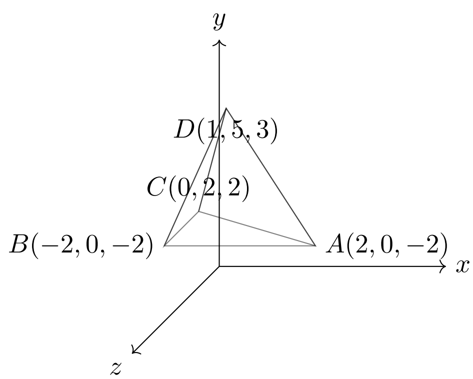
# 1 Vektorgeometrie Aufgabe 39

**Aufgabe:** Ein Tetraeder ist im Raum durch die Punkte A(2,0,-2),B(-2,0,-2),C(0,2,2),D(1,5,3) definiert. Berechne das Volumen.




**Lösung:** Das Volumen eines Tetraeders kann mit der allgemeinen Formel für ein Spat ausgerechnet werden.

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix}\right| \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

Für diese Formel muss man jedoch noch die Richtungsvektoren von einem Beliebigen Punkt aus ausrechnen. In diesem Fall vom Punkt A.

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{b} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-1\\ 5\\ 5\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{c} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 4\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

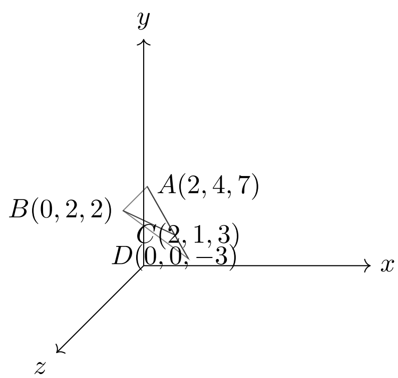
Jetzt muss man nur noch die Vektoren in die Formel einsetzen.

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| && (2) \\
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} -0 \\ 40 \\ -80 \end{pmatrix}\right| && (3) \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{0^2 + 40^2 + (-80)^2} && (4) \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{8000} && (5) \\
&= \frac{1}{6}89.443 && (6) \\
V &= 14.907 && (7)
\end{aligned}
$$

## 2 Vektorgeometrie Aufgabe 39

**Aufgabe:** Ein Tetraeder ist im Raum durch die Punkte A(2,4,7),B(0,2,2),C(2,1,3),D(0,0,-3) definiert. Berechne das Volumen.




**Lösung:** Das Volumen eines Tetraeders kann mit der allgemeinen Formel für ein Spat ausgerechnet werden.

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix}\right| \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

Für diese Formel muss man jedoch noch die Richtungsvektoren von einem Beliebigen Punkt aus ausrechnen. In diesem Fall vom Punkt A.

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-5\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{b} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-10\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{c} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix}0\\-3\\-4\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

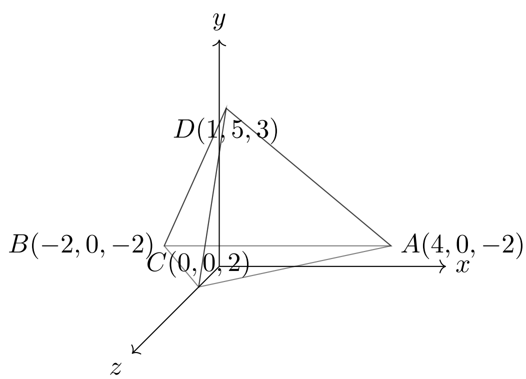
Jetzt muss man nur noch die Vektoren in die Formel einsetzen.

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\-10\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\-4\end{pmatrix}\right| && (2)\\
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\30\\-16\end{pmatrix}\right| && (3)\\
&= \frac{1}{6}\sqrt{0^2+30^2+(-16)^2} && (4)\\
&= \frac{1}{6}\sqrt{1156} && (5)\\
&= \frac{1}{6}34 && (6)\\
V &= 5.667 && (7)
\end{aligned}$$

# 3 Vektorgeometrie Aufgabe 39

**Aufgabe:** Ein Tetraeder ist im Raum durch die Punkte A(4,0,-2),B(-2,0,-2),C(0,0,2),D(1,5,3) definiert. Berechne das Volumen.




**Lösung:** Das Volumen eines Tetraeders kann mit der allgemeinen Formel für ein Spat ausgerechnet werden.

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \right| \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

Für diese Formel muss man jedoch noch die Richtungsvektoren von einem Beliebigen Punkt aus ausrechnen. In diesem Fall vom Punkt A.

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{b} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{c} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Jetzt muss man nur noch die Vektoren in die Formel einsetzen.

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| \tag{1}$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \tag{2}$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -0 \\ 0 \\ -120 \end{pmatrix} \right| \tag{3}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{0^2 + 0^2 + (-120)^2} \tag{4}$$

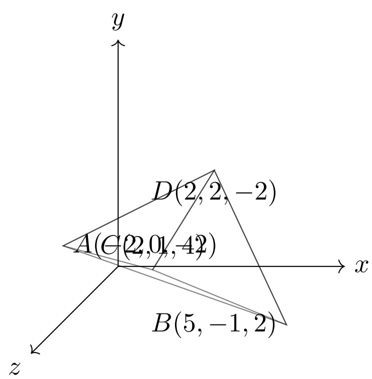
$$= \frac{1}{6} \sqrt{14\,400} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{6} 120 \tag{6}$$

$$V = 20 \tag{7}$$

# 4 Vektorgeometrie Aufgabe 39

**Aufgabe:** Ein Tetraeder ist im Raum durch die Punkte A(-2,0,-2),B(5,-1,2),C(2,1,4),D(2,2,-2) definiert. Berechne das Volumen.




**Lösung:** Das Volumen eines Tetraeders kann mit der allgemeinen Formel für ein Spat ausgerechnet werden.

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \right| \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

Für diese Formel muss man jedoch noch die Richtungsvektoren von einem Beliebigen Punkt aus ausrechnen. In diesem Fall vom Punkt A.

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{b} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{c} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Jetzt muss man nur noch die Vektoren in die Formel einsetzen.

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-8\\16\\18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}\right| && (2)\\
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-32\\16\\108\end{pmatrix}\right| && (3)\\
&= \frac{1}{6}\sqrt{(-32)^2+16^2+108^2} && (4)\\
&= \frac{1}{6}\sqrt{12\,944} && (5)\\
&= \frac{1}{6}113.772 && (6)\\
V &= 18.962 && (7)
\end{aligned}
$$