		Fixed Point	`fsolve`	Difference
$\kappa = -1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 8	0,043 8	
	$\mathcal{J}_c$	0,001 1	0,001 1	
	`Iter` (`funcEval`)	670 (670)	38 (31 959)	
	Time taken (s)	$2{,}493\,9 \cdot 10^{+2}$	$9{,}154\,6 \cdot 10^{+3}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			$1{,}134\,8 \cdot 10^{-3}$
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			$7{,}274\,2 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			$7{,}672\,5 \cdot 10^{-2}$
$\kappa = 1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 4	0,043 4	
	$\mathcal{J}_c$	0,002 0	0,002 0	
	`Iter` (`funcEval`)	654 (654)	38 (34 239)	
	Time taken (s)	$3{,}379\,4 \cdot 10^{+2}$	$1{,}016\,7 \cdot 10^{+4}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			$3{,}061\,0 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			$4{,}870\,1 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			$8{,}905\,6 \cdot 10^{-3}$

Table 1: Comparison of the outputs of the fixed point method, with those obtained using `fsolve`.

testdocument for random tests

		Fixed Point	`fsolve`	Difference
$\kappa = -1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 8	0,043 8	
	$\mathcal{J}_c$	0,001 1	0,001 1	
	`Iter`	670	38 (31 959)	
	Time taken (s)	$2{,}4939 \cdot 10^{+2}$	$9{,}1546 \cdot 10^{+3}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			0,001 1
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			0,000 1
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			0,076 7
$\kappa = 1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 4	0,043 4	
	$\mathcal{J}_c$	0,002 0	0,002 0	
	`Iter`	654	38 (34 239)	
	Time taken (s)	$3{,}3794 \cdot 10^{+2}$	$1{,}0167 \cdot 10^{+4}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			0,000 3
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			0,000 0
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			0,008 9

Table 2: Comparison of the outputs of the fixed point method, with those obtained using `fsolve`.

		Fixed Point	`fsolve`	Difference
$\kappa = -1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 8	0,043 8	
	$\mathcal{J}_c$	0,001 1	0,001 1	
	`Iter`	670	38 (31 959)	
	Time taken (s)	$2{,}4939 \cdot 10^{+2}$	$9{,}1546 \cdot 10^{+3}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			$1{,}1348 \cdot 10^{-3}$
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			$7{,}2742 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			$7{,}6725 \cdot 10^{-2}$
$\kappa = 1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 4	0,043 4	
	$\mathcal{J}_c$	0,002 0	0,002 0	
	`Iter`	654	38 (34 239)	
	Time taken (s)	$3{,}3794 \cdot 10^{+2}$	$1{,}0167 \cdot 10^{+4}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			$3{,}0610 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			$4{,}8701 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			$8{,}9056 \cdot 10^{-3}$

Table 3: Comparison of the outputs of the fixed point method, with those obtained using `fsolve`.

		$\beta = 10^{-3}$	$\beta = 10^{-1}$	$\beta = 10^{1}$	$\beta = 10^{3}$
$\kappa = -1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 8	0,043 8	0,043 8	0,043 8
	$\mathcal{J}_c$	0,001 1	0,026 7	0,043 5	0,043 8
	Iter	670	650	449	1
$\kappa = 0$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,041 7	0,041 7	0,041 7	0,041 7
	$\mathcal{J}_c$	0,001 4	0,028 3	0,041 5	0,041 7
	Iter	665	656	434	1
$\kappa = 1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 4	0,043 4	0,043 4	0,043 4
	$\mathcal{J}_c$	0,002 0	0,032 2	0,043 2	0,043 4
	Iter	654	682	422	1

Table 4: Example 1: Cost $\mathcal{J}_{uc}$ of applying no control (i.e., $\vec{w} = \vec{0}$), optimal control cost $\mathcal{J}_c$, and number of iterations (PDE solves) *Iter* required, for a range of values of the interaction strength κ and regularization parameter β.

		$\beta = 10^{-3}$	$\beta = 10^{-1}$	$\beta = 10^{1}$	$\beta = 10^{3}$
$\kappa = -1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 75	0,043 75	0,043 75	0,043 75
	$\mathcal{J}_c$	0,001 086	0,026 68	0,043 48	0,043 75
	Iter	670	650	449	1
$\kappa = 0$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,041 67	0,041 67	0,041 67	0,041 67
	$\mathcal{J}_c$	0,001 447	0,028 27	0,041 47	0,041 67
	Iter	665	656	434	1
$\kappa = 1$	$\mathcal{J}_{uc}$	0,043 36	0,043 36	0,043 36	0,043 36
	$\mathcal{J}_c$	0,002 03	0,032 23	0,043 21	0,043 37
	Iter	654	682	422	1

Table 5: Example 1: Cost $\mathcal{J}_{uc}$ of applying no control (i.e., $\vec{w} = \vec{0}$), optimal control cost $\mathcal{J}_c$, and number of iterations (PDE solves) *Iter* required, for a range of values of the interaction strength κ and regularization parameter β.

		$\beta = 10^{-3}$	$\beta = 10^{-1}$	$\beta = 10^{1}$	$\beta = 10^{3}$
N =20, n =10	$\mathcal{E}_\rho$	$3{,}831\,7 \cdot 10^{-8}$	$1{,}906\,9 \cdot 10^{-8}$	$1{,}379\,6 \cdot 10^{-8}$	$1{,}355\,3 \cdot 10^{-8}$
	$\mathcal{E}_q$	$2{,}538\,0 \cdot 10^{-8}$	$2{,}367\,2 \cdot 10^{-8}$	$4{,}646\,4 \cdot 10^{-8}$	$4{,}399\,0 \cdot 10^{-8}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}}$	$4{,}119\,1 \cdot 10^{-6}$	$1{,}337\,7 \cdot 10^{-7}$	$4{,}177\,1 \cdot 10^{-8}$	$3{,}921\,3 \cdot 10^{-8}$
N =30, n =20	$\mathcal{E}_\rho$	$3{,}920\,6 \cdot 10^{-8}$	$1{,}902\,3 \cdot 10^{-8}$	$1{,}401\,9 \cdot 10^{-8}$	$1{,}386\,3 \cdot 10^{-8}$
	$\mathcal{E}_q$	$3{,}933\,7 \cdot 10^{-8}$	$1{,}943\,6 \cdot 10^{-8}$	$1{,}335\,5 \cdot 10^{-8}$	$2{,}332\,7 \cdot 10^{-8}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}}$	$6{,}464\,1 \cdot 10^{-6}$	$1{,}782\,3 \cdot 10^{-7}$	$2{,}025\,6 \cdot 10^{-8}$	$1{,}986\,6 \cdot 10^{-8}$
N =40, n =30	$\mathcal{E}_\rho$	$3{,}806\,9 \cdot 10^{-8}$	$1{,}908\,5 \cdot 10^{-8}$	$1{,}484\,4 \cdot 10^{-8}$	$1{,}470\,0 \cdot 10^{-8}$
	$\mathcal{E}_q$	$3{,}639\,8 \cdot 10^{-8}$	$1{,}981\,3 \cdot 10^{-8}$	$1{,}527\,5 \cdot 10^{-8}$	$2{,}845\,2 \cdot 10^{-8}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}}$	$5{,}951\,0 \cdot 10^{-6}$	$2{,}153\,1 \cdot 10^{-7}$	$2{,}313\,9 \cdot 10^{-8}$	$2{,}582\,0 \cdot 10^{-8}$

Table 6: Test Problem 1: Error measures for state ρ, adjoint q, and control $\vec{w}$, for a range of N, n, and β.

		Fixed Point	`fsolve`	Difference
$\kappa = -1$	$\mathcal{J}_{FW}$	$4{,}375\,1 \cdot 10^{-2}$	$4{,}375\,1 \cdot 10^{-2}$	
	$\mathcal{J}_{Opt}$	$1{,}085\,6 \cdot 10^{-3}$	$1{,}085\,7 \cdot 10^{-3}$	
	`Iter`	670	38	
	Time taken (s)	$2{,}493\,9 \cdot 10^{+2}$	$9{,}154\,6 \cdot 10^{+3}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			$1{,}134\,8 \cdot 10^{-3}$
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			$7{,}274\,2 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			$7{,}672\,5 \cdot 10^{-2}$
$\kappa = 1$	$\mathcal{J}_{FW}$	$4{,}336\,5 \cdot 10^{-2}$	$4{,}336\,5 \cdot 10^{-2}$	
	$\mathcal{J}_{Opt}$	$2{,}029\,9 \cdot 10^{-3}$	$2{,}030\,0 \cdot 10^{-3}$	
	`Iter`	654	38	
	Time taken (s)	$3{,}379\,4 \cdot 10^{+2}$	$1{,}016\,7 \cdot 10^{+4}$	
	$\mathcal{E}_{\rho_{Diff}}$			$3{,}061\,0 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{E}_{q_{Diff}}$			$4{,}870\,1 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{Diff}}$			$8{,}905\,6 \cdot 10^{-3}$

Table 7: Comparison of the outputs of the fixed point method, with those obtained using `fsolve`.

		$\beta = 10^{-3}$	$\beta = 10^{-1}$	$\beta = 10^{1}$	$\beta = 10^{3}$
$0.1\tilde{g}(t)$	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{uc}}$	$1{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$	$1{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$	$1{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$	$1{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_c}$	$5{,}377\,0 \cdot 10^{-5}$	$5{,}234\,0 \cdot 10^{-5}$	$5{,}220\,1 \cdot 10^{-5}$	$5{,}220\,3 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_\rho$	$1{,}139\,6 \cdot 10^{-5}$	$7{,}859\,7 \cdot 10^{-5}$	$7{,}859\,5 \cdot 10^{-5}$	$7{,}859\,7 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_q$	$2{,}785\,4 \cdot 10^{-5}$	$2{,}783\,6 \cdot 10^{-4}$	$5{,}704\,3 \cdot 10^{-4}$	$5{,}704\,5 \cdot 10^{-4}$
$0.5\tilde{g}(t)$	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{uc}}$	$5{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$	$5{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$	$5{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$	$5{,}000\,0 \cdot 10^{-1}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_c}$	$2{,}197\,0 \cdot 10^{-4}$	$2{,}174\,7 \cdot 10^{-4}$	$2{,}173\,5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}173\,5 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{E}_\rho$	$2{,}425\,6 \cdot 10^{-5}$	$2{,}287\,8 \cdot 10^{-4}$	$2{,}287\,8 \cdot 10^{-4}$	$2{,}287\,9 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{E}_q$	$3{,}324\,7 \cdot 10^{-5}$	$3{,}322\,7 \cdot 10^{-4}$	$6{,}808\,8 \cdot 10^{-4}$	$6{,}809\,0 \cdot 10^{-4}$
$0.1\tilde{h}(x)$	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{uc}}$	$8{,}556\,8 \cdot 10^{-2}$	$8{,}556\,8 \cdot 10^{-2}$	$8{,}556\,8 \cdot 10^{-2}$	$8{,}556\,8 \cdot 10^{-2}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_c}$	$5{,}370\,0 \cdot 10^{-5}$	$5{,}225\,0 \cdot 10^{-5}$	$5{,}210\,0 \cdot 10^{-5}$	$5{,}210\,3 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_\rho$	$1{,}170\,4 \cdot 10^{-5}$	$7{,}797\,3 \cdot 10^{-5}$	$7{,}796\,9 \cdot 10^{-5}$	$7{,}796\,8 \cdot 10^{-5}$
	$\mathcal{E}_q$	$2{,}642\,6 \cdot 10^{-5}$	$2{,}638\,7 \cdot 10^{-4}$	$5{,}698\,2 \cdot 10^{-4}$	$5{,}698\,4 \cdot 10^{-4}$
$0.5\tilde{h}(x)$	$\mathcal{E}_{\vec{w}_{uc}}$	$4{,}278\,4 \cdot 10^{-1}$	$4{,}278\,4 \cdot 10^{-1}$	$4{,}278\,4 \cdot 10^{-1}$	$4{,}278\,4 \cdot 10^{-1}$
	$\mathcal{E}_{\vec{w}_c}$	$2{,}120\,3 \cdot 10^{-4}$	$2{,}098\,2 \cdot 10^{-4}$	$2{,}096\,7 \cdot 10^{-4}$	$2{,}096\,8 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{E}_\rho$	$2{,}256\,5 \cdot 10^{-5}$	$2{,}127\,5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}127\,4 \cdot 10^{-4}$	$2{,}127\,5 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{E}_q$	$3{,}022\,5 \cdot 10^{-5}$	$3{,}021\,9 \cdot 10^{-4}$	$6{,}192\,0 \cdot 10^{-4}$	$6{,}192\,3 \cdot 10^{-4}$

Table 8: Test Problem 2: Error measures for $\vec{w}_{uc}$, $\vec{w}_c$, ρ, and q, for four perturbation strategies for $\vec{w}$, and a range of β.