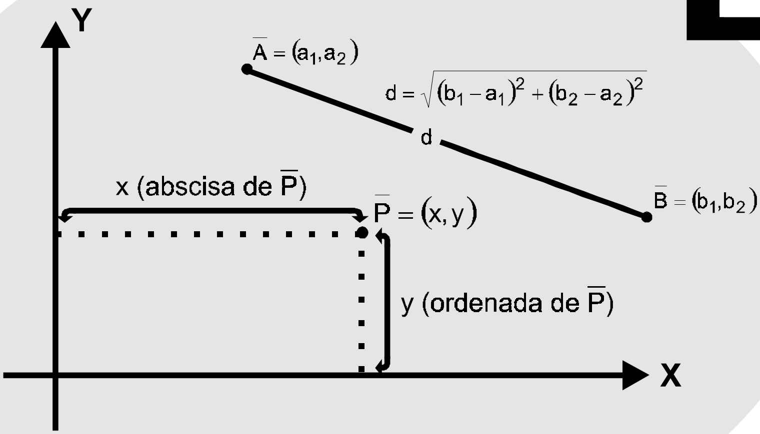
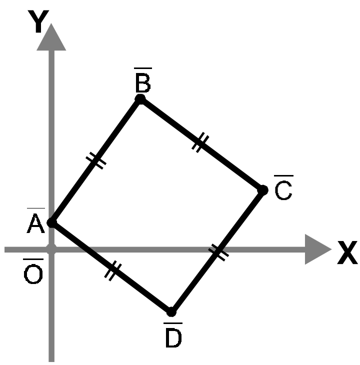
Capítulo 1



SISTEMA DE COORDENADAS

1 Demostrar que los puntos $\overline{A} = (0,1)$ y $\overline{B} = (3,5)$; $\overline{C} = (7,2)$ y $\overline{D} = (4,-2)$ son los vértices de un cuadrado.

Solución:



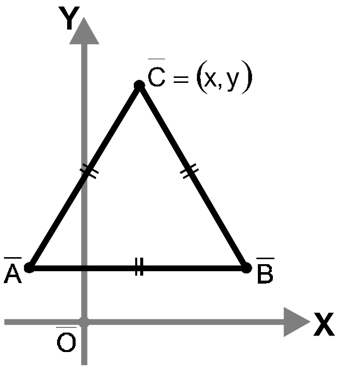
- $|AB| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $|BC| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- $|AD| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $|CD| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Como : $|AB| = |BC| = |AD| = |CD| = 5$

ˆ ABCD es un cuadrado. LQQD

2 Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $\overline{A}=(-1,1)$ y $\overline{B}=(3,1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos casos).

Solución:



Sea $\overline{C}=(x,y)$ el tercer vértice.

∘ $|BC|=|AC|$

➡ $\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=$

$=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} \longrightarrow$ ①

∘ $|BC|=|AB|$

➡ $\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{16} \longrightarrow$ ②

De ① y ②: $\begin{cases} x=1 \\ y=1\pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

ˆ $\boxed{\overline{C}=\left(1,1\pm 2\sqrt{3}\right)}$

3 Dados los puntos $\overline{P_1}=(2,-3)$ y $\overline{P_2}=(-1,2)$ encontrar sobre $\overline{P_1P_2}$ el punto que diste doble de $\overline{P_1}$ que $\overline{P_2}$.

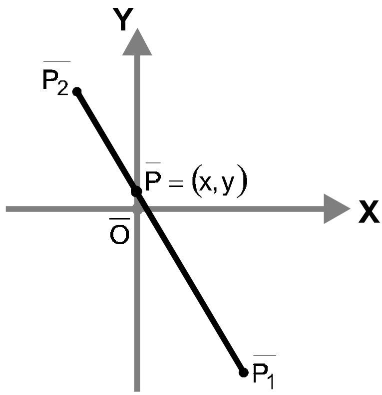
Solución:

Sea $\overline{P}=(x,y)$ el punto pedido.

➡ $r=\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{P_2P}}=\dfrac{2}{1}=2$

∘ $x=\dfrac{x_1+r\,x_2}{1+r}=\dfrac{2+2(-1)}{1+2}=$

$=\dfrac{2-2}{3}=\dfrac{0}{3}=0$ ➡ $x=0$



○ $y = \dfrac{y_1 + r y_2}{1+r} = \dfrac{-3+2(2)}{1+2} = \dfrac{-3+4}{3} = \dfrac{1}{3}$ ➡ $y = \dfrac{1}{3}$

ˆ $\boxed{\overline{P} = (x,y) = \left(0, \dfrac{1}{3}\right)}$

4 El lado de un rombo es igual a $5\sqrt{10}$ y dos de sus vértices opuestos son los puntos $\overline{P} = (4,9)$ y $\overline{Q} = (-2,1)$. Calcular el área de este rombo.

Solución:

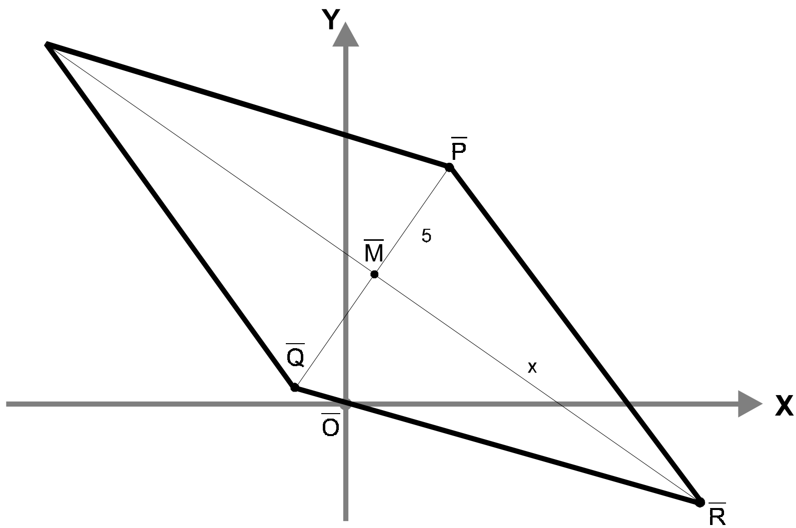
$\left|PQ\right| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

◺ PMR:

○ $x^2 = \left(5\sqrt{10}\right)^2 - 5^2 = 250 - 25$ ➡ $x^2 = 225$ ➡ $x = 15$

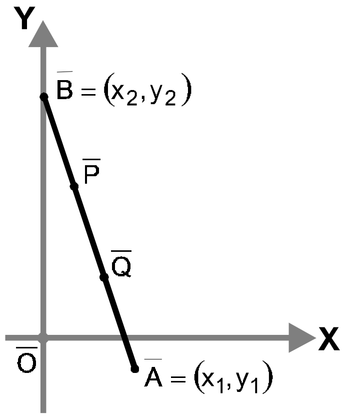
Luego:

$A = \dfrac{D \times d}{2} = \dfrac{30 \times 10}{2} = 150$ ➡ $\boxed{A = 150\ m^2}$



5 Determinar las coordenadas de los extremos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos $\overline{P} = (2,2)$ y $\overline{Q} = (1,5)$.

Solución:



◦ Cálculo de $\overline{A} = (x_1, y_1)$:

$\Rightarrow$ $r = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{1 + x_1}{2} & \Rightarrow \quad x_1 = 3 \\[2ex] 2 = \dfrac{y_1 + 5}{2} & \Rightarrow \quad y_1 = -1 \end{cases}$$

ˆ $\boxed{\overline{A} = (3, -1)}$

◦ Cálculo de $\overline{B} = (x_2, y_2)$:

$$\Rightarrow \quad r = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{2 + x_2}{2} & \Rightarrow \quad x_2 = 0 \\[2ex] 5 = \dfrac{2 + y_2}{2} & \Rightarrow \quad y_2 = 8 \end{cases}$$

ˆ $\boxed{\overline{B} = (0, 8)}$

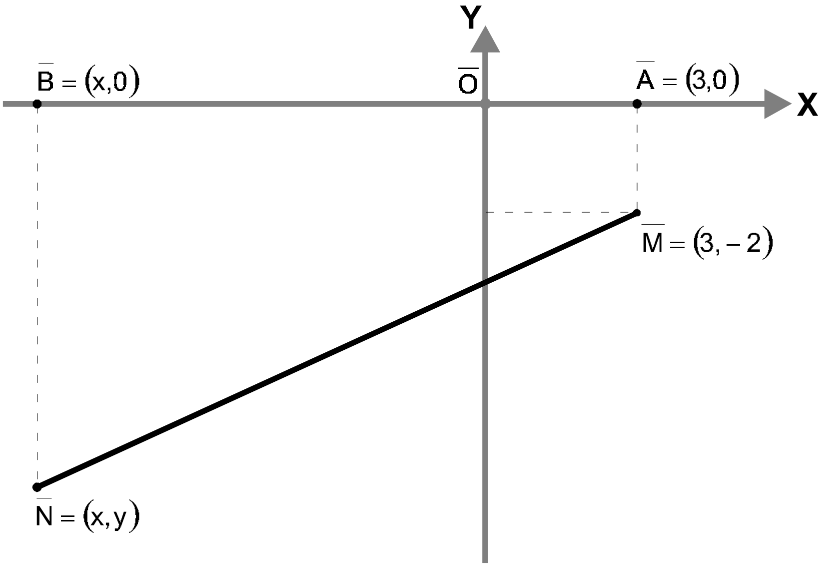
6 La longitud del segmento $\overline{MN}$ es igual a 13; su origen está en el punto $\overline{M} = (3, -2)$; la proyección sobre el eje de abscisas es igual a -12. Hallar las coordenadas del otro extremo del segmento, si forma con el eje de ordenadas un ángulo dado.

Solución:

- Si $\overline{AB} = -12$ ➨ $x - 3 = -12$ ➨ $x = -9$

- Si $\overline{MN} = 13$ ➨ $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 13$ ➨ $y = -7$

ˆ $\boxed{\overline{N} = (x, y) = (-9, -7)}$



7 Tres de los vértices de un paralelogramo son $\overline{A} = (-1,4)$, $\overline{B} = (1,-1)$ y $\overline{C} = (6,1)$. Si la ordenada del cuarto vértice es 6. ¿Cuál es su abscisa?

Solución:

Sea $\overline{D} = (x,6)$ el punto pedido.

- $|AD| = |BC|$ ➨ $\sqrt{(x+1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (1+1)^2}$

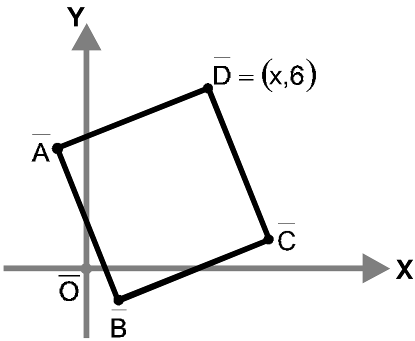
Efectuando operaciones:

- $x^2 + 2x - 24 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ \cancel{x_2 = -6} \end{cases}$$

Luego :

- $\overline{D} = (x,6) \Rightarrow \boxed{\overline{D} = (4,6)}$



8 El punto medio de cierto segmento es el punto $\overline{M} = (-1,2)$ y uno de sus extremos es el punto $\overline{N} = (2,5)$. Hallar las coordenadas del otro extremo.

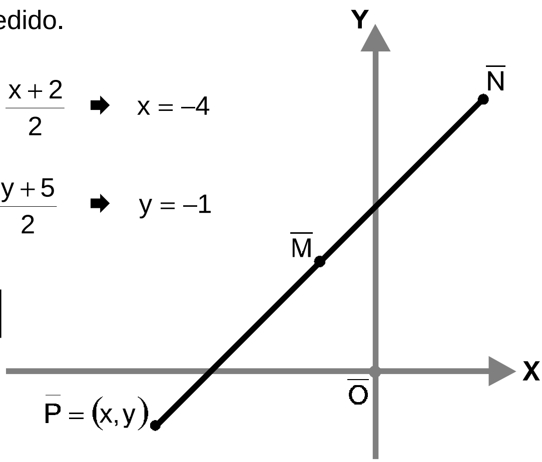
Solución:

Sea $\overline{P} = (x,y)$ el punto pedido.

- $x_M = \dfrac{x + x_N}{2} \Rightarrow -1 = \dfrac{x+2}{2} \Rightarrow x = -4$

- $y_M = \dfrac{y + y_N}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{y+5}{2} \Rightarrow y = -1$

$\therefore$ $\boxed{\overline{P} = (x,y) = (-4,-1)}$



9 Los vértices de un triángulo ABC son $\overline{A} = (2,-1)$, $\overline{B} = (-4,7)$ y $\overline{C} = (8,0)$. Calcular las coordenadas del baricentro de dicho triángulo.

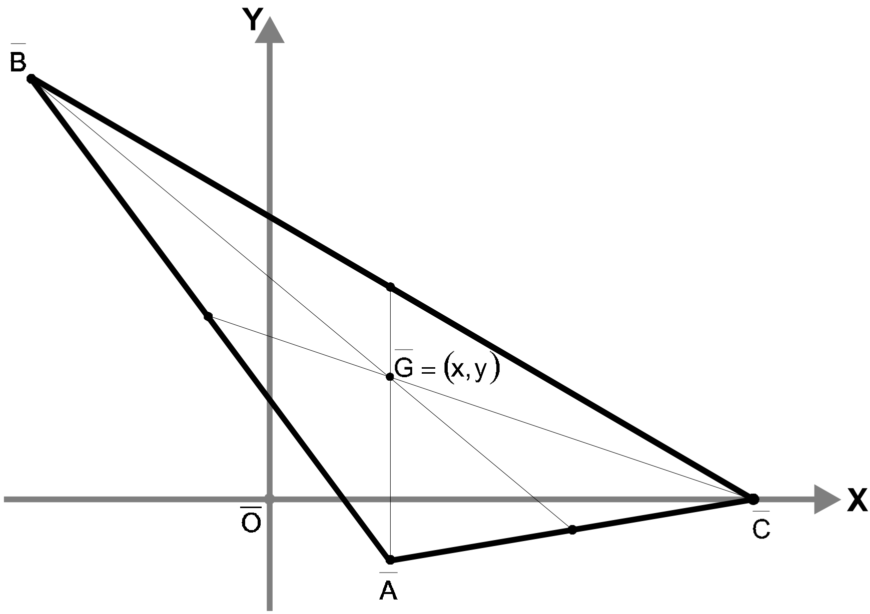
Solución:

Sabemos que :

- $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ ➡ $x = \dfrac{2 - 4 + 8}{3}$ ➡ $x = \dfrac{6}{3} = 2$

- $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ ➡ $y = \dfrac{-1 + 7 + 0}{3}$ ➡ $y = \dfrac{6}{3} = 2$

^ $\boxed{\overline{G} = (x, y) = (2, 2)}$



10 ¿Hasta qué punto debe prolongarse el segmento que une los puntos $\overline{A} = (1, -1)$ y $\overline{B} = (4, 5)$ en la dirección AB, para que su longitud se triplique?

Solución:

Sea $\overline{P} = (x, y)$ el punto pedido.

- Sabemos: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \dfrac{1}{2}$ ➡ $\overline{BP} = 2\overline{AB}$

➡ $\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} = 2\sqrt{(4-1)^2+(5+1)^2}$

Efectuando operaciones :

➡ $x^2+y^2-8x-10y-139=0 \longrightarrow$ ①

◦ También: $\left|AB\right|+\left|BP\right|=\left|AP\right|$

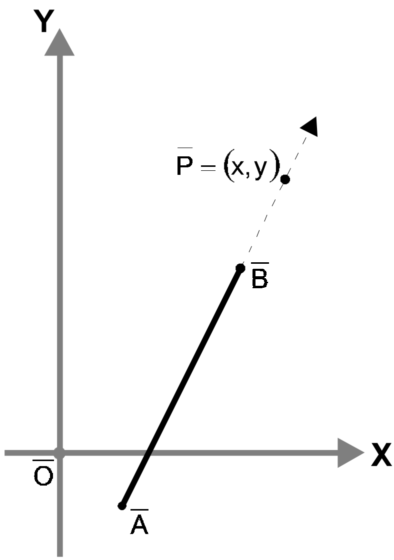
➡ $\sqrt{(4-1)^2+(5+1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$

Efectuando operaciones :

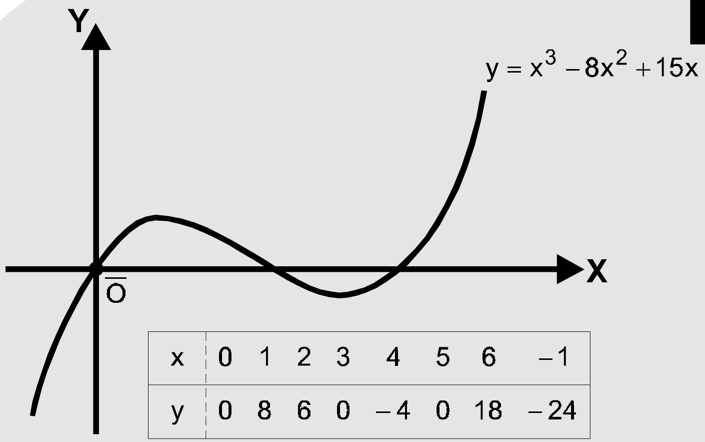
➡ $x^2+y^2-8x-10y+14=0 \longrightarrow$ ②

De ① y ②: $\begin{cases} x_1 = 10\,; & y_1 = 17 \\ \cancel{x_2 = -2}\,; & \cancel{y_2 = -7} \end{cases}$

ˆ $\boxed{\overline{P}=(x,y)=(10,17)}$



Capítulo 2



x	0	1	2	3	4	5	6	−1
y	0	8	6	0	−4	0	18	−24

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Discutir y graficar las curvas, cuyas ecuaciones son:

11 $16x^2 - y = 0$

Solución:

$$E(x,y): \quad 16x^2 - y = 0 \quad \longrightarrow \quad ①$$

1º. Intercepciones con los ejes:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Eje X}: & y = 0 & \Rightarrow 16x^2 = 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ \text{Eje Y}: & x = 0 & \Rightarrow y = 0 & & \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{O} = (0,0)$$

2º. Simetría:

$$\left.\begin{array}{lccc} \text{Eje } X: & E(x,-y) & \neq & E(x,y) \\ \text{Eje } Y: & E(-x,y) & = & E(x,y) \\ \text{Origen}: & E(-x,-y) & \neq & E(x,y) \end{array}\right\} \quad \text{Curva simétrica sólo con el eje } X$$

3º. Extensión:

De ①: $y = 16x^2$; $\forall\ x \in$ ú

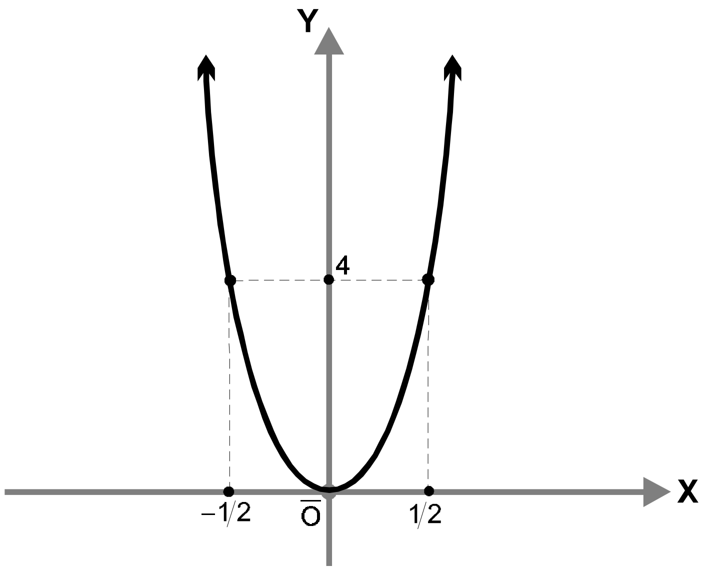
4º. Asíntotas:

No tiene asíntotas, ni horizontales ni verticales.

5º. Cuadro de valores:

x	0	1	-1	$1/2$	$-1/2$	...
y	0	16	16	4	4	...

6º. Gráfico:



12 $xy - 2x - 1 = 0$

Solución:

$E(x,y): \quad xy - 2x - 1 = 0 \longrightarrow$ ①

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X : $y = 0$ ➡ $x = -1/2; \quad \bar{A} = (-1/2, 0)$

Eje Y : $x = 0$ ➡ ò intercepción con el eje X

2º. Simetría:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Eje } X: & E(x,-y) \neq E(x,y) \\ \text{Eje } Y: & E(-x,y) \neq E(x,y) \\ \text{Origen}: & E(-x,-y) \neq E(x,y) \end{array}\right\} \quad \text{Curva no simétrica ni con los ejes ni con el origen}$$

3º. Extensión:

De ①:

$xy - 2x - 1 = 0$ ➡ $y = \dfrac{1+2x}{x}; \quad \forall\, x \neq 0$

4º. Asíntotas:

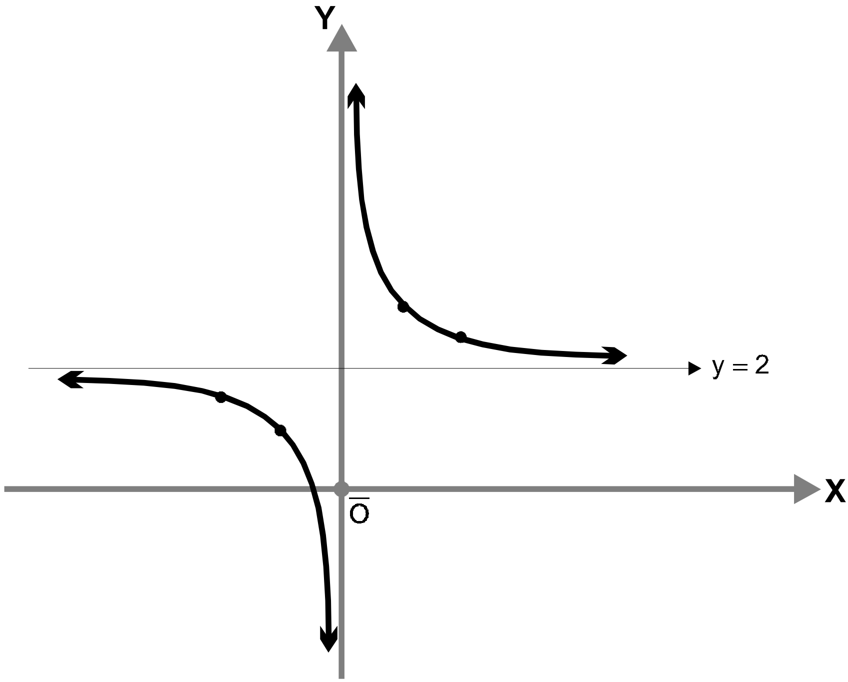
De ①:

- $y = \dfrac{1+2x}{x}$ ➡ $x = 0$
- $x = \dfrac{1}{y-2}; \quad y - 2 = 0$ ➡ $y = 2$

5º. Cuadro de valores:

x	1	2	−1	−2	...
y	3	5/2	1	3/2	...

6º. Gráfico:



13 $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$

Solución:

$$E(x,y): \quad x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad ①$$

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X: $y = 0$ ➡ $x = -1.6; \quad \overline{A} = (-1.6, 0)$

Eje Y: $x = 0$ ➡ $y = 2; \quad \overline{B} = (0, 2)$

2º. Simetría:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Eje X}: & E(x,-y) \neq E(x,y) \\ \text{Eje Y}: & E(-x,y) \neq E(x,y) \\ \text{Origen}: & E(-x,-y) \neq E(x,y) \end{array}\right\}$$

Curva no simétrica ni con los ejes ni con el origen

3º. Extensión:

De ①:

$y = 2 \pm \sqrt{-x^3}; \quad \forall\ x \leq 0$

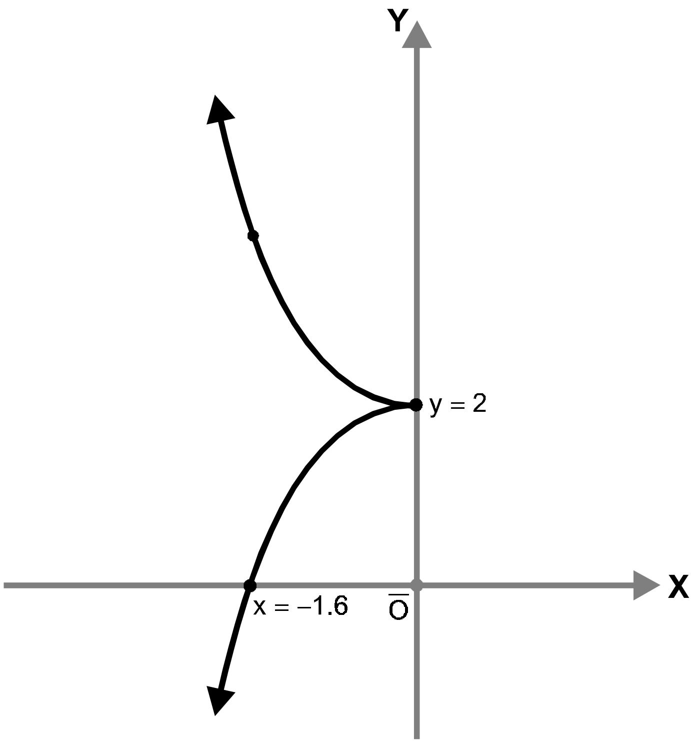
4º. Asíntotas:

No tiene asíntotas, ni horizontales ni verticales.

5º. Cuadro de valores:

x	0	$-8/5$	-1	-2	...
y	2	0	$13/10$	$24/5, -4/5$	...

6º. Gráfico:



14 $y^2 = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

Solución:

$$E(x,y):\quad y^2 = \frac{x^2-1}{x^2-4} \longrightarrow ①$$

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X: $\quad y = 0 \;➡\; x = \pm 1; \quad \overline{A} = (\pm 1, 0)$

Eje Y: $\quad x = 0 \;➡\; y = \pm 1/2; \quad \overline{B} = (0, \pm 1/2)$

2º. Simetría:

Curva simétrica con los ejes y con el origen.

3º. Extensión:

De ①:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}} \qquad \forall\, x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup [-1,1] \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

4º. Asíntotas:

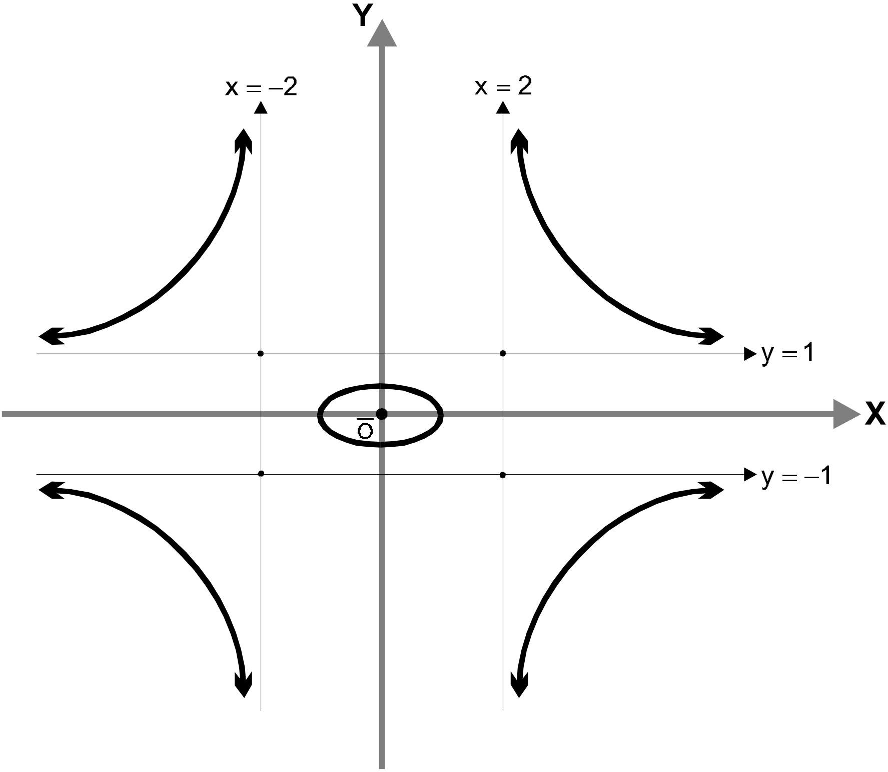
De ①:

- $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4}}$ ➡ $\sqrt{x^2-4} = 0$ ➡ $x = \pm 2$
- $x = \pm\sqrt{\dfrac{4y^2-1}{y^2-1}}$ ➡ $\sqrt{y^2-1} = 0$ ➡ $y = \pm 1$

5º. Cuadro de valores:

x	1	-1	0	± 3	± 4	$\pm 1/2$	...
y	0	0	$\pm 1/2$	$\pm 1/3$	$\pm 11/10$	$\pm 24/5$	...

6º. Gráfico:



15 $y\left(x^2+1\right)=4$

Solución:

$E(x,y):\quad y\left(x^2+1\right)=4 \quad \longrightarrow \quad ①$

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X : $y=0$ ➡ ò intercepción con el eje X

Eje Y : $x=0$ ➡ $y=4;\quad \overline{A}=(0,4)$

2º. Simetría:

Curva simétrica sólo con el eje Y.

3º. Extensión:

De ①:

$y = \dfrac{4}{x^2+1}$ ➡ $x^2+1=0;$ $\forall\, x \in$ ú

4º. Asíntotas:

De ①:

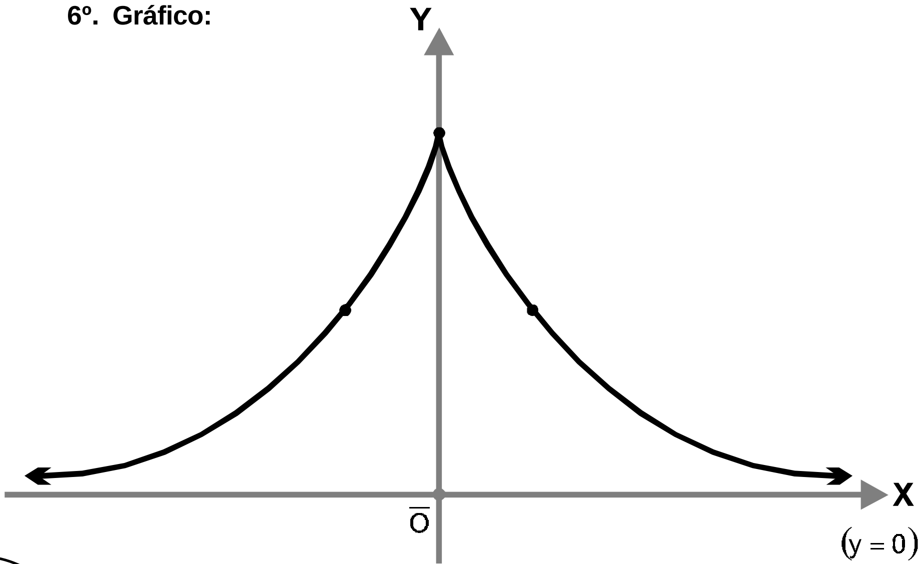
◦ $y = \dfrac{4}{x^2+1}$ ➡ $x^2+1=0$ ➡ $x \notin$ ú

◦ $x = \pm\sqrt{\dfrac{4-y}{y}}$ ➡ $\sqrt{y}=0$ ➡ $y=0$ (Eje X)

5º. Cuadro de valores:

x	0	± 1	± 2	± 3	...
y	4	2	$4/5$	$2/5$	...

6º. Gráfico:



16 Una recta pasa por los dos puntos $\overline{A}=(-2,-3)$ y $\overline{B}=(4,1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta. ¿Cuál es su ordenada?

Solución:

Sea $\overline{C}=(10,y)$ el punto pedido.

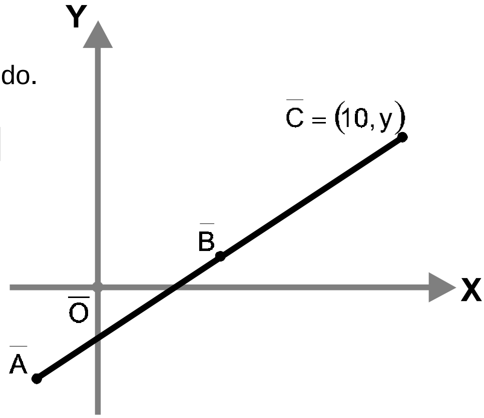
Dado que : $|AB|+|BC|=|AC|$

➡ $\sqrt{36+16}+\sqrt{36+(y-1)^2}=$

$=\sqrt{(10+2)^2+(y+3)^2}$

Efectuando operaciones :

➡ $\boxed{y=5}$



17 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $\overline{A}=(2,-2)$ y $\overline{B}=(4,1)$ es siempre igual a 12.

Solución:

Sea $\overline{P}=(x,y)$ el punto pedido.

Entonces de la condición del problema tenemos :

∘ $|BP|^2-|AP|^2=12$

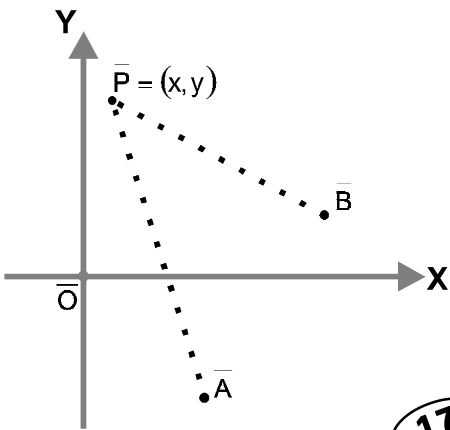
De donde :

➡ $\left(\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}\right)^2-$

$-\left(\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}\right)^2=12$

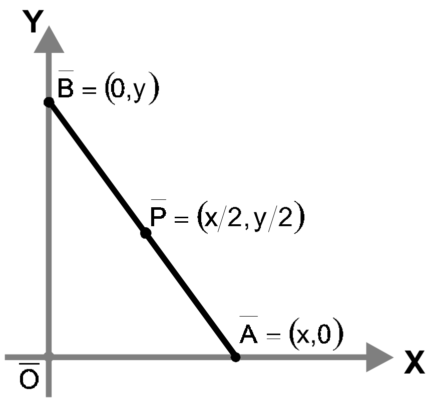
Luego, efectuando operaciones :

➡ $\boxed{4x+6y+3=0}$



18 Un segmento rectilíneo de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje X y el otro permanece siempre sobre el eje Y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento.

Solución:



De la condición :

∘ $|PA|+|PB|=4$

➡ $\sqrt{(x-x/2)^2+(-y/2)^2}+$

$+\sqrt{(x/2)^2+(y/2-y)^2}=4$

Efectuando operaciones :

➡ $\boxed{x^2+y^2=16}$

19 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $\overline{P}=(x,y)$, tal que la distancia de $\overline{P}$ al punto $\overline{A}=(0,6)$ es igual a la mitad de la distancia de $\overline{P}$ al eje X.

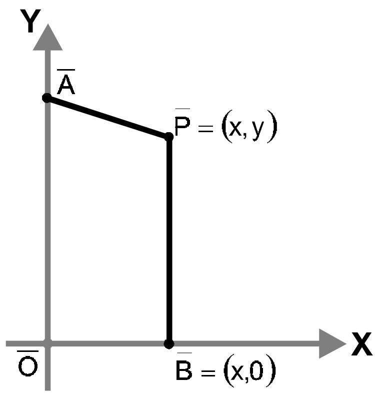
Solución:

De la condición :

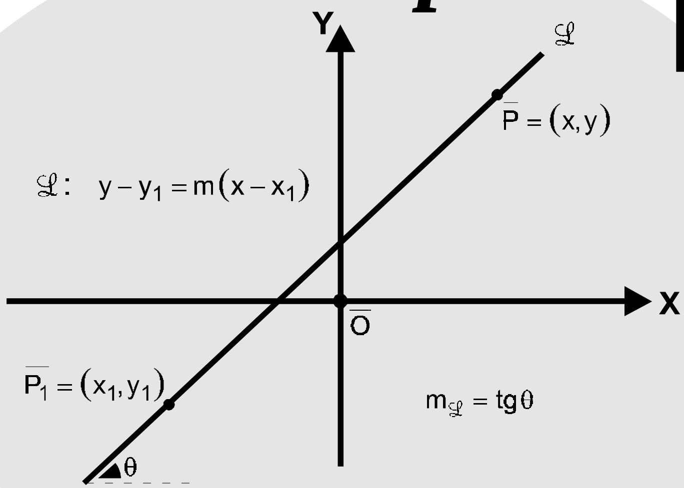
∘ $|AP|=\frac{1}{2}y$ ➡ $\sqrt{x^2+(y-6)^2}=\frac{1}{2}y$

Luego, efectuando operaciones :

➡ $\boxed{4x^2+3y^2-48y+144=0}$



Capítulo 3



LA LÍNEA RECTA

20 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $\overline{A}=(4,2)$ y $\overline{B}=(-5,7)$.

Solución:

Sea $\mathscr{L}$ la recta buscada.

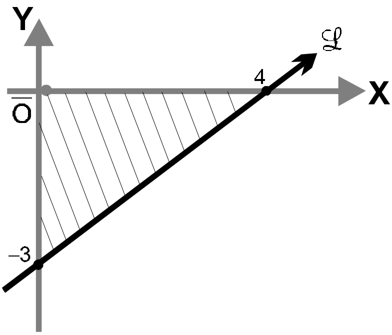
Dado que se conocen dos puntos de la recta, se puede conocer su pendiente.

$$\mathscr{L}:\ \begin{cases}\overline{A}=(4,2)\\ \overline{B}=(-5,7)\end{cases} \Rightarrow\ m_{\mathscr{L}}=m_{\overline{AB}}=\frac{7-2}{-5-4}=-\frac{5}{9}$$

$$\therefore\quad \mathscr{L}:\ y-2=-\frac{5}{9}(x-4)\ \Leftrightarrow\ \boxed{\mathscr{L}:\ 5x+9y-38=0}$$

21 Calcular el área del triángulo que forma la recta $3x - 4y - 12 = 0$ con los ejes coordenados.

Solución:



◦ ‹ : $3x - 4y - 12 = 0$

Luego :

◦ ‹ : $3x - 4y = 12$

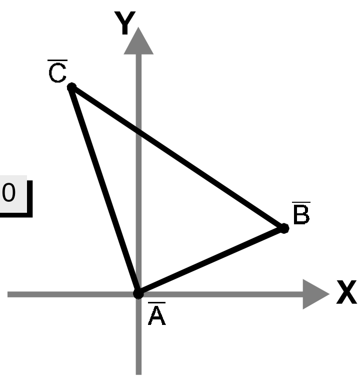
Dividiendo $\times 2$:

◦ ‹ : $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$ ➨ $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$

ˆ $A_{\Delta} = \frac{|4 \times (-3)|}{2} = \frac{12}{2}$ ⬌ $\boxed{A_{\Delta} = 6u^2}$

22 Los vértices de un triángulo son $\overline{A} = (0{,}0)$, $\overline{B} = (4{,}2)$ y $\overline{C} = (-2{,}6)$. Obtener las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del triángulo.

Solución:



◦ Ecuación de $\overline{AB}$:

$\overline{AB}$: $\begin{cases} \overline{A} = (0{,}0) \\ \overline{B} = (4{,}2) \end{cases}$ ➨ $m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{2}$

ˆ $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$ ⬌ $\boxed{x - 2y = 0}$

◦ Ecuación de $\overline{BC}$:

$\overline{BC}$: $\begin{cases} \overline{B} = (4{,}2) \\ \overline{C} = (-2{,}6) \end{cases}$ ➨ $m_{\overline{BC}} = -\frac{2}{3}$

ˆ $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 4)$ ⬌ $\boxed{2x + 3y - 14 = 0}$

- Ecuación de $\overline{AC}$:

$$\overline{AC}: \begin{cases} \overline{A} = (0,0) \\ \overline{B} = (-2,6) \end{cases} \Rightarrow m_{\overline{AC}} = -3$$

ˆ $y - 0 = -3(x-0) \Leftrightarrow \boxed{3x + y = 0}$

23 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $\overline{A} = (4, 8/3)$ y por la intersección de las rectas $3x - 4y - 2 = 0$, $9x - 11y - 6 = 0$

Solución:

‹ : $\begin{cases} \overline{A} = (4, 8/3) & \text{Un punto de la recta} \\ ‹_1: \; 3x - 4y - 2 = 0 \\ ‹_2: \; 9x - 11y - 6 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $‹_1 \cap ‹_2 = \overline{B} = (2/3, 0)$

Luego :

‹ : $y - y_1 = m(x - x_1)$ Donde : $m_‹ = m_{\overline{AB}} = \dfrac{0 - 8/3}{2/3 - 4} = \dfrac{4}{5}$

Finalmente :

‹ : $y - \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{5}(x - 4) \Leftrightarrow$ $\boxed{‹ : \; 12x - 15y - 8 = 0}$

24 Si la recta $ax + by + c = 0$ pasa por el punto $\overline{P} = (p, q)$, escribir una ecuación en forma de:

a) pendiente y ordenada en el origen.

b) punto - pendiente.

c) simétrica.

Solución:

a) ‹ : $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ $\boxed{y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}}$

b) ‹ : $ax+by+c=0$; donde : $m_{‹} = -\dfrac{a}{b}$; $P=(p,q)$

➡ $\boxed{‹ : \; y-q = -\dfrac{a}{b}(x-p)}$

c) ‹ : $ax+by+c=0$ ➡ ‹ : $ax+by=-c$

➡ $\boxed{‹ : \; \dfrac{x}{-\frac{c}{a}} + \dfrac{y}{-\frac{c}{b}} = 1}$

25 Encontrar la ecuación de una recta que tiene intercepciones iguales y que pasa por el punto $\overline{A} = (8,-6)$

Solución:

Sea : ‹ : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1$ Pero : $\overline{A} = (8,-6) \in$ ‹

Luego : $\dfrac{8}{a} + \dfrac{-6}{a} = 1$ ➡ $a = 2$

ˆ ‹ : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 1$ ⬌ $\boxed{‹ : \; x+y-2=0}$

26 Desde el punto $\overline{M_0} = (-2,3)$ se ha dirigido hacia el eje OX un rayo de luz con una inclinación de un ángulo α, se sabe que $tg\alpha = 3$. El rayo se ha reflejado del eje OX. Hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los rayos incidente y reflejado.

Solución:

- Ecuación del rayo incidente :

  pendiente : $m = tg\alpha = 3$

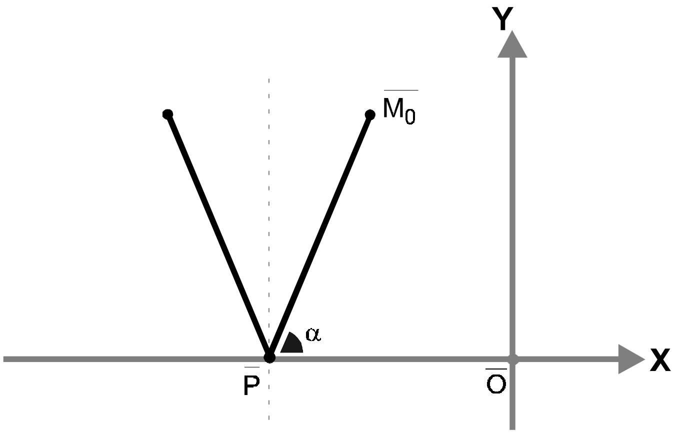
  ➡ $y-3 = 3(x+2)$ ⬌ $\boxed{3x-y+9=0}$

- Ecuación del rayo reflejado :

Si $y = 0 \;\Rightarrow\; x = -3\,;\quad \overline{P_0} = (-3{,}0)$

pendiente : $m = \operatorname{tg}(180^{\circ} - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -3$

$\Rightarrow\; y - 0 = -3(x + 3) \;\Leftrightarrow\; \boxed{3x + y + 9 = 0}$



27 Dados los puntos $\overline{M} = (2{,}2)$ y $\overline{N} = (5,-2)$. Hallar en el eje de abscisas un punto $\overline{P}$ de modo que en el ángulo $\widehat{MPN}$ sea recto.

Solución:

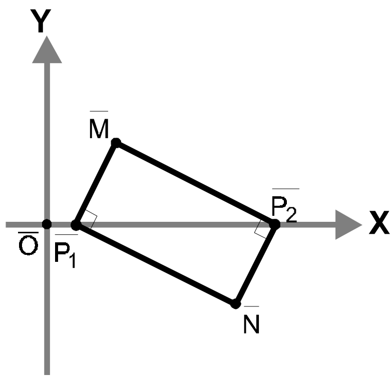
Dado que :

$\overline{MP} \perp \overline{NP} \;\Leftrightarrow\; m_{\overline{MP}} \cdot m_{\overline{NP}} = -1$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{-2}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-5}\right) = -1$$

Efectuando operaciones :

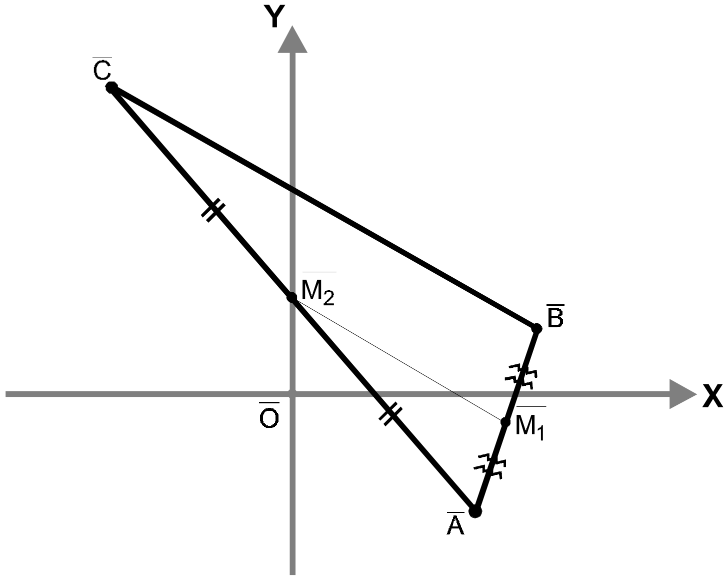
$$x^2 - 7x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



ˆ $\boxed{\overline{P_1} = (6{,}0)\,;\quad \overline{P_2} = (1{,}0)}$

28 Los puntos $\overline{A}=(3,-2)$, $\overline{B}=(4,1)$ y $\overline{C}=(-3,5)$ son los vértices de un triángulo. Demostrar que la recta que pasa por los puntos medios de los lados AB y CD es paralelo a la base BC del triángulo.

Solución:



- Cálculo de $\overline{M_1}=(x_1,y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{7}{2} \\ y_1=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \overline{M_1}=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

- Cálculo de $\overline{M_2}=(x_2,y_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{x_A+x_C}{2}=0 \\ y_2=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \overline{M_2}=\left(0,\frac{3}{2}\right)$$

Sabemos que : $\overline{BC} * \overline{M_1M_2} \Leftrightarrow m_{\overline{BC}} = m_{\overline{M_1M_2}} \Leftrightarrow -\frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$

Luego efectivamente : $\boxed{\overline{BC} * \overline{M_1M_2} \quad \text{LQQD}}$

29 Calcular la distancia entre las rectas paralelas: $x + 2y + 4 = 0$ y $2x + 4y - 5 = 0$

Solución:

Dado que :

$‹_1 : \ x + 2y + 4 = 0 \quad \wedge \quad ‹_2 : \ 2x + 4y - 5 = 0$

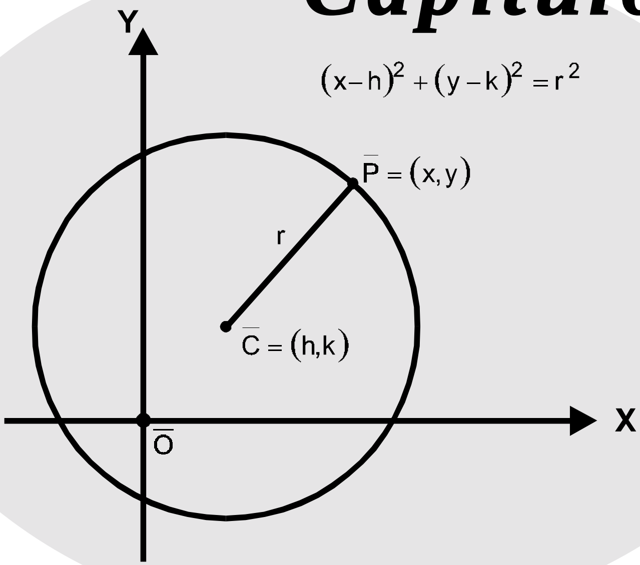
Hallamos un punto cualesquiera $\overline{P}$, de la recta $‹_1$.

Para $x = 0 \Rightarrow y = -2$ ˆ $\overline{P} = (0, -2)$

Luego :

ˆ $d = \frac{|(2)(0) + (4)(-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|-8-5|}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow \boxed{d = \frac{13}{\sqrt{20}} \approx 2.90}$

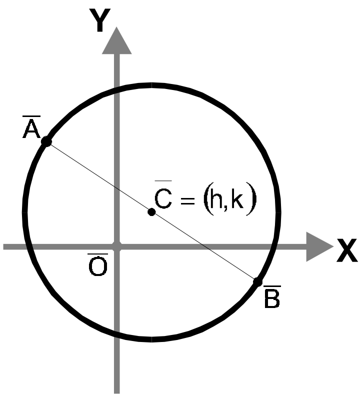
Capítulo 4



LA CIRCUNFERENCIA

30 Encontrar la ecuación de la circunferencia sabiendo que sus extremos de un diámetro son los puntos $\overline{A}=(-2,3)$ y $\overline{B}=(4,-1)$.

Solución:



$\overline{C}=(h,k)$ es punto medio de $\overline{AB}$

$\Rightarrow \begin{cases} h=1 \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow \overline{C}=(1,1)$

Luego: $r=\dfrac{|\overline{AB}|}{2}=\dfrac{\sqrt{52}}{2} \Rightarrow r^2=13$

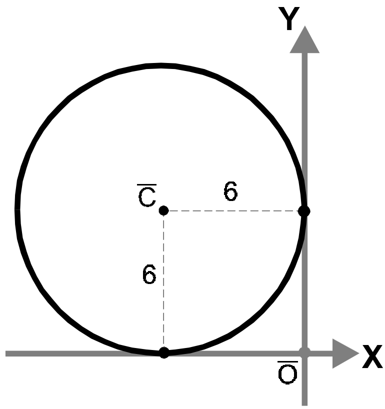
ˆ $\mathcal{C}: \ (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=13$

$$\boxed{\mathcal{C}: \ x^2+y^2+12x-12y+36=0}$$

31 Obtener la ecuación de la circunferencia tangente a los dos ejes, radio 6, en el segundo cuadrante.

Solución:



Del gráfico, se deduce que

$\overline{C} = (h,k) = (-6,6)$ es el centro de la circunferencia

y su radio $r = 6$.

$\therefore$ $\mathcal{C}: \ (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x+6)^2 + (y-6)^2 = 36$$

$$\boxed{\mathcal{C}: \ x^2 + y^2 + 12x - 12y + 36 = 0}$$

32 Dada la ecuación de la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$, encontrar el centro y el radio.

Solución:

Completando cuadrados :

$\Rightarrow$ $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$

$$3x^2 + 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = 7 + \frac{4}{3}$$

$$3x^2 + 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \quad ; \quad \text{de donde: } h = 0, \ k = -\frac{2}{3}$$

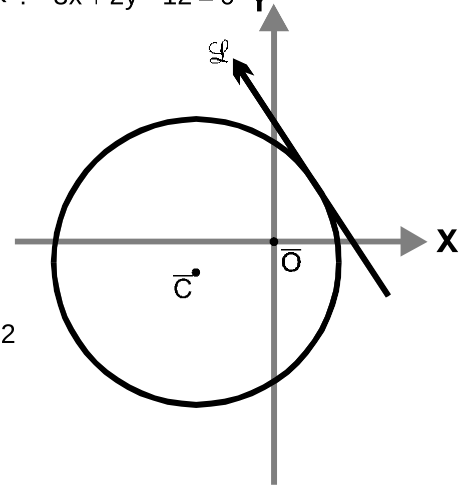
$\therefore$ $\boxed{\overline{C} = \left(0, -\frac{2}{3}\right); \quad r = \frac{5}{3}}$

33 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $\overline{C}=(-4,-1)$ y que es tangente a la recta: $3x+2y-12=0$.

Solución:

Sea: $r=$ Distancia de $\overline{C}$ a $\mathcal{L}: \; 3x+2y-12=0$

Luego:



$$\Rightarrow \quad r=\frac{|(3)(-4)+(2)(-1)-12|}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

$$=\frac{|-12-2-12|}{\sqrt{13}}$$

$$=\frac{|-26|}{\sqrt{13}}=\frac{26}{\sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad r^2=52$$

$\therefore \quad C: \; (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Reemplazando:

$$\boxed{C: \; (x+4)^2+(y+1)^2=52}$$

34 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $\overline{A}=(4,0)$, $\overline{B}=(0,3)$ y $\overline{C}=(-2,-2)$.

Solución:

Sea $\quad C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \longrightarrow \otimes$

- $\overline{A}=(4,0) \in C \Rightarrow 16+4D+F=0 \longrightarrow$ ①
- $\overline{B}=(0,3) \in C \Rightarrow 9+3E+F=0 \longrightarrow$ ②
- $\overline{C}=(-2,-2) \in C \Rightarrow -2D-2E+F=8 \longrightarrow$ ③

Luego, de ①, ② y ③: $\quad D=-\frac{19}{13}; \quad E=\frac{5}{13}; \quad F=-\frac{132}{13}$

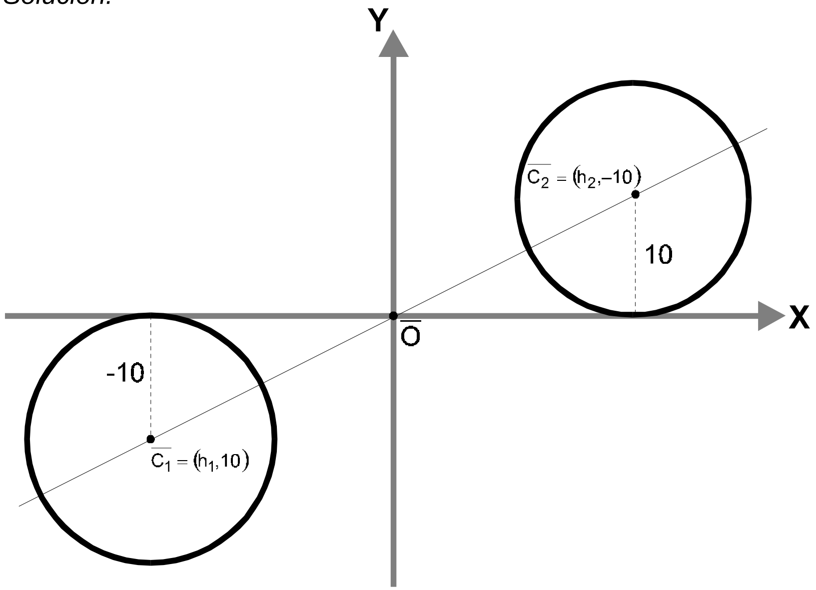
En $\otimes$:

ˆ $C: \quad x^2 + y^2 - \frac{19}{3}x + \frac{5}{13}y - \frac{132}{13} = 0$

$$\boxed{C: \quad 13x^2 + 13y^2 - 19x + 5y - 132 = 0}$$

35 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10, tangente en el eje X, cuyo centro está sobre la recta $x = 2y$.

Solución:



◦ Primer caso

‹ $: x = 2y$ pero $\overline{C} = (h_1, 10) \in$ ‹ ➨ $h_1 = 20$; $\overline{C} = (20, 10)$

$C: \quad (x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = r^2$

$$(x - 20)^2 + (y - 10)^2 = 100$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 40x - 20y + 400 = 0}$$

- Segundo caso

$\mathcal{L}: x = 2y$ pero $\overline{C} = (h_2, -10) \in \mathcal{L} \Rightarrow h_2 = -20$; $\overline{C} = (-20, -10)$

$\mathcal{C}: \quad (x - h_2)^2 + (y - k_2)^2 = r^2$

$$(x + 20)^2 + (y + 10)^2 = 100$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 40x + 20y + 400 = 0}$$

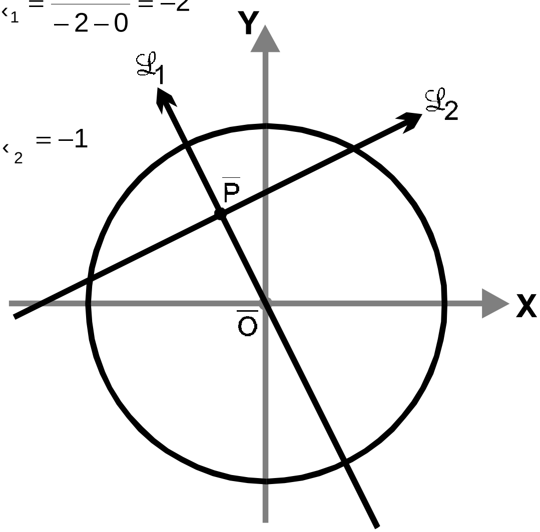
36 La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$. El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto $\overline{P} = (-2, 4)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

Solución:

Sea $\mathcal{L}_2$ la recta que contiene a la cuerda referida

y $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por el punto $\overline{P}$ y el centro de la circunferencia.

$\Rightarrow$ Pendiente de $\mathcal{L}_1$: $m_{\mathcal{L}_1} = \dfrac{4 - 0}{-2 - 0} = -2$



Luego :

$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow m_{\mathcal{L}_1} \cdot m_{\mathcal{L}_2} = -1$

$\Leftrightarrow (-2) \cdot m_{\mathcal{L}_2} = -1$

$\Leftrightarrow m_{\mathcal{L}_2} = \dfrac{1}{2}$

Luego :

- $\mathcal{L}_2: \quad y - 4 = \dfrac{1}{2}(x + 2)$

$$\boxed{\mathcal{L}_2: \quad x - 2y + 10 = 0}$$

37 Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $\overline{C}=(4,4/3)$ y que pasa por $\overline{Q}=(-1,-4/3)$.

Solución:

De los datos, tenemos:

$$\mathcal{C}:\quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-4)^2+(y-4/3)^2=r^2$$

$\circ\quad \overline{Q}=(-1,-4/3)\ \in\ \mathcal{C}\ \Rightarrow\ (-1-4)^2+\left(-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)^2=r^2\ \Rightarrow\ r^2=\frac{289}{9}$

$\wedge\quad \boxed{\mathcal{C}:\ (x-4)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{289}{9}}$

38 Hallar el área del círculo cuya ecuación es:

$$9x^2+9y^2+72x-12y+103=0$$

Solución:

Tenemos la ecuación de la circunferencia:

$$\mathcal{C}:\quad 9x^2+9y^2+72x-12y+103=0$$

Despejando el término independiente y completando cuadrados

$$\Rightarrow\ \mathcal{C}:\quad 9x^2+9y^2+72x-12y=-103$$

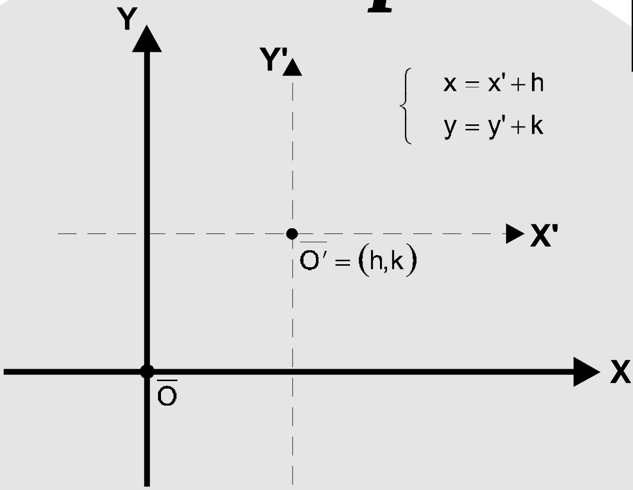
$$9\left(x^2+8x+16\right)+9\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)=-103+144+4$$

$$9(x+4)^2+9\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=45$$

$$(x+4)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=5 \qquad \text{Donde: } r^2=5$$

$\wedge\quad A=\pi r^2=\pi\times 5\quad \Leftrightarrow\quad \boxed{A=5\pi u^2}$

Capítulo 5



TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

39 Por una traslación de ejes, transformar la ecuación:

$$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$$

en otra que carezca de términos de primer grado.

Solución:

Completando cuadrados:

$$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$$

$$3\left(x^2 - 14x + 49\right) - 2\left(y^2 + 2y + 1\right) = -133 + 147 - 2$$

$$3\left(x - 7\right)^2 - 2\left(y + 1\right)^2 = 12$$

Siendo : $\begin{cases} x' = x - 7 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{3x'^2 - 2y'^2 = 12}$

40 Simplificar la ecuación:

$$72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$$

por una traslación de los ejes coordenados.

Solución:

Completando cuadrados:

$$72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$$

$$72\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 36\left(y^2 + y + 1\right) = 55 + 8 + 9$$

$$72\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 36\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 72$$

$$2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$\text{Siendo: } \begin{cases} x' = x - \dfrac{1}{3} \\ y' = y + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{2x'^2 + y'^2 = 2}$$

41 Por una traslación de ejes, simplificar la ecuación:

$$x^2 - 2y^2 + 8x + 4y - 3 = 0$$

Solución:

Completando cuadrados en la expresión, se tiene:

$$\left(x^2 - 8x + 16\right) - 2\left(y^2 - 2y + 1\right) = 3 + 16 - 2$$

$$(x - 4)^2 - 2(y - 1)^2 = 17$$

$$\text{Siendo: } \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x'^2 - 2y'^2 = 17}$$

42 Por medio de una traslación de ejes, eliminar los términos de primer grado de la ecuación: $2xy - x - y + 4 = 0$

Solución:

$$2xy - x - y + 4 = 0 \longrightarrow ①$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \longrightarrow ②$$

② en ①:

$$2(x'+h)(y'+k) - (x'+h) - (y'+k)$$

$$2x'y' + 2kx' + 2ky' + 2hk - x' - h - y' - k + 4$$

$$2x'y' + (2k-1)x' + (2h-1)y' + 2hk - h - k + 4 = 0 \longrightarrow ③$$

De donde: $\begin{cases} 2k - 1 = 0 \\ 2h - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = k = \dfrac{1}{2}$

Luego en ③:

$$2x'y' + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{4x'y' + 7 = 0}$$

43 Por una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación:

$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$

en otra que carezca del término en xy.

Solución:

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0 \longrightarrow ①$$

Luego: $\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta \end{array}\right\} \longrightarrow ②$

Ahora ② en ①:

$$\left(16\cos^2\theta+24\,\text{sen}\,\theta\cos\theta+9\,\text{sen}^2\theta\right)x'^2+$$
$$+\left(16\,\text{sen}^2\theta-24\,\text{sen}\,\theta\cos\theta+9\cos^2\theta\right)y'^2+$$
$$+\left(24\cos^2\theta-32\,\text{sen}\,\theta\cos\theta-24\,\text{sen}^2\theta+18\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right)x'y'+$$
$$+25\,x'\cos\theta-25\,y'\,\text{sen}\,\theta=0 \longrightarrow \otimes$$

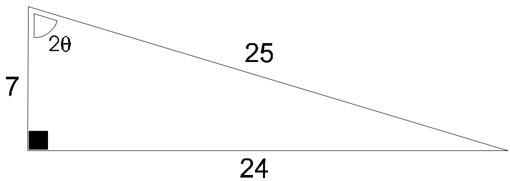
Luego para eliminar el término x' e y'

$$\Rightarrow\quad 24\cos^2\theta-32\,\text{sen}\,\theta\cos\theta-24\,\text{sen}^2\theta+18\,\text{sen}\,\theta\cos\theta=0$$
$$24\cos^2\theta-24\,\text{sen}^2\theta-14\,\text{sen}\,\theta\cos\theta=0$$
$$24\left(\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta\right)-14\,\text{sen}\,\theta\cos\theta=0$$
$$24\cos2\theta-7\times2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta=0$$
$$24\cos2\theta-7\,\text{sen}\,2\theta=0$$

Dividiendo $\times\cos2\theta$:

$$\Rightarrow\quad 24-7\,\text{tg}\,2\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \text{tg}\,2\theta=\frac{24}{7}$$

Luego de la figura :



$$\Rightarrow\quad \cos2\theta=\frac{7}{25}$$

Además :

- $\text{sen}\,\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{7}{25}}{2}}=\sqrt{\dfrac{9}{25}} \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\,\theta=\dfrac{3}{5}$

- $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{7}{25}}{2}}=\sqrt{\dfrac{16}{25}} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{4}{5}$

En $\otimes$:

$\Rightarrow \quad (4\cos\theta + 3\,\mathrm{sen}\theta)^2 x'^2 + (4\,\mathrm{sen}\theta + 3\cos\theta)\, y'^2 + 25x'\cos\theta - 25y'\mathrm{sen}\theta = 0$

$$\left(4\cdot\frac{4}{5} + 3\cdot\frac{3}{5}\right)^2 x'^2 + \left(4\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{4}{5}\right) y'^2 + 25\cdot\frac{4}{5}x' - 25\cdot\frac{3}{5}y' = 0$$

$$25x'^2 + 20x' - 15y' = 0$$

$\Rightarrow \quad \boxed{5x'^2 + 4x' - 3y' = 0}$

44 Simplificar la ecuación:

$x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$

por transformación de coordenadas.

Solución:

$x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0 \longrightarrow$ ①

$$\text{Luego}: \begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \longrightarrow ②$$

② en ①:

$$x'^2 + 2hx' + h^2 - 10x'y' - 10k\,x' - 10h\,y' - 10hk + y'^2 + 2ky' + k^2 -$$

$$-10x' - 10h + 2y' + 2k + 13 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + (2h - 10k - 10)\,x' + (2 + 2k - 10h)\,y' +$$

$$+k^2 - 10hk - 10h + 2k + 13 = 0 \longrightarrow \otimes$$

Para eliminar los términos x' e y'; debe cumplirse que

$$\begin{cases} 2h - 10k - 10 = 0 \\ 2 + 2k - 10h = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad h = 0\,; \quad k = -1$$

En ⊗:

➨ $x'^2 + y'^2 - 10x'y' + 1 - 2 + 13 = 0$

$x'^2 + y'^2 - 10x'y' + 12 = 0 \quad ......③$

$$\text{Pero:} \quad \left.\begin{aligned} x' &= x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta \\ y' &= x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad ......④$$

④ en ③:

➨ $x''^2\cos^2\theta - 2x''y''\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y''^2\operatorname{sen}^2\theta + x''^2\operatorname{sen}^2\theta +$

$+ 2x''y''\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y''^2\cos^2\theta - 10 + x''^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta -$

$-10x''y''\cos^2\theta + 10x''y''\operatorname{sen}\theta + 10y''^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 12 = 0$

➨ $\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)x''^2 +$

$\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)y''^2 +$

$+\left(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 10\cos^2\theta + 10\operatorname{sen}^2\theta\right)x''y'' + 12 = 0$

➨ $\left(1 - 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)x''^2 + \left(1 + 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)y''^2 +$

$+\left(-10\cos^2\theta + 10\operatorname{sen}^2\theta\right)x''y'' + 12 = 0 \quad ......\oplus$

Ahora para eliminar el término x´´y´´:

➨ $-10\cos^2\theta + 10\operatorname{sen}^2\theta = 0$

$-10\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 0$

➨ $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0$ ➨ $\cos 2\theta = 0$

Además :

- $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Reemplazando en $\oplus$:

$$\Rightarrow \left(1-10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x''^2 + \left(1+10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y''^2 + 12 = 0$$

$$(1-5)\,x''^2 + (1+5)\,y''^2 + 12 = 0$$

$$-4x''^2 + 6y''^2 + 12 = 0$$

Dividiendo $\times 2$:

$$\Rightarrow \boxed{2x''^2 - 3y''^2 - 6 = 0}$$

45 Un punto $\bar{P}$ se mueve de tal modo que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $\bar{A} = (1,4)$ y $\bar{B} = (-2,1)$ es siempre igual a 3. Hallar la ecuación del lugar geométrico y simplificarla por transformación de coordenadas.

Solución:

Sea $\bar{P} = (x,y)$ el punto que se mueve.

De la condición :

$$\Rightarrow |AP| - |BP| = 3$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 3$$

Efectuando operaciones se tiene :

➨ $20x - 4y - 8xy + 9 = 0 \longrightarrow$ ①

Pero :

➨ $\left.\begin{array}{l} x = x' + h \\ y = y' + k \end{array}\right\} \longrightarrow$ ②

Luego :

➨ $(20 - 8k)x' - (4 + 8h)y' - 8x'y' + 20h - 4k - 8hk + 19 = 0 \longrightarrow$ ③

Ahora para eliminar los términos x' e y':

➨ $\left.\begin{array}{l} 20 - 8k = 0 \\ 4 + 8h = 0 \end{array}\right\}$ ➨ $h = \dfrac{5}{2}$; $k = -\dfrac{1}{2}$

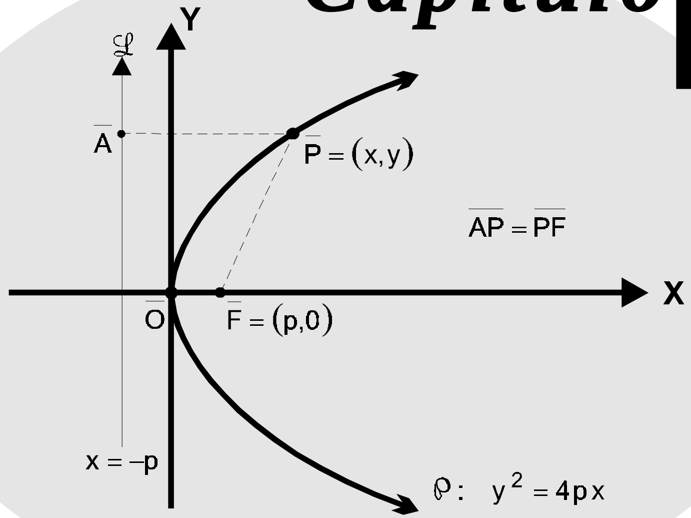
② en ③ :

➨ $-8x'y' + 10\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 4\left(\dfrac{5}{2}\right) - 8\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right) + 19 = 0$

$-8x'y' - 10 - 10 + 10 + 19 = 0$

➨ $\boxed{-8x'y' - 9 = 0}$

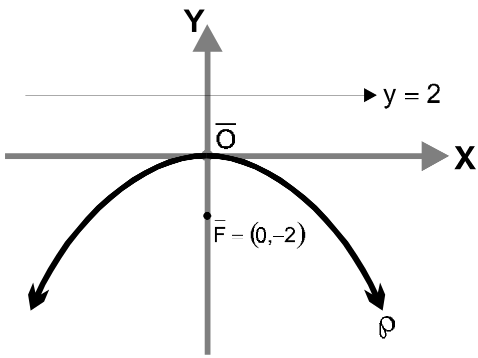
Capítulo 6



LA PARÁBOLA

46 Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya directriz es $y = 2$.

Solución:



Del gráfico, se tiene :

: $x^2 = -4py \longrightarrow$ ①

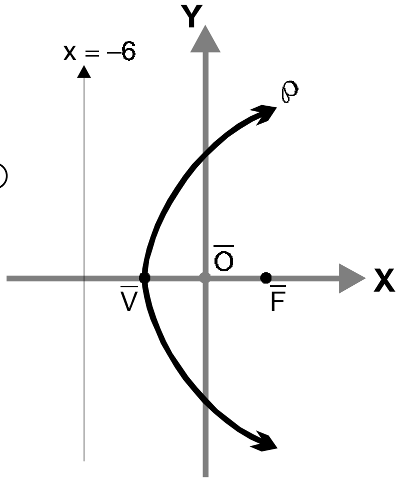
$p = 2$

En ①:

➡ $\boxed{:\ x^2 = -8y}$

47 Hallar la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $x = -6$ y su foco es $\overline{F} = (0,0)$.

Solución:



Del gráfico :

: $(y-k)^2 = 4p(x-h) \longrightarrow$ ①

Como : $\overline{V} = (-3,0)$ y $p = |FV| = 3$

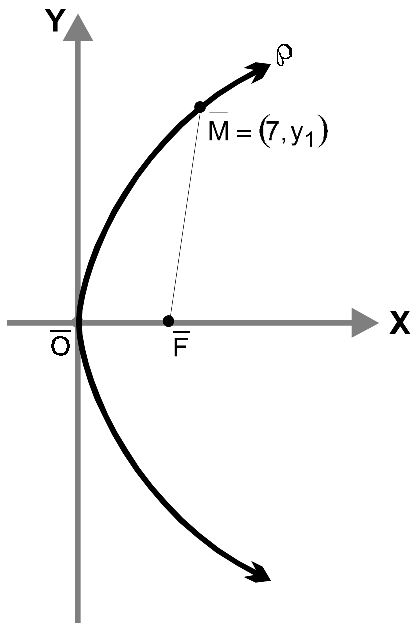
En ①:

➡ : $y^2 = 12(x+3)$

: $\boxed{y^2 = 12x + 36}$

48 Calcular el radio focal del punto $\overline{M}$ de la parábola $y^2 = 20x$ si la abscisa del punto $\overline{M}$ es igual a 7.

Solución:



: $y^2 = 20x \longrightarrow$ ①

De ①: $4p = 20$ ➡ $p = 5$

de donde : $\overline{F} = (5,0)$

$\overline{M} = (7, y_1) \in$

En ①:

➡ $y_1^2 = 20(7)$ ➡ $y_1 = \pm\sqrt{140}$

➡ $\overline{M} = \left(7, \pm\sqrt{140}\right)$

Por lo tanto :

$$|FM| = \sqrt{\left(\sqrt{140} - 0\right)^2 + (7-5)^2}$$

$$\boxed{|FM| = \sqrt{144} = 12}$$

49 Dada la ecuación de la parábola $x^2 + 8y - 2x = 7$. Hallar el vértice, eje, foco y directriz. Trazar la curva.

Solución:

$$: \quad x^2 + 8y - 2x = 7$$

Completando cuadrados

$$: \quad x^2 + 8y - 2x = 7 \quad \Rightarrow \quad : \quad x^2 - 2x + 1 = -8y + 7 + 1$$

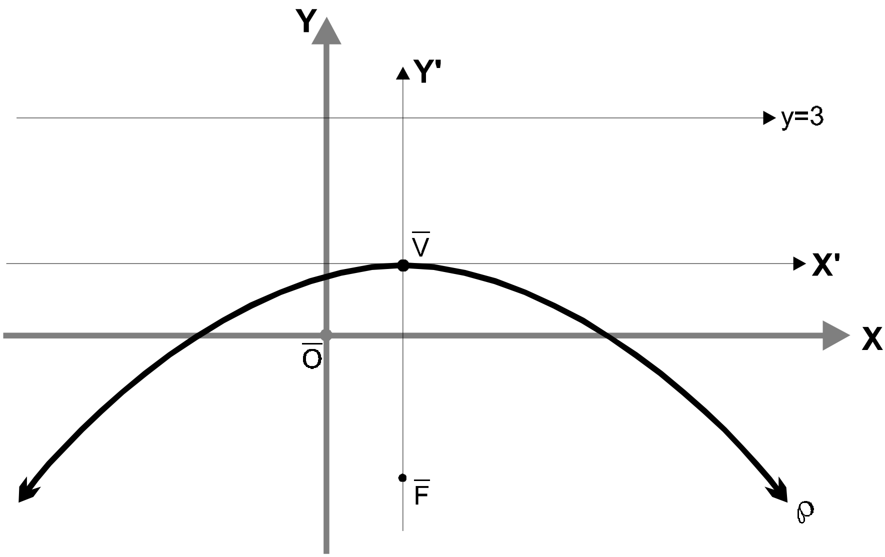
$$: \quad (x-1)^2 = -8y + 8 \quad \Rightarrow \quad : \quad (x-1)^2 = -8(y-1)$$

Luego, las coordenadas del vértice de la parábola : $\overline{V} = (h,k) = (1,1)$

Seguidamente : $4p = -8 \quad \Rightarrow \quad p = -2$

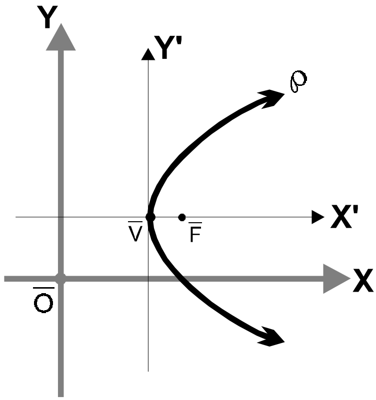
Ahora, las coordenadas del foco : $\overline{F} = (h, k+p) = (1,-1)$

- Ecuación del eje : $x = 1$
- Ecuación de la directriz : $y = 3$



50 Encontrar la ecuación de la parábola, cuyo vértice es el punto $\overline{V} = (3,2)$ y el foco es $\overline{F} = (4,2)$.

Solución:



$$: \ (y-k)^2 = 4p(x-h) \longrightarrow ①$$

Dado que se conoce el vértice y el foco :

$p = |\overline{VF}| = 1$

Reemplazando los valores en ① :

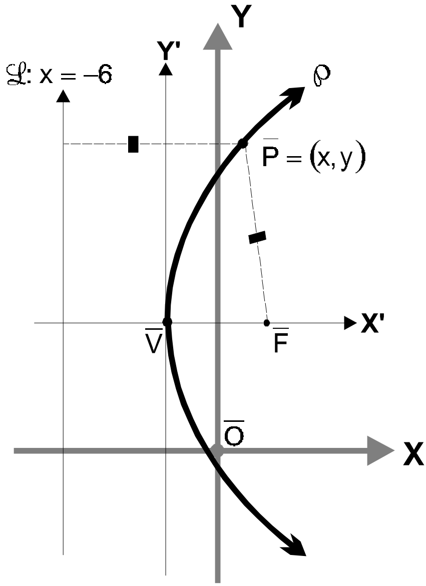
➡ $: \ (y-2)^2 = 4(1)(x-3)$

$(y-2)^2 = 4(x-3)$

$$\boxed{: \ y^2 = 4y + 4x - 16}$$

51 Obtener la ecuación de la parábola con foco en $\overline{F} = (2,3)$ y cuya ecuación de la directriz es $x = -6$.

Solución:



Del gráfico :

◦ $|\overline{FP}|$ = Distancia de $\overline{P}$
a ‹ (definición)

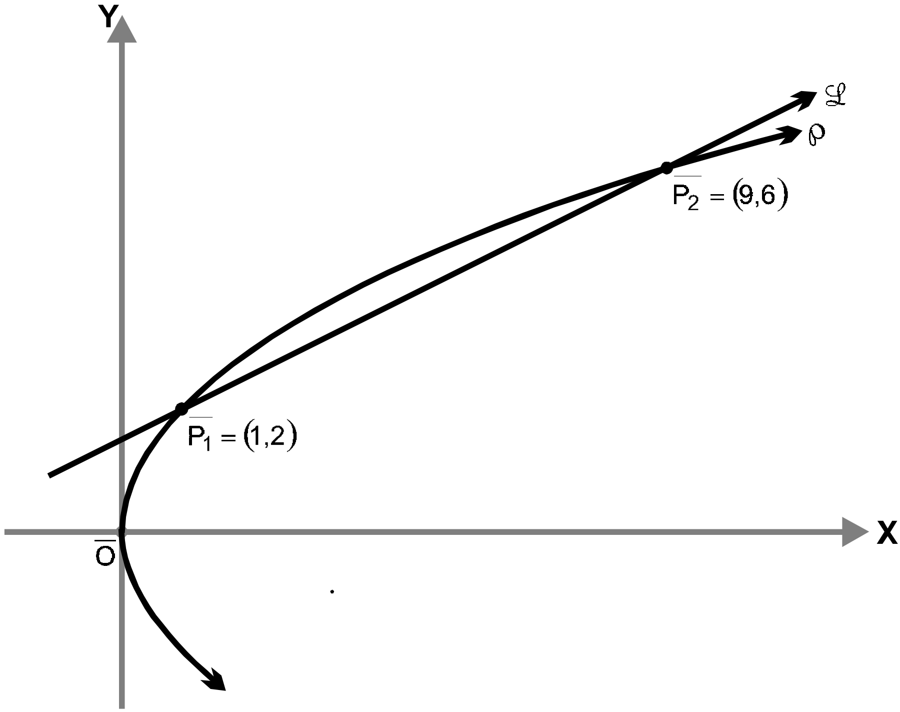
➡ $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = x + 6$

Efectuando operaciones :

➡ $$\boxed{: \ y^2 - 16x - 6y - 23 = 0}$$

52 Determinar la longitud del segmento determinado por la ecuación $y^2 = 4x$, con la recta de ecuación $x = 2y - 3$.

Solución:



Tenemos: $\begin{cases} \;\; : \; y^2 = 4x \longrightarrow ① \\ ‹ : \; x = 2y - 3 \longrightarrow ② \end{cases}$

De ① y ② obtenemos los puntos $\begin{cases} \overline{P_1} = (1,2) \\ \overline{P_2} = (9,6) \end{cases}$

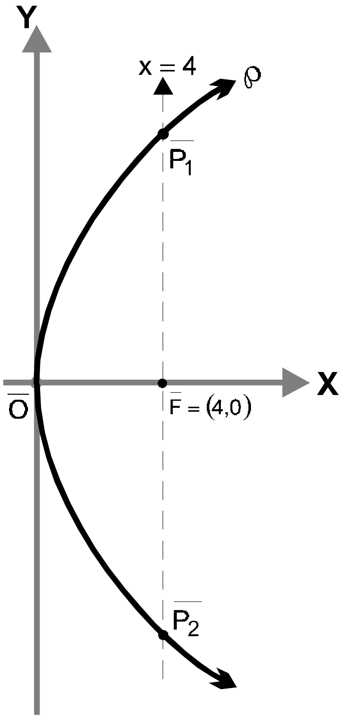
$\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ intersección de las dos gráficas:

Luego:

$$\left| P_1P_2 \right| = \sqrt{(9-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{64+16} \iff \boxed{\left| P_1P_2 \right| = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94}$$

53 Determinar la ecuación de una circunferencia que tiene por diámetro la cuerda normal de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = 16x$.

Solución:



$: \ y^2 = 16x \longrightarrow ①$

se deduce que el vértice $\overline{V} = (h,k) = (0,0)$

También: $\overline{F} = (h+p,k) = (4,0)$

Luego, la cuerda normal (lado recto)

➡ $CN: \quad x = 4 \longrightarrow ②$

De ① y ②: ➡ $\begin{cases} \overline{P_1} = (4,8) \\ \overline{P_2} = (4,-8) \end{cases}$

∘ $r = |FP_1| = |P_2F| = 8 \iff r^2 = 64$

Siendo $\overline{C}$ centro de la circunferencia

➡ $\overline{C} = \overline{F} \iff \overline{C} = (4,0)$

Por lo tanto:

$$\mathcal{C}: \ (x-4)^2 + y^2 = 64$$

$$\boxed{\mathcal{C}: \ x^2 + y^2 - 8x - 48 = 0}$$

54 Una recta que pasa por el foco de una parábola con el vértice en el origen y con el eje horizontal, corta a la directriz en el punto $\overline{A} = (-3,8)$. Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la recta.

Solución:

∘ $: \ y^2 = 4px \longrightarrow ①$

y su vértice $\overline{V} = (h,k) = (0,0)$

Además: $p = 3 \longrightarrow$ ②

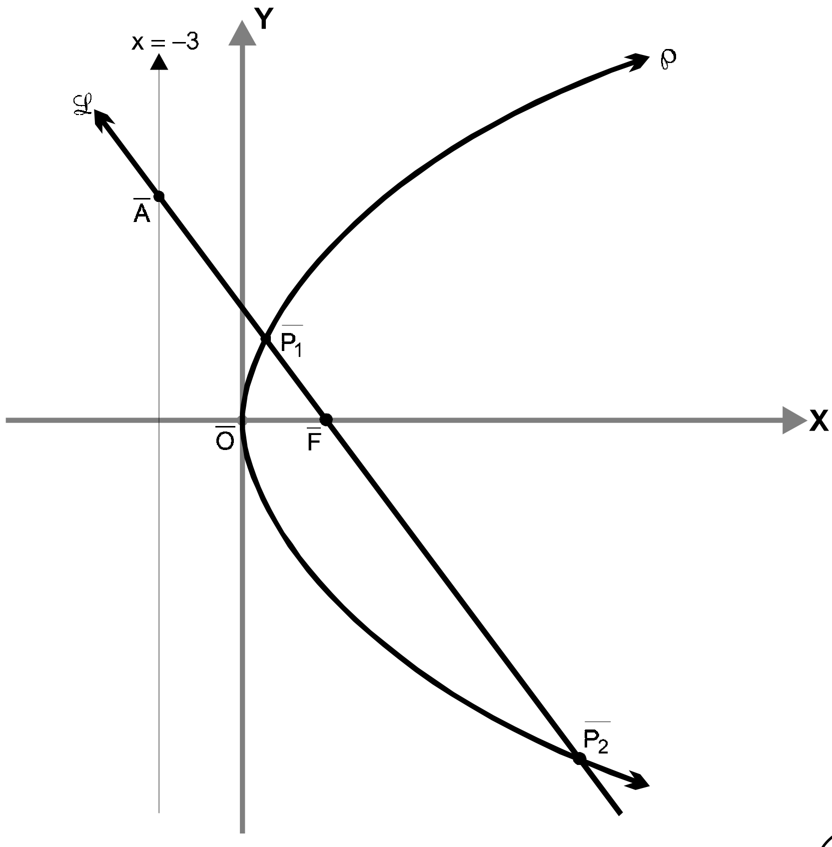
② en ①: $: \; y^2 = 12x \longrightarrow$ ③

∘ ‹ : $\begin{cases} \overline{A} = (-3,8) \\ \overline{F} = (h+p,k) = (3,0) \end{cases}$ ➡ $m_{‹} = m_{\overline{AF}} = -\dfrac{4}{3}$

‹ : $y - 0 = m_{‹}(x-3)$

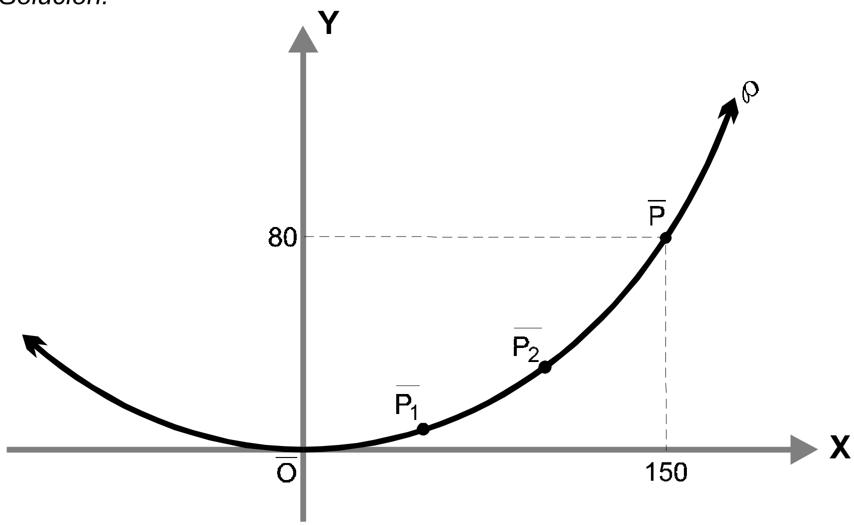
$y = -\dfrac{4}{3}(x-3)$ ⬅➡ ‹ : $4x + 3y - 12 = 0 \longrightarrow$ ④

De ③ y ④: $\overline{P}$: $\begin{cases} : y^2 = 12x \\ ‹ : 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$ ⬅➡ $\boxed{\begin{array}{l} \overline{P_1} = (3/4, 3) \\ \overline{P_2} = (12, -12) \end{array}}$



55 Las dos torres de suspensión de un puente colgante distan entre sí 300 m. y se extienden 80 m por encima de la calzada. Si el cable (que tiene la forma de una parábola) es tangente a la calzada en el centro del puente, determinar la altura del cable por encima de la pista a 50 m y también a 100 m del centro del puente. (Asumir que la pista es horizontal).

Solución:



Del gráfico, se observa que : $x^2 = 4py \longrightarrow$ ①

◦ $\overline{P} = (150,80) \in$.

➡ $150^2 = 4p(80)$ ⬌ $4p = \dfrac{75\times 15}{4}$

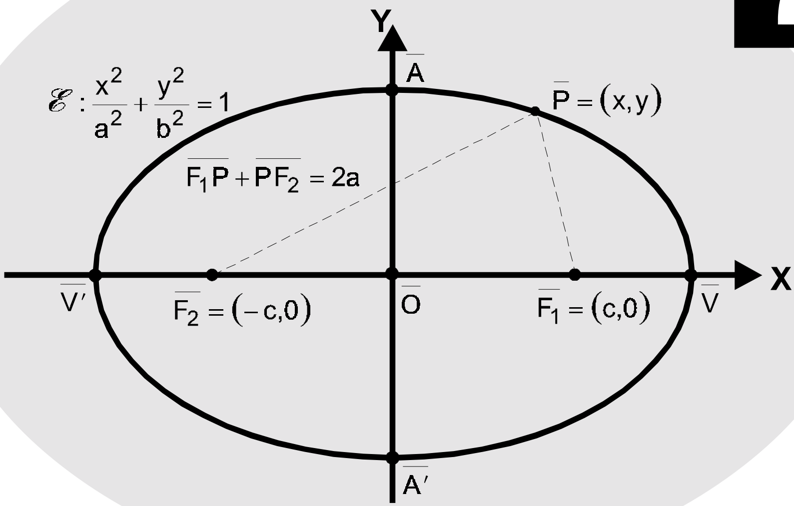
En ①: : $x^2 = \dfrac{75\times 15}{4}y$

Luego:

◦ $\overline{P_1} = (50, y_1) \in$ ➡ $50^2 = \dfrac{75\times 15}{4}y_1$ ➡ $\boxed{y_1 = \dfrac{80}{9} \approx 8{,}88 \text{ m}}$

◦ $\overline{P_2} = (100, y_2) \in$ ➡ $100^2 = \dfrac{75\times 15}{4}y_2$ ➡ $\boxed{y_2 = \dfrac{320}{9} \approx 35{,}55 \text{ m}}$

Capítulo 7



LA ELIPSE

56 Hallar la ecuación de la elipse cuya longitud de la cuerda normal (lado recto) es 5 vértices $(\pm 10,0)$.

Solución:

Sabemos: $\quad$ õ $: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow$ ①

Luego del enunciado:

- $CN = \left|\dfrac{2b^2}{a}\right| = 5 \iff b^2 = 25$
- $a = 10 \Rightarrow a^2 = 100$

Por lo tanto en ①: $\quad \boxed{\text{õ}: \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1}$

57 Hallar la ecuación de la elipse, cuyo eje es coincidente con $x = 1$, $\overline{C} = (1,5)$, $\overline{F} = (1,8)$; suma de las distancias focales de un punto de la elipse es 12.

Solución:

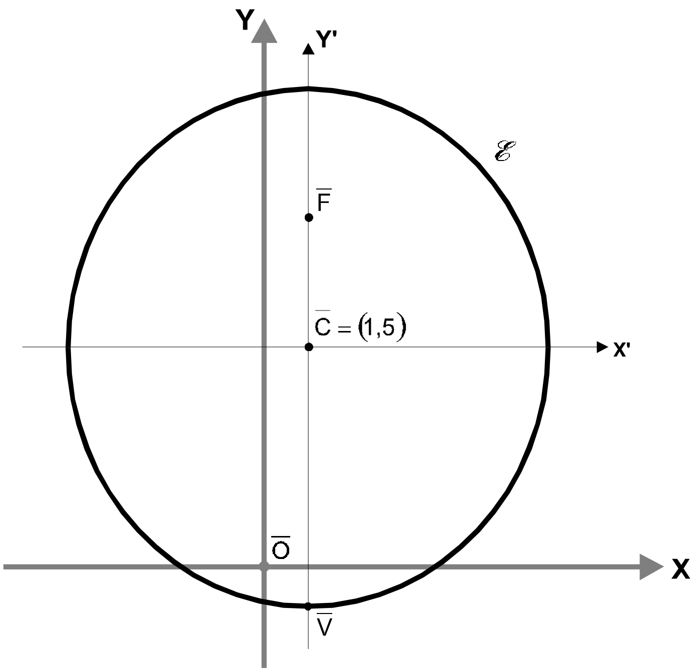
Del enunciado deducimos: $\quad \mathscr{E} : \dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Pero: $\quad 2a = 12 \quad \Leftrightarrow \quad a = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 36$

Luego: $\quad c = \left| CF \right| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = 9$

Sabemos: $\quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 36 - 9 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 27$

Por lo tanto: $\quad \boxed{\mathscr{E} : \dfrac{(x-1)^2}{27} + \dfrac{(y-5)^2}{36} = 1}$



58 Reducir la ecuación $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ a la forma ordinaria de la ecuación de una elipse y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la cuerda normal; y la excentricidad.

Solución:

$$x^2+4y^2-6x+16y+21=0$$

Completando cuadrados para x e y :

$$\left(x^2-6x+9\right)+4\left(y^2+4y+4\right)=-21+9+16$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=4$$

$$\text{õ}:\quad \frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$

De la ecuación tenemos : $\overline{C}=(h,k)=(3,-2)$

Luego los vértices de la elipse se obtienen de :

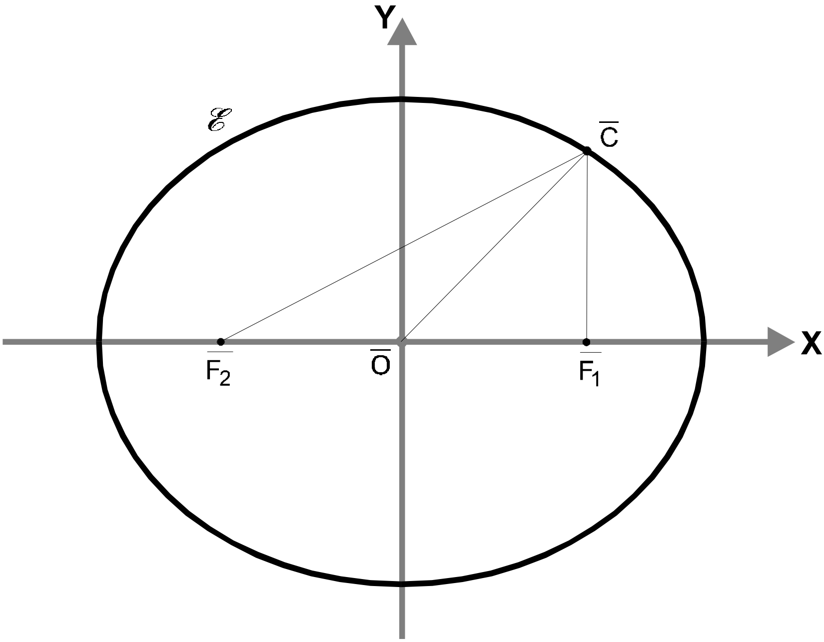
➡ $V=(h\pm a,k)=(3\pm 2,-2)$ ➡ $\begin{cases}\overline{V_1}=(5,-2)\\ \overline{V_2}=(1,-2)\end{cases}$

También :

- $a^2=4$ ➡ $a=\pm 2$ ◦ $b^2=1$ ➡ $b=\pm 1$
- $a^2=b^2+c^2$ ➡ $4=1+c^2$ ➡ $c^2=3$ ➡ $c^2=\pm\sqrt{3}$
- Eje mayor : $2a=2\times 2=4$ ◦ Eje menor : $2b=2\times 1=2$
- Cuerda Normal : $CN=\left|\dfrac{2b^2}{a}\right|=\dfrac{2\times 1}{2}=1$
- Excentricidad : $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}<1$

59 Por el foco de la elipse $x^2/25 + y^2/15 = 1$ se ha trazado una perpendicular a su eje mayor. Determinar las distancias de los puntos de intersección de esta perpendicular con la elipse hasta los focos.

Solución:



Tenemos la ecuación de la elipse :

➡ õ : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{15} = 1 \longrightarrow$ ①

Sabemos : $b^2 = a^2 - c^2$ ➡ $c^2 = a^2 - b^2$ ➡ $c = \pm\sqrt{25 - 15} = \pm\sqrt{10}$

Luego, los focos de la elipse son :

➡ $\overline{F} = (\pm c, 0)$ ➡ $\overline{F} = (\pm\sqrt{10}, 0)$

La ecuación de la perpendicular

trazada en el primer foco es : $x = \sqrt{10} \longrightarrow$ ②

De ① y ②: $\quad \dfrac{9}{25}+\dfrac{y^2}{15}=1 \quad ➡ \quad y^2=9 \quad ➡ \quad y=\pm 3$

De aquí: $\quad C=(x,y)=\left(\sqrt{10},3\right)$

Por lo tanto:

- $\left|F_1C\right|=\sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{10}\right)^2+(0-3)^2}=3$
- $\left|F_2C\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{10}-\sqrt{10}\right)^2+(0-3)^2}=7$

60 Búsquese la ecuación de la elipse que tenga como centro $\overline{C}=(-2,4)$ y sea tangente a los dos ejes de coordenadas.

Solución:

Sea: $\quad$ õ : $\quad \dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Para este caso:

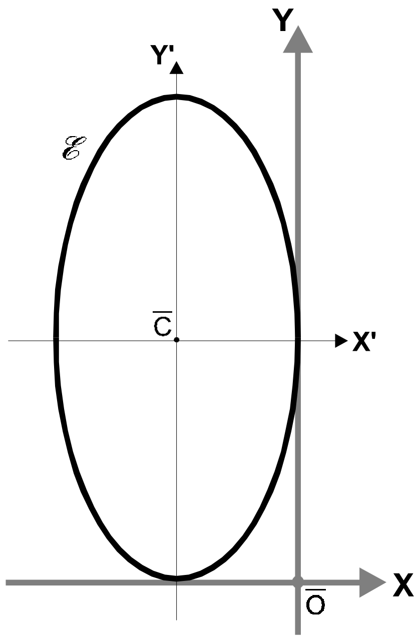
- a: Distancia de $\overline{C}$ al eje X

  ➡ $a=4$ ➡ $a^2=16$

- b: Distancia de $\overline{C}$ al eje Y

  ➡ $b=2$ ➡ $b^2=4$

➡ $\boxed{\text{õ} : \quad \dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1}$



61 Hallar la ecuación canónica de la elipse, si uno de los vértices está en $\overline{V_1}=(5,0)$ y pasa por el punto $\overline{P}=(2,3)$.

Solución:

- $õ:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Dado que: $\overline{V_1}=(5,0)$ ➡ $a=5$ ➡ $a^2=25$

Luego: $õ:\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Como: $\overline{P}=(2,3)\ \in\ õ$ ➡ $\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{b^2}=1$ ➡ $b^2=\dfrac{75}{7}$

Por lo tanto:

$$õ:\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{75/7}=1 \quad ➡ \quad \boxed{õ:\ 3x^2+7y^2=75}$$

62 La base de un auditorio es de forma elíptica, tiene 20 m. de longitud y 16 m de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha claramente cerca del otro foco. ¿A qué distancia está un foco del otro foco?

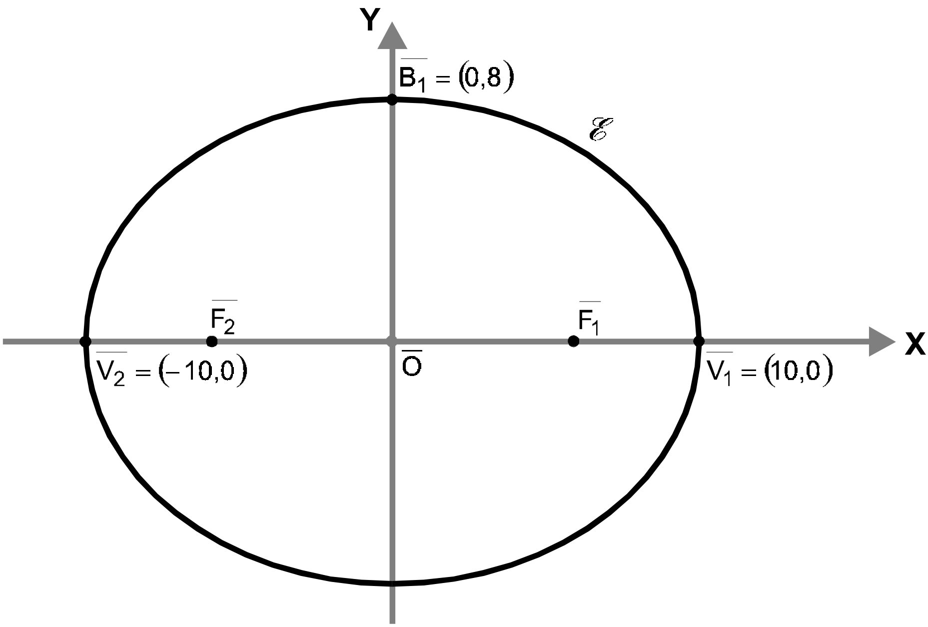
Solución:

Según los datos del enunciado:

- $a=10$ ➡ $a^2=100$
- $b=8$ ➡ $b^2=64$

De donde: $b^2=a^2-c^2$ ➡ $c^2=36$ ➡ $c=\pm 6$

Por lo tanto: $\boxed{\left|F_1F_2\right|=\left|2c\right|=12}$



63 Usando la definición de elipse, obtener la ecuación de la elipse con focos en $\overline{F} = (-3,4)$ y $\overline{F_2} = (5,4)$ eje mayor 12.

Solución:

Sea $\overline{P} = (x,y)$ el punto que se mueve.

Por la definición de elipse, se tiene que :

➨ $\left|F_1P\right| - \left|F_2P\right| = 2a = 12$

De donde :

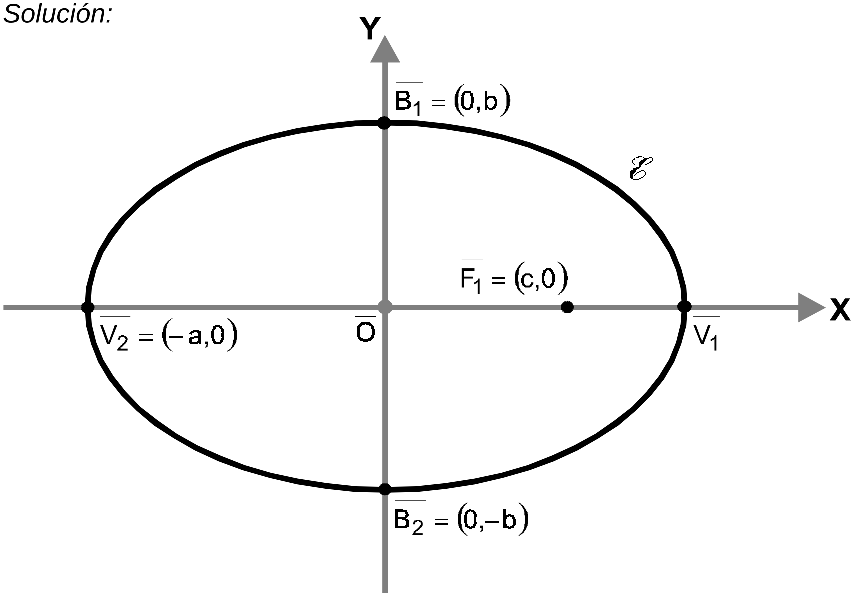
➨ $\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} = 12$

Efectuando operaciones :

$$\boxed{õ : \quad 5x^2 - 9y^2 + 10x + 72y + 31 = 0}$$

64 Demostrar que para todo elipse que tenga su centro en el origen, la distancia de cualquiera de los extremos del eje menor a cualquiera de los focos es la mitad de la longitud del eje mayor.

Solución:



Sea õ : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ la elipse con vértice en el origen.

Probar que :

∘ $\left|B_1F_1\right| = \dfrac{\left|V_1V_2\right|}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

Luego, de la figura : $\left|B_1F_1\right| = \sqrt{c^2 + b^2}$

pero, sabemos por definición que : $a^2 = c^2 + b^2$

Por lo tanto : $\boxed{\left|B_1F_1\right| = \sqrt{a^2} = a}$

65 Un punto se mueve de tal modo que la suma de las distancias de los puntos $\overline{A}=(-2{,}0)$ y $\overline{B}=(-2{,}6)$ es 8. Hallar la ecuación del lugar geométrico de $\overline{P}$.

Solución:

Sea $\overline{P}=(x,y)$ el punto que se mueve.

Por la condición del problema:

$$|AP|+|BP|=8$$

De donde :

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-6)^2}=8$$

Efectuando operaciones, se tiene :

$$\wp:\quad 16x^2+7y^2+64x-42y+15=0$$

$$\therefore\quad \boxed{\wp:\quad \frac{(x+2)^2}{7}+\frac{(y-3)^2}{16}=1}$$

66 La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente una elipse, con el Sol en uno de los focos. Si el eje mayor de la órbita elíptica es de 300 000 km. y la excentricidad es de 0,017 aproximadamente. Hallar la distancia máxima y mínima de la Tierra al Sol.

Solución:

De los datos y según el gráfico, tenemos que :

- $2a=300000 \Rightarrow a=150\,000$

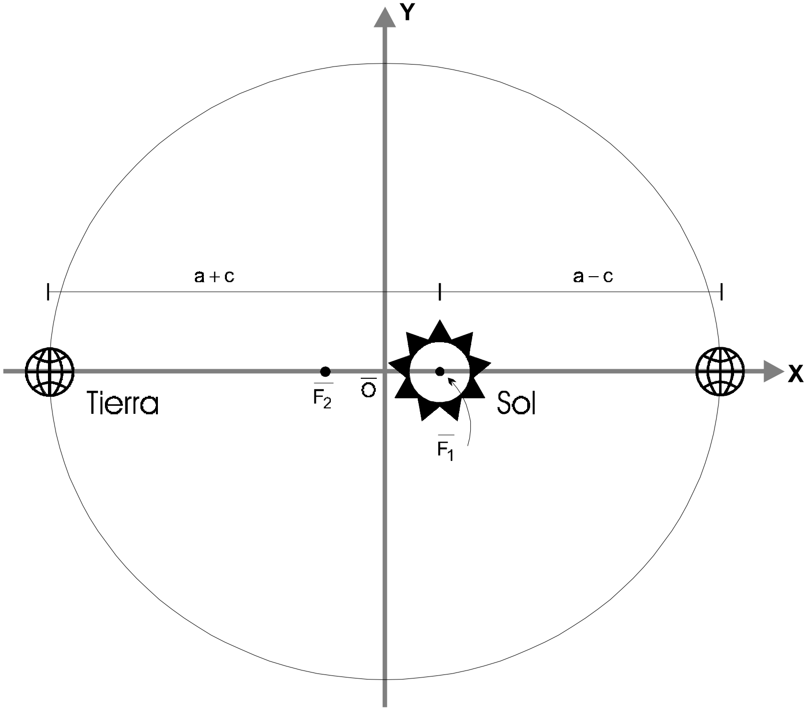
Del valor aproximado de la excentricidad de la elipse :

- $e=\dfrac{c}{a}=0{,}017 \Rightarrow c=0{,}017\times a=0{,}017\times 150000 \Rightarrow c=2550$

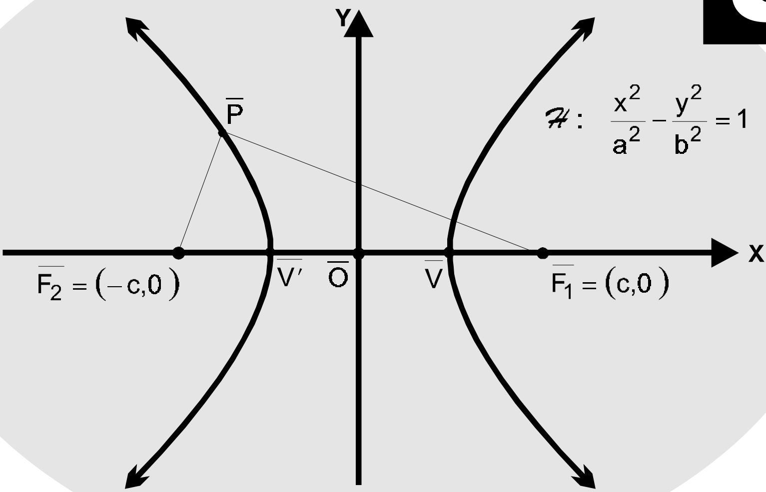
Luego :

- Máximo : $a + c = 150000 + 2550$ ➨ $\boxed{a + c = 152550}$

- Mínimo : $a - c = 150000 - 2550$ ➨ $\boxed{a - c = 147450}$



Capítulo 8



LA HIPÉRBOLA

67 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $\overline{A} = (2,3)$, tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}x = 0$.

Solución:

Sean ℓ_1 y ℓ_2 asíntotas de la hipérbola H.

Si $\ell_1: \; 2y - \sqrt{7}x = 0 \;\Rightarrow\; \ell_2: \; 2y + \sqrt{7}x = 0$

Luego :

∘ $H: \; (2y - \sqrt{7}x)(2y + \sqrt{7}x) = k \;\Rightarrow\; H: \; 4y^2 - 7x^2 = k \longrightarrow$ ①

Pero : $\overline{A} = (2,3) \in H \;\Rightarrow\; 36 - 28 = k \;\Rightarrow\; k = 8$

En ①: $H: \; 4y^2 - 7x^2 = 8 \;\Rightarrow\; \boxed{H: \; \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{8/7} = 1}$

68 Hallar la ecuación de la hipérbola, con vértices en $\overline{V}=(0,\pm 7)$ y $e=4/3$.

Solución:

De los datos se deduce : $\quad \mathcal{H}: \ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Si : $\overline{V}=(0,\pm 7)=(0,\pm a) \ \Rightarrow \ a=\pm 7$

Además : $\quad e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3} \ \Rightarrow \ c=\frac{4}{3}\times a \ \Rightarrow \ c^2=\frac{784}{9}$

Luego : $\quad b^2=c^2-a^2=\frac{784}{9}-49 \ \Rightarrow \ b^2=\frac{343}{9}$

Por lo tanto : $\quad \mathcal{H}: \ \frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{343/9}=1$

$$\boxed{\mathcal{H}: \ 9x^2-7y^2=343}$$

69 Dada la ecuación de la hipérbola $x^2-4y^2=4$, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de la cuerda normal (lado recto).

Solución:

Sabemos : $\quad \mathcal{H}: \ x^2-4y^2=4 \ \Rightarrow \ \mathcal{H}: \ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$

De donde :

- $a^2=4 \ \Rightarrow \ a=\pm 2 \qquad$ ◦ $b^2=1 \ \Rightarrow \ b=\pm 1$
- $c^2=a^2+b^2=4+1=5 \ \Rightarrow \ c=\pm\sqrt{5}$

Vértices : $\quad \overline{V}=(\pm a,0)=(\pm 2,0)$

Focos : $\quad \overline{F}=(\pm c,0)=(\pm\sqrt{5},0)$

Excentricidad : $\quad e=\frac{c}{a} \ \Rightarrow \ e=\frac{\sqrt{5}}{2}$

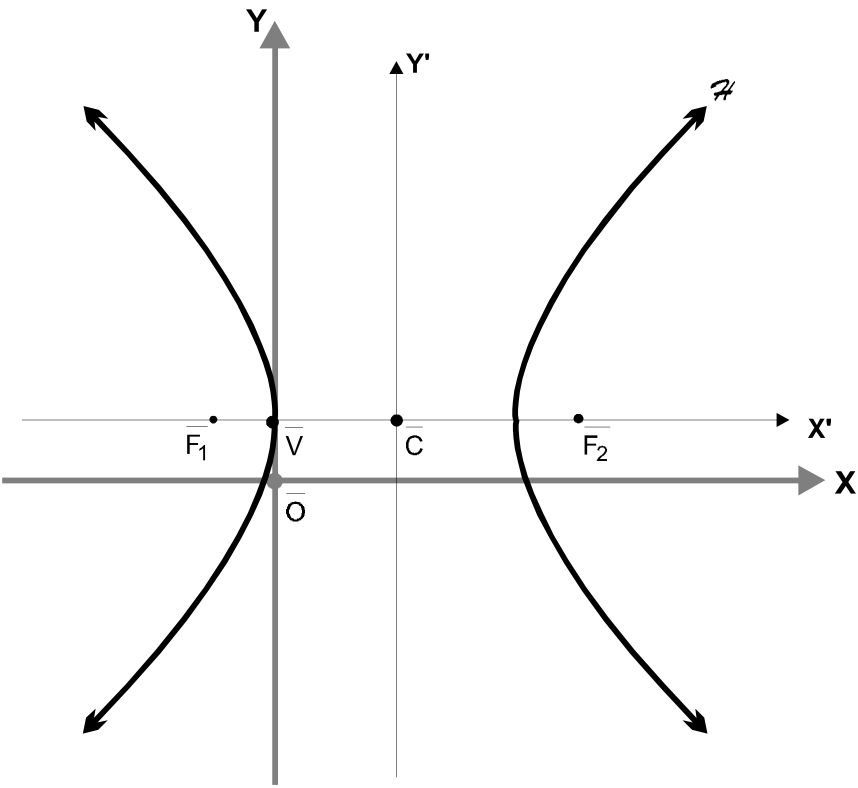
$$\text{Cuerda Normal:}\quad CN = \left|\frac{2b^2}{a}\right| = \left|\frac{2\times 1}{2}\right| = 1$$

$$\text{Eje Transverso:}\quad |2a| = 4$$

$$\text{Eje Conjugado:}\quad |2b| = 2$$

70 Encontrar la ecuación de la hipérbola de focos $\overline{F_1} = (-1,1)$ y $\overline{F_2} = (5,1)$ y un vértice en $\overline{V} = (0,1)$.

Solución:



Sabemos: $\left|F_1F_2\right| = 2c = 6 \;\Rightarrow\; c = 3 \;\Rightarrow\; c^2 = 9$

- $\overline{C} = (h,k) \;\Rightarrow\; \begin{cases} h = 2 \\ k = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \overline{C} = (2,1)$

Ahora:

- $a = \left|CV\right| = 2 \;\Rightarrow\; a^2 = 4$
- $c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; 9 = 4 + b^2 \;\Rightarrow\; b^2 = 5$

Por lo tanto: $$\mathcal{H}: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{H}: \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1}$$

71 Determinar la ecuación de la hipérbola, sabiendo que sus focos son los puntos $\overline{F_1} = (3,4)$ y $\overline{F_2} = (3,-2)$ y su excentricidad es igual a 2.

Solución:

- $\overline{C} = (h,k) \;\Rightarrow\; \begin{cases} h = 3 \\ k = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \overline{C} = (3,1)$

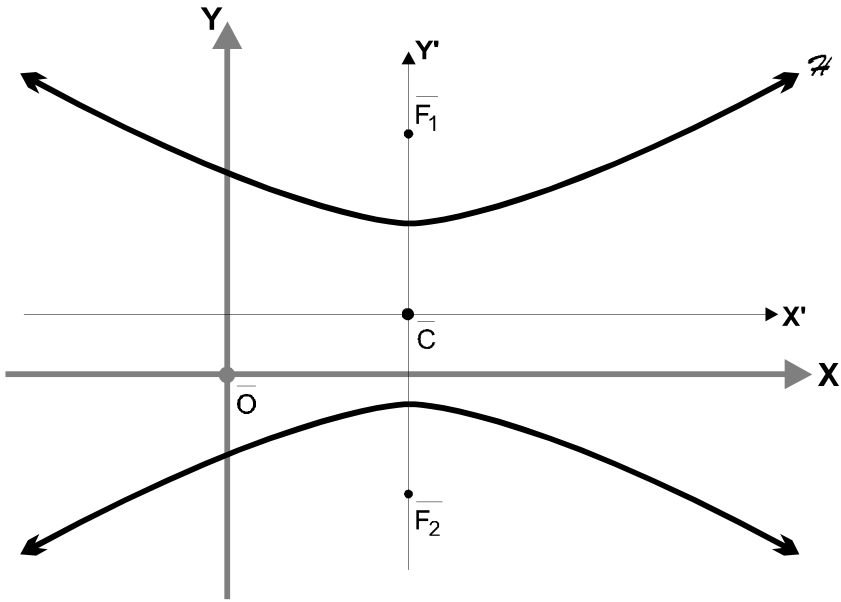
Luego: $c = \left|F_1C\right| = \left|CF_2\right| = 3$

Además: $e = \dfrac{c}{a} = 2 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; a^2 = \dfrac{9}{4}$

Sabemos que: $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - \dfrac{9}{4} \;\Rightarrow\; b^2 = \dfrac{27}{4}$

Por lo tanto: $$\mathcal{H}: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{H}: \frac{(y-1)^2}{9/4} - \frac{(x-3)^2}{27/4} = 1}$$



72 Hallar la ecuación de la hipérbola, cuyos focos están en los vértices de la elipse: $x^2/100 + y^2/64 = 1$. Y las directrices pasan por los focos de esta elipse.

Solución:

En la elipse: $\quad \varepsilon : \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

- $a^2 = 100 \;\Rightarrow\; a = \pm 10$ $\qquad$ ◦ $b^2 = 64 \;\Rightarrow\; b = \pm 8$
- $b^2 = a^2 - c^2 \;\Rightarrow\; c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36 \;\Rightarrow\; c = \pm 6$

De donde: $\quad \overline{F} = (\pm c, 0) = (\pm 6, 0)$

En la hipérbola: $\quad \mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Por condición del problema, obtenemos el valor de c en la hipérbola a partir del valor de a en la elipse.

- $c = \pm 10 \;\Rightarrow\; c^2 = 100$

La ecuación de la directriz de la hipérbola : $x = \pm \dfrac{a}{e}$

➡ $x = \pm \dfrac{a}{c/a} = \dfrac{a^2}{c} = \pm \dfrac{a^2}{10} \longrightarrow$ ①

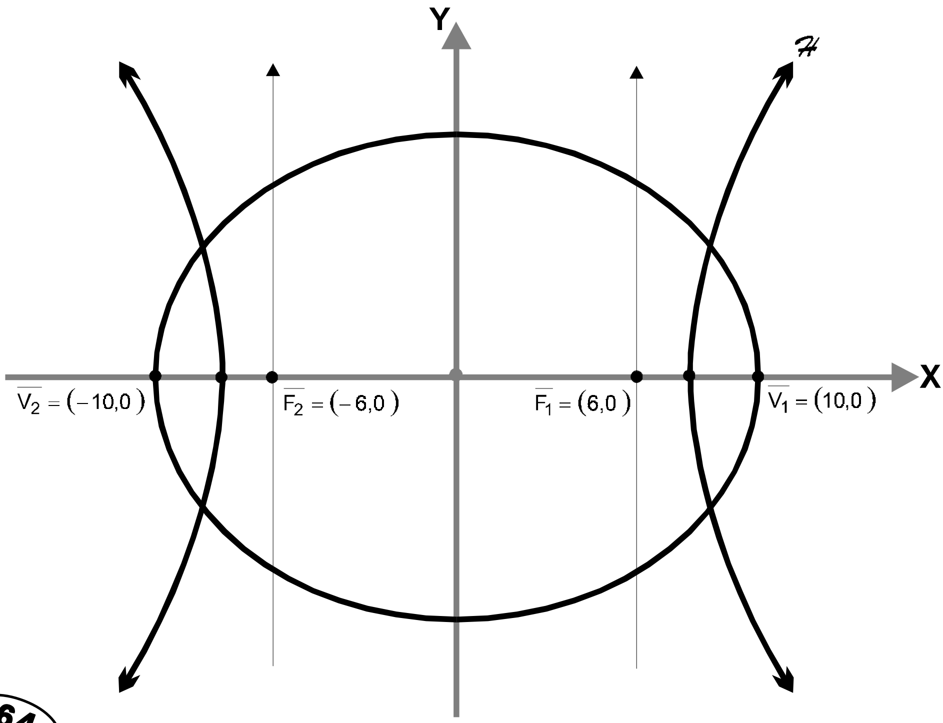
Por condición del problema : $x = c$; donde c es un valor obtenido en la elipse.

Luego en ①: $a^2 = 60$

Seguido : $b^2 = a^2 - c^2$ ➡ $b^2 = 100 - 60$ ➡ $b^2 = 40$

Por lo tanto : $H : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\boxed{H : \dfrac{x^2}{60} - \dfrac{y^2}{100} = 1}$$



73 Dada la ecuación de la hipérbola: $(x-4)^2/16 - y^2/128 = 1$, encontrar las coordenadas del centro, vértices y focos; la excentricidad; las ecuaciones de las directrices y asíntotas; y la longitud de la cuerda normal (lado recto).

Solución:

$$\text{Si} \quad H: \ \frac{(x-4)^2}{16} - \frac{y^2}{128} = 1 \longrightarrow \text{①}$$

se deduce que $\overline{C} = (h,k) = (4,0)$

Además:

- $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$ ◦ $b^2 = 128 \Rightarrow b = \pm 8\sqrt{2}$
- $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 128 = 144 \Rightarrow c = \pm 12$

$$\text{Vértice}: \quad \overline{V} = (h \pm a, k) = (4 \pm 4, 0) \Rightarrow \begin{cases} V_1 = (8,0) \\ V_2 = (0,0) \end{cases}$$

s:

$$\text{Focos}: \quad \overline{F} = (h \pm c, k) = (4 \pm 12, 0) \Rightarrow \begin{cases} F_1 = (16,0) \\ F_2 = (-8,0) \end{cases}$$

Ecuaciones de las directrices:

$$x = h \pm \frac{a}{e} = 4 \pm \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 16/3 \\ x = 8/3 \end{cases}$$

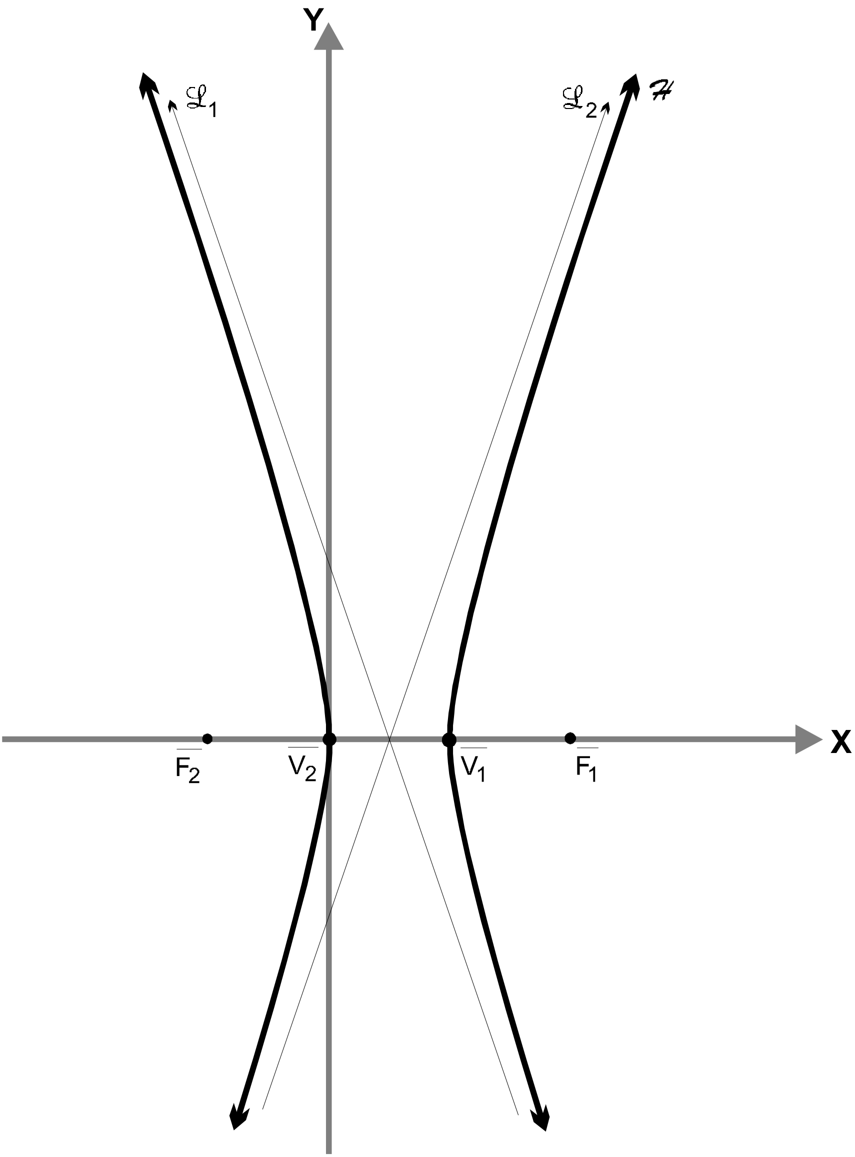
Ecuaciones de las asíntotas; en ①:

$$8(x-4)^2 - y - 128 = k$$

$$\Rightarrow \quad \left[2\sqrt{2}(x-4) + y\right] \cdot \left[2\sqrt{2}(x-4) - y\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ‹_1: \quad 2\sqrt{2}(x-4) + y = 0 \\ ‹_2: \quad 2\sqrt{2}(x-4) - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cuerda Normal}: \quad CN = \left| \frac{2b^2}{a} \right| = \left| \frac{2 \times 128}{4} \right| = \left| 64 \right| = 64$$



74 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $\overline{A}=(3,-2)$ y $\overline{B}=(7,6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

Solución:

$$\mathcal{H}: \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- $\overline{A}=(3,-2) \in \mathcal{H}: \ \Rightarrow \ \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1 \longrightarrow ①$
- $\overline{B}=(7,6) \in \mathcal{H}: \ \Rightarrow \ \frac{49}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1 \longrightarrow ②$

De ① y ②: $a^2=4; \quad b^2=16/5$

Luego: $\mathcal{H}: \ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16/5}=1$

$$\therefore \quad \boxed{\mathcal{H}: \ 4x^2-5y^2=16}$$

75 Un observador estacionado en el punto $\overline{P}$ oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de $\overline{P}$ es una hipérbola.

Solución:

Sean:
- V_b: Velocidad de la bala
- V_s: Velocidad del sonido

Además: $e=v\cdot t \ \Rightarrow \ t=\frac{e}{v}$

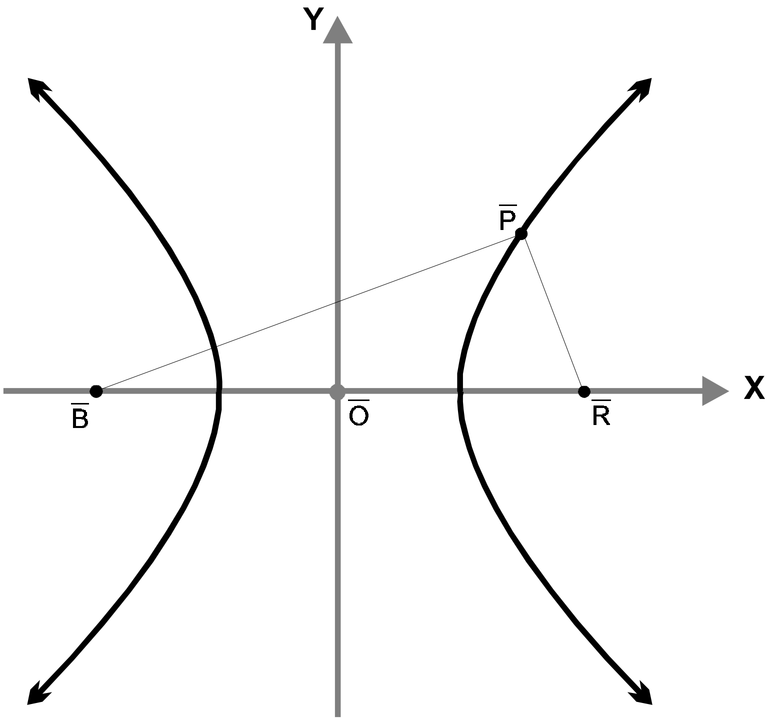
Por condición del problema: $\dfrac{\overline{RP}}{V_s} = \dfrac{\overline{BR}}{V_b} + \dfrac{\overline{BP}}{V_s} \longrightarrow ①$

De ① :

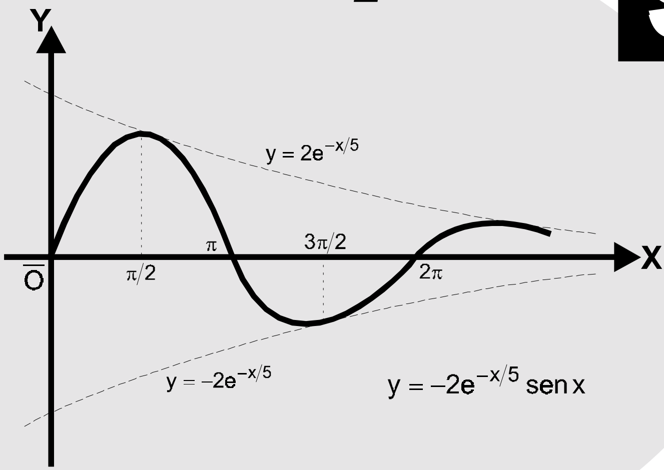
➡ $\dfrac{\overline{RP}}{V_s} - \dfrac{\overline{BP}}{V_s} = \dfrac{\overline{BR}}{V_b}$

➡ $\overline{RP} - \overline{BP} = V_s \times \dfrac{\overline{BR}}{V_b} = k$

➡ $\overline{RP} - \overline{BP} = k$ (Definición de hipérbola)
LQQD



Capítulo 9



CURVAS PLANAS DE GRADO SUPERIOR

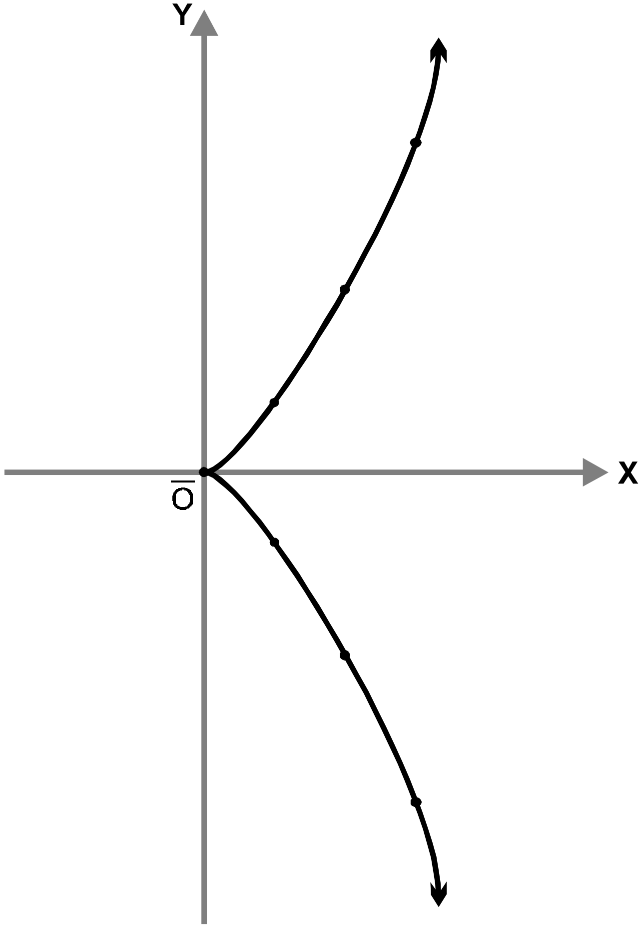
76 Trazar la curva potencial, cuya ecuación es: $y^2 = x^3$.

Solución:

- $y^2 = x^3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^3} \Rightarrow y = \pm x\sqrt{x}$; $\forall\ x \geq 0$

Cuadro de valores :

x	0	1	2	3	...
y	0	± 1	± 2.8	± 5.1	...



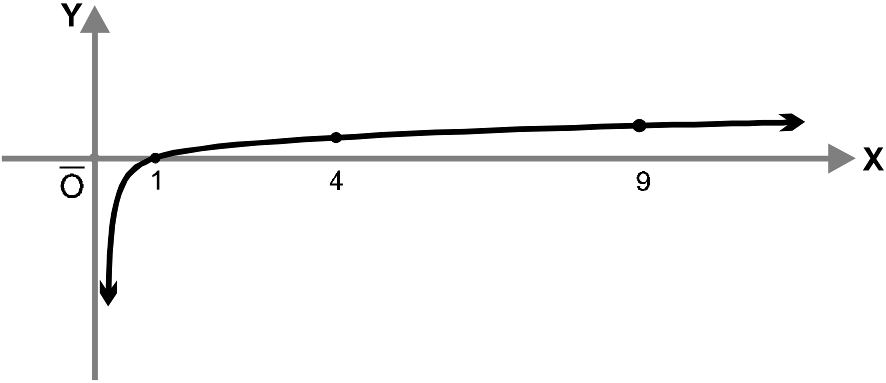
77 Trazar la curva logarítmica, cuya ecuación es: $y = \log_{10}\sqrt{x}$

Solución:

- $y = \log_{10}\sqrt{x}$; $\forall\ x > 0$

Cuadro de valores :

x	1	4	9	100	0.1	...
y	0	0.301	0.47	1	$-1/2$	...



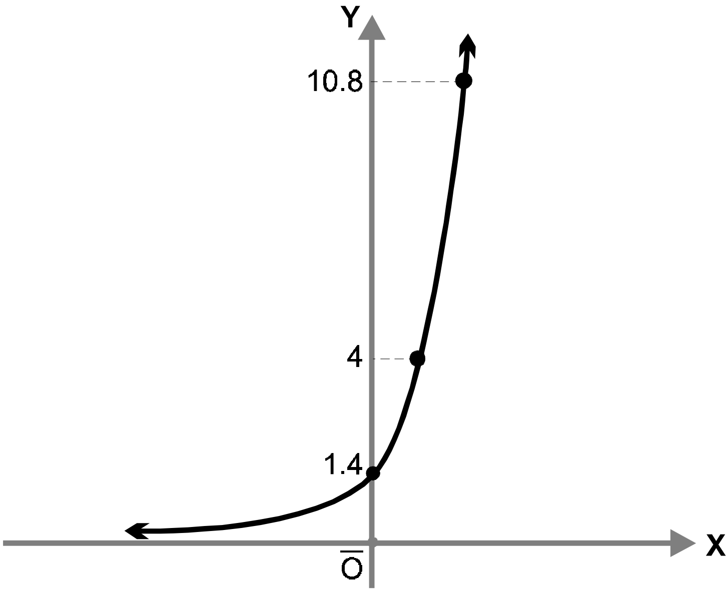
78 Trazar la curva exponencial, cuya ecuación es: $y = 4\,e^{x-1}$

Solución:

∘ $y = 4\,e^{x-1}$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Cuadro de valores :

x	0	1	2	−1	...
y	1.4	4	10.8	0.5	...

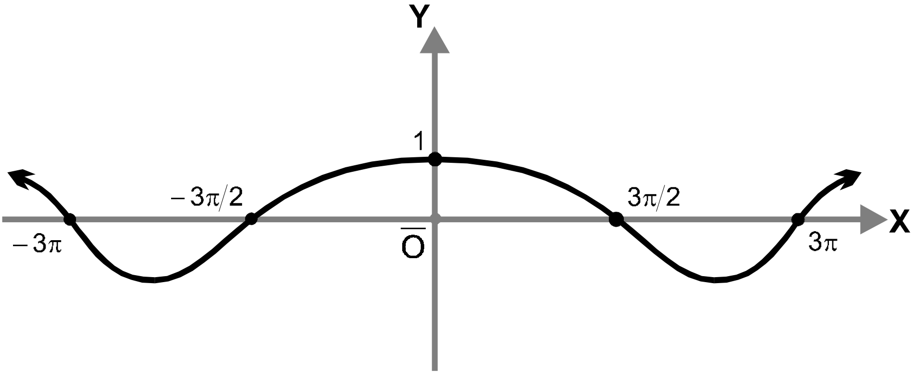


79 Trazar la curva, cuya ecuación es: $y = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Solución:

Cuadro de valores :

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
y	1	0.86	$1/2$	0	-0.86	$-1/2$	-1



80 La ley de Boyle - Mariotte establece que a una temperatura constante de presión p y el volumen v de un gas satisfacen la ecuación $p \cdot v = c$, para algún número real fijo c. Un cierto gas por debajo de una presión de 20 libras por pulgada cuadrada tiene un volumen de 300 pulgadas cúbicas. Hallar c de la ecuación: $p \cdot v = c$

Solución:

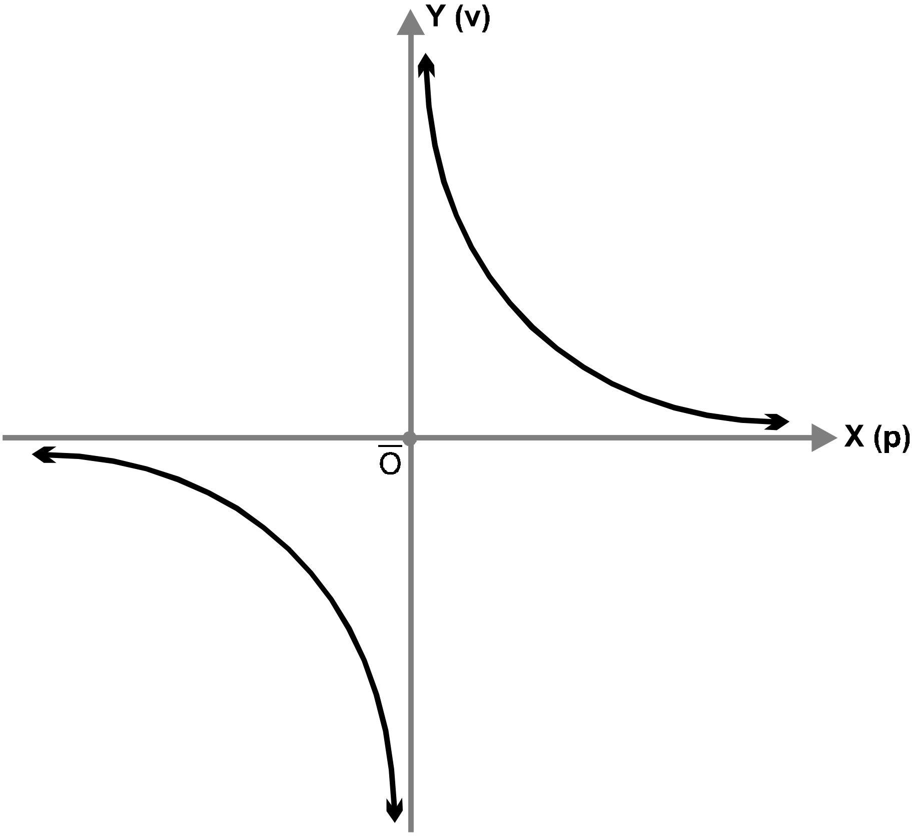
- $p \cdot v = c \quad \Rightarrow \quad c = 20 \times 300 \quad \Rightarrow \quad c = 6000$

Luego :

- $p \cdot v = 6000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \dfrac{6000}{p} \quad ; \quad \forall\, p \neq 0}$

Cuadro de valores :

x	1	6000	– 1	– 6000	...
y	6000	1	– 6000	– 1	...



Capítulo 10

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

1 ¿Para qué valor de h estará el punto $\overline{P} = (h,-3)$ en la recta determinada por $\overline{A} = (1,-1)$ y $\overline{B} = (4,7)$?

Rpta. : $\frac{1}{4}$

2 Demostrar que el triángulo cuyos vértices son $\overline{A} = (10,5)$, $\overline{B} = (3,2)$ y $\overline{C} = (6,-5)$ es rectángulo. Hallar el área.

Rpta. : $29\ u^2$

3 Si $\overline{A} = (5,12)$ es el punto medio del segmento BC y $\overline{B} = (-7,-3)$. ¿Cuáles son las coordenadas de $\overline{C}$?

Rpta. : $\overline{C} = (17,27)$

4 Discutir y graficar las curvas, cuyas ecuaciones son:

a) $x^2y^2 + 2x^2 - 4 = 0$

b) $y(x^2 + 4) = 10x$

5 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto cuya distancia de $\overline{A} = (-6,0)$ es dos veces su distancia de $\overline{B} = (6,0)$. Trazar la curva.

Rpta.: $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$

6 Hallar la ecuación de la recta que pasa por $\overline{P} = (5,3)$ y su X-interceptor es 10.

Rpta.: $3x - 5y - 30 = 0$

7 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\overline{P_1} = (7,4)$ y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje X.

Rpta.: $\sqrt{3}x + y - 4 - 7\sqrt{3} = 0$

8 Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas $x + 2y - 4 = 0$ y $4x - y - 2 = 0$, tal que forman con el primer cuadrante un triángulo de área $25\,u^2$.

Rpta.: $2x + y - 10 = 0$, $9x + 2y - 30 = 0$

9 Los puntos $\overline{X} = (3,-2)$, $\overline{Y} = (4,1)$ y $\overline{Z} = (-3,5)$ son los vértices de un triángulo. Hallar la ecuación de la recta perpendicular al lado XZ que pasa por $\overline{Y}$.

Rpta.: $6x - 7y - 17 = 0$

10 Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a ambos ejes, y su centro está en el cuarto cuadrante.

Rpta.: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{34}$

11 La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 10x = 28$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $\overline{A} = (3,7)$.

Rpta. : $2x - 7y + 43 = 0$

12 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias: $x^2 + y^2 + 2x + y - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ y por el punto $\overline{P} = (-3,0)$.

Rpta. : $3x^2 + 3y^2 + 10x + y + 3 = 0$

13 Por una traslación de ejes, simplificar la ecuación:

$2x^2 + y^2 + 3x - 7y - 1 = 0$

Rpta. : $16x'^2 + 8y'^2 = 115$

14 La parábola $y^2 = 2px$ tiene un extremo de la cuerda focal en el punto $\overline{A} = (8,8)$. Hallar las coordenadas del otro extremo.

Rpta. : $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

15 Un cable suspendido se carga de tal manera que toma la forma de una parábola. Los extremos tienen una separación de 400 pies y tienen una altura de 100 pies del centro. Hallar la altura del cable a 50 pies desde el centro.

Rpta. : 6.25 pies

16 Hallar la ecuación de la elipse con focos en $\overline{F_1}=(0,7)$ y $\overline{F_2}=(0,12)$, un vértice en $\overline{V}=(0,16)$.

Rpta.: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{(y-19/2)^2}{169/4}=1$

17 Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje menor sobre el eje Y, $e=4/5$, cuerda normal (lado recto) $18/5$.

Rpta.: $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

18 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje principal (real) sobre el eje X; pasa por los puntos $\overline{S}=(3,1)$ y $\overline{T}=(9,5)$.

Rpta.: $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$

19 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en $\overline{C}=(-1,8)$, con vértice en $\overline{V_1}=(3,8)$, $e=3$.

Rpta.: $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-8)^2}{128}=1$

20 Trazar la curva, cuya ecuación es: $y=x^2\cdot e^2$