hay conexión directa con éste, como se observa en la Figura 2.23. La dinámica de éste sistema estaría estipulada en las ecuaciones Ec 2.27, Ec 2.29, Ec 2.30 y Ec 2.31.

$$q_1(t) = \frac{h_1(t)}{R_1} \quad \text{Ec 2.31}$$

La Ec 2.31 muestra que el caudal $q_1(t)$ solo depende de $h_1(t)$. Como entrada se tiene $q_i(t)$ y como salida $q_2(t)$.

Ejemplo 4: En éste ejemplo el primer tanque es la fuente para el segundo; en consecuencia, la entrada es $h_1(t)$ como en el ejemplo 3 (ver Figura 2.24); el número de ecuaciones también se reduce y la dinámica del sistema estaría definida por las ecuaciones Ec 2.29, Ec 2.30 y Ec 2.31.

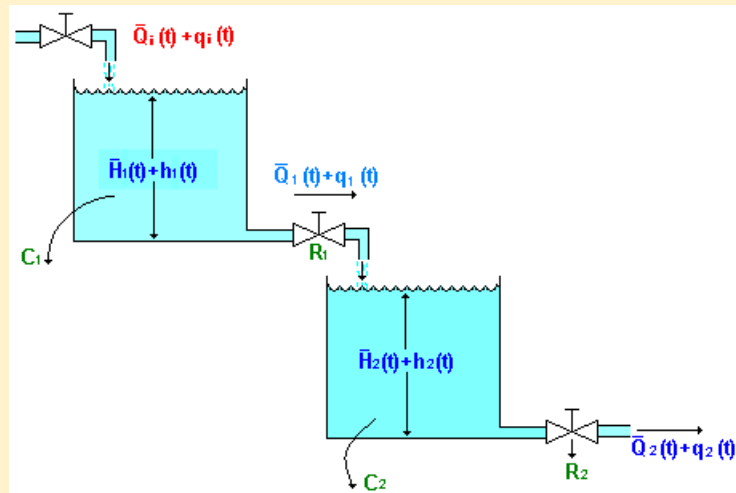


Figura 2.23 Tanques en cascada alimentados por un caudal

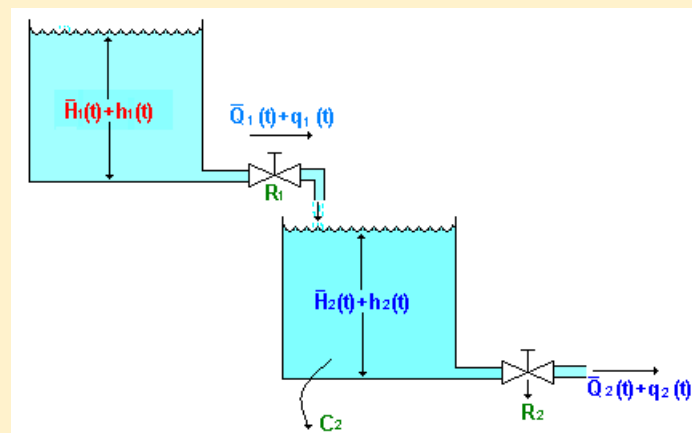
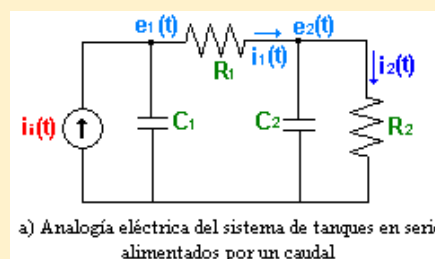


Figura 2.24 Tanque en cascada alimentado por un nivel.

Los sistemas de nivel-caudal tienen analogía directa con los sistemas eléctricos; las fuentes de nivel son análogas a las fuentes de voltaje, las de caudal a las de corriente, la capacitancia a la capacitancia eléctrica y la resistencia a la resistencia eléctrica. Las fuentes dependientes de corriente se utilizan en el caso de los tanques en cascada. La Figura 2.25 muestra los circuitos análogos eléctricos de los ejemplos anteriores.



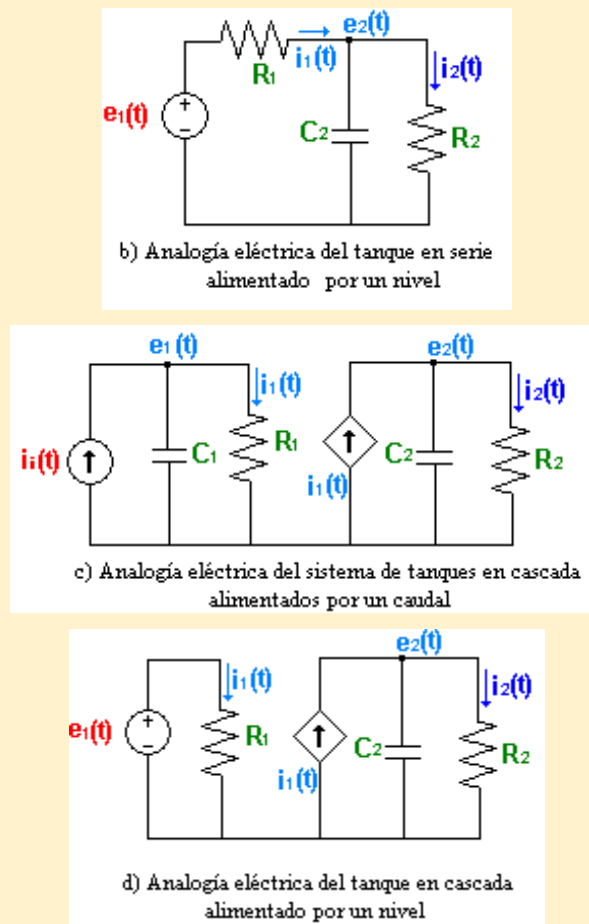


Figura 2.25 Circuitos análogos de los sistemas de nivel y caudal.

2.7 Sistemas Térmicos

El análisis de sistemas térmicos es importante en la obtención de modelos de plantas reales. Generalmente en la industria se encuentran hornos, intercambiadores de calor, etc.; y variables como la temperatura y el flujo de calor son comunes en estos ambientes. La Figura 2.26 muestra un sistema térmico donde como variables de entradas se tienen las variaciones de la temperatura de entrada $\theta(t)$ y las variaciones del flujo de calor de entrada $h_i(t)$.

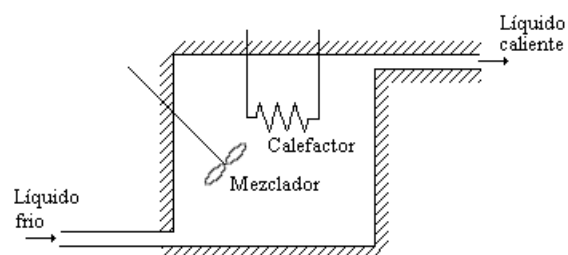


Figura 2.26 Sistema térmico

El punto de operación del sistema es $\bar{\Theta}_i(t), \bar{H}_i(t)$, las variaciones de la temperatura y/o el flujo de calor de entrada provocan un cambio en el flujo de calor de salida y en la temperatura de salida; haciendo que varíe de su estado estacionario $\bar{\Theta}_o(t)$ a $\bar{\Theta}_o(t) + \theta(t)$. Los parámetros a tener en cuenta para el análisis del sistema son la resistencia térmica, R ($^{\circ}\text{C s/kcal}$) y la capacidad térmica C ($\text{kcal}/^{\circ}\text{C}$).

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = h_i(t) - h_o(t) \quad \text{Ec 2.32}$$

La ecuación Ec 2.32 describe la dinámica del sistema en general; pero como éste es un sistema MIMO (múltiples entradas múltiples salidas) las ecuaciones Ec. 2.33 y 2.34 contienen la dinámica del sistema tomando como salida la temperatura $\theta(t)$ y como entradas la variación del flujo de calor $h_i(t)$ y de la temperatura respectivamente $\theta_i(t)$, siendo $R = \theta/h_o(t)$.

$$RC \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = R h_i(t) \quad \text{Ec 2.33}$$

$$RC \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = \theta_i(t) \quad \text{Ec 2.34}$$

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- NISE, N. S. CONTROL SYSTEMS ENGINEERING, (With CD), John Wiley & Sons. 2007.
- NISE, Norman, Sistemas de Control para Ingeniería, Editorial CECSA, 6a Edic, 2002.
- OGATA, Katsuhiko. INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA. Capítulo II Modelado matemático de sistemas dinámicos PAG 98-193. Segunda Edición Ed. Prentice Hall. 1993
- OGATA, Katsuhiko. DINÁMICA DE SISTEMAS. Ed. Prentice Hall. 1987