

MO824A/MC859A – Tópicos em Otimização Combinatória
Segundo semestre de 2020

Atividade 3

Entrega: 23 de outubro até 23:59

Prof. Fábio Luiz Usberti (fusberty@ic.unicamp.br)

Prof. Celso Cavellucci (celsovcv@ic.unicamp.br)

1 Objetivo

O objetivo desta atividade consiste na aplicação da técnica de relaxação Lagrangiana, resolvida pelo método dos subgradientes, para a obtenção de limitantes primais e duais de um problema de programação linear inteira.

A atividade deve ser realizada em equipes de 2 a 3 alunos. Os docentes vão sortear as equipes aleatoriamente. As equipes com 2 alunos ganharão um bônus na nota em virtude do número menor de alunos.

2 Descrição do Problema

O problema dos dois caixeiros viajantes (*two travelling salesman problem – 2TSP*) pode ser descrito da seguinte forma. Seja um grafo não-orientado completo $G(V, E)$, onde V é o conjunto dos vértices e E é o conjunto das arestas. Em cada aresta $e \in E$ há um custo $c_e : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. O objetivo do problema consiste em encontrar dois ciclos Hamiltonianos (que visitam todos os vértices do grafo) disjuntos nas arestas de custo total mínimo.

Um modelo de programação linear inteira para o 2TSP é fornecido a seguir:

$$\text{MIN} \quad \sum_{k \in \{1,2\}} \sum_{e \in E} c_e x_e^k \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e^k = 2 \quad \forall i \in V, \forall k \in \{1, 2\} \quad (2)$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e^k \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V, \forall k \in \{1, 2\} \quad (3)$$

$$\sum_{k \in \{1,2\}} x_e^k \leq 1 \quad \forall e \in E \quad (4)$$

$$x_e^k \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, \forall k \in \{1, 2\} \quad (5)$$

Onde:

- x_e^k é uma variável de decisão binária associada à presença ($x_e^k = 1$) ou não ($x_e^k = 0$) da aresta e na rota do caixeiro k ;
- $\delta(i)$ é o conjunto de arestas que incidem no vértice i ;

- $S \subset V$ é um subconjunto próprio de vértices;
- $E(S)$ é o conjunto das arestas cujos dois vértices terminais estão em S .

A função objetivo (1) minimiza o custo da solução, composto pela soma dos custos de todas as arestas presentes na solução. O conjunto de restrições (2) diz que cada vértice deve possuir duas arestas incidentes para o ciclo de cada um dos dois caixeiros. Finalmente, o conjunto de restrições (3) visa a eliminação de subciclos ilegais, ou seja, a rota de cada caixeiro deve corresponder a um único ciclo que visita todos os vértices. Finalmente, a restrição (4) garante que os ciclos dos dois caixeiros são disjuntos.

3 Requisitos da atividade

Nesta atividade você deverá modelar uma relaxação Lagrangiana do 2TSP através da dualização das restrições (4). Note que a partir dessa dualização, o subproblema resultante consiste na obtenção de dois ciclos Hamiltonianos independentes.

3.1 Formulação do problema

Apresente a formulação da relaxação Lagrangiana proposta para o 2TSP.

3.2 Geração de instâncias

Gere 5 instâncias aleatórias variando a quantidade de vértices $|V| = \{100, 150, 200, 250, 300\}$. Para calcular os custos de cada aresta do grafo completo, posicione cada vértice em coordenadas aleatórias no plano, com distribuição uniforme, no intervalo $[0, 1]$, e depois calcule a distância Euclidiana de cada par de vértices. O custo de uma aresta será igual à distância Euclidiana de seus vértices terminais.

3.3 Método do subgradiente

Resolva o problema do dual Lagrangiano proposto para o 2TSP utilizando o método do subgradiente. Apresente a parametrização adotada para definir o tamanho do passo.

3.4 Heurística Lagrangiana

Projete uma heurística Lagrangiana que, partindo de uma solução do problema relaxado, obtenha uma solução factível para o 2TSP, permitindo assim obter um limitante superior (primal) para o problema.

3.5 Execução de experimentos

Resolva as 5 instâncias utilizando o método dos subgradientes, aplicando a heurística Lagrangiana em cada iteração, e reporte os tempos de execução e os melhores limitantes inferiores e superiores obtidos. Resolva as mesmas instâncias utilizando o modelo do 2TSP, anotando os tempos de execução e os melhores limitantes inferiores e superiores obtidos. Você deve limitar o tempo de execução em 30 minutos para ambas as metodologias.

3.6 Entrega

A atividade exige a entrega do código-fonte e de um relatório (até 5 páginas) contendo:

- Modelo matemático: apresente o modelo de relaxação Lagrangiana para o 2TSP.
- Método do subgradiente: apresente o pseudo-código de sua implementação do método do subgradiente.
- Heurística Lagrangiana: apresente o pseudo-código de sua implementação da heurística Lagrangiana.
- Resultado: tabela de resultados contendo, para cada instância: limitantes inferiores e superiores e tempo de execução para o método do subgradiente com a heurística Lagrangiana. Limitantes inferiores e superiores e tempo de execução para a resolução do problema 2TSP utilizando o modelo de programação linear inteira.
- Análise: avalie os resultados quanto aos limitantes obtidos e os tempos computacionais.

4 Referências

1. Exemplo de código Gurobi para resolver o TSP:

https://www.gurobi.com/documentation/9.0/examples/tsp_java.html#subsubsection:Tsp.java