**Лабораторная работа 5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА**

**Цель работы:** Приобретение навыков решения открытой транспортной задачи

**Задание для выполнения**

**Задание.** Решить транспортную задачу. Имеется 5 поставщиков продукции и 6 потребителей. Величина запасов, потребностей и стоимость затрат на перевозку продукции взять в соответствии с вариантом (*11*). Оформить отчет.

|  |
| --- |
|  |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 |
| A1 | 23 | 13 | 17 | 14 | 22 | 12 | 179 |
| A2 | 21 | 11 | 19 | 16 | 18 | 24 | 124 |
| A3 | 12 | 16 | 22 | 19 | 13 | 22 | 161 |
| A4 | 15 | 21 | 21 | 14 | 24 | 13 | 170 |
| A5 | 14 | 22 | 20 | 11 | 21 | 15 | 111 |
| Потребности | 154 | 118 | 142 | 204 | 106 | 174 |  |

**Ход решения**

**Тип задачи.** Найдём сумму потребностей, обозначив каждую за bj. Также сделаем для запасов, приняв каждый за ai.

Так, как суммы потребностей и запасов не равны, то задача является открытого типа. Из сумм потребностей и запасов можем выяснить, что потребностей больше, а значит надо добавить ещё одного поставщика, запасы которого будут составлять разницу потребностей и запасов (153).

**Опорный план**

|  |
| --- |
|  |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 |
| A1 | 23 | 13 | 17 | 14 | 22 | 12 | 179 |
| A2 | 21 | 11 | 19 | 16 | 18 | 24 | 124 |
| A3 | 12 | 16 | 22 | 19 | 13 | 22 | 161 |
| A4 | 15 | 21 | 21 | 14 | 24 | 13 | 170 |
| A5 | 14 | 22 | 20 | 11 | 21 | 15 | 111 |
| A6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 153 |
| Потребности | 154 | 118 | 142 | 204 | 106 | 174 |  |

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.  
Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.  
Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.  
Искомый элемент равен c22=11. Для этого элемента запасы равны 124, потребности 118. Поскольку минимальным является 118, то вычитаем его.  
x22 = min(124,118) = 118.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 23 | x | 17 | 14 | 22 | 12 | 179 |
| 21 | **11** | 19 | 16 | 18 | 24 | **124 - 118 = 6** |
| 12 | x | 22 | 19 | 13 | 22 | 161 |
| 15 | x | 21 | 14 | 24 | 13 | 170 |
| 14 | x | 20 | 11 | 21 | 15 | 111 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 153 |
| 154 | **118 - 118 = 0** | 142 | 204 | 106 | 174 |  |

Искомый элемент равен c54=11. Для этого элемента запасы равны 111, потребности 204. Поскольку минимальным является 111, то вычитаем его.  
x54 = min(111,204) = 111.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 23 | x | 17 | 14 | 22 | 12 | 179 |
| 21 | 11 | 19 | 16 | 18 | 24 | 6 |
| 12 | x | 22 | 19 | 13 | 22 | 161 |
| 15 | x | 21 | 14 | 24 | 13 | 170 |
| x | x | x | **11** | x | x | **111 - 111 = 0** |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 153 |
| 154 | 0 | 142 | **204 - 111 = 93** | 106 | 174 |  |

Искомый элемент равен c16=12. Для этого элемента запасы равны 179, потребности 174. Поскольку минимальным является 174, то вычитаем его.  
x16 = min(179,174) = 174.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 23 | x | 17 | 14 | 22 | **12** | **179 - 174 = 5** |
| 21 | 11 | 19 | 16 | 18 | x | 6 |
| 12 | x | 22 | 19 | 13 | x | 161 |
| 15 | x | 21 | 14 | 24 | x | 170 |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | x | 153 |
| 154 | 0 | 142 | 93 | 106 | **174 - 174 = 0** |  |

Искомый элемент равен c31=12. Для этого элемента запасы равны 161, потребности 154. Поскольку минимальным является 154, то вычитаем его.  
x31 = min(161,154) = 154.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 17 | 14 | 22 | 12 | 5 |
| x | 11 | 19 | 16 | 18 | x | 6 |
| **12** | x | 22 | 19 | 13 | x | **161 - 154 = 7** |
| x | x | 21 | 14 | 24 | x | 170 |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 153 |
| **154 - 154 = 0** | 0 | 142 | 93 | 106 | 0 |  |

Искомый элемент равен c35=13. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 106. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.  
x35 = min(7,106) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 17 | 14 | 22 | 12 | 5 |
| x | 11 | 19 | 16 | 18 | x | 6 |
| 12 | x | x | x | **13** | x | **7 - 7 = 0** |
| x | x | 21 | 14 | 24 | x | 170 |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 153 |
| 0 | 0 | 142 | 93 | **106 - 7 = 99** | 0 |  |

Искомый элемент равен c14=14. Для этого элемента запасы равны 5, потребности 93. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.  
x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | **14** | x | 12 | **5 - 5 = 0** |
| x | 11 | 19 | 16 | 18 | x | 6 |
| 12 | x | x | x | 13 | x | 0 |
| x | x | 21 | 14 | 24 | x | 170 |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 153 |
| 0 | 0 | 142 | **93 - 5 = 88** | 99 | 0 |  |

Искомый элемент равен c44=14. Для этого элемента запасы равны 170, потребности 88. Поскольку минимальным является 88, то вычитаем его.  
x44 = min(170,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 14 | x | 12 | 0 |
| x | 11 | 19 | x | 18 | x | 6 |
| 12 | x | x | x | 13 | x | 0 |
| x | x | 21 | **14** | 24 | x | **170 - 88 = 82** |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 153 |
| 0 | 0 | 142 | **88 - 88 = 0** | 99 | 0 |  |

Искомый элемент равен c25=18. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 99. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.  
x25 = min(6,99) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 14 | x | 12 | 0 |
| x | 11 | x | x | **18** | x | **6 - 6 = 0** |
| 12 | x | x | x | 13 | x | 0 |
| x | x | 21 | 14 | 24 | x | 82 |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 153 |
| 0 | 0 | 142 | 0 | **99 - 6 = 93** | 0 |  |

Искомый элемент равен c43=21. Для этого элемента запасы равны 82, потребности 142. Поскольку минимальным является 82, то вычитаем его.  
x43 = min(82,142) = 82.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 14 | x | 12 | 0 |
| x | 11 | x | x | 18 | x | 0 |
| 12 | x | x | x | 13 | x | 0 |
| x | x | **21** | 14 | x | x | **82 - 82 = 0** |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 153 |
| 0 | 0 | **142 - 82 = 60** | 0 | 93 | 0 |  |

Искомый элемент равен c63=0. Для этого элемента запасы равны 153, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.  
x63 = min(153,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 14 | x | 12 | 0 |
| x | 11 | x | x | 18 | x | 0 |
| 12 | x | x | x | 13 | x | 0 |
| x | x | 21 | 14 | x | x | 0 |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | **0** | x | 0 | x | **153 - 60 = 93** |
| 0 | 0 | **60 - 60 = 0** | 0 | 93 | 0 |  |

Искомый элемент равен c65=0. Для этого элемента запасы равны 93, потребности 93. Поскольку минимальным является 93, то вычитаем его.  
x65 = min(93,93) = 93.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 14 | x | 12 | 0 |
| x | 11 | x | x | 18 | x | 0 |
| 12 | x | x | x | 13 | x | 0 |
| x | x | 21 | 14 | x | x | 0 |
| x | x | x | 11 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | **0** | x | **93 - 93 = 0** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **93 - 93 = 0** | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 23 | 13 | 17 | 14[5] | 22 | 12[174] | 179 |
| A2 | 21 | 11[118] | 19 | 16 | 18[6] | 24 | 124 |
| A3 | 12[154] | 16 | 22 | 19 | 13[7] | 22 | 161 |
| A4 | 15 | 21 | 21[82] | 14[88] | 24 | 13 | 170 |
| A5 | 14 | 22 | 20 | 11[111] | 21 | 15 | 111 |
| A6 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[93] | 0 | 153 |
| Потребности | 154 | 118 | 142 | 204 | 106 | 174 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.  
2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 11, что соответствует m + n - 1 = 11. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 14\*5 + 12\*174 + 11\*118 + 18\*6 + 12\*154 + 13\*7 + 21\*82 + 14\*88 + 11\*111 + 0\*60 + 0\*93 = 9678  
**Этап II. Улучшение опорного плана**.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 =0.  
u1 +v4 =14; 0 + v4 = 14; v4 = 14  
u4 +v4 =14; 14 + u4 = 14; u4 = 0  
u4 + v3 = 21; 0 + v3 = 21; v3 = 21  
u6 + v3 = 0; 21 + u6 = 0; u6 = -21  
u6 + v5 = 0; -21 + v5 = 0; v5 = 21  
u2 + v5 = 18; 21 + u2 = 18; u2 = -3  
u2 + v2 = 11; -3 + v2 = 11; v2 = 14  
u3 + v5 = 13; 21 + u3 = 13; u3 = -8  
u3 + v1 = 12; -8 + v1 = 12; v1 = 20  
u5 + v4 = 11; 14 + u5 = 11; u5 = -3  
u1 + v6 = 12; 0 + v6 = 12; v6 = 12

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=20 | v2=14 | v3=21 | v4=14 | v5=21 | v6=12 |
| u1=0 | 23 | 13 | 17 | 14[5] | 22 | 12[174] |
| u2=-3 | 21 | 11[118] | 19 | 16 | 18[6] | 24 |
| u3=-8 | 12[154] | 16 | 22 | 19 | 13[7] | 22 |
| u4=0 | 15 | 21 | 21[82] | 14[88] | 24 | 13 |
| u5=-3 | 14 | 22 | 20 | 11[111] | 21 | 15 |
| u6=-21 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[93] | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;2): 0 + 14 > 13; ∆12 = 0 + 14 - 13 = 1 > 0  
(1;3): 0 + 21 > 17; ∆13 = 0 + 21 - 17 = 4 > 0  
(4;1): 0 + 20 > 15; ∆41 = 0 + 20 - 15 = 5 > 0  
(5;1): -3 + 20 > 14; ∆51 = -3 + 20 - 14 = 3 > 0  
max(1,4,5,3) = 5  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;1): 15  
Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Запасы |
| 1 | 23 | 13 | 17 | 14[5] | 22 | 12[174] | 179 |
| 2 | 21 | 11[118] | 19 | 16 | 18[6] | 24 | 124 |
| 3 | 12[154][-] | 16 | 22 | 19 | 13[7][+] | 22 | 161 |
| 4 | 15[+] | 21 | 21[82][-] | 14[88] | 24 | 13 | 170 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 11[111] | 21 | 15 | 111 |
| 6 | 0 | 0 | 0[60][+] | 0 | 0[93][-] | 0 | 153 |
| Потребности | 154 | 118 | 142 | 204 | 106 | 174 |  |

Цикл приведен в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 82. Прибавляем 82 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 82 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 23 | 13 | 17 | 14[5] | 22 | 12[174] | 179 |
| A2 | 21 | 11[118] | 19 | 16 | 18[6] | 24 | 124 |
| A3 | 12[72] | 16 | 22 | 19 | 13[89] | 22 | 161 |
| A4 | 15[82] | 21 | 21 | 14[88] | 24 | 13 | 170 |
| A5 | 14 | 22 | 20 | 11[111] | 21 | 15 | 111 |
| A6 | 0 | 0 | 0[142] | 0 | 0[11] | 0 | 153 |
| Потребности | 154 | 118 | 142 | 204 | 106 | 174 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v4 = 14; 0 + v4 = 14; v4 = 14  
u4 + v4 = 14; 14 + u4 = 14; u4 = 0  
u4 + v1 = 15; 0 + v1 = 15; v1 = 15  
u3 + v1 = 12; 15 + u3 = 12; u3 = -3  
u3 + v5 = 13; -3 + v5 = 13; v5 = 16  
u2 + v5 = 18; 16 + u2 = 18; u2 = 2  
u2 + v2 = 11; 2 + v2 = 11; v2 = 9  
u6 + v5 = 0; 16 + u6 = 0; u6 = -16  
u6 + v3 = 0; -16 + v3 = 0; v3 = 16  
u5 + v4 = 11; 14 + u5 = 11; u5 = -3  
u1 + v6 = 12; 0 + v6 = 12; v6 = 12

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=15 | v2=9 | v3=16 | v4=14 | v5=16 | v6=12 |
| u1=0 | 23 | 13 | 17 | 14[5] | 22 | 12[174] |
| u2=2 | 21 | 11[118] | 19 | 16 | 18[6] | 24 |
| u3=-3 | 12[72] | 16 | 22 | 19 | 13[89] | 22 |
| u4=0 | 15[82] | 21 | 21 | 14[88] | 24 | 13 |
| u5=-3 | 14 | 22 | 20 | 11[111] | 21 | 15 |
| u6=-16 | 0 | 0 | 0[142] | 0 | 0[11] | 0 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 14\*5 + 12\*174 + 11\*118 + 18\*6 + 12\*72 + 13\*89 + 15\*82 + 14\*88 + 11\*111 + 0\*142 + 0\*11 = 9268

**Вывод:** в ходе данной лабораторной работы я изучил принципы транспортных задач, этапы их решения и методы решения, которые используются на этих этапах. Методы: поиск наименьшей стоимости, а также метод потенциалов. Работу этих методов я продемонстрировал, решив заданную мне транспортную задачу.