

综合评价方法及其应用（数学建模）

评价

定义：评价是在多因素相互作用下的一种综合判断。

综合评价

综合评价的问题:对被评价对象所进行的客观、公正、合理的全面评价。通常的综合评价问题都是有若干个同类的被评价对象(或系统)，每个被评价对象往往都涉及到多个属性（或指标）。

问题分类：

1. 分类--对所研究对象的全部个体进行分类
2. 比较、排序
3. 综合目标的整体实现程度（必须有参考系）

综合评价问题五要素：

1. 被评价对象

通常情况下，在一个问题中被评价对象是属于同一类的，且个数要大于 1.

2. 评价指标

一个综合评价问题的评价指标一般可用一个向量表示，其中每一个分量就是从侧面反映系统的状态，即称为综合评价的指标体系。

评价指标体系应遵守的原则：系统性、科学性、可比性、可测性（即可观测性）和独立性。

3. 权重系数

每一综合评价的问题都有相应的评价目的，针对某种评价目的，各评价指标之间的相对重要性是不同的，评价指标之间的这种相对重要性的大小可以用权重系数来刻画。

当被评价对象和评价指标值都确定以后，综合评价结果就完全依赖于权重系数的取值了，即权重系数确定的合理与否，直接关系到综合评价结果的可信度，甚至影响到最后决策的正确性。

4. 综合评价模型

对于多指标（或多因素）的综合评价问题,就是要通过建立合适的综合评价数学模型将多个评价指标综合成为一个整体的综合评价指标，作为综合评价的依据，从而得到相应的评价结果。

5. 评价者

评价者是直接参与评价的人，可以是某一个人，也可以是一个团体。

综合评价步骤：

1. 确定综合评价的目的（分类？排序？实现程度？）
2. 建立评价指标体系
3. 对指标数据做预处理
 - （1）使所有的指标都从同一角度说明总体，这就提出了如何使指标一致化的问题；
 - （2）所有的指标可以相加，这就提出了如何消除指标之间不同计量单位（不同度量）对指标数值大小的影响和不能加总（综合）的问题，即对指标进行无量纲化处理——计算单项评价值。
4. 确定各个评价指标的权重
5. 求综合评价价值——将单项评价值综合而成。

评价指标的规范化处理：

宜少不宜多；具有独立性、代表性、可行性

评价指标类型的一致化

- 极大型指标:总是期望指标的取值越大越好；
- 极小型指标:总是期望指标的取值越小越好；
- 中间型指标:总是期望指标的取值既不要太大，也不要太小为好，即取适当的中间值为最好；
- 区间型指标:总是期望指标的取值最好是落在某一个确定的区间内为最好。

将极小型化为极大型：

倒数法：

$$x'_j = \frac{1}{x_j}$$

平移变换法：

$$x'_j = M_j - x_j$$

其中

$$M_j = \max_{0 \leq i \leq n} x_{ij}$$

将居中型化为极大型

x_j 取中间值 $\frac{M_j + m_j}{2}$ 为最好，要将其化为极大型指标，令

$$x'_j = \begin{cases} \frac{2(x_j - m_j)}{M_j - m_j}, & m_j \leq x_j \leq \frac{M_j + m_j}{2} \\ \frac{2(M_j - x_j)}{M_j - m_j}, & \frac{M_j + m_j}{2} \leq x_j \leq M_j \end{cases}$$

其中 $M_j = \max(x_{ij})$, $m_j = \min(x_{ij})$

将区间型化为极大型

对某个区间型数据指标 x ，则

$$x' = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{c}, & x < a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-b}{c}, & x > b \end{cases}$$

其中 $[a, b]$ 为 x 的最佳稳定区间, $c = \max\{a - m, M - b\}$, M 和 m 分别为 x 可能取值的最大值和最小值。

定性指标的量化处理

根据实际问题，构造模糊隶属函数的量化方法是一种可行有效的方法

无量纲化处理又称为指标数据的标准化,或规范化处理。

常用方法:标准差方法、极值差方法和功效系数方法等

(1) 标准差方法: 令 $x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$),

其中 $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$, $s_j = [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2]^{1/2}$ ($j = 1, 2, \dots, m$)。

显然指标 x'_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) 的均值和均方差分别为 0 和 1, 即 $x'_{ij} \in [0, 1]$ 是无量纲的指标, 称之为 x_{ij} 的标准观测值。

(2) 极值差方法: 令 $x'_{ij} = \frac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$),

其中 $M_j = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_{ij}\}$, $m_j = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_{ij}\}$ ($j = 1, 2, \dots, m$)。则 $x'_{ij} \in [0, 1]$ 是无量纲的指标观测值。

(3) 功效系数法: 令 $x'_{ij} = c + \frac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j} \times d$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$),

其中 c, d 均为确定的常数。 c 表示“平移量”, d 表示“旋转量”, 即表示“放大”或“缩小”倍数, 则 $x'_{ij} \in [c, c + d]$ 。

譬如若取 $c = 60, d = 40$, 则 $x'_{ij} \in [60, 100]$ 。

综合评价模型的建立方法

为了全面地综合分析评价被评价对象的运行（或发展）状况，如果已知 n 个状态向量（即 n 组观测值） $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})^T (i=1, 2, \dots, n)$ ，则根据 m 个评价指标的实际影响作用，确定相应的权重向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ ，且选择合适的数学方法构造综合评价函数（即综合评价模型）

$$y = f(\mathbf{w}, \mathbf{x}),$$

由此计算综合评价指标函数值 $y_i = f(\mathbf{w}, \mathbf{x}^{(i)}) (i=1, 2, \dots, n)$ ，并按 $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 取值的大小对 n 个系统进行排序或分类。

线性加权综合法

线性加权综合法：用线性加权函数 $y = \sum_{j=1}^m w_j x_j$

作为综合评价模型，对 n 个系统进行综合评价。

线性加权综合法的适用条件：各评价指标之间相互独立。

对于不完全独立的情况采用该方法，其结果将导致各指标间信息的重复，使得评价结果不能客观地反映实际。

特点：

- 该方法能使得各评价指标间作用得到线性补偿，保证综合评价指标的公平性；
- 该方法中权重系数的对评价结果的影响明显，即权重较大指标值对综合指标作用较大；
- 当权重系数预先给定时，该方法使评价结果对于各备选方案之间的差异表现不敏感；
- 该方法计算简便，可操作性强，便于推广使用。

非线性加权综合法

非线性加权综合法：用非线性函数 $y = \prod_{j=1}^m x_j^{w_j}$ 作为

综合评价模型，对 n 个系统进行综合评价。其中 w_j 为权系数，且要求 $x_j \geq 1$ 。

非线性加权综合法适用于各指标间有较强关联的情况。

主要特点：

- （1）对数据要求较高，指标数值不能为0、负数，
- （2）乘法容易拉开评价档次，对较小数值的变动更敏感

层次分析模型

层次分析法是将与决策总是有关的元素分解成目标、准则、方案等层次，在此基础上进行定性和定量分析的决策方法。

逼近理想点（TOPSIS）方法

实际中，经常会遇到这样的一类综合评价问题，即首先设定系统的一个理想（样本）点，然后对于每一个被评价对象与理想点进行比较。如果某一个被评价对象在某种意义下与理想点最接近,则可以认为被评价对象就是最好的。

假设理想点（系统）为 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$ ，对于一个被评价对象 $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$ ，定义二者之间的加权距离为

$$y_i = \sum_{j=1}^m w_j f(x_{ij}, x_j^*), i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 w_j 为权系数， $f(x_{ij}, x_j^*)$ 为 x_{ij} 与 x_j^* 之间的某种意义下距离。

通常情况下可取简单的欧氏距离，即取 $f(x_{ij}, x_j^*) = (x_{ij} - x_j^*)^2$ ，

则综合评价函数为 $y_i = \sum_{j=1}^m w_j (x_{ij} - x_j^*)^2, i = 1, 2, \cdots, n$ 。

经过计算，按照 $y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 值的大小对各被评价方案进行排序选优，显然是其值越小方案就越好。特别地，当某个 $y_i = 0$ 时，即达到了理想点，则对应的方案就是最优的。

模糊综合评价法

模糊综合评价方法是模糊数学中应用的比较广泛的一种方法，对一些具有模糊概念的系统（评价对象），在进行评价时很难给出确切的表达，对受多种因素影响的事物做出全面评价的一种十分有效的多因素决策方法，其特点是评价结果不是绝对地肯定或否定，而是以一个模糊集合来表示。

综合评判方法及步骤

步骤一 建立评价论域

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, u_i \text{表示各个评判项目。}$$

步骤二 确定评判项目的权重。

以模糊向量 A 作为权重向量， $\tilde{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), (0 < a_i < 1)$ ，且 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。 \tilde{A} 亦为评判目标在论域中表现的模糊子集。

步骤三 确定评语等级论域即确定了评语等级论域，记为

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$$

步骤四 建立模糊关系矩阵

$$\tilde{R}$$

步骤五 综合评判运算

$$\tilde{B} = \tilde{A} \times \tilde{R}$$

步骤六 应用综合评判结果进行比较分析

得到 B 向量，我们可以对各综合评判结果进行比较，有两种方法可以选用：一是最大隶属度法，第二是加权平均法。

最大隶属度法的局限性有：

(1)它只考虑隶属度大的评语，舍弃评判对象隶属于其他评语等级的信息；

(2)当隶属度最大的评语等级不止一个时，难于确定最终评语；

(3)如果进行比较评判的对象最终评语为中性评语等级,则无法按隶属度作进一步排序。

加权平均法：对各评语等级赋值，赋值变量 V_j' 可选择与评语等级相关的指标，然后，以评判对象对各评语等级的隶属度 b_j 为权数，计算 V_j' 的加权算术平均数 \bar{V}' ， \bar{V}' 计算公式如下：

$$\bar{V}' = \sum_{j=1}^n V_j' b_j / \sum_{j=1}^n b_j$$

如果 V' 是越大越好的变量，则 \bar{V}' 也是越大越好，且为最终评判分，反之亦然。将最终评判分排序，即得到评判对象的排序。

模糊综合评判模型

1)单层次模糊综合评判模型

给定两个有限论域

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_m) \quad (9.4.1)$$

$$V = (V_1, V_2, \dots, V_m) \quad (9.4.2)$$

U 代表所有的评判因素所组成的集合； V 代表所有的评语等级所组成的集合。

如果着眼于第 $i(i=1, 2, \dots, m)$ 个评判因素 u_i ，其单因素评判结果为 $R_i=[r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}]$ ，则 m 个评判因素的评判决策矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

就是 U 到 V 上的一个模糊关系。

如果对各评判因数的权数分配为： $A=[a_1, a_2, \dots, a_m]$ （显然， $0 \leq a_i \leq 1, \sum_{i=1}^m a_i = 1$ ）
 A 是论域 U 上的一个模糊子集，且

则应用模糊变换的合成运算，可以得到论域 V 上的一个模糊子集，即综合评判结果：

$$B = A \times R = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

其他综合评价模型

评价方法类别：

- 专家评价法：专家打分法
- 运筹学等数学方法：AHP、模糊综合评价、DEA等
- 新型评价法：人工神经网络（BP）、灰色综合评价等
- 混合方法：AHP-模糊综合评价等

综合评价方法的评价

- 作为一个好的综合评价方法，不但要简便易行，更重要的是正确有效。
- 从统计上来看，可从评价指标的选择、评价标准的制定、指标值的标化、指标的权重和综合方法等方面来评价。

其他模型详情：

https://pan.baidu.com/s/1QSAInZ1WP7z_96GgMIBN1Q