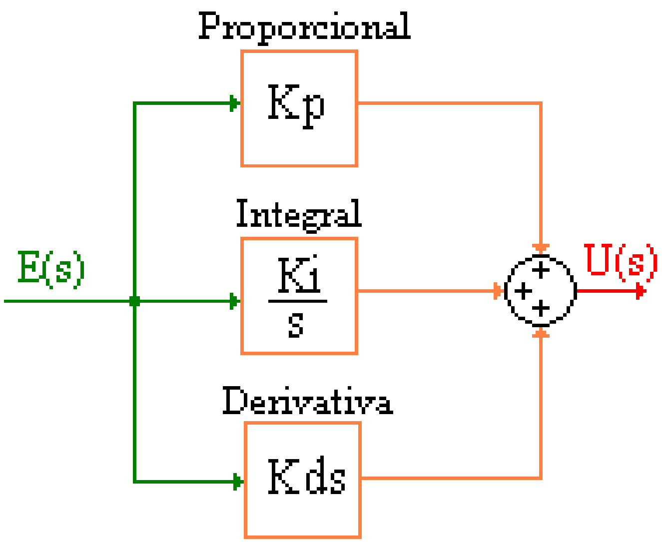
Control Automático

Liliana Fernández Samacá
UPTC Sogamoso

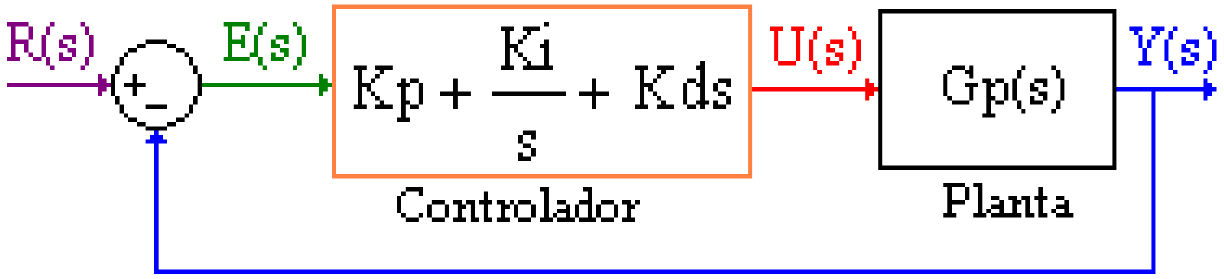
Sesión 7: Compensación
Controladores PID, Retroalimentación de Estados y Compensadores

Controladores PID



a) Diagrama de bloques de un controaldor PID

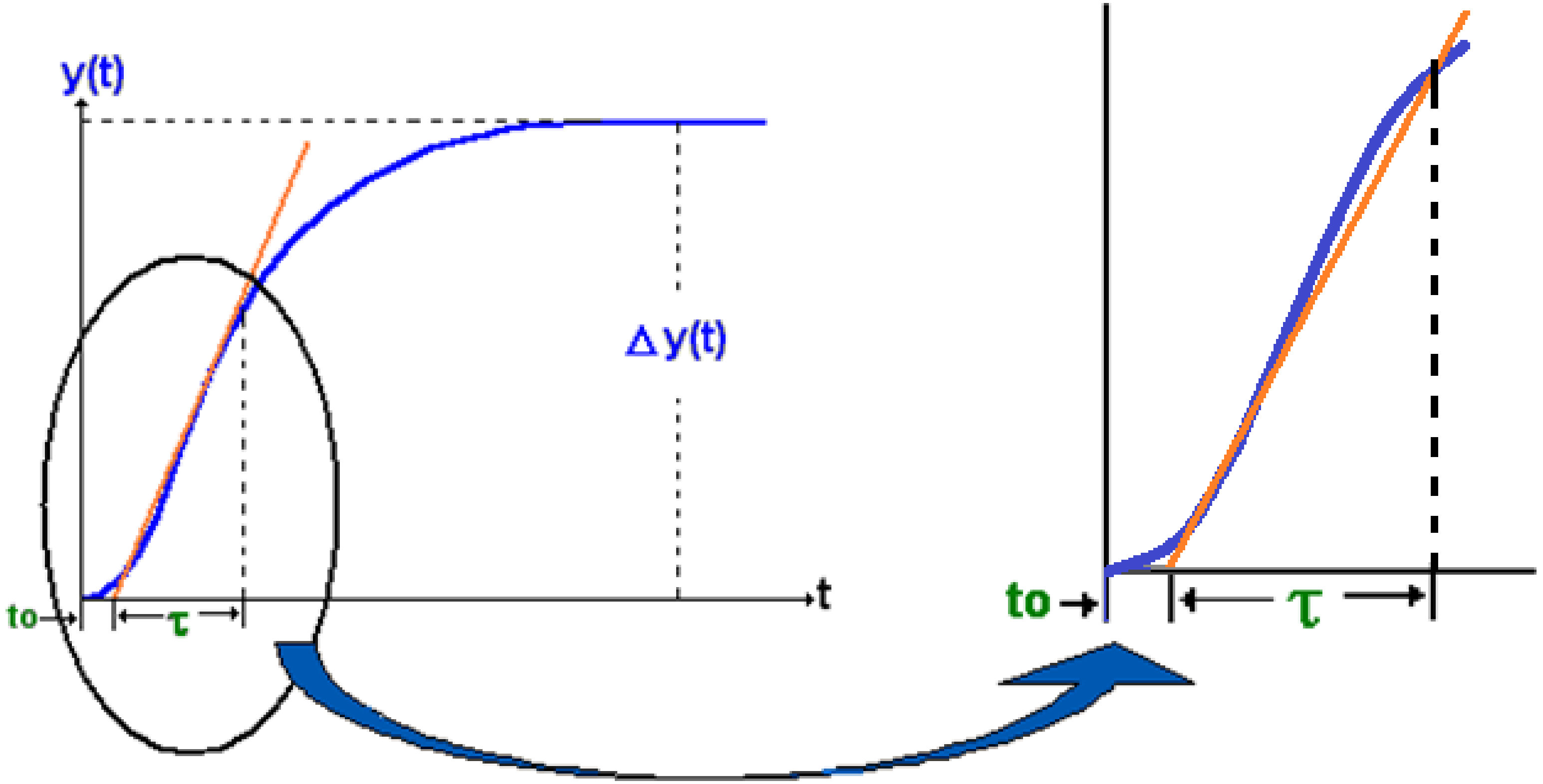
$$\frac{U(s)}{E(s)} = Kp\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]$$



b) Sistema controlado con PID

Curva de reacción

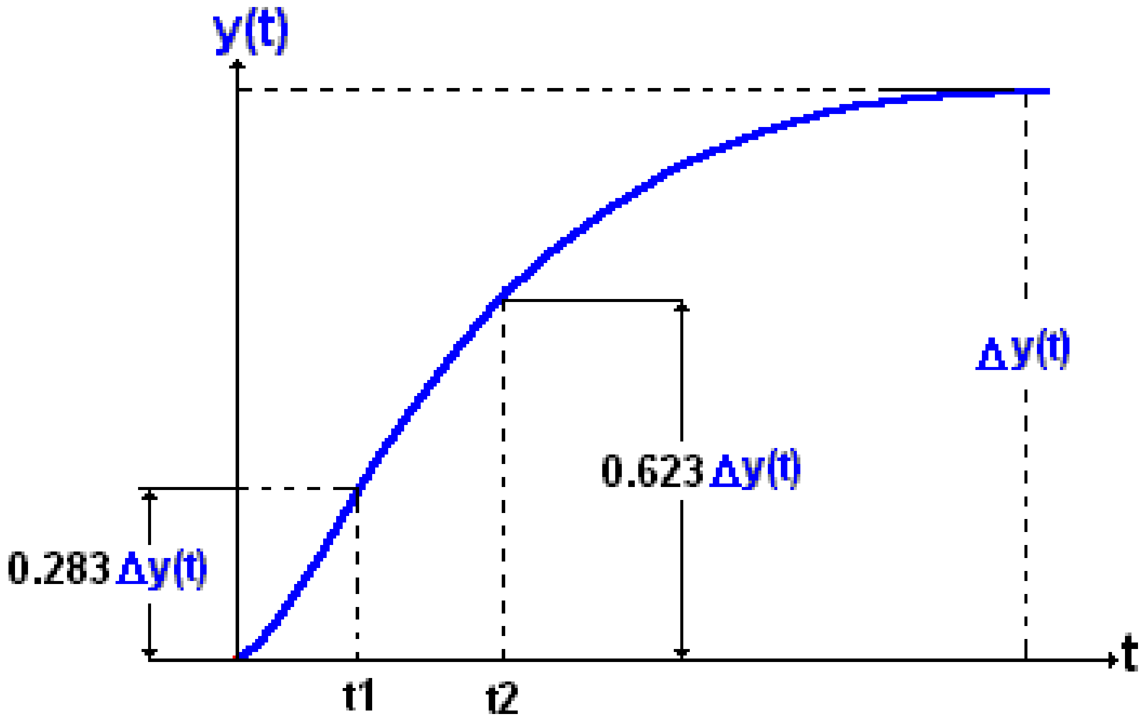
Método de la tangente



$$G(s) = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1}$$

Curva de reacción

Método de dos puntos (Smith)



$$\tau = \tfrac{3}{2}(t_2 - t_1)$$

$$t_o = t_2 - \tau$$

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1}$$

$$e^{-t_o s} = \frac{1 - \frac{t_o}{2}s}{1 + \frac{t_o}{2}s}$$

Controladores PID

Diseño Experimental

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1}$$

$$\boxed{\frac{U(s)}{E(s)} = Kp\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]}$$

Ziegler – Nichols

Controlador	Kp	τ_i	τ_d
P	$\frac{1}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{-1}$	α	0
PI	$\frac{0.9}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{-1}$	$3.33t_o$	0
PID	$\frac{1.2}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{-1}$	$2t_o$	$\frac{1}{2}t_o$

Controladores PID

Diseño Experimental

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1}$$

$$\boxed{\frac{U(s)}{E(s)} = Kp\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]}$$

Criterios de Mínima Integral del error

$$IAE = \int_0^{\alpha} |e(t)|\,dt$$

La integral del valor absoluto del error (IAE)

$$ICE = \int_0^{\alpha} e(t)^2\,dt$$

La integral del cuadrado del error (ICE)

$$ITAE = \int_0^{\alpha} t\,|e(t)|\,dt$$

La integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE)

$$ICET = \int_0^{\alpha} t\,e(t)^2\,dt$$

El cuadrado del error ponderado en el tiempo(ICET)

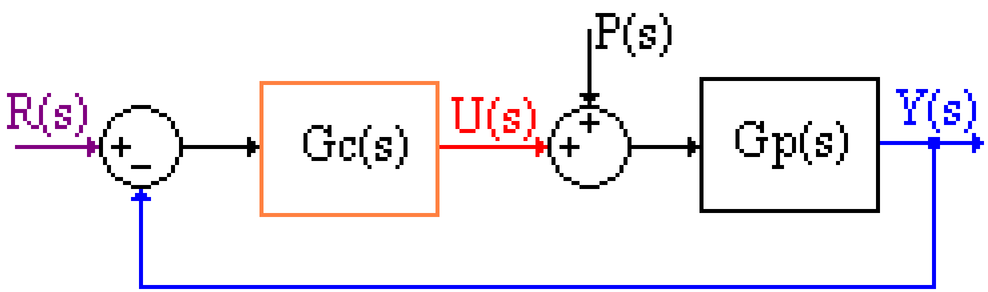
Controladores PID

Diseño Experimental

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = Kp\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]$$

Criterios de Mínima Integral del error



Perturbaciones (Regulación)

Controlador	P		PI				PID					
	$Kp = \frac{a}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^b$		$Kp = \frac{a_1}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_1}$		$\tau_i = \frac{\tau}{a_2}\left(\frac{to}{\tau}\right)^{b_2}$		$Kp = \frac{a_1}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_1}$		$\tau_i = \frac{\tau}{a_2}\left(\frac{to}{\tau}\right)^{b_2}$		$\tau_d = a_3\tau\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_3}$	
Criterios	a	b	a_1	b_1	a_2	b_2	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
ICE	1.411	-0.917	1.305	-0.959	0.492	0.739	1.495	-0.945	1.101	0.771	0.560	1.006
IAE	0.902	-0.985	0.984	-0.986	0.608	0.707	1.435	-0.921	0.878	0.749	0.482	1.137
ITAE	0.490	-1084	0.859	-0.977	0.674	0.680	1.357	-0.947	0.842	0.738	0.381	0.995

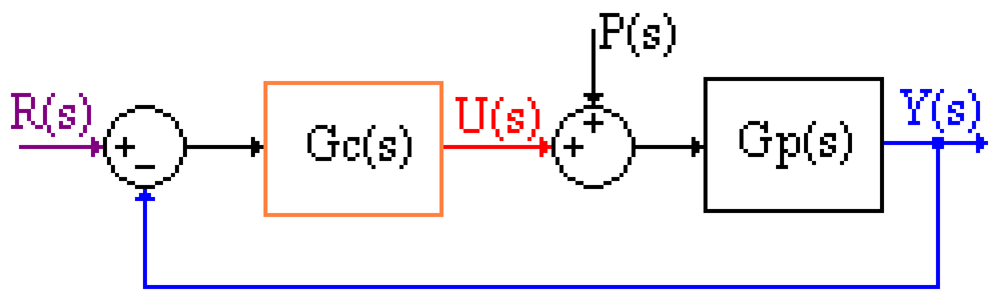
Controladores PID

Diseño Experimental

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_o s}}{\tau s + 1}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = Kp\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]$$

Criterios de Mínima Integral del error



Punto de Control (Seguimiento)

Controlador	PI				PID					
	$Kp = \frac{a_1}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_1}$		$\tau_i = \frac{\tau}{a_2}\left(\frac{to}{\tau}\right)^{b_2}$		$Kp = \frac{a_1}{K}\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_1}$		$\tau_i = \frac{\tau}{a_2}\left(\frac{to}{\tau}\right)^{b_2}$		$\tau_d = a_3 \tau\left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_3}$	
Criterios	a_1	b_1	a_2	b_2	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
IAE	0.758	-0.861	1.02	-0.323	1.086	-0.869	0.740	-0.130	0.348	0.914
ITAE	0.586	-0.916	1.03	-0.165	0.965	-0.855	0.796	-0.147	0.308	0.9292

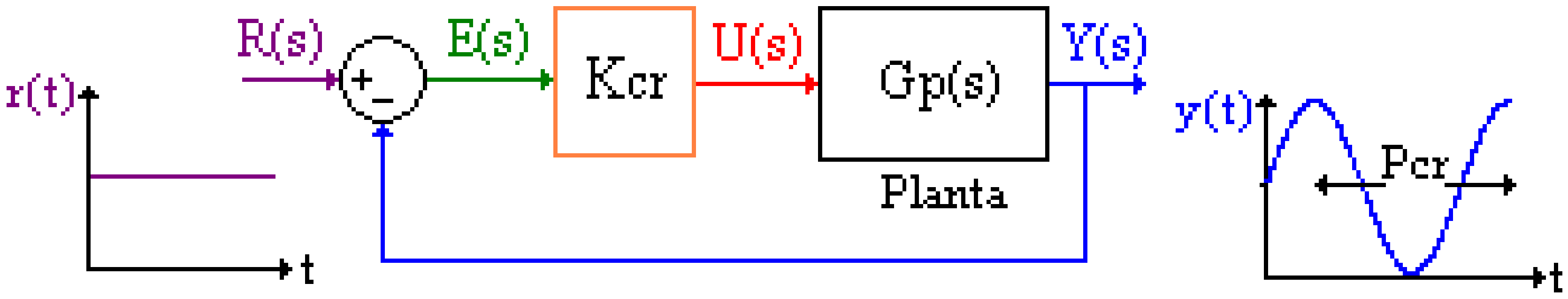
Controladores PID

Diseño Experimental

$$\frac{U(s)}{E(s)} = Kp\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 10}$$

Método Zieglers – Nichols para sistemas inestables.



Controlador	Kp	τ_i	τ_d
P	0.5Kcr	α	0
PI	0.45Kcr	$\frac{1}{1.2}$ Pcr	0
PID	0.6Kcr	0.5Pcr	0.125Pcr

Controladores PD

Cancelación polo-cero

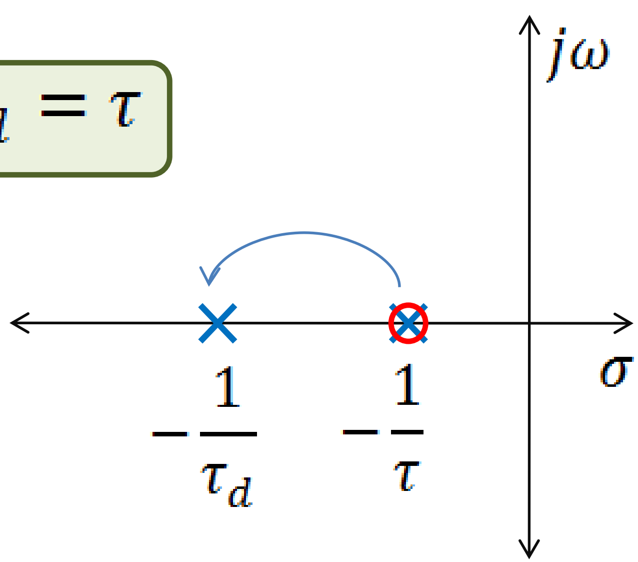
$$Gc(s) = \frac{Kp(\tau_d s + 1)}{(0.1\tau_d s + 1)}$$

$$Gp(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$Gp(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$$

$\tau_d = \tau_1$ **o** $\tau_d = \tau_2$?

$$\tau_d = \tau$$



$$Gp(s) = \frac{2}{(2s + 1)(6s + 1)}$$

Controladores PI

Cancelación polo-cero

$$Gc(s) = \frac{1}{\tau_i s}$$

$$Gp(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$$

$$Gc(s) = \frac{Kp(\tau_i s + 1)}{\tau_i s}$$

$$Gp(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$\tau_i = \tau_1 \; o \; \tau_i = \tau_2$$?

Diseño analítico

$$Gp(s) = \frac{1}{(s + 0.5)(s + 2)}$$

- Aproximación de la derivada por el método de Euler:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

- Aproximación de la integral por sumatorio (regla de Simpson):

$$\int_0^{Tk} e(t)dt = \sum_{i=0}^{(k-1)T} Te(i)$$

- Expresión discreta:

$$u(k) = K_c \left(e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{(k-1)T} e(i) + \frac{T_d}{T}(e(k) - e(k-1)) \right)$$

- Función de transferencia del regulador o controlador PID:

$$G_R(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z(z-1)} \qquad a_0 = K_c\left(1 + \frac{T_d}{T}\right) \qquad a_1 = K_c\left(-1 + \frac{T}{T_i} - \frac{2T_d}{T}\right) \qquad a_2 = K_c \frac{T_d}{T}$$

http://www.eorts.com/dise%C3%B1o-de-reguladores-discretos/discretizaci%C3%B3n-de-un-pid-continuo.html

Retroalimentación de Estados

Modelo de referencia

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_m x} + \mathbf{B_m} r(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C_m x}$$

$$Md(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\rho\omega_n \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} r(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Señal de control

$$u(t) = \mathbf{g}\, r(t) - \mathbf{K}^T \mathbf{x}$$

Espacio de estados de la planta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{Cx}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}\left[\mathbf{g}\, r(t) - \mathbf{K}^T\mathbf{x}\right]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bg}\, r(t) - \mathbf{BK}^T\mathbf{x}$$

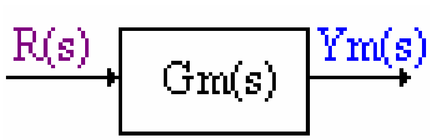
$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{A} - \mathbf{BK}^T\right]\mathbf{x} + \mathbf{Bg}\, r(t)$$

$$\mathbf{A_m x} + \mathbf{B_m} r(t) = \left[\mathbf{A} - \mathbf{BK}^T\right]\mathbf{x} + \mathbf{Bg}\, r(t)$$

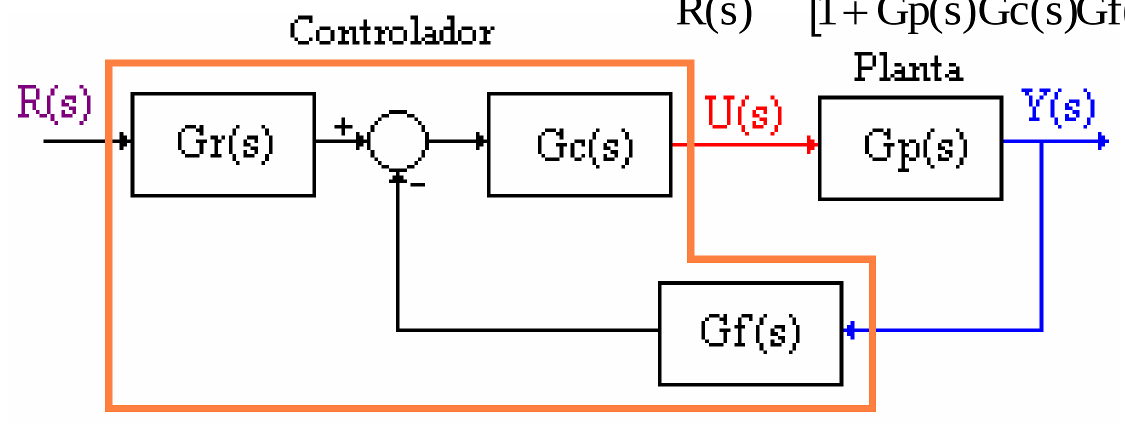
$$\mathbf{A_m} = \left[\mathbf{A} - \mathbf{BK}^T\right]$$
$$\mathbf{B_m} = \mathbf{Bg}$$

Controlador Algebraico

Modelo deseado del sistema



$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Gp(s)Gc(s)Gr(s)}{[1+Gp(s)Gc(s)Gf(s)]}$$



$$Y(s)=Gp(s)U(s)$$

$$Gp(s)=\frac{Bp(s)}{Ap(s)}$$

$$U(s)=Gc(s)E(s)$$

$$Gc(s)=\frac{Bc(s)}{Ac(s)}$$

$$E(s)=Gr(s)R(s)-Gf(s)Y(s)$$

$$Gr(s)=\frac{Br(s)}{Ar(s)} \qquad Gf(s)=\frac{Bf(s)}{Af(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{Bp(s)}{Ap(s)}\frac{Bc(s)}{Ac(s)}\frac{Br(s)}{Ar(s)}}{\left[1+\frac{Bp(s)}{Ap(s)}\frac{Bc(s)}{Ac(s)}\frac{Bf(s)}{Af(s)}\right]}=\frac{Bp(s)Bc(s)Br(s)Af(s)}{[Ap(s)Ac(s)Af(s)+Bp(s)Bc(s)Bf(s)]Ar(s)}$$

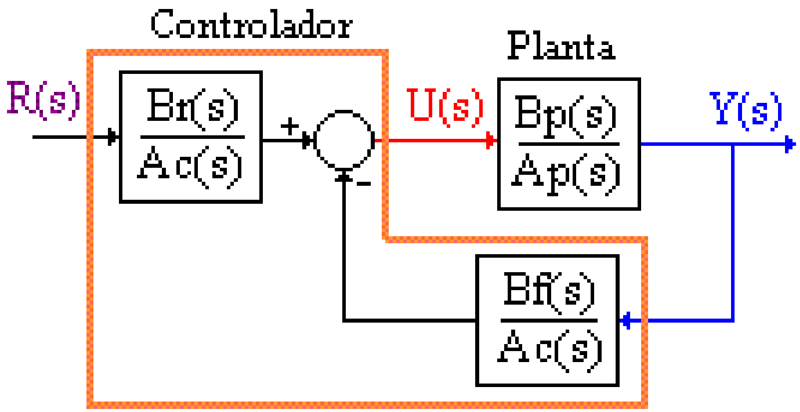
Con el fin de simplificar el diseño se hace

$$Ar(s)=Af(s)$$

$$Bc(s)=Af(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Bp(s)Br(s)}{[Ap(s)Ac(s)+Bp(s)Bf(s)]}=Mc(s)$$

Controlador Algebraico



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Bp(s)Br(s)}{\left[Ap(s)Ac(s) + Bp(s)Bf(s)\right]} = Mc(s)$$

$$Bp(s) = b_{p0}s^{m_p} + b_{p1}s^{m_p-1} + b_{p2}s^{m_p-2} \ldots + b_{p_{m_p-1}}s + b_{p_{m_p}}$$

$$Ap(s) = s^{n_p} + a_{p1}s^{n_p-1} + a_{p2}s^{n_p-2} \ldots + a_{p_{n_p-1}}s + a_{p_{n_p}}$$

$$gd\left[Bp(s)\right] = m_p$$

$$gd\left[Ap(s)\right] = n_p$$

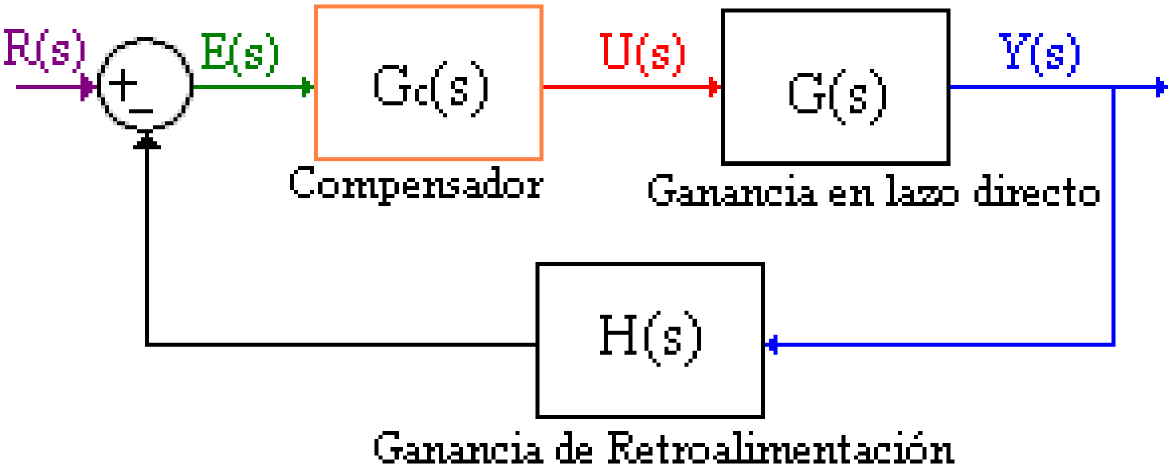
Modelo deseado del sistema

$$Gm(s) = \frac{Bm(s)}{Am(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \Lambda + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \Lambda + a_{n-1}s + a_n}$$

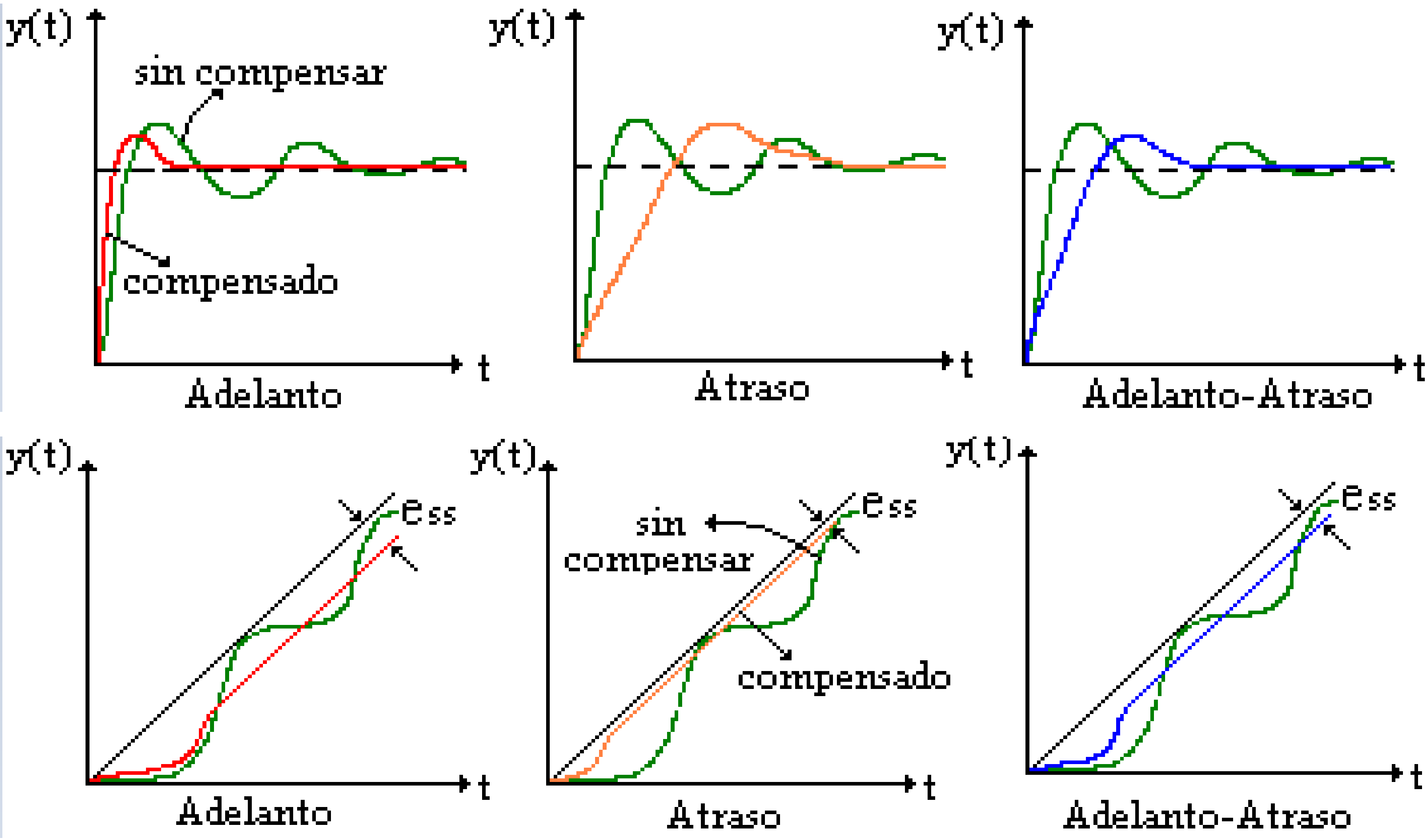
$$gd\left[Bm(s)\right] = m$$

$$gd\left[Am(s)\right] = n$$

Compensadores



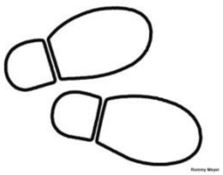
Compensadores



Compensador en adelanto

lead-compensator

$$Gc(s) = Kc\alpha \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} = Kc \frac{(s+1/T)}{(s+1/\alpha T)} \qquad 0 < \alpha < 1$$



1. Determinar la ganancia K que satisface el requisito de coeficiente de error estático.
2. Utilizar K, para trazar el diagrama de Bode del sistema no compensado.
3. Establecer el ángulo de fase en adelanto que se necesita compensar φ_m
4. Obtener el factor de atenuación α utilizando:

$$\operatorname{sen}\varphi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

5. Obtener la frecuencia en que la magnitud del sistema no compensado es

$$|GH(j\omega_m)| = -20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

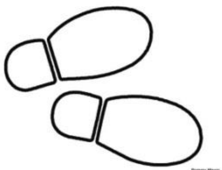
6. Escoger esta frecuencia como nueva frecuencia de cruce de ganancia, la frecuencia corresponde a , y el máximo desplazamiento de fase φ_m se producirá a ésta frecuencia

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

Compensador en adelanto

lead-compensator

$$Gc(s) = Kc\alpha \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} = Kc \frac{(s+1/T)}{(s+1/\alpha T)} \qquad 0<\alpha<1$$



7. Hallar las frecuencias de cruce del compensador en adelanto como sigue

Cero del compensador

$$\omega_0 = \frac{1}{T}$$

Polo del compensador

$$\omega_p = \frac{1}{\alpha T}$$

8. Calcular la constante de ganancia

$$Kc = \frac{K}{\alpha}$$

verificar el margen de ganancia para asegurar que sea satisfactorio!

Ejemplo

$$Gc(s) = Kc\alpha \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} = Kc \frac{(s+1/T)}{(s+1/\alpha T)} \quad 0<\alpha<1$$

$$GH(s) = \frac{5}{s(s+3)}$$

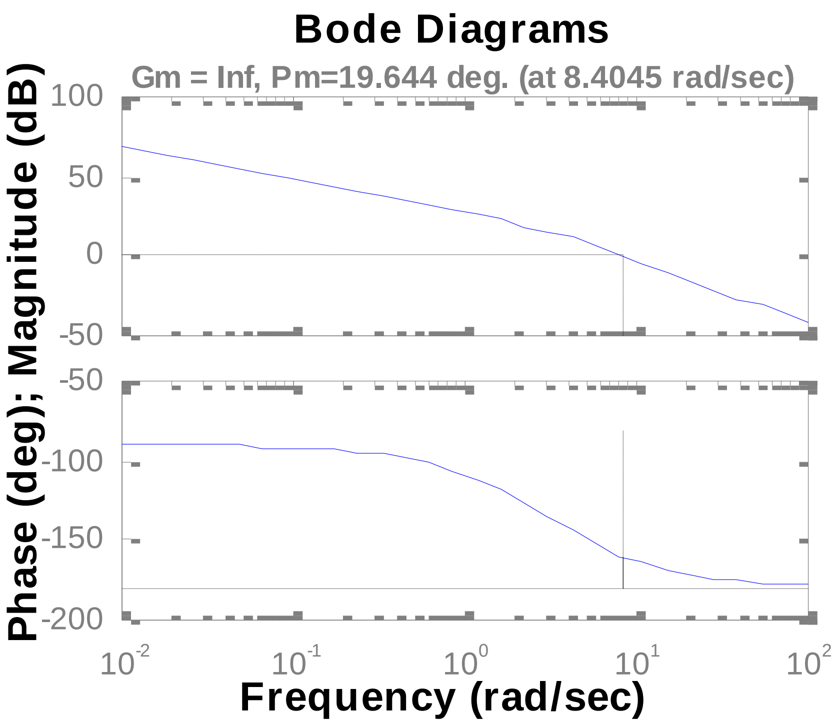
que cumpla con un margen de fase de por lo menos 50º y una $Kv = 25s^{-1}$

$$Kv = \lim_{s\to 0} s \frac{K\times 5}{s(s+3)} = 25$$

$$GH^*(s) = \frac{75}{s(s+3)}$$

$$\varphi_m = 36^o$$

El ángulo que se necesita compensar es aproximadamente 36º. Se va a escoger un poco mayor (5º a 12º más) para asegurar que tenga como mínimo un margen de fase de 50º ,



Ejemplo

$$\boxed{Gc(s) = Kc\alpha \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} = Kc \frac{(s+1/T)}{(s+1/\alpha T)} \quad 0<\alpha<1}$$

$$GH(s) = \frac{5}{s(s+3)}$$

Para obtener el factor de atenuación se tiene que

$$sen\ \varphi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.58778$$

Despejando a α se tiene que,

$$\boxed{\alpha = \frac{1-\text{sen}\ \varphi_m}{[1+\text{sen}\ \varphi_m]} = 0.2596}$$

Se busca la frecuencia ω_m en la cual la magnitud

$$|GH(j\omega_m)| = -20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad -20\log\frac{1}{\sqrt{0.2596}} = -5.8569\text{dB} \qquad \omega_m = 11.9\ \text{rad/s}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$ se despeja T, quedando $$\boxed{T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} = 0.0272}$$ ***se obtiene el cero*** $$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{T}}$$

el **polo del compensador** es

$$\boxed{\omega_p = \frac{1}{\alpha T} = 23.3558}$$

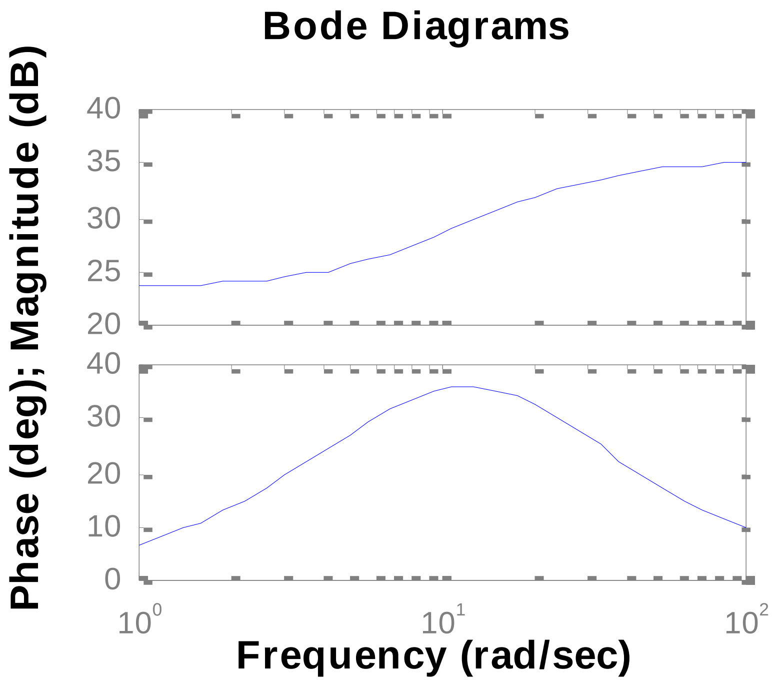
Ejemplo

$$Gc(s) = Kc\alpha \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} = Kc \frac{(s+1/T)}{(s+1/\alpha T)} \qquad 0<\alpha<1$$

$$GH(s) = \frac{5}{s(s+3)}$$

$$Kc = \frac{K}{\alpha} = \frac{15}{0.2596} = 57.78$$

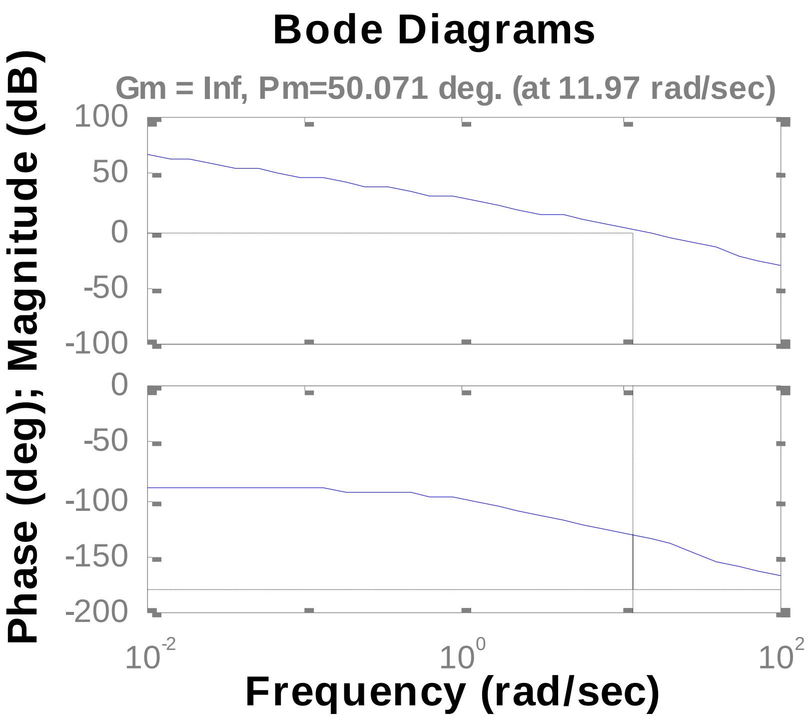
$$G_c(s) = \frac{57.78(s+6.0632)}{(s+23.3558)}$$

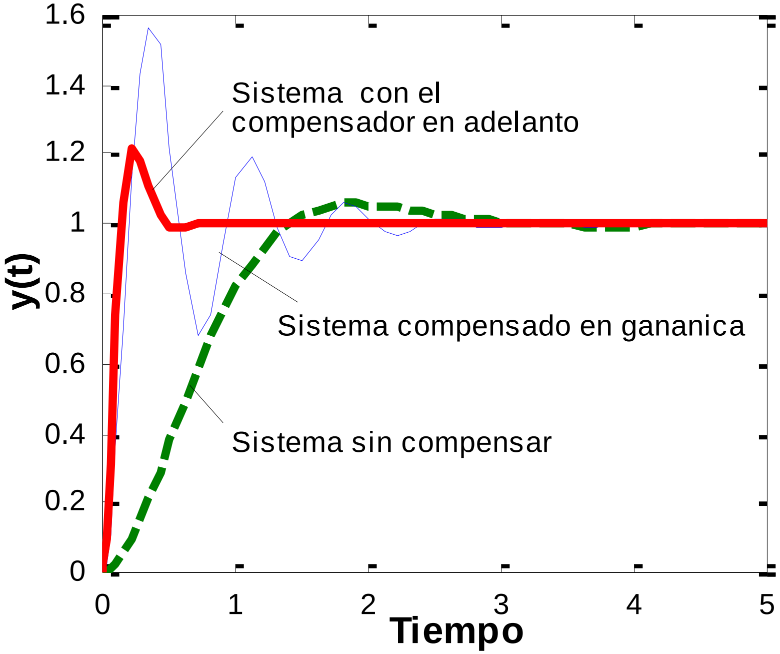


Ejemplo

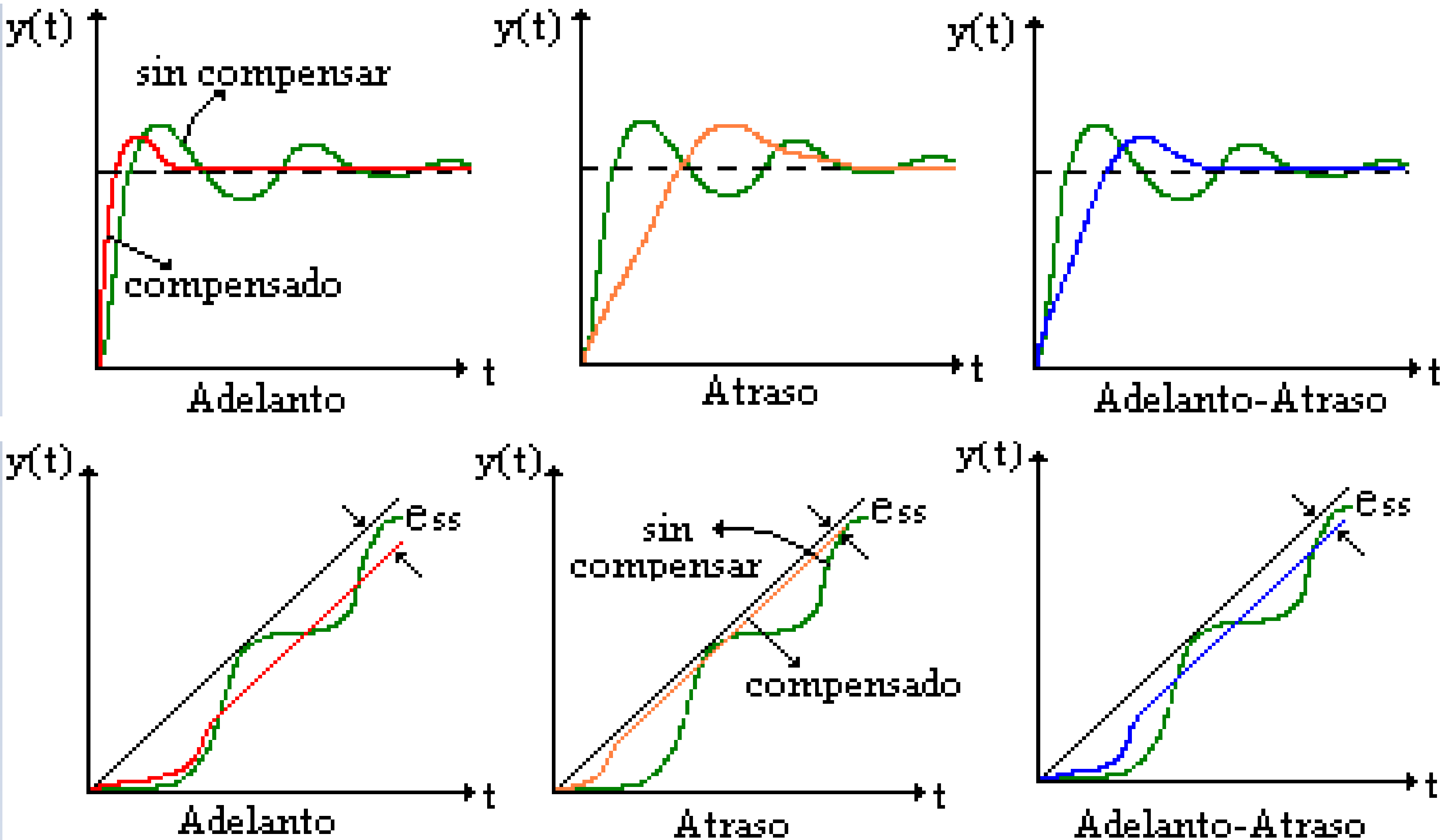
$$G_c(s) = \frac{57.78(s + 6.0632)}{(s + 23.3558)}$$

$$GH(s) = \frac{5}{s\,(s + 3)}$$





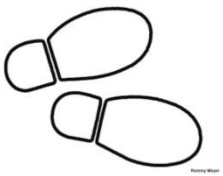
Compensadores



Compensador en atraso

lag-compensator

$$Gc(s) = Kc\beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} ;\beta > 1$$



1. Se obtiene la constante K que satisfaga los requerimientos de la constante de error estático dada.

2. Si el sistema no compensado no satisface las especificaciones en margen de ganancia y fase, se halla el punto de frecuencia donde el ángulo de fase de la función de transferencia de lazo abierto es igual

$$-180^{o} + \varphi_m$$

3. Donde φ_m es el margen de fase requerido (Margen de fase por compensar más 5° a 12°). La frecuencia a la cual se presenta este valor de fase es $\boldsymbol{\omega_m}$, ésta es la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

4. La frecuencia de cruce, frecuencia del cero del compensador, se elige una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia

$$\omega_0 = 0.1\omega_m = \frac{1}{T}$$

Compensador en atraso

lag-compensator

$$Gc(s) = Kc\beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \;; \beta > 1$$

5. Se determina la atenuación necesaria para bajar la curva de magnitud en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta atenuación esta dada por –20 Log β y permite determinar el valor de β.

$$|GH(j\omega_m)| = -20\log\beta = 20\log\frac{1}{\beta}$$

6. La otra frecuencia de cruce, correspondiente al polo del compensador, esta en:

$$\omega_p = \frac{1}{\beta T}$$

7. se obtiene la ganancia del compensador

$$Kc = \frac{K}{\beta}$$

Ejemplo

$$Gc(s) = Kc\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}};\beta>1$$

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+4)(0.6s+1)}$$

para que cumpla con un coeficiente de error estático de $Kv = 20$ ***y margen de fase de por lo menos 40º y un margen de ganancia de 10dB***

$$Kv = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(s+4)(0.6s+1)} = 20$$

$$GH^{*}(s) = \frac{80}{s(s+4)(0.6s+1)}$$

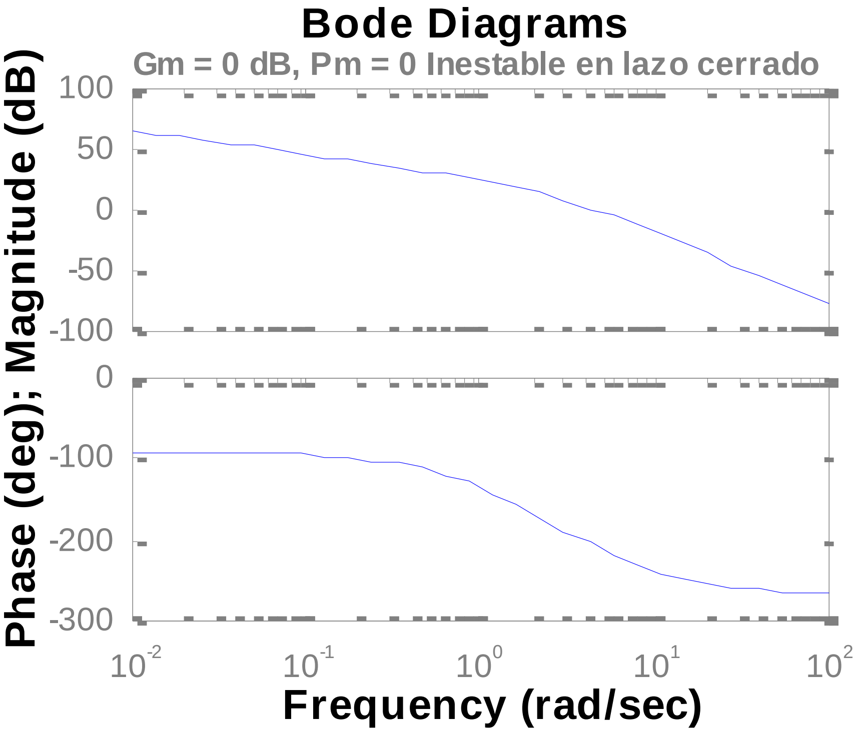
$$\varphi_m = 40^{o} + 6 = 46$$

Se obtiene la frecuencia donde la fase es igual a

$$-180^{o} + \varphi_m$$

se observa la frecuencia a la cual la fase es -134°

$$\boxed{\omega_m = 0.945}$$



Ejemplo

$$Gc(s) = Kc\beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} ;\beta > 1$$

$$\omega_m = 0.945$$

El cero se escoge una década por debajo

$$\omega_0 = 0.1\omega_m = \frac{1}{T} = 0.0945$$

La magnitud en $\omega_m = 0.945$ es aproximadamente 25dB

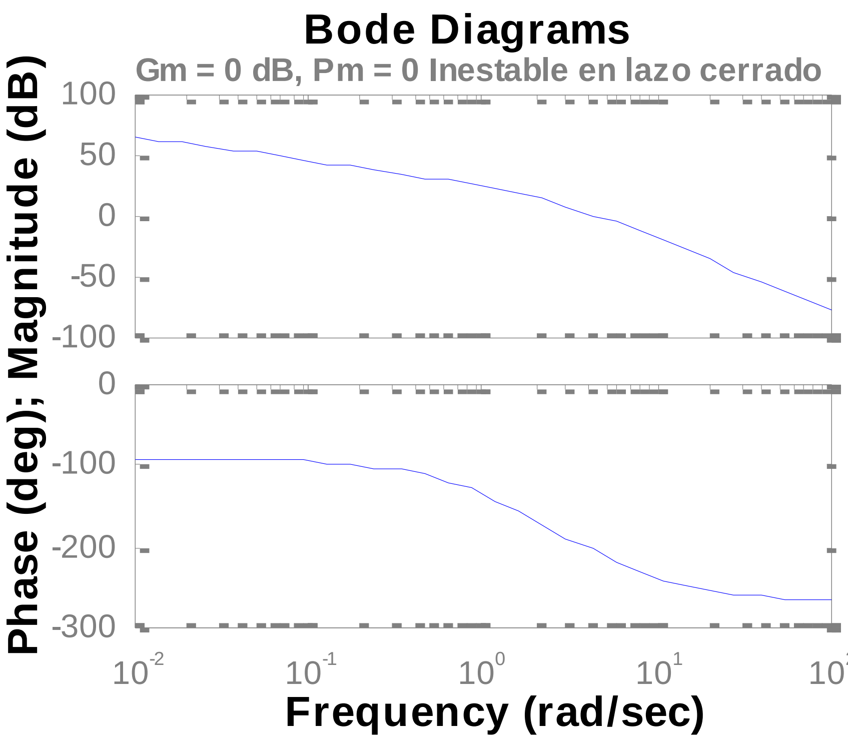
la atenuación que se requiere realizar es de -25dB,

$$|GH(j\omega_m)| = -20\log\beta = 20\log\frac{1}{\beta} = -25dB$$

β=17.78

El polo del compensador estaría ubicado en

$$\omega_p = \frac{1}{\beta T} = 0.0053$$



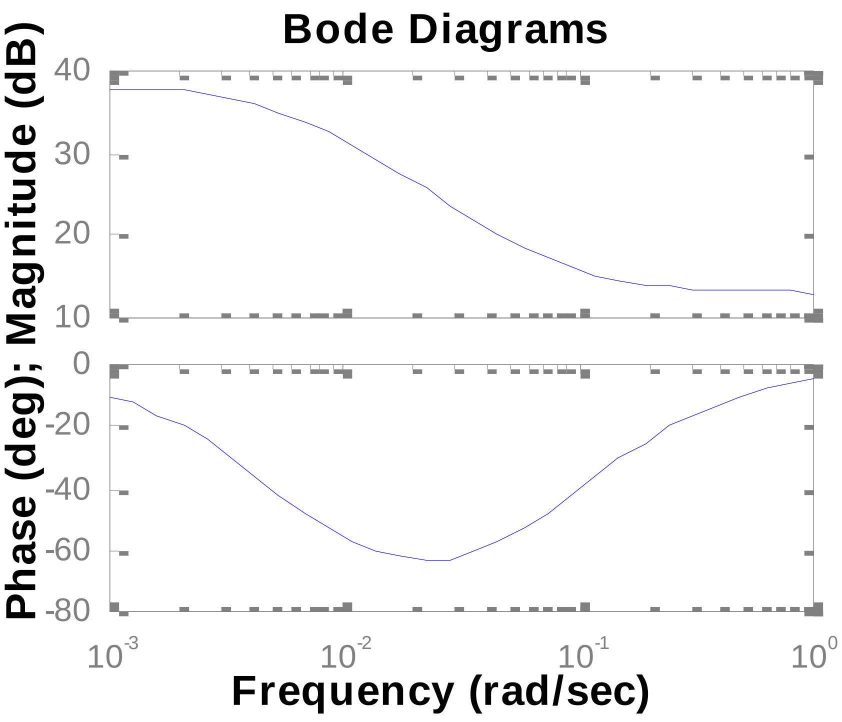
Ejemplo

$$Gc(s) = Kc\beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \; ; \beta > 1$$

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+4)(0.6s+1)}$$

$$Kc = \frac{K}{\beta} = \frac{80}{17.78} = 4.5$$

$$G_c(s) = \frac{4.5(s + 0.0945)}{(s + 0.0053)}$$



Ejemplo

$$G_c(s) = \frac{4.5(s+0.0945)}{(s+0.0053)}$$

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+4)(0.6s+1)}$$