

Kandi

Joni Hanski

20.4.2016

Sisältö

1	Johdanto	2
2	Topologia	3
3	Metrinen avaruus	5
4	Sulkeuman karakterisointi jonojen avulla	6
5	Erikoinen ei-metrinen avaruus	7
6	Verkko	9

Luku 1

Johdanto

Kandissamme haluamme osoittaa metrisissä avaruuksissa sulkeuman karakterisoinnin jonojen raja-arvojen avulla yleistyvän yleisiin topologisiin avaruuksiin käyttämällä jonojen sijaan konstruktiota **suunnattu verkko**. Kandi kuuluu topologian alaan, ja suurimmaksi osaksi sisältyy kurssiin Topologia II.

Osoitamme aluksi miten metrisessä avaruudessa sulkeuma voidaan karakterisoida jonojen raja-arvojen avulla, ja tämän jälkeen tutkimme ei-metrisen avaruuden tapausta jossa sama tulos ei enää päde. Tämän jälkeen johdamme suunnattuja verkkoja käyttävän tuloksen yleisiin topologisiin avaruuksiin, ja näytämme kuinka tämä määrittely johtaa eri lopputulokseen esimerkkitapauksessamme.

Luku 2

Topologia

Topologian avulla voidaan puhua avaruuden rakenteesta. Tietyllä tapaa topologia kuvaa sitä, kuinka lähellä tai kaukana pisteet ovat toisistaan.

Määritelmä 2.1. *Topologia.* Olkoon X avaruus ja $\mathcal{T} \subset \mathbb{P}(X)$ joukon X osajoukkojen joukko. Sanomme, että \mathcal{T} on joukon X *topologia*, mikäli seuraavat ehdot pätevät:

(T1) \mathcal{T} sisältää osajoukkojensa mielivaltaiset yhdisteet

(T2) Jos $A, B \in \mathcal{T}$, niin $A \cap B \in \mathcal{T}$

(T3) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$

Jos joukolle X on määrätty topologia \mathcal{T} , sanomme että X on *topologinen avaruus*.

Jos joukko $A \subset X$ kuuluu avaruuden X topologiaan \mathcal{T} , sanomme että joukko A on *\mathcal{T} -avoin*, tai lyhyesti *avoin*, mikäli topologia on asiayhteydestä selvä. Mikäli joukon $A \subset X$ komplementti $X \setminus A$ on avoin, sanomme että A on *suljettu*. Joukko voi olla avoin, suljettu, molemmat tai ei kumpikaan. Esimerkiksi koko avaruus X on aina sekä avoin että suljettu.

Oletamme tästä, että X on topologinen avaruus.

Määritelmä 2.2. *Ympäristö.* Olkoon $x \in X$ ja $A \subset X$. Sanomme että A on pisteen x *ympäristö*, mikäli A on avoin ja $x \in A$.

Määritelmä 2.3. *Sulkeuma.* Joukon $A \subset X$ *sulkeuma* määritellään niiden pisteiden joukko, joiden jokainen ympäristö leikkaa joukon A .

$$(2.4) \quad \overline{A} = \text{sulkeuma } A = \{x \in X \mid \text{jos } U \text{ on pisteen } x \text{ ympäristö, niin pätee } U \cap A \neq \emptyset\}$$

Joukon A sulkeuma on suljettu, ja sisältyy jokaiseen suljettuun joukkoon joka sisältää joukon A . Intuitiivisesti tämä seuraa siitä, että sulkeuman komplementti on yhdiste kaikista avoimista joukoista jotka eivät leikkaa joukkoa A .

Määritelmä 2.5. *Kanta.* Käytännössä voi olla hankala listata jokainen tietyn topologian avoin joukko määritellesä topologiaa. Tämän sijaan usein puhutaan rajatumasta joukosta avoimia joukkoja, jotka yksikäsitteisesti määräävät topologian. Joukko $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}(X)$ on topologian *kanta* joukossa X , mikäli seuraavat ehdot pätevät:

- (K0) $\emptyset \in \mathcal{B}$.
- (K1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
- (K2) Jos $x \in B_1 \cap B_2$ ja $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tällöin on olemassa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Joukko $U \subset X$ kuuluu kannan \mathcal{B} määräämään topologiaan jos ja vain jos U on jokin yhdiste kannan alkioista.

Luku 3

Metriten avaruus

Metriten avaruuden keskeinen käsite on metriikka, joka pyrkii formalisoimaan etäisyyden käsitteen. Kandin aiheen kannalta erityisen huomionarvoista on se, että metriikka määrittää yksiselitteisesti avaruudelle luonnollisen topologian.

Määritelmä 3.1. *egation. De Morgans Law of Set Theory Proof - Math Theorems Statement:*

Metriikka. Joukossa X määritelty funktio $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ on *metriikka* joukossa X jos pätee

(M1) Kaikilla $a, b \in X$ pätee $d(a, b) \geq 0$.

(M2) $d(a, b) = 0$ jos ja vain jos $a = b$.

(M3) (Kolmioepäyhtälö) Kaikilla $a, b, c \in X$ pätee $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Määritelmä 3.2. *Palloympäristö.* Pisteen $x \in X$ r -säteinen *palloympäristö* on joukko $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$.

Metriselle avaruudelle on hyvin luonnollista määrätä topologia käyttämällä kantana avaruuden eri palloympäristöjä. Jos siis X on metriten avaruus, sen kannaksi valitaan $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}\}$. Kutsumme kannan \mathcal{B} määräämää topologiaa nyt *metriikan indusoimaksi topologiaksi* joukossa X .

Luku 4

Sulkeuman karakterisointi jonojen avulla

Palautetaan ensin mieleen jonon määritelmä. Sanomme, että kuvaus $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ on jono avaruudessa X , ja merkitsemme $x_n := x(n)$. Erityisesti jonon suppeneminen ja raja-arvo on työmme kannalta keskeistä.

Määritelmä 4.1. *Jonon suppeneminen.* Olkoon X topologinen avaruus, ja olkoon a jono avaruudessa X . Sanomme, että jono *suppenee* kohti pistettä x , mikäli jokaista pisteen x ympäristöä $U \subset X$ kohti voidaan valita jonon a indeksi n_U siten, että kaikilla $n > n_U$ pätee $a_n \in U$. Tiettyjen ehtojen pätiessä avaruuden jono voi supeta vain yhtä pistettä kohti. Tällöin jos jono suppenee kohti pistettä x , voimme sanoa että x on jonon *raja-arvo*.

Todistamatta mainitsemme että metrisessä avaruudessa jono voi supeta vain yhtä pistettä kohti.

Metrisessä avaruudessa voimme nyt osoittaa, että joukon A jonojen raja-arvojen joukko on sama kuin joukon A sulkeuma. Tämä tarkoittaa, että piste x kuuluu joukon A sulkeumaan jos ja vain jos on sellainen jono $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ että tämän raja-arvo on x . Todistuksessa on kaksi puolta.

Kohta 1. Osoitetaan, että jos jono $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, piste x kuuluu joukon A sulkeumaan.

Joukon A sulkeuma on pisteitä

TODO

Luku 5

Erikoinen ei-metrinen avaruus

Aiemmin huomasimme että metrisessä avaruudessa jonon raja-arvojen avulla voidaan määrittää sulkeuma. Nyt tutkimme ei-metristä avaruutta jossa tämä karakterisointi ei päde.

Olkoon \mathbb{R} avaruus, jossa topologian \mathcal{T} määrittelee seuraava ehto:

$$(5.1) \quad \mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ on numeroituva}\} \cup \{\emptyset\}$$

Osoitamme ensin että \mathcal{T} määrää topologian.

Ehdot 1 ja 2 voidaan osoittaa De Morganin laeilla, eli

$$(5.2) \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(5.3) \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Ehdon 1 kohdalla huomaamme että jos joukon A komplementti on numeroituva, tällöin yhdisteen $A \cup B$ komplementti sisältyy joukon A komplementtiin. Toisaalta ehto 2 toteutuu kun huomaamme että kahden numeroituvan joukon yhdiste on yhä numeroituva, eli kahden joukon leikkauksen komplementti on yhä numeroituva jos molempien alkuperäisten joukkojen komplementti oli numeroituva.

Ehto 3 toteutuu selvästi.

Tutkitaan erityisesti yksikköväliä $I = [0, 1]$. Joukon I sulkeuma osoittautuu olevan koko avaruus X . Tämän osoittamiseksi teemme vastaoletuksen, eli oletamme että löytyy $x \in X$ joka ei kuulu joukon I sulkeumaan. Tällöin pisteellä x on ainakin yksi ympäristö $U \subset X$ joka ei leikkaa joukkoa I . Tällöin $I \subset U^C$. Koska tästä seuraisi että U^C on ylinumeroituva, tämä on ristiriita, eli vastaoletuksemme oli väärä.

Toisaalta voimme osoittaa että jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x \notin I$, mikään joukon I jono ei suppene kohti pistettä x . Teemme jälleen vastaoletuksen, eli että löytyy jono a joukossa I joka suppenee kohti pistettä x .

Nyt voimme valita pisteelle x ympäristön $U \subset \mathbb{R}$ siten, että

$$(5.4) \quad U = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid a_i = x \text{ jollain } i \in \mathbb{N}\}$$

Selvästi tämä joukko on avoin, koska tämän sulkeuma on jonon arvojoukko. Selvästi joukko U myös sisältää pisteen x , sillä jonon arvot jäävät joukkoon I mutta $x \notin I$. Täten U on pisteen x ympäristö, ja toisaalta myös selvästi jonon alkiot eivät ikinä sisälly tähän joukkoon. Koska jonon suppeneminen vaatii että jokaiselle pisteen x ympäristölle pätee että ennen pitkään jono saa arvonsa tässä joukossa, saamme ristiriidan, eli jonomme ei suppene kohti pistettä x . Koska emme tehneet mitään oletuksia jonosta, saamme että mikään yksikkövälin I jono ei suppene kohti pistettä x .

Täten sulkeuma on tässä merkittävässä avaruudessamme laajempi kuin jonojen suppenemispisteet. Jotta saisimme kuvailtuja sulkeumaa suppenemisen kautta, meidän on käytettävä jonoja yleisempää käsitettä.

Luku 6

Verkko

Suunnattu verkko yleistää verkon käsitettä. Isolta osin verkon määritelmä vastaa jonon määritelmää, joten mainitsemme erikseen mikäli verkon ominaisuus poikkeaa jonosta.

Jono on kuvaus luonnollisilta luvuilta \mathbb{N} kohdeavaruuteen X . Verkko sen sijaan ottaa lähtöavaruudekseen jonkin *suunnatun joukon*. Suunnattu joukko on määritelty seuraavasti:

Määritelmä 6.1. *Suunnattu joukko.* Olkoon joukko X jokin joukko, jossa on määritelty relaatio \leq joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(V1) Jos $a, b, c \in X$, ja $a \leq b \leq c$, tällöin $a \leq c$ (transitiivisuus)

(V2) Jos $a \in X$, tällöin $a \leq a$.

(V3) Jos $a, b \in X$, tällöin on olemassa $c \in X$ siten, että $a \leq c$ ja $b \leq c$.

Kutsumme paria (X, \leq) *suunnatuksi joukoksi*

Ehto V3 erottaa tämän jonon määritelmästä. Toisin kuin luonnollisilla luvuilla, järjestyksemme on vain osittainen. Jos $a, b \in X$, ei välttämättä päde $a \leq b$ eikä $b \leq a$. Ehto V3 kuitenkin antaa meille keinon puhua suppenemisestä liki identtisesti samalla tavoin kuin jonoilla.

Olkoon \mathcal{D} suunnattu joukko, ja olkoon X avaruus. Kuvaus $n : \mathcal{D} \rightarrow X$ on avaruuden X *verkko*.

Osoittautuu että aiemmin käyttämämme määritelmä jonon suppenemiselle kelpaa lähes sellaisenaan verkon suppenemisen määrittelemiselle, korvaamalla jonon verkolla.

Määritelmä 6.2. *Verkon suppeneminen.* Olkoon X topologinen avaruus, ja n avaruuden X verkko. Sanomme, että verkko *suppenee* kohti pistettä x mikäli jokaiselle pisteen x ympäristölle U löytyy joukon \mathcal{D} alkio $d_U \in \mathcal{D}$ siten, että jos $d_U \leq d$, tällöin $n(d) \in U$.

Kirjallisuutta

[1] Jussi Väisälä: Topologia II