**Лабораторная работа №3. Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера и методы её решения.**

**Цель работы:** освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

**Ход работы**

**Задание №1**

 Условие задачи коммивояжёра:

**Задание №2**

Для определения нижней границы множества воспользуемся **операцией редукции** или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы D найти минимальный элемент.  
di = min(j) dij

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 22 | 32 | M | 11 | 11 |
| **2** | 11 | M | 26 | 57 | 73 | 11 |
| **3** | 13 | 33 | M | 86 | 60 | 13 |
| **4** | 28 | 47 | 44 | M | 33 | 28 |
| **5** | 82 | 77 | 52 | 24 | M | 24 |

Затем вычитаем di из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 11 | 21 | M | 0 |
| **2** | 0 | M | 15 | 46 | 62 |
| **3** | 0 | 20 | M | 73 | 47 |
| **4** | 0 | 19 | 16 | M | 5 |
| **5** | 58 | 53 | 28 | 0 | M |

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент: dj = min(i) dij

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 11 | 21 | M | 0 |
| **2** | 0 | M | 15 | 46 | 62 |
| **3** | 0 | 20 | M | 73 | 47 |
| **4** | 0 | 19 | 16 | M | 5 |
| **5** | 58 | 53 | 28 | 0 | M |
| dj | 0 | 11 | 15 | 0 | 0 |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины di и dj называются **константами приведения**.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 0 | 6 | M | 0 |
| **2** | 0 | M | 0 | 46 | 62 |
| **3** | 0 | 9 | M | 73 | 47 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | M | 5 |
| **5** | 58 | 42 | 13 | 0 | M |

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H:  
H = ∑di + ∑dj  
H = 11+11+13+28+24+0+11+15+0+0 = 113  
Элементы матрицы dij соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j.  
Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей nxn с неотрицательными элементами dij ≥ 0  
Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город.  
Длина маршрута определяется выражением:  
F(Mk) = ∑dij  
Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом dij.  
**Шаг №1**.  
**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 0(8) | 6 | M | 0(5) | 0 |
| **2** | 0(0) | M | 0(1) | 46 | 62 | 0 |
| **3** | 0(9) | 9 | M | 73 | 47 | 9 |
| **4** | 0(1) | 8 | 1 | M | 5 | 1 |
| **5** | 58 | 42 | 13 | **0(59)** | M | 13 |
| dj | 0 | 8 | 1 | 46 | 5 | 0 |

d(1,2) = 0 + 8 = 8; d(1,5) = 0 + 5 = 5; d(2,1) = 0 + 0 = 0; d(2,3) = 0 + 1 = 1; d(3,1) = 9 + 0 = 9; d(4,1) = 0 + 1 = 1; d(5,4) = 13 + 46 = 59;   
Наибольшая сумма констант приведения равна 59 для ребра (5,4), следовательно, множество разбивается на два подмножества (5,4) и (5\*,4\*).  
**Исключение ребра** (5,4) проводим путем замены элемента d54 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (5\*,4\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 0 | 6 | M | 0 | 0 |
| **2** | 0 | M | 0 | 46 | 62 | 0 |
| **3** | 0 | 9 | M | 73 | 47 | 0 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | M | 5 | 0 |
| **5** | 58 | 42 | 13 | M | M | 13 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 46 | 0 | 59 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(5\*,4\*) = 59 + 113 = 172  
**Включение ребра** (5,4) проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d45 заменяем на М, для исключения образования не гамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | M | 0 | 6 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | M | 0 | 62 | 0 |
| **3** | 0 | 9 | M | 47 | 0 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | M | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 0  
Нижняя граница подмножества (5,4) равна:  
H(5,4) = 113 + 0 = 113 ≤ 172

172

113

Поскольку нижняя граница этого подмножества (5,4) меньше, чем подмножества (5\*,4\*), то ребро (5,4) включаем в маршрут с новой границей H = 113  
**Шаг №2**.  
**Определяем ребро ветвления**.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | M | 0(8) | 6 | 0(5) | 0 |
| **2** | 0(0) | M | 0(1) | 62 | 0 |
| **3** | 0(9) | 9 | M | 47 | 9 |
| **4** | 0(1) | 8 | 1 | 5 | 1 |
| dj | 0 | 8 | 1 | 5 | 0 |

d(1,2) = 0 + 8 = 2; d(1,5) = 0 + 5 = 5; d(2,1) = 0 + 0 = 0; d(2,3) = 0 + 1 = 1; d(3,1) = 9 + 0 = 9; d(4,1) = 0 + 1 = 1;  
Наибольшая сумма констант приведения равна 9 для ребра (3,1).  
**Исключение ребра** (3,1).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | M | 0 | 6 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | M | 0 | 62 | 0 |
| **3** | M | 9 | M | 47 | 9 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | M | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(3\*,1\*) = 113 + 9 = 122  
**Включение ребра** (3,1) проводится путем исключения всех элементов 3-ой строки и 1-го столбца, в которой элемент d13 заменяем на М, для исключения образования не гамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | 0 | 6 | 0 | 0 |
| **2** | M | 0 | 62 | 0 |
| **4** | 8 | 1 | M | 1 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 1 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 1  
Нижняя граница подмножества (3,1) равна:  
H(3,1) = 113 + 1 = 114 ≤ 122

122

114

Поскольку нижняя граница этого подмножества (3,1) меньше, чем подмножества (3\*,1\*), то ребро (3,1) включаем в маршрут с новой границей H = 114

Чтобы исключить подциклы, запретим следующие переходы: (4,5),  
  
**Шаг №3**.  
**Определяем ребро ветвления**.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | 0(8) | 6 | 0(62) | 0 |
| **2** | M | 0(62) | 62 | 62 |
| **4** | 7 | 0(7) | M | 1 |
| dj | 8 | 1 | 62 | 0 |

d(1,2) = 7 + 0 = 7; d(1,5) = 62 + 0 = 62; d(2,3) = 62 = 62; Наибольшая сумма констант приведения равна для ребер (2,3) и (1,5).  
**Исключение ребра** (2,3).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | 0 | 6 | 0 | 0 |
| **2** | M | M | 62 | 62 |
| **4** | 8 | 1 | M | 1 |
| dj | 0 | 1 | 0 | 64 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(2\*,3\*) = 114 + 62 = 176  
**Включение ребра** (2,3) проводится путем исключения всех элементов 2-ой строки и 3-го столбца, в которой элемент d34 заменяем на М, для исключения образования не гамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (2 x 2), которая подлежит операции приведения.

Чтобы исключить подциклы, запретим следующие переходы: (1,2),  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **2** | **5** | di |
| **1** | M | 0 | 0 |
| **4** | 7 | M | 7 |
| dj | 0 | 0 | 7 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 7  
Нижняя граница подмножества (4,3) равна:  
H(2,3) = 114 + 7 = 121 ≤ 176

121

176

Поскольку нижняя граница этого подмножества (2,3) меньше, чем подмножества (2\*,3\*), то ребро (2,3) включаем в маршрут с новой границей H = 121

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **2** | **5** | di |
| **1** | M | 0 | 0 |
| **4** | 0 | M | 8 |
| dj | 0 | 0 | 0 |

В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (1,5) и (4,2).

После анализа данной матрицы к нашему графу добавятся пути (1, 5) и (4,2). Соответственно граф будет иметь следующий вид:

121

114

113

176

122

172

В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:  
(5,4), (4,2), (2,3),(3,1), (1,5), Длина маршрута равна F(Mk) = 121

**Задание №3**

Проверка правильности решения задачи методом полного перебора представлена на рисунке 2.

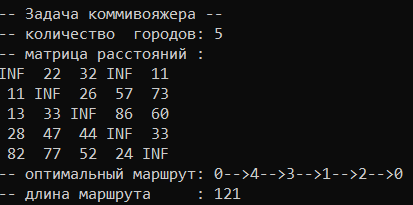


Рисунок 2. Результат алгоритма.

**Вывод**: Мы освоили общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решили задачу о коммивояжере данным методом, сравнили полученное решение задачи с решением по методу полного перебора.