

## 2.10 Respuesta en el tiempo

La respuesta en el tiempo de sistemas o plantas depende de su orden y de la señal excitadora o de entrada. En general si se tiene una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Entonces  $Y(s) = G(s)U(s)$ , aplicando transformada inversa de Laplace se tiene que,  $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$ , por lo tanto, la salida en función del tiempo sería igual a:

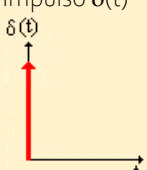
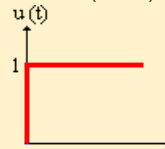
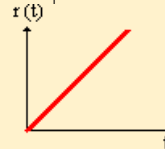
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \quad \text{Ec 2.63}$$

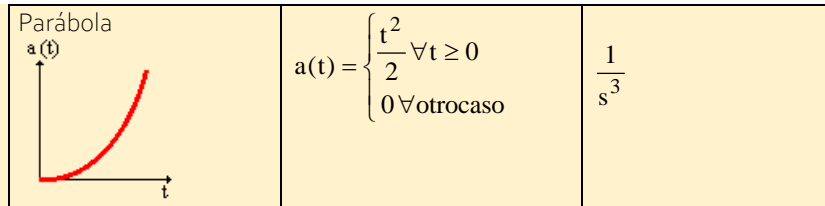
Donde,  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ ,  $u(t)$  es la señal excitadora.

### IDEAS COMPLEMENTARIAS ...

Algunas de las señales más comunes en el análisis de la respuesta en el tiempo para sistemas o plantas son el impulso, el escalón, la rampa y la parábola. La Tabla 2.13 contiene un resumen de la definición de las señales en el tiempo.

Tabla 2.13 funciones excitadoras fundamentales.

Tipo de Señal	Definición en el dominio del tiempo	Transformada de Laplace
Impulso $\delta(t)$ 	$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \forall t = 0 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases}$	1
Escalón (Paso) 	$u(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
Rampa 	$r(t) = \begin{cases} t & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases}$	$\frac{1}{s^2}$



### SOFTWARE Y SIMULACIÓN...

Una vez se obtiene el modelo del sistema, con MATLAB es fácil observar su respuesta en el tiempo, por ejemplo, para conocer el comportamiento de un sistema ante una entrada escalón, se tiene el comando 'step' y para observar la respuesta al impulso el comando 'impulse'.

**Ejemplo 1:** Si se desea obtener la respuesta al escalón y al impulso de la función de transferencia  $G(s) = \frac{5}{(s^2 + s + 1)}$ , usando MATLAB; entonces se tendría que:

```
» n=5;
» d=[1 1 1];
» step(n, d)
```

También se puede crear un objeto función de transferencia con el comando 'tf' (*transfer function*)

```
» n=5;
» d= [1 1 1];
» g=tf (n, d)
el resultado será:
g =
          5
-----
s^2 + s + 1
» step(g)
```

La gráfica generada contiene la respuesta en el tiempo del sistema, cuyo dinámica es representada por  $G(s)$ , ante el escalón.

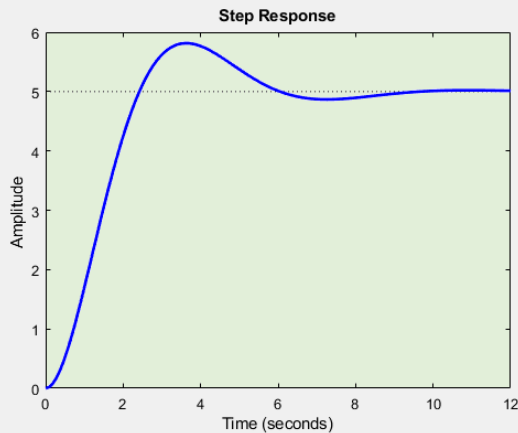


Figura 2.44 Respuesta al escalón unitario

La señal escalón es muy apropiada para analizar el transitorio de una respuesta.

Aplicando el comando 'impulse' se tiene:

```
» impulse(n,d)
```

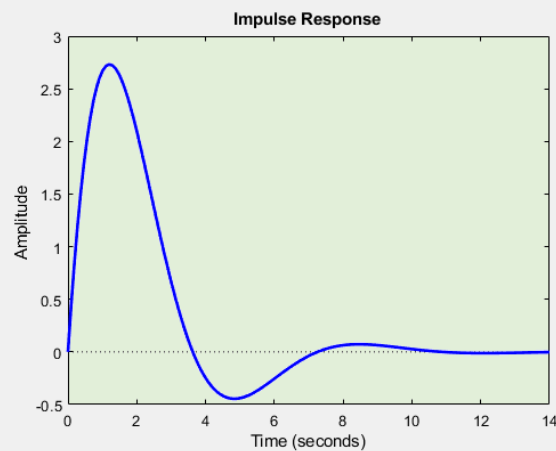


Figura 2.45 Respuesta al impulso

## 2.10 Estimación experimental del modelo de una planta

Cuando no es fácil modelar una planta o sistema a través del análisis con leyes físicas se puede recurrir a estimar un modelo a partir de la información de la salida, para una entrada predeterminada, y en un punto de operación específico. Esto se conoce como '**curva de reacción**'.

Existen diversos métodos que permiten hallar un modelo, por ejemplo, en la entrada se puede usar una señal impulsiva que en el dominio de la frecuencia estimula todas las dinámicas (ancho de banda infinito) o una señal escalón que facilita la comprensión de la

respuesta de la planta en el dominio del tiempo. En esta sección se discutirán dos de los métodos más usados en la identificación experimental cuando se utiliza como señal excitadora un escalón, a esta prueba se le conoce como 'Step-Test'.

Para una planta con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , 'la curva de reacción se obtiene sobrestimulando la entrada  $u(t)$  y observando los cambios en  $y(t)$ ', (ver Figura 2.46). Esto es una vez el sistema ya se encuentra en el punto de operación  $\bar{u}$ , se aplica un pequeño escalón  $\Delta u(t)$  sobre el valor inicial y se observa la "reacción" en la señal de salida  $\Delta y(t)$ , esto es, ver cómo cambia la salida con respecto al valor en el punto de operación  $\bar{y}$ . Para realizar este experimento es necesario tener la planta instrumentada (actuador en la entrada y sensor en la salida) y poder registrar la reacción de la salida.

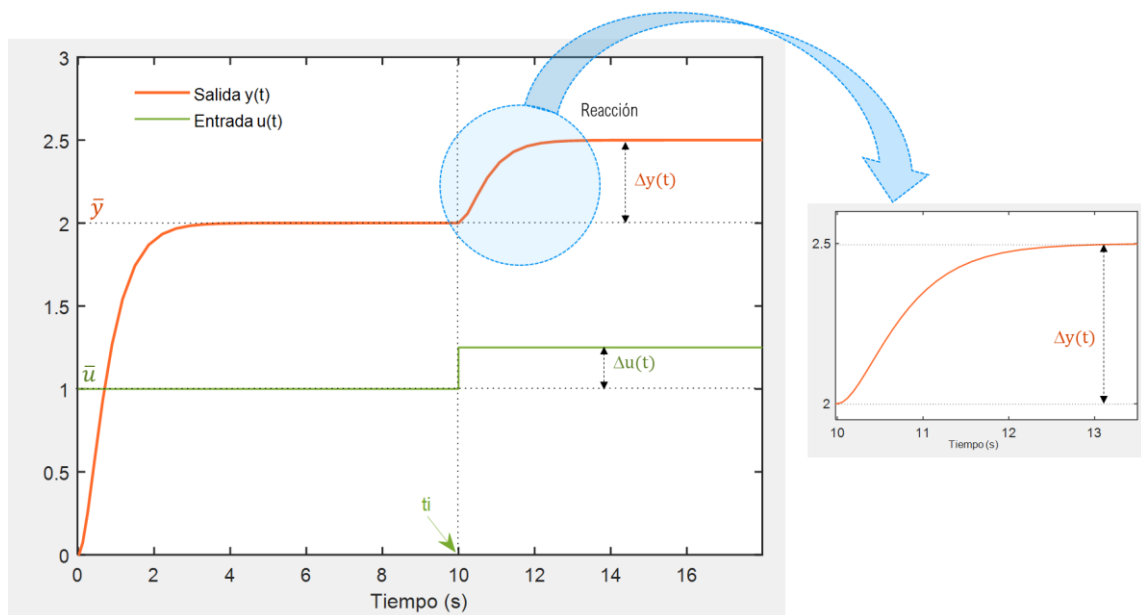


Figura 2.46 Curva de Reacción

Si la salida es *amortiguada* o *sobre amortiguada* se puede aproximar a un modelo de primer orden más tiempo muerto POMTM o FOPDT, por sus siglas en inglés (*First Order Plus Dead Time*) de la forma:

$$G(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \quad \text{Ec 2.65}$$

Donde la ganancia del sistema sería  $k = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$ ,  $\tau$  es la constante de tiempo del sistema y  $t_0$  es el tiempo de retardo. El tiempo donde se aplica el estímulo es  $t_i$ , a partir de éste se mide la constante de tiempo y el retardo.

### 2.14.1 *Tangente a la curva de reacción:*

En este método se traza una tangente a la curva de reacción en el punto de inflexión de la curva como se muestra en la Figura 2.47, y el modelo se aproxima a uno de primer orden (Ec 2.65)

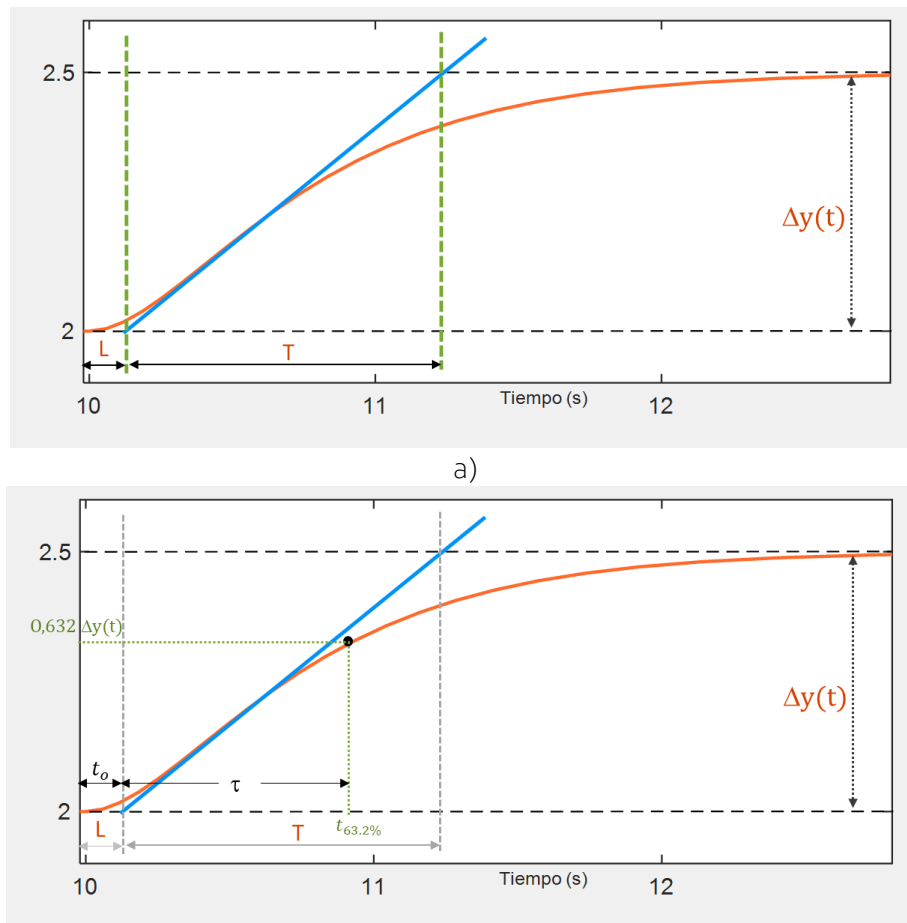


Figura 2.47 a) Método de la tangente de Ziegler y Nichols, b). Método de la tangente modificado de Miller

Los valores de  $L$  retardo aparente y  $T$  constante de tiempo aparente se obtienen observando el eje del tiempo en la gráfica, teniendo en cuenta los cortes de la recta tangente con la curva. Por ser un método gráfico depende mucho de la habilidad con la que se trace la recta tangente para no incorporar errores en el análisis.

Este método es modificado por Miller, quien considera la constante de tiempo como el tiempo requerido para alcanzar el 63.2% del valor final de la salida (62.3% de  $\Delta y(t)$ ), tomada a partir del tiempo de retardo, como se observa en la Figura 2.47 b).

### 2.14.2 Método de Smith

Este método al igual que todos los métodos denominados de 'dos puntos', los cuales reciben este nombre por ser necesario 'dos puntos' de observación sobre la gráfica para obtener el modelo, es independiente de la recta tangente a la curva, seleccionando  $t_0$  y  $\tau$  de tal forma que el modelo con la planta real coincida en la región de alta tasa de cambio. (Cecil L. Smith)

Los puntos recomendados para el análisis son  $(t_0 + \frac{1}{3}\tau)$  y  $(t_0 + \tau)$  por tanto:

$\Delta y(t_0 + \tau) = K\Delta u[1 - e^{-1}] = 0.632\Delta y(t)$  y  $\Delta y(t_0 + \frac{1}{3}\tau) = K\Delta u[1 - e^{-\frac{1}{3}}] = 0.283\Delta y(t)$ , estos puntos son los denotados en la Figura 2.48 como  $t_2$  y  $t_1$  respectivamente, los valores  $t_0$  y  $\tau$  se pueden despejar a partir de  $t_0 + \tau = t_2$  y  $t_0 + \frac{1}{3}\tau = t_1$  entonces:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \\ t_0 &= t_2 - \tau\end{aligned}\quad \text{Ec 2.66}$$

Es uno de los modelos más usados ya que permite realizar una aproximación a partir de los datos que se registran en la salida y no requiere el trazo de una recta adicional.

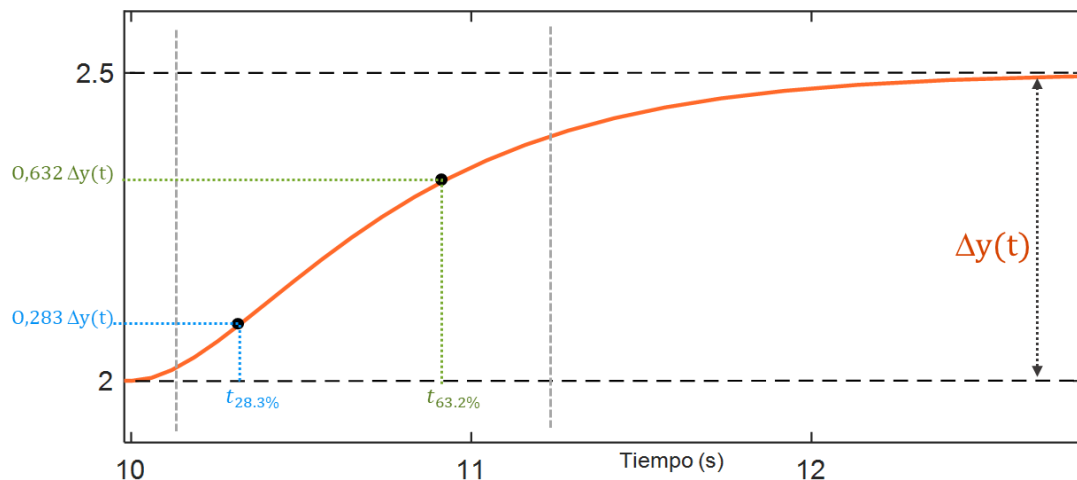


Figura 2.48 Método de Smith

### 2.14.3 Aproximación del Retardo

Generalmente si se utiliza un software de simulación, el retardo aparece como un bloque más, en el que solo es necesario definir el tiempo ' $t_0$ ', no obstante, en ocasiones se requiere hallar una función polinómica en variable ' $s$ ' que facilite el análisis matemático.

Utilizando la aproximación de Padé el retardo  $e^{-t_0 s}$  se puede expresar como en la Ec 2.67, si el orden de la aproximación es 1:

$$e^{-t_0 s} = \frac{1 - \frac{t_0}{2}s}{1 + \frac{t_0}{2}s}\quad \text{Ec 2.67}$$

## IDEAS COMPLEMENTARIAS ...

Generalmente el modelo que se halla en forma experimental no solo es de la planta, sino que involucra el actuador y el bloque de medición tratados en la sección 1.2. Para observar la salida de una planta es mejor que se encuentre instrumentada, esto debido a que las señales ya están debidamente adecuadas, facilitando la comparación de la reacción de la salida con el estímulo en la entrada. Lo ideal es buscar que las señales a medir se encuentren adecuadas en un tipo de señal fácilmente medible ya sean voltajes o corrientes. Por ejemplo, para obtener la curva de reacción un motor DC, es necesario tener el motor instrumentado con el fin de manipular la entrada  $e_a(t)$ , voltaje de armadura, y medir la salida, velocidad en el eje del motor  $\omega(t)$ . Entonces, como actuador se podría usar, por ejemplo, un rectificador de onda completa comandado por PWM y como sensor, una dínamo DC apropiadamente acoplada al eje del motor.

Inicialmente la entrada y la salida respectivamente son  $e_a(t)$  y  $\omega(t)$ , pero una vez la planta está instrumentada, la entrada que se va a sobre estimular es la referencia de PWM,  $u(t)$ , y como salida se tendría el voltaje que entrega la dínamo,  $y(t)$ . Es como si se tratara de una nueva planta compuesta por **el rectificador (actuador) + el motor DC (planta inicial) + la dínamo (sensor)**.

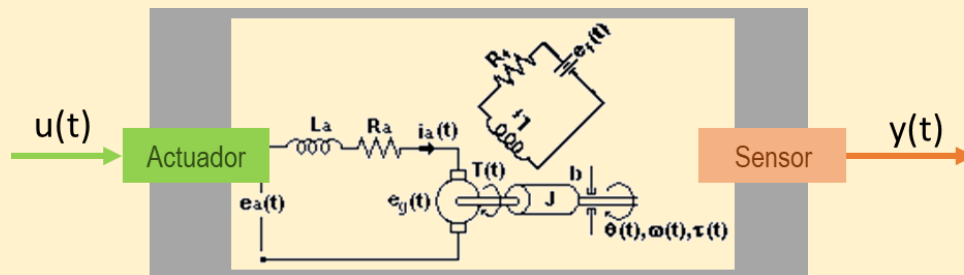


Figura 2.49 Planta instrumentada

Por lo tanto, el modelo  $G(s)$  que se obtiene ya involucraría la dinámica del actuador y del sensor, como se muestra en la Figura 2.49

A continuación, se presenta un ejemplo de un sistema de orden dos al que le fue estimado un modelo de primer orden, más tiempo muerto POTM como el de la ecuación 2.65. Suponiendo que dicha dinámica fue difícil de modelar por leyes físicas o corresponde a un sistema de un proceso industrial y, por tanto, fue necesario hallar un modelo utilizando un método experimental, se va a usar la prueba del escalón que se muestra en la Figura 2.46.

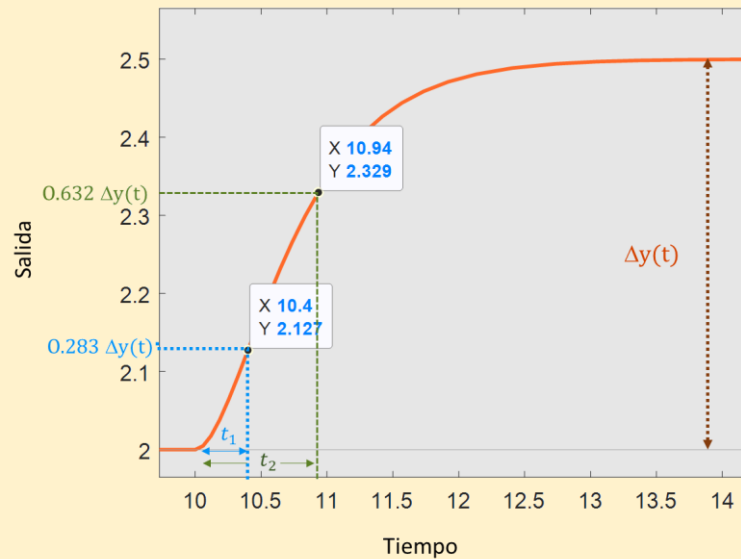


Figura 2.50 Aplicación del método de Smith

Dado que el análisis corresponde a una aproximación gráfica; entonces, usando los datos disponibles y haciendo un acercamiento a la curva de reacción, se obtienen los parámetros que aproximan la planta a un modelo de primer orden, más tiempo muerto POMT; donde  $K$ ,  $\tau$  y  $t_o$  se obtienen del análisis de la curva de reacción utilizando el método de Smith (ver Figura 2.50).

Para el ejemplo de la Figura 2.48, se aplica un  $\Delta u(t)=0.25$  y se obtiene un  $\Delta y(t)=0.5$  correspondiente a:  $\Delta y(t) = (2.5 - 2)$ , por tanto,  $K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{0.5}{0.25} = 2$ ,  $K = 2$ . El 63.2% de  $\Delta y(t)$  sería  $0.632 \cdot 0.5 = 0.315$ , y el 28.3% correspondería a  $0.283 \cdot 0.5 = 0.1415$ , así, teniendo en cuenta que el punto de operación es  $\bar{y}=2$ , tendríamos que verificar el tiempo al cual se presentan los valores de salida,  $y(t_2)=2.315$  y  $y(t_1)=2.1415$ , observando la gráfica.

Si se cuenta con un mayor número y precisión de los datos recolectados, la exactitud del modelo podría mejorar. Sin embargo, con los datos disponibles escogemos valores que se acerquen a los definidos por el método de Smith, ver Figura 2.50.

Teniendo en cuenta que el estímulo fue aplicado en 10s (tiempo de inicio del estímulo) el tiempo  $t_1=0.4s$  y el  $t_2=0.94s$ , y aplicando la Ec 2.66, se obtiene que  $\tau = 0.81s$  y  $t_o = 0.13s$

De esta manera, el modelo del sistema aproximado a uno de segundo orden sería igual a:

$$G(s) = \frac{K e^{-t_o s}}{\tau s + 1} = \frac{2 e^{-0.13s}}{0.81s + 1}$$

En la Figura 2.51 se observan la comparación de las salidas del **modelo vs el de la planta** que se está identificando. El tiempo de estabilización de la planta es aproximadamente



cuatro segundos ( $4s$ ), que corresponde a cinco constantes de tiempo ( $5\tau$ ). Observe como los modelos tienen igual respuesta en los valores de observación escogidos y las gráficas se traslapan en el ascenso. Sin embargo, se notan diferencias en el arranque de la curva y después del 63.2% (ver Figura 2.51). La respuesta de la planta es un sistema de segundo orden con dos polos reales, en otras palabras, un sistema sobreamortiguado, mientras que el modelo ajustado es uno de primer orden más tiempo muerto. La ventaja del último es que ya existen tablas que utilizan los parámetros  $K$ ,  $\tau$  y  $t_o$ , para diseñar controladores PID. Esto es, a partir de esos parámetros se podría sintonizar un controlador para la planta real tomando como base el modelo aproximado.

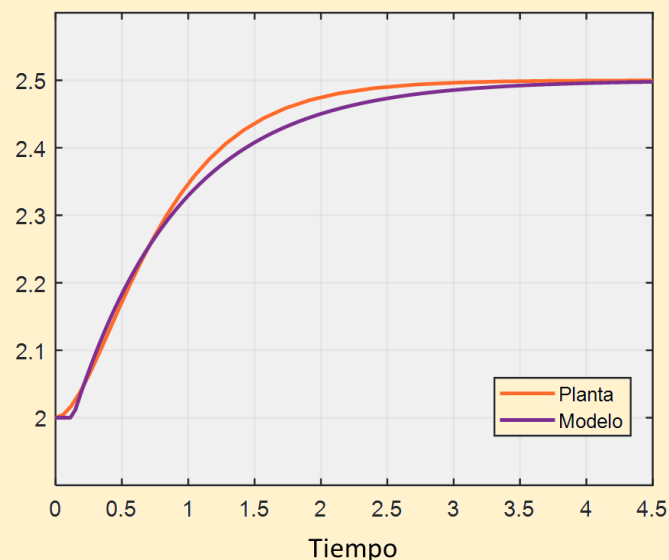


Figura 2.51 Modelo de la planta vs modelo POTM. Método de Smith, obtenida con Matlab.

El modelo de planta utilizado para el ejercicio es  $Gp(s) = \frac{12}{s^2 + 5s + 6}$

## SOFTWARE Y SIMULACIÓN...

### En Matlab

Para simular el modelo del sistema en Matlab® tenemos dos opciones, hacerlo en un script o en el espacio de trabajo definiendo el parámetro **IODelay** del **sys** función de transferencia (**tf**), donde podemos especificar el tiempo de retardo, o en Simulink® usando un bloque de 'retardo de transporte'.

Definimos los parámetros del modelo obtenido:

```
>> K=2;
>> tao=0.81;
>> to=0.13;
>> G=tf(2,[tao 1])
```

```
G =
      2
-----
0.81 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

Como se observa la función de transferencia no tiene el retardo de transporte, usamos el comando **get** para observar los parámetros de un **sys** tipo **tf**, y allí aparece el parámetro o argumento **IODelay**, el cual corresponde al retardo de transporte entrada-salida.

```
>> get(G)
  Numerator: {[0 2]}
 Denominator: {[0.8100 1]}
   Variable: 's'
  IODelay: 0
 InputDelay: 0
OutputDelay: 0
        Ts: 0
   TimeUnit: 'seconds'
 InputName: {''}
 InputUnit: {''}
InputGroup: [1x1 struct]
OutputName: {''}
OutputUnit: {''}
OutputGroup: [1x1 struct]
        Notes: [0x1 string]
      UserData: []
          Name: ''
SamplingGrid: [1x1 struct]
```

Utilizando el comando **'set'** puedo fijar el valor del argumento **IODelay** que corresponde a **to=0.13s**.

```
>> set(G,'IODelay',to)
```

Ahora viendo la función 'G' de nuevo se observa la incorporación del término del retardo.

```
>> G

G =

      2
exp(-0.13*s) * -----
      0.81 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

Con el comando **step** se puede observar la respuesta a un escalón unitario. Con el fin de compararlo con los datos de la gráfica analizada, los parámetros del escalón son ajustados, poniendo un offset equivalente al punto de operación  $\bar{u} = 1$  y una amplitud de 0.25 que corresponde al  $\Delta u(t)$ .

```
>> OPT=stepDataOptions('InputOffset',1,'StepAmplitud',0.25);
>> [y2,t]=step(G,OPT)
```

En **y2** y **t** van a quedar almacenados los datos de simulación del modelo con el fin de compararlos con los de la planta, ver Figura 2.51.

- a. Si se desea simular el Simulink®, se puede usar el diagrama de la Figura 2.52.

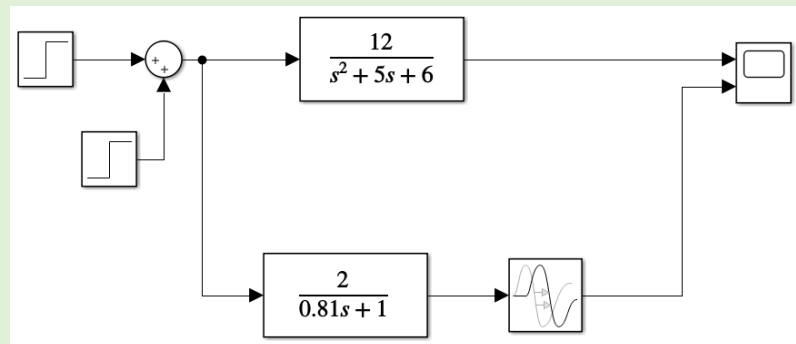


Figura 2.52 Modelo de la planta vs modelo POTM. Método de Smith, obtenida con Matlab.

### En Python

Para simular la planta en Python, se puede utilizar **Anaconda** instalada en **Windows** y el **Jupyter Notebook**, o **PyCharm** que es un entorno de desarrollo integrado utilizado para programar en Python. El retardo es necesario introducirlo con la aproximación de Padé (ver Ec. 2.67). Es importante tener en cuenta que, aunque para la simulación se usó un alto orden en la aproximación del retardo usando Padé (orden 12 para el caso del ejemplo), esto no es conveniente en un ejercicio real, ya que aumentaría el orden del modelo en igual grado, pasando de tener un modelo de primer orden a uno de orden 13.

```
from control import *
import matplotlib.pyplot as plt
K=2
tau=0.81
to=0.13
n=[K]
d=[tau, 1]
g=tf(n,d)
[npa,dpa]=pade(to,12) #el 12 corresponde al orden escogido para la aproximación de Padé
gpa=tf(npa,dpa)
print (gpa)
gdelay=series(g,gpa)
print (gdelay)
np=[12]
dp=[1,5,6]
```

```

gp=tf(np,dp)
[y,t]=step_response(gdelay)
[y1,t1]=step_response(gp)
plt.plot(y,t)
plt.plot(y1,t1)
plt.grid()
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y')
plt.show()

```

La gráfica que se obtendría corresponde a la respuesta del sistema a un **escalón unitario**, ver Figura 2.53.

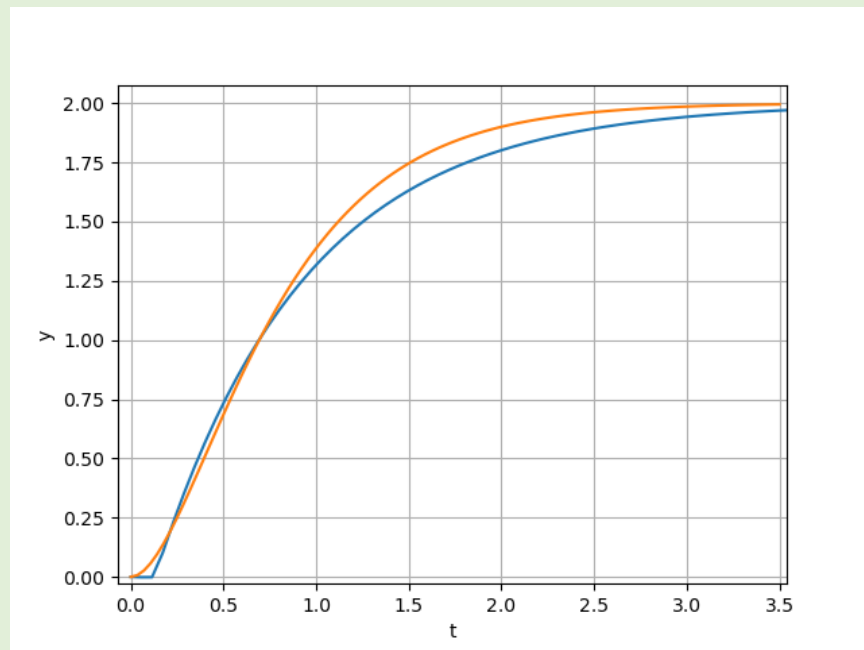


Figura 2.53 Modelo de la planta vs modelo POTM. Método de Smith, obtenida en Python.

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

SMITH, Carlos A y CORRIPIO, Armando B. CONTROL AUTOMATICO DE PROCESOS. Teoría y Práctica. Capítulo VI Diseño de sistemas de control por retroalimentación con un solo circuito. PAG 274- 277. Ed. LIMUSA, 2001.

BUCHER, Roberto. PYTHON FOR CONTROL PURPOSES. Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana, Dipartimento Tecnologie Innovative, 2019.

### 2.11 Linealización de Sistemas no lineales

En la naturaleza generalmente se encuentran sistemas no lineales; sin embargo, se puede encontrar un modelo lineal alrededor de un punto de operación. En la obtención de modelos experimentales se observa como el escalón es aplicado en un punto de trabajo específico con el fin de determinar la dinámica del sistema, lo que significa que el modelo hallado es para ese punto de operación y no contiene la dinámica del sistema en general. Los sistemas de nivel y caudal trabajados anteriormente se analizaron a partir de un modelo linealizado.

Si se tiene una señal  $y(t)$  y  $x(t)$ , donde la señal  $y(t)$  se puede definir en términos de  $x(t)$  como  $y = f(x)$ , entonces si se tiene un punto de trabajo en  $\bar{x}, \bar{y}$  ( $\bar{y} = f(\bar{x})$ ), la ecuación se puede expresar como una serie de Taylor en términos de las variables en el punto de operación Ec 2.68.

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df(x)}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad \text{Ec 2.68}$$

Evaluando las derivadas  $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \dots$  en  $x = \bar{x}$ . Si la variación  $x - \bar{x}$  es pequeña, entonces se pueden despreciar las derivadas de orden superior, ya que la porción de la función que se está tomando es casi lineal y, por tanto, las derivadas de orden superior tienden a cero. Bajo la anterior premisa se puede decir que:

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \quad \text{Ec 2.69}$$

$$\text{Donde, } K = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}}.$$

Si se hace  $\tilde{y} = y - \bar{y}$  y  $\tilde{x} = x - \bar{x}$  entonces rescribiendo la ecuación Ec 2.69 se tiene que:

$$\tilde{y} = K\tilde{x} \quad \text{Ec 2.70}$$

La expresión Ec 2.70 es la ecuación de una línea recta, significa que se ha obtenido un modelo linealizado de  $y = f(x)$  alrededor del punto de operación  $\bar{x}, \bar{y}$ .

Cuando la función es multivariable  $y = f(\alpha, \beta)$ , también se puede hallar un modelo linealizado; considerando como punto de trabajo  $\bar{y}, \bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$ , entonces la función en series de Taylor quedaría:

$$y = f(\alpha, \beta) = f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) + \left[ \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} (\alpha - \bar{\alpha}) + \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} (\beta - \bar{\beta}) \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} (\alpha - \bar{\alpha})^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} (\alpha - \bar{\alpha})(\beta - \bar{\beta}) + \frac{\partial^2 f(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} (\beta - \bar{\beta})^2 \right] + \dots \quad \text{Ec 2.71}$$

Las derivadas parciales son evaluadas en el punto de trabajo  $\alpha = \bar{\alpha}$  y  $\beta = \bar{\beta}$ , y las de orden superior se desprecian, pues el análisis se realiza para pequeños cambios alrededor del punto de operación. La expresión Ec 2.72 contiene la función linealizada

$$y = \bar{y} + K_1(\alpha - \bar{\alpha}) + K_2(\beta - \bar{\beta}) \quad \text{Ec 2.72}$$

Como  $\bar{y} = f(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ , haciendo  $\tilde{y} = y - \bar{y}$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha - \bar{\alpha}$  y  $\tilde{\beta} = \beta - \bar{\beta}$  entonces, la expresión Ec 2.72 quedaría:

$$\tilde{y} = K_1 \tilde{\alpha} + K_2 \tilde{\beta} \quad \text{Ec 2.73}$$

Donde, la constante  $K_1 = \left. \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha=\bar{\alpha} \\ \beta=\bar{\beta}}}$  y  $K_2 = \left. \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\alpha=\bar{\alpha} \\ \beta=\bar{\beta}}}$ .

#### IDEAS COMPLEMENTARIAS ...

A continuación, se muestra cómo obtener un modelo de la dinámica del tanque de la Figura 2.20 considerando dos situaciones, cuando el flujo es turbulento y cuando el flujo es laminar.

Ejemplo 1: En el caso para el caudal turbulento, el modelo obtenido es no lineal. Si el flujo es  $Q(t) = K\sqrt{H(t)}$ , siendo H la presión hidrostática. Cualquier cambio en el caudal de entrada  $Q_i(t) = \bar{Q}_i(t) + q_i(t)$ , provocaría un cambio en la presión hidrostática  $H(t) = \bar{H}(t) + h(t)$ , que alteraría el caudal de salida  $Q_o(t) = \bar{Q}_o(t) + q_o(t)$ , por tanto:

$C \frac{dH}{dt} = Q_i(t) - Q_o(t)$ , reemplazando la equivalencia del caudal de salida en términos de la presión hidrostática se tiene que,  $C \frac{dH}{dt} = Q_i(t) - K\sqrt{H(t)}$ . Este modelo es no lineal, ya que la ecuación diferencial está en términos de la raíz cuadrada de la presión hidrostática.

Si se desea *linealizar el modelo* entonces:

- Despejando la derivada de H con respecto al tiempo,  $\frac{dH}{dt} = \frac{Q_i(t)}{C} - \frac{K\sqrt{H(t)}}{C}$ , esta queda en función del caudal de entrada y de la presión hidrostática, donde  $\frac{dH}{dt} = f(Q_i, H)$ , la derivada de la presión hidrostática es una función multivariable

que puede ser expresada alrededor de un punto de operación como aparece en Ec 2.72. Para el ejemplo:

$$f(Q_i, H) = f(\bar{Q}_i, \bar{H}) + K_1(Q_i - \bar{Q}_i) + K_2(H - \bar{H})$$

- Donde  $K_1$  y  $K_2$  se pueden obtener a partir de evaluar las derivadas parciales en el punto de trabajo  $Q_i = \bar{Q}_i$  y  $H = \bar{H}$ , entonces:

$$K_1 = \left. \frac{\partial f(Q_i, H)}{\partial Q_i} \right|_{\substack{Q_i = \bar{Q}_i \\ H = \bar{H}}} \text{ y } K_2 = \left. \frac{\partial f(Q_i, H)}{\partial H} \right|_{\substack{Q_i = \bar{Q}_i \\ H = \bar{H}}}, \text{ de esta forma se tiene que } K_1 = \frac{1}{C} \text{ y}$$

$$K_2 = -\frac{K}{2C\sqrt{\bar{H}}}, \text{ pero como } Q(t) = K\sqrt{H(t)}, \text{ evaluada en el punto de operación es } \bar{Q} = K\sqrt{\bar{H}},$$

, entonces  $K = \frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{H}}}$ , reemplazando  $K$  en la expresión para  $K_2$ , quedaría

$$K_2 = -\frac{\bar{Q}}{2C\bar{H}} = -\frac{1}{RC}, \text{ donde } R = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}.$$

- La función linealizada queda de la forma:

$$f(Q_i, H) = f(\bar{Q}_i, \bar{H}) + \frac{1}{C}(Q_i - \bar{Q}_i) - \frac{1}{RC}(H - \bar{H})$$

- Pero como  $\frac{dH}{dt} = f(Q_i, H)$ ;  $Q_i(t) = \bar{Q}_i(t) + q_i(t)$ ;  $H(t) = \bar{H}(t) + h(t)$  y

$$Q_o(t) = \bar{Q}_o(t) + q_o(t)$$

- Entonces,  $Q_i(t) - \bar{Q}_i(t) = q_i(t)$ ;  $H(t) - \bar{H}(t) = h(t)$ ;  $Q_o(t) - \bar{Q}_o(t) = q_o(t)$  y

$$f(\bar{Q}_i, \bar{H}) = \frac{d\bar{H}}{dt} \text{ reemplazando estas expresiones en la función linealizada se tiene}$$

$$\text{que: } \frac{dH}{dt} - \frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{1}{C}q_i(t) - \frac{1}{RC}h(t), \text{ donde } \frac{d\bar{H}}{dt} = 0, \text{ porque es un valor en estado}$$

estacionario. El modelo del sistema linealizado queda igual a:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{C}q_i(t) - \frac{1}{RC}h(t).$$

- Reordenando la expresión  $\boxed{C \frac{dH}{dt} + \frac{h(t)}{R} = q_i(t)}.$

El modelo linealizado hallado es equivalente al trabajado en el análisis de sistemas de nivel y caudal en la sección 2.6 (Ec 2.25).

Ejemplo 2: Cuando el flujo es laminar  $Q(t) = KH(t)$ , un cambio en el caudal de entrada genera cambios en la presión hidrostática y el caudal de salida, por tanto la dinámica del sistema será modelada por  $C \frac{dH}{dt} = Q_i(t) - Q_o(t)$ , igual que en el caso del flujo turbulento,

sin embargo, al reemplazar el equivalente del flujo de salida en términos de la presión hidrostática se tiene que  $C \frac{dH}{dt} = Q_i(t) - KH(t)$ , si el modelo se halla para un punto de operación específico entonces:

- Despejando la derivada de la presión hidrostática  $\frac{dH}{dt} = \frac{Q_i(t)}{C} - \frac{KH(t)}{C}$ , se concluye que ésta es una función multivariable de la forma  $\frac{dH}{dt} = f(Q_i, H)$ .
- Expresado  $\frac{dH}{dt}$  en series de Taylor, en el punto de trabajo  $Q_i = \bar{Q}_i$  y  $H = \bar{H}$  quedaría:

$$f(Q_i, H) = f(\bar{Q}_i, \bar{H}) + K_1(Q_i - \bar{Q}_i) + K_2(H - \bar{H})$$

- Donde  $K_1 = \frac{1}{C}$  y  $K_2 = \frac{K}{C} = \frac{1}{CR}$ , ya que K en el punto de operación es  $K = \frac{\bar{Q}}{\bar{H}}$  y la resistencia  $R = \frac{\bar{H}}{\bar{Q}}$ .

- Reemplazando los valores de  $K_1$  y  $K_2$  en la serie de Taylor, la expresión queda  $f(Q_i, H) = f(\bar{Q}_i, \bar{H}) + \frac{1}{C}(Q_i - \bar{Q}_i) - \frac{1}{RC}(H - \bar{H})$

Como  $\frac{dH}{dt} = f(Q_i, H)$ ;  $Q_i(t) - \bar{Q}_i(t) = q_i(t)$ ;  $H(t) - \bar{H}(t) = h(t)$ ;  $Q_o(t) - Q_o(t) = q_o(t)$  y

$f(\bar{Q}_i, \bar{H}) = \frac{d\bar{H}}{dt}$ , entonces,  $\frac{dH}{dt} - \frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{1}{C}q_i(t) - \frac{1}{RC}h(t)$ , donde  $\frac{d\bar{H}}{dt} = 0$ , por tanto reordenando la ecuación se tiene que:

$$C \frac{dH}{dt} + \frac{h(t)}{R} = q_i(t)$$

El modelo obtenido en el punto de operación coincide con el modelo cuando el flujo es turbulento y, en consecuencia con el modelo estudiado en la sección 2.6 para sistemas de nivel y caudal.

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

OGATA, Katsuhiko. INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA. Capítulo II Modelo matemático de sistemas dinámicos PAG 152. Segunda Edición Ed. Prentice Hall.1993.



### 2.11 Características de la Retroalimentación Negativa

Las características principales de la retroalimentación negativa son tres:

- Insensibiliza el sistema a cambios en los parámetros internos.
- Insensibiliza el sistema a perturbaciones en la salida.
- Se puede manejar el ancho de banda.

Sí  $F(\alpha, \beta, \rho)$ , es una función, donde  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\rho$  son los parámetros que la definen; el factor de sensibilidad de la función con respecto a uno de los parámetros se define como la relación entre el cambio de la función y la función original sobre la relación entre el cambio producido en el parámetro y el parámetro original (ver ecuación Ec 2.64).

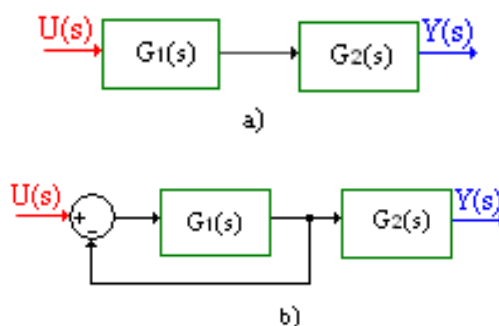
$$S_{\alpha}^F = \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta \alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{F} \frac{dF}{d\alpha} \quad \text{Ec 2.64}$$

#### 2.11.1 *Insensibilización del sistema a cambios en los parámetros internos:*

Si se tiene un sistema en lazo abierto como el que aparece en la Figura 2.54a donde la función de transferencia total  $M_o$  del sistema sería  $M_o = G_1 G_2$ , entonces el factor de sensibilidad de la función de transferencia general del sistema con respecto a los parámetros de  $G_1$  sería:

$$S_{G_1}^{M_o} = \frac{G_1}{G_1 G_2} \frac{dM_o}{dG_1} = \frac{G_1 G_2}{G_1 G_2} = 1$$

Obsérvese que el factor de sensibilidad es significativo. Por tanto, cualquier cambio en  $G_1$  ocasiona cambios apreciables en la función del sistema.



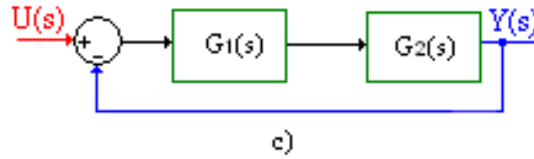


Figura 2.54 Sistema sin y con retroalimentación.

Si se retroalimenta el sistema tal y como se muestra en la Figura 2.54b, la función de transferencia total  $M_c$  quedaría  $M_c = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H}$ , si se obtienen los factores de sensibilidad con respecto a  $G_1$  y a  $G_2$ , entonces se tendría que:

$$S_{G_1}^{M_c} = \frac{G_1}{G_1 G_2 / (1 + G_1 H)} \frac{dM_c}{dG_1} = \frac{G_1 (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{d}{dG_1} \left[ \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H} \right] = \frac{1 + G_1 H}{G_2} \frac{(1 + G_1 H) G_2 - G_1 G_2 H}{(1 + G_1 H)^2} = \frac{1}{1 + G_1 H}$$

$$S_{G_2}^{M_c} = \frac{G_2}{G_1 G_2 / (1 + G_1 H)} \frac{dM_c}{dG_2} = \frac{G_2 (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{d}{dG_2} \left[ \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H} \right] = \frac{1 + G_1 H}{G_1} \frac{G_1}{1 + G_1 H} = 1$$

La sensibilidad del sistema con respecto a  $G_1$  queda en términos de  $H$ , que es la función de retroalimentación, la cual se puede diseñar de tal forma que el factor de sensibilidad se haga pequeño. En resumen la retroalimentación hace que  $M_c$  se insensibilice con respecto a  $G_1$ . Sin embargo, el factor de sensibilidad con respecto a  $G_2$  sigue siendo grande ya que esta parte del sistema no quedó dentro del lazo de retroalimentación.

¿Pero qué le pasará al sistema ante variaciones de  $H$ ? Hallando el factor de sensibilidad se tiene:

$$S_H^{M_c} = \frac{H}{G_1 G_2 / (1 + G_1 H)} \frac{dM_c}{dH} = \frac{H (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{d}{dH} \left[ \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H} \right] = \frac{H (1 + G_1 H)}{G_1 G_2} \frac{(-G_1 G_1 G_2)}{(1 + G_1 H)^2} = \frac{-G_1 H}{1 + G_1 H}$$

Si  $H$  es grande entonces,  $S_H^{M_c} = -1$ , lo que significa que el sistema es altamente sensible con respecto a la función de retroalimentación.

Si se retroalimenta el sistema como en la Figura 2.54.c el sistema se insensibiliza tanto para los cambios de  $G_1$  como de  $G_2$ .

### 2.11.2 Insensibilidad a las perturbaciones en la salida del sistema

En la Figura 2.55 se observa un sistema con perturbaciones a la salida, como es un sistema LTI cumple con el teorema de la superposición, donde la función de perturbación  $P(s)$  actúa como otra entrada.

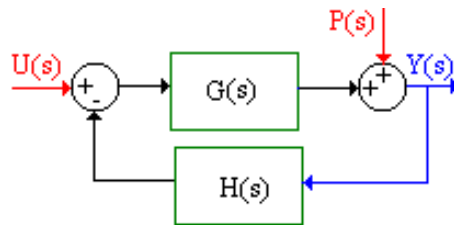


Figura 2.55 Sistema con perturbaciones a la salida.

Haciendo  $U(s) = 0$  y hallando la función de transferencia con respecto a las perturbaciones se observa que,  $\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{1+GH}$ , donde  $H$  es la función de ganancia en el lazo de retroalimentación. Si  $H$  se hace lo suficientemente grande, la dinámica de la salida con respecto a las perturbaciones tiende a cero.

### 2.11.3 Manejo del ancho de Banda

Suponiendo el sistema de la Figura 2.56, donde se tiene un factor de retroalimentación  $\beta$ , la función de transferencia total del sistema en lazo cerrado es  $M_c(s) = \frac{1}{(s+1)+\beta}$ ; si se varía el factor de retroalimentación y se obtiene el ancho de banda se puede observar como éste cambia de acuerdo con el valor de  $\beta$  (ver Tabla 2.14)

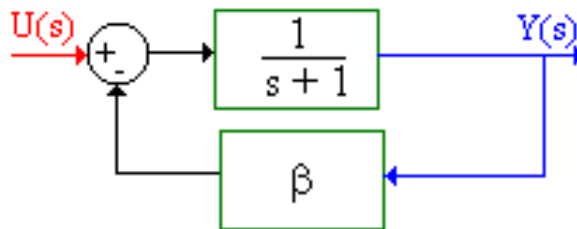
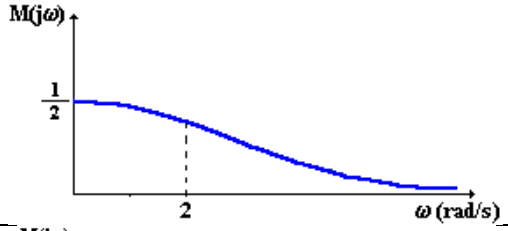
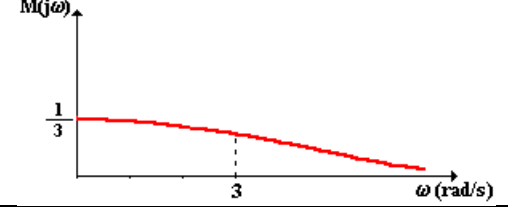


Figura 2.56 Sistema Retroalimentado

Tabla 2.14 Variación del ancho de banda con el lazo de retroalimentación.

$\beta$	Función de Transferencia	Gráfica de Magnitud $s = j\omega$	Ancho de Banda (rad/s)	Magnitud
0	$M_o(s) = \frac{1}{s+1}$		1	1

1	$M_c(s) = \frac{1}{s+2}$		2	$\frac{1}{2}$
2	$M_c(s) = \frac{1}{s+3}$		3	$\frac{1}{3}$

En la Tabla 2.14 aparece la comparación de la respuesta en frecuencia para los tres casos del ejemplo, en la que se observa que a través de la retroalimentación se puede manejar el ancho de banda; a mayor factor de retroalimentación mayor ancho de banda, pero menor ganancia. El factor de retroalimentación define un compromiso entre el ancho de banda y la ganancia del sistema.

#### REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

ROHRS Charles E; MELSA, James L. y SCHULTZ, Donald G. SISTEMAS DE CONTROL LINEAL. Ed. McGraw-Hill. 1994.