Kandi

Joni Hanski

20.4.2016

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Kandissamme haluamme osoittaa metrisissä avaruuksissa sulkeuman karakterisoinnin jonon raja-arvojen avulla yleistyvän yleisiin topologisiin avaruuksiin käyttämällä jonojen sijaan konstruktiota **suunnattu verkko**. Kandi kuuluu topologian alaan, ja suurimmaksi osaksi sisältyy kurssiin Topologia II.

Osoitamme aluksi miten metrisessä avaruudessa sulkeuma voidaan karakterisoida jonojen raja-arvojen avulla, ja tämän jälkeen tutkimme ei-metrisen avaruuden tapausta jossa sama tulos ei enää päde. Tämän jälkeen johdamme suunnattuja verkkoja käyttävän tuloksen yleisiin topologisiin avaruuksiin, ja näytämme kuinka tämä määrittely johtaa eri lopputulokseen esimerkkitapauksessamme.

Luku 2

Topologia

Topologian avulla voidaan puhua avaruuden rakenteesta. Tietyllä tapaa topologia kuvaa sitä, kuinka lähellä tai kaukana pisteet ovat toisistaan.

Määritelmä 2.1. *Topologia.* Olkoon X avaruus ja $\mathcal{T} \subset \mathbb{P}(\mathrm{X})$ joukon X osajoukkojen joukko. Sanomme, että $\mathcal{T}$ on joukon X *topologia*, mikäli seuraavat ehdot pätevät:
(T1) $\mathcal{T}$ sisältää osajoukkojensa mielivaltaiset yhdisteet
(T2) Jos $A, B \in \mathcal{T}$, niin $A \cap B \in \mathcal{T}$
(T3) $\mathrm{X}, \varnothing \in \mathcal{T}$

Jos joukolle X on määrätty topologia $\mathcal{T}$, sanomme että X on *topologinen avaruus.*

Jos joukko $A \subset \mathrm{X}$ kuuluu avaruuden X topologiaan $\mathcal{T}$, sanomme että joukko A on $\mathcal{T}$-*avoin*, tai lyhyesti *avoin*, mikäli topologia on asiayhteydestä selvä. Mikäli joukon $A \subset \mathrm{X}$ komplementti $\mathrm{X} \setminus A$ on avoin, sanomme että A on *suljettu.* Joukko voi olla avoin, suljettu, molemmat tai ei kumpikaan. Esimerkiksi koko avaruus X on aina sekä avoin että suljettu.

Oletamme tästedes, että X on topologinen avaruus.

Määritelmä 2.2. *Ympäristö.* Olkoon $x \in \mathrm{X}$ ja $A \subset \mathrm{X}$. Sanomme että A on pisteen x *ympäristö*, mikäli A on avoin ja $x \in A$.

Määritelmä 2.3. *Sulkeuma.* Joukon $A \subset \mathrm{X}$ *sulkeuma* määritellään niiden pisteiden joukkona, joiden jokainen ympäristö leikkaa joukon A.

$$\overline{A} = \text{sulkeuma } A = \{x \in \mathrm{X} \mid \text{jos } x \in U \in \mathcal{T} \text{ pätee } U \cap A \neq \varnothing\} \tag{2.4}$$

Joukon A sulkeuma on suljettu, ja sisältyy jokaiseen suljettuun joukkoon joka sisältää joukon A. Intuitiivisesti tämä seuraa siitä, että sulkeuman komplementti on yhdiste kaikista avoimista joukoista jotka eivät leikkaa joukkoa A.

Määritelmä 2.5. *Kanta.* Käytännössä voi olla hankala listata jokainen tietyn topologian avoin joukko määritellessä topologiaa. Tämän sijaan usein puhutaan rajatummasta joukosta avoimia joukkoja, jotka yksikäsitteisesti määräävät topologian. Joukko $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}(\mathrm{X})$ on topologian *kanta* joukossa X, mikäli seuraavat ehdot pätevät:

(K0) $\varnothing \in \mathcal{B}$.

(K1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathrm{X}$.

(K2) Jos $x \in B_1 \cap B_2$ ja $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tällöin on olemassa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Joukko $U \subset \mathrm{X}$ kuuluu kannan $\mathcal{B}$ määräämään topologiaan jos ja vain jos U on jokin yhdiste kannan alkioista.

Luku 3

Metrinen avaruus

Metrisen avaruuden keskeinen käsite on metriikka, joka pyrkii formalisoimaan etäisyyden käsitteen. Kandin aiheen kannalta erityisen huomionarvoista on se, että metriikka määrää yksiselitteisesti avaruudelle luonnollisen topologian.

Määritelmä 3.1. *Metriikka.* Joukossa X määritelty funktio $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ on *metriikka* joukossa X jos pätee

(M1) Kaikilla $a, b \in \mathrm{X}$ pätee $d(a, b) \geq 0$.
(M2) $d(a, b) = 0$ jos ja vain jos $a = b$.
(M3) (Kolmioepäyhtälö) Kaikilla $a, b, c \in \mathrm{X}$ pätee $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Määritelmä 3.2. *Palloympäristö.* Pisteen $x \in \mathrm{X}$ r-säteinen *palloympäristö* on joukko $B(x, r) = \{y \in \mathrm{X} \mid d(x, y) < r\}$.

Metriselle avaruudelle on hyvin luonnollista määrätä topologia käyttämällä kantana avaruuden eri palloympäristöjä. Jos siis X on metrinen avaruus, sen kannaksi valitaan $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in \mathrm{X}, r \in \mathbb{R}^+\}$. Kutsumme topologiaa $\mathcal{B}$ nyt *metriikan indusoimaksi topologiaksi* joukossa X.

Luku 4

Sulkeuman karakterisointi jonojen avulla

Kirjallisuutta

[1] Jussi Väisälä: Topologia II