

7 Dynamisk Programmering

7.1 Guldkæden

Du har en guldkæde med n led, som du vil sælge ved til en guldsmed. Den kan deles i mindre længder (med n led tilsammen, dvs. ingen led går tabt). Guldsmeden køber guldkæder af forskellige længder til forskellige priser:

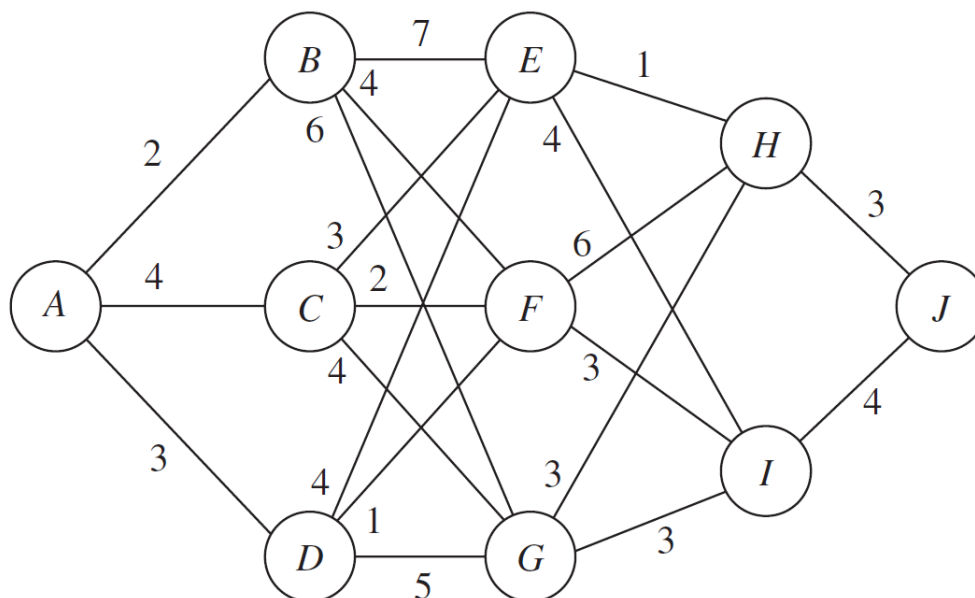
længde i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pris p_i	\$1	\$5	\$8	\$9	\$10	\$17	\$17	\$20	\$24	\$30

Hvordan skal du opdele din guldkæde for at optimere din salgspris?

- a. Forklar princippet om rekursion, og brug det til at løse opgaven. Hvad er den optimale opdeling af en guldkæde af længde 9? Af længde 10?

7.2 The Stagecoach Problem

En mytisk lykkesmed i Missouri beslutter sig for at rejse vestpå for at deltage i guldfeberen i Californien i midten af 1800-tallet. Rejsen er nødt til at foregå med diligence (stagecoach) gennem ukendt land, hvor der er en alvorlig fare for at blive angrebet af plyndrere. Selvom udgangspunkt og destination er givet, så er der et valg mellem hvilke stater (eller territorier, som senere blev til stater) at rejse i gennem på ruten. De mulige ruter er vist nedenfor:



Hver stat er repræsenteret med en bogstav i en cirkel, og retningen på rejsen skal læses fra venstre mod højre i diagrammet. Altså, fire stadier (ture med diligencen) er nødvendigt for at rejse fra lykkesmedens udgangspunkt stat A (Missouri) til destinationen i stat J (Californien). Denne lykkesmed var en forsigtig mand og var derfor ret bekymret for sin sikkerhed. Efter lidt omtanke, fandt han en snu måde at afklare sikkerheden af en rute på: Der blev udbudt livsforsikringer til passagererne, og eftersom prisen på en forsikring for en given tur med diligencen var baseret på en nøje evaluering af sikkerheden på turen,

så måtte den sikreste rute være den med den billigste totale livsforsikring. Priserne på livsforsikringer er også skrevet ind i diagrammet.

- a. Gør rede for at problemet kan løses med dynamisk programmering. Hvad er princippet om optimalitet, og er det anvendeligt her?
- b. Løs problemet med dynamisk programmering.

7.3 Optimering af Produktionsplan for Tøjfirma

Du er produktionschef i et nystartet modefirma, der udgiver en ny beklædningslinje hvert kvartal. Produktionsomkostningerne for hver beklædningsenhed er DKK 350, og hver enhed sælges for DKK 750. Det koster 150.000 kr at åbne for produktionen i en sæson, og der skal produceres 100 enheder af gangen. Du kan godt lagre overskydende varer, men de mister 200 kr i værdi mellem sæsoner, og du har ikke plads til mere end 800 enheder. Du ønsker at optimere antallet af enheder, der skal produceres hver sæson for at maksimere indtægterne, idet der tages højde for sæsontrends i modeverdenen, som ændrer efterspørgslen. Den forventede efterspørgsel for de kommende fire sæsoner er:

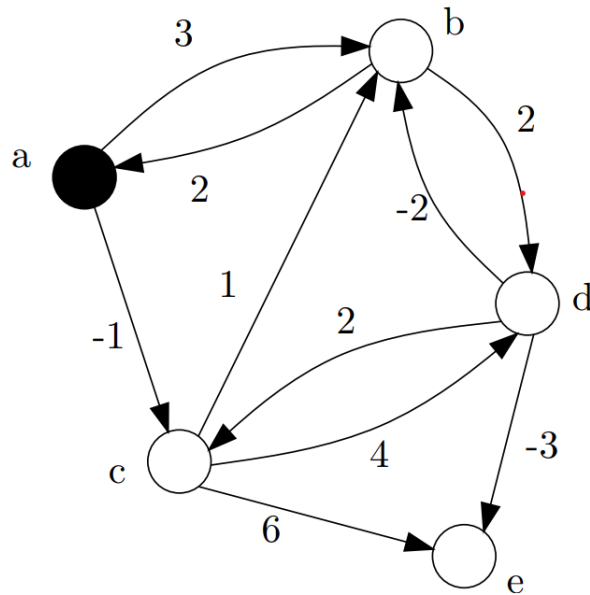
Sæson	Forventet efterspørgsel
Forår	500 enheder
Sommer	600 enheder
Efterår	300 enheder
Vinter	400 enheder

- a) Anvend dynamisk programmering til at formulere og løse problemet.
- b) Gør rede for at problemet kan løses med en anden metode kendt fra kurset, og forklar hvordan.
- c) Opstil problemet som et lineært program, og implementér i Julia.
- d) (Ekstraspørgsmål) Hvis ikke der var en lagerbegrænsning, hvad kan du så sige om sammenhængen mellem 1) om der er noget på lager til en given periode, og 2) om der skal produceres i den givne periode i en optimal løsning?

7.4 BONUSOPGAVE i DP - Bellman-Ford Algoritmen

- a. Gør rede for Bellman-Ford algoritmen som dynamisk programmeringsalgoritme. Hvori består algoritmens stadier og rekursion?

Vi ønsker nu at bestemme den korteste vej fra a til alle andre knuder i den vægtede graf nedenfor:



- b. Kan problemet løses med Dijkstras algoritme? Hvis ja, løs problemet og angiv ellers hvor der opstår problemer.
- b. Kan problemet løses med Bellman-Fords algoritme? Hvis ja, løs problemet og angiv ellers hvor der opstår problemer.

Dynamisk Programmering (Eksamen 2022, opgave 2) 20%

Du arbejder i en særlig dyrehandel, der blandt andet sælger *axolotler* til troværdige kunder. Du køber de truede dyr fra en særlig opdrætter, der bekymrer sig meget om dyrene og deres fremtidige hjem. Derfor vil opdrætteren ikke sælge dig mere end fem axolotler om dagen og beder om en "donation" på DKK 250 hver gang du besøger ham. Du betaler DKK 150 pr. axolotl. Du kan ikke have plads til mere end tre axolotls natten over i din dyrehandel på grund af pladsmangel. Hvis du har mindst én axolotl overnattende i din dyrehandel, skal du betale rengøringsomkostninger på DKK 100 pr. dag. Derudover er der en udgift på DKK 50 til foder pr. axolotl pr. dag. Lad os antage, at du allerede har to axolotler i din butik mandag morgen. Efterspørgslen efter axolotls fremgår af følgende tabel:

Dag	Efterspørgsel
Mandag	5
Tirsdag	2
Onsdag	4

- a) Løs problemet med at minimere indkøbs- og lageromkostningerne for de tre givne dage ved hjælp af dynamisk programmering.
- b) *Beskriv*, hvordan det samme problem ville se ud som et problem med den korteste vej.