

UNIDAD IV

4 DISEÑO DE COMPENSADORES Y CONTROLADORES

4.1 Compensadores

La compensación en adelanto mejora de forma apreciable la respuesta transitoria de una planta, adicionalmente ofrece una pequeña reducción del error en estado estacionario. El compensador en adelanto se puede considerar como un filtro pasa altas.

Una compensación en atraso, brinda un mejoramiento apreciable de la exactitud en estado estacionario, sin embargo, se presenta un aumento del tiempo de respuesta transitoria. La compensación en atraso suprime el efecto del ruido en frecuencias altas, por lo que su dinámica coincide con la de un filtro pasa bajas.

Los compensadores se conectan en serie con la función de transferencia en lazo abierto, buscando mejorar la respuesta del sistema (ver figura 4.1).

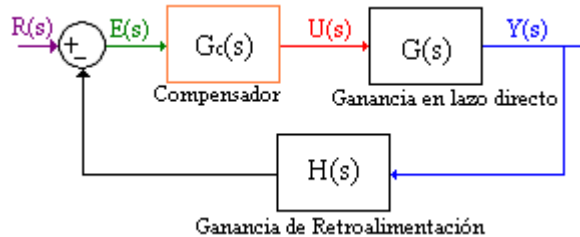


Figura 4.1 Sistema compensado

En esta sección se trabajará el diseño de compensadores por métodos frecuenciales, cabe aclarar que éstos también se pueden diseñar utilizando el análisis del lugar de las raíces.

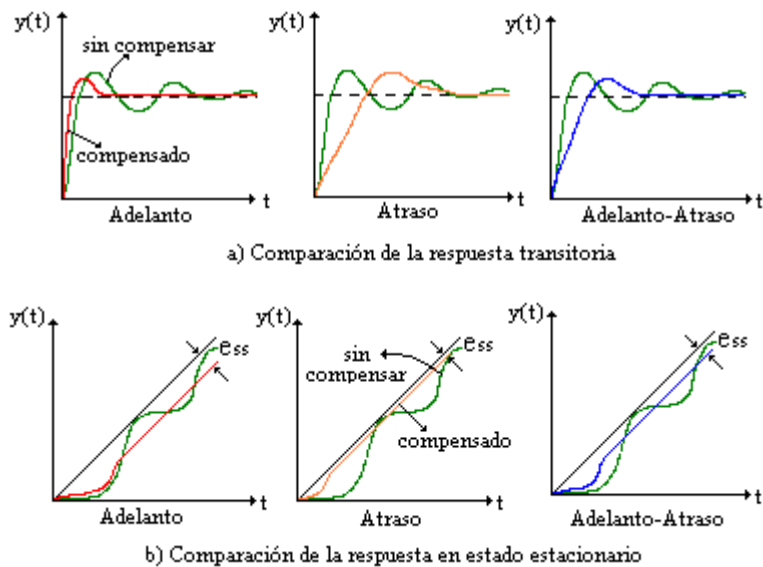


Figura 4.2 Comparación de la respuesta transitoria y en estado estacionario de un sistema sin compensar con uno compensado.

Los compensadores generalmente se utilizan para mejorar la respuesta transitoria o en estado estacionario de un sistema (ver figura 4.2), sin embargo, no se consideran controladores como tal, simplemente mejoran algunas condiciones del sistema para posteriormente diseñar controladores -si el sistema aún lo requiere-. Si es suficiente con el compensador, éste a la vez funcionará como controlador.

Uno de los criterios más utilizados en el diseño de compensadores es el coeficiente de error estacionario, que no es más, que una constante que determina el mínimo error permitido en la respuesta del sistema, ante estímulos como escalón, rampa o parábola.

4.1.1 Error en estado estacionario

En la figura 4.3a se encuentra el diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado donde se muestran las señales de error, de salida y de entrada en el dominio de 's'; y en la figura 4.3b aparece el mismo sistema tomando como salida, la señal de error.

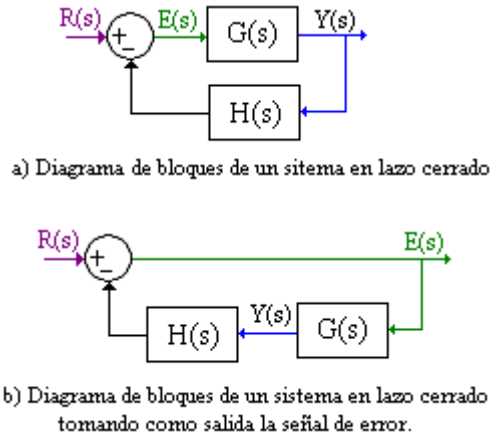


Figura 4.3 Señal de error en un sistema en lazo cerrado.

Para observar como el error en estado estacionario ($e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$) depende de la señal de entrada del sistema, es necesario encontrar un modelo que determine su dinámica. Obteniendo la función de transferencia en términos del error y la señal de entrada, como aparece en la ecuación Ec 4.1, y teniendo en cuenta que por propiedades de la transformada de Laplace el $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, entonces, el error en estado estacionario se puede expresar como $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, donde $e(t)$ es la señal de error en el dominio del tiempo.

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + GH(s)} \quad \text{Ec 4.1}$$

Aplicando la propiedad a la expresión Ec 4.1, el error en estado estacionario quedaría definido por Ec 4.2.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + GH(s)} R(s) \quad \text{Ec 4.2}$$

Dependiendo del tipo de sistema y de la señal de entrada los coeficientes de error estático se pueden obtener a partir de la función de transferencia en lazo abierto $GH(s)$.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

El 'Tipo' de un sistema obedece al número de polos en el origen, que posea la función en lazo abierto. De acuerdo con la expresión Ec 4.3 el tipo estaría dado por el término 'N'.

$$GH(s) = \frac{K(\tau_{b1}s + 1)(\tau_{b2}s + 1) \cdots (\tau_{bm}s + 1)}{s^N (\tau_1s + 1)(\tau_2s + 1) \cdots (\tau_ns + 1)} \quad \text{Ec 4.3}$$

La Ec 4.3 es equivalente a la Ec 3.4 pero escrita en forma de constantes de tiempo, donde K es la ganancia en lazo abierto, 'n' el orden del denominador y 'm' el orden del numerador, siendo $m \leq n$.

- Coeficiente de error de posición K_p :

Si la entrada es escalón $R(s) = \frac{1}{s}$, entonces, $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + GH(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + GH(s)}$, por tanto, $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$, donde $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s)$. K_p se conoce como la constante de error de posición.

Cuando el sistema es tipo cero ($N=0$), el coeficiente de error de posición $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_{b1}s+1)(\tau_{b2}s+1) \cdots (\tau_{bm}s+1)}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1) \cdots (\tau_ns+1)} = K$ y $e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$. Para un sistema de tipo superior ($N>0$) $K_p \rightarrow \alpha$ y en consecuencia $e_{ss} \rightarrow 0$.

- Coeficiente de error de velocidad K_v :

Cuando la señal de referencia es una rampa, su transformada de Laplace es $R(s) = \frac{1}{s^2}$. El error quedaría definido por $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + GH(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sGH(s)}$, entonces, $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$, donde $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s)$.

Sí $GH(s)$ es tipo cero (no tiene polos en el origen del plano ' s ') el límite tiende a cero y el error a infinito, pero si es de tipo uno, entonces, la ' s ' que acompaña a la función de transferencia se cancela con el cero del origen y $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(\tau_{b1}s+1)(\tau_{b2}s+1) \cdots (\tau_{bm}s+1)}{s(\tau_1s+1)(\tau_2s+1) \cdots (\tau_ns+1)} = K$, por lo tanto, $e_{ss} = \frac{1}{K}$. Para sistemas de tipo mayor que uno ($N>1$), $K_v \rightarrow \alpha$ y el error en estado estacionario $e_{ss} \rightarrow 0$.

- Coeficiente de error de aceleración K_a :

Para referencias con transformadas de Laplace $R(s) = \frac{1}{s^3}$ (parábolas), el error estaría determinado por $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + GH(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 GH(s)}$, por tanto, $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$, siendo $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GH(s)$.

Cuando el tipo del sistema es menor que dos ($N < 2$), $K_a \rightarrow 0$ y $e_{ss} \rightarrow \alpha$; si el sistema es tipo dos $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (\tau_{b1}s+1)(\tau_{b2}s+1) \cdots (\tau_{bm}s+1)}{s^2 (\tau_{11}s+1)(\tau_{12}s+1) \cdots (\tau_{1n}s+1)} = K$, por tanto, $e_{ss} = \frac{1}{K}$; y para sistemas con $N > 2$ el error en estado estacionario tiende a cero porque $K_a \rightarrow \alpha$.

La tabla 4.1 condensa el error estacionario e_{ss} para las diferentes señales de referencia de acuerdo con el tipo del sistema en lazo abierto $GH(s)$

Tabla 4.1 Error en estado estacionario según la señal de entrada

e_{ss}	Escalón	Rampa	Parábola
Tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	α	α
Tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	α
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

Dependiendo de la señal de referencia, el número de polos en el origen determina el comportamiento de la señal de error $e(t)$, lo que significa que la exactitud en la señal de salida se ve afectada por este factor.

4.1.2 Diseño de Compensadores en Adelanto

A continuación se presenta el diseño de compensadores en adelanto, a través de criterios de diseño que permiten encontrar la función de transferencia del compensador; utilizando un método basado en la respuesta en frecuencia, del sistema en lazo abierto.

La función de transferencia del compensador en adelanto esta contenida en Ec 4.4.

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} = K_c \frac{(s + 1/T)}{(s + 1/\alpha T)} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{Ec 4.4}$$

Teniendo en cuenta a $G_c(s)$, se emplean los siguientes criterios de diseño:

- Determinar la ganancia K que satisface el requisito de coeficiente de error estático.
- Utilizar K , para trazar el diagrama de Bode del sistema no compensado.

- Establecer el ángulo de fase en adelanto que se necesita compensar ϕ_m .
- Obtener el factor de atenuación α utilizando la siguiente ecuación Ec 4.5

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \text{Ec 4.5}$$

- Obtener la frecuencia en que la magnitud del sistema no compensado es la de la ecuación Ec 4.6.

$$|GH(j\omega_m)| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{Ec 4.6}$$

- Escoger esta frecuencia como nueva frecuencia de cruce de ganancia, la frecuencia corresponde a $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$, y el máximo desplazamiento de fase ϕ_m se producirá a ésta frecuencia.
- Hallar las frecuencias de cruce del compensador en adelanto como sigue:
 - Cero del compensador $\omega_0 = \frac{1}{T}$
 - Polo del compensador $\omega_p = \frac{1}{\alpha T}$
- Calcular la constante de ganancia $K_c = \frac{K}{\alpha}$
- Por último, verificar el margen de ganancia para asegurar que sea satisfactorio, si no lo es, repetir el procedimiento de diseño para modificar la ubicación del polo y del cero del compensador.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

A continuación se presenta un ejemplo de diseño de un compensador en adelanto utilizando métodos frecuenciales.

Se desea diseñar un compensador en adelanto, para la función de transferencia en lazo abierto

$$GH(s) = \frac{5}{s(s+3)}, \text{ que cumpla con un margen de fase de por lo menos } 50^\circ \text{ y una } K_v = 25s^{-1}.$$

- *Se determina la ganancia K que satisfaga la condición de error estático ($e_{ss} = \frac{1}{K_v}$), de la sección 4.2.2 se sabe que $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s)$, por tanto:*

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \times 5}{s(s+3)} = 25, \text{ en consecuencia } K = 15.$$

- *Ahora, se obtienen las trazas de Bode para el sistema compensado en ganancia*

$$GH^*(s) = \frac{75}{s(s+3)} \text{ (ver figura 4.4).}$$

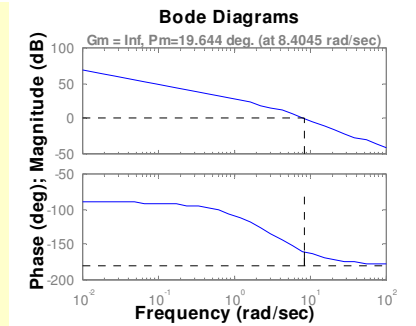


Figura 4.4 Trazas de Bode sistema compensado en ganancia

El margen de ganancia no está definido, el margen de fase es 19.6° y se requiere de 50° .

- El ángulo que se necesita compensar es aproximadamente 36° . Se va a escoger un poco mayor (5° a 12° más) para asegurar que tenga como mínimo un margen de fase de 50° , $\phi_m = 36^\circ$.
 - Para obtener el factor de atenuación se tiene que $\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, el $\sin \phi_m = 0.58778$, por tanto, $\sin \phi_m + \alpha \sin \phi_m = 1 - \alpha$, despejando a α se tiene que, $\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} = 0.2596$.
 - Se busca la frecuencia ω_m en la cual la magnitud es $-20 \log \frac{1}{\sqrt{0.2596}} = -5.8569 \text{ dB}$, observando la traza de magnitud $\omega_m = 11.9 \text{ rad/s}$.
 - Como $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$, se despeja T , quedando $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} = 0.0272$, se obtiene el cero del compensador $\omega_0 = \frac{1}{T}$, donde, $\omega_0 = \frac{1}{T} = \omega_m \sqrt{\alpha} = 6.0632$ y el polo del compensador es $\omega_p = \frac{1}{\alpha T} = 23.3558$.
 - Se halla la ganancia del compensador. Esta ganancia debe incluir el factor K que se obtuvo para cumplir con el coeficiente de error estático exigido K_v , ya que la idea es colocar una sola función de transferencia que cumpla con la tarea de compensar en ganancia y en fase.
- $$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{15}{0.2596} = 57.78.$$

La función de transferencia del compensador en adelanto es

$$G_c(s) = \frac{57.78(s + 6.0632)}{(s + 23.3558)}$$

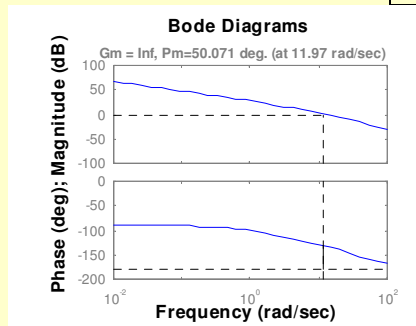


Figura 4.5 Trazas de Bode del sistema con el compensador en adelanto

- Por último, se verifica el margen de ganancia del sistema con el compensador en adelanto. La figura 4.5 presenta las trazas de bode del sistema compensado.
- La figura 4.6 contiene las características del compensador en adelanto, nótese que el comportamiento es similar al de un filtro pasa alto.

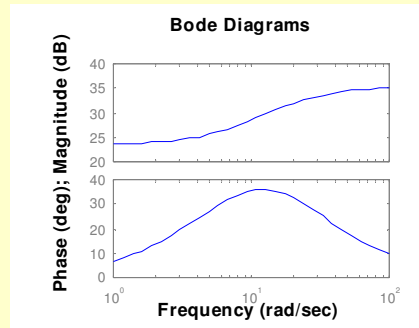


Figura 4.6 Respuesta en frecuencia del compensador

En la figura 4.7 se observa la respuesta al escalón en lazo cerrado del sistema sin compensar, del sistema compensado en ganancia y del sistema con el compensador en adelanto.

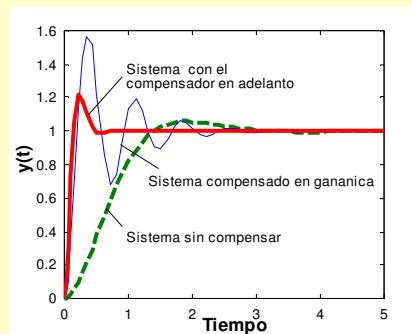


Figura 4.7 Respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar

4.1.3 Diseño de compensadores en Atraso

La función primaria de un compensador en atraso es atenuar en el rango de la alta frecuencia para dar a un sistema suficiente margen de fase. En el diseño se supone que el sistema no compensado cumple con las condiciones de respuesta transitoria, por simple ajuste de ganancia.

El compensador en atraso posee la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}; \beta > 1 \quad \text{Ec 4.7}$$

Criterios de diseño:

- Se obtiene la constante K que satisfaga los requerimientos de la constante de error estático dada.
- Si el sistema no compensado no satisface las especificaciones en margen de ganancia y fase, se halla el punto de frecuencia donde el ángulo de fase de la función de transferencia de lazo abierto es igual $-180^\circ + \phi_m$. Donde ϕ_m es el margen de fase requerido (Margen de fase por compensar más 5° a 12°). La frecuencia a la cual se presenta este valor de fase es ω_m , ésta es la nueva frecuencia de cruce de ganancia.
- La frecuencia de cruce, frecuencia del cero del compensador, se elige una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia $\omega_0 = 0.1\omega_m = \frac{1}{T}$.
- Se determina la atenuación necesaria para bajar la curva de magnitud en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta atenuación está dada por $-20 \log \beta$ y permite determinar el valor de β .

$$|GH(j\omega_m)| = -20 \log \beta = 20 \log \frac{1}{\beta} \quad \text{Ec 4.8}$$

- La otra frecuencia de cruce, correspondiente al polo del compensador, está en $\omega_p = \frac{1}{\beta T}$.
- Por último, se obtiene la ganancia del compensador $K_c = \frac{K}{\beta}$ y se verifica la nueva respuesta del sistema.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

El siguiente ejemplo muestra el diseño de un compensador en atraso para la función $GH(s) = \frac{1}{s(s+4)(0.6s+1)}$, para que cumpla con un coeficiente de error estático de $K_v = 20$, un margen de fase de por lo menos 40° y un margen de ganancia de 10dB .

- De la sección 4.2.2 se tiene que $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s)$, por tanto:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+4)(0.6s+1)} = 20, \text{ por tanto } K = 80.$$

- La respuesta en frecuencia del sistema compensado en ganancia, $GH^*(s) = \frac{80}{s(s+4)(0.6s+1)}$, se observa en la figura 4.8

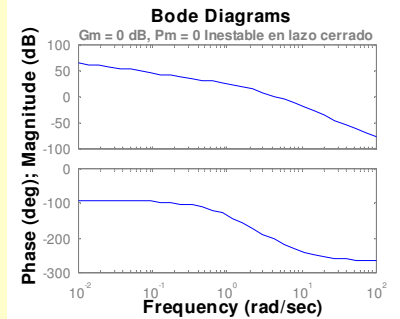


Figura 4.8 Trazas de Bode del sistema compensado en ganancia

El sistema compensado en ganancia, para satisfacer el error en estado estacionario, es inestable en lazo cerrado, ya que tanto el margen de fase como el de ganancia dan iguales a cero.

- Se obtiene la frecuencia donde la fase es igual a $-180^\circ + \varphi_m$, siendo φ_m el margen de fase deseado más 5° o 12° . Para éste caso se va a tomar $\varphi_m = 40^\circ + 6 = 46$, por lo tanto, se observa la frecuencia a la cual la fase es -134° . Observando la traza de fase corresponde a $\omega_m = 0.945$.
- El cero se escoge una década por debajo, de tal forma que $\omega_0 = 0.1\omega_m = \frac{1}{T}$, donde $\omega_0 = 0.0945$.
- La magnitud en $\omega_m = 0.945$ es aproximadamente 25dB , en consecuencia, la atenuación que se requiere realizar es de -25dB , $|GH(j\omega_m)| = -20 \log \beta = 20 \log \frac{1}{\beta} = -25\text{dB}$, despejando el factor $\beta = 17.78$.
- El polo del compensador estaría ubicado en $\omega_p = \frac{1}{\beta T} = 0.0053$.
- La ganancia del compensador es $K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{80}{17.78} = 4.5$.

La función de transferencia del compensador en atraso es $G_c(s) = \frac{4.5(s + 0.0945)}{(s + 0.0053)}$.

- La figura 4.9 contiene la respuesta en frecuencia del sistema compensado en atraso. En la figura 4.10 se encuentra las trazas de bode del compensador en atraso donde se muestra las características de filtro pasabajos que éste posee.

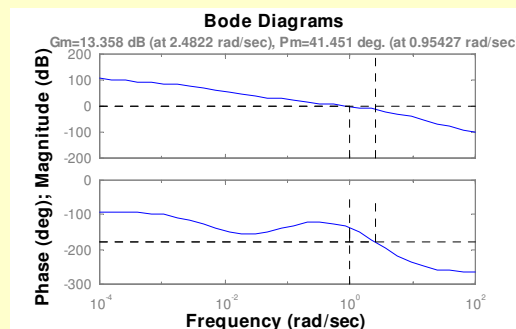
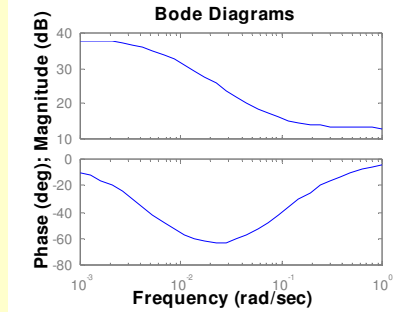
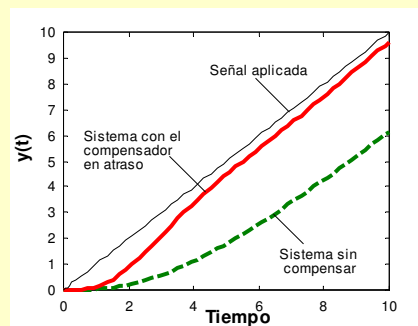


Figura 4.9 Respuesta en frecuencia del sistema con el compensador en atraso.**Figura 4.10 Trazas de bode del compensador en atraso**

- Como los compensadores en atraso mejoran la respuesta en estado estacionario para el análisis es mejor observar la respuesta a la rampa. En la figura 4.11 se encuentra la respuesta del sistema en lazo cerrado sin compensar y con el compensador en atraso. El sistema compensado en ganancia, para satisfacer el coeficiente K_v , tiene una respuesta inestable en lazo cerrado.

**Figura 4.11 Comparación del error en estado estacionario.**

Los compensadores de adelanto-atraso se usan cuando a la vez se desea mejorar el transiente y el error en estado estacionario, están compuestos por un compensador en adelanto en serie con un compensador en atraso.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

OGATA, Katsuhiko. INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA. Capítulo VII Técnicas de diseño y compensación. PAG 634. Segunda Edición Ed. Prentice Hall.

4.2 Técnicas de Control por Retroalimentación de Estados

4.2.1 Retroalimentación de Estados con ajuste de ganancia en lazo directo

En la Figura 4.12 se observa el esquema del controlador para un sistema representado en espacio de estados, el cual está conformado por las ganancias de retroalimentación y la ganancia en lazo directo K .

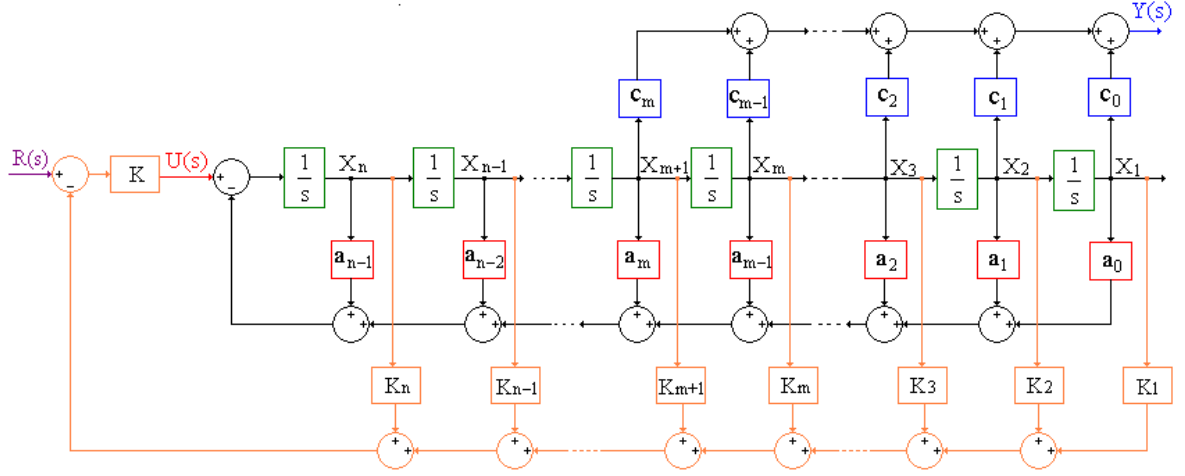


Figura 4.12 Esquema de un controlador con variables de estado canónicas.

Para obtener un modelo en espacio de estados, que defina la dinámica del sistema con retroalimentación de estados, se parte de la representación en espacio de estados de la planta. Si el modelo en espacio de estados de la planta con función de transferencia $G_p(s)$, 'n' variables de estado y suponiendo que la matriz $D = 0$, es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

Se tiene que en el espacio de estados del sistema representado por el diagrama de bloques de la figura 4.12; la señal de entrada en el dominio del tiempo es $u(t) = K[r(t) - \mathbf{K}^T \mathbf{x}]$, siendo K la ganancia del controlador en lazo directo, \mathbf{K} el vector conformado por las ganancias de retroalimentación de las variables de estado ($\mathbf{K}^T = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$) y $r(t)$ la señal de referencia del sistema. Observe que $u(t)$, entrada de la planta, ahora en el sistema es la señal de control.

La representación en espacio de estados del sistema se obtiene reemplazando la equivalencia de $u(t)$, en términos de $r(t)$, en la ecuación de estado así, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}[K r(t) - \mathbf{K}^T \mathbf{x}]$, realizando la multiplicación, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}K r(t) - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{K}^T \mathbf{x}$, por lo tanto, la entrada del sistema es $r(t)$, y la ecuación de estado es $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{K}^T] \mathbf{x} + \mathbf{B}K r(t)$. La ecuación de salida permanece igual.

El espacio de estados del sistema aparece en la expresión Ec 4.9.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{K}^T] \mathbf{x} + \mathbf{B}K r(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned} \quad \text{Ec 4.9}$$

La matriz característica del sistema recibe el nombre de \mathbf{A}_K donde $\mathbf{A}_K = [\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{K}^T]$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_K \mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{B}r(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

La función de transferencia del sistema de la figura 4.12 es $Mc(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$, siendo $R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$, se puede hallar a partir de la representación en espacios de estado utilizando los métodos matriciales vistos en la sección 2.12, donde la función $Mc(s) = \mathbf{C}\Phi_K \mathbf{B}\mathbf{K}$, pero como \mathbf{K} es un escalar entonces:

$$Mc(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{K}\mathbf{C}\Phi_K \mathbf{B} \quad \text{Ec 4.10}$$

Donde $\Phi_K = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K]^{-1}$. Otra forma de representar la función de transferencia aparece en la ecuación Ec 4.11

$$Mc(s) = \mathbf{K} \frac{\mathbf{C} \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K] \mathbf{B}}{\text{Det}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K]} \quad \text{Ec 4.11}$$

Para la simulación, el diseño y el análisis de sistemas como el que se muestra en la figura 4.12, se pueden usar equivalentes como los que se exhiben en las figuras 4.13a y 4.13b, conocidos como $Heq(s)$ y $Geq(s)$ respectivamente.

- Equivalente Heq :

Realizando la reducción del diagrama de bloques de la figura 4.13a se obtiene que, la función de transferencia es la expresión Ec 4.12.

$$Mc(s) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{G}p(s)}{1 + \mathbf{K}\mathbf{G}p(s)\mathbf{H}eq(s)} \quad \text{Ec 4.12}$$

Como $\mathbf{G}p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}\Phi\mathbf{B}$, se deduce que:

$$Y(s) = \mathbf{C}\Phi\mathbf{B}U(s) \quad \text{Ec 4.13}$$

De la ecuación salida del espacio de estados de la planta se tiene que $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}$, aplicando transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)$, ahora junto con la Ec 4.13 se cuenta con dos expresiones de $Y(s)$, comparándolas se deduce que, $\mathbf{X}(s) = \Phi\mathbf{B}U(s)$.

Reemplazando a $\mathbf{X}(s)$ en $Heq(s) = \frac{\mathbf{K}^T \mathbf{x}}{Y(s)}$, entonces, $Heq(s) = \frac{\mathbf{K}^T \mathbf{X}(s)}{Y(s)} = \frac{\mathbf{K}^T \mathbf{X}(s)}{\mathbf{C}\mathbf{X}(s)} = \frac{\mathbf{K}^T \Phi\mathbf{B}U(s)}{\mathbf{C}\Phi\mathbf{B}U(s)}$, por lo tanto:

$$Heq(s) = \frac{\mathbf{K}^T \Phi \mathbf{B}}{\mathbf{C} \Phi \mathbf{B}} \quad \text{Ec 4.14}$$

Se dispone de una expresión matricial en términos de la dinámica de la planta. Para obtener a Heq en términos de la dinámica del sistema, se utiliza la función de transferencia del sistema

$$Mc(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{K} \mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B}, \quad \text{donde } Y(s) = \mathbf{K} \mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B} R(s), \quad \text{por lo tanto } \mathbf{X}(s) = \mathbf{K} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B} R(s),$$

reemplazando en Heq, se deduce que $Heq(s) = \frac{\mathbf{K}^T \mathbf{X}(s)}{Y(s)} = \frac{\mathbf{K}^T \mathbf{X}(s)}{\mathbf{C} \mathbf{X}(s)} = \frac{\mathbf{K} \mathbf{K}^T \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B} R(s)}{\mathbf{K} \mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B} R(s)} = \frac{\mathbf{K}^T \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B}}{\mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B}}$, entonces:

$$Heq(s) = \frac{\mathbf{K}^T \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B}}{\mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B}} \quad \text{Ec 4.15}$$

Las ecuaciones 4.14 y 4.15 definen funciones de transferencia que se puede obtener por métodos matriciales a partir de la representación en espacio de estados de la planta y del sistema respectivamente, conociendo el vector de retroalimentación.

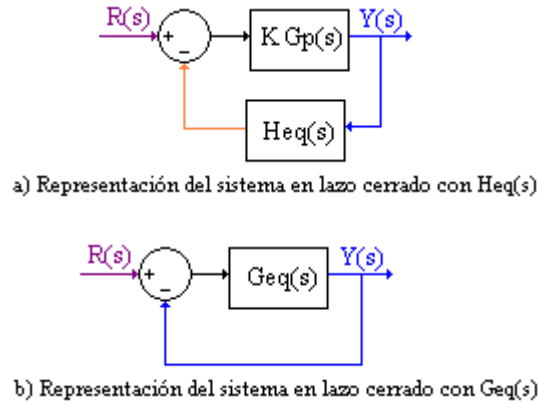


Figura 4.13 Representaciones equivalentes de un sistema con retroalimentación de estados.

- Equivalente Geq:

La reducción del diagrama de bloques de la figura 4.13b indica que la función de transferencia del sistema es Ec 4.16.

$$Mc(s) = \frac{Geq(s)}{1 + Geq(s)} \quad \text{Ec 4.16}$$

Por métodos matriciales, $Mc(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{K} \mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B}$, por lo tanto, igualando las dos expresiones

de la función de transferencia $Mc(s)$ se tiene que, $\frac{Geq(s)}{1 + Geq(s)} = \mathbf{K} \mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B}$, despejando $Geq(s)$:

$$Geq(s) = (1 + Geq(s)) \mathbf{K} \mathbf{C} \Phi_{\mathbf{K}} \mathbf{B};$$

$$\begin{aligned}
\text{Geq}(s) &= (1 + \text{Geq}(s))\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B} = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B} + \text{Geq}(s)\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B}; \\
\text{Geq}(s) - \text{Geq}(s)\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B} &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B}; \\
\text{Geq}(s)(1 - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B}) &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B};
\end{aligned}$$

$$\text{Geq}(s) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B}}{1 - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{B}} \quad \text{Ec 4.17}$$

La ecuación 4.17 muestra como obtener a $\text{Geq}(s)$ a partir de las matrices del espacio de estados del sistema y la ganancia en lazo abierto. Para hallar una expresión de Geq en términos del espacio de estados de $\text{Gp}(s)$ se tiene que, la función de transferencia del sistema expresada en

Ec 4.12, es $\text{Mc}(s) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{Gp}(s)}{1 + \mathbf{K}\mathbf{Gp}(s)\text{Heq}(s)}$, reemplazando a $\text{Gp}(s)$ por su equivalente en espacio de

estados, $\text{Mc}(s) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}{1 + \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}\text{Heq}(s)}$ y a $\text{Heq}(s)$ como aparece en la expresión 4.14, entonces,

$$\text{Mc}(s) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}{1 + \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B} \frac{\mathbf{K}^T\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}{\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}} = \frac{\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}{1 + \mathbf{K}\mathbf{K}^T\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}. \text{ De acuerdo con Ec 4.16, } \text{Mc}(s) = \frac{\text{Geq}(s)}{1 + \text{Geq}(s)},$$

igualando las expresiones, $\frac{\text{Geq}(s)}{1 + \text{Geq}(s)} = \frac{\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}{1 + \mathbf{K}\mathbf{K}^T\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}$ y despejando a $\text{Geq}(s)$:

$$\begin{aligned}
\text{Geq}(s)(1 + \mathbf{K}\mathbf{K}^T\mathbf{\Phi}\mathbf{B}) &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}(1 + \text{Geq}(s)); \\
\text{Geq}(s) + \text{Geq}(s)\mathbf{K}\mathbf{K}^T\mathbf{\Phi}\mathbf{B} &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B} + \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}\text{Geq}(s); \\
\text{Geq}(s) + \text{Geq}(s)\mathbf{K}\mathbf{K}^T\mathbf{\Phi}\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}\text{Geq}(s) &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}; \\
\text{Geq}(s)[1 + \mathbf{K}[\mathbf{K}^T - \mathbf{C}]\mathbf{\Phi}\mathbf{B}] &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}
\end{aligned}$$

$$\text{Geq}(s) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{B}}{[1 + \mathbf{K}[\mathbf{K}^T - \mathbf{C}]\mathbf{\Phi}\mathbf{B}]} \quad \text{Ec 4.18}$$

Las expresiones Ec 4.17 y Ec 4.18 contienen a $\text{Geq}(s)$ en términos de las representaciones en espacio de estados del sistema y de la planta, respectivamente.

Utilizar los equivalentes facilita el análisis del modelo del sistema con variables de estado canónicas, evitando realizar la reducción del diagrama que aparece en la figura 4.12, con álgebra de bloques.

- Diseño del controlador:

De la sección 2.11.1 (variables de estado canónicas), se sabe que la función de transferencia de la planta coincide con la ecuación Ec 2.49

$$\text{Gp}(s) = \frac{c_ms^m + c_{m-1}s^{m-1} + \dots + c_1s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad \text{Ec 4.19}$$

y que su representación en espacio de estados Ec 2.44 y Ec 2.50 se define como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{m-1} \quad c_m \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

Además, la plata se puede escribir en términos de la representación en espacio de estados donde, $Gp(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}$, al resolver ésta ecuación se observa que:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = Gp(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} = \frac{[c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{m-1} \quad c_m \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}{\text{Det}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}$$

Realizando las operaciones señaladas y comparando con la función de transferencia obtenida en Ec 4.19 se tiene que:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{m-1} \quad c_m \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}{\text{Det}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Por tanto, se deducen las expresiones Ec 4.20 y Ec 4.21

$$\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{m-1} \quad c_m \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \cdots + c_1 s + c_0 \quad \text{Ec 4.20}$$

$$\text{Det}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad \text{Ec 4.21}$$

Utilizando a $\text{Heq}(s)$ de la ecuación 4.14 y dejándola en términos de la matriz $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$:

$$\text{Heq}(s) = \frac{\mathbf{K}^T \Phi \mathbf{B}}{\mathbf{C}^T \Phi \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{K}^T \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{B} / \text{Det}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\mathbf{C}^T \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{B} / \text{Det}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} = \frac{\mathbf{K}^T \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{B}}{\mathbf{C}^T \text{Adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{B}}$$

Expresando a $\text{Heq}(s)$ como una relación de polinomios y de acuerdo con Ec 4.20, $\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} = c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \cdots + c_1 s + c_0$, análogamente $\mathbf{K}^T \Phi(s)\mathbf{B} = K_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \cdots + K_2 s + K_1$, ya

que $\mathbf{K}^T = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$. El vector \mathbf{C} tiene $m+1$ componentes, por eso el orden del polinomio es 'm'; el vector \mathbf{K} tiene 'n' componentes en consecuencia, el orden del polinomio es $n-1$.

$$\text{Heq}(s) = \frac{K_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + K_2 s + K_1}{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0} \quad \text{Ec 4.22}$$

Reemplazando las ecuaciones Ec 4.19 y Ec 4.22 en $\text{Mc}(s) = \frac{\text{KGp}(s)}{1 + \text{KGp}(s)\text{Heq}(s)}$, se tiene que:

$$\text{Mc}(s) = \frac{K \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}{1 + K \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \frac{K_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + K_2 s + K_1}{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}}$$

Hallando común denominador y ordenando la ecuación, se obtiene la expresión Ec 4.23 para $\text{Mc}(s)$.

$$\text{Mc}(s) = \frac{K c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + K [K_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + K_2 s + K_1]}$$

$$\text{Mc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + [a_{n-1} + K K_n] s^{n-1} + \dots + [a_2 + K K_3] s^2 + [a_1 + K K_2] s + [a_0 + K K_1]} \quad \text{Ec 4.23}$$

Sí se define un polinomio característico deseado $\text{Pd}(s) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_2 s^2 + d_1 s^1 + d_0$; las ganancias de retroalimentación, del controlador, deben hacer que el polinomio característico (denominador), de la función de transferencia en lazo cerrado $\text{Mc}(s)$, sea igual al polinomio deseado. Por lo tanto, igualando los polinomios -ecuación diafontina-:

$$\begin{aligned} a_{n-1} + K K_n &= d_{n-1} \\ &\vdots \\ a_2 + K K_3 &= d_2 \\ a_1 + K K_2 &= d_1 \\ a_0 + K K_1 &= d_0 \end{aligned}$$

Despejando las ganancias de retroalimentación que corresponden al diseño del controlador:

$$\begin{aligned}
 K_n &= \frac{d_{n-1} - a_{n-1}}{K} \\
 &\vdots \\
 K_3 &= \frac{d_2 - a_2}{K} \\
 K_2 &= \frac{d_1 - a_1}{K} \\
 K_1 &= \frac{d_0 - a_0}{K}
 \end{aligned}$$

Haciendo $\mathbf{d} = [d_0 \ d_1 \ \cdots \ d_{n-1}]$, $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-1}]$ y $\mathbf{K}^T = [K_1 \ K_2 \ \cdots \ K_n]$; la **regla de diseño** se puede simplificar como aparece en la ecuación Ec 4.24.

$$\mathbf{K}^T = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{a}}{K} \quad \text{Ec 4.24}$$

Donde, \mathbf{d} es el vector que contiene los coeficientes del polinomio característico deseado, \mathbf{a} el vector de coeficientes del polinomio característico de la planta $G_p(s)$ y K la ganancia del controlador en lazo directo.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

Ejemplo 1: Debido a que el sistema de la figura 2.43 -estudiado en la sección 2.11.5-, es inestable en lazo cerrado (ver figura 4.14); se desea diseñar un controlador por retroalimentación de estados, donde las variables de estado sean las que se encuentran explícitas en el diagrama; buscando que se comporte acorde con un sistema deseado.

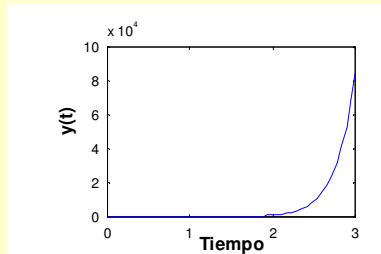
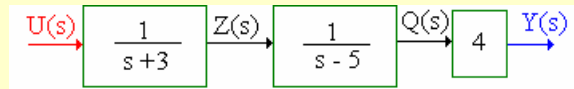


Figura 4.14 Respuesta del sistema en lazo cerrado sin controlador

La regla de diseño obtenida en la Ec 4.24 es para espacios de estado canónicos, por ende, para cumplir con los requerimientos exigidos, es necesario diseñar para el espacio de estados canónicos y transformar el diseño del controlador al espacio de estados de variables físicas. Recordando el diagrama de bloques del sistema:



En las ideas complementarias de la sección 2.11.5, se obtuvieron dos espacios de estados para este sistema, uno en variables canónicas y el otro con las variables que se encuentran especificadas en el diagrama al que se le denominó espacio de estados con variables físicas.

- La representación en espacio de estados con variables canónicas \mathbf{x}_c es:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c$$

- *El espacio de estados físico es:*

$$\dot{\mathbf{x}}_f = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f$$

- *Para diseñar el controlador es necesario definir el comportamiento deseado. Los controladores con retroalimentación de estados no incrementan el orden del sistema. Por tanto, el polinomio deseado es de orden dos (2), donde $P_d(s) = s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2$, tomando*

$$\text{como base el modelo deseado de orden dos de la forma: } M_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- *Utilizando el criterio del error del 1% donde el tiempo de estabilización es $t_s = \frac{4.6}{\rho\omega_n}$ y definiendo a $\rho = 0.7$, con el fin de tener un sistema subamortiguado y un sobrepico menor de 25%. Escogiendo un tiempo de estabilización de una décima de segundo ($t_s = 0.1s$), la frecuencia natural del sistema es $\omega_n = 65.7 \text{ rad/s}$. Por tanto, el polinomio deseado es $P_d(s) = s^2 + 92s + 4318$.*

- *De la reducción del diagrama de bloques de la figura 2.43, la función de transferencia del sistema es $G_p(s) = \frac{4}{s^2 - 2s - 15}$, entonces $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -15 & -2 \end{bmatrix}$ y del polinomio deseado $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 4318 & 92 \end{bmatrix}$.*

- *Aplicando la regla de control de la Ec 4.24, el vector de retroalimentación es:*

$$\mathbf{K}^T = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{a}}{K} = \frac{\begin{bmatrix} 4318 & 92 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -15 & -2 \end{bmatrix}}{K} = \begin{bmatrix} \frac{4333}{K} & \frac{94}{K} \end{bmatrix}$$

La K se ajusta de forma experimental hasta que la ganancia en lazo cerrado sea uno y la salida siga a la señal de referencia -Poner como señal de referencia un escalón unitario es de gran utilidad para realizar el ajuste-.

- *Escogiendo a $K = \frac{\omega_n^2}{4} = 1079.5$ (K se escogió igual a la ganancia en lazo directo del modelo*

$$\text{dividida en la ganancia en lazo directo de } G_p(s), \text{ el vector de estado es } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.01 \\ 0.087 \end{bmatrix}.$$

- *El diagrama de bloques del sistema de control con variables de estado canónicas se observa en la figura 4.15.*

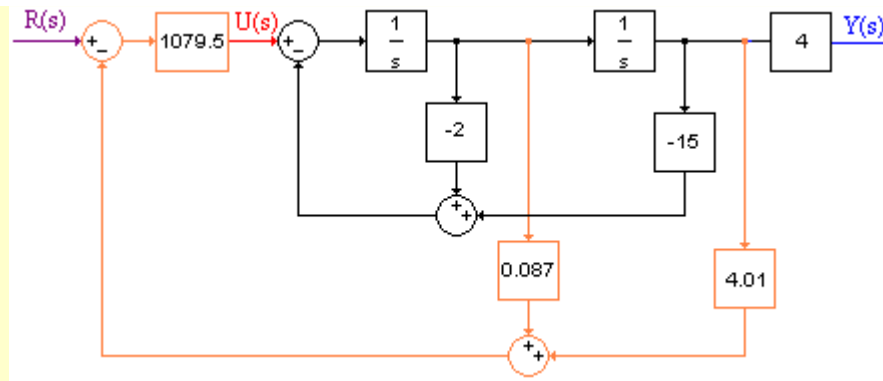
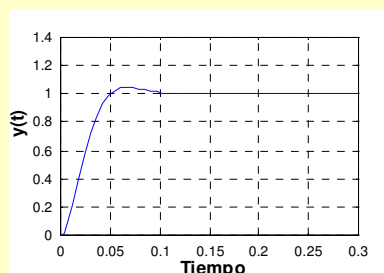
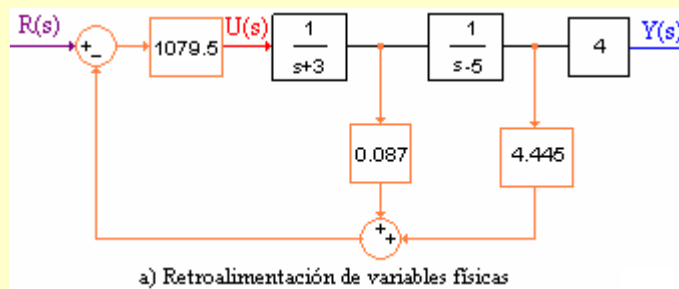


Figura 4.15 Diagrama de bloques del sistema con retroalimentación de variables de estado canónicas

- Para hacer el control sobre las variables físicas se usa la matriz de transformación obtenida en la sección 2.11.5, donde $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, para $x_c = T x_f$. Por lo tanto, como la señal que se retroalimenta es equivalente a $K^T x_c$, entonces reemplazando a x_c , se tiene que la señal de retroalimentación con variables físicas es $K^T x_c = K^T T x_f = K_f^T x_f$, donde, $K_f^T = K^T T$, en consecuencia $K_f = \begin{bmatrix} 0.087 \\ 4.445 \end{bmatrix}$.
- La figura 4.16a muestra el diagrama de bloques para el controlador que se desea implementar sobre el sistema de la figura 2.43. En la figura 4.16b se expone la respuesta del sistema al escalón, la cual coincide con la respuesta del espacio de estado del sistema con variables canónicas.



b) Respuesta al escalón unitario

Figura 4.16 Sistema con retroalimentación de variables de estado físicas.

- El controlador hace que la señal de salida siga a la referencia. En la figura 4.17 se observa la

salida del sistema utilizado como señal de referencia un tren de pulsos con periodo 5 segundos.

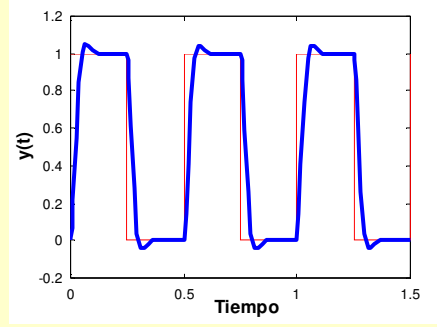


Figura 4.17 Seguimiento de la señal de referencia

En este ejemplo no se incluyo la salida como variable de estado, por lo tanto, las perturbaciones presentadas en la salida no se retroalimentan para que sean corregidas por el controlador; lo más conveniente en una retroalimentación de estados es incluir la salida total del sistema como variable de estado.

Ejemplo 2: Para el sistema tratado en el ejemplo anterior (figura 2.43) se desea diseñar un controlador por retroalimentación de variables de estado físicas donde se incluya la señal de salida.

- Como los vectores \mathbf{a} y \mathbf{d} siguen siendo iguales y dejando la misma ganancia en lazo directo ($K = 1079.5$) del controlador, entonces el vector de retroalimentación se mantiene

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.01 \\ 0.087 \end{bmatrix}.$$

- Como las variables de estado para el espacio de estados físico se redefinieron, es necesario volver a obtener el modelo y la matriz de transformación \mathbf{T} entre espacios de estado.

Sí como variables de estado están $x_{f2} = z(t)$ y $x_{f1} = y(t)$ donde, $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}[Z(s)] = z(t)$. Del diagrama de bloques, se sabe que $Z(s) = \frac{1}{s+3}U(s)$, aplicando transformada inversa de Laplace a $\frac{dz(t)}{dt} + 3z(t) = u(t)$ y despejando $\frac{dz(t)}{dt}$, se tiene que

$$\boxed{\dot{x}_{f2} = -3x_{f2} + u(t)}. \quad \text{Siendo } Y(s) = \frac{4}{s-5}Z(s), \text{ aplicando } \mathcal{L}^{-1} \text{ a la expresión}$$

entonces, $\frac{dy(t)}{dt} - 5q(t) = 4z(t)$, se deduce que $\boxed{\dot{x}_{f1} = 5x_{f1} + 4x_{f2}}$. La ecuación de salida es

$$\boxed{y(t) = x_{f1}}. \text{ Expresando la ecuaciones obtenidas en forma matricial:}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_f &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f \end{aligned}$$

- Hallando la matriz de transformación $\mathbf{x}_c = \mathbf{T} \mathbf{x}_f$. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{T}\mathbf{B}_f \therefore \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix}, \text{ por tanto } t_{12} = 0 \text{ y } t_{22} = 1$$

$$\mathbf{C}_c \mathbf{T} = \mathbf{C}_f \therefore \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t_{11} & 4t_{12} \end{bmatrix}, \text{ se deduce que } t_{11} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\mathbf{A}_c \mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{A}_f \therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ t_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ t_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{ entonces, significa que:}$$

$$\begin{bmatrix} t_{21} & 1 \\ 15 \times 0.25 + 2t_{21} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \times 5 & 0.25 \times 4 \\ 5t_{21} & 4t_{21} - 3 \end{bmatrix}, \text{ por tanto, } t_{21} = 1.25, \text{ entonces } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 1.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

- El vector de retroalimentación para el espacio de estados físico es $\mathbf{K}^T \mathbf{T} = \mathbf{K}_f^T = [1.111 \quad 0.087]$.

El diagrama de bloques del sistema retroalimentado utilizando variables físicas se encuentra en la figura 4.18. La respuesta ante una referencia escalón no cambia porque es el mismo controlador; sin embargo, esta vez como $y(t)$ es variable de estado, se controlan las perturbaciones en la salida.

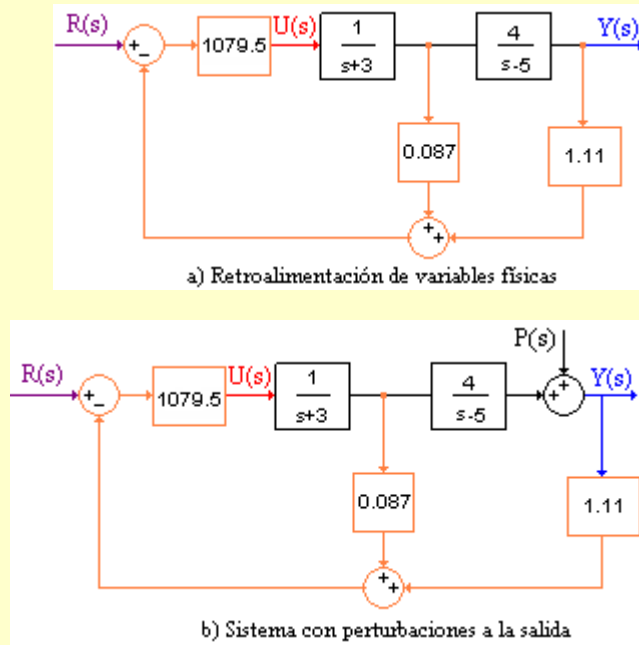


Figura 4.18 Diagrama de bloques del sistema incluyendo la salida como variable de estado

La figura 4.19 contiene la respuesta del controlador ante perturbaciones en la salida. Aunque que se percibe un error en estado estacionario, el sistema responde adecuadamente a las perturbaciones. Además, en la figura 4.19 se muestra la comparación entre las señales de salida del sistema trabajado en el ejemplo 1 y el sistema del ejemplo 2.

Nótese que cuando se utiliza la variable de salida como variable de estado el sistema responde a las perturbaciones. En el caso del ejemplo 1 el sistema de control no percibe la perturbación y por lo tanto, no la puede corregir.

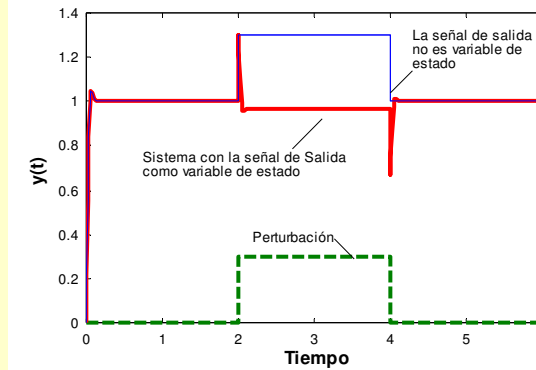


Figura 4.19 Respuesta del sistema a perturbaciones en la salida.

Como este es un ejemplo ‘didactico’ que no tiene en cuenta los límites de la planta, en la simulación el controlador puede proporcionar cualquier nivel de señal que necesite para corregir la perturbación. Sin embargo, en un sistema real la señal de control tiene un nivel mínimo y un nivel máximo que condicionan su respuesta. En la figura 4.20 se observa la señal de control.

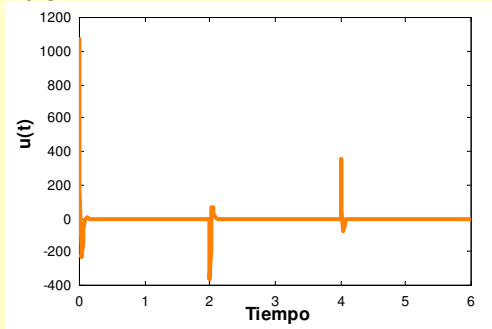


Figura 4.20 Señales características del sistema en lazo cerrado.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

ROHRS Charles E; MELSA, James L. y SCHULTZ, Donald G. SISTEMAS DE CONTROL LINEAL. Ed. McGraw-Hill. 1994.

4.2.2 Retroalimentación de estados con modelo de referencia

En este tipo de diseño el comportamiento deseado, en lazo cerrado, se expresa en un espacio de estados denominado modelo de referencia de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_m \mathbf{r}(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_m \mathbf{x}\end{aligned}$$

Para el caso de un sistema de orden dos se podría escoger como modelo deseado a

$$M_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2}, \text{ que expresado mediante un espacio de estados canónico } \mathbf{x} \text{ quedaría:}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\rho\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

Sí el espacio de estados de la planta la planta es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Definiendo la señal de control como $u(t) = \mathbf{g}r(t) - \mathbf{K}^T \mathbf{x}$, donde \mathbf{g} es el factor de ganancia de la señal de referencia y reemplazando a $u(t)$ en la ecuación de estado del modelo de la planta, se tiene que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}[\mathbf{g}r(t) - \mathbf{K}^T \mathbf{x}]$$

Por lo tanto, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{g}r(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}^T \mathbf{x}$, ordenando la expresión se obtiene la ecuación de estado Ec 4.25, en términos de la señal de referencia. La ecuación de salida no cambia.

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T] \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{g}r(t) \quad \text{Ec 4.25}$$

Comparando a Ec 4.25 con la ecuación de estado del modelo de referencia:

$$\mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_m r(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T] \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{g}r(t)$$

Entonces, para que el sistema en lazo cerrado se comporte como el modelo de referencia se debe cumplir que:

$$\mathbf{A}_m = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T]$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}\mathbf{g} \quad \text{Ec 4.26}$$

Las igualdades obtenidas anteriormente y expresadas en Ec 4.26 son las *ecuaciones de diseño del controlador*.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

Ejemplo 1: Para el sistema tratado en el ejemplo 2 de la sección anterior (figura 2.43) se desea diseñar un controlador por retroalimentación de variables de estado físicas, utilizando el método de modelo de referencia.

- Inicialmente, se define un espacio de estado canónico donde la matriz \mathbf{C} tenga la forma $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$, realizando este procedimiento se tiene que:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}_c$$

- Ahora se especifica el modelo de referencia. En la sección anterior se propuso como modelo

deseado, $M_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2}$, donde $\rho = 0.7$ y $\omega_n = 65.7 \text{ rad/s}$. Por tanto, el modelo de referencia es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4318 & -92 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4318 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

- Teniendo en cuenta que el vector de retroalimentación es $\mathbf{K}^T = [K_1 \quad K_2]$, aplicando las reglas de control de Ec 4.26, se pueden hallar los valores de K_1 , K_2 y \mathbf{g} .

- De la igualdad $\mathbf{A}_m = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T]$ se obtienen las ganancias de retroalimentación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4318 & -92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4318 & -92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4K_1 & 4K_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4318 & -92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 - 4K_1 & 2 - 4K_2 \end{bmatrix}$$

Dos matrices son iguales, si lo son componente a componente, por lo tanto, $15 - 4K_1 = -4318$ y $2 - 4K_2 = -92$, donde:

$$K_1 = \frac{4333}{4} = 1083.25 \text{ y } K_2 = \frac{94}{4} = 23.5, \text{ en resumen } \mathbf{K}^T = [1083.25 \quad 23.5].$$

- Para que $\mathbf{B}_m = \mathbf{B}\mathbf{g}$, entonces \mathbf{g} debe ser orden uno:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4318 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = 1079.5.$$

- En la figura 4.21 aparece el diagrama de bloques del sistema con retroalimentación de estados, con modelo de referencia, utilizando variables canónicas. La respuesta al escalón coincide con la que aparece en la figura 4.16b.

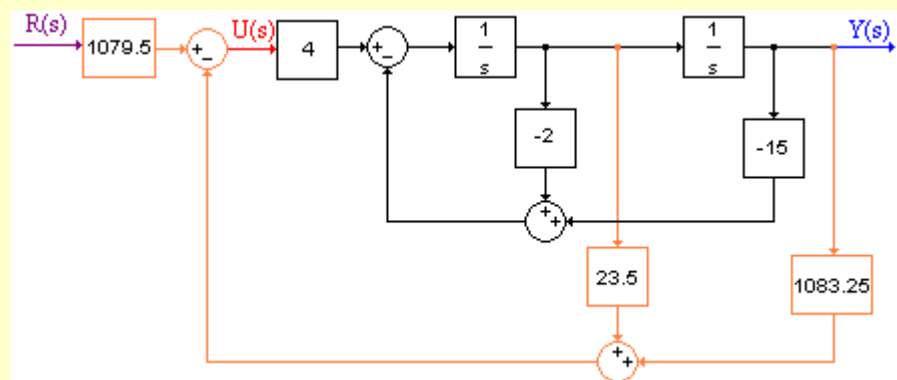


Figura 4.21 Diagrama de bloques del controlador con retroalimentación de variables canónicas.

- Como el controlador se desea diseñar para el espacio de estados con variables físicas, definido

de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}}_f = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}_f$$

Debido a que el espacio de estados canónico se modificó, con el fin de obtener una matriz de salida de la forma $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$; es necesario obtener una matriz de transformación \mathbf{T} entre espacio de estados ($\mathbf{x}_c = \mathbf{T} \mathbf{x}_f$).

- Para hallar la matriz \mathbf{T} se tiene que:

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{T} \mathbf{B}_f \therefore \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix}, \text{ entonces, } t_{12} = 0 \text{ y } t_{22} = 4$$

$$\mathbf{C}_c \mathbf{T} = \mathbf{C}_f \therefore [1 \quad 0] \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = [1 \quad 0] = [t_{11} \quad t_{12}], \text{ se deduce que } t_{11} = 1$$

$$\mathbf{A}_c \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{A}_f \therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{21} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{21} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{ entonces, multiplicando las matrices:}$$

$$\begin{bmatrix} t_{21} & 4 \\ 15 + 2t_{21} & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5t_{21} & 4t_{21} - 12 \end{bmatrix}, \text{ por tanto, } t_{21} = 5, \text{ siendo } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

- El vector de retroalimentación para el espacio de estados físico es $\mathbf{K}_f^T = \mathbf{K}^T \mathbf{T}$, el vector de retroalimentación de variables físicas es $\mathbf{K}_f^T = [1200 \quad 94]$

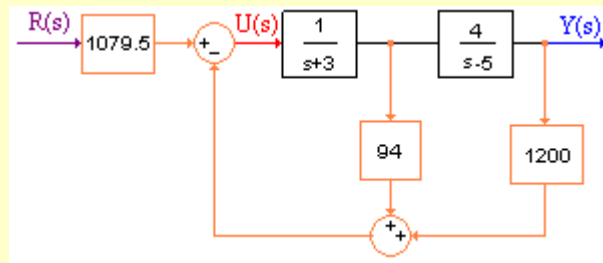


Figura 4.22 Controlador con variables físicas

La respuesta del sistema en lazo cerrado, teniendo como referencia una señal impulsiva, es idéntica a la que aparece en la figura 4.17. Además ante perturbaciones se comporta igual que el controlador diseñado en la sección anterior (Ejemplo2).

La ventaja del diseño con modelo de referencia radica en que todas las incógnitas que intervienen en el diseño se pueden obtener a través de Ec 4.26, al contrario del diseño estudiando en la sección 4.2.1, donde es necesario ajustar la ganancia en lazo directo y en consecuencia recalculan las ganancias de retroalimentación.

4.3 Controladores PID

En la industria uno de los controladores más utilizados es el PID. La denominación PID corresponde a las siglas en inglés *Proportional-Integral-Derivative*; en español el controlador PID es un controlador proporcional, integral, derivativo.

En general, un controlador recibe una señal de error $e(t)$ y de acuerdo con el valor de dicha señal suministra una señal de control $u(t)$, buscando que el error tienda a cero, para que la señal de salida siga perfectamente a la señal de referencia $r(t)$. En el caso del PID el controlador contiene un algoritmo que multiplica el error por una ganancia –parte proporcional–, obtiene su integral y también su derivada; siendo la señal de control la suma de los tres efectos.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{Ec 4.27}$$

En la expresión Ec 4.27 se observa la ecuación que define un controlador PID en el dominio del tiempo y en Ec 4.28 se encuentra su función de transferencia. El diagrama de bloques de un PID se representa en la figura 4.23a y la figura 4.23b muestra el diagrama de bloques de un sistema controlado con un PID.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad \text{Ec 4.28}$$

De acuerdo con lo estudiado en la sección 4.1, diseño de compensadores, los compensadores en adelanto, filtros pasa-altos, mejoran el estado transitorio de la respuesta del sistema y los compensadores en atraso, filtros pasa-bajos, mejoran la respuesta en estado estacionario. De igual forma si se analiza el controlador PID éste consta de un filtro pasa altos, parte derivativa, y de un filtro pasa bajos, parte integral; lo que significa que una parte del controlador se encarga del estado transitorio y la otra de la respuesta en estado estacionario. Además, los compensadores poseen una ganancia para cumplir con la especificación de e_{ss} , de igual forma, la parte proporcional del PID cumple con esta función.

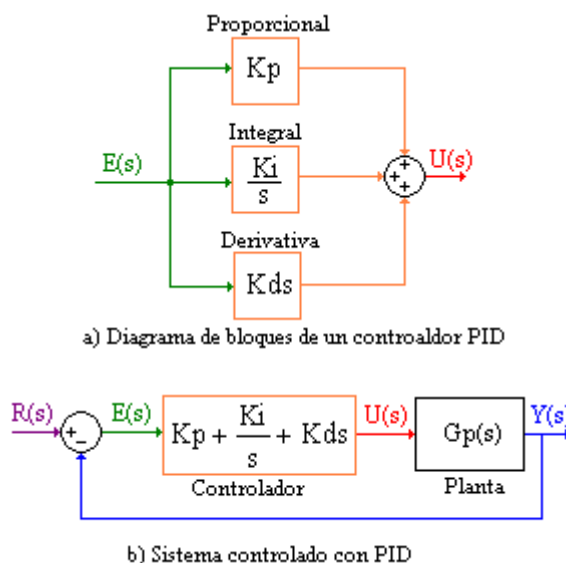


Figura 4.23 Controladores PID.

La integral de una función, se refiere al área bajo la curva de dicha función. Para el caso de la señal de error lo ideal es que el área bajo la curva sea cero, ya que esto significaría que el error es cero -valor ideal en la respuesta de un sistema, pues indica que la señal de salida sigue la referencia-.

La derivada de una función suministra información sobre la razón de cambio de la función. En el caso del error, sirve para saber en qué sentido está cambiando el error con respecto al tiempo -si se está alejando o acercando al ideal-.

Cuando no se requiere corregir el error en estado estacionario, la constante K_i de la parte integral se hace cero y se obtiene un controlador PD -poco utilizados-; sí al contrario no se desea la parte derivativa entonces se obtiene un PI y si solamente con compensar en ganancia el sistema ya se comporta como se desea, entonces se tiene un controlador P.

En el diseño de un controlador proporcional P se puede usar el criterio de Routh o el análisis del lugar de las raíces para obtener una ganancia K donde el sistema en lazo cerrado se comporte adecuadamente. Para diseñar controladores PI o PID, se trabajarán dos métodos, el diseño experimental y el diseño por ubicación de polos.

4.3.1 Diseño experimental de controladores PID

Cuando se puede obtener un modelo experimental de la planta (POTM) como el estudiado en la sección 2.14, se llega a una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$$

Se pueden diseñar controladores P, PI, o PID a partir del tiempo de retardo t_0 , de la ganancia K y de la constante de tiempo τ . Hay diferentes métodos para ajustar controladores, entre los que están el método Ziegler-Nichols y los métodos que utilizan criterios de mínimo error de integración.

Generalmente para los diferentes métodos la función de transferencia del controlador PID se expresa en función de la ganancia proporcional K_p y las constantes de tiempo de integración τ_i y de derivación τ_d , como aparece en Ec 4.29

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right] \quad \text{Ec 4.29}$$

- Ziegler – Nichols:

En este método las formulas de ajuste se pueden definir en términos de t_0 , K y τ ; aunque los parámetros que se usaron no son propiamente éstos. La tabla 4.2 contiene los parámetros para los diferentes controladores.

Tabla 4.2 Parámetros para controladores P, PI y PID según método Ziegler- Nichols

Controlador	Kp	τ_i	τ_d
P	$\frac{1}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-1}$	α	0
PI	$\frac{0.9}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-1}$	$3.33 t_o$	0
PID	$\frac{1.2}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-1}$	$2 t_o$	$\frac{1}{2} t_o$

- Criterios de Mínima Integral del error:

Entre los criterios de mínimo error de integración están, la integral del valor absoluto del error (Ec 4.30), la integral del cuadrado del error (Ec 4.31) la integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (Ec 4.32) y el cuadrado del error ponderado en el tiempo (Ec 4.33); éstos criterios son más conocidos por sus siglas IAE, ICE, ITAE e ICET, respectivamente. Los más usados son IAE, ICE e ITAE.

$$IAE = \int_0^{\alpha} |e(t)| dt \quad \text{Ec 4.30}$$

$$ICE = \int_0^{\alpha} e(t)^2 dt \quad \text{Ec 4.31}$$

$$ITAE = \int_0^{\alpha} t |e(t)| dt \quad \text{Ec 4.32}$$

$$ICET = \int_0^{\alpha} t e(t)^2 dt \quad \text{Ec 4.33}$$

La Tabla 4.3 comprende los modelos generales de controladores P, PI y PID, utilizando criterios de mínimo error de integración; incluyendo además, los parámetros de ajuste para cada uno de los casos, cuando se presentan en la planta señales de entrada con perturbaciones (ver figura 4.24).

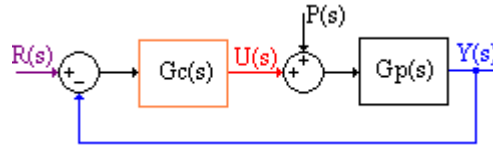


Figura 4.24 Sistema con perturbaciones a la entrada de la planta.

Tabla 4.3 Parámetros para ajuste de controladores P, PI y PID

Controlador	P		PI				PID					
	$K_p = \frac{a}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^b$		$K_p = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{b_1} \quad \tau_i = \frac{\tau}{a_2} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{b_2}$				$K_p = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{b_1} \quad \tau_i = \frac{\tau}{a_2} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{b_2} \quad \tau_d = a_3 \tau \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{b_3}$					
Criterios	a	b	a ₁	b ₁	a ₂	b ₂	a ₁	b ₁	a ₂	b ₂	a ₃	b ₃

ICE	1.411	-0.917	1.305	-0.959	0.492	0.739	1.495	-0.945	1.101	0.771	0.560	1.006
IAE	0.902	-0.985	0.984	-0.986	0.608	0.707	1.435	-0.921	0.878	0.749	0.482	1.137
ITAE	0.490	-1084	0.859	-0.977	0.674	0.680	1.357	-0.947	0.842	0.738	0.381	0.995

La tabla 4.4 contiene los parámetros de ajuste de controladores para cambios en el punto de control.

Tabla 4.4 Parámetros de ajuste para variaciones en el punto de control.

Controlador	PI				PID					
	$K_p = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_1} \quad \tau_i = \frac{\tau}{a_2} \left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_2}$				$K_p = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_1} \quad \tau_i = \frac{\tau}{a_2} \left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_2} \quad \tau_d = a_3 \tau \left(\frac{t_o}{\tau}\right)^{b_3}$					
Criterios	a_1	b_1	a_2	b_2	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
IAE	0.758	-0.861	1.02	-0.323	1.086	-0.869	0.740	-0.130	0.348	0.914
ITAE	0.586	-0.916	1.03	-0.165	0.965	-0.855	0.796	-0.147	0.308	0.9292

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

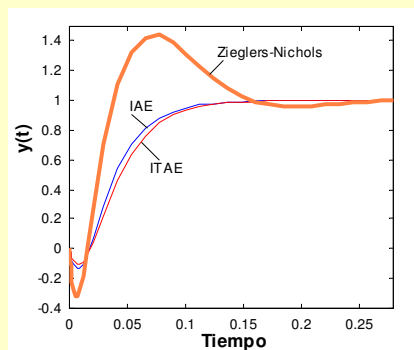
Se desea diseñar un controlador PID con el fin de mejorar la respuesta en el tiempo de la planta, que permita seguir una señal de referencia e insensibilice la salida a perturbaciones. Como planta se tiene el modelo POTM obtenido en las 'ideas complementarias' de la sección 2.14.

$$G(s) = \frac{3e^{-0.0247s}}{0.7589s + 1}$$

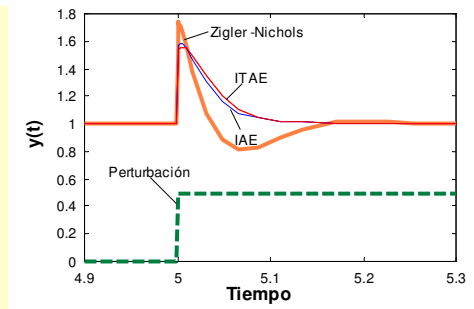
La Tabla 4.5 presenta los resultados de las constantes del PID para los diferentes métodos de sintonización de lazos simples, entre los que están Ziegler-Nichols, integral del valor absoluto del error IAE e integral del valor absoluto del error ponderado en tiempo ITAE. Para la sintonización de los controladores con criterio del error se utilizó la tabla 4.4, ya que la respuesta de un controlador ante un cambio en el punto de control es similar a la respuesta ante una perturbación en la salida pero con signo contrario.

Tabla 4.5 Parámetros de controladores PID

	Kp	Ki	Kd
IAE	7,101	6,885	0,082
ITAE	6,015	6,271	0,058
Ziegler-Nichols	12,290	248,783	0,152



a) Respuesta del sistema a una señal de referencia escalón



b) Señal de salida con perturbaciones

Figura 4.25 Respuesta del controlador PID

La figura 4.25 muestra una comparación de la respuesta del controlador, según los criterios de sintonización, utilizando como señal de referencia un escalón.

Cuando no es posible obtener un modelo de primer orden más tiempo muerto; es necesario sintonizar el controlador en línea, significa que el sistema se debe retroalimentar utilizando la parte proporcional del controlador. Utilizando como señal de referencia un escalón, se varía la ganancia proporcional hasta obtener en la salida oscilaciones mantenidas (ver figura 4.26).

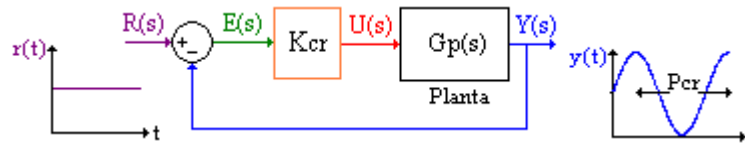


Figura 4.26 Método Ziegler – Nichols para sistemas inestables.

El valor de K_p para el cual se obtuvieron las oscilaciones mantenidas, se conoce como ganancia crítica ' K_{cr} ', debido a que el sistema con ésta ganancia es marginalmente estable –se encuentra en la frontera entre la estabilidad y la inestabilidad-. El periodo de la oscilación se denomina periodo crítico ' P_{cr} '.

Este método también es de Ziegler – Nichols y en la tabla 4.6 aparecen los parámetros de ajuste de los controladores en términos de K_{cr} y P_{cr} .

Tabla 4.6 Parámetros de ajuste de controladores PID a partir de K_{cr} y P_{cr}

Controlador	K_p	τ_i	τ_d
P	$0.5K_{cr}$	α	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

Para la planta con función de transferencia $G(s) = \frac{1}{s^2 + 10}$, se requiere diseñar un controlador PID, buscando que la señal de salida siga la señal de referencia y se insensibilice para señales de perturbación.

No es posible obtener un modelo POTM, ya que la señal de salida no tiene una forma amortiguada o sobreamortiguada. Por lo tanto, es necesario realizar un ajuste experimental, barriendo la constante proporcional y haciendo cero las demás constantes del controlador.

En la figura 4.27 se muestra la oscilación mantenida lograda cuando $K_p = 10 = K_{cr}$, el periodo de la oscilación denominado periodo crítico es $P_{cr} = 1.4$. Aunque el sistema es oscilatorio para diferentes valores de K , se escogió la ganancia de 10, ya que ésta presentó una oscilación de amplitud 1 para la entrada escalón.

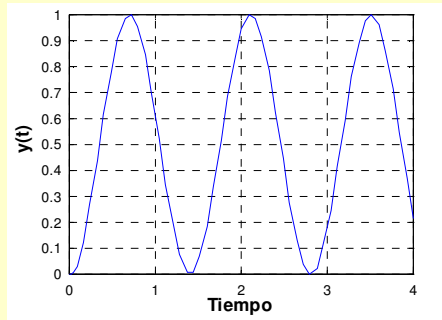


Figura 4.27 Salida para $K_p = 10$ (Oscilación mantenida)

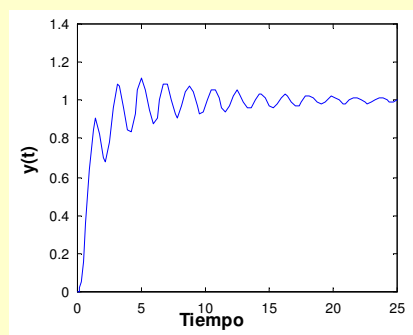
Utilizando la tabla 4.6 las constantes del PID son:

$$K_p = 0.6 K_{cr} = 6$$

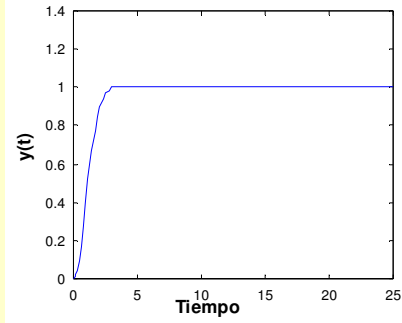
Como $\tau_i = 0.5P_{cr} = 0.5 \times 1.4 = 0.7$, entonces, $K_i = \frac{K_p}{\tau_i} = \frac{6}{0.7} = 8.57$

El tiempo de derivación es $\tau_d = 0.125P_{cr} = 0.175$, por lo tanto, $K_d = K_p * \tau_d = 1.05$

Las señal de salida para una referencia escalón unitario se encuentran en la figura 4.28a. El sistema ya es estable, sin embargo su respuesta transitoria no es la más adecuada. Ajustando la ganancia de la parte derivativa, se mejora el transiente del sistema; la figura 4.28b muestra la señal de salida para $K_d = 5$.



a) Respuesta del sistema con $K_d = 1.05$

b) Respuesta del sistema con $K_d = 5$ **Figura 4.28 Salida del sistema controlado con PID- Método de oscilación mantenida-**

4.3.2 Diseño analítico de controladores PID:

El diseño de forma analítica se utiliza cuando *se conoce el modelo de la planta*, - el modelo de la planta se puede obtener de forma experimental-. Para casos de plantas con POTM, es necesario aproximar el retardo a una función polinómica (aproximación de Padé). El diseño analítico resulta muy versátil en el diseño de controladores para plantas cuyos modelos son de orden dos o superior.

Al igual que en el espacio de estado es necesario definir comportamientos deseados. En los textos guía se encuentran polinomios de comportamiento característicos, que incluyen un desempeño del error apropiado bajo criterios IAE, ITAE etc. No obstante, el diseñador puede establecer el comportamiento deseado con base en las necesidades de respuesta del sistema en régimen transitorio y/o en estado estacionario.

Para el diseño de forma analítica es necesario recordar que el PID *incrementa en uno el orden del sistema*. Por ejemplo, si en el sistema se tiene retroalimentación unitaria ($H(s)=1$) y la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ es de orden dos, el modelo deseado se debe escoger de orden tres. En estos casos se puede escoger un sistema de orden dos con valores deseados de respuesta en el tiempo, criterio del error y coeficiente de amortiguamiento; añadiendo un polo bien estable – se debe tener cuidado con la ganancia para que sea igual a uno en lazo cerrado-. Sabiendo que el diagrama de bloques de la planta controlada con PID es como aparece en la figura 4.23b, entonces se halla la función de transferencia en lazo cerrado $M_c(s)$. El polinomio deseado $P_d(s)$ se define del mismo orden que el polinomio característico $P(s)$ del sistema en lazo cerrado.

Por último, se iguala el polinomio característico $P(s)$ (denominador de $M_c(s)$), con el polinomio característico del modelo deseado $P_d(s)$ y se despejan las constantes del PID.

IDEAS COMPLEMENTARIAS...

Para una planta con función de transferencia $G_p(s) = \frac{K}{s+a}$, se desea diseñar, de forma analítica, un controlador PI.

- Teniendo en cuenta que la función de transferencia del controlador es $\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$,

hallando común denominador $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{Kds^2 + Kps + Ki}{s}$ **y obteniendo la función de transferencia total del sistema en lazo cerrado:**

$$Mc(s) = \frac{\frac{Kds^2 + Kps + Ki}{s} \times \frac{K}{s+a}}{1 + \frac{Kds^2 + Kps + Ki}{s} \times \frac{K}{s+a}}$$

$$Mc(s) = \frac{Kd Ks^2 + Kp Ks + Ki K}{s^2 + as + Kd Ks^2 + Kp Ks + Ki K} = \frac{Kd Ks^2 + Kp Ks + Ki K}{(Kd K)s^2 + (a + KpK)s + Ki K}$$

- **Igualando el polinomio característico del sistema con el polinomio deseado**
 $Pd(s) = s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2$ **se tiene que:**

$$(Kd K + 1)s^2 + (a + KpK)s + Ki K = s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2$$

- **Por ser un PI, Kd se hace igual a cero, por lo tanto:**

$$s^2 + (a + KpK)s + Ki K = s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2$$

- **Despejando las constantes:**

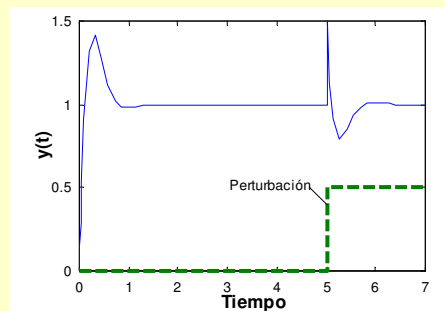
$$(a + Kp K) = 2\rho\omega_n, \text{ donde } Kp = \frac{2\rho\omega_n - a}{K}$$

$$Ki K = \omega_n^2, \text{ siendo } Ki = \frac{\omega_n^2}{K}$$

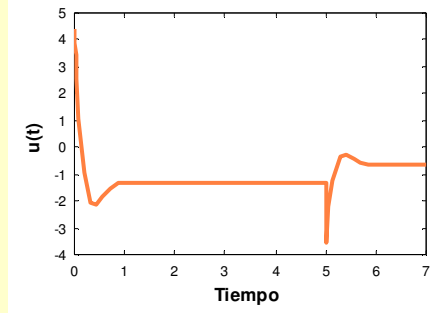
Ejemplo 1: Si la función de transferencia de la planta es $Gp(s) = \frac{3}{s-4}$ (inestable en lazo cerrado), y el polinomio deseado es $P(s) = s^2 + 9.2s + 43.18$, entonces las constantes del controlador PI son:

$$Kp = \frac{9.2+4}{3} = 4.4 \text{ y } Ki = \frac{43.18}{3} = 14.39$$

La Figura 4.29 se muestra la salida del sistema ante perturbaciones y la señal de control.



a) Señal de salida perturbada



b) Señal de control

Figura 4.29 Señales características del sistema

Cuando se presenta la perturbación, el controlador PID actúa haciendo que la señal de salida siga la referencia. En un sistema real la señal de control esta limitada por las características físicas del sistema.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

SMITH, Carlos A y CORRIPIO, Armando B. CONTROL AUTOMATICO DE PROCESOS. Teoría y Práctica. Capítulo VI Diseño de sistemas de control por retroalimentación con un solo circuito. PAG 283- 291. Ed. LIMUSA.

4.4 Controladores Algebraicos

Cuando se diseñan un controlador se busca mejorar o tener una de las siguientes características:

- Tiempo de Respuesta
- Consumo mínimo de energía
- Amortiguamiento
- Tiempo de Retardo
- Error de Seguimiento
- Robustez

De acuerdo con las características de la planta que se implemente y con las condiciones de diseño que se requieran, un controlador algebraico puede mejorar los aspectos citados anteriormente.

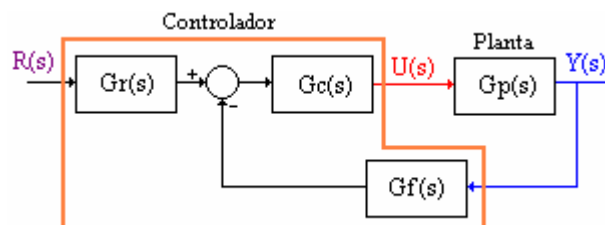


Figura 4.30 Esquema de un controlador algebraico.

En la figura 4.30 se observa el esquema general de un controlador algebraico, obsérvese que el controlador está conformado por tres bloques; un bloque en la entrada, con función de transferencia $G_r(s)$, que multiplica a la señal de referencia; un bloque, con función de transferencia $G_c(s)$, en serie con la planta y un bloque en el lazo de retroalimentación con función de transferencia $G_f(s)$. También se muestra la variable de salida del sistema $Y(s)$, la señal de entrada a la planta $U(s)$ y la señal de referencia del sistema $R(s)$.

Cuando se diseñan controladores se busca que el sistema en lazo cerrado se comporte como un modelo deseado $G_m(s)$ (ver figura 4.31), en otras palabras, que la salida del sistema se comporte como la del modelo deseado $Y(s)=Y_m(s)$.

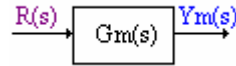


Figura 4.31 Modelo deseado del sistema

De observar la figura 4.31 se deduce que $Y(s) = G_p(s)U(s)$, donde $G_p(s) = \frac{B_p(s)}{A_p(s)}$; que

$U(s) = G_c(s)E(s)$, donde $G_c(s) = \frac{B_c(s)}{A_c(s)}$; y que el error $E(s) = G_r(s)R(s) - G_f(s)Y(s)$, donde

$$G_r(s) = \frac{B_r(s)}{A_r(s)} \text{ y } G_f(s) = \frac{B_f(s)}{A_f(s)}.$$

Entonces reemplazando $E(s)$ en $Y(s) = G_p(s)U(s) = G_p(s)G_c(s)E(s)$, se tiene que:

$$Y(s) = G_p(s)G_c(s)[G_r(s)R(s) - G_f(s)Y(s)]$$

$$Y(s) = G_p(s)G_c(s)G_r(s)R(s) - G_p(s)G_c(s)G_f(s)Y(s)$$

$$Y(s)[1 + G_p(s)G_c(s)G_f(s)] = G_p(s)G_c(s)G_r(s)R(s)$$

Despejando a $Y(s)$, $Y(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)G_r(s)}{[1 + G_p(s)G_c(s)G_f(s)]}R(s)$, la función de transferencia en lazo cerrado se encuentra en Ec 4.34.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p(s)G_c(s)G_r(s)}{[1 + G_p(s)G_c(s)G_f(s)]} \quad \text{Ec 4.34}$$

Reemplazando en Ec 4.34, las funciones de transferencia por su equivalencia en polinomios:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{B_p(s)}{A_p(s)} \frac{B_c(s)}{A_c(s)} \frac{B_r(s)}{A_r(s)}}{\left[1 + \frac{B_p(s)}{A_p(s)} \frac{B_c(s)}{A_c(s)} \frac{B_f(s)}{A_f(s)}\right]} = \frac{B_p(s)B_c(s)B_r(s)A_f(s)}{[A_p(s)A_c(s)A_f(s) + B_p(s)B_c(s)B_f(s)]A_r(s)}$$

Con el fin de simplificar el diseño se hace $A_r(s) = A_f(s)$ y $B_c(s) = A_f(s)$ (ver figura 4.32), con lo cual la función en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B_p(s)B_r(s)}{[A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_f(s)]} = M_c(s) \quad \text{Ec 4.35}$$

Como $U(s) = G_c(s)E(s)$, reemplazando la equivalencia de $E(s)$ se tiene que $U(s) = G_c(s)G_r(s)R(s) - G_c(s)G_f(s)Y(s)$, y las funciones de transferencia en términos de los polinomios que las conforman, $U(s) = \frac{B_c(s)}{A_c(s)} \frac{B_r(s)}{A_r(s)} R(s) - \frac{B_c(s)}{A_c(s)} \frac{B_f(s)}{A_f(s)} Y(s)$, entonces la variable de entrada a la planta $U(s) = \frac{B_c(s)}{A_c(s)} \frac{B_r(s)}{A_r(s)} R(s) - \frac{B_c(s)}{A_c(s)} \frac{B_f(s)}{A_f(s)} Y(s) = \frac{B_r(s)}{A_c(s)} R(s) - \frac{B_f(s)}{A_c(s)} Y(s)$.

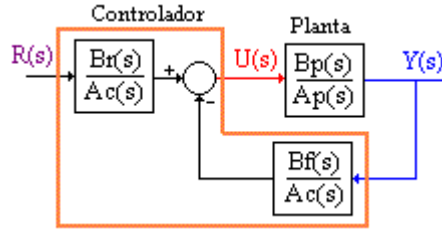


Figura 4.32 Esquema simplificado de un controlador algebraico

En la práctica, cuando se diseñan controladores es necesario restringir la señal de control dentro de un límite máximo y mínimo ($u(t) \leq u_0$), con el fin de evitar saturaciones, inestabilidad y consumos de energía excesivos en la planta.

Para realizar el diseño es necesario especificar los polinomios que interviene en el esquema simplificado, para el caso de la planta se tiene:

$A_p(s) = s^{n_p} + a_{p1}s^{n_p-1} + a_{p2}s^{n_p-2} \dots + a_{p_{n_p-1}}s + a_{p_{n_p}}$, el grado de $A_p(s)$ se define como $gd[A_p(s)] = n_p$ y $B_p(s) = b_{p0}s^{m_p} + b_{p1}s^{m_p-1} + b_{p2}s^{m_p-2} \dots + b_{p_{m_p-1}}s + b_{p_{m_p}}$, grado de $B_p(s)$ es $gd[B_p(s)] = m_p$, donde, $gd[A_p(s)] \geq gd[B_p(s)]$, lo que significa que $n_p \geq m_p$. Esto debido a la causalidad (Un sistema es causal cuando el grado del polinomio del numerador es menor o igual al grado del denominador).

El modelo deseado tiene como función de transferencia:

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad \text{Ec 4.36}$$

Por lo tanto, el grado del numerador del modelo deseado es $gd[B_m(s)] = m$ y el del denominador $gd[A_m(s)] = n$.

Todos los polinomios son definidos de manera análoga teniendo en cuenta que los polinomios del denominador son 'monicos', significa que el coeficiente de la 's' de mayor orden es igual a uno, de esta manera se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{gd}[Bc(s)] &= m_c \text{ y } \text{gd}[Ac(s)] = n_c, \text{ donde } n_c \geq m_c \\ \text{gd}[Br(s)] &= m_r \text{ y } \text{gd}[Ar(s)] = n_r, \text{ donde } n_r \geq m_r \\ \text{gd}[Bf(s)] &= m_f \text{ y } \text{gd}[Af(s)] = n_f, \text{ donde } n_f \geq m_f \end{aligned}$$

Por tanto, como $Ar(s) = Af(s)$ y $Bc(s) = Af(s)$, entonces $m_c \geq m_r$, $m_c \geq m_f$ y en consecuencia $n_c \geq m_f$ y $n_c \geq m_r$.

Como la función de transferencia en lazo cerrado es Ec 4.35 y debe ser igual al modelo deseado, entonces:

Igualando las expresiones Ec 4.35 y Ec 4.36, $\frac{Bp(s)Br(s)}{[Ap(s)Ac(s) + Bp(s)Bf(s)]} = \frac{Bm(s)}{Am(s)}$, se tiene que los grados del sistema en lazo cerrado y del modelo son iguales:

$$\text{gd}\left[\frac{Bp(s)Br(s)}{[Ap(s)Ac(s) + Bp(s)Bf(s)]}\right] = \text{gd}\left[\frac{Bm(s)}{Am(s)}\right] \quad \text{Ec 4.37}$$

De la expresión Ec 4.37 se deduce que:

$$\text{gd}[Ap(s)Ac(s) + Bp(s)Bf(s)] - \text{gd}[Bp(s)Br(s)] = \text{gd}[Am(s)] - \text{gd}[Bm(s)] \quad \text{Ec 4.38}$$

Recordando que $\text{gd}[Ap(s)] \geq \text{gd}[Bp(s)]$ ($n_p \geq m_p$) y que $n_c \geq m_f$, entonces:

$$\text{gd}[Ap(s)Ac(s) + Bp(s)Bf(s)] = \text{gd}[Ap(s)Ac(s)]$$

Por tanto, reemplazando en Ec 4.38, $\text{gd}[Ap(s)Ac(s)] - \text{gd}[Bp(s)Br(s)] = \text{gd}[Am(s)] - \text{gd}[Bm(s)]$. Esta expresión es equivalente a:

$$\text{gd}[Ap(s)] + \text{gd}[Ac(s)] - \text{gd}[Bp(s)] - \text{gd}[Br(s)] = \text{gd}[Am(s)] - \text{gd}[Bm(s)]$$

Pero como $n_c \geq m_r$, entonces se tendría que:

$$\text{gd}[Ap(s)] - \text{gd}[Bp(s)] + \ell = \text{gd}[Am(s)] - \text{gd}[Bm(s)], \text{ donde } \ell \geq 0.$$

Por tanto, se obtiene la primera condición para diseñar controladores algebraicos Ec 4.39.

$$\boxed{\text{gd}[Ap(s)] - \text{gd}[Bp(s)] \leq \text{gd}[Am(s)] - \text{gd}[Bm(s)]} \quad \text{Ec 4.39}$$

Del sistema se tiene que $\frac{Bp(s)Br(s)}{[Ap(s)Ac(s) + Bp(s)Bf(s)]} = \frac{Bm(s)}{Am(s)}$. Si se define un polinomio observador $T(s)$ (El polinomio observador es estable y mónico), entonces se pueden deducir las expresiones que se encuentran en Ec 4.40.

$$\begin{aligned} Bp(s)Br(s) &= T(s)Bm(s) \\ Ap(s)Ac(s) + Bp(s)Bf(s) &= T(s)Am(s) \end{aligned} \quad \text{Ec 4.40}$$

Para despejar a $B_r(s)$ (Ec 4.41), $B_p(s)$ debe dividir a $T(s)B_m(s)$, en otras palabras $B_m(s)$ debe ser múltiplo de $B_p(s)$.

$$B_r(s) = \frac{T(s)B_m(s)}{B_p(s)} \quad \text{Ec 4.41}$$

De la igualdad, $A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_f(s) = T(s)A_m(s)$, en ésta ecuación no se conocen los coeficientes de $A_c(s)$ y $B_f(s)$, lo que quiere decir que se tienen $n_c + m_f + 1$ incógnitas. Como $A_c(s)$, $T(s)$ y $A_p(s)$ son monicos, donde el polinomio observador es de grado ' ℓ ' $T(s) = s^\ell + t_1 s^{\ell-1} + \dots + t_{\ell-1} s + t_\ell$, entonces se tendrían $n + \ell$ ecuaciones. Para que el sistema tenga al menos una solución se debe cumplir que el número de incógnitas sea mayor o igual al número de ecuaciones Ec 4.42

$$n_c + m_f + 1 \geq n + \ell \quad \text{Ec 4.42}$$

Por otra parte, observando la segunda ecuación de Ec 4.40, el número de ecuaciones también se puede expresar como $n_c + n_p$, entonces, $n_c + n_p = n + \ell$, despejando a ' ℓ ', $\ell = n_c + n_p - n$. Remplazando la equivalencia de ' ℓ ' en la ecuación Ec 4.42, $n_c + m_f + 1 \geq n + (n_c + n_p - n)$, rescribiendo la desigualdad $m_f + 1 \geq n_p$, en resumen, $m_f \geq n_p - 1$. Rescribiendo la expresión, se obtiene la segunda condición de diseño Ec 4.43.

$$\boxed{\text{gd}[B_f(s)] \geq \text{gd}[A_p(s)] - 1} \quad \text{Ec 4.43}$$

Como $n_c \geq m_f$, en consecuencia $n_c \geq n_p - 1$, y como $\ell = n_c + n_p - n$, entonces, $\ell \geq n_p - 1 + n_p - n$, ordenando la expresión $\ell \geq 2n_p - n - 1$, se obtiene la tercera condición de diseño Ec 4.44.

$$\boxed{\text{gd}[T(s)] \geq 2 \text{gd}[A_p(s)] - \text{gd}[A_m(s)] - 1} \quad \text{Ec 4.44.}$$

La cuarta condición de diseño esta dada por la expresión $n_c \geq m_f$, Ec 4.45.

$$\boxed{\text{gd}[A_c(s)] \geq \text{gd}[B_f(s)]} \quad \text{Ec 4.45.}$$

La tabla 4.7 contiene un resumen de las condiciones de diseño para un controlador algebraico.

Tabla 4.7 Condiciones de diseño para un controlador algebraico

1	$\text{gd}[A_p(s)] - \text{gd}[B_p(s)] \leq \text{gd}[A_m(s)] - \text{gd}[B_m(s)]$
2	$\text{gd}[B_f(s)] \geq \text{gd}[A_p(s)] - 1$
3	$\text{gd}[T(s)] \geq 2 \text{gd}[A_p(s)] - \text{gd}[A_m(s)] - 1$
4	$\text{gd}[A_c(s)] \geq \text{gd}[B_f(s)]$

Se desea diseñar un controlador algebraico para la planta que tiene como función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{4}{s^2 - 2s - 15}, \text{ utilizando como modelo deseado } M_d(s) = \frac{4318}{s^2 + 92s + 4318}.$$

- Cumpliendo con las condiciones de diseño se definen los polinomios, $B_f(s) = b_{f0}s + b_{f1}$, $A_c(s) = s + a_{c1}$ y el polinomio observador $T(s) = s + 10$.
- De la Ec 4.40 se tiene que para que el sistema siga al modelo deseado se debe cumplir con la igualdad, $A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_f(s) = T(s)A_m(s)$, reemplazando los polinomios en términos de sus coeficientes, entonces:

$$A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_f(s) = T(s)A_m(s)$$

$$(s^2 - 2s - 15)(s + a_{c1}) + 4(b_{f0}s + b_{f1}) = (s + 10)(s^2 + 92s + 4318)$$

$$(s^3 + a_{c1}s^2 - 2s^2 - 2a_{c1}s - 15s - 15a_{c1}) + 4b_{f0}s + 4b_{f1} = s^3 + 92s^2 + 4318s + 10s^2 + 920s + 43180$$

$$s^3 + (a_{c1} - 2)s^2 + (4b_{f0} - 2a_{c1} - 15)s + (4b_{f1} - 15a_{c1}) = s^3 + (102)s^2 + (5238)s + 43180$$

- Se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$a_{c1} - 2 = 102$$

$$4b_{f0} - 2a_{c1} - 15 = 5238$$

$$4b_{f1} - 15a_{c1} = 43180$$

- Resolviendo el sistema se tiene que:

$$a_{c1} = 104$$

$$b_{f0} = \frac{5238 + 15 + (2 \times 104)}{4} = 1365.25$$

$$b_{f1} = \frac{43180 + (15 \times 104)}{4} = 11185$$

$$\text{Por tanto, } B_f(s) = 1365.25s + 11185 \text{ y } A_c(s) = s + 104$$

- Para obtener a $B_r(s) = b_{r0}s + b_{r1}$ se parte de la primera ecuación de Ec 4.40,

$$B_p(s)B_r(s) = T(s)B_m(s):$$

$$4 + (b_{r0}s + b_{r1}) = (s + 10) + 4318$$

$$4b_{r0}s + 4b_{r1} = 4318s + 43180, \text{ por tanto:}$$

$$b_{r0} = \frac{4318}{4} = 1079.5 \text{ y } b_{r1} = \frac{43180}{4} = 10795, \text{ en resumen } B_r(s) = 1079.5s + 10795$$

La figura 4.33 contiene el diagrama de bloques del sistema controlado. La respuesta para una señal de referencia impulsiva coincide con la obtenida para retroalimentación de estados.

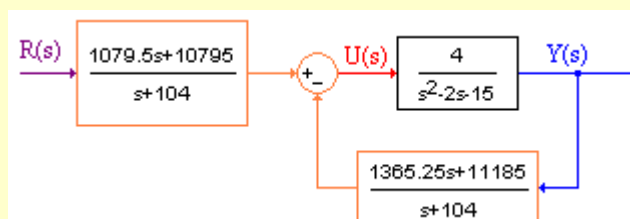


Figura 4.33 Diagrama de bloques del sistema controlado

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

SALAMANCA, Juan Mauricio, Apuntes de Clase - Control II. Escuela de Ingeniería Electrónica, Seccional Sogamoso, UPTC.