Distribuição dos números primos e a função Zeta de Riemann

Maico Gouveia, RA: 156502

Introdução: existem infinitos primos!

Quando estudando teoria aritmética dos números, nos deparamos com o seguinte conceito que naturalmente surge da multiplicação:

Definição. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, dizemos que b divide a ou que a é divisível por b quando existe um $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = b \cdot c$. Neste caso, escrevemos $b|a$ e o número b é dito um divisor do número a.*

Esta definição bem simples nos motiva a seguinte pergunta: quantos divisores de um dado número natural existem? Sendo $a = 1 \cdot a = a \cdot 1$, claramente temos que para qualquer $a \in \mathbb{N}$ vale as relações $1|a$ e $a|a$. Com isto já sabemos que qualquer natural tem no mínimo dois divisores. Esta rápida observação nos sugere a seguinte definição:

Definição. *Dado $a \in \mathbb{N}$, seja $Div(a) = \{b \in \mathbb{N} : b|a\}$. Diremos que a é primo se $\#Div(a) = 2$ e se os dois únicos elementos deste conjunto são distintos entre si. Denotaremos o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição acima por $\mathcal{P}$.*

Com isto, vemos que, por definição, $1 \notin \mathcal{P}$, mas que os números: $2, 5, 7$ e 11, por exemplo, estão em $\mathcal{P}$. Portanto, este é um conjunto não-vazio e naturalmente pode ser levantada a questão: quantos elementos existem em $\mathcal{P}$? O matemático antigo Euclides (±300 A.C.) é quem nos dá a resposta: $\mathcal{P}$ possui uma quantidade infinita de elementos!

Faremos aqui uma demonstração deste resultado que, embora clássico, será provado de uma maneira diferente daquela dada por Euclides. Para a prova, suporemos já demonstrado o teorema fundamental da aritmética.

Teorema. *(Euclides) Existem infinitos elementos em $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que fosse uma quantidade finita deles, digamos: $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_k\}$, com $k \in \mathbb{N}$. Considere então o seguinte produto de séries:

$$P = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^n}\right) \cdots \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^n}\right).$$

Note que cada termo do produto acima é uma série geométrica convergente. De fato, sendo p primo, vale que $p > 1$ e, consequentemente, segue que $1/p < 1$. Sendo $1/p$ sempre positivo, isto mostra que qualquer uma das séries acima tem razão de módulo menor do que um. Assim, da convergência, pode-se expandir P a uma série convergente dada por:

$$P = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}}$$

Então, utilizando o teorema fundamental da aritmética, isto é, utilizando que qualquer número natural n pode ser expressado, de modo único, como um produto finito de primos da forma: $n = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$, segue que o produto P acima se reduz a P dado por

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Contudo, isto configura uma contradição, pois sabemos que esta série, a série harmônica, é uma série divergente. Portanto, deve ser que o conjunto $\mathcal{P}$ é, de fato, infinito. $\square$

Agora que sabemos da existência de uma quantidade infinita de primos, podemos formular a questão principal desta monografia: sendo 2 o menor primo, dado um número natural $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$, quantos primos existem no intervalo $[2, x] \subset \mathbb{N}$? Trataremos desta questão no tópico que se segue.

Quantos primos existem no intervalo $[2, x]$?

Para uma tentativa de resposta, sempre vale uma boa definição para reinterpretá-la em melhores termos:

Definição. *Dado $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$, denotaremos por $\pi(x)$ a função contadora dos primos, isto é, a função que dá a quantidade de primos que existem no intervalo $[2, x]$. Em termos precisos, se p denota primo, então $\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1$.*

Assim, podemos reformular a pergunta acima simplesmente para: quanto vale $\pi(x)$, para $x \geq 2$? Notamos ainda que em termos da função π a infinitude dos primos também é equivalente a dizer que $\lim_{x \to \infty} \pi(x) = +\infty$.

Alguns valores óbvios desta função são, por exemplo, $\pi(2) = 1, \pi(3) = 2$ e $\pi(5) = 3$, todos obtidos facilmente por inspeção. Mas melhor ainda do que contar manualmente é fazer uso de computação e obter uma tabela com valores muito mais “atraentes”para x:

Table 1. Values of pi(*x*)

	x	pi(*x*)	reference
1	10	4	
2	100	25	
3	1,000	168	
4	10,000	1,229	
5	100,000	9,592	
6	1,000,000	78,498	
7	10,000,000	664,579	
8	100,000,000	5,761,455	
9	1,000,000,000	50,847,534	
10	10,000,000,000	455,052,511	
11	100,000,000,000	4,118,054,813	
12	1,000,000,000,000	37,607,912,018	
13	10,000,000,000,000	346,065,536,839	

Tabela 1: Tabela com distribuição de primos, referência [1].

Intuitivamente a tabela acima nos diz parecer não ter uma fórmula fechada que possa decidir o valor para $\pi(x)$ em qualquer natural x, já que de certo modo a quantidade de primos não parece seguir um padrão óbvio. Mais ainda, a tabela também nos intui que os números primos se tornam cada vez mais raros com x crescendo indefinidamente. De fato, esta última intuição possui respaldo matemático, pois é possível demonstrar que existem cadeias arbitrariamente longas de números não-primos que são consecutivos. A proposição a seguir demonstra esse fato:

Proposição. *Existem cadeias arbitrariamente longas de naturais consecutivos onde nenhum termo é primo.*

Demonstração. Seja k natural arbitrário. Considere a seguinte sequência de números naturais consecutivos:

$$(k+1)!+2, (k+1)!+3, \ldots, (k+1)!+(k+1)$$

Mostremos que nenhum termo desta sequência é primo. Ora, qualquer termo da sequência é da forma: $m+(k+1)!$, onde $m \in \{2, \ldots, k+1\}$. Assim, para qualquer m segue da própria definição de fatorial $(k+1)!$ é múltiplo de m e como $m|m$, obtemos que $m|((k+1)!+m)$, mostrando que nenhum termo da sequência acima é primo. □

Desta forma, ao tomar um valor de k "muito grande"na proposição anterior, vemos que os primos se tornam realmente cada vez mais raros. E toda essa não obviedade no padrão de distribuição destes números parece tornar ainda mais difícil a tarefa de determinar o valor de $\pi(x)$ para qualquer valor de x. Contudo, existe um importante resultado em teoria dos números que nos permite obter uma estimativa do valor de $\pi(x)$. Este resultado, conhecido como *Teorema dos Números Primos*, é enunciado a seguir:

Teorema. *(Teorema dos Números Primos) Seja $\pi(x)$ a função contadora dos primos definida acima. Então, vale que:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1,$$

isto é, em termos assintóticos $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Uma demonstração deste teorema não será fornecida aqui, pois qualquer prova elmentar conhecida deste fato que não faz uso de ferramentas avançadas são longas e sofisticadas. Por agora nos restringiremos apenas a analisar de modo intuitivo o que o teorema está dizendo. O limite acima nos diz que o quociente $x/\ln(x)$ aproxima assintóticamente o valor de $\pi(x)$, no sentido de que o erro relativo entre ambos tende a zero quando x cresce indefinidamente. Portanto, quanto maior for o valor de x considerado, melhor será a aproximação de $\pi(x)$ dada por $x/\ln(x)$.

Mais ainda, podemos reinterpretar este resultado em termos probabilísticos, no sentido inuititvo e usual de probabilidade como limite de frequências. Neste sentido, o teorema dos números primos diz que para N suficientemente grande, a probabilidade de um natural menor ou igual que N ser primo é próxima de $1/\ln(N)$.

Como consequência direta do teorema dos números primos, estabelece-se o seguinte corolário que nos permite aproximar o valor do n-ésimo primo.

Corolário. *Seja p_n o n-ésimo número primo. Então, temos que*

$$p_n \sim n \ln(n).$$

Demonstração. Sendo p_n o n-ésimo primo, então segue que $\pi(n) = n$. Aplicando o teorema dos números primos para $x = n$, obtemos que $n \sim p_n / \ln(p_n)$. Portanto, segue desta expressão que

$$\ln(n) \sim \ln\left(\frac{p_n}{\ln(p_n)}\right) = \ln(p_n) - \ln(\ln(p_n))$$

e usando o fato de que $p_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(p_n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(p_n) - \ln(\ln(p_n))}{\ln(p_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\ln(\ln(p_n))}{\ln(p_n)}\right) = 1,$$

onde usamos a regra de L'Hôspital no último passo para mostrar a nulidade do limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln(p_n))}{\ln(p_n)} = 0.$$

Portanto, concluimos que $\ln(p_n) \sim \ln(n)$. Isto mostra, por conseguinte, que vale a relação $p_n \sim n \ln(p_n) \sim n \ln(n)$ e, em particular, a que queríamos mostrar. □

Assim, o corolário anterior nos dá que para valor suficientemente grande de n o n-ésimo primo é próximo ao valor de $n \ln(n)$. O seguinte exemplo ilustra a magnitude desta aproximação:

Exemplo. Por métodos computacionais sabemos da referência [3] que o 2×10^{17}-ésimo primo é o número: 8 512 677 386 048 191 063 e que $2 \times 10^{17} \times \ln(2 \times 10^{17})$ é próximo de 7 967 418 752 291 744 388. Vemos um erro relativo de aproximadamente 6.4%.

É possível ainda obter uma aproximação melhor para $\pi(x)$ do que a fornecida pelo teorema dos números primos. Esta aproximação faz uso da função logaritmo integral de Euler, definida abaixo.

Definição. *O logaritmo integral de Euler, Li(x), é dado pela integral:*

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

Podemos observar que $Li(x) \sim x/\ln(x)$ e que, pelo teorema dos números primos, consequentemente $Li(x) \sim \pi(x)$. A melhor aproximação dada por $Li(x)$ é vista claramente no gráfico a seguir, onde se vê que a razão $\pi(x)/Li(x)$ converge a uma taxa muito mais rápida para um do que a razão vista no teorema dos números primos:

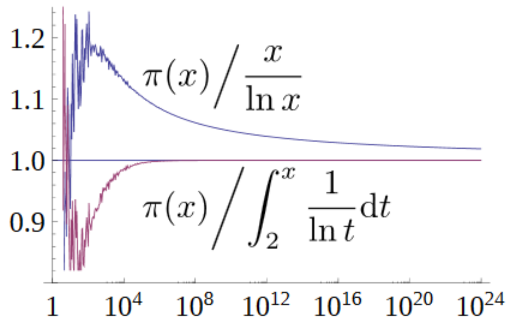

Figura 1: Gráfico de convergência da razão entre $\pi(x)$ e suas respectivas funções aproximadoras: $x/\ln(x)$ e $Li(x)$, referência [3].

Em termos mais teóricos, a razão para isso é dada pela desigualdade conhecida [6]:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq Cx \cdot \exp\{-a(\ln x)^{3/5}(\ln(\ln(x))^{-1/5}\}$$

que é válida independentemente de x e para constantes a e C. Desta desigualdade se obtém que para qualquer $k > 0$, encontra-se $C > 0$ tal que:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq C\frac{x}{\ln(x)^k}$$

valendo para todo x, o que mostra $Li(x)$ ser mesmo uma melhor aproximação.

De fato, a importância da função $Li(x)$ está não só no fato de que esta melhor aproxima $\pi(x)$, mas também no fato de que ela oferece resultados relacionados com a *Hipótese de Riemann*. Veremos isto a seguir.

Primos, a função Zeta e a Hipótese de Riemann

Prosseguimos definindo a função Zeta, apresentando a sua relação com números primos e o que é a Hipótese de Riemann.

Definição. *A função Zeta de Riemann é definida para uma variável complexa s pela seguinte série:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

onde $|s| \geq 1$.

Um importante resultado demonstrado por Leonard Euler mostra a relação desta função com os números primos. Este resultado tem sua importância pois garante a não-existência de zeros na região do plano complexo $Re(z) > 1$.

Teorema. *(Euler) Se p denota primo, a série que define a função Zeta é igual ao seguinte produto sobre todos os primos:*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Demonstração. Aplicamos a definição da função Zeta e manipulamos seus termos:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \ldots\right)\ldots$$

$$= \prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}}\right).$$

Na demonstração da infinitude dos primos vimos que cada termo do produtório acima é uma série convergente e, portanto, podemos escrever o resultado de sua soma, dado por $(1 - 1/p^s)^{-1}$. Logo, obtemos que

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

o que mostra a não existência de zeros em $Re(s) > 1$, visto que nenhum dos fatores do produto acima é nulo. □

A hipótese de Riemann, que enunciamos a seguir, discute a existência de zeros fora dessa região do plano complexo.

Conjectura. *(Hipótese de Riemann) Todos os zeros não-triviais da função Zeta de Riemann, isto é, todos os valores de s diferentes de* $-2, -4, -6, \ldots$ *tal que* $\zeta(s) = 0$ *estão todos sob a linha* $Re(s) = 1/2$.

Tal conjectura está listada na famosa lista dos *Problemas de Hilbert.* Embora ainda não provada, computacionalmente já fora verificado que os primeiros 100 bilhões de zeros não triviais da função estavam, de fato, sob a linha $Re(z) = 1/2$ [4].

Mas qual a importância da Hipótese de Riemann para a teoria dos números? O que ela tem a ver com o teorema da distribuição dos primos? É aqui que novamente falamos da função $Li(x)$ definida mais acima.

A relação é bastante direta e tem a ver com o fato de que a veracidade da Hipótese de Riemann implicaria uma estimativa para o erro envolvido no teorema dos números primos melhor do que qualquer uma conhecida até hoje.

Mais precisamente, em 1901 o matemático Von Koch mostrou que a Hipótese de Riemann é condição necessária e suficiente para que valha a igualdade:

$$\pi(x) = Li(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\ln x)$$

cuja constante envolvida no *"$\mathcal{O}$ notation"* fora estimada em 1976 pelo matemático Lowell Schoenfeld [3]. De fato, ele mostrou que é possível estimar o erro por:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln(x), \text{ para } x \geq 2657.$$

Ainda, o fato de que a diferença entre $\pi(x)$ e $Li(x)$ não só ser da ordem de $\sqrt{x}\ln(x)$ mas também ser a melhor estimativa possível para o erro é algo que se sabe demonstrar [4]. Mas claro, isto só se a hipótese de Riemann fosse verdadeira.

E assim se vê que uma pergunta tão inocente como a de quantos primos existem num intervalo arbitrário $[2, x]$ está intimamente relacionada com uma das conjecturas mais profundas da matemática, a hipótese de Riemann. A resolução de uma tal conjectura, por sua vez, implicaria não só um conhecimento maior acerca dos números primos, mas também um conhecimento de maior precisão da maneira como estes números se distribuem entre os naturais.

Referências utilizadas

Sites:

[1]: `https://primes.utm.edu/howmany.html`

[2]: `http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n06/n06_Artigo05.pdf`

[3]: `https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem`

[4]: `https://primes.utm.edu/notes/rh.html`

[5]: `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis`

Livros:

[6] TEORIA dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Coautoria de Fabio Brochero Martinez. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, c2011. 457 p. (Projeto Euclides).