

2.11 Espacio de Estados

Generalmente los sistemas en la vida real, son no lineales de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). El espacio de estados es un ente matemático que permite obtener el modelo de una planta o un sistema en el dominio del tiempo; es tan general que sirve para sistemas no lineales y de múltiples entradas y salidas.

El modelo en espacio de estados para una planta con ' n ' variables de estado (mínimo número de *variables linealmente independientes* necesarias para definir el estado de una planta o sistema), ' r ' entradas y ' p ' salidas estaría compuesto por dos ecuaciones; la ecuación de estado en la Ec 2.41 y la ecuación de salida Ec 2.42; en el que el vector de las variables de entrada es $\mathbf{u}(t)$ de orden $\mathbf{r} \times \mathbf{1}$, el vector que contiene las variables de salida es $\mathbf{y}(t)$ de orden $\mathbf{p} \times \mathbf{1}$ y el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ de orden $\mathbf{n} \times \mathbf{1}$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \text{Ec 2.41}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad \text{Ec 2.42}$$

A: Matriz característica del sistema. Sus componentes están en términos de los parámetros de la planta y es de orden $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$.

B: Matriz de entrada de orden $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$

C: Matriz de salida de orden $\mathbf{p} \times \mathbf{n}$

D: Matriz de transferencia directa entrada- salida, de orden $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$. En sistemas SISO (single input, single output) lineales invariantes en el tiempo esta matriz generalmente no aparece.

Para un sistema el espacio de estados tendría la misma forma, pero en lugar de la señal de entrada $\mathbf{u}(t)$ estaría la señal de referencia del sistema $\mathbf{r}(t)$.

2.11.1 Variables de estado Canónicas:

El modelo de una planta tipo SISO expresado por una ecuación diferencial de orden ' n ', puede ser representado por las ecuaciones de estado, donde *el número de variables de estado es igual al orden de la ecuación diferencial*. Observando la ecuación de estado del espacio de estados (Ec 2.41) no son más que ecuaciones diferenciales de *primer orden* expresadas en forma matricial -no confundir con matriz de transferencia-.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \quad \text{Ec 2.43}$$

Recordando que una ecuación diferencial de orden ' n ' puede ser expresada por ' n ' ecuaciones de primer orden, entonces la ecuación diferencial que se encuentra en Ec 2.43

puede ser declarada en términos de 'n' variables de estado que formarían el vector de estado $\mathbf{x}(t)$. Teniendo a $\mathbf{u}(t)$ como la entrada y $y(t)$ como la salida de la planta y definiendo las variables de estado como la salida y sus n-1 derivadas:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} = y^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = y^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad \text{donde el vector } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

declarando las derivadas de las variables de estado como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{d^3y(t)}{dt^3} = x_4(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= \frac{d^ny(t)}{dt^n} \end{aligned} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

Todas la derivadas de las variables de estado quedaron en función de variables de estado, excepto $\dot{x}_n(t)$. Sin embargo, se puede despejar de la Ecuación Diferencial Ec 2.43 así:

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n} = u(t) - a_{n-1} \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} - \dots - a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} - a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t)$$

Que en términos de las variables de estado quedaría:

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n} = u(t) - a_{n-1}x_n(t) - \dots - a_2x_3(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t)$$

Entonces las 'n' ecuaciones de primer orden serían:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= \frac{d^3y(t)}{dt^3} = x_4(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = x_n(t) \\
\dot{x}_n(t) &= \frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + u(t)
\end{aligned}$$

Expresadas en forma matricial se obtendría la ecuación de estado (Ec 2.41):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{Ec 2.44}$$

La ecuación de salida sería:

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t) \quad \text{Ec 2.45}$$

Las ecuaciones Ec 2.44 y Ec 2.45 son la representación en espacio de estados de la ecuación diferencial lineal de orden 'n' (Ec.2.43). La matriz característica del sistema **A** queda en términos de los coeficientes de la ecuación diferencial.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

El modelo genérico de espacio de estados obtenido es un modelo en *forma canónica*, que está compuesto como se muestra en la ecuación Ec 2.46.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ a & \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= [1 \ 0] \mathbf{x}(t) \quad \text{Ec 2.46}
\end{aligned}$$

Donde:

\mathbf{o} = vector de ceros de orden $(\mathbf{n} - 1) \times 1$ o $1 \times (\mathbf{n} - 1)$, según sea el caso.

\mathbf{I} = Matriz identidad de orden $\mathbf{n}-1$

\mathbf{a} = Vector de coeficientes de la ecuación diferencial de orden $1 \times \mathbf{n}$

Cualquier modelo en espacio de estados cuya matriz característica del sistema tenga estas componentes (\mathbf{o} , \mathbf{I} y \mathbf{a}), sin importar el orden donde se encuentren ubicadas (siempre y cuando cumplan con que \mathbf{A} sea de orden ' \mathbf{n} '), se considera un modelo canónico de la planta.

Si se obtiene la transformada de Laplace de la Ec 2.43, y se expresa en forma de función de transferencia como aparece en Ec 2.47, se observa que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad \text{Ec 2.47}$$

Como se observa en la Ec 2.47 el polinomio del denominador de la función de transferencia $G(s)$ queda en términos de los coeficientes de la ecuación diferencial que determina la dinámica de la planta. Por tanto, el espacio de estados se puede obtener directamente de la función de transferencia, teniendo cuidado de dejar el polinomio del denominador de forma mónica (el coeficiente de s^n sea 1). Si la ecuación diferencial incluye derivadas de la entrada (ver Ec 2.48), la función de transferencia se cambia, quedando como se muestra en la Ec 2.49 (siendo ' m ' el orden del polinomio del numerador y ' n ' el orden del polinomio del denominador, para todo $m < n$), luego la ecuación de estado, del espacio de estados se mantiene; pero la ecuación de salida se modifica, incluyendo la dinámica representada por el numerador de la función de transferencia.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = c_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + c_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + c_1 \frac{du(t)}{dt} + c_0 \quad \text{Ec 2.48}$$

$$G(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \text{Ec 2.49}$$

El espacio de estados que representa la Ec 2.48 se puede hallar recordando que la función de transferencia equivalente del modelo en variable ' s ' se puede expresar en diagramas de bloques como una multiplicación de funciones (regla 2 del álgebra de bloques), tal y como aparece en la Figura 2.39b.

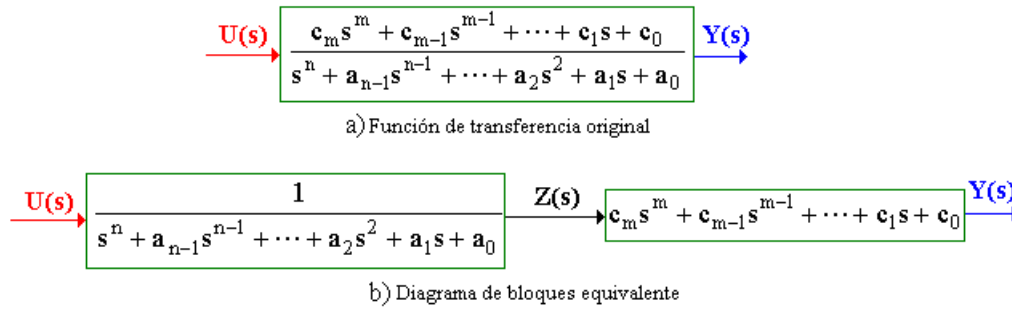


Figura 2.39 Representación en diagramas de bloques de una función de transferencia general

En la Figura 2.39 se observa una *variable auxiliar* $Z(s)$. El bloque que como entrada tiene a $U(s)$ y como salida a $Z(s)$ es el mismo caso tratado en la Ec 2.43 cuya función de transferencia es la Ec 2.47, por ende hallando la transformada inversa de Laplace y definiendo las variables de estado como la variable auxiliar en el dominio del tiempo $z(t)$ y sus $n-1$ derivadas, para ($m < n$):

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= z(t) \\
 x_2(t) &= \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \\
 x_3(t) &= \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) \\
 &\vdots \\
 x_m(t) &= \frac{d^{m-1} z(t)}{dt^{m-1}} = z^{(m-1)}(t) \\
 x_{m+1}(t) &= \frac{d^m z(t)}{dt^m} = z^{(m)}(t) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-2} z(t)}{dt^{n-2}} = z^{(n-2)}(t) \\
 x_n(t) &= \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} = z^{(n-1)}(t)
 \end{aligned}$$

Definiendo la ecuación de estado en forma matricial queda como la ecuación Ec 2.44, pero la ecuación de salida que expresa $y(t)$ se obtendría de la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia contenida en el bloque que tiene como entrada $Z(s)$ y como salida $Y(s)$.

$\frac{Y(s)}{Z(s)} = c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0$, por tanto, aplicando transformada inversa de Laplace quedaría: $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[c_m s^m Z(s) + c_{m-1} s^{m-1} Z(s) + \dots + c_1 s Z(s) + c_0 Z(s)]$, entonces la variable de salida, $y(t) = c_m \frac{d^m z(t)}{dt^m} + c_{m-1} \frac{d^{m-1} z(t)}{dt^{m-1}} + \dots + c_1 \frac{dz(t)}{dt} + c_0 z(t)$, en función de las variables de estado $y(t) = c_m x_{m+1}(t) + c_{m-1} x_m(t) + \dots + c_1 x_2(t) + c_0 x_1(t)$ expresando la salida en forma matricial:

$$y(t) = [c_0 \ c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{m-1} \ c_m \ \cdots \ 0 \ 0]x(t) \quad \text{Ec 2.50}$$

“En conclusión, una representación en espacio de estados de la Ecuación Diferencial general (Ec 2.48) estaría dada por la Ec 2.44 y la Ec 2.50; aclarando que las variables de estado serían la variable auxiliar $z(t)$ y sus $n-1$ derivadas”.

En la Figura 2.40 se observa la representación general en diagrama de bloques, implementado con integradores, de la equivalencia en variable 's' de un sistema modelado en espacio de estados.

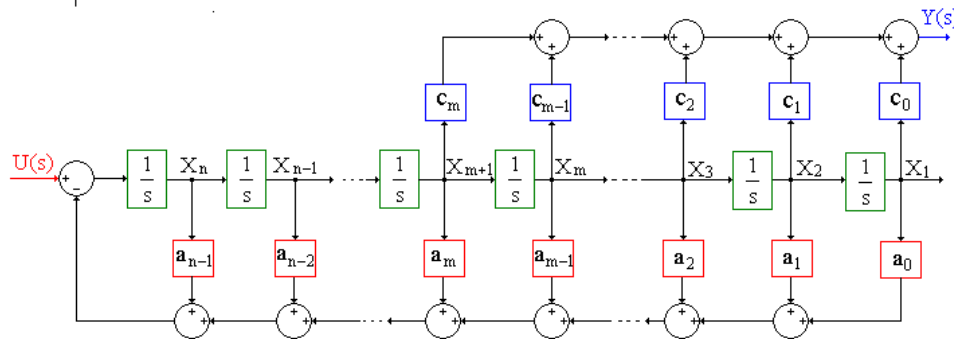


Figura 2.40 Diagrama general de estado de un sistema

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

La representación en espacio de estados para el ejemplo del motor D.C. controlado por corriente de armadura se puede definir a partir de su ecuación diferencial o, a partir de la función de transferencia como se describió en el desarrollo de esta sección:

- La ecuación diferencial obtenida es:

$$JL_a \frac{d^2\omega(t)}{dt} + (bL_a + R_a J) \frac{d\omega(t)}{dt} + (bR_a + K_a K_v) \omega(t) = K_a e_a(t)$$

- Expresándola en forma mónica quedaría:

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt} + \frac{(bL_a + R_a J)}{JL_a} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{(bR_a + K_a K_v)}{JL_a} \omega(t) = \frac{K_a}{JL_a} e_a(t)$$

- Como es un sistema de orden 2, se toman dos variables (canónicas) la salida $x_1(t) = \omega(t)$ y su derivada $x_2(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$.

- Armado el espacio de estados se tendría, que: $\dot{x}_1(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = x_2(t)$ y

$$\dot{x}_2(t) = \frac{d^2\omega(t)}{dt^2}, \text{ despejando } \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} \text{ de la ecuación diferencial que describe la}$$

$$\text{dinámica del motor } \frac{d^2\omega(t)}{dt} = -\frac{(bR_a + K_a K_v)}{JL_a} \omega(t) - \frac{(bL_a + R_a J)}{JL_a} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{K_a}{JL_a} e_a(t)$$

- Expresándola en variables de estado

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{(bR_a + K_a K_v)}{JL_a} x_1(t) - \frac{(bL_a + R_a J)}{JL_a} x_2(t) + \frac{K_a}{JL_a} e_a(t)$$

- Escribiendo las derivadas de las ecuaciones de estado en forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(bR_a + K_a K_v)}{JL_a} & -\frac{(bL_a + R_a J)}{JL_a} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_a}{JL_a} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t); \text{ donde } \mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_a(t), \text{ variable de entrada.}$$

$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$, es la ecuación de salida $x_1(t) = \mathbf{w}(t)$ en forma matricial, donde $\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}(t)$.

Este espacio de estados difiere de la generalización obtenida, en que el coeficiente de la señal de entrada quedó en el vector B y no en el C como aparece en la Ec 2.50. Si se utiliza la expresión generalizada el espacio de estados sería:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(bR_a + K_a K_v)}{JL_a} & -\frac{(bL_a + R_a J)}{JL_a} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{K_a}{JL_a} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

“La representación en espacio de estados no es única, depende de las variables de estado que se escojan”

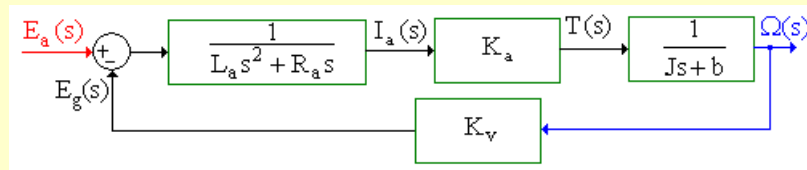
2.11.2 Variables de estado Físicas:

En algunas aplicaciones reales no es conveniente definir como variables de estado la salida y sus derivadas. Por ejemplo, en el caso de un sistema térmico donde se tiene como salida la temperatura; la derivada de la temperatura dependería del mismo sensor que mide la variable principal. Quizás usar otro sensor adicional que mida una variable intermedia del proceso es más conveniente, porque se tiene información adicional de la planta. Además, en otras situaciones los sensores y circuitos que se requieren para medir la variable de salida y sus derivadas son costosos y de difícil consecución. Para estos casos es más apropiado sensar otras variables intermedias que determinan el estado del proceso y son más fáciles de medir o utilizan sensores menos exigentes. En situaciones como estas el ingeniero debe escoger, de acuerdo con condiciones técnico-económicas de la empresa donde esta ubicada la planta y el equipo de instrumentación más adecuado.

Las técnicas de diseño de controladores por espacio de estados permite diseñar un sistema de control a partir de información recogida de señales que intervienen en la planta, sin ser necesariamente la salida; éstas variables pueden ser definidas como variables de estado (No olvidar que las variables de estado deben ser linealmente independientes).

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

A continuación se presenta el ejemplo del motor D.C, tratado en la sección anterior. Se escogerán como variables de estado variables físicas medibles de la planta. Recuerde que el sistema estudiado es de orden 2, por ende se efectuará el análisis con 2 variables de estado. Cuando se trabaja con variables de estado es muy conveniente hacerlo directamente de las ecuaciones que definen la dinámica del sistema o, de su representación en diagrama de bloques



Se diferencian 4 posibles candidatas a variables de estado. Estas son la salida $\omega(t)$, y las variables intermedias $i_a(t)$, $\tau(t)$ y $e_g(t)$, la variable de entrada generalmente no se escoge como variable de estado. Los conjuntos podrían ser:

1. $i_a(t)$, y $e_g(t)$
2. $\tau(t)$ y $e_g(t)$
3. $i_a(t)$ y $\omega(t)$
4. $\tau(t)$ y $\omega(t)$

No es posible escoger $i_a(t)$ y $\tau(t)$ ó $e_g(t)$ y $\omega(t)$, porque son linealmente dependientes.

Cuál de los cuatro conjuntos escoger?. La decisión depende exclusivamente de la instrumentación con la que se cuenta, su costo, y su facilidad de consecución. Para el desarrollo del ejemplo se va suponer que se posee un amperímetro y un voltímetro para instrumentar la planta, por lo tanto, se escogerá el conjunto 1. Al trabajar con éste conjunto el control de la salida $\omega(t)$ se va a realizar a través de la medición del voltaje generado $e_g(t)$, ya que las dos variables son linealmente dependientes.

Obsérvese como el modelaje en variables de estado permiten el control de una señal a partir de la medición de otra. Generalmente los modelos matemáticos en espacio de estados se deben hallar favoreciendo aquel que permita la implementación real de un controlador. Partiendo del diagrama de bloques, sin olvidar que el espacio de estados se define en el dominio del tiempo, se tiene que las funciones de transferencia que establecen la dinámica del motor son:

$$G_1(s) = \frac{I_a(s)}{E_a(s) - E_g(s)} = \frac{1}{L_a s + R_a}, \quad G_2(s) = \frac{E_g(s)}{\Omega(s)} = K_v, \quad G_3(s) = \frac{T(s)}{I_a(s)} = K_a \text{ y}$$

$$G_4(s) = \frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + b}$$

- Tomando como variables de estado $x_1(t)=i_a(t)$ y $x_2(t)=e_g(t)$, se necesitan expresiones que nos permitan obtener $\dot{x}_1(t)=\frac{di_a(t)}{dt}$ y $\dot{x}_2(t)=\frac{de_g(t)}{dt}$. De las funciones de transferencia se pueden obtener éstas derivadas.
- De G_1 se tiene que $I_a(s)(L_a s + R_a) = E_a(s) - E_g(s) = I_a(s)L_a s + I_a(s)R_a$; aplicando transformada inversa de la Laplace, entonces, $L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) = e_a(t) - e_g(t)$, despejando $\frac{di_a(t)}{dt}$ quedaría:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{1}{L_a} e_g(t) + \frac{1}{L_a} e_a(t), \text{ en términos de las variables de estado se obtendría}$$

$$\text{la primera ecuación: } \boxed{\dot{x}_1(t) = -\frac{R_a}{L_a} x_1(t) - \frac{1}{L_a} x_2(t) + \frac{1}{L_a} e_a(t)}$$

- Ahora de la función de transferencia G_2 se tiene que $E_g(s) = K_v \Omega(s)$ y de G_4 $\Omega(s) = \frac{1}{Js + b} T(s)$, por tanto reemplazando la equivalencia de $\Omega(s)$ en términos del $T(s)$ se tendría que $E_g(s) = K_v \frac{1}{Js + b} T(s)$ de G_3 se obtiene una expresión del torque en términos de la corriente de armadura $T(s) = K_a I_a(s)$ reemplazándola en $E_g(s)$ quedaría que $E_g(s) = K_v \frac{1}{Js + b} K_a I_a(s)$.
- Nótese que las ecuaciones deben quedar en términos de las transformadas de Laplace de las señales que se escogieron como variables de estado ($I_a(s)$ y $E_g(s)$). Por tanto:

$$E_g(s)(Js + b) = K_v K_a I_a(s) = E_g(s)Js + bE_g(s), \text{ aplicando } \mathcal{L}^{-1} \text{ se obtiene que:}$$

$$J \frac{de_g(t)}{dt} + b e_g(t) = K_v K_a i_a(t), \text{ despejando } \frac{de_g(t)}{dt} \text{ se tiene:}$$

$$\frac{de_g(t)}{dt} = \frac{K_v K_a}{J} i_a(t) - \frac{b}{J} e_g(t), \text{ en termino de las variables de estado:}$$

$$\boxed{\dot{x}_2(t) = \frac{K_v K_a}{J} x_1(t) - \frac{b}{J} x_2(t)}$$

- Expresando las derivadas de las variables de estado en forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{1}{L_a} \\ \frac{K_v K_a}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \text{ donde, } u(t) = e_a(t).$$

- La ecuación de salida se obtiene de G_2 así:

$E_g(s) = K_v \Omega(s)$ aplicando transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}[E_g(s)] = \mathcal{L}^{-1}[K_v \Omega(s)]$, y despejando la salida $\omega(t) = \frac{1}{K_v} e_g(t)$, expresada en forma matricial y en términos de las variables de estado: $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_v} \end{bmatrix} x(t)$, donde $y(t) = \omega(t)$.

2.11.3 *Las variables de estado y los elementos que guardan energía*

Los sistemas estudiados poseen elementos que guardan energía. Entre otros están las bobinas y los condensadores en los sistemas eléctricos; los resortes y los amortiguadores en los sistemas mecánicos; los tanques de almacenamiento en los de caudal y nivel; etc. Los más fáciles de analizar son los sistemas eléctricos; sin embargo, a través de las analogías se pueden obtener circuitos eléctricos de otra clase de sistemas.

Obtener un modelo de espacio de estados de un circuito eléctrico basándose en los elementos que guardan energía es muy sencillo. En las ideas complementarias de ésta sección se desarrollará una técnica que permite obtener el espacio de estados de circuitos eléctricos con elementos pasivos (bobinas, resistencias y condensadores); éstos circuitos pueden ser el resultado de la aplicación de una analogía del modelo.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

Para obtener el espacio de estados siga los pasos que se describen a continuación:

1. Identifique todos los elementos que guardan energía (el número de variables de estado será igual al número de elementos que guarden energía).
2. Defina como variables de estado las corrientes de las inductancias y los voltajes en los condensadores.
3. Exprese las ecuaciones que le permitan obtener el voltaje de las inductancias y la corriente de los condensadores. Estas ecuaciones expresadas en forma matricial le darán como resultado la ecuación de estado.
4. Exprese la ecuación de salida en términos de variables de estado.

Para el circuito de la Figura 2.41 obtenga un modelo en espacio de estados, tomando como entrada la corriente $i(t)$ y como salida el voltaje en la resistencia $e_R(t)$:

1. Las corrientes y los voltajes candidatos a ser variables de estado se identifican en la Figura 2.41. Se observan 4 variables de estado las corrientes de las inductancias

L_1 y L_2 ($i_{L_1}(t)$ y $i_{L_2}(t)$) y los voltajes en los condensadores C_1 y C_2 ($e_{C_1}(t)$ y $e_{C_2}(t)$), estas variables son variables intermedias del sistema.

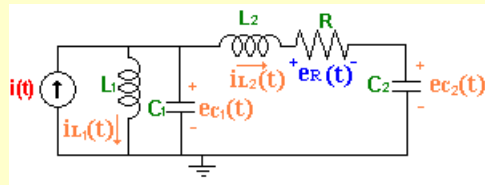


Figura 2.41 Circuito eléctrico con elementos pasivos

- Las variables de estado se definen en el orden que aparecen en la Tabla 2.12. Este orden es sugerido; lo que significa que si se enumeran en orden diferente de igual forma se va obtener un espacio de estados que representa el sistema (recuerde que la representación en espacio de estados no es única).

Tabla 2.12 Definición de variables de estado para el circuito de la Figura 2.40

Variable física	Variable de estado
$i_{L_1}(t)$	$x_1(t)$
$i_{L_2}(t)$	$x_2(t)$
$e_{C_1}(t)$	$x_3(t)$
$e_{C_2}(t)$	$x_4(t)$

- Se analiza el circuito para los voltajes de las inductancias y las corrientes en los condensadores.
- Expresando éstas variables en términos de las de estado se tiene que:

- El voltaje de la inductancia L_1 es igual al voltaje en el condensador C_1 , por lo tanto:

$$L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = e_{C_1}(t), \text{ despejando } \frac{di_{L_1}(t)}{dt}, \text{ se obtiene } \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = \frac{1}{L_1} e_{C_1}(t), \text{ en términos}$$

de las variables de estado:
$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L_1} x_3(t)$$

- La tensión en la inductancia L_2 es $L_2 \frac{di_{L_2}(t)}{dt} = e_{C_1}(t) - e_R(t) - e_{C_2}(t)$, despejando $\frac{di_{L_2}(t)}{dt}$, se obtiene $\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = \frac{1}{L_2} e_{C_1}(t) - \frac{1}{L_2} e_R(t) - \frac{1}{L_2} e_{C_2}(t)$, en función de las

variables de estado
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R}{L_2} x_2(t) + \frac{1}{L_2} x_3(t) - \frac{1}{L_2} x_4(t), \text{ sabiendo que}$$

$$e_R(t) = i_{L_2}(t)R = x_2(t)R.$$

- La corriente para el condensador C_1 es $C_1 \frac{de_{C_1}(t)}{dt} = i(t) - i_{L_1}(t) - i_{L_2}(t)$, despejando $\frac{de_{C_1}(t)}{dt}$ queda $\frac{de_{C_1}(t)}{dt} = \frac{1}{C_1} i(t) - \frac{1}{C_1} i_{L_1}(t) - \frac{1}{C_1} i_{L_2}(t)$, ordenando la ecuación y dejándola en términos de las variables de estado $\dot{x}_3(t) = -\frac{1}{C_1} x_1(t) - \frac{1}{C_1} x_2(t) + \frac{1}{C_1} i(t)$.
- Por último la corriente del condensador C_2 es igual a la corriente que circula por la inductancia L_2 , $C_2 \frac{de_{C_2}(t)}{dt} = i_{L_2}(t)$, despejando $\frac{de_{C_2}(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_2}(t)$, el equivalente en variables de estado es: $\dot{x}_4(t) = \frac{1}{C_2} x_2(t)$

Las cuatro ecuaciones que definen las derivada de las variables de estado $\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L_1} x_3(t)$,
 $\dot{x}_2(t) = -\frac{R}{L_2} x_2(t) + \frac{1}{L_2} x_3(t) - \frac{1}{L_2} x_4(t)$, $\dot{x}_3(t) = -\frac{1}{C_1} x_1(t) - \frac{1}{C_1} x_2(t) + \frac{1}{C_1} i(t)$ y
 $\dot{x}_4(t) = \frac{1}{C_2} x_2(t)$

ordenadas en forma matricial dan la ecuación de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \text{ donde } u(t) = i(t). \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

La ecuación de salida es:

$e_R(t) = i_{L_2}(t)R = x_2(t)R$ expresada en forma matricial $y(t) = [0 \ R \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$, donde $y(t) = e_R(t)$

Si se desea otra salida, solamente se debe cambiar la ecuación de salida, la de estado continúa igual. Por ejemplo, si se desea como salida la tensión en C_2 entonces, $y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(t)$.

Si se quieren varias salidas se puede tener una ecuación de salida donde $\mathbf{y(t)}$ es el vector de salida. Por ejemplo se desean tener múltiples salidas, $y_1(t)$ = a la corriente de L_1 , $y_2(t)$ = a la corriente de C_2 y, $y_3(t)$ = la corriente de C_1 entonces la ecuación de salida será:

$$\mathbf{y(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \text{ donde } \mathbf{y(t)} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}.$$

Si el circuito tiene más de una fuente de alimentación, significa que tiene más de una entrada. Por tanto, se aplica el mismo método hasta el paso 2, pero para realizar los pasos 3 y 4 es necesario aplicar el teorema de la superposición, haciendo el análisis con respecto a cada entrada, sin tener en cuenta el efecto de las otras. En la ecuación de estado ya no aparece $u(t)$, sino el vector $\mathbf{u(t)}$ que estará compuesto por las 'r' entradas que tenga.

Las ventajas de los modelos matemáticos en variables de estado no solamente se reflejan en el análisis de sistemas como los circuitos eléctricos, sino en general para cualquier sistema MIMO. En estos casos se debe hacer el análisis con respecto a cada entrada manteniendo las mismas variables de estado. Por ejemplo, cuando se estudio el motor D.C. solamente se obtuvo un modelo con respecto al voltaje de armadura, pero se puede hallar un modelo más completo si también se tiene en cuenta el voltaje de alimentación de campo.

2.11.4 Relación entre el espacio de Estados y la función de transferencia

De una función de transferencia o un diagrama de bloques que está en términos de funciones de transferencia se puede obtener una representación en espacio de estados. También es posible que a una planta o sistema modelado en espacio de estado se le pueda obtener un modelo en función o matriz de transferencia, según sea el caso (SISO o MIMO). De las ecuaciones 2.41 y 2.42 se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación 2.41 entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] &= \mathcal{L}[\mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)] \\ s\mathbf{I} \mathbf{X}(s) &= \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \end{aligned}$$

Donde, $s\mathbf{I}$ es la variable ' s ' multiplicada por la matriz identidad ' \mathbf{I} ' de orden $n \times n$, esto con el fin de mantener la coherencia en las operaciones con matrices. Agrupando los factores con $\mathbf{X}(s)$ la expresión quedaría, $s\mathbf{I} \mathbf{X}(s) - \mathbf{AX}(s) = \mathbf{BU}(s)$, factorizando $\mathbf{X}(s)$ por la derecha

$[sI - A]X(s) = BU(s)$, para despejar $X(s)$, que es un vector, se debe premultiplicar por $[sI - A]^{-1}$ se obtiene que $[sI - A]^{-1}[sI - A]X(s) = [sI - A]^{-1}BU(s)$, por lo tanto:

$$X(s) = [sI - A]^{-1}BU(s) \quad \text{Ec 2.51}$$

Ahora hallando la transformada de Laplace para la ecuación de salida Ec 2.42, se obtiene una expresión en función de 's' $\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[Cx(t) + Du(t)]$, donde $Y(s) = CX(s) + DU(s)$, reemplazando la expresión Ec 2.51 en $Y(s)$ se tiene que: $Y(s) = C[sI - A]^{-1}BU(s) + DU(s)$, factorizando $U(s)$ por la derecha quedaría:

$$Y(s) = [C[sI - A]^{-1}B + D]U(s) \quad \text{Ec 2.52}$$

Por lo tanto, si el modelo en espacio de estados es de una planta o sistema MIMO la matriz de transferencia $M(s)$ sería:

$$M(s) = C[sI - A]^{-1}B + D \quad \text{Ec 2.53}$$

Sí el modelo es de una planta o sistema tipo SISO, entonces la función de transferencia quedaría:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D \quad \text{Ec 2.54}$$

La matriz $[sI - A]$ recibe el nombre de $\Phi(s)$, por ende, $G(s) = C\Phi(s)B + D$, para sistemas o plantas donde $D = 0$ la expresión se reduce a:

$$G(s) = C\Phi(s)B \quad \text{Ec 2.55}$$

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

A continuación se describirá cómo obtener por métodos matriciales la función de transferencia para el motor D.C de la Figura 2.16, utilizando el espacio de estados obtenido con variables físicas.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{1}{L_a} \\ \frac{K_v K_a}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_v} \end{bmatrix} x(t)$$

La función de transferencia se define como $G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$, para el ejemplo $D = 0$, la expresión de $G(s)$ se reduce a $G(s) = C[sI - A]^{-1}B = C\Phi(s)B$.

- Como el sistema es de orden 2 entonces si se define: $s\mathbf{I} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$.
- Entonces la matriz $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{1}{L_a} \\ \frac{K_v K_a}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} \\ -\frac{K_v K_a}{J} & s + \frac{b}{J} \end{bmatrix}$.
- La inversa de una matriz está definida como ($\mathbf{P}^{-1} = \frac{\text{Adj } \mathbf{P}}{\text{Det } \mathbf{P}}$) la relación entre su adjunta y el determinante. La matriz adjunta es igual a la transpuesta de la matriz de cofactores de P ($\text{Adj } \mathbf{P} = [\text{cof } \mathbf{P}]^T$), entonces :

$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{Adj } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\text{Det } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} = \frac{\text{cof } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^T}{\text{Det } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}$, por lo tanto la matriz de cofactores sería:

$$\text{cof } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s + \frac{b}{J} & \frac{K_v K_a}{J} \\ -\frac{1}{L_a} & s + \frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix},$$

$$\text{cof } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^T = \begin{bmatrix} s + \frac{b}{J} & -\frac{1}{L_a} \\ \frac{K_v K_a}{J} & s + \frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix},$$

$$\text{Det } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \left[\left(s + \frac{b}{J} \right) \left(s + \frac{R_a}{L_a} \right) - \left(\frac{K_v K_a}{J} \right) \left(-\frac{1}{L_a} \right) \right],$$

$$\text{Det } [s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \left[s^2 + \left(\frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{K_v K_a}{JL_a} \right] = s^2 + \left(\frac{bL_a + JR_a}{JL_a} \right) s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{K_v K_a}{JL_a}, \text{ entonces,}$$

$$\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{b}{J} & -\frac{1}{L_a} \\ \frac{K_v K_a}{J} & s + \frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}}{s^2 + \left(\frac{bL_a + JR_a}{JL_a} \right) s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{K_v K_a}{JL_a}}, \text{ la función de transferencia sería:}$$

$$G(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{b}{J} & -\frac{1}{L_a} \\ \frac{K_v K_a}{J} & s + \frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + \left(\frac{bL_a + JR_a}{JL_a} \right) s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{K_v K_a}{JL_a}};$$

$$G(s) = \frac{\left[\frac{K_a}{J} \quad \frac{1}{K_v} \left(s + \frac{R_a}{L_a} \right) \right] \cdot \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + \left(\frac{bL_a + JR_a}{JL_a} \right) s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{K_v K_a}{JL_a}} = \frac{K_a/JL_a}{s^2 + \left(\frac{bL_a + JR_a}{JL_a} \right) s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{K_v K_a}{JL_a}};$$

$$G_T(s) = \frac{K_a/JL_a}{s^2 + \left(\frac{bL_a + JR_a}{JL_a} \right) s + \frac{bR_a}{JL_a} + \frac{K_v K_a}{JL_a}}, \text{ es la misma función que se encuentra en Ec 2.37}$$

$$G_T(s) = \frac{K_a}{(L_a s + R_a)(J s + b) + K_v K_a}$$

2.11.5 Transformación entre espacio de estados:

En el diseño de controladores con espacio de estados existen algoritmos y reglas de diseño que están generalizados para variables canónicas; pero en la vida real estos algoritmos se deben implementar sobre variables físicas, medibles e instrumentadas, que se encuentran en el proceso y que en pocas ocasiones coinciden con las canónicas. En estos casos es conveniente hallar una matriz de transformación entre espacio de estados, que permita llevar cualquier análisis o diseño de variables canónicas a físicas y viceversa.

Supóngase que se conocen dos representaciones en espacios de estado de la misma planta o sistema, con vectores de estado $\mathbf{x}_a(t)$ y $\mathbf{x}_b(t)$ respectivamente, definidos como aparecen en las ecuaciones Ec 2.56, Ec 2.57, Ec 2.58 y Ec 2.59.

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a u(t) \quad \text{Ec. 2.56}$$

$$y(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a \quad \text{Ec 2.57}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u(t) \quad \text{Ec 2.58}$$

$$y(t) = \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b \quad \text{Ec 2.59}$$

Se tiene que $\mathbf{x}_a = \mathbf{T} \mathbf{x}_b$, siendo 'T' la matriz de transformación lineal entre los espacios de estados, donde $\mathbf{x}_b = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}_a$, como aparece en la Figura 2.42.

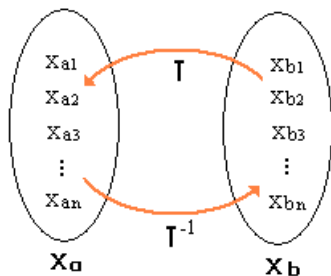


Figura 2.42 transformación entre espacio de estados.

Reemplazando la transformación $\mathbf{x}_a = \mathbf{T}\mathbf{x}_b$ en la ecuación Ec. 2.56 y Ec 2.57 se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_b &= \mathbf{A}_a\mathbf{T}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_a u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_a\mathbf{T}\mathbf{x}_b\end{aligned}$$

Para que el espacio de estados quede en términos de \mathbf{x}_b como se encuentra en la expresión Ec. 2.58 se multiplica por la inversa de \mathbf{T} (\mathbf{T}^{-1}), por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_a\mathbf{T}\mathbf{x}_b + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_a u(t) \quad \text{Ec 2.60}$$

$$y(t) = \mathbf{C}_a\mathbf{T}\mathbf{x}_b \quad \text{Ec 2.61}$$

Igualando las expresiones Ec 2.60 con Ec 2.58 y Ec 2.61 con Ec 2.59

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_a\mathbf{T}\mathbf{x}_b + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_a u(t) = \mathbf{A}_b\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_a\mathbf{T}\mathbf{x}_b = \mathbf{C}_b\mathbf{x}_b, \text{ se deduce que, } \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_a\mathbf{T} = \mathbf{A}_b, \\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_b \text{ y } \mathbf{C}_a\mathbf{T} = \mathbf{C}_b.$$

Las ecuaciones anteriores se encuentran en términos de \mathbf{T} y \mathbf{T}^{-1} , para dejarlas en función de la matriz de transformación lineal es necesario multiplicar algunas expresiones por \mathbf{T} entonces, $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_a\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{A}_b$, $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_a = \mathbf{T}\mathbf{B}_b$ y $\mathbf{C}_a\mathbf{T} = \mathbf{C}_b$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_a\mathbf{T} &= \mathbf{T}\mathbf{A}_b \\ \mathbf{B}_a &= \mathbf{T}\mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_a\mathbf{T} &= \mathbf{C}_b\end{aligned} \quad \text{Ec 2.62}$$

Las ecuaciones que se encuentran en Ec 2.62 permiten obtener las componentes que forman la matriz de transformación \mathbf{T} .

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

Ejemplo: Para la planta representada por el diagrama de bloques de la Figura 2.43 se desea obtener dos representaciones en espacio de estados de las cuales una debe ser la canónica y la otra con las variables físicas $Z(s)$ y $Q(s)$ que se encuentran especificadas en el diagrama; luego se requiere encontrar la matriz de transformación entre los espacios de estado.

- La función de transferencia para la planta sería, $G(s) = \frac{4}{s^2 - 2s - 15}$, de la generalización para la representación en espacio de estados con variables canónicas x_c (Ec 2.46), se tiene que:

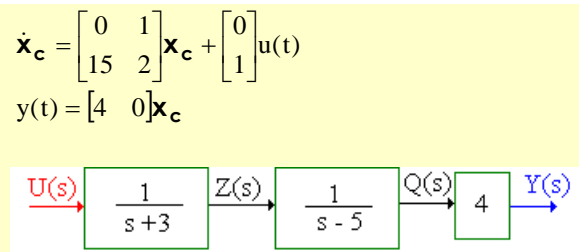


Figura 2.43 Diagrama de bloques planta (ejemplo Secc 2.11.5)

- El espacio de estados físico conformado por $x_{f1} = z(t)$ y $x_{f2} = q(t)$ donde, $\mathcal{L}^{-1}[Z(s)] = z(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}[Q(s)] = q(t)$ se puede obtener del diagrama de bloques, ya que $Z(s) = \frac{1}{s+3} U(s)$, aplicando transformada inversa de Laplace a $\frac{dz(t)}{dt} + 3z(t) = u(t)$ y despejando $\frac{dz(t)}{dt}$, se tendría que, $\frac{dz(t)}{dt} = -3z(t) + u(t)$, dejando la expresión en términos de las variables de estado físicas, $\boxed{\dot{x}_{f1} = -3x_{f1} + u(t)}$. Siendo $Q(s) = \frac{1}{s-5} Z(s)$, aplicando \mathcal{L}^{-1} a la expresión entonces, $\frac{dq(t)}{dt} - 5q(t) = z(t)$, despejando $\frac{dq(t)}{dt}$, se deduce que $\frac{dq(t)}{dt} = 5q(t) + z(t)$, dejándola en términos de las variables de estado $\boxed{\dot{x}_{f2} = x_{f1} + 5x_{f2}}$.
- La ecuación de salida $y(t) = 4q(t)$ en variables de estado sería $y(t) = 4x_{f2}$, expresando las derivadas de las variables de estado y la ecuación de salida en forma matricial se tiene que el espacio de estados físico sería:

$$\dot{\mathbf{x}}_f = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f$$

- Sí $\mathbf{x}_c = \mathbf{T} \mathbf{x}_f$ donde las matrices del espacio de estados x_c son $\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$, y las matrices de espacio de estado x_f son $\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$ entonces aplicando las expresiones que están en Ec 2.62 se puede obtener \mathbf{T} .
- Por lo tanto:

$$\mathbf{A}_c \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{A}_f$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{T} \mathbf{B}_f, \text{ sí la matriz de transformación lineal } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C}_c \mathbf{T} = \mathbf{C}_f$$

$$\bullet \quad \mathbf{A}_c \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{A}_f \therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{T} \mathbf{B}_f \therefore \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{C}_c \mathbf{T} = \mathbf{C}_f \therefore \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- De la expresión (3) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 4t_{11} & 4t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } t_{11} = 0 \text{ y } t_{12} = 1.$$

- De la expresión (2) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } t_{21} = 1.$$

- Remplazando t_{11} , t_{12} y t_{21} entonces \mathbf{T} quedaría :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{22} \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto en (1) se tiene que } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; \text{ entonces } \begin{bmatrix} 1 & t_{22} \\ 2 & 15 + 2t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 + t_{22} & 5t_{22} \end{bmatrix} \text{ de ésta}$$

expresión se deduce que $t_{22} = 5$

- En conclusión la matriz de transformación lineal $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ para $\mathbf{x}_c = \mathbf{T} \mathbf{x}_f$.
- La matriz de transformación para $\mathbf{x}_f = \mathbf{T}_2 \mathbf{x}_c$ es la inversa de \mathbf{T} , entonces $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}^{-1}$.

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

ROHRS Charles E; MELSA, James L. y SCHULTZ, Donald G. SISTEMAS DE CONTROL LINEAL. Ed. McGraw-Hill. 1994.

2.12 Respuesta en el tiempo

La respuesta en el tiempo de sistemas o plantas depende de su orden y de la señal excitadora con la cual se este trabajando. En general si se tiene una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Entonces $Y(s) = G(s)U(s)$, aplicando transformada inversa de Laplace se tiene que, $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$, por lo tanto, la salida en función del tiempo sería igual a:

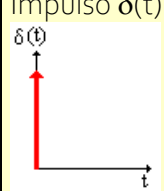
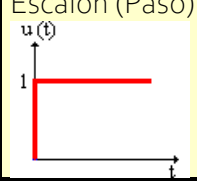
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \quad \text{Ec 2.63}$$

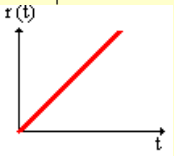
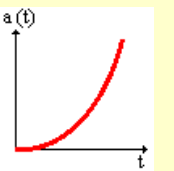
Donde, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $u(t)$ es la señal excitadora.

IDEAS COMPLEMENTARIAS ...

Algunas de las señales más comunes en el análisis de la respuesta en el tiempo para sistemas o plantas son el impulso, el escalón, la rampa y la parábola. La Tabla 2.13 contiene un resumen de la definición de las señales en el tiempo.

Tabla 2.13 funciones excitadoras fundamentales.

Tipo de Señal	Definición en el dominio del tiempo	Transformada de Laplace
Impulso $\delta(t)$ 	$\delta(t) = \begin{cases} \alpha & \forall t = 0 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases}$	1
Escalón (Paso) 	$u(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases}$	$\frac{1}{s}$

<p>Rampa</p> 	$r(t) = \begin{cases} t & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases}$	$\frac{1}{s^2}$	
<p>Parábola</p> 	$a(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases}$	$\frac{1}{s^3}$	

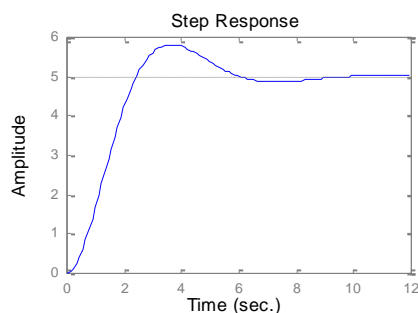
SOFTWARE Y SIMULACION...

Una vez se obtiene el modelo del sistema, con MATLAB es fácil observar su respuesta en el tiempo, por ejemplo para conocer el comportamiento de un sistema ante una entrada escalón, se tiene el comando 'step' y para observar la respuesta al impulso el comando 'impulse'.

Ejemplo1: Para la función de transferencia $G(s) = \frac{5}{(s^2 + s + 1)}$, obténgase la respuesta al escalón y al impulso, usando MATLAB. Entonces se tendría que:

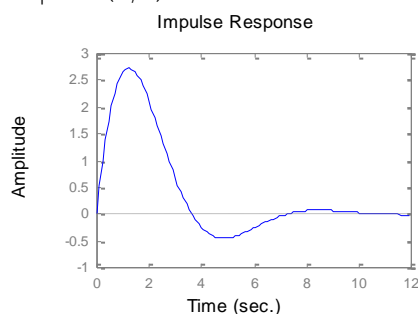
```
» n=5;
» d=[1 1 1];
» step(n,d)
```

La respuesta generada es una gráfica que contiene el comportamiento de $G(s)$ ante el escalón así:



Aplicando el comando 'impulse' se tiene:

```
» impulse(n,d)
```



2.13 Características de la Retroalimentación Negativa

Las características principales de la retroalimentación negativa son tres:

- Insensibiliza el sistema a cambios en los parámetros internos.
- Insensibiliza el sistema a perturbaciones en la salida.
- Se puede manejar el ancho de banda.

Sí $F(\alpha, \beta, \rho)$, es una función, donde α , β , y ρ son los parámetros que la definen; el factor de sensibilidad de la función con respecto a uno de los parámetros se define como la relación entre el cambio de la función y la función original sobre la relación entre el cambio producido en el parámetro y el parámetro original (ver ecuación Ec 2.64).

$$S_{\alpha}^F = \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta \alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{F} \frac{dF}{d\alpha} \quad \text{Ec 2.64}$$

2.13.1 *Insensibilización del sistema a cambios en los parámetros internos:*

Si se tiene un sistema en lazo abierto como el que aparece en la Figura 2.44a donde la función de transferencia total M_o del sistema sería $M_o = G_1 G_2$, entonces el factor de sensibilidad de la función de transferencia general del sistema con respecto a los parámetros de G_1 sería:

$$S_{G_1}^{M_o} = \frac{G_1}{G_1 G_2} \frac{dM_o}{dG_1} = \frac{G_1 G_2}{G_1 G_2} = 1$$

Obsérvese que el factor de sensibilidad es significativo. Por tanto, cualquier cambio en G_1 ocasiona cambios apreciables en la función del sistema.

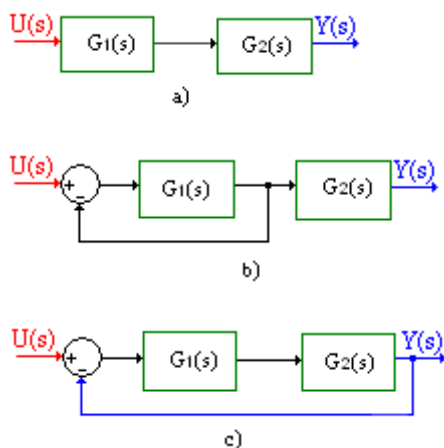


Figura 2.44 Sistema sin y con retroalimentación.

Si se retroalimenta el sistema tal y como se muestra en la Figura 2.44b, la función de transferencia total M_c quedaría $M_c = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H}$, si se obtienen los factores de sensibilidad con respecto a G_1 y a G_2 , entonces se tendría que:

$$S_{G_1}^{M_c} = \frac{G_1}{G_1 G_2 / (1 + G_1 H)} \frac{dM_c}{dG_1} = \frac{G_1 (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{d}{dG_1} \left[\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H} \right] = \frac{1 + G_1 H}{G_2} \frac{(1 + G_1 H) G_2 - G_1 G_2 H}{(1 + G_1 H)^2} = \frac{1}{1 + G_1 H}$$

$$S_{G_2}^{M_c} = \frac{G_2}{G_1 G_2 / (1 + G_1 H)} \frac{dM_c}{dG_2} = \frac{G_2 (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{d}{dG_2} \left[\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H} \right] = \frac{1 + G_1 H}{G_1} \frac{G_1}{1 + G_1 H} = 1$$

La sensibilidad del sistema con respecto a G_1 queda en términos de H , que es la función de retroalimentación, la cual se puede diseñar de tal forma que el factor de sensibilidad se haga pequeño. En resumen la retroalimentación hace que M_c se insensibilice con respecto a G_1 . Sin embargo, el factor de sensibilidad con respecto a G_2 sigue siendo grande ya que esta parte del sistema no quedó dentro del lazo de retroalimentación.

Pero qué le pasará al sistema ante variaciones de H ? Hallando el factor de sensibilidad se tiene:

$$S_H^{M_c} = \frac{H}{G_1 G_2 / (1 + G_1 H)} \frac{dM_c}{dH} = \frac{H (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{d}{dH} \left[\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H} \right] = \frac{H (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{(-G_1 G_1 G_2)}{(1 + G_1 H)^2} = \frac{-G_1 H}{1 + G_1 H}$$

Si H es grande entonces, $S_H^{M_c} = -1$, lo que significa que el sistema es altamente sensible con respecto a la función de retroalimentación.

Si se retroalimenta el sistema como en la Figura 2.44c el sistema se insensibiliza tanto para los cambios de G_1 como de G_2 .

2.13.2 Insensibilidad a las perturbaciones en la salida del sistema

En la Figura 2.45 se observa un sistema con perturbaciones a la salida, como es un sistema LTI cumple con el teorema de la superposición, donde la función de perturbación $P(s)$ actúa como otra entrada.

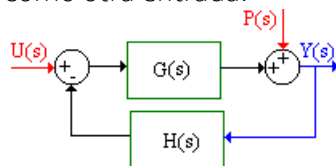


Figura 2.45 Sistema con perturbaciones a la salida.

Haciendo $U(s) = 0$ y hallando la función de transferencia con respecto a las perturbaciones se observa que, $\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{1+GH}$, donde H es la función de ganancia en el lazo de retroalimentación. Si H se hace lo suficientemente grande, la dinámica de la salida con respecto a las perturbaciones tiende a cero.

2.13.3 Manejo del ancho de Banda

Suponiendo el sistema de la Figura 2.46, donde se tiene un factor de retroalimentación β , la función de transferencia total del sistema en lazo cerrado es $M_c(s) = \frac{1}{(s+1)+\beta}$; si se varia el factor de retroalimentación y se obtiene el ancho de banda se puede observar como éste cambia de acuerdo con el valor de β (ver Tabla 2.14)

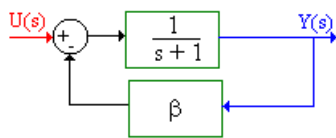
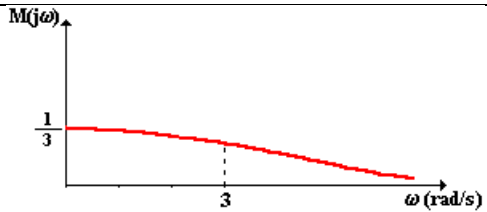


Figura 2.46 Sistema Retroalimentado

Tabla 2.14 Variación del ancho de banda con el lazo de retroalimentación.

β	Función de Transferencia	Gráfica de Magnitud $s = j\omega$	Ancho de Banda (rad/s)	Magnitud
0	$M_o(s) = \frac{1}{s+1}$		1	1
1	$M_c(s) = \frac{1}{s+2}$		2	$\frac{1}{2}$

2	$M_c(s) = \frac{1}{s+3}$		3	$\frac{1}{3}$
---	--------------------------	--	---	---------------

En la Tabla 2.14 aparece la comparación de la respuesta en frecuencia para los tres casos del ejemplo, en la que se observa que a través de la retroalimentación se puede manejar el ancho de banda; a mayor factor de retroalimentación mayor ancho de banda, pero menor ganancia. El factor de retroalimentación define un compromiso entre el ancho de banda y la ganancia del sistema.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

ROHRS Charles E; MELSA, James L. y SCHULTZ, Donald G. SISTEMAS DE CONTROL LINEAL. Ed. McGraw-Hill. 1994.

2.14 Estimación experimental del modelo de una planta

Cuando no es fácil modelar una planta o sistema a través del análisis con leyes de la física se puede recurrir a estimar un modelo a partir de la información en la salida, para una entrada predeterminada y en un punto de operación específico; lo que se conoce como “*curva de reacción*”.

Existen diversos métodos que permiten hallar un modelo en forma experimental, por ejemplo, en la entrada se puede usar una señal impulsiva que en el dominio de la frecuencia estimula todas las dinámicas (ancho de banda infinito) o una señal escalón que facilita la comprensión de la respuesta de la planta en el dominio del tiempo. En esta sección se discutirán dos de los más usados utilizando como señal excitadora un escalón.

Para una planta con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$, “la *curva de reacción* se obtiene sobrestimulando la entrada $u(t)$ y observando los cambios en $y(t)$ ” (ver Figura 2.47). Una vez el sistema se tiene en el punto de operación, se aplica un pequeño escalón $\Delta u(t)$ sobre el valor inicial y se observa la “*reacción*” en la señal de salida $\Delta y(t)$. Para realizar este experimento es necesario tener la planta instrumentada y poder medir la reacción de la salida.

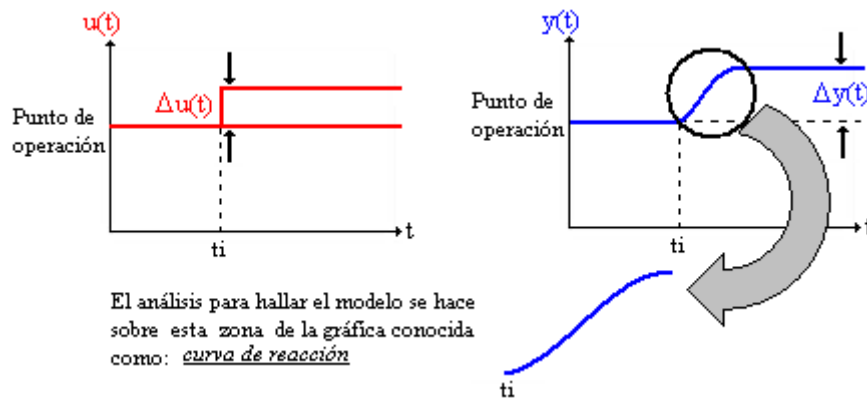


Figura 2.47 Curva de Reacción

Si la salida es *amortiguada o sobre amortiguada* se puede aproximar a un modelo de primer orden más tiempo muerto POTM de la forma:

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1} \quad \text{Ec 2.65}$$

Donde la ganancia del sistema sería $K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$, τ es la constante de tiempo del sistema y t_0 es el tiempo de retardo. El tiempo donde se aplica el estímulo es t_i , a partir de éste se mide la constante de tiempo y el retardo.

2.14.1 Tangente a la curva de reacción:

En este método se traza una tangente a la curva de reacción en el punto de inflexión de la curva como se muestra en la Figura 2.48, y el modelo se aproxima a uno de primer orden (Ec 2.65)

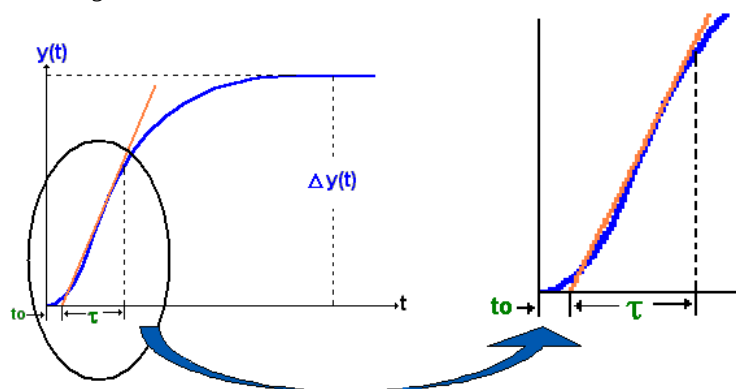


Figura 2.48 Método de la tangente.

Los valores de t_0 y τ se obtienen observando el eje del tiempo en la gráfica, teniendo en cuenta los cortes de la recta tangente con la curva. Por ser un método gráfico depende

mucho de la habilidad con la que se trace la recta tangente con el fin de no incorporar errores en el análisis.

2.14.2 Método de Smith

Este método es independiente de la recta tangente a la curva, seleccionando t_0 y τ de tal forma que el modelo con la planta real coincidan en la región de alta tasa de cambio. (Cecil L. Smith)

Los puntos recomendados para el análisis son $(t_0 + \frac{1}{3}\tau)$ y $(t_0 + \tau)$ por tanto:

$\Delta y(t_0 + \tau) = K\Delta u[1 - e^{-1}] = 0.632\Delta y(t)$ y $\Delta y(t_0 + \frac{1}{3}\tau) = K\Delta u[1 - e^{-\frac{1}{3}}] = 0.283\Delta y(t)$, estos puntos son los denotados en la Figura 2.49 como t_2 y t_1 respectivamente, los valores t_0 y τ se pueden despejar a partir de $t_0 + \tau = t_2$ y $t_0 + \frac{1}{3}\tau = t_1$ entonces:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \\ t_0 &= t_2 - \tau\end{aligned}\quad \text{Ec 2.66}$$

Es uno de los modelos más usados ya que permite realizar una aproximación más exacta al sistema real.

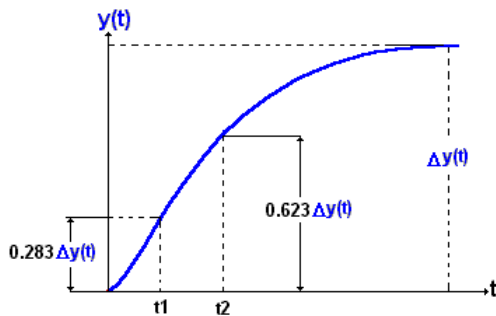


Figura 2.49 Método de Smith

2.14.3 Aproximación del Retardo

Generalmente si se utiliza un software de simulación, el retardo aparece como un bloque más en el que solo es necesario definir el tiempo ' t_0 ', no obstante, en ocasiones se requiere hallar una función polinómica en variable ' s ' que facilite el análisis matemático.

Utilizando la aproximación de Padé el retardo $e^{-t_0 s}$ se expresa en la Ec 2.67:

$$e^{-t_0 s} = \frac{1 - \frac{t_0}{2}s}{1 + \frac{t_0}{2}s}\quad \text{Ec 2.67}$$

IDEAS COMPLEMENTARIAS ...

Generalmente el modelo que se halla en forma experimental no solo es de la planta, sino que involucra el actuador y el bloque de medición tratados en la sección 1.2. Para observar la salida de una planta es mejor que ésta se encuentre instrumentada, esto debido a que las señales ya están debidamente adecuadas, facilitando la comparación de la reacción de la salida con el estímulo en la entrada. Lo ideal es buscar que las señales a medir se encuentren adecuadas en un tipo de señal fácilmente medible. Por ejemplo, voltajes o corrientes, en donde para plantas con frecuencias naturales mayores a 100mHz las curvas se pueden medir con un osciloscopio, y para plantas con menores frecuencias es necesario tomar datos o utilizar otro tipo de instrumento medidor (registradores...). Por ejemplo para un motor DC que va a ser controlado por corriente de armadura, y como variable de salida se tiene la velocidad; si se desea obtener la curva de reacción es necesario tener el motor instrumentado, por tanto, para manipular la entrada $i_a(t)$ corriente de armadura se va a utilizar un rectificador de onda completa (actuador) comandado por PWM y para medir la salida $\omega(t)$, una dínamo DC apropiadamente acoplada al eje del motor (bloque de medición –sensor), entonces:

- Inicialmente la entrada y la salida respectivamente son $i_a(t)$ y $\omega(t)$, pero una vez la planta está instrumentada la entrada que se va a sobre estimular es la referencia de PWM, $u(t)$ y como salida se tendría el voltaje que entrega la dínamo $v(t)$. Es como si se tratara de una nueva planta compuesta por actuador-planta inicial (motor DC)-sensor.

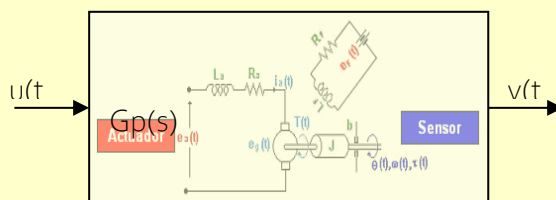


Figura 2.50 Planta instrumentada

Por lo tanto, el modelo $G_p(s)$ que se obtiene ya involucra la dinámica del actuador y del sensor, como se muestra en la Figura 2.50

A continuación se presenta un ejemplo de un sistema de orden dos al que le fue estimado un modelo de primer orden, más tiempo muerto POTM como el de la ecuación 2.65.

La dinámica de la planta es $G_p(s) = \frac{300}{s^2 + 80s + 100}$; suponiendo que dicha dinámica fue difícil de modelar por leyes físicas y por tanto fue necesario hallar un modelo utilizando un método experimental entonces:

- Se usa la prueba del escalón como se muestra en la Figura 2.51

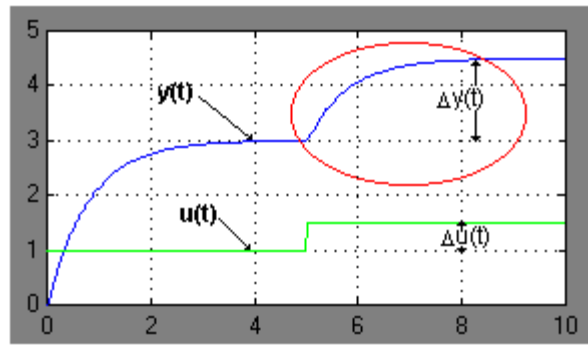


Figura 2.51 Prueba del Escalón

- Haciendo un acercamiento a la curva de reacción se obtienen los parámetros que aproximan la planta a un modelo de primer orden, más tiempo muerto POMT; donde K , τ y t_0 se obtienen del análisis de la curva de reacción utilizando el método de Smith (ver Figura 2.52)

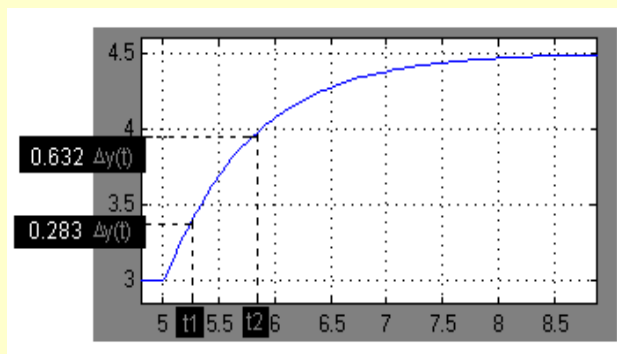


Figura 2.52 Aplicación del método de Smith

Para el ejemplo se aplica un $\Delta u(t)=0.5$ y se obtiene un $\Delta y(t)=1.5$, por tanto $K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} = 3$

$\tau=0.7589$ y $t_0=0.0247$.

$$G(s) = \frac{3e^{-0.0247s}}{0.7589s+1}$$

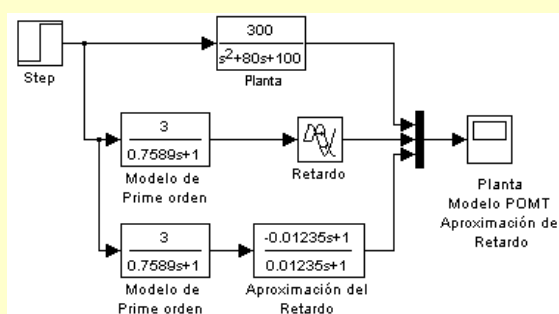


Figura 2.53 Modelo aproximado POTM

En la Figura 2.53 se observan los diagramas de bloques de la planta, el modelo aproximado y el modelo con la aproximación del retardo utilizando Padé.

En la Figura 2.54 se observa que las salidas son tan parecidas que no se pueden distinguir, lo que significa una buena aproximación del modelo a la planta. El tiempo de estabilización de la planta es aproximadamente 4 segundos.

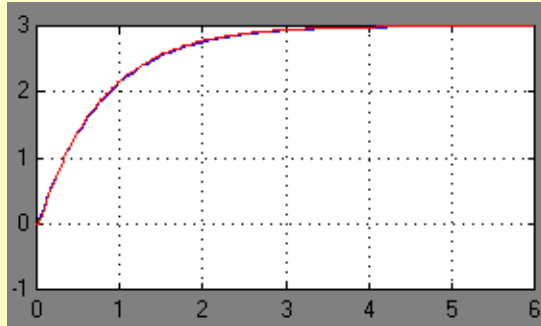


Figura 2.54 Comparación del modelo real con el modelo POTM aproximado

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

SMITH, Carlos A y CORRIPIO, Armando B. CONTROL AUTOMATICO DE PROCESOS. Teoría y Práctica. Capítulo VI Diseño de sistemas de control por retroalimentación con un solo circuito. PAG 274- 277. Ed. LIMUSA, 2001.

2.15 Linealización de Sistemas no lineales

En la naturaleza generalmente se encuentran sistemas no lineales; sin embargo, se puede encontrar un modelo lineal alrededor de un punto de operación. En la obtención de modelos experimentales se observa como el escalón es aplicado en un punto de trabajo específico con el fin de determinar la dinámica del sistema, lo que significa que el modelo hallado es para ese punto de operación y no contiene la dinámica del sistema en general. Los sistemas de nivel y caudal trabajados anteriormente se analizaron a partir de un modelo linealizado.

Si se tiene una señal $y(t)$ y $x(t)$, donde la señal $y(t)$ se puede definir en términos de $x(t)$ como $y = f(x)$, entonces si se tiene un punto de trabajo en \bar{x}, \bar{y} ($\bar{y} = f(\bar{x})$), la ecuación se puede expresar como una serie de Taylor en términos de las variables en el punto de operación Ec 2.68.

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df(x)}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad \text{Ec 2.68}$$

Evaluando las derivadas $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \dots$ en $x = \bar{x}$. Si la variación $x - \bar{x}$ es pequeña, entonces se pueden despreciar las derivadas de orden superior, ya que la porción de la función que se está tomando es casi lineal y por tanto, las derivadas de orden superior tienden a cero. Bajo la anterior premisa se puede decir que:

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \quad \text{Ec 2.69}$$

Donde,
$$K = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}}.$$

Si se hace $\tilde{y} = y - \bar{y}$ y $\tilde{x} = x - \bar{x}$ entonces rescribiendo la ecuación Ec 2.69 se tiene que:

$$\tilde{y} = K\tilde{x} \quad \text{Ec 2.70}$$

La expresión Ec 2.70 es la ecuación de una línea recta, significa que se ha obtenido un modelo linealizado de $y = f(x)$ alrededor del punto de operación \bar{x}, \bar{y} .

Cuando la función es multivariable $y = f(\alpha, \beta)$, también se puede hallar un modelo linealizado; considerando como punto de trabajo $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ y \bar{y} , entonces la función en series de Taylor quedaría:

$$y = f(\alpha, \beta) = f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) + \left[\frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}(\alpha - \bar{\alpha}) + \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta}(\beta - \bar{\beta}) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2}(\alpha - \bar{\alpha})^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta}(\alpha - \bar{\alpha})(\beta - \bar{\beta}) + \frac{\partial^2 f(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2}(\beta - \bar{\beta})^2 \right] + \dots \quad \text{Ec 2.71}$$

Las derivadas parciales son evaluadas en el punto de trabajo $\alpha = \bar{\alpha}$ y $\beta = \bar{\beta}$, y las de orden superior se desprecian, pues el análisis se realiza para pequeños cambios alrededor del punto de operación. La expresión Ec 2.72 contiene la función linealizada

$$y = \bar{y} + K_1(\alpha - \bar{\alpha}) + K_2(\beta - \bar{\beta}) \quad \text{Ec 2.72}$$

Como $\bar{y} = f(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, haciendo $\tilde{y} = y - \bar{y}$, $\tilde{\alpha} = \alpha - \bar{\alpha}$ y $\tilde{\beta} = \beta - \bar{\beta}$ entonces, la expresión Ec 2.72 quedaría:

$$\tilde{y} = K_1\tilde{\alpha} + K_2\tilde{\beta} \quad \text{Ec 2.73}$$