Mathmatical Workbook

作者：王乐凯

时间：July 14, 2024

版本：0.8

出身寒微不是耻辱，能屈能伸方为丈夫.——邓艾

目录

第 1 章 习题集

1.1 野生杂题

引理 1.1

设

$$u = e^{|x|^k}, \quad v = \ln(|x|), \quad w = |x|^k, \quad y = e^{-|x|^k}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

求

$$\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \Delta y, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu}$$

ν为 B^1 的单位外法向量.

解

$$u_{x_i} = e^{|x|^k} k|x|^{k-1} \frac{x_i}{|x|} = e^{|x|^k} k|x|^{k-2} x_i$$

$$u_{x_i x_i} = e^{|x|^k} [(k^2|x|^{2k-4} x_i^2) + k|x|^{k-2} + kx_i^2(k-2)|x|^{k-4}]$$

故

$$\Delta u = e^{|x|^k} [k^2|x|^{2k-2} + (Nk + k(k-2))|x|^{k-2}] = e[2k^2 + Nk - 2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = e^{|x|^k} k|x|^{k-1} = ek$$

$$v_{x_i} = \frac{x_i}{|x|^2}, \; v_{x_i x_i} = \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4},$$

故

$$\Delta v = \frac{N|x|^2 - 2|x|^2}{|x|^4} = \frac{N-2}{|x|^2} = N - 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \nu = \frac{1}{|x|} = 1$$

$$w_{x_i} = kx_i|x|^{k-2}, \; w_{x_i x_i} = k|x|^{k-2} + k(k-2)x_i^2|x|^{k-4}$$

故

$$\Delta = Nk|x|^{k-2} + k(k-2)|x|^{k-2} = k(N+k-2)|x|^{k-2} = k(N+k-2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \nabla w \cdot \nu = \frac{k}{|x|} = k$$

$$\Delta y = e^{-|x|^2}[k^2|x|^{2k-2} - (Nk + k^2 - 2k)|x|^{k-2}] = e^{-1}(2k - Nk)$$
$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = e^{-|x|^k}(-k|x|^{k-1}) = -ke^{-1}$$

问题 1.1 设 $u \in C^2(\bar{B})$ 是如下问题

$$\begin{cases} -\Delta u + 4Ne^{|x|^2}u = N\cos|x|, & x \in B \\ u(x) = 1, & x \in \partial B \end{cases}$$

的解, 其中 $N \geqslant 3$, $B \subset \mathbb{R}^N$ 单位球.
证明:1:$0 < u(x) \leqslant 1$.
2:$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \geqslant 1$, $x \in \partial B$, ν 为 ∂B 的单位外法向量.
解 $g(x) = |x|^k$, $\Delta g = k(k+N-2)|x|^{k-2}$, $\frac{\partial g}{\partial \nu} = 1$.
1. 定义线性椭圆算子

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + 4Ne^{|x|^2}u,\ x \in B$$

令 $v(x) = 1$, $w(x) = \frac{1}{N^\alpha}$, 当 α 足够大时有

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = 4Ne^{|x|^2} \geqslant 4N \geqslant N \geqslant N\cos|x| = \mathcal{L}u, & x \in B \\ v(x) = 1 \geqslant 1 = u(x) & x \in \partial B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = \frac{4Ne^{|x|^2}}{N^\alpha} \leqslant \frac{4N}{N^\alpha} \leqslant N\cos 1 \leqslant N\cos|x| = \mathcal{L}u, & x \in B \\ 0 < w(x) = \frac{1}{N^\alpha} \leqslant 1 = u(x), & x \in \partial B \end{cases}$$

由比较原理有 $0 < \frac{1}{N^\alpha} \leqslant u(x) \leqslant 1$, $x \in \bar{B}$.
2. 令 $v(x) = \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}$, 有

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = -\frac{N}{2} + 4Ne^{|x|^2}(\frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}) \geqslant 2N - \frac{N}{2} \geqslant N \geqslant N\cos|x| = \mathcal{L}u, & x \in B \\ v(x) = 1 = u(x), & x \in \partial B \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = 1, & x \in \partial B \end{cases}$$

故对任意 $x \in \partial B$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{u(x) - u(x - \sigma\nu)}{\sigma} \geqslant \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{v(x) - v(x - \sigma\nu)}{\sigma} = 1$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \geqslant 1.$$

问题 1.2 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 $z=0$ 解析, 且 $f(0)\neq 0,\ g(0)=g'(0)=0,\ g''(0)\neq 0$. 试证:$z=0$ 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的二级极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{2f'(0)}{g''(0)}-\frac{2f(0)g'''(0)}{3\left[g''(0)\right]^2}$$

解 由题目所给不难证明 $z=0$ 为 $g(z)$ 的二阶零点, 且不是 $f(z)$ 的零点, 故为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的二级极点.

令 $g(z)=z^2\varphi(z)$, 0不是$\varphi(z)$ 的零点且 $\varphi(0)\neq 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{f(z)}{z^2\varphi(z)}\right]=\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{f(z)}{z^2\varphi(z)}\right]'=\lim_{z\to 0}\frac{f'\varphi-f\varphi'}{\varphi^2}$$

由 $g(z)=z^2\varphi(z)$ 得 $\varphi(z)=\frac{g(z)}{z^2}$. 对该式右端进行两次 L'Hospital 可得到 $\lim\limits_{z\to 0}\varphi(0)=\frac{g''(0)}{2}$.

$\lim\limits_{z\to 0}\varphi'(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{zg'-2g}{z^3}$. 对该式用三次 L'Hospital 可得 $\lim\limits_{z\to 0}\varphi'(z)=\frac{g'''(0)}{6}$. 将上两步求得的极限代入可得最终结果.

问题 1.3 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^2\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)=\frac{3}{2}$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n}$.

解 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，易知 $\{S_n\}$ 严格单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 不然与题设矛盾.
由 Larange 中值定理知

$$S_{n+1}^{\frac{3}{2}}-S_n^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(S_{n+1}-S_n\right)\sqrt{\xi}=\frac{3}{2}a_{n+1}\sqrt{\xi},\quad \xi\in(S_n,\ S_{n+1})$$

又

$$a_{n+1}\sqrt{S_n}<a_{n+1}\sqrt{\xi}<a_{n+1}\sqrt{S_{n+1}}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\sqrt{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2\sum_{k=1}^{n}a_k}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\sqrt{S_n}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^2S_{n+1}-a_{n+1}^3\right)}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^2S_{n+1}\right)}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

故由夹挤定理知

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\sqrt{\xi}=\sqrt{\frac{3}{2}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_{n+1}^{\frac{3}{2}}-S_n^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

由 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\sqrt{S_n}\sqrt[3]{n}}{\sqrt{S_n}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\lim_{n\to}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{S_n}}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-n)}{S_{n+1}^{\frac{3}{2}}-S_n^{\frac{3}{2}}}}\\&=1.\end{aligned}$$

问题 1.4 计算
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n$$

解

$$\text{原式}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\ln\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\\
=&\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\\
=&\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
=&\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
=&\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{1}{n}\left[n-\frac{n(n+1)}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
=&\lim_{n\to\infty} n\ln\left[1-\frac{n+1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{n+1}{4n^2}\right)\\
=&-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

故原式结果为 $e^{-\frac{1}{4}}$.

问题 1.5 已知 $a_n=\int_0^1 x(1-x^3)^n\,\mathrm{d}x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

解 法 I:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\int_0^1 x(1-x^3)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^3)^{n+1}\,\mathrm{d}x^2\\
&=\frac{1}{2}x^2(1-x^3)^{n+1}\Big|_0^1+\frac{3(n+1)}{2}\int_0^1 x^4(1-x^3)^n\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{3(n+1)}{2}\int_0^1[x-x(1-x^3)](1-x^3)^n\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{3(n+1)}{2}a_n-\frac{3(n+1)}{2}a_{n+1}\\
&=\frac{3n+3}{3n+5}a_n
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

法 II:

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_0^1 x(1-x^3)^n\,\mathrm{d}x\left[\text{换元令}t=x^3\right]\\
&=\frac{1}{3}\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^n\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{2}{3},\ n+1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{B}\left(\frac{2}{3},\ n+2\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{2}{3},\ n+1\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(n+2\right)\Gamma\left(n+\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma(n+\frac{8}{3})}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+\frac{5}{3}}=1.
\end{aligned}$$

问题 1.6 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上连续且单调递减, 证明: 当 $0 \le \lambda \le 1$ 时,

$$\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x \ge \lambda \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 法 1: 构造辅助函数

$$F(x) = \lambda \int_0^x [f(\lambda t) - f(t)]\ \mathrm{d}t, \qquad x \in [0,\ 1],$$

则有

$$F'(x) = \lambda\,[f(\lambda x) - f(x)]\,.$$

因为 $\lambda \in [0,\ 1]$, 所以 $x \ge \lambda x \ge 0$, 又 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(\lambda x) \ge f(x)$. 于是 $F'(x) \ge 0$, 即 $F(x)$ 单调递增, 故 $F(1) \ge F(0) = 0$, 即 $\lambda \int_0^1 [f(\lambda x) - f(x)]\ \mathrm{d}t \ge 0$. 原题得证.

法 2: 因为

$$\lambda \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \left[\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \lambda \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = (1-\lambda) \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由积分中值定理, 存在 $\xi \in [0,\ \lambda]$, $\eta \in [\lambda,\ 1]$, 使

$$\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\lambda, \qquad \int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta)(1-\lambda).$$

又因为 $f(x)$ 单调递减, $\xi \le \eta$, 知 $f(\xi) \ge f(\eta)$. 于是

$$(1-\lambda) \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(1-\lambda)\,[f(\xi) - f(\eta)] \ge 0,$$

即 $\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x \ge \lambda \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 原题得证.

问题 1.7 数列 $\{a_n\} = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

解 令 $a_n = 2\cos b_n$ 首先 $b_1 = \frac{\pi}{4}$

$$2\cos b_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos b_n} = 2\cos\frac{b_n}{2} \Rightarrow a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\sin\pi = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 2^2\sin\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2} = \cdots = 2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

这里仅对最后一步化简进行详细展开, 将 $\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$ 表示成 $\sin\pi$ 的形式有

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{\sin\pi\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2}}$$

当 $n\to\infty$ 时, $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 1, \sin\frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$.

问题 1.8 证明下述极限:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)-\int_a^b f(x)dx\right)\right]=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]$$

证明: 令

$$x_k=a+\frac{b-a}{n}k,\ x_{k-1}=a+\frac{b-a}{n}(k-1),\ x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left[\left(x_k-x_{k-1}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x_k)-f(x)\right)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'(\xi_1)(x_k-x)\mathrm{d}x\right]\ [\text{Larange 中值定理}]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_2)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[(x_k-x)\mathrm{d}x\right]\ [\text{积分第一中值定理}]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\left[f'(\xi_2)\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\left[f'(\xi_2)\frac{(b-a)^2}{2n^2}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_2)\\
&=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]
\end{aligned}$$

问题 1.9 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n\sqrt{n-1}}+\frac{\sqrt{2}}{2n\sqrt{n-\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{n-\frac{1}{n}}}\right)$$

解 这里只对这个数列的一般项进行处理, 变化成定积分定义的形式:

$$\text{当}n\to\infty\text{时}, \frac{\sqrt{k}}{2n\sqrt{n-\frac{1}{k}}}\sim\frac{\sqrt{k}}{2n\sqrt{n}}$$

故

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

问题 1.10 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+2)}$$

收敛并求其和.

解 令

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n n^{\frac{3}{2}}}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n n^{\frac{3}{2}}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}-s_n}{(n+1)^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1}=0.$$

由 P-级数判别法知该级数收敛.

令

$$a_n=\frac{s_n}{n(n+2)}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}a_n&=\frac{1}{2}\left[s_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[s_1\left(1-\frac{1}{3}\right)+s_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+s_3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+s_4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[s_1+\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{3}(s_3-s_1)+\frac{1}{4}(s_4-s_2)+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{7}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

问题 1.11 计算积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

解 令 $t = 2\arctan x$, 则

$$\mathrm{d}t = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad x = \tan\frac{t}{2}$$

以及

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 2\frac{\tan\frac{t}{2}}{\sec^2\frac{t}{2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{2\arctan x}{\frac{2x}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$$

其中 $\arctan x$ 用级数展开:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n-1} \quad (x^2 < 1)$$

把 $\arctan x$ 的展开式代入, 并逐项积分, 得到

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}\,\mathrm{d}x$$

根据积分号与求和号可以互换的原则, 得到

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = G$$

因此得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = 2G$$

此处 G 为卡塔兰常数.

问题 1.12 设
$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{1+x^2}}$$
试建立递推公式.

解

$$\begin{aligned}
I_n &= \int\frac{x}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}\\
&=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+\int\sqrt{x^2+1}\frac{n+1}{x^{n+2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+(n+1)\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}x^{n+2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+(n+1)\left[\int\frac{1}{x^{n+2}\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^n\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+(n+1)\left(I_n+2+I_n\right)
\end{aligned}$$

故 $nI_n+(n+1)I_{n+2}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}$.

问题 1.13 当 $\|\boldsymbol{H}\|_\infty < 1$ 时, $\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{H}\|_\infty < 1$, 因而 Seidel 迭代法收敛.

解

$$x^{(k+1)} = (I-L)^{-1}Ux^{(k)} + (I-L)^{-1}g \tag{1.1}$$

利用误差向量的定义知

$$y_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} y_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} h_{ij} y_j^{(k)}.$$

于是

$$\left|y_i^{(k+1)}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} |h_{ij}| \left|y_j^{(k+1)}\right| + \sum_{j=i}^{n} |h_{ij}| \left|y_j^{(k)}\right|$$

令

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |h_{ij}|, \qquad \gamma_i = \sum_{j=i}^{n} |h_{ij}|, \qquad \left|y_{i_0}^{(k+1)}\right| = \max_i \left|y_i^{(k+1)}\right|$$

由此得到

$$\left\|\boldsymbol{y}^{(k+1)}\right\|_\infty \leqslant \frac{\gamma_{i_0}}{1-\beta_{i_0}} \left\|\boldsymbol{y}^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \max_i \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} \left\|\boldsymbol{y}^{(k)}\right\|_\infty = \mu' \left\|\boldsymbol{y}^{(k)}\right\|_\infty,$$

此处, $\mu' = \max_i \frac{\gamma_i}{1-\beta_i}$. 由上式和(1.1)式可以得到 $\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right\|_\infty \leqslant \mu'$. 现在证明 $\mu' \leqslant \mu$. 事实上, 由 $\beta_i + \gamma_i \leqslant \|\boldsymbol{H}\|_\infty < 1$ 得

$$\beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \frac{\beta_i\left(1-\beta_i-\gamma_i\right)}{1-\beta_i} \geqslant 0,$$

于是

$$\beta_i + \gamma_i \geqslant \frac{\gamma_i}{1-\beta_i}.$$

上式两端对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 取最大值, 便得到 $\mu' \leqslant \mu = \|\boldsymbol{H}\|_\infty$.

问题 1.14 若 $\|\boldsymbol{H}\|_1<1$，则 Seidel 迭代法收敛.

解 记 $\overline{\boldsymbol{H}}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$. 设 λ 为 $\overline{\boldsymbol{H}}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 为其相应的左特征向量, 即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$$

或者

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})$，于是有

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\lambda\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}) \tag{1.2}$$

设 $|y_{j_0}|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|y_j|$. 考虑 (1.2)的第 j_0 个分量有

$$\sum_{i=1}^{j_0}h_{ij_0}y_i=\lambda\left(y_{j_0}-\sum_{i=j_0+1}^{n}h_{ij_0}y_i\right)$$

由此得

$$\begin{aligned}|y_{j_0}|\sum_{i=1}^{j_0}|h_{ij_0}|\geqslant\left|\sum_{i=1}^{j_0}h_{ij_0}y_i\right|&=|\lambda|\left|y_{j_0}-\sum_{i=j_0+1}^{n}h_{ij_0}y_i\right|\\&\geqslant|\lambda|\left(|y_{j_0}|-\sum_{i=j_0+1}^{n}|h_{ij_0}|\,|y_i|\right)\\&\geqslant|\lambda|\,|y_{j_0}|\left(1-\sum_{i=j_0+1}^{n}|h_{ij_0}|\right),\end{aligned}$$

于是

$$|\lambda|\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{j_0}|h_{ij_0}|}{1-\sum_{i=j_0+1}^{n}|h_{ij_0}|}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{j_0}|h_{ij_0}|+\sum_{i=j_0+1}^{n}|h_{ij_0}|=\sum_{i=1}^{n}|h_{ij_0}|\leqslant\|H\|_1<1,$$

有

$$|\lambda|\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{j_0}|h_{ij_0}|}{1-\sum_{i=j_0+1}^{n}|h_{ij_0}|}<\frac{\sum_{i=1}^{j_0}|h_{ij_0}|}{\sum_{i=1}^{n}|h_{ij_0}|-\sum_{i=j_0+1}^{n}|h_{ij_0}|}=\frac{\sum_{i=1}^{j_0}|h_{ij_0}|}{\sum_{i=1}^{j_0}|h_{ij_0}|}=1.$$

从而可知

$$\rho(\overline{\boldsymbol{H}})<1,$$

即 Seidel 迭代法收敛.

问题 1.15 计算

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}}{x^3}.$$

解 分子取对数有 $\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)}{x}}$. 由拉格朗日中值定理得

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)}{x}}=f'(\xi)\left[\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)}{x}-\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)}{x}\right]$$

其中 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $f'(x)=\mathrm{e}^x$, ξ 介于 $\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)}{x}$ 与 $\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)}{x}$ 之间. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=2$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\xi=2$, 则 $I=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)-\ln\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)}{x^4}$. 由拉格朗日中值定理得

$$\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)-\ln\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)=g'(\eta)\left[\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)-\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)\right]$$

其中 $g(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x}$, η 介于 $\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x$ 与 $\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x$ 之间. 因为

$$\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)=1$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\eta=1$, 则 $I=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{\sin x}-\sin x\right)-\left(\mathrm{e}^{\tan x}-\tan x\right)}{x^4}$. 由拉格朗日中值定理得

$$\left(\mathrm{e}^{\sin x}-\sin x\right)-\left(\mathrm{e}^{\tan x}-\tan x\right)=h'(\zeta)(\sin x-\tan x)$$

其中 $h(x)=\mathrm{e}^x-x$, $h'(x)=\mathrm{e}^x-1$, ζ 介于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间. 因为

$$\sin x\sim x$$
$$\tan x\sim x$$

所以 $\zeta\sim x$, 则 $I=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{\zeta}-1\right)(\sin x-\tan x)}{x^4}=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^3\right)}{x^4}=-\frac{\mathrm{e}^2}{2}$. 综上所述

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\tan x\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\mathrm{e}^{\tan x}+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}}{x^3}=-\frac{\mathrm{e}^2}{2}$$

问题 1.16 计算积分:

$$\int_0^\infty \sin x^n \, \mathrm{d}x$$

解 法一:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin\left(x^n\right) dx &= \frac{1}{n}\int_0^\infty x^{\frac{1}{n}-1}\sin(x)dx \quad \left(x^n \mapsto x\right) \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty u^{-\frac{1}{n}}e^{-xu}du\right)\sin(x)dx \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{n}}\left(\int_0^\infty e^{-xu}\sin(x)dx\right)du \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{n}}}{1+u^2}du \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{1}{n}}(\theta)d\theta \quad (u=\tan\theta) \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{n}}(\theta)\cos\frac{1}{n}(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{1-n}{2},\frac{1+n}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2n\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

法二: 令 $f(z)=e^{-z^n}$, 构造在第一象限角度为 $\frac{\pi}{2n}$ 扇形区域, 由留数定理

$$\int_0^R \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\mathrm{e}^{-z^n}\,\mathrm{d}z+\int_{L_2}\mathrm{e}^{-z^n}\,\mathrm{d}z=0,$$

先计算 $\int_{L_2}\mathrm{e}^{-z^n}\,\mathrm{d}z$, 令

$$z=x\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2n}\mathrm{i}},\ z^n=\mathrm{i}x^n,\ \mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2n}\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_{L_2}\mathrm{e}^{-z^n}\,\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2n}\mathrm{i}}\int_R^0 e^{-\mathrm{i}x^n}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{n}{2\pi}\mathrm{i}}\int_0^R\left[\cos(x^n)-\mathrm{i}\sin(x^n)\right]\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\mathrm{e}^{-z^n}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}\lim_{z\to+\infty}ze^{-z^n}=0.$$

最后计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$

令 $x^n=t$, $x=t^{\frac{1}{n}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

所以 $R\to\infty$ 时

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2n}i}\int_0^{+\infty}\left[\cos\left(x^n\right)-i\sin\left(x^n\right)\right]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\int_0^{+\infty}\cos\left(x^n\right)\,\mathrm{d}x-i\int_0^{+\infty}\sin\left(x^n\right)\,\mathrm{d}x=\frac{e^{-\frac{\pi}{2n}i}}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\sin\frac{\pi}{2n}$$

比较实部与虚部, 得

$$\int_0^{+\infty}\cos\left(x^n\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\cos\frac{\pi}{2n}$$
$$\int_0^{+\infty}\sin\left(x^n\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\sin\frac{\pi}{2n}$$

当 $n=2$ 时, 得到著名的 Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

问题 1.17 计算 Dirichlet 积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

解 1. Fourier 正弦展开

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{m \to \infty} \int_0^{m\pi} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

令$h = \frac{\pi}{k}$, 将区间$[0, \ m\pi]$分割成km个长度为h的小区间, 由黎曼积分的定义

$$\int_0^{m\pi} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{h \to 0^+} \sum_{n=1}^{km} \frac{\sin nh}{nh} h = \lim_{h \to 0^+} \sum_{n=1}^{km} \frac{\sin nh}{n}$$

由 Fourier 正弦展开

$$\frac{\pi - h}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n}, \ (0 < h < \pi)$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x &= \lim_{m \to \infty} \int_0^{m\pi} \frac{\sin x}{\mathrm{x}} \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{m \to \infty} \lim_{h \to 0^+} \sum_{n=1}^{km} \frac{\sin nh}{n} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{km} \frac{\sin nh}{n} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{\pi - h}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

2. 交换积分次序

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \sin x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \sin x \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x \quad (\text{交换积分次序}) \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{yx} \sin x \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-yx} \sin x \, \mathrm{d}y &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-yx} \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_0^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-(y-\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{-(y+\mathrm{i})x} \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(-\frac{1}{y-\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-(y-\mathrm{i})x} + \frac{1}{y+\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-(y+\mathrm{i})x} \right) \Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{y-\mathrm{i}} - \frac{1}{y+\mathrm{i}} \right) \\
&= \frac{1}{y^2+1}
\end{aligned}$$

故
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \arctan y|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

3. 构造含参变量函数

记 $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, 构造函数 $f(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, 则 $f(0) = I$.
$$0 \le |f(x)| \le \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \le \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$
两边取极限, $x \to \infty$, $f(\infty) = 0$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{x^2+1} \qquad \text{(由上一方法中的结果)} \end{aligned}$$
由牛顿-莱布尼兹公式
$$0 - I = f(\infty) - f(0) = \int_0^{\infty} f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d} = -\arctan x|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{2}$$
所以 $I = \frac{\pi}{2}$.

4. Laplace 变换

令 $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$, $t > 0$, 对 $f(t)$ 作拉普拉斯变换, 令
$$\begin{aligned} F(x) = \mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}\left[\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x\right]_t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\mathscr{L}[\sin tx]_t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{s\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{s}\right)^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{s}\right) \qquad \left(\text{let } u = \frac{x}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s}\arctan u\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
则
$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{\pi}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{\pi}{2}.$$
令人惊奇的是, $f(t)$ 的值竟与 t 无关, 于是我们得到一个更为普遍的结论
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},\ t > 0$$

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin tx}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \cos tx \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi/t} \cos tx \mathrm{dx} \quad (\text{let } u = tx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\mathrm{n}\pi} \cos u \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{t} \lim_{n\to\infty} \sin u \Big|_0^{n\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以 $f(t) = C$, 与 t 无关.

5. Fourier 变换

令 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$, 对 $f(t)$ 作傅里叶变换, 令

$$
\begin{aligned}
F(\mu) &= \mathscr{F}[f(t)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t} \,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\mathrm{i}\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{\mu}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu}\right) \\
&= 2\frac{\sin\mu}{\mu}
\end{aligned}
$$

则

$$
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\mu)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin\mu}{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t} \,\mathrm{d}\mu.
$$

取 $t = 0$, 则

$$
1 = f(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\mu}{\mu} \,\mathrm{d}\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\mu}{\mu} \,\mathrm{d}\mu
$$

故

$$
\int_0^{\infty} \frac{\sin\mu}{\mu} \,\mathrm{d}\mu = \frac{\pi}{2}.
$$

6. 狄拉克函数

首先来介绍一下狄拉克函数 (就是 Dirac 创造的函数), 也称脉冲函数 (比较形象):

$$
\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \text{且满足} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \,\mathrm{d}t = 1.
$$

容易验证:$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{f}(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t=f(0)$.

取 $f(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}$, $f(0)=1$.

则脉冲函数的傅里叶变换 $F(\mu)=\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}\,\mathrm{d}t=1$.

作傅里叶反变换 $\delta(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\mu)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}\,\mathrm{d}\mu$.

准备工作完成, 构造函数 $g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}\,\mathrm{d}x$, $g(1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
g'(\lambda)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sin\lambda x}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x+0\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x\\
&=2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=2\pi\delta(\lambda)
\end{aligned}$$

因为 $g(\lambda)$ 是奇函数, 所以

$$\begin{aligned}
g(1)&=-g(-1)\\
&=\frac{1}{2}(g(1)-g(-1))\quad(\text{由 N-L 公式})\\
&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}2\pi\delta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\quad(\delta(\lambda)=0,\ \lambda\neq 0)\\
&=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\\
&=\pi
\end{aligned}$$

7. 留数定理

定理内容: 当被积函数 $f(\mathrm{x})$ 是 x 的有理函数 (多项式除多项式), 且分母的次数比分子的次数至少高一次, $f(z)$ 在实轴上除去有限多个一级奇点 x_1, x_2, $\cdots$, x_p 外处处解析, 在上半复平面 $(\operatorname{Im}z>0)$ 除去有限多个奇点 z_1, z_2, $\cdots$, z_q 外处处解析, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{p}\operatorname{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\ x_k\right]+2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{q}\operatorname{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\ z_k\right]$$

其中 $\operatorname{Res}[f(z),\ z_0]$ 为函数 f 在 z_0 处的留数, 定义如下: 若 z_0 是 $f(\mathrm{z})$ 的孤立奇点, $f(z)$ 在 $D=\{z|0<|z-z_0|<R\}$ 内解析, C 是 D 内包围 z_0 的任一正向简单闭曲线, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

为 f 在 z_0 处的留数, 记作 $\mathrm{Res}\left[f(z),\, z_0\right]$. 套用定理, 令 $f(x)=\frac{1}{x}$, 实轴上的一级奇点 $x_1=0$, 上半复平面内无奇点, 则

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{x}e^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{i}\pi\,\mathrm{Res}\left[\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z},\,0\right]=\mathrm{i}\pi\tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|-1}\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=\tfrac{1}{2}\oint_{|z|-1}\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z\\
&\oint_{|z|-1}\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=\oint_{|\mathrm{i}z|-1}\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}zz}}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}(\mathrm{i}z)\\
&=\oint_{|z|-1}\tfrac{\mathrm{e}^{z}}{z}\,\mathrm{d}z\\
&=\oint_{|z|-1}\tfrac{1}{z}\left(1+z+\tfrac{z^2}{2!}+\cdots+\tfrac{z^n}{n!}+\cdots\right)dz\\
&=\oint_{|z|-1}\left(\tfrac{1}{z}+1+\tfrac{z}{2!}+\cdots+\tfrac{z^n}{(n+1)!}+\cdots\right)\mathrm{d}z\\
&=\oint_{|z|-1}\tfrac{1}{z}\,\mathrm{d}z+\oint_{|z|-1}\left(\mathrm{d}(z)+\tfrac{\mathrm{d}\left(z^2\right)}{2\cdot 2!}+\cdots+\tfrac{\mathrm{d}\left(z^{n+1}\right)}{(n+1)(n+1)!}+\cdots\right)\\
&=\oint_{|z|-1}\tfrac{1}{z}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

三角换元, 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\le\theta\le 2\pi)$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{i}z$, $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta$.

$$\oint_{|z|-1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}e^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_{|z|-1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\oint_{|z|-1}\frac{1}{z}\mathrm{dz}=\pi\mathrm{i}$$

又因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}(\cos x+i\sin x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\pi.$$

8. 黎曼引理

先做些准备工作

$$\sin\frac{2n+1}{2}x=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}x-\sin\frac{2k-1}{2}x\right)$$

由和差化积公式: $\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$.
则 $\sin\frac{2n+1}{2}x=\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)2\sin\frac{x}{2}$.
$x\ne 2k\pi$ 时, 有 $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$.
两边同时积分, 得 $\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}(n=0,\,1,\,2,\,\cdots)$.

$$令 g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x\sin\frac{x}{2}},\ 0<x\le\pi.$$

由洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{x\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sin\frac{x}{2}}=0$$

析充定义 $g(0)=0$, 则 g 在 $[0,\,\pi]$ 上连续.

Riemann-Lebesgue 引理: 若 f 在 $[a,\ b]$ 上连续, 则 $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0$.

令 $f(x)=g(x)$, $p=n+\frac{1}{2}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

令 $u=\left(n+\frac{1}{2}\right)x$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

问题 1.18 计算 Laplace 积分:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,\ a,\ b>0$$

解

$$\begin{aligned}
I_1'(b) &= -\int_0^{+\infty} \frac{x\sin bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{(a^2+x^2-a^2)\sin bx}{x(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{2} + a^2\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x \\
I_1''(b) &= a^2\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = a^2 I_1(b)
\end{aligned}$$

这对应一个二阶微分方程 $I_1''(b) - a^2 I_1(b) = 0$

初值问题为

$$I_1(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a},\ I_1'(0) = -\frac{\pi}{2}$$

可解得 $I_1(b) = \frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-ab}$

又有 $I_2 = -I_1'(b) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}$.

问题 1.19 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n-\tan^2 n}{\tan 2}=(a_n+1)\tan n$，计算其前 n 项和 S_n.

解 由已知条件可得 $a_n-\tan^2 n=a_n\tan n\tan 2+\tan n\tan 2$，所以

$$a_n=\frac{\tan^2 n+\tan n\tan 2}{1-\tan n\tan 2}=\frac{\tan n+\tan 2}{1-\tan n\tan 2}\cdot\tan n$$

由两角和正切公式可知

$$\frac{\tan n+\tan 2}{1-\tan n\tan 2}=\tan(n+2),$$

所以 $a_n=\tan(n+2)\tan n$.

由于

$$\tan 2=\tan(n+2-n)=\frac{\tan(n+2)-\tan n}{1+\tan(n+2)\tan n},$$

所以

$$a_n=\tan(n+2)\tan n=\frac{\tan(n+2)-\tan n}{\tan 2}-1.$$

进一步有

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{\tan 3-\tan 1}{\tan 2}-1+\frac{\tan 4-\tan 2}{\tan 2}-1+\frac{\tan 5-\tan 3}{\tan 2}-1+\cdots\\&+\frac{\tan(n+1)-\tan(n-1)}{\tan 2}-1+\frac{\tan(n+2)-\tan n}{\tan 2}-1\\&=\frac{\tan(n+1)+\tan(n+2)-\tan 1-\tan 2}{\tan 2}-n\\&=\frac{\tan(n+1)+\tan(n+2)-\tan 1}{\tan 2}-n-1.\end{aligned}$$

问题 1.20 求极限

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n} &= \lim_{x\to 1}\frac{m(1-x^n)-n(1-x^n)}{(1-x^m)(1-x^n)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{m\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k-n\sum\limits_{k=0}^{m-1}x^k}{\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k\right)(1-x)}\\
&= \frac{1}{mn}\cdot\lim_{x\to 1}\left[\frac{m\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k-n\sum\limits_{k=0}^{m-1}x^k}{(1-x)}\right]\\
&= \frac{1}{mn}\cdot\lim_{x\to 1}\left[\frac{m\sum\limits_{k=0}^{n-2}(k+1)x^k-n\sum\limits_{k=0}^{m-2}(k+1)x^k}{-1}\right](L'Hospital)\\
&= \frac{1}{mn}\left[\frac{m\frac{n(n-1)}{2}-n\frac{m(m-1)}{2}}{-1}\right]\\
&= \frac{m-n}{2}
\end{aligned}$$

问题 1.21 设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积, $g(x)\geqslant 0$, g 是以 $T>0$ 为周期的函数, 在 $[0,\ T]$ 上可积, 试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 因 $g(x)$ 以 T 为周期, 因此 $g(nx)$ 以 $\frac{T}{n}$ 为周期, 当 n 充分大时, $[a,\ b]$ 含有 $g(nx)$ 的多个周期, 为了把区间变成 $\frac{T}{n}$ 的整数倍, 取足够大的正整数 m, 使得 $[A,\ B]=[-mT,\ mT]\supset[a,\ b]$. 这时 $[A,\ B]$ 相当 $g(nx)$ 的 $2mn$ 个周期. 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,\ b],\\ 0, & x\in[A,\ B]\backslash[a,\ b],\end{cases}$$

于是 $F(x)$ 在 $[A,\ B]$ 上可积, 且

$$I_n\equiv\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_a^B F(x)g(nx)\,\mathrm{d}x.$$

将 $[A,\ B]2mn$ 等分, 作分划 $A=x_0<x_1<\cdots<x_{2mn}=B$. 每个小区间恰是 $g(nx)$ 的一个周期, 小区间长度等于 $\frac{T}{n}$. 于是

$$I_n=\int_A^B F(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{2mn}\int_{x_{i-1}}^{x_i}F(x)g(nx)\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $g(x)\geqslant 0$, 应用第一积分中值定理, 得

$$I_n=\sum_{i=1}^{2mn}c_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $c_i: m_i\equiv\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}F(x)\leqslant c_i\leqslant M_i\equiv\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}F(x)$. 因 $[x_{i-1},\ x_i]$ 是 $g(nx)$ 的一个周期, 令 $nx=t$, 则

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{T}{n}}g(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t.$$

代人上式, 得

$$I_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\cdot\sum_{i=1}^{2mn}c_i\frac{T}{n}$$

注意:

$$\sum_{i=1}^{2mn}m_i\frac{T}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{2mn}c_i\frac{T}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{2mn}M_i\frac{T}{n}$$

其左、右两端分别为 $F(x)$ 在 $[A,\ B]$ 上的 Darboux 和. 故

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_A^B F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

问题 1.22 设 3 阶是对称矩阵 A 的每行元素之和为 3, 且 $r(\boldsymbol{A})$, $\beta=(-1,\ 2,\ 2)'$, 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$, $\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}I\right)^{10}$

解 (1) 由已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=3$, 其对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, 又由 $r(\boldsymbol{A})=1$, 且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化知 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$. 设其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\top}$, 于是有 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\alpha}_1)=0$, 即 $x_1+x_2+x_3=0$, 解得 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ k_1,\ k_2\text{为不同时为0的任意常数}.$$

取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$, 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$, 解得 $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1$. 故

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta},$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{A}^n\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^n\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{\alpha}_3=3^n\boldsymbol{\alpha}_1\\&=(3^n,\ 3^n,\ 3^n)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以令 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 P 为可逆矩阵. 且 $P^{-1}AP=\boldsymbol{A}$. 于是

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}I\right)^{10}&=\left(P\Lambda P^{-1}-\frac{3}{2}PP^{-1}\right)^{10}=\left[P\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)P^{-1}\right]^{10}=P\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)^{10}P^{-1}\\&=P\begin{bmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}&&\\&\left(-\frac{3}{2}\right)^{10}&\\&&\left(-\frac{3}{2}\right)^{10}\end{bmatrix}P^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}PP^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}E.\end{aligned}$$

问题 1.23 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上二节可导, 且 $f''(x)>0$. 证明:

1. $$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

2. 若 $f(x)\leqslant 0,\ x\in[a,\ b]$, 则有
$$f(x)\geqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ x\in[a,\ b].$$

证明 (1) 因 $f''(x)\geqslant 0$, 故 f 为一凸函数. 取切点为 $\left(\frac{a+b}{2},\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, 则必有
$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$$
利用积分不等式性质即得
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+0=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).\end{aligned}$$
这就证得结论.

(2) 由 f 为一凸函数, $\forall x,\ t\in[a,\ b]$, 有
$$f(x)\geqslant f(t)+f'(t)(x-t).$$
以 t 作为积分变量, 得积分不等式:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+x\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b tf'(t)\,\mathrm{d}t$$
通过计算相继得到
$$f(x)(b-a)\geqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+x[f(b)-f(a)]-(tf(t))|_a^b+\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$f(x)(b-a)\geqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+x[f(b)-f(a)]-[bf(b)-af(a)]+\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)(b-a)+(b-x)f(b)+(x-a)f(a).$$
因为 $f(x)\leqslant 0,\ x\in[a,\ b]$, 而且 $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 所以又得
$$(b-x)f(b)+(x-a)f(a)\leqslant 0,$$
$$2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(x)(b-a)+(b-x)f(b)+(x-a)f(a)\leqslant f(x)(b-a),$$
这就证得
$$f(x)\geqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ x\in[a,\ b].$$

定理 1.1

设 X 为赋范线性空间，则 X 中开球的闭包 $\overline{B(x_0,\,r)}$ 等于闭球 $\bar{B}(x_0,\,r)$.

证明 显然有 $B(x_0,\,r)\subset\bar{B}(x_0,\,r)$，距离空间中的开球为开集，闭球为闭集，$\bar{B}(x_0,\,r)$ 为闭集，从而

$$\overline{B(x_0,\,r)}\subset\overline{\left(\bar{B}(x_0,\,r)\right)}=\bar{B}(x_0,\,r)$$

(对于一般的距离空间上式亦成立) 任取 $x\in\bar{B}(x_0,\,r)$，定义 $x_n=\frac{n}{n+1}(x-x_0)+x_0$，则

$$\|x_n-x_0\|=\frac{n}{n+1}\|x-x_0\|\le\frac{nr}{n+1}<r,$$

从而 $x_n\in B(x_0,\,r)$. 令 $n\to\infty$，有

$$\|x_n-x\|=\frac{1}{n+1}\|x_0-x\|\to 0,$$

从而

$$x\in\overline{B(x_0,\,r)},\ \bar{B}(x_0,\,r)\subset\overline{B(x_0,\,r)}.$$

笔记 对于一般的距离空间，结论不成立.

例题 1.1 考虑距离子空间

$$X=\left\{x=(\xi,\,\eta)\mid-\frac{1}{2}\le\xi\le\frac{1}{2},\,\eta=0\right\}\cup\{(0,\,1)\}\subset\mathbb{R}^2,$$

显然 X 不为线性空间. 由

$$\begin{aligned}\{x=(\xi,\,\eta)\mid x\in X,\,d(x,\,0)<1\}&=\left\{x=(\xi,\,\eta)\mid-\frac{1}{2}\le\xi\le\frac{1}{2},\,\eta=0\right\}\\&=X-\{(0,\,1)\}\end{aligned}$$

为 X 中开球，它是闭集但不是闭球:

$$\{x=(\xi,\,\eta)\mid x\in X,\,d(x,\,0)\le 1\}=X.$$

从而距离空间中开球的闭包不等于闭球.

问题 1.24 设 $\alpha=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$, $(a_1\neq 0,\ n>1)$, $A=\alpha^T\alpha$, 求 A 的特征值和特征向量.

解 首先求 $A=\alpha^T\alpha$ 的特征值

法一:

$$A^2=\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha=\sum_{i=1}^n a_i^2\alpha^T\alpha=\sum_{i=1}^n a_i^2 A.$$

设 x 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则 $Ax=\lambda x$. 所以有

$$A^2x=\sum_{i=1}^n a_i^2 Ax=\sum_{i=1}^n a_i^2\lambda x.$$

而 $A^2x=\lambda^2 x$, 所以 $\lambda^2 x=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\lambda x\Rightarrow\left(\lambda^2-\lambda\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)x=0$,

由于 $x\neq 0$, 所以 $\lambda^2-\lambda\sum\limits_{i=1}^n a_i^2=0\Rightarrow\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$, $\lambda_2=0$.

由于

$$A=\alpha^T\alpha=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=0$ 时, 对 $\lambda I-A$ 做初等行变换, 得

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix} -a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & -a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & -a_n^2 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{乘}-a_i^{-1}]{\text{第 } i \text{ 行}}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $a_1\neq 0$, 所以 $\mathrm{r}(\lambda_2 I-A)=1$, 故 $(\lambda_2 I-A)x=0$ 的基础解系中含有 $n-1$ 个向量, 即对应 $\lambda_2=0$ 的线性无关的特征向量个数为 $n-1$, 即 λ_2 的几何重数为 $n-1$, 故 λ_2 的代数重数 $\geqslant 1$. 又有 $\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\neq 0$, 所以 λ_2 的代数重数为 $n-1$.

法二: 从 $A^2=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 A$, 的两端同时乘 A^{n-2} 可以得到 $A^n=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 A^{n-1}$.

同理有 $A^n x=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 A^{n-1}x\Rightarrow\lambda^{n-1}(\lambda-\sum\limits_{i=1}^n a_i^2)=0$, 可以直接得到两个特征值的代数重数.

法三:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{加到第}i\text{行}(i=2,\,3\cdots,\,n)]{\text{将第一行乘}\left(-\frac{a_i}{a_1}\right)}\begin{vmatrix}\lambda-a_1a_1 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -\frac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一列}\ (j=2,\,3,\,\cdots,\,n)]{\text{将第}\ j\ \text{列乘}\ \left(\frac{a_j}{a_1}\right)}\begin{vmatrix}\lambda-\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

故 A 的特征值为 $0(n-1\text{重})$, $\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$ 下面求 A 的特征向量:

当 $\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$ 时, 由 $(\lambda_1 I-A)x=0$ 即

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^n a_i^2-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \sum\limits_{i=1}^n a_i^2-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^n a_i^2-a_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

可得特征向量 $x_1=(a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n)^T$

该特征向量还有第二种求法:

$$A\alpha^T=(\alpha^T\alpha)\alpha^T=\sum_{i=1}^n a_i^2\alpha^T.$$

当 $\lambda_2=0$ 时, 由 $(\lambda_2 I-A)x=0$, 即

$$\begin{pmatrix}-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & -a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & -a_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

可得 $n-1$ 个线性无关的特征向量

$$x_2=(a_2,\,-a_1,\,0,\,\cdots,\,0)^T,\ x_3=(a_3,\,0,\,-a_1,\,\cdots,\,0)^T,\ \cdots,\ x_n=(a_n,\,0,\,0,\,\cdots,\,-a_1)^T.$$

取 $P=(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n)$ 则有

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

问题 1.25 证明线性回归的解析解为 $w^* = (X^TX)^{-1}X^Ty$

证明

1. 先考虑单变量形式, 考虑对样本 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$, 回归中考虑截距项, 将其写成矩阵形式:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} 1, & x_1 \\ 1, & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} \omega \\ b \end{pmatrix}$$

则回归方程可写成:$Y = XB + R$, 其中 ω, b 分别对应截距和斜率, 且

$$R = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

为残差项, 目标是求得适当的 B 使得二范数 $\|R\|_2$ 尽可能小

$$L = (XB - Y)^T(XB - Y) = B^TX^TXB - 2Y^TXB + Y^TY$$

令 L 对 B 求导如下:

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 2X^TXB - 2X^TY$$

令 $\frac{\partial L}{\partial B} = 0$ 可求得 L 的唯一极值为

$$B^* = (X^TX)^{-1}X^TY$$

2. 假设 n 个样本每个样本的观测方差之比为 $\omega_1 : \omega_2 : \cdots : \omega_n$, 不失一般性, 不妨令

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

记对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

那么加权线性回归里, 目标损失函数就变成了

$$L = (XB - Y)^T\Lambda(XB - Y) = B^TX^TXB - 2Y^T\Lambda XB + Y^T\Lambda Y$$

同样, 令 L 对 B 求导有

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 2X^T\Lambda XB - 2X^T\Lambda Y$$

令 $\frac{\partial L}{\partial B}=0$ 可求得 L 的唯一极值为

$$B^* = (X^T X)^{-1} X^T \Lambda Y$$

1.1.1 Three Theorems And Lemmas On Consistent Continuity And Continuity

K 表示 $[1, +\infty]$ 上非负一致连续函数类.

1.1.1.1 Lemma One

问题 1.26 若 $f \in K$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\frac{f(x)}{x} < +\infty$.

解 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\frac{f(x)}{x} = +\infty$, 则存在数列 $\{x_k\}$, 使 $x_k \to +\infty(k \to \infty)$, $x_{k+1} - x_k > 1$, 且若 $c_k = \frac{f(x_k)}{x_k}$, 则 $c_{k+1} \geq c_k$, $c_k \to +\infty$. 对每一 k, 有

$$\begin{aligned}|f(x_{k+1}) - f(x_k)| &= c_{k+1}x_{k+1} - c_k x_k \\ &\geq c_k\left(x_{k+1} - x_k\right).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon = 1$, δ 是满足 $0 < \delta < 1$ 的任意数, 则存在 k_0 使 $k > k_0$ 时, $c_k > \frac{2}{\delta}$. 取 $k > k_0$, 并选取 $t_1, t_2, \ldots, t_m$, 使

$$x_k = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = x_{k+1},$$

这里 $\frac{\delta}{2} < t_{i+1} - t_i < \delta(i = 1, 2, \ldots, m-1)$. 对某个 i, 必有

$$|f(t_{i+1}) - f(t_i)| \geq c_k(t_{i+1} - t_i),$$

因为否则有

$$\begin{aligned}|f(x_{k+1}) - f(x_k)| &\leq \sum_{i=1}^{m-1}|f(t_{i+1}) - f(t_i)| \\ &< c_k\left(x_{k+1} - x_k\right),\end{aligned}$$

与假设矛盾, 因此,

$$|f(t_{i+1}) - f(t_i)| \geq c_k(t_{i+1} - t_i) > \frac{\delta}{2}\cdot\frac{2}{\delta} = 1,$$

于是 f 在 $[1, +\infty]$ 上不一致连续, 矛盾.

K^* 表示 $[1, +\infty]$ 上的一切连续函数 f, 使 $f \in K$, 且当 $g \in K$ 时, $fg \in K$.

1.1.1.2 Lemma Two

问题 1.27 若 $xf(x) \in K$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x-y| < \delta$ 时, 就有

$$x|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

解 因 $xf(x) \in K$, 据 Lemma One, 存在常数 $M > 0$, 使 $f(x) < M$. 此外, 存在 $\delta > 0$, 使 $\delta < \frac{\varepsilon}{2M}$, 且当 $|x-y| < \delta$ 时, 有

$$|xf(x) - yf(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned} x|f(x)-f(y)| &= |xf(x)-xf(y)| = |xf(x)-yf(y)+yf(y)-xf(y)| \\ &\le |xf(x)-yf(y)|+|f(y)||x-y| < \frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon. \end{aligned}$$

1.1.1.3 Theorem

问题 1.28 $f(x)\in K^*$ 的充要条件是 $xf(x)\in K$.

解 必要性: 因 $x\in K$, 故必要性成立.

充分性: 设 $xf(x)\in K$. 令 $\varepsilon>0$, $g(x)\in K$. 据 Lemma One, 存在常数 M_1 及 M_2, 使

$$f(x)<M_1,\qquad \frac{g(x)}{x}<M_2.$$

据在 $g(x)$ 上的假设及 Lemma Two, 可选取 $\delta>0$, 当 $|x-y|<\delta$ 时

$$|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_1},\qquad y|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_2}.$$

因此, 当 $|x-y|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\le f(x)|g(x)-g(y)|+\left(\frac{g(y)}{y}\right)y|f(x)-f(y)| \\ &< M_1\cdot\frac{\varepsilon}{2M_1}+M_2\cdot\frac{\varepsilon}{2M_2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $f(x)\in K^*$.

1.2 汪林-数学分析中的问题与反例

问题 1.29 设函数 f 在区间 $[0,\ 2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,\ 2a]$ 上至少存在某个 x, 使得 $f(x)=f(x+a)$.

解 若 $f(a)=f(0)$, 即 $f(0)=f(0+a)$, 则命题成立.

现设 $f(a)\neq f(0)=f(2a)$. 不妨再设 $f(a)>f(0)$. 考虑函数

$$F(x)=f(x)-f(x+a)(0\leq x\leq a).$$

因 f 在 $[0,\ 2a]$ 上连续, 故 F 在 $[0,\ a]$ 上亦连续, 而且

$$F(0)=f(0)-f(a)<0$$

$$F(a)=f(a)-f(2a)>0$$

由连续函数介质定理, 存在 $x\in(0,\ a)$, 使 $F(x)=0$, 即 $f(x)=f(x+a)$.

问题 1.30 设 $f,\ g$ 在 $(a,\ b)$ 内连续, 且 f 或 g 递减. 假定某个数列 $\{x_n\}$ 满足 $f(x_n)=g(x_{n-1})$, 且在 $(a,\ b)$ 中有极限点. 证明方程 $g(x)=f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内有解.

解 设对一切 $x\in(a,\ b)$, $f(x)\neq g(x)$, 不失一般性, 可设 $f(x)>g(x)(a<x<b)$. 设 x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限点, $x_0\in\{x_n\}$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0.$$

由 $g(x_0)<f(x_0)$ 可知存在正整数 p, 使得当 $k_1,\ k_2\geq p$ 时, 有

$$g(x_{n_{k_1}})<f(x_{n_{k_2}}). \tag{1.3}$$

另一方面, 对某个正整数 m, $n_{p+1}=n_p+m$, 有

$$\begin{aligned}
f(x_{n_{p+1}}) &= g(x_{n_{p+1}-1})<f(x_{n_{p+1}-1})\\
&= g(x_{n_{p+1}-2})<f(x_{n_{p+1}-2})\\
&< \cdots < f(x_{n_{p+1}-(m-1)})=g(x_{n_p}),
\end{aligned}$$

这与(1.3)矛盾. 因此, 方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内必有解.

问题 1.31 构造一个无处连续的非常值周期函数, 它具有最小正周期.

解

$$f(x)=\begin{cases}1, & 2n\le x<2n+1\text{且}x\text{为无理数}\\ -1, & 2n\le x<2n+1\text{且}x\text{为有理数}\\ 2, & 2n+1\le x<2(n+1)\text{且}x\text{为无理数}\\ -2, & 2n+1\le x<2(n+1)\text{且}x\text{为有理数}\end{cases}$$

这里, n 为整数. 显然 f 的最小正周期是 2, 它是一个无处连续的函数.

问题 1.32 设 n 为正整数, $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ 都是多项式, 并且 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$, 证明:

$$(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$$

解 令 ε_1, ε_2, …, ε_n 为 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1=0$ 的解, 则

$$\varepsilon^{n+1}-1=0(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

因为 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$, 所以 ε_1, ε_2, …, ε_n 必然是 $f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})=0$ 的解, 即:

$$\begin{cases} f_1(1)+\varepsilon_1 f_2(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(1)=0 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots \\ f_1(1)+\varepsilon_n f_2(1)+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(1)=0 \end{cases}$$

而该方程组的系数行列式为范德蒙行列式且 $\varepsilon_i\neq\varepsilon_j(i\neq j)$, 故系数矩阵的行列式不为零, 根据 Cramer 法则知 $f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_n(1)=0$, 所以

$$(x-1)|f_i(x)(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)\Rightarrow(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$$

问题 1.33 试证明以下命题:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 是递减函数, $f'(0)=0$, 则 $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$.

(2) 设 $f\in C([a,\ b])$, 且在 $(a,\ b)$ 上可导. 若有 $\varepsilon_0>0$,

$$f(a)<\varepsilon_0,\qquad f(x)+f'(x)<\varepsilon_0\quad (a<x<b)$$

则 $f(x)<\varepsilon_0(a<x<b)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上有两个零点, 若有 $|f''(x)|\le 1(0\le x\le 1)$, 则

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\quad (0\le x\le 1).$$

解 (1) 不妨设 $0<x_1<x_2$, 我们有

$$\begin{aligned}&f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)=[f(x_1+x_2)-f(x_2)]+[f(x_1)-f(0)]\\&=f'(x_2+\theta_1x_1)x_1-f'(\theta_2x_1)x_1\le 0,\ (0<\theta_1,\ \theta_2<1)\end{aligned}$$

(2) 作 $F(x)=e^xf(x)-\varepsilon_0e^x$, 我们有

$$F'(x)=e^x[f(x)+f'(x)-\varepsilon_0]<0\quad a<x<b.$$

这说明 $F(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上递减, 又注意到 $F(a)=e^a[f(a)-\varepsilon_0]<0$, 故知 $F(x)<0$, 即 $f(x)<\varepsilon_0(a<x<b)$.

(3) 为了应用二阶导函数的估值, 我们期望作出一个具有三个零点的函数, 如

$$F(x)=f(x)-f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)},$$

其中 $x_1,\ x_2$ 是 $f(x)$ 的两个零点, x_0 是异于 $x_1,\ x_2$ 的 $[0,\ 1]$ 中的点, 从而存在 $\xi\in(0,\ 1)$, 使得 $F''(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)-f(x_0)\frac{2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=0$. 有此可知 $|f(x_0)|=|f''(\xi)|\frac{|(x_0-x_1)(x_0-x_2)|}{2}\le\frac{1}{2}$, 由于 x_0(与$x_1,\ x_2$不同) 是任意取的, 即得所证.

问题 1.34 Lemma: 已知等式两端的两个积分都收敛, 且 $a,\ b>0$, 求证:

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$$

解 左边 $=\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x$

令 $t=ax+\frac{b}{x}$, 则 $x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4ab}}{2a}$, 于是有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(t)\mathrm{d}\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4ab}}{2a}\right)+\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4ab}}{2a}\right)\\
=&\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t)\mathrm{d}\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4ab}}{2a}-\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4ab}}{2a}\right)\right)\\
=&\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{t^2-4ab}}{a}\right)\\
=&\frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}\left(\sqrt{t^2-4ab}\right)
\end{aligned}$$

令 $m=\sqrt{t^2-4ab}$, 则 $t=\sqrt{m^2+4ab}$, 于是有

$$\frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}\left(\sqrt{t^2-4ab}\right)=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{m^2+4ab}\right)\mathrm{d}m$$

即等式成立.

由上述 Lemma 可计算下面这道积分:

问题 1.35

$$\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{4x\pi}} e^{-\frac{a^2}{4x}} e^{-x} \mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{4x\pi}} e^{-\frac{a^2}{4x}} e^{-x} \mathrm{d}x \\
=&\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{4x^2}} \mathrm{d}x \left(\text{令} t = x^2\right) \\
=&e^{-a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{2x}\right)^2} \mathrm{d}x \\
=&e^{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x \left[\text{令} f(x) = e^{-x^2},\ a = 1,\ b = -\frac{a}{2} \text{使用上述 Lemma}\right] \\
=&e^{a}.
\end{aligned}$$

问题 1.36 若 $\alpha(x)\beta(x)\to 0$ 且 $\beta(x)\to 0$, 则

$$[1+\beta(x)]^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x)$$

解 其实证明和 $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ (α为实数) 类似, 这里只写出证明过程中条件所起到的作用.
以下用 α, β 代替 $\alpha(x)$, $\beta(x)$
从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1+\beta]^{\alpha}-1}{\alpha\beta}=\frac{e^{\alpha\ln(1+\beta)}-1}{\alpha}$$

这里只需证明$\alpha\ln(1+\beta)\to 0$便可用$e^{x}-1\sim x$
由 Taylor 展开有 $\alpha\ln(1+\beta)=\alpha\left(\beta-\frac{1}{2}\beta^{2}+\frac{1}{6}\beta^{3}+\cdots\right)\to 0$ 即证.

由上面的 Lemma 可做这样一道题:

问题 1.37 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}}-1}$

解 由 $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ 得 $\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}\sim\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$
由 Lemma 有 $(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}}-1\sim\sqrt[3]{x}$
故由等价无穷小可知结果为 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

问题 1.38

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

解 这里使用含参变量的广义积分计算这道题:

由于 $\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y$,

故原式 $=\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 而

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z\,\mathrm{d}z}{(1+\cos^2 zy^2)\sqrt{1-\cos^2 z}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{\frac{1}{\cos^2 z}+y^2}\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan z)}{\tan^2 z+1+y^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan\frac{\tan z}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$$

$$\text{而}\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln|\sec t+\tan t|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

问题 1.39 设 $a,\ b>0$. 求

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$$

解 继续使用含参变量的广义积分计算:

由于 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y$. 故原式 $=-\int_a^b\int_0^1 x^y\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

以下着重计算 $\int_0^1 x^y\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int_0^1 x^y\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{y+1}\sin(\ln x)\,\mathrm{d}(x^{y+1})=-\int_0^1\frac{x^y}{y+1}\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1\cos(\ln x)\,\mathrm{d}(x^{y+1})=-\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

故 $\displaystyle\int_0^1 x^y\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+(y+1)^2}$

则原式 $\displaystyle=\int_a^b\frac{\mathrm{d}(y+1)}{1+(y+1)^2}=\arctan(y+1)\Big|_a^b=\arctan\frac{b-a}{ab+a+b+2}$

问题 1.40 设 f 在 $(a,\ +\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

解 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使当 $x>M$ 时, 有

$$\left|f'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又

$$\frac{f(x)-f(M)}{x-M}=f'(\zeta)\quad(M<\zeta<x),$$

故当 $x>M$ 时, 有

$$\frac{|f(x)-f(M)|}{x-M}=f'(\zeta)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$|f(x)-f(M)|<\frac{\varepsilon(x-M)}{2},$$

$$|f(x)|<|f(M)|+\frac{\varepsilon(x-M)}{2},$$

从而

$$\frac{|f(x)|}{x}<\frac{|f(M)|}{x}+\frac{\varepsilon(x-M)}{2x}\ (x>M).$$

固定 M, 则有 $x_0>M$, 当 $x>x_0$ 时,

$$\frac{|f(M)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $x>x_0$ 时,

$$\frac{|f(x)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

问题 1.41 设 f 在闭区间 $[a,\ b]$ 上可微, f' 连续、递减且 $f'(b)>0$. 证明:

(i) $b_n=f^{-1}\left[f(b_{n-1})-f'(b_{n-1})(b_{n-1}-a)\right]$ 存在且满足 $a<b_n<b_{n-1}(n=1,\ 2,\ \cdots;b_0=b)$.

(ii) 数列 $\{f(b_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

解 (i) 据微分中值定理, 存在 $\zeta,\ a<\zeta<b,$ 使得

$$f(a)=f(b)-f'(\zeta)(b-a).$$

由于 f' 递减且 $f'(b)>0,$ 故

$$f(a)<f(b)-f'(b)(b-a)<f(b).$$

由题设可知 f 在 $[a,\ b]$ 上递增且连续, 故 f^{-1} 在 $[f(a),\ f(b)]$ 上存在且也是递增的连续函数. 于是, $b_1=f^{-1}\left[f(b)-f'(b)(b-a)\right]$ 存在且满足 $a<b_1<b$.

现设 b_n 存在且满足 $a<b_n<b_{n-1}$. 如同前面一样, 在 $[a_n,\ b_n]$ 上应用微分中值定理, 有

$$f(a)<f(b_n)-f'(b_n)(b_n-a)<f(b_n).$$

因此, 数 $b_{n+1}=f^{-1}\left[f(b_n)-f'(b_n)(b_n-a)\right]$ 存在且满足 $a<b_{n+1}<b_n$.

(ii) 数列 $\{b_n\}$ 递减且有下届 a, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0,$ 则 $a\leq x_0<b$. 因

$$f(b_n)=f(b_{n-1})-f'(b_{n-1})(b_{n-1}-a),$$

故由 f 及 f' 在 x_0 的连续性可知

$$f(x_0)=f(x_0)-f'(x_0)(x_0-a).$$

于是 $x_0=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=f(a)$. 因数列 $\{b_n\}$ 是递减的, 故数列 $\{f(b_n)\}$ 也是递减的.

问题 1.42 设函数 f 在 $[0,\ c]\,(c>0)$ 上可微, f' 在在 $[0,\ c]$ 上递减, 且 $f(0)=0$. 证明对于 $0\le a\le b\le a+b\le c$, 恒有

$$f(a+b)\le f(a)+f(b).$$

解 当 $a=0$ 时, 式中等号成立, 故结论为真.
若 $a>0$, 在 $[0,\ a]$ 上应用微分中值定理, 可知存在 $\zeta_1(0<\zeta_1<a)$, 使得

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\zeta_1).$$

同理, 在 $[b,\ a+b]$ 上应用微分中值定理, 可知存在 $\zeta_2(b<\zeta_2<a+b)$. 使得

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{(a+b)-b}=f'(\zeta_2).$$

显然, $0<\zeta_1<a\le b<\zeta_2<a+b\le c$. 因 f' 在 $[0,\ c]$ 上递减, 故 $f'(\zeta_2)\le f'(\zeta_1)$, 即

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}\le\frac{f(a)}{a},$$

从而

$$f(a+b)\le f(a)+f(b).$$

问题 1.43 设 f 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上二次可微, 且

$$M_k = \sup_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x)| < \infty \qquad (k=0,\ 1,\ 2).$$

证明不等式

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

解 不妨设 f 为非常值函数, 于是由题设知 $M_2 \neq 0$. 对任意 $x \in (-\infty,\ \infty)$ 及任意 $h>0$, 据 Taylor 公式得

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + f''(x+\theta_1 h)\frac{h^2}{2} \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + f''(x-\theta_2 h)\frac{h^2}{2}, \qquad 0<\theta_1,\ \theta_2<1. \end{aligned}$$

两式相减得

$$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) + \left[f''(x-\theta_2 h) - f''(x+\theta_1 h)\right]\frac{h^2}{2}.$$

因此

$$M_1 \leq M_0 h^{-1} + \frac{h}{2}M_2.$$

特别地, 取 $h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ 得 $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$, 即

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2$$

问题 1.44 构造一个 L'Hosptial 法则失效的复值函数的不定式.

解 设 $f(x)=x,\ g(x)=x+x^2e^{\frac{\mathrm{i}}{x^2}},\quad 0<x<1.$

由于对一切实数 t, 都有 $\left|e^{\mathrm{i}t}\right|=1$, 因而不难看出

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

另一方面, 有

$$g'(x)=1+\left(2x-\frac{2\mathrm{i}}{x}\right)e^{\frac{\mathrm{i}}{x^2}},\quad 0<x<1,$$

所以

$$\left|g'(x)\right|\geq\left|2x-\frac{2\mathrm{i}}{x}\right|-1\geq\frac{2}{x}-1.$$

于是得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0.$$

问题 1.45 计算

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$$

解 令 $\arctan x = \frac{\pi}{4} - \arctan t$，则

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan t\right) = \frac{1-t}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{-2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t.$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan t}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

问题 1.46 设 a_1, b_1 为任意取定的实数, 定义

$$a_n=\int_0^1 \max\{b_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x \quad (n=2,\ 3,\ \cdots), \tag{1.4}$$

$$b_n=\int_0^1 \min\{a_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x \quad (n=2,\ 3,\ \cdots). \tag{1.5}$$

证明:$\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 并求出它们的极限.

解 由题目条件可得

$$a_n \geq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}, \qquad b_n \leq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ (n=2,\ 3,\ \cdots). \tag{1.6}$$

代入(1.4)(1.5)有如下估计:

$$\begin{cases} a_{n+1} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{5}{8} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots), \\ b_{n+1} \geq \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots). \end{cases} \tag{1.7}$$

由(1.6)(1.7)可知

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{5}{8}, \qquad \frac{3}{8} \leq b_n \leq \frac{1}{2} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots). \tag{1.8}$$

代入(1.4)(1.5)中, 可得 a_n, b_n 的递推公式:

$$2a_{n+1}=2\left(\int_0^{b_n} b_n\,\mathrm{d}x+\int_{b_n}^1 x\,\mathrm{d}x\right)=1+b_n^2 \tag{1.9}$$

$$2b_{n+1}=2\left(\int_0^{a_n} x\,\mathrm{d}x+\int_{a_n}^1 a_n\,\mathrm{d}x\right)=2a_n-a_n^2 \quad (n=2,\ 3,\ \cdots), \tag{1.10}$$

由(1.9)(1.10)可得如下关系式:

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{b_{n+1}+b_n}{2}(b_{n+1}-b_n) \quad (n=2,\ 3,\ \cdots), \\ b_{n+1}-b_n=\frac{2-(a_n+a_{n-1})}{2}(a_n-a_{n-1}) \quad (n=2,\ 3,\ \cdots). \end{cases} \tag{1.11}$$

由此可得

$$a_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_{n+1}+b_n}{2}\cdot\frac{2-(a_n+a_{n-1})}{2}(a_n-a_{n-1}) \quad (n=2,\ 3,\ \cdots).$$

再由(1.8)可估计出

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| \leq \frac{1}{4}|a_n-a_{n-1}| \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)\left[2-(a_n+a_{n-1}) \leq \frac{2-1}{2}\right]$$

反复利用这个估计式, 可得

$$|a_{2m+2}-a_{2m+1}|=\frac{1}{4^m}|a_2-a_1| \quad (m=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$|a_{2m+3}-a_{2m+2}|=\frac{1}{4^m}|a_3-a_2| \quad (m=1,\ 2,\ \cdots).$$

令 $m\to\infty$, 便得出 $a_{2m+2}-a_{2m+1}\to 0$, $a_{2m+3}-a_{2m+2}\to 0$, 从而可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 村在. 同理可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在. 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n=b.$$

由(1.9)(1.10)可得

$$\begin{cases} 2a = 1 + b^2, \\ 2b = 2a - a^2. \end{cases} \tag{1.12}$$

因此, $a = 2 - \sqrt{2},\ b = \sqrt{2} - 1.$

问题 1.47 设函数 f 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且

$$\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

证明存在 $\alpha,\ \beta \in (0,\ \pi)$, 使得 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

解 不妨设 $f(x) \not\equiv 0$. 因

$$\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0 \qquad \text{且} \qquad \sin\theta > 0 \quad (0 < \theta < \pi),$$

故 f 在 $[0,\ \pi]$ 内必定变号. 由 f 的连续性可知, 至少存在一点 $\alpha \in (0,\ \pi)$, 使得 $f(\alpha) = 0$.

假设 α 是 f 在 $(0,\ \pi)$ 内的唯一零点, 则 f 在 $(0,\ \alpha)$ 与 $(\alpha,\ \pi)$ 内异号, 于是

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin(\theta - \alpha)\,\mathrm{d}\theta \neq 0.$$

另一方面, 又有

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin(\theta - \alpha)\,\mathrm{d}\theta = \cos\alpha\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \sin\alpha\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0,$$

矛盾. 因此, 至少存在两点 $\alpha,\ \beta \in (0,\ \pi)$ 使得 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

问题 1.48 Lemma1: 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 因 $a_n > 0$, 故 $a \geq 0$. 若 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$. 于是可由 Stolz 定理得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k}{n} = \ln a.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k}{n}} = e^{\ln a} = a.$$

若 $a = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to n} (-\ln a_n) = +\infty$. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} -\ln a_k}{n}} = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

以上两个极限用到的 $\ln x$ 与 e^x 的连续性.

问题 1.49 Lemma2: 设数列 $\{a_n\}$ 是正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 令 $b_1 = a_1, b_2 = \frac{a_2}{a_1}, \cdots, b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \cdots$. 由 Lemma1 可知有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \lim_{n\to} b_n,$$

即

$$\lim_{n\to} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

问题 1.50 设 f 在 $[a,\ b]$ 上连续, 且对任意区间 $[\alpha,\ \beta] \subset [a,\ b]$, 均有

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M\,(\beta-\alpha)^{1+\delta} \quad (M>0,\ \delta>0)\,.$$

证明 $f(x) \equiv 0$.

解 反证法, 假设存在 $\zeta \in [a,\ b]$ 而有 $f(\zeta) \neq 0$. 不妨设 $\zeta \in (a,\ b)$ 且 $f(\zeta) > 0$. 因 f 连续, 故存在以 ζ 为中心的区间 $[\alpha,\ \beta] \subset [a,\ b]$, 使对任意 $x \in [\alpha,\ \beta]$, 都有 $f(x) > 0$. 令 $\beta_n = \zeta + \varepsilon_n$, $\alpha_n = \zeta - \varepsilon_n$, $\varepsilon_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. 由积分中值定理得到

$$\int_{\zeta-\varepsilon_n}^{\zeta+\varepsilon_n} f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(\zeta_n)\varepsilon_n, \qquad \zeta_n \in (\alpha_n,\ \beta_n)\,.$$

又有题设可知

$$\int_{\zeta-\varepsilon_n}^{\zeta+\varepsilon_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\,(\beta-\alpha)^{1+\delta}\,,$$

故有 $f(\zeta_n) \leq M(2\varepsilon_n)\delta$, 从而得到

$$f(\zeta) = \lim_{n\to\infty} f(\zeta_n) \leq M \lim_{n\to\infty} (2\varepsilon_n)^{\delta} = 0, \text{ 矛盾.}$$

问题 1.51 设 f 在 $[a,\ b]$ 上可积. 证明:

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

解 对任意有界闭区间 $[\alpha,\ \beta]$ 有

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin px\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\le\frac{2}{p}.$$

设在 $[a,\ b]$ 上 $|f(x)|\le M$. 任给 $\varepsilon>0$, 则存在 $[a,\ b]$ 的分划T:

$$a_0=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使 $S(T,\ f)-s(T,\ f)<\frac{\varepsilon}{2}$, 其中 $S(T,\ f)$ 与 $s(T,\ f)$ 分别代表 f 关于 $S(T,\ f)$ 的上, 下 Darboux 和. 于是 $p\ge 4n\frac{M}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x_k)+f(x)-f(x_k)]\sin px\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\sum_{k=1}^n\left[|f(x_k)|\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin px\,\mathrm{d}x\right|+\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)|\,|\sin px|\,\mathrm{d}x\right]\\&<\frac{2nM}{p}+[S(T,\ f)-s(T,\ f)]<\frac{2nM}{p}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0.$$

同理可证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

问题 1.52 设 f 是闭区间 $[a,\ b]$ 上的连续正值函数. 令 $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$. 证明:

$$M=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x}.$$

解 显然有

$$\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x}\le\sqrt[n]{\int_a^b M^n\,\mathrm{d}x}=M\sqrt[n]{b-a},$$

所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x}.\le\varlimsup_{n\to\infty}M\sqrt[n]{b-a}=M.$$

因 f 在 $[a,\ b]$ 上连续, 故必存在 $x_0\in[a,\ b]$, 使得 $f(x_0)=M$. 不妨设 $a<x_0<b$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)>M-\varepsilon\ (x_0\le x<x_0+\delta)$, 故

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x}&\ge\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}[f(x)]^n\ \mathrm{d}x}\\&\ge\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}(M-\varepsilon)^n\,\mathrm{d}x.}\\&=(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\delta},\end{aligned}$$

所以

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x}\ge\lim_{n\to\infty}(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\delta}=M-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 得

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x}\ge M\ge\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\ \mathrm{d}x}=M.$$

问题 1.53 设函数 φ 与 f 在区间 $[a,\ b]$ 上正值连续. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b\varphi(x)\,[f(x)]^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\varphi(x)\,[f(x)]^{n}\,\mathrm{d}x}=\max_{a\le x\le b}f(x).$$

解

$$I_n=\int_a^b\varphi(x)\,[f(x)]^n\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sqrt{\varphi(x)}\,[f(x)]^{\frac{n-1}{2}}\,\sqrt{\varphi(x)}\,[f(x)]^{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

$$I_n^2\le\int_a^b\varphi(x)\,[f(x)]^{n-1}\,\mathrm{d}x\int_a^b\varphi(x)\,[f(x)]^{n+1}\,\mathrm{d}x=I_{n-1}I_{n+1},\ \left[\text{Cauchy-Schwarz 不等式}\right]$$

故

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}\ge\frac{I_n}{I_{n-1}}.$$

因此, 数列 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 是递增的. 又

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}\le\max_{a\le x\le b}f(x)\frac{I_n}{I_n}=\max_{a\le x\le b}f(x),$$

故 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 有界, 于是, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}.$$

可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)$. 故本题得证.

问题 1.54 设 f 在 $[0,\ 1]$ 上有连续的一阶导数, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{4}\max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|.$$

证明 法 1:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ &= f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由基本积分不等式得到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_0^1 \left|f'(x)\right|\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x\\ &\le \max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x\\ &= \max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{4}\max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|.\end{aligned}$$

法 2: 由于 f 有连续的一阶导数, 故 f 在 $[0,\ 1]$ 上有原函数 $F(x)$.
由有 Larange 余项的 Taylor 展开式有:

$$F(\frac{1}{2}) = F(1)+f(1)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{f'(\xi_1)}{4} \quad \xi_1\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right) \tag{1.13}$$

$$F(\frac{1}{2}) = F(0)+f(0)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{f'(\xi_2)}{4} \quad \xi_2\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \tag{1.14}$$

由(1.13)(1.14)相减可得

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(1)-F(0)| = \left|\frac{f'(\xi_1)+f'(\xi_2)}{8}\right| \le \frac{1}{4}\max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|.$$

问题 1.55 设 f 是 $[a,\ b]$ 上存在一阶连续导函数的非零函数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明存在一点 $c\in(a,\ b)$, 使得

$$\left|f'(c)\right|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解 令 $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$. 由微分中值定理得到

$$f(x)=f'(t)(x-a)\le M(x-a),\qquad a\le x\le\frac{a+b}{2}.$$
$$f(x)=f'(s)(x-b)\le M(b-x),\qquad \frac{a+b}{2}\le x\le b,\quad a<t<x,\quad x<s<b.$$

因函数

$$D(x)=\begin{cases}M(x-a), & a\le x\le\frac{a+b}{2},\\ M(b-x), & \frac{a+b}{2}\le x\le b\end{cases}$$

在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处是不可微的, 故不能同时有 $f(x)=M(x-a)\left(a\le x\le\frac{a+b}{2}\right)$ 与 $f(x)=M(b-x)\left(\frac{a+b}{2}\le x\le b\right)$. 因此, 令 $m=\frac{a+b}{2}$, 即得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&<M\int_0^m(x-a)\,\mathrm{d}x+M\int_m^b(b-x)\,\mathrm{d}x\\&=M\frac{(b-a)^2}{4},\end{aligned}$$

或者

$$M>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

问题 1.56 设 f 在 $[0,\ 1]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(0)=f(1)=0,\ f(x)\neq 0,\ x\in(0,\ 1)$. 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\,\mathrm{d}x\geq 4.$$

解 因 $f(0)=f(1)=0$, 故由微分中值定理 Rolle 定理, 存在 $\zeta\in(0,\ 1)$ 使得 $f'(\zeta)=0$.

我们在区间 $[0,\ \zeta]$ 和 $[\zeta,\ 1]$ 上分别估计 $|f(x)|$ 的值. 当 $x\in[0,\ \zeta]$ 时, 因为

$$f'(x)=-\int_x^{\zeta}f''(x)\,\mathrm{d}x,\quad \left|f'(x)\right|\leq\int_0^{\zeta}\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x,\quad f(x)=\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leq\int_0^x\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x\leq\int_0^{\zeta}\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x\\&=\left|f'(\zeta_1)\right|\zeta_1\leq\zeta\int_0^{\zeta}\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$|f(x)|\leq\zeta\int_0^{\zeta}\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x,\qquad x\in[0,\ \zeta]. \tag{1.15}$$

当 $x\in[\zeta,\ 1]$ 时, 因为

$$f'(x)=\int_{\zeta}^x f''(x)\,\mathrm{d}x,\quad \left|f'(x)\right|\leq\int_{\zeta}^1\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x,\quad f(x)=-\int_x^1 f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leq\int_x^1\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x\leq\int_{\zeta}^1\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x\\&=(1-\zeta)\left|f'(\zeta_2)\right|\leq(1-\zeta)\int_{\zeta}^1\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$|f(x)|\leq(1-\zeta)\int_{\zeta}^1\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x,\qquad x\in[\zeta,\ 1]. \tag{1.16}$$

由(1.15)(1.16)得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\zeta}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\,\mathrm{d}x+\int_{\zeta}^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\,\mathrm{d}x\\&\geq\int_0^{\zeta}\frac{\left|f''(x)\right|}{\zeta\int_0^{\zeta}\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+\int_{\zeta}^1\frac{\left|f''(x)\right|}{(1-\zeta)\int_{\zeta}^1\left|f''(x)\right|\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{1-\zeta}=\frac{1}{\zeta(1-\zeta)}=\frac{1}{\frac{1}{4}-\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2}\geq 4\end{aligned}$$

问题 1.57 设 f 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上二次可微且 $f''(x)>0$, 又 φ 在 $[0,\ a]\,(a>0)$ 上连续, 证明

$$\frac{1}{a}\int_0^a f\left[\varphi\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}t \geq f\left[\frac{1}{a}\int_0^a \varphi\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right].$$

解 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. 由 Taylor 公式可知

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\zeta)}{2}(x-x_0)^2 \\ &\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \end{aligned}$$

因上式对任何 x 均成立, 故

$$f\left[\varphi\left(t\right)\right] \geq f(x_0)+f'(x_0)\left(\varphi(t)-x_0\right),$$

从而有

$$\begin{aligned} &\int_0^a f\left[\varphi\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}t \geq \int_0^a f(x_0)+f'(x_0)\left(\varphi(t)-x_0\right)\,\mathrm{d}t \\ &= af(x_0)+f'(x_0)\int_0^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t-x_0af'(x_0) \\ &= af(x_0)+ax_0f'(x_0)-ax_0f'(x_0)=af(x_0). \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{a}\int_0^a f\left[\varphi\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}t \geq f\left[\frac{1}{a}\int_0^a \varphi\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right].$$

问题 1.58 设函数 f_0 在 $[0,\ 1]$ 上可积, 且 $f(x_0)>0$. 定义函数列

$$f_n(x)=\sqrt{\int_0^a f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)(0\leq x\leq 1)$.

解

Toeplitz 定理: 设数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a 给定一组数 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$, 其中每个都严格大于 0, 极限为 0, 并且和为 1, 那么极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k=a$.

设 $0<\delta<1$. 因 f_0 在 $[0,\ 1]$ 上可积且 $f_0(x)>0$,

故

$$f_1(x)=\sqrt{\int_0^a f_0(t)\,\mathrm{d}t}$$

是 $[0,\ 1]$ 上的连续函数, 于是存在正数 $m,\ M$ 使得

$$m<f_1(x)<M.$$

对任一正整数 n, 用数学归纳法可以证明

$$m^{\frac{1}{2n}}a_n(x-\delta)^{1-\frac{1}{2n}}\leq f_{n+1}(x)\leq M^{\frac{1}{2n}}a_n x^{1-\frac{1}{2n}},$$

其中

$$a_n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{2^{k+1}-1}\right)^{2^{\frac{1}{n-k}}}$$

因为

$$\ln a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k}}\ln\left(\frac{2}{2^{k+1}-1}\right)\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

所以根据 Toeplitz 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=\ln\frac{1}{2},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{2n}}a_n x^{1-\frac{1}{2n}}=\frac{x}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} m^{\frac{1}{2n}}a_n(x-\delta)^{1-\frac{1}{2n}}=\frac{x-\delta}{2}$$

由 δ 的任意性即知对一切 $x\in(0,\ 1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x)=\frac{x}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0} f_{n+1}(x)=f_{n+1}(0)=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 所以对一切 $x\in[0,\ 1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x)=\frac{x}{2}.$$

问题 1.59 设函数 f 在 $[0,\ 1]$ 上连续, 且满足 $0 < m \leq f(x) \leq M$.
证明:
$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

解 由于
$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} \leq 0 \qquad (0<x<1)\,,$$
即
$$\int_0^1 f(x)-(M+m)+\frac{Mm}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leq 0,$$
故
$$\int_0^1 f(x)+\frac{Mm}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leq m+M.$$
令 $u = mM\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$, 则
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + u \leq m+M,$$
$$\text{或} \qquad u\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq (m+M)\,u-u^2,$$
因函数 $g(x)=(m+M)\,u-u^2$ 在 $u=\frac{m+M}{2}$ 处取得最大值 $\frac{(m+M)^2}{4}$, 故
$$u\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{(m+M)^2}{4},$$
$$\text{即} \quad \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

问题 1.60 设函数 f 在 $[0,\ 1]$ 上连续可微, 证明

$$|f(x)| \leq \int_0^1 \big(|f(t)| + |f'(t)|\big)\ \mathrm{d}t.$$

解 由分部积分公式有:

$$\int_0^x t f'(t)\,\mathrm{d}t = x f(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.17}$$

$$\int_x^1 (t-1) f'(t)\,\mathrm{d}t = -x f(x) + f(x) - \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.18}$$

(1.17)(1.18)两式相加得

$$\int_0^x t f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

即

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x t f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \big[t f'(t) - f'(t)\big]\ \mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= |f(x)| \leq \int_0^1 \big(|f(t)| + f'(t)\big)\ \mathrm{d}t. \qquad \text{即证.} \end{aligned}$$

问题 1.61 设 $f(t)$ 在 $a \le t \le x$ 上连续且存在 c，使 $a < c < x$，且

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)(x-a).$$

证明: 若 f 在点 a 可微且 $f'(a) \neq 0$，则有

$$\lim_{x\to a} \frac{c-a}{x-a} = \frac{1}{2}.$$

解 考虑

$$I = \lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2}$$

由积分中值定理有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to a} \frac{f(c)(x-a) - f(a)(x-a)}{(x-a)^2} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(c) - f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \cdot \frac{c-a}{x-a} \\ &= f'(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{c-a}{x-a}. \end{aligned}$$

另一方面由 L'Hosptial 法则有

$$I = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)} = \frac{f'(a)}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to a} \frac{c-a}{x-a} = \frac{1}{2}$.

问题 1.62 设 f 在区间 $[0,\ 1]$ 上连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|\,f(x)\,\mathrm{d}x.\\
=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}|\sin nx|\,f(x)\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}|\sin nx|\ \mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\ \mathrm{d}t\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_0^{\pi}|\sin t|\ \mathrm{d}t\\
=&\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})=\frac{2}{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

问题 1.63 设 f 在 $[-1,\ 1]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

解 由于

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x=\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{1}=\pi.$$

故只需证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x=0.$$

而

$$\begin{aligned}&\left|\int_{1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{x^2+h^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x\right|\\ \leq&2M\int_{1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x\\ =&2M\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-\sqrt{h}}\\ \to&0(h\to 0^+),\end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x\to 0(h\to 0^+)$$

又由积分第一中值定理, 得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{x^2+h^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x=\left[f(\xi)-f(0)\right]\arctan|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\\ &\to 0\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0(h\to 0^+)\end{aligned}$$

上面三个比较相加, 本题得证.

问题 1.64 设 f 在 $[a,\ b]$ 上可积且是凸函数, 即对任意 $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 都有

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).$$

证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

解 法 1: 令 $\lambda_1=\frac{b-x}{b-a},\ \lambda_2=\frac{x-a}{b-a}$. 显然, 当 $x\in[a,\ b]$ 时, $\lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$. 由 f 的凸性得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 a+\lambda_2 b) \leq \lambda_1 f(a)+\lambda_2 f(b) \\ &= \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b). \end{aligned}$$

两边从 a 到 b 积分得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b \left[\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a), \end{aligned}$$

故右边不等式得证. 又由积分的换元法有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{0} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \end{aligned}$$

故左边的不等式也得证.

法 2: (1) 证明右面的不等式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

令

$$F(x)=\frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a)-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \quad x\in[a,\ b]$$

则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f(x)+f(a)}{2}+\frac{f'(x)}{2}(x-a)-f(x) \\ &= \frac{f'(x)}{2}(x-a)+\frac{f(a)-f(x)}{2} \end{aligned}$$

且由于 $f(x)$ 为下凸函数, 则有 $f''(x)>0$

$$F''(x)=f''(x)(x-a)+\frac{f'(x)}{2}-\frac{f'(x)}{2}=f''(x)(x-a)\ge 0$$

故 $F'(x)$ 单增, 即 $F'(x)\ge F'(a)=0$, 即 $F(x)$ 单增, $F(x)\ge F(a)=0$. 故不等式得证.

(2) 证明左面的不等式:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

同理, 令

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-f\left(\frac{x+a}{2}\right)(x-a). \quad x\in[a,\ b] \tag{1.19}$$

则

$$G'(x)=f(x)-f(\frac{x+a}{2})-f'(\frac{x+a}{2})\frac{x-a}{2}$$

由 Taylor 展开式有

$$f(x)=f(\frac{x+a}{2})+f'(\frac{x+a}{2})\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{1}{8}f''(\xi)(x-a)^2, \qquad \xi\in\left[\frac{x+a}{2},\ x\right]$$

代入(1.19)式中得 $G'(x)=\frac{1}{8}f''(\xi)(x-a)^2\ge 0$ 故 $G(x)$ 单增, 即 $G(x)\ge G(a)=0,$ 故不等式得证.

问题 1.65 设 f 在 $[0,\ +\infty)$ 上递增, 对于任何 $T>0$, f 在 $[0,\ T)$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=C.$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=C.$$

解 设 $x>0$. 因 f 在 $[0,\ +\infty)$ 上递增, 故当 $t<x$ 时, 有 $f(t)\le f(x)$. 两边对 t 从 0 到 x 积分, 得到

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\le\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t=xf(x).$$

即

$$f(x)\ge\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.20}$$

当 $t>x$ 时有 $f(t)\ge f(x)$. 两边对 t 从 x 到 $2x$ 积分, 得到

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t\ge\int_x^{2x} f(x)\,\mathrm{d}t=xf(x),$$

即

$$f(x)\le\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t=2\cdot\frac{1}{2x}\left[\int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]. \tag{1.21}$$

由(1.20)(1.21)两式得到

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\le f(x)\frac{2}{2x}\left[\int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t=C,$$

所以

$$C\le\lim_{x\to+\infty}f(x)\le 2C-C,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=C.$$

问题 1.66 证明广义积分 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛而不绝对收敛.

解 首先证明该积分收敛, 对于任意的 $s>\pi$, 我们有

$$\int_{\pi}^{s}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{s}\frac{-\mathrm{d}\cos x}{x}=-\frac{1}{\pi}-\frac{\cos s}{s}-\int_{\pi}^{s}\frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.22}$$

$$\frac{|\cos x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}\quad(\pi\le x\le+\infty),$$

而 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\int_{\pi}^{s}\frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 因而收敛, 因此, 当 $s\to+\infty$ 时, (1.22)式右端各项趋于有限极限. 所以

$$\lim_{s\to+\infty}\int_{\pi}^{s}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

存在. 这就证明了 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

下证广义积分 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不绝对收敛. 事实上, 对于任意正整数 p, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{p\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{p-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\\&\ge\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}e\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\pi}|\sin(u+n\pi)|\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

现在, $\sin(u+n\pi)=\sin u\cos n\pi$, 而 $\cos n\pi=\pm1$, 故 $|\sin(u+n\pi)|=|\sin u|$. 因此, 若 $0\le u\le\pi$, 则 $|\sin(u+n\pi)|=\sin u$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{p\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x&\ge\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{p}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

因级数 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$, 故 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 也发散, 即 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 并不绝对收敛.

问题 1.67 设 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

解 任给 $\varepsilon > 0$，由题设及 Cauchy 收敛准则知存在 N_1，当 $m > n \geq N_1$ 时

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $a_{n+1} \leq a_n$，故

$$(m-n)a_m < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，故存在 N_2，当 $n > N_2$ 时

$$a_n < \frac{\varepsilon}{2N_1}.$$

取 $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > n_0$ 时

$$0 \leq na_n = N_1 a_n + (n - N_1)\, a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

问题 1.68 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 证明级数

$$t_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} + \cdots + ka_{n+k-1} + \cdots$$

也收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

解 令 $s_n = na_n + (n+1)a_{n+1} + \cdots + (n-m)a_{n+m} + \cdots$, 则 $s_n - s_{n+1} = na_n$, 即 $a_n = \frac{s_n - s_{n+1}}{n}$. 由 Abel 变换得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n_0}(k+1)a_{n+k} &= \sum_{k=0}^{n_0}\frac{k+1}{k+n}(s_{n+k} - s_{n+k+1}) \\ &= \frac{s_n}{n} - \frac{n_0+1}{n_0+n}s_{n+n_0+1} + \sum_{k=0}^{n_0}\left(\frac{k+1}{n+k} - \frac{k}{n+k-1}\right)s_{n+k}.\end{aligned}$$

因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$. 又

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{n+k} - \frac{k}{n+k-1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

题目所述级数收敛, 且有

$$t_n = \frac{s_n}{n} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+k} - \frac{k}{n+k-1}\right)s_{n+k}.$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

问题 1.69 证明: 如果将收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项重新排列, 使得每一项离开原有位置不超过 m 个位置 (m为任一给定的正整数), 则重拍后的新级数仍收敛, 且和不变.

解 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 n 项部分和为 s_n, 和为 s, 即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{1.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.24}$$

由(1.23)(1.24)可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in N$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2},\ |a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2m},\ |a_{n+2}| < \frac{\varepsilon}{2m},\ \cdots. \tag{1.25}$$

设重排后的级数 n 项和为 σ_n. 由题设知

$$\sigma_n = s_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_m,$$

其中 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m$ 为原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 $n+1$ 项至第 $n+2m$ 项中某 m 项. 从(1.25)知, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$|b_k| < \frac{\varepsilon}{2m} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

于是

$$\begin{aligned}
|\sigma_{n+m} - s| &= |s_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_m - s| \\
&\leq |s_n - s| + |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2m} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n+m} = s.$$

问题 1.70 设 $\varphi(x)$ 对正值 x 有意义, 并且当 x 足够大时可以表示为级数

$$\varphi(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots,$$

这里 $a_0,\ a_1$ 是实数. 证明: 当且仅当 $a_0=a_1=0$ 时, 级数

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)+\cdots$$

收敛.

解 必要性: 因为对于足够大的 x, 级数

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots$$

收敛, 所以对于某个 x_0, 有 $\frac{a_n}{x_0^n}\to 0(n\to\infty)$. 于是存在 c, 使得 $a_n\leq c^n$, 从而当 $x>2c$ 时,

$$\left|\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots\right|\leq\frac{c^2}{x^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=\frac{2c^2}{x^2},$$

亦即

$$\varphi(n)=a_0+\frac{a_1}{n}+\varepsilon(n),$$

这里对足够大的 n, $|\varepsilon(n)|<\frac{K}{n^2}$. 现在可以看到, 当 $a_0=a_1=0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 收敛, 这是因为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{K}{n^2}$ 为其优级数.

充分性: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 收敛, 那么 $\varphi(n)\to 0(n\to\infty)$. 由此 $a_0=0$. 如果此时 $a_1\neq 0$, 那么 $\varphi(n)=\frac{a_1}{n}+\varepsilon(n)=a_1\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. 与调和级数相比较, 可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 发散, 矛盾.

问题 1.71 设 $0 < \lambda_n \le \lambda_{n+1} (n = 1,\ 2,\ \cdots)$, φ 是 $[\lambda_1,\ +\infty]$ 上的正值非减函数, 使得

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\varphi(t)} < +\infty.$$

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right)$ 收敛.

解 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}\varphi(\lambda_{n+1})} \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t\varphi(t)} < +\infty$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right)$ 收敛. 又因

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_{n+1})} \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \left(\frac{1}{\varphi(\lambda_n)} - \frac{1}{\varphi(\lambda_{n+1})} \right) \\
<& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi(\lambda_n)} - \frac{1}{\varphi(\lambda_{n+1})} \right) \le \frac{1}{\varphi(\lambda_1)},
\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right)$ 也收敛.

问题 1.72 r 是什么实数时, 级数

$$\frac{1}{2}+r\cos x+r^2\cos 2x+r^3\cos 4x+\cdots$$

的所有部分和对所有的 x 非负.

解 因为 $\frac{1}{2}+r\cos x\geq 0$, 所以 $|r|\leq\frac{1}{2}$. 我们记 $\varphi(y)=r\cos y+r^2\cos 2y$, 则当 $y=k\pi$ 或 $\cos y=-\frac{1}{4r}$ 时,

$$\varphi'(y)=-r\sin y(1+4r\cos y)=0.$$

因 $|r|\leq\frac{1}{2}$, 故在第一种情形下, $\varphi(y)\geq-\frac{1}{4}$; 而在第二种情形下, $\varphi(y)=-\frac{1}{4}+r^2\left(\frac{1}{8r^2}-1\right)\geq-\frac{3}{8}$. 因此, 对任何 y, $\varphi(y)\geq-\frac{3}{8}$. 其次, 我们求得

$$\begin{aligned}
s_{2n+1}&=\frac{1}{2}+\varphi(x)+r^2\varphi(4x)+\cdots+r^{2(n-1)}\varphi(4^{n-1}x)\\
&\geq\frac{1}{2}-\frac{3}{8}(1+r^2+\cdots+r^{2(n-1)})\\
&\geq\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{4-4^{-(n+1)}}{8}=\frac{1}{2\cdot 4^n}=\frac{1}{2^{2n+1}}>0.\\
s_{2n+2}&=s_{2n+1}+r^{2n+1}\cos 2^{2n}x\geq s_{2n+1}-\frac{1}{2^{2n+1}}\geq 0.
\end{aligned}$$

因此, 当 $|r|\leq\frac{1}{2}$ 时, 所有部分和非负.

问题 1.73 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$ 为条件收敛级数.

解 因为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin n = \frac{\cos\frac{3}{2} - \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} \qquad (m = 2,\ 3,\ \cdots),$$

故

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} \qquad (m = 2,\ 3,\ \cdots).$$

又 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{\ln n} > 0$ 且单调减少趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$$

收敛. 又对任意 $x \in (-\infty,\ +\infty)$, $\sin x$ 与 $\sin(x+1)$ 不同时为 0, 故

$$f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)|$$

时 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的正值周期连续函数. 于是, 存在 $l > 0$, 使

$$f(x) \geq l \quad [x \in (-\infty,\ +\infty)].$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin n|}{\ln n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\sin 2k|}{\ln 2k} + \frac{|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin 2k| + |\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)} \\
&\geq l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2k+1)},
\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2k+1)}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{\ln n}$ 发散.

问题 1.74 设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 都是单调递减区域零的数列. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}w_n$ 为收敛的充要条件是:

$$w_n = v_1 v_n + v_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

解 收敛级数的通项极限为 0, 故必要性显然, 今证充分性. 令

$$A_n = \sum_{n=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k, \quad B_n = \sum_{n=1}^{n}(-1)^{k-1}v_k, \quad C_n = \sum_{n=1}^{n}(-1)^{k-1}w_k.$$

并以 A, B 分别表示 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}v_k$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}w_k$, 则

$$\begin{aligned}
C_n &= w_1 - w_2 + w_3 + \cdots + (-1)^{n-1}w_n \\
&= u_1v_1 - u_1v_2 + u_1v_3 - \cdots + (-1)^{n-1}u_1v_n \\
&\qquad - u_2v_1 + u_2v_2 - \cdots + (-1)^{n-1}u_2v_{n-1} \\
&\qquad\qquad + u_3v_1 - \cdots + (-1)^{n-1}u_3v_{n-2} \\
&\qquad\qquad\qquad - \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n-1}u_nv_1 \\
&= u_1B_n - u_2B_{n-1} + u_3B_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}u_nB_1.
\end{aligned}$$

从而

$$A_nB - C_n = u_1(B - B_n) - u_2(B - B_{n-1}) + \cdots + (-1)^{n-1}u_n(B - B_1).$$

据题设

$$|B - B_n| \le v_{n+1},\ |B - B_{n-1}| \le v_n,\ \cdots,\ |B - B_1| \le v_2,$$

于是

$$\begin{aligned}
|A_nB - C_n| &\le u_1v_{n+1} + u_2v_n + \cdots + u_nv_2 \\
&= w_{n+1} - u_{n+1}v_1 \to 0 \quad (0 \to \infty),
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_nB = AB.$$

问题 1.75 证明: 任给一个发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以构造一个收敛于零的正数列 $\{c_n\}$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ 仍然发散.

解 令 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 我们先证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}}$$

发散. 因数列 $\{s_k\}$ 发散于无穷大, 故对任意正整数 m, 存在正整数 n 使 $s_{n+1} > 2s_m$. 又, 数列 $\{s_k\}$ 是递增的, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}} &\geq \sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{n+1}} = \frac{s_{n+1} - s_m}{s_{n+1}} \\ &> \frac{s_{n+1} - \frac{1}{2}s_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

即对任意正整数 m, 存在正整数 n, 使 $\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} > \frac{1}{2}$. 这表明级数 $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} > \frac{1}{2}$ 的部分和不能形成 Cauchy 数列, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}} > \frac{1}{2} = +\infty.$$

但 $s_{k+1} - s_k = a_{k+1}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{s_{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k} = +\infty.$$

取 $c_k = \frac{1}{s_k}$, 则 $k \to \infty$ 时 $c_k \to 0$ 且 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_k a_k = +\infty$.

笔记 这个例子特别证明了无论一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 怎样慢地发散无穷大, 总会有一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ 比它发散得更慢.

问题 1.76 证明任给一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，可以构造一个收敛于零的正数列 $\{c_n\}$，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ 仍然收敛.

解 令 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$，$c_n = \sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}$，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故有

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

现证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ 收敛. 为此令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{k+1} - r_k}{\sqrt{r_{k+1}} + \sqrt{r_k}} = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k+1}} - \sqrt{r_k}),$$

则当 $n > m$ 时

$$|s_n - s_m| = \sqrt{r_m} - \sqrt{r_n} \to 0 \quad (m,\ n \to \infty).$$

据 Cauchy 收敛准则, 知级数 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{c_k}$ 收敛.

注: 这个例子特别证明了无论一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 怎样慢地收敛, 总会有一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ 比它收敛得更慢.

问题 1.77 证明: 存在一个正项级数, 使任何正有理数都是它的有限个不同项之和.

证明 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有所需的性质. 事实上, 设 A, B 是正整数, 则由此级数的发散性, 存在唯一的非负整数 n_0, 使

$$\sum_{j=0}^{n_0}\frac{1}{j}<\frac{A}{B}\leq\sum_{j=0}^{n_0+1}\frac{1}{j}$$

$\left(\sum\limits_{j=0}^{0}\text{算作}0,\text{ 而当}n_0\geq 1\text{时}\sum\limits_{j=0}^{n_0}\frac{1}{j}\text{理解为}\sum\limits_{j=1}^{n_0}\frac{1}{j}\right)$. 若等式成立, 则已得到所需要的表达式. 故设

$$\frac{A}{B}<\sum_{j=0}^{n_0+1}\frac{1}{j},$$

此时, $\frac{A}{B}-\sum\limits_{j=0}^{n_0}\frac{1}{j}=\frac{C}{D}<\frac{1}{n_0+1}$. 取 n_1 为满足 $\frac{1}{n_1+1}\leq\frac{C}{D}<\frac{1}{n_1}$ 的唯一正整数. 再设不等式成立 (否则问题已解决), 并令

$$\frac{C}{D}-\frac{1}{n_1+1}=\frac{E}{F}>0.$$

但

$$\frac{E}{F}=\frac{C(n_1+1)-D}{D(n_1+1)},\qquad C(n_1+1)-D<C,$$

因此, $\frac{E}{F}$ 为最简分数时必有 $E<C$. 由于

$$\frac{E}{F}<\frac{1}{n_1(n_1+1)},$$

故满足 $\frac{1}{n_2+1}\leq\frac{E}{F}<\frac{1}{n_2}$ 的唯一的正整数 n_2 也必满足 $n_2>n_1$. 在有限步后, 我们必然得到所需求的表达式, 因为, 即使在前面各步得不到, 也不一定会在所导出的分数的分子为 1 时得到.

问题 1.78 设 $f_n(x)=n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx}(n=1,\ 2,\ \cdots)$，问: 当 α 为什么值时,
(i)$\{f_n\}$ 在 $[0,\ 1]$ 上收敛?
(ii)$\{f_n\}$ 在 $[0,\ 1]$ 上一致收敛?
(iii) 等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 成立?

解 (i) 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=0(n=1,\ 2,\ \cdots)$; 而当 $0<x\leq 1$ 时, 对任意实数 α, 有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx}=0.$$

因此对任意实数 α, $\{f_n\}$ 在 $[0,\ 1]$ 上处处收敛于 $f\equiv 0$.
(ii) 因 $f_n'(x)=n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$, 故可知 $x_n=\frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上的最大值点, 从而

$$0\leq f_n(x)\leq f_n\left(\frac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1},\qquad x\in[0,\ 1].$$

由此可见, 当 $\alpha<1$ 时, $\{f_n\}$ 在 $[0,\ 1]$ 上一致收敛于零; 而当 $\alpha\geq 1$ 时, $\{f_n\}$ 在 $[0,\ 1]$ 上不一致收敛于零.
(iii) 因 $\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-2}(1-\mathrm{e}^{-n}-n\mathrm{e}^{-n}),$$

故当 $\alpha<2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

而当 $\alpha\geq 2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

问题 1.79 构造 $[1, +\infty]$ 上的正值连续函数 f, 使 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

解 在各个整数 $n > 1$, 令 $g(n) = 1$, 在闭区间 $\left[n - \frac{1}{n^2}, n\right]$ 和 $\left[n, n + \frac{1}{n^2}\right]$ 的内部, 定义 g 是线性的, 而在区间的非整数端点, g 取 0. 最后, 在 $x \geq 1$ 而 g 尚未定义的点, 规定 $g(x)$ 的值为 0. 于是, 函数

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

当 $x \geq 1$ 时是正值连续函数, 且

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1 < +\infty.$$

即 f 在 $[1, +\infty]$ 上广义可积. 但是, 等式

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

并不成立, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

问题 1.80 构造 $[1, +\infty]$ 上的正值连续函数 f, 使 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

解 对于各个整数 $n > 1$, 设 $g(n) = 0$; 在闭区间 $\left[n - \frac{1}{n}, n\right]$ 和 $\left[n, n + \frac{1}{n}\right]$ 的非整数端点处, 定义 g 的值等于 1; 而在这些闭区间内部, g 是线性的; 最后, 在 $[1, +\infty)$ 上 g 还没有确定值的点处, $g(x)$ 都定义为 1. 于是

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

是 $[1, +\infty)$ 上的正值连续函数, 而

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

问题 1.81 构造广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛而在每个区间 $(a,\ +\infty)\,(a>0)$ 上的无界的非负连续函数.

解 做函数 f : 当 $x=n(n>1)$ 时, $f(x)=n$; 在闭区间 $\left[n-\frac{1}{n^3},\ n\right]$ 和 $\left[n,\ n+\frac{1}{n^3}\right]$ 的内部, 定义 f 是线性的; 而在区间 $\left[n-\frac{1}{n^3},\ n\right]$ 和 $\left[n,\ n+\frac{1}{n^3}\right]$ 的非整数端点, f 取 0. 最后, 在 $x>0$ 而 f 尚未定义的点, 规定 $f(x)$ 的值为 0. 于是, f 为 $(0,\ +\infty)$ 上的非负连续函数. 又

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

即 f 在 $(0,\ +\infty)$ 上广义可积. 然而, 对于任意实数 $a>0$, f 在 $[a,\ +\infty)$ 上无界.

问题 1.82 证明: 函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上连续且可微, 但在 $(1,+\infty)$ 上不一致连续.

解 任取 $x_0>1$, 对任意 $x\in[x_0,+\infty]$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}},$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上一致收敛. 又因每一项 $\frac{1}{n^x}$ 连续, 故 $\zeta(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上连续. 由 $x_0>1$ 的任意性可知 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{\ln x}{n^x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上也时一致收敛的, 所以 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上可微. 再证 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上并不一致连续, 对 $x>1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}&=1+\frac{1}{2^x}+\left(\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}\right)+\left(\frac{1}{5^x}+\frac{1}{6^x}+\frac{1}{7^x}+\frac{1}{8^x}\right)+\cdots\\&>1+\frac{1}{2^x}+\frac{2}{4^x}+\frac{4}{8^x}+\cdots\\&=1+\frac{1}{2^x}\left(1+\frac{1}{2^{x-1}}+\frac{1}{4^{x-1}}+\cdots\right)\\&=1+\frac{1}{2^x-2}.\end{aligned}$$

因此, 当 $x\to1^+$ 时 $\zeta(x)\to+\infty$. 若 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-1|<\frac{\delta}{2}$, $|x'-1|<\frac{\delta}{2}$ 时,

$$\left|\zeta(x)-\zeta(x')\right|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 准则知 $\lim\limits_{x\to1^+}\zeta(x)$ 存在且有限, 这与 $\lim\limits_{x\to1^+}\zeta(x)=+\infty$ 发生矛盾.

问题 1.83 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x)$ 于 $(a,\ b)$ 上处处收敛, 在任意闭区间 $[\alpha,\ \beta]\,(a<\alpha<\beta<b)$ 上一致收敛, f_n 在 $(a,\ b)$ 上连续, 且有

$$|F_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le M, \qquad x \in [a,\ b]\,,\ n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 可逐项积分.

证明 易知 F 在 $(a,\ b)$ 上连续, 由 $|F(x)| \le M$ 知 F 在 $[a,\ b]$ 上可积.
任给 $\varepsilon > 0$, 取 $c,\ d$ 满足 $a < c < d < b$,

$$c - a < \frac{\varepsilon}{5(M+1)}, \qquad b - d < \frac{\varepsilon}{5(M+1)}.$$

在 $[c,\ d]$ 上 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛. 于是存在 n_0, 当 $n > n_0$ 时

$$|F(x) - F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{5(d-c)}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b F_n(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_a^b |F(x) - F_n(x)| \le \int_a^c |F(x) - F_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_c^d |F_n(x) - F(x)|\,\mathrm{d}x + \int_d^b |F(x) - F_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\le 2M \cdot \frac{\varepsilon}{5(M+1)} + \frac{\varepsilon}{5(d-c)} \cdot (d-c) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{5(M+1)} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 可逐项积分.

问题 1.84 设函数列 $\{\varphi_n\}$ 满足下列条件: (i)φ_n 是 $[-1,\ 1]$ 上的非负连续函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

(ii) 对任何 $0<c<1$, $\{\varphi_n\}$ 在 $[-1,\ c]$ 及 $[c,\ 1]$ 上一致收敛于零.

证明对在 $[-1,\ 1]$ 上连续的函数 g, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}g(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=g(0).$$

证明 由 (i) 知存在 M_1, 使 $\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x<M_1(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 又因 g 在 $[-1,\ 1]$ 上连续, 故存在 M_2 使 $|g(x)|<M_2,\ x\in[-1,\ 1]$.

任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(0<\delta<1)$, 使当 $|x|<\delta$ 时

$$|g(x)-g(0)|<\frac{\varepsilon}{2M_1}.$$

由于 $\{\varphi_n\}$ 在 $[-1,\ -\delta]$, $[\delta,\ 1]$ 上一致收敛于 0, 故存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时

$$0<\varphi_n(x)<\frac{\varepsilon}{8M_2},\qquad x\in[-1,\ -\delta]\cup[\delta,\ 1].$$

因此当 $n>n_0$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1}g(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\varphi(x)g(0)\,\mathrm{d}x\right| &\le\left|\int_{-1}^{-\delta}\varphi_n(x)\left[g(x)-g(0)\right]\,\mathrm{d}x\right|\\ &\quad+\int_{-\delta}^{\delta}|\varphi_n(x)|\cdot|g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\left|\int_{\delta}^{1}\varphi_n(x)\left[g(x)-g(0)\right]\,\mathrm{d}x\right|\\ &\le 2M_2\cdot\frac{\varepsilon}{8M_2}+M_1\cdot\frac{\varepsilon}{2M_1}+2M_2\cdot\frac{\varepsilon}{8M_2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}g(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)g(0)\,\mathrm{d}x=g(0).$$

问题 1.85 求极限:

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}.$$

解

$$\begin{aligned}
S_{m,\,n} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}\\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x\left[\sum_{i=1}^{m}(-x)^{i-1}\right]\left[\sum_{j=1}^{n}(-x)^{j-1}\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x\cdot\frac{1-(-x)^m}{1+x}\cdot\frac{1-(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\left[x+(-1)^{m+1}x^m+(-1)^{n+1}x+(-1)^{m+n}x^{m+n}\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因

$$\int_0^1\frac{x^k}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1},$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1\frac{x^k}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

从而有

$$\lim_{m,\,n\to\infty}S_{m,\,n}=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

问题 1.86 设 $f(x,\ y)$ 满足

(i) 对固定的 $y \neq b$, $\lim\limits_{x\to a} f(x,\ y) = \psi(y)$;

(ii) 存在 $\eta > 0$, 使 $f(x,\ y)$ 当 $y \to b$ 时关于 $x \in E = \{x : 0 < x < |x-a| < \eta\}$ 存在一致极限 $\varphi(x)$. 证明:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,\ y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,\ y).$$

解 由条件 (ii), 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |y-b| < \delta$ 时,

$$|f(x,\ y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in E).$$

于是, 当 $0 < |y'-b| < \delta$ 时,

$$|f(x,\ y) - f(x,\ y')| < \varepsilon.$$

由 (i), 令 $x \to a$ 得到

$$|\psi(y) - \psi(y')| \leq \varepsilon.$$

据 Cauchy 准则, 存在有限数 A 使

$$\lim_{y\to b}\psi(y) = A.$$

故存在 $\delta_1 (0 < \delta_1 < \delta)$, 只要 $0 < |y-b| < \delta_1$, 则下列不等式同时成立:

$$f(x,\ y) - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi(x) < f(x,\ y) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in E), \tag{1.26}$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \psi(y) < A + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.27}$$

由不等式(1.26)(1.27)及条件 (i), 我们有

$$\begin{aligned} A - \varepsilon < \psi(y) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq \varliminf_{x\to a}\varphi(x) \leq \varlimsup_{x\to a}\varphi(x) \\ &\leq \psi(y) + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 便得

$$\varliminf_{x\to a}\varphi(x) = \varlimsup_{x\to a}\varphi(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x) = A.$$

即

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,\ y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,\ y).$$

问题 1.87 设函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $D=\{(x,\ y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 上有定义, 且对任意 $x_0\in[0,\ 1]$, $f(x,\ y)$ 于 $(x_0,\ 0)$ 点连续. 证明存在 $\delta>0$, 使 $f(x,\ y)$ 于 $D^*=\{(x,\ y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le\delta\}$ 上有界.

解 证法 **1:** 反证法: 假若不然, 则对任意 $\delta>0$, $f(x,\ y)$ 在 D^* 上无界. 于是有

$$(x_n,\ y_n)\in D_n=\left\{(x,\ y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le\frac{1}{n}\right\},$$

使得

$$|f(x_n,\ y_n)|>n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

由于 $\{(x_n,\ y_n)\}$ 有界, 故必有子列 $\{(x_{n_i},\ y_{n_i})\}$, 使

$$\{(x_{n_i},\ y_{n_i})\}\to\{(x_n,\ y_n)\}\quad(i\to\infty).$$

显然, $x_0\in[0,\ 1]$, $y_0=0$, 从而由 $f(x,\ y)$ 于 $(x_0,\ 0)$ 点的连续性知

$$\lim_{i\to\infty}f(x_{n_i},\ y_{n_i})=f(x_0,\ 0)$$

这与 $|f(x_{n_i},\ y_{n_i})|>n_i$ 矛盾.

证法 **2:** 对任意 $x_0\in[0,\ 1]$, 由 $f(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ 0)$ 的连续性可知存在 $\delta_{x_0}>0$, 使 $f(x,\ y)$ 在开邻域 U_{δ_x} 覆盖了有界闭集 $I=\{(x,\ 0):0\le x\le 1\}$, 从而有有限个 U_{δ_x} 便可覆盖 I. 设它们的边长是 $2\delta_{x_1}$, $\cdots$, $2\delta_{x_k}$, 取 $\delta=\frac{1}{2}\min\limits_{1\le i\le k}\{\delta_{x_i}\}$, 则 $f(x,\ y)$ 于 D^* 上有界.

问题 1.88 设函数 $f(x, y)$ 正在闭单位圆 $\left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ 上有连续的偏导数, 并且 $f(1, 0) = f(0, 1)$. 证明: 在单位圆上至少有两点满足方程

$$y\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = x\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$$

解 令 $\varphi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$, 则 φ 是以 2π 为周期的连续函数, 且 $\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2})$. 故又 Rolle 定理可知存在 $\theta_1, \theta_2 (0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta_2 < 2\pi)$, 使得

$$\varphi'(\theta_1) = \varphi(\theta_2) = 0.$$

由 $\varphi' = -y\frac{\partial}{\partial x}f + x\frac{\partial f}{\partial y}$ 代入 $\theta_i (i = 1, 2)$ 即得所证.

问题 1.89 设有界点列 $z_n = (x_n, y_n)(n = 1, 2, \cdots)$ 满足

$$\varliminf_{n\to\infty} ||z_n|| = l, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} |z_n|| = L, \qquad \lim_{n\to\infty} ||z_{n+1} - z_n|| = 0.$$

证明对任意 μ, $l < \mu < L$, 圆周 $x^2 + y^2 = \mu^2$ 上至少有 $\{z_n\}$ 的一个聚点.

解 (反证法) 假若不然, 则存在 $\mu_0 \in (l, L)$, 使得圆周 $R_{\mu_0} : x^2 + y^2 = \mu_0^2$ 上无 $\{z_n\}$ 的聚点, 于是, 对任意 $z \in R_{\mu_0}$, 必有 $\delta_z > 0$, 使以 z 为心, 以 δ_z 为半径的开圆 U_{δ_z} 内不含异于 z 且属于 $\{z_n\}$ 的点. 显然, $\{U_{\delta_z} : z \in R_{\mu_0}\}$ 覆盖了有界闭集 R_{μ_0}, 因此, R_{μ_0} 可被有限个开圆所覆盖, 于是不难看出, 存在 $\delta > 0$, $\mu_0 - \delta > l$, 使圆环

$$R_\delta : (\mu_0 - \delta)^2 < x^2 + y^2 < \mu_0^2$$

不含 $\{z_n\}$ 中的点, 而由上, 下极限的性质可知, 有正整数 n', n'', 使

$$||z_{n'}|| < \mu_0 - \delta, \qquad ||z_{n''}|| > \mu_0.$$

令 $n_1 = \max\{n : n' \le n < n'', ||z_n|| < \mu_0 - \delta\}$, 便有

$$||z_{n_1}|| < \mu_0 - \delta, \qquad ||z_{n_1+1}|| > \mu_0.$$

对点列 $\{z_n\}_{n=n_1+1}^{\infty}$ 重复上述证明, 便有 $n_2 > n_1 + 1$, 使

$$||z_{n_2}|| < \mu_0 - \delta, \qquad ||z_{n_2+1}|| > \mu_0.$$

如此下去便有

$$||z_{n_k}|| < \mu_0 - \delta, \qquad ||z_{n_k+1}|| > \mu_0.(k = 1, 2, \cdots).$$

从而

$$||z_{n_k+1} - z_{n_k}|| \ge ||z_{n_k+1}|| - ||z_{n_k}|| > \delta > 0,$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} ||z_{n+1} - z_n|| = 0$ 矛盾.

问题 1.90 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内对 x 是连续的, 而关于 x 对 y 是一致连续的, 证明:$f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

解 任意固定一点 $P_0(x_0, y_0) \in G$. 由于 $f(x, y)$ 关于 x 对 y 一致连续, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使当 $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ 且 $|y' - y''| < \delta_1$ 时, 就有

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于 x 是连续的, 故对上述的 ε, 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 就有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并使点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域包含在 G 内, 则当点 (x, y) 属于点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域时, 就有

$$|x - x_0| < \delta \leq \delta_2, \qquad |y - y_0| < \delta \leq \delta_1,$$

从而有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此 $f(x, y)$ 在 P_0 连续, 由 P_0 的任意性知函数 $f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

问题 1.91 设两个正数 x 与 y 之和为定值, 求函数 $f(x,\ y)=\frac{x^n+y^n}{2}$ 的极值, 并证明:

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\ n\text{为正整数}.$$

解 设 $x+y=a(x>0,\ y>0,\ a\text{为常数})$. 令

$$F(x,\ y)=\frac{x^n+y^n}{2}+\lambda(x+y-a),$$

并解方程组,

$$\begin{cases} F'_x=\frac{nx^{n-1}}{2}+\lambda=0, \\ F'_y=\frac{ny^{n-1}}{2}+\lambda=0, \\ \qquad x+y=a. \end{cases}$$

得唯一驻点 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$. 不难验证, $f(x,\ y)=\frac{x^n+y^n}{2}$ 在 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 达到最小值, 从而

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geq\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n+\left(\frac{a}{2}\right)^n}{2}=\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

问题 1.92 证明: 在 n 个正数的和为定值的条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$$

下, 这 n 个正数的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值 $\frac{a^n}{n^n}$, 并由此结果推出 n 个正数的几何平均值不大于算术平均值:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

解

$$\begin{aligned}
&x_2x_3\cdots x_n+\lambda=0, &(1)\\
&x_1x_3\cdots x_n+\lambda=0, &(2)\\
&\cdots\cdots,\\
&x_1x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0, &(n)\\
&x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0. &(n+1)
\end{aligned}$$

$(1)\times x_1+(2)\times x_2+\cdots+(n)\times x_n$, 得

$$n(x_1x_2\cdots x_n)+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0,$$

由 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 得

$$\lambda=-nx_1x_2\cdots\frac{x_n}{a}.$$

将 λ 分别带入 (1), (2), $\cdots$, (n), 得

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{n}.$$

求得唯一的驻点 $\left(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n}\right)$, 依题意, 该点即为 $x_1x_2\cdots x_n$ 的极大值点, 且就是最大值点. 因此, 最大值为

$$x_1x_2\cdots x_n=\frac{a^n}{n^n},$$

从而 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 的最大值为 $\frac{a}{n}$. 又, 算术平均值为 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{a}{n}$, 故

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

问题 1.93 求函数 $f(x,\ y,\ z)=\ln x+\ln y+3\ln z(x>0,\ y>0,\ z>0)$ 在球面

$$x^2+y^2+z^2=5r^2$$

上的最大值, 并证明对任何正数 $a,\ b,\ c,$ 有

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

解 设

$$F(x,\ y,\ z)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2).$$

求得

$$F_x'=\frac{1}{x}+2\lambda x,\qquad F_y'=\frac{1}{y}+2\lambda y,\qquad F_z'=\frac{3}{z}+2\lambda z.$$

令 $F_x'=F_y'=F_z'=0,$ 得

$$2\lambda x^2+1=0,\qquad 2\lambda y^2+1=0,\qquad 2\lambda z^2+3=0.$$

相加得

$$2\lambda(x^2+y^2+z^2)+5=0,$$

故 $\lambda=-\frac{1}{2r^2}$. 于是, 函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=5r^2$ 下可能极值点是 $\left(r,\ r,\ \sqrt{3}r\right)$. 因为在第一象限内球面的三条边界线上函数 $f(x,\ y,\ z)$ 均趋于 $-\infty$, 故最大值必在曲面内部取得. 现驻点是唯一的, 因而 $f(x,\ y,\ z)$ 在点 $\left(r,\ r,\ \sqrt{3}r\right)$ 处取得最大值

$$f(r,\ r,\ \sqrt{3}r)=\ln(3\sqrt{3}r^5).$$

由此可知, 对任意正数 $a,\ b,\ c,$ 有

$$f(\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c})=\ln\sqrt{a}+\ln\sqrt{b}+\ln\sqrt{c}\le\ln(3\sqrt{3}r^5),$$

其中 $r=\sqrt{\frac{a+b+c}{5}}$. 从而有

$$\frac{1}{2}\ln abc^3\le\frac{1}{2}\ln(3\sqrt{3}r^5)^2=\frac{1}{2}\ln 27r^10,$$

即

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

问题 1.94 设函数 f 与 g 都是 $[a,\ b]$ 上递增的连续函数, 且都不是常值函数. 证明

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

解

$$\begin{aligned}S &= (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(y)\,\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b\int_a^b f(x)[g(x)-g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

交换 x 与 y 的位置得

$$S = \int_a^b\int_a^b f(y)[g(y)-g(x)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

所以

$$2S = \int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

因 f 与 g 都是递增的连续函数, 故

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geqslant 0.$$

又因为 f 与 g 都不是常值函数, 所以

$$\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0,$$

即 $S>0$, 从而

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

问题 1.95 设 f 在区间 $[a,\, b]$ 上连续且恒大于零. 证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

解 因为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

其中 $D: a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b$, 所以

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \iint\limits_D \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2(b-a)^2,\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

问题 1.96 设 f 在区间 $[0,\ 1]$ 上具有连续的导数,

$$\varepsilon_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\varepsilon_n$.

解

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(\int_x^{\frac{i}{n}} f'(t)dt\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(t)\,\mathrm{d}t \int_{\frac{i-1}{n}}^{t}\,\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(t - \frac{i-1}{n}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

在上述积分中, 函数 $\left(t - \frac{i-1}{n}\right)$ 不变号, 因而由积分中值定理知有 ξ_i, $\frac{i-1}{n} \leqslant \xi_i \leqslant \frac{i}{n}$, 使

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(t - \frac{i-1}{n}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t &= f'\left(\xi_i\right) \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(t - \frac{i-1}{n}\right)\mathrm{d}t \\
&= f'\left(\xi_i\right)\frac{1}{2n^2}.
\end{aligned}$$

于是, $n\varepsilon_n = -n\sum\limits_{i=1}^{n} f'\left(\xi_i\right)\frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{2} f'\left(\xi_i\right)\frac{1}{n}$. 因 f' 在 $[0,\ 1]$ 上连续, 当然可积, 因而有

$$\lim_{n\to\infty} n\varepsilon_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[f(1) - f(0)\right]$$

问题 1.97 设 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z+10)dv$, 其中 Ω 是球体:$x^2+y^2+z^2\leqslant 3$. 证明:

$$28\sqrt{3}\pi\leqslant I\leqslant 52\sqrt{3}\pi.$$

解 令 $f(x,\,y,\,z)=x+y-z+10$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ 均不为零, 故 f 的极值必定出现在 Ω 的边界上, 换言之, 需求 f 在曲面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上的条件极值, 设

$$F(x,\,y,\,z)=(x+y-z+10)+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-3\right),$$

并令 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$, 得

$$1+2\lambda x=0,\quad 1+2\lambda y=0,\quad -1+2\lambda z=0,$$

故 $x=-\frac{1}{2\lambda}$, $y=-\frac{1}{2\lambda}$, $z=\frac{1}{2\lambda}$. 代人方程 $x^2+y^2+z^2=3$, 得到 $\lambda=\pm\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=-1,\\ z_1=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=1\\ y_2=1\\ z_2=-1\end{cases}$$

显然, $f(-1,\,-1,\,1)=7$ 是最小值 , $f(1,\,1,\,-1)=13$ 是最大值, 从而

$$7\leqslant f(x,\,y,\,z)\leqslant 13.$$

另一方面, 球体 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 3$ 的体积为 $V=4\sqrt{3}\pi$, 故

$$7\cdot 4\sqrt{3}\pi\leqslant\iint\limits_{\Omega}f(x,\,y,\,z)dv\leqslant 13\cdot 4\sqrt{3}\pi,$$

即

$$28\sqrt{3}\pi\leqslant I\leqslant 52\sqrt{3}\pi.$$

问题 1.98 证明:

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\|y|\leqslant R}}\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi.$$

解 记

$$I_R=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\|y|\leqslant R}}\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_R'=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

则有

$$I_R'\leqslant I_R\leqslant I_{2R}'$$

注意

$$\begin{aligned}I_R'&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3e^{-r^2}\,\mathrm{d}r=\pi\int_0^{R^2}te^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\pi\left(1-e^{-R}-R^2e^{-R}\right)\to\pi\quad(R\to+\infty)\end{aligned}$$

故命故得证.

问题 1.99 计算积分

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

解 设 $I(a)=\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\,\mathrm{d}x$. 当 $|a|<1$ 时, 因

$$1-2a\cos x+a^2 \geqslant 1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0,$$

故 $\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)$ 为连续函数且有连续的导数, 从而可在积分号下求导数. 将 $I(a)$ 对 a 求导数, 得

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+a^2)-2a\cos x} \\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a\left(1+a^2\right)}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x} \\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=0.
\end{aligned}$$

于是, 当 $|a|<1$ 时, $I(a)=C$ (常数). 但 $I(0)=0$, 故 $C=0$, 从而 $I(a)=0$. 当 $|a|>1$ 时. 令 $b=\frac{1}{a}$, 则 $|b|<1$, 并有 $I(b)=0$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= I(b)-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.
\end{aligned}$$

当 $|a|=1$ 时,

$$\begin{aligned}
I(1) &= \int_0^{\pi}\left(\ln 4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\ln 2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=0.
\end{aligned}$$

同理可求得 $I(-1)=0$. 综上所述, 得到

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1\\ 2\pi\ln|a|, & |a|>1\end{cases}$$

问题 1.100 研究函数

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

的连续性, 其中 f 是闭区间 $[0,\ 1]$ 上的正值连续函数.

解 当 $y \neq 0$ 时, 被积函数是连续的, 因此, F 在 $y \neq 0$ 处是连续的. 又, $F(0)=0$. 现考察 $y>0$, 并设 m 为 f 在 $[0,\ 1]$ 上的最小值, 则 $m>0$. 由于

$$F(y) \geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx = m\cdot\arctan\frac{1}{y}$$

及

$$\lim_{y\to 0^+}\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2},$$

因而

$$\lim_{y\to 0^+}F(y) \geq \frac{m\pi}{2}>0,$$

可见 F 在 $y=0$ 处不连续.

问题 1.101 应用积分号下的积分法. 求下列积分:

$$I=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (b>a>0).$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

这里, 当 $x=0$ 时, $\sin\left(\ln\frac{1}{n}\right)x^y$ 理解为零, 从而 $\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$, $a\leqslant y\leqslant b$ 上连续, 故可交换积分次序. 做代换 $x=e^{-t}$. 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1+(1+y)^2}[-(y+1)\sin t-\cos t]e^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+(1+y)^2}. \end{aligned}$$

于是, 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+(1+y)^2} = \arctan(1+y)\big|_a^b \\ &= \arctan(1+b)-\arctan(1+a) \end{aligned}$$

问题 1.102 设 $I(a)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$，其中 $0\leqslant a\leqslant b$.
(i) 证明 $I(a)$ 在 $[0,\ b]$ 上一致收敛;
(ii) 求 $I(a)$ 及 $I(0)$ 的值.

解 (i) 因 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}=1$，故 $x=0$ 不是奇点. 由于

$$\left|\int_0^A \sin x\,\mathrm{d}x\right|=|1-\cos A|\leqslant 2,$$

且当 $0\leqslant a\leqslant b$ 时, $\frac{e^{-ax}}{x}$ 在 $x>0$ 时关于 x 递减, 又由于 $0<\frac{e^{-ax}}{x}<\frac{1}{x}(0\leqslant a\leqslant b)$，故 $\frac{e^{-ax}}{x}$ 关于 $a(0\leqslant a\leqslant b)$ 一致地趋于 0. 于是, 由 Dirichlet 判别法知积分

$$I(a)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

在 [0, b] 上一致收敛.

(ii) 因被积函数 $\frac{e^{-ax}\sin x}{x}$ 及其对 a 的偏导数在 $x\geqslant 0$ 时是连续的, 又

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x&=-\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{a^2+1},\end{aligned}$$

且因 $|e^{-a_0x}\sin x|\leqslant e^{-a_0x}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-a_0x}\,\mathrm{d}x\ (a_0>0)$ 收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x$ 当 $a\geqslant a_0>0$ 时一致收敛. 因此, 当 $a\geqslant a_0$ 时可在积分号下求导数:

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a^2+1}.$$

由 $a_0>0$ 的任意性可知上式对一切 $a>0$ 都成立. 两端对 a 积分得

$$I(a)=-\int\frac{\mathrm{d}a}{a^2+1}=-\arctan a+C\quad(a>0).$$

因 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$，故

$$|I(a)|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\quad(a>0),$$

所以

$$\lim_{a\to+\infty}I(a)=0,$$

即

$$\lim_{a\to+\infty}(-\arctan a+C)=-\frac{\pi}{2}+C=0,$$

因而 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是, $I(a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$. 前面已经证明, $I(a)$ 在 $[0,\ b]$ 上一致收敛, 故 $I(a)$ 是 $[0,\ b]$ 上的连续函数, 因此,

$$\lim_{a\to 0}I(a)=I(0),$$

即

$$I(0)=\lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan a\right)=\frac{\pi}{2}.$$

问题 1.103 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续有界. 令

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t)}{(x-t)^2+y^2} \mathrm{d} t \quad(y>0).$$

证明 (i) 对任意 x, I 绝对收敛.

(ii) $\lim\limits_{y \rightarrow 0+} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2} \mathrm{d} t=f(x)$.

解 (i) 设 $|f(x)| \leqslant M$, 因

$$\left|\frac{y f(t+x)}{t^2+y^2}\right|<\frac{y M}{t^2+y^2}.$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{t^2+y^2} \mathrm{d} t$ 收敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t+x)}{t^2+y^2} \mathrm{d} t$ 绝对收敛. 而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t+x)}{t^2+y^3} \mathrm{d} t=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t)}{(x-t)^2+y^2} \mathrm{d} t.$$

故对任意的 x, I 都绝对收敛.

(ii) 任取 $x_0 \in(-\infty, +\infty)$, 由于

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d} t}{\left(x_0-t\right)^2+y^2}=\frac{y}{x} \int_{-x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d} t}{t^2+y^2}=1,$$

故有

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\left(x_0-t\right)^2+y^2} \mathrm{d} t-f\left(x_0\right)\right| \\
= & \frac{y}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+x} \frac{f(t)-f\left(x_0\right)}{\left(x_0-t\right)^2+y^2} \mathrm{d} t\right| \\
\leqslant & \frac{y}{\pi}\left(\int_{x_0+\sqrt{y}}^{+\infty}+\int_{x_0-\sqrt{y}}^{x_0+\sqrt{y}}+\int_{-\infty}^{x_0-\sqrt{y}}\right) \frac{\left|f(t)-f\left(x_0\right)\right|}{\left(x_0-t\right)^2+y^2} \mathrm{d} t \\
& =I_1+I_2+I_3 .
\end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon>0$. 因 f 连续. 故有 $\delta>0$. 使当 $|t|<\delta$ 时.

$$\left|f\left(x_0+t\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon .$$

因而当 $\sqrt{y}<\eta=\min \{\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon \pi}{2 M}\}$ 时, 便有

$$I_2=\frac{y}{\pi} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{\left|f\left(x_0+t\right)-f\left(x_0\right)\right|}{t^2+y^2} \mathrm{d} t<\varepsilon .$$

对于 I_1, 我们有

$$\begin{aligned}
I_1 & \leqslant \frac{2 M y}{\pi} \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d} t}{t^2+y^2} \leqslant \frac{2 M y}{x} \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d} t}{t^2} \\
& =\frac{2 M \sqrt{y}}{\pi}<\varepsilon .
\end{aligned}$$

对于 I_3 也有类似的估计式. 因此, 当 $0<y<\eta^2$ 时,

$$\left|\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\left(x_0-t\right)^2+y^2} \mathrm{d} t-f\left(x_0\right)\right|<3 \varepsilon .$$

由于 $x_0 \in (-\infty,\ +\infty)$ 是任取的, 故

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} \, \mathrm{d}t = f(x).$$

问题 1.104 设 f 是区间 $[0, 1]$ 上的正值连续函数. 证明极限

$$\lim_{\alpha\to 0}\{\int_0^1 [f(x)]^\alpha \ \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

存在.

解 令 $F(a) = \int_0^1 [f(x)]^\alpha \,\mathrm{d}x$, 找们将要证明

$$\lim_{a\to 0}\frac{\ln F(a)}{\alpha} = \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x,$$

从而由指数函数的连续性可知

$$\lim_{\alpha\to 0}[F(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x}$$

因 f 在 $[0, 1]$ 上正值且连续, 故存在常数 m, M, 使

$$0 < m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

因此, 对任意 $a > 0$. 函数 $[f(x)]^\alpha$ 和 $[f(x)]^\alpha \ln f(x)$ 在矩形区域

$$D = \{(x, \alpha) : 0 \leqslant x \leqslant 1, -a \leqslant \alpha \leqslant a\}$$

上都是连续的, 从而 F 在 $\alpha = 0$ 可微, 且可积分号下求导数. 令 $G(\alpha) = \ln F(\alpha)$. 则 $F(0) = 1$, $G(0) = 0$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\frac{G(\alpha)}{\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha} = G'(0)\\ &= \frac{F'(0)}{F(0)} = \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

1.3 周民强-数学分析习题演练

问题 1.105 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的不减函数, 且满足 $f(x+1)=f(x)+1$, 定义函数列 $f_n(x)=f^{(n)}(x)-x, \qquad n=1,\ 2,\ \cdots.$
证明: 对一切 $x,\ y\in\mathbb{R}$, 有 $|f_n(x)-f_n(y)|<1$.

解 首先证明:$f_n(x+1)=f_n(x)$, 即 $f_n(x)$ 是以 1 为周期的周期函数, 事实上, 当 $n=1$ 时, 有

$$f_1(x+1)=f(x+1)-(x+1)=f(x)-x=f_1(x).$$

设 $f_k(x+1)=f_k(x)+1$, 即 $f^{(k)}(x+1)-(x+1)=f^{(k)}(x)-x$. 所以

$$f^{(k)}(x+1)=f^{(k)}(x)+1,$$

从而

$$f^{(k+1)}(x+1)=f(f^{(k)}(x+1))=f(f^{(k)}(x)+1)=f(f^{(k)}(x))+1=f^{(k+1)}(x)+1.$$

于是

$$f_{k+1}(x+1)=f^{(k+1)}(x+1)-(x+1)=f^{(k+1)}(x)-x=f_{k+1}(x).$$

由上述结论可见, 只需就 $x,\ y\in[0,\ 1]$ 来证明命题即可.

设存在 $x_0,\ y_0\in[0,\ 1]$, 使 $f(x_0)-f(y_0)\geq 1$.
[若$f(x_0)-f(y_0)\leq -1$, 交换$x_0,\ y_0$的位置即可], 因 $f(x)$ 不减, 故 $f^{(n)}(x)=f_n(x)+x$ 不减. 从而

$$f_n(1)+1\geq f_n(x_0)+x_0,\qquad f_n(y_0)+y_0\geq f_n(0)=f_n(1).$$

故

$$x_0-1\leq f_n(1)-f_n(x_0)\leq y_0+f_n(y_0)-f_n(x_0)\left[\text{两个不等式由上面的两个分别推出}\right].$$

又有 $f(x_0)-f(y_0)\geq 1$, 取第一项和第三项放缩有

$$x_0-1\leq y_0-1,$$

即

$$x_0\leq y_0.$$

从而

$$x_0+f(x_0)\leq y_0+f(y_0).\left[\text{由于}f^{(n)}(x)=f_n(x)+x\text{不减.}\right]$$

即

$$1\leq f_n(x_0)-f_n(y_0)\leq y_0-x_0\leq 1.$$

故只能 $x_0=0,\ y_0=1$. 于是, $f_n(x_0)-f_n(y_0)=f_n(0)-f_n(1)=0$, 矛盾.

问题 1.106 证明以下命题:

1 若 f 在 $(0,\ \infty)$ 上严格上凸, $f(0)=0$, 则

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2),\quad x_1,\ x_2\in(0,\ \infty).$$

2 设 $f(x)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上是下凸的, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$, 则 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,\ \infty)$ 上递增.

3 设 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,\ \infty)$ 上递减, 则有

$$f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2),\quad x_1,\ x_2\in(0,\ \infty).$$

4 设 $f(x)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上是下凸的, 且有

$$f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2),\quad x_1,\ x_2\in(0,\ \infty).$$

则 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,\ \infty)$ 上递减.

解

1 容易得出连接点 $(0,\ 0)$ 与 $(x_1+x_2,\ f(x_1+x_2))$ 的直线 $f(x_1+x_2)=k(x_1+x_2)$, 又由 $f(x_1)>kx_1,\ f(x_2)>kx_2$, 故证毕.

2 设 $0<x_1<x_2<\infty$. 若 $0<x<x_1$, 则有 $x_1=\frac{x_2-x_1}{x_2-x}x+\frac{x_1-x}{x_2-x}x_2$, 由 $f(x)$ 的凸性, 可知

$$f(x_1)\le\frac{x_2-x_1}{x_2-x}f(x)+\frac{x_1-x}{x_2-x}f(x_2).$$

令 $x\to 0^+$, 即得 $f(x_1)\le\frac{x_1}{x_2}f(x_2)$, 证毕.

3 只需注意对 $x_1,\ x_2\ge 0$ 有

$$f(x_1+x_2)\le x_1\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}+x_2\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\le f(x_1)+f(x_2).$$

4 设 $0<x_1<x_2$, 且令 $p=\frac{x_1}{x_2}$, $q=1-p$, 则

$$\begin{aligned}f(x_2)&=f(px_1+q(x_1+x_2))\le pf(x_1)+qf(x_1+x_2)\\&\le pf(x_1)+q\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=f(x_1)+\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)f(x_2).\end{aligned}$$

从而可知 $\frac{f(x_2)}{x_2}\le\frac{f(x_1)}{x_1}$.

问题 1.107 求下列数列 $\{a_n\}$ 之极限:

(1)$a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$　(2)$a_{n+1}=\frac{b}{a_n}-1(b>0,\ a_1<0)$.

解 (1) 如果 $\{a_n\}$ 是收敛列, 那么令 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 就有 $a^2-2a-1=0$ 或 $a=\frac{(2\pm\sqrt{8})}{2}$. 注意到 $a_n>0(n\in N)$, 故应有 $a=1+\sqrt{2}$. 从而计算 $h_n=a_n-(\sqrt{2}+1)$. 得 $h_{n+1}=a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)=1-\sqrt{2}+\frac{1}{a_n}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}+1+h_n}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1+h_n}h_n$,

$$|h_{n+1}|\le|h_n|\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\le\frac{|h_n|}{2}\le\cdots\le\frac{|h_1|}{2^n}\qquad n\in N.$$

由此可知 $\lim_{n\to\infty}h_n=0$, 即 $\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}+1$.

(2) 如果 $\{a_n\}$ 是收敛列, 那么令 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 则由 $a^2+a-b=0$, 可知 $a=\frac{-1\pm\sqrt{1+4b}}{2}$. 令 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}$, $\beta=\frac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}$. 有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{b}{a_n}-1-\alpha=\frac{b-a_n-\alpha a_n}{a_n}\\&=\frac{b-(1+\alpha)(a_n-\alpha)-\alpha(1+\alpha)}{a_n}=\frac{-(1+\alpha)(a_n-\alpha)}{a_n}.\end{aligned}$$

注意到 $\alpha+\beta=-1$, 故得 $a_{n+1}-\alpha=\frac{\beta(a_n-\alpha)}{a_n}$. 类似地, 可推 $a_{n+1}-\alpha=\frac{\beta(a_n-\alpha)}{a_n}$. 从而有

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\cdots=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}.$$

因为 $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\alpha}{1+\alpha}<1$, 所以 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\to 0\quad(n\to\infty)$, 最后得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\beta=\frac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}.$$

问题 1.108 计算下列数列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$$

解 (1) 在下述几何-算术平均不等式

$$1+\frac{x}{2+x}=\frac{2}{\frac{1}{1+x}+1}\le\sqrt{(1+x)\cdot 1}\le\frac{1+x+1}{2}=1+\frac{x}{2}(x>-1)$$

中, 令 $x=\frac{k}{n^2}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\le\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2},$$

$$\frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{2n^2+n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\le a_n\le\frac{n(n+1)}{4n^2},$$

由此易得 $a_n\to\frac{1}{4}(n\to\infty)$.

(2) 在下述几何-算术平均不等式 $(x>-1)$

$$1+\frac{x}{2x+3}=\frac{3}{\frac{1}{(1+x)}+1+1}\le\sqrt[3]{(1+x)\cdot 1\cdot 1}\le\frac{1+x+1+1}{3}=1+\frac{x}{3},$$

中, 令 $x=\frac{k^2}{n^3}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^3}}{3+\frac{2k^2}{n^3}}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}.$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^3}}{3+\frac{2k^2}{n^3}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3+2k^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3+2n^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2)},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3},\qquad a_n\to\frac{1}{9}(n\to\infty).$$

问题 1.109 试求下列数列 $\{a_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

(1)$a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$. (2)$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{b}{2^k}\right)$ $(b \neq k\pi)$.

解 (1) 应用公式 $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \cdot \tan b}$, 可知

$$\arctan u - \arctan v = \arctan\left(\frac{u-v}{1+uv}\right).$$

现在令 $b_k = \arctan k$, 我们有

$$\tan(b_{k+1} - b_k) = \frac{\tan b_{k+1} - \tan b_k}{1+\tan b_{k+1} \cdot \tan b_k} = \frac{k+1-k}{1+k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$

从而得到

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan\left[\tan(b_{k+1} - b_k)\right] = \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) \\ &= b_{n+1} - b_0 = \arctan(n+1) \to \frac{\pi}{2} \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

(2) 注意 $\tan x = \frac{1}{\tan x} - \frac{1-\tan^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} - 2\frac{1}{\tan(2x)} = \cot x - 2\cot(2x)$, 故知

$$\frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{b}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \cot\left(\frac{b}{2^n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} \cot\left(\frac{b}{2^{n-1}}\right).$$

由此可得 $a_n = \frac{1}{2^n} \cot\left(\frac{b}{2^n}\right) - \cot b$. 注意到 $\lim\limits_{x\to 0} x\cot(bx) = \frac{1}{b}$, 故有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cot\left(\frac{b}{2^n}\right) - \cot b = \frac{1}{b} - \cot b$.

问题 1.110 试求下列数列 $\{a_n\}$ 之极限:

(1) $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}\,(a_1>0)$

(2) $a_{n+1}=\frac{A}{a_n}-1\,(A>0,\ a_1<0)$.

解 (1) 如果 $\{a_n\}$ 是收敛列, 那么令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 就有 $a^2-2a-1=0$ 或 $a=(2\pm\sqrt{8})/2$. 注意到 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$, 故应有 $a=1+\sqrt{2}$. 从而计算 $h_n=a_n-(\sqrt{2}+1)$, 得 $h_{n+1}=a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)=1-\sqrt{2}+\frac{1}{a_n}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}+1+h_n}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1+h_n}h_n$,

$$|h_{n+1}|\leqslant|h_n|\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\leqslant\frac{|h_n|}{2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{|h_1|}{2^n}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

由此知 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}+1$.

(2) 如果 $\{a_n\}$ 是收敛列, 且设 $a_n\to a(n\to\infty)$, 则由 $a^2+a-b=0$, 可知 $a=(-1\pm\sqrt{1+4b})/2$. 令 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}$, $\beta=\frac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}$. 我们有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{b}{a_n}-1-\alpha=\frac{b-a_n-\alpha a_n}{a_n}\\&=\frac{b-(1+\alpha)(a_n-\alpha)-\alpha(1+\alpha)}{a_n}=\frac{-(1+\alpha)(a_n-\alpha)}{a_n}.\end{aligned}$$

注意到 $\alpha+\beta=-1$, 故得 $a_{n+1}-\alpha=\beta\,(a_n-\alpha)\,/a_n$.

类似地, 可推知 $a_{n+1}-\beta=\alpha\,(a_n-\beta)\,/a_n$. 从而有

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\cdots=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}.$$

因为 $|\alpha/\beta|=\alpha/(1+\alpha)<1$, 所以 $(\alpha/\beta)^n\to0(n\to\infty)$, 最后得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\beta=(-1-\sqrt{1+4b})/2$$

问题 1.111 试写出下述数列 $\{a_n\}$ 的最简解析表达式:

(1)$a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{b_k}\right)\left(n\in\mathbf{N},\ b_1=1,\ b_{k+1}=k\left(1+b_k\right)\right)$.

(2)$a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n(n+1)/2}\right)(n\in\mathbf{N})$.

(3)$a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)(n\in\mathbf{N})$.

(4)$a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(2^{2^{n-1}}+1\right)/2^{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N})$.

解 (1) 注意 $b_{k+1}=k+k(k-1)+\cdots+k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1$, 故知 $a_n=\left(1+b_n\right)/n!=1+1+1/2!+1/3!+\cdots+1/n!(n\in\mathbf{N})$.

(2) 注意

$$1-\frac{1}{k(k+1)/2}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)},$$

故知

$$a_n=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)}=\frac{1}{3}\frac{n+2}{n}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

(3) 注意

$$1-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1},$$

故知

$$a_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

(4) 注意

$$\left(2^{2^{n-1}}+1\right)/2^{2^{n-1}}=1+1/2^{2^{n-1}},$$

故知

$$a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)(n\in\mathbf{N}).$$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}\right)a_n&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\\&=\prod_{k=3}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\cdots=\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\quad(n\in\mathbf{N}).\end{aligned}$$

问题 1.112 求解以下数列的极限

(1)$a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

(2)$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{b}{2^k}\right)(b\neq k\pi)$.

解 (1) 应用公式 $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$，可知

$$\arctan u-\arctan v=\arctan\left(\frac{u-v}{1+uv}\right).$$

现在令 $b_k=\arctan k$，我们有

$$\tan\left(b_{k+1}-b_k\right)=\frac{\tan b_{k+1}-\tan b_k}{1+\tan b_{k+1}\cdot\tan b_k}=\frac{k+1-k}{1+k(k+1)}=\frac{1}{k^2+k+1}.$$

从而可得

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{n}\arctan\left[\tan\left(b_{k+1}-b_k\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}\left(b_{k+1}-b_k\right)\\&=b_{n+1}-b_0=\arctan(n+1)\to\pi/2\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

(2) 注意 $\tan x=\frac{1}{\tan x}-\frac{1-\tan^2 x}{\tan x}=\frac{1}{\tan x}-2\frac{1}{\tan(2x)}=\cot x-2\cot(2x)$，故知

$$\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{b}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{b}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\left(\frac{b}{2^{n-1}}\right)$$

由此可得 $a_n=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{b}{2^n}\right)-\cot b$. 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot(bx)=\frac{1}{b}$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{b}{2^n}\right)-\cot b=\frac{1}{b}-\cot b$.

问题 1.113 试证明下列命题:

(1) 若 $\{a_n+a_{n+1}\}$, $\{a_n+a_{n+2}\}$ 均为收敛列, 则 $\{a_n\}$ 是收敛列.

(2) 设 $\lambda>0$, $a_{n+1}=a_n\left(2-\lambda a_n\right)(n\in\mathbf{N})$. 若 a_1, $a_2>0$, 则 $\lim\limits_{n\rightarrow}a_n=1/\lambda$.

(3) 若 $a_{n+1}=\alpha a_n+(1-\alpha)a_{n-1}(0<\alpha<1)$, 则 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}a_n=\left[(1-\alpha)a_1+a_2\right]/(2-\alpha)$.

解 (1) 只需注意表达式

$$a_{n+1}=\left\{\left(a_{n+1}+a_{n+2}\right)+\left[\left(a_n+a_{n+1}\right)-\left(a_n+a_{n+2}\right)\right]\right\}/2.$$

(2) (i) 由题设知 $a_2=a_1\left(2-\lambda a_1\right)>0$, 故 $2-\lambda a_1>0$, $1-\lambda a_1>-1$. 又由 $\lambda a_1>0$, 可知 $1-\lambda a_1<1$. 即 $\left|1-\lambda a_1\right|<1$.

(ii) 因为我们有 $(n\in\mathbf{N})$

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}=\tfrac{1}{\lambda}-\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}-\sqrt{\lambda}a_n\right)^2=\tfrac{1}{\lambda}-\tfrac{\left(1-\lambda a_n\right)^2}{\lambda},\\
&\lambda a_{n+1}=1-\left(1-\lambda a_n\right)^2,\\
&\left(1-\lambda a_{n+1}\right)=\left(1-\lambda a_n\right)^2=\cdots=\left(1-\lambda a_1\right)^{2^n}
\end{aligned}$$

所以根据 (i) 可得 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\left(1-\lambda a_{n+1}\right)=0$, $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}a_{n+1}=1/\lambda$.

(3) 因为由题设知 $a_{n+1}-a_n=(\alpha-1)\left(a_n-a_{n-1}\right)$, 所以我们有

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}-a_n=(\alpha-1)^{n-1}\left(a_2-a_1\right),\\
&a_{n+1}-a_1=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}-a_k\right)=\left(a_2-a_1\right)\sum_{k=1}^{n}(\alpha-1)^{k-1}.
\end{aligned}$$

从而可得 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}a_n=\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{a_2-a_1}{2-\alpha}+a_1\right)=\frac{a_2+(1-\alpha)a_1}{2-\alpha}$.

问题 1.114 试求下述数列 $\{a_n\}$ 的敛散性:

(1)$a_n = 4^n(1-b_n)\left(b_{n+1}=\sqrt{(1+b_n)/2},\ -1<b_1<1\right)$.

(2)$a_{n+1} = a_1(1-a_n-b_n)+a_n(b_{n+1}=b_1(1-a_n-b_n)+b_n(a_1,\ b_1\in(0,\ 1)))$.

(3)$a_n = \frac{b_n+b_n^2+\cdots+b_n^m-m}{b_n-1}\quad(b_n\neq 1,\ b_n\to 1(n\to\infty))$.

解 (1) 令 $b_1=\cos\theta(0<\theta<\pi)$, 则 $b_2=\cos(\theta/2)$,

$$b_3=\sqrt{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)/2}=\cos\frac{\theta}{4},\ \cdots,\ b_n=\cos\frac{\theta}{2^n},\ \cdots.$$

从而可知

$$\begin{aligned}a_n&=4^n(1-\cos(\theta/2^n))=\tfrac{4^n(1-\cos(\theta/2^n))(1+\cos(\theta/2^n))}{1+\cos(\theta/2^n)}\\&=\tfrac{4^n\sin^2(\theta/2^n)}{1+\cos(\theta/2^n)}=\tfrac{\theta^2}{1+\cos(\theta/2^n)}\cdot\left(\tfrac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n}\right)^2,\\&\lim_{n\to\infty}a_n=\theta^2/2=(\arccos b_1)^2/2.\end{aligned}$$

(2) 记 $c_n=a_n+b_n(n\in\mathbf{N})$, 我们有

$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}&=(a_1+b_1)[1-(a_n+b_n)]+(a_n+b_n),\\c_{n+1}&=c_1(1-c_n)+c_n,\quad c_n=1-(1-c_1)^n(n\in\mathbf{N}).\end{aligned}$$

从而知 $a_n=a_1[1-(1-c_1)^n]/c_1$, $b_n=[1-(1-c_1)^n]/c_1$, 故得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_1/(a_1+b_1)$, $\quad\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b_1/(a_1+b_1)$.

(3) 注意等式

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{b_n-1}\left[(b_n-1)+\left(b_n^2-1\right)+\cdots+\left(b_n^m-1\right)\right]\\&=1+(b_n+1)+(b_n^2+b_n+1)+\cdots+(b_n^{m-1}+b_n^{m-2}+\cdots+1),\end{aligned}$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+2+\cdots+m=m(m+1)/2$.

问题 1.115 设 k 是正整数, 试定 b 值, 使得满足 $(a_{n+1}+a_{n-1})/2=ba_n(n\geqslant 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 有周期 k, 即 $a_{n+k}=a_n(n\in\mathbf{N})$.

解 采用矩阵表示, 我们有 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 从而只需指出 $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

因为 A 的特征多项式为 $\lambda^2-2b\lambda+1$, 所以 A 的特征值为 $b\pm\sqrt{b^2-1}$. 注意到 $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的必要条件是: A 的特征值为单位的第 k 次根

$$b=\cos(2\pi j/k)\quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ [k/2]).$$

此时, 若 $0<j<k/2$(即 $-1<b<1$), 则 A 的特征值不同 (A 对角化), 即 $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $b=+1$ 或 -1, 则 A 的特征值不互异. A 有 Jordan 标准型: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 从而有 $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

问题 1.116 试证明下列命题:

(1) 若 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to}(a_n-a_{n-2})=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})/n=0$.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to}b_n=b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=ab\quad(c_n=(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)/n).$$

(3) 对 $\{a_n\}$ 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}S_k/n(n\in\mathbf{N})$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n/n=0$.

解 (1) (i) 记 $b_n=a_n+a_{n-1}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a_{n-1})/n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n/n=0$.

(ii) 再令 $c_n=(-1)^na_n$, 则由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-c_{n-2})=0$. 从而根据 (i) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n+c_{n-1})/n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})/n=0$.

(2) 记 $a_n=a+\alpha_n$, $b_n=b+\beta_n$ $(n\in\mathbf{N};\alpha_n\to0,\ \beta_n\to0(n\to\infty))$, 则 $c_n=ab+a\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}+b\frac{\alpha_1+\cdots\pm\alpha_n}{n}+\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}=ab+\gamma_n^{(1)}+\gamma_n^{(2)}+\gamma_n^{(3)}$. 易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n^{(1)}=0=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n^{(2)}$. 又假定 $|\alpha_n|\leqslant M(n\in\mathbf{N})$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\gamma_n^{(3)}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}M\frac{|\beta_1|+\cdots+|\beta_n|}{n}=0.$$

由此即可得证.

(3) 由题设知 $n\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$, 故可得

$$S_n=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1},\qquad S_n/n=\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}/n.$$

由此知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n/n=0$, 从而又有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n}\right)=0.$$

1.4 裴礼文-数学分析中的典型问题与方法

问题 1.117 用 $\varepsilon - N$ 方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

解 $\forall \varepsilon > 0$, 要 $|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \varepsilon$, 记 $\alpha = \sqrt[n]{n+1} - 1$, 此式可改写成

$$1 + n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2,$$

得

$$0 < \alpha < \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \leqslant \sqrt{\frac{2(n+1)+2n-2}{n(n-1)}} = \frac{2}{\sqrt{n-1}}(\text{当} n > 1\text{时}).$$

至此要 $|\alpha| < \varepsilon$, 只要 $\frac{2}{\sqrt{n-1}} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{4}{\varepsilon^2} + 1$. 故令 $N = \frac{4}{\varepsilon^2} + 1$, 则 $n > N$ 时有 $|\sqrt[n]{n+1} - 1| = |\alpha| < \varepsilon$.

问题 1.118 设 $\{a_n\}$ 是一数列 $(a_n \neq 0)$, 满足 $a_n \to 0$(当 $n \to \infty$ 时). 定义数集

$$P = \{ka_i | k \in \mathbb{Z},\ i \in \mathbb{N}\}$$

试证: 对任何实数 b, 存在数列 $\{b_n\} \subset P$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

证明 因对每个 a_n, 集合 $\{ka_n : k \in \mathbb{Z}\}$ 组成一格点集; 格点间距为 $\{a_n\}$. 对任何实数 b, 总存在某个 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $|b - ka_n| \leqslant |a_n|$.

因 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 故 $\forall \varepsilon_m = \frac{1}{m} > 0$, $\exists n_m \in \mathbb{N}$, 使得 $0 < |a_{n_m}| < \varepsilon_m$.

如前所述, $\exists k_m \in \mathbb{Z}$, $k_m a_{n_m} \in P$, 使得 $|b - k_m a_{n_m}| \leqslant |a_{n_m}| < \varepsilon_m$.

对每个 $\varepsilon_m > 0$, 把对应找出的 $k_m a_{n_m}$ 记为 b_m, 令 $\varepsilon_m \to 0 (m \to \infty)$, 则 $b_m \to b$, 其中 $\{b_m\} \subset P$ 便是.

问题 1.119 设 $x \to 0$ 时, $f(x) \sim x$, $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)$. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a>0)$.

证明 我们注意到 $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a$, 从而

$$|x_n - a| = \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \frac{2i-1}{n^2}a\right|. \tag{1.28}$$

若能证明 $\forall \varepsilon > 0$, n 充分大时,

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \frac{2i-1}{n^2}a\right| < \frac{2i-1}{n^2}\varepsilon \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.29}$$

则式 (1.28) 右端 $\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}\varepsilon = \varepsilon$. 问题获证. 要证明 (1.29), 亦即要证

$$\left|\frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{a}. \tag{1.30}$$

事实上, 因为 $f(x) \sim x(x \to 0)$, 因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有

$$\left|\frac{f(x)}{x} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{a}. \tag{1.31}$$

于是, 令 $N = \frac{2a}{\delta}$, 则当 $n > N$ 时, $0 < \frac{2i-1}{n^2}a < \delta(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 从而按式 (1.31) 有式 (1.30) 成立.

笔记 特别地, 当 $f(x) = \sin x$ 时, 该问题有如下证明:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{2i-1}{n^2}a &= \frac{1}{2\sin\frac{a}{n^2}} \sum_{i=1}^{n} 2\sin\frac{2i-1}{n^2}a\sin\frac{a}{n^2} \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{a}{n^2}} \sum_{i=1}^{n} \left(\cos\frac{2i-2}{n^2}a - \cos\frac{2i}{n^2}a\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{a}{n^2}} \left(1 - \cos\frac{2}{n}a\right) = \frac{1}{\sin\frac{a}{n^2}}\sin^2\frac{a}{n} \\
&= \frac{\frac{a}{n^2}}{\sin\frac{a}{n^2}} \cdot \frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\frac{a}{n}\right)^2} \cdot a \to a \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

问题 1.120 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(a_0 + \mathrm{C}_n^1 a_1 + \mathrm{C}_n^2 a_2 + \cdots + \mathrm{C}_n^k a_k + \cdots + a_n) = a.$$

证明 (拟合法) 因 $1 = \frac{(1+1)^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$，故 $a = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a$,

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k - a\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{C}_n^k}{2^n}\left|\alpha_k\right|.$$

其中 $\alpha_k = a_k - a \to 0$ (当 $k \to +\infty$ 时). $\exists M > 0$, $|\alpha_k| \leqslant M(k = 0, 1, 2, \cdots)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 > 0$, 当 $k > k_0$ 时, $|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\text{上式} \leqslant \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{n^k}{2^n}\cdot M + \frac{1}{2^n}\sum_{k=k_0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{Mk_0 n^{k_0}}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因 $\frac{Mk_0 n^{k_0}}{2^n.} \to 0$ (当 $n \to \infty$ 时), $\exists N > k_0 > 0$，使 $n > N$ 时，$\frac{Mk_0 n^{k_0}}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\text{上式} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

问题 1.121 设 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}_1$, $n=f(m)$($\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}_1$ 都是全体自然数组成的空间), 且 $\forall n\in\mathbf{N}: f^{-1}(n)$ 为有限集. 试证: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\text{存在}}{=} a$, 则 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{f(m)} \overset{\text{存在}}{=} a$.

证明 证 I (利用极限的等价描述) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\text{存在}}{=} a$, 即 $\forall\varepsilon>0$, 在 a 的 ε 邻域外最多有 a_n 的有限项, 记作 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{k}=\{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}\}$. 又每个 n_j 对应的 $\{m\mid n_j=f(m)\}$ 皆为有限集, 它们的并:$E=\bigcup\limits_{j=1}\{m\mid n_j=f(m)\}$ 仍是有限集. 此即: a 的 ε 邻域外最多只有 $\{a_{f(m)}\}$ 的有限项 $\{a_{f(m)}\}\, m\in E$. 故 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{f(m)} \overset{\text{存在}}{=} a$.

笔记 若缺少 $f^{-1}(n)$ 为有限集的条件, 结论可能不成立. 例如: 若 $a_8\neq a$, 但 $f(m)=8$, 则 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{f(m)}=a_8\neq a$.

证 II 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\text{存在}}{=} a$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $a_n\in U(a,\varepsilon)$. 因对每个 $n: f^{-1}(n)$ 都为有限集, 故 $\bigcup\limits_{n\leqslant N} f^{-1}(n)$ 仍是有限集, 因此, $\exists M=\max\{m\mid m\in\bigcup_{n\leqslant N} f^{-1}(n)\}$, 则 $m>M$ 时, $a_{f(m)}\in U(a,\varepsilon)$. 故 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{f(m)} \overset{\text{存在}}{=} a$.

证 III (利用子列.) 只需证明: 若 $\{f(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, 则必有 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{f(m)} \overset{\text{存在}}{=} a$. 事实上, 若 $\{f(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 不是 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, 则说明 $\{f(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 只是 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的有限项, 也就是说: $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的有限项对应着 $\{f(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 中的无穷多项. 因此, 至少有一个 n 通过 $n=f(m)$ 对应无穷多个 m. 与题设矛盾. 可见, $\{f(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 只可能是 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列. 证毕.

笔记 释题作为映射, $n=f(m)$, “每个 m 必有且仅有一个 n 与之对应”, 此外,

(1) 可以有多个不同的 m 与同一个 n 相对应,

(2) 甚至有无穷多个不同的 m 与同一个 n 相对应. 题设: $f^{-1}(n)$ 为有限集. 意指: 第 (2) 种情况不发生. 因此题意是: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\text{存在}}{=} a$, 且情况 (2) 不发生, 试证: $\lim\limits_{m\to\infty} a_{f(m)} \overset{\text{存在}}{=} a$.

问题 1.122 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证明 证 I (用极限定义) 因为 $-1\leqslant\sin n\leqslant 1$, 所以我们只要证明: 任意 $A\in[-1,\ 1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\neq A$ 即可. 不妨设 $A\in[0,\ 1]$ (对于 $[-1,\ 0]$ 的情况, 类似可证). 根据极限定义, 我们只要证明: $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall N>0$, $\exists n>N$, 使得 $|\sin n-A|\geqslant\varepsilon_0$. 事实上, 可取 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall N>0$, 令 $n=\left[\left(2N\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$(这里 $[\cdot]$ 表示取整数部分), 则 $n>N$, 且由

$$2N\pi-\frac{3\pi}{4}<n<2N\pi-\frac{2}{4}$$

知

$$|\sin n-A|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证 II 根据 Cauchy 准则, 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在, 即要证明: $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall N>0$, $\exists n,\ m>N$, 使得 $|\sin n-\sin m|\geqslant\varepsilon_0$. 取 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall N>0$, 令 $n=\left[2N\pi+\frac{3}{4}\pi\right]$, $m=[2N\pi+2\pi]$($[\cdot]$ 表示取整数部分), 则 $m>n>N$, 且 $2N\pi+\frac{\pi}{4}<n<2N\pi+\frac{3}{4}\pi$, $2N\pi+\pi<m<2N\pi+2\pi$,

$$|\sin n-\sin m|\geqslant\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}.\quad\frac{2\cos(n+1)\sin 1}{\sin[(n+1)+1)-\sin[(n+1)-1]}$$

这表明 $\{\sin n\}$ 发散. 证 III (反证法) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=A$, 因 $\sin(n+2)-\sin n=2\sin 1\cos(n+1)$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}2\sin 1\cos(n+1)=\lim\limits_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=A-A=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\cos n=0,\ A=\lim_{n\to\infty}\sin n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\cos^2 n}=1.$$

但 $\sin 2n=2\sin n\cdot\cos n$, 取极限得 $A=0$, 矛盾.

问题 1.123 (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$;

(2) 是否存在数列 $\{a_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\max\{a_1,\cdots,a_n\}}{n}\neq 0$.

解 (1) 因 $n\to\infty$ 时,

$$n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\to\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}}\right\}^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(2) 不存在. 提因为收敛数列的子列必收敛, 且其极限与原数列的极限相同, 由此, 假若存在如此数列 $\{a_n\}$, 那么 $\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists i_n\leqslant n$, 使得 $a_{i_n}=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$. 而 $\left\{\frac{a_{i_n}}{i_n}\right\}$ 是 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的子列, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{i_n}}{i_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0\left(\text{而}0<\frac{i_n}{n}\leqslant 1\right).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\max\{a_1,\cdots,a_n\}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{i_n}}{i_n}\cdot\frac{i_n}{n}=0$(无穷小量乘以有界量仍是无穷小量). 结果与已知条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\{a_1,\cdots,a_n\}}{n}\neq 0$$

矛盾.

问题 1.124 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} = ab.$$

解 令 $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, 则 $n\to\infty$ 时, α_n, $\beta_n \to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} \\
=&\frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n) + (a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1}) + \cdots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n} \\
=&ab + a\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n} + b\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}. \qquad (1.32)
\end{aligned}$$

$n\to\infty$ 时第二, 三项趋向零. 现证第四项极限亦为零. 事实上, 因 $\alpha_n \to 0$(当 $n\to\infty$ 时), 故 $|\alpha_n|$ 有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $|\alpha_n| \leqslant M(\forall n\in\mathbf{N})$. 故

$$0 < \left|\frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| \leqslant M\frac{|\beta_n| + |\beta_{n-1}| + \cdots + |\beta_1|}{n} \to 0.$$

从而 (1.32) 式以 ab 为极限.

笔记 本题的变换具有一般性, 常常用这种变换可将一般情况归结为特殊情况. 如本题原来是已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n} = ab$. 变换后, 归结为已 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_1\beta_n+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n} = 0$.

问题 1.125 计算下列数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}$$

解 因

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi,$$

$$\text{左端极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(n\to\infty),$$

$$\text{右端极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(n\to\infty).$$

故原式 $=\frac{2}{\pi}$ (两边夹法则).

问题 1.126 求下列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，其中 x_n :

(1)$x_n = \frac{5^n \cdot n!}{(2n)^n}$;

(2)$x_n = \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot\cdots\cdot(n+10)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$

解 (1) 因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!(2n)^n}{(2n+2)^{n+1}\cdot 5^n n!} = \frac{5}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{5}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{5}{2\mathrm{e}} < 1(n\to\infty).$$

故正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 从而通项 $x_n \to 0(n\to\infty)$.

(2) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+11}{3n+2} \to \frac{1}{3} < 1(n\to\infty)$, 故正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, $x_n \to 0(n\to\infty)$.

问题 1.127 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right].$$

解 因级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛, 故其余项

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \to 0(n\to\infty).$$

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2} \leqslant R_{n-1} \to 0(n\to\infty),$$

故原极限为零 (用 Cauchy 准则也行).

问题 1.128 设函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续周期函数, 试证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

解 证 I $\forall x\in[0,+\infty)$, $\exists n\in\mathbf{N}: nT\leqslant x<(n+1)T$, 记 $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=c$, $\int_{nT}^x f(t)\,\mathrm{d}t=\alpha$, $x-nT=\beta$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{nc+\alpha}{nT+\beta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{c+\frac{\alpha}{n}}{T+\frac{\beta}{n}}=\frac{c}{T}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

(因为 $\left|\frac{\alpha}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_{nT}^x|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{M(x-nT)}{n}\leqslant\frac{MT}{n}\to0$(当 $x\to+\infty$ 时)(其中 M 为 $|f(x)|$ 的界), $\left|\frac{\beta}{n}\right|=\frac{|x-nT|}{n}\leqslant\frac{T}{n}\to0$(当 $x\to+\infty$ 时)) .

证 II 1° 当 $f(x)\geqslant0$ 时 (用两边夹法则), $\forall x\geqslant0$, $\exists n\in\mathbf{N}$, 使得 $nT\leqslant x<(n+1)T$, 从而有

$$\frac{1}{(n+1)T}\int_0^{nT}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{nT}\int_0^{(n+1)T}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\text{上式左端}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\to\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\equiv I\ (\text{当}\,n\to+\infty\ \text{时}).$$

类似, 上式右端 $=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\to I$, 故 $\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\to I$.

2° (一般情况) 令 $g(x)=f(x)-m$ (周期连续函数必有界, m 表示其下界), 这时 $g(x)\geqslant0$, 应用 1° 之结果:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{x}\int_0^x(g(t)+m)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t+m\\&\xrightarrow{\text{由}1^\circ}\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t+m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t(\text{当}x\to+\infty\text{时}).\end{aligned}$$

问题 1.129 (1) 设函数 $f:(0,\ +\infty)\to(0,\ +\infty)$ 单调递增, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(2t)}{f(t)}=1$. 试证: 对任意 $m>0$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(mt)}{f(t)}=1$;

(2) 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$, 试证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.

证明 (1) 因 $\lim\limits_{\to+\infty}\frac{f(4t)}{f(2t)}\overset{s=2t}{=}\lim\limits_{\cdots+\infty}\frac{f(2s)}{f(s)}=1$, 故

$$\lim_{\therefore+\infty}\frac{f(4t)}{f(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(2t)}{f(t)}\cdot\frac{f(4t)}{f(2t)}=1.$$

类似地, 由 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f\left(2^tt\right)}{f(t)}=1$ 即得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(2^{k+1}t\right)}{f(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(2^{k+1}t\right)}{f\left(2^kt\right)}\cdot\frac{f\left(2^kt\right)}{f(t)}=1.$$

(按数学归纳法) 这就证明了 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f\left(2^tt\right)}{f(t)}=1(k=1,\ 2,\ \cdots)$. 同理,

$$\forall k\in\mathbf{N},\ \lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(2^{-k}t\right)}{f(t)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(t)}{f\left(2^{-k}t\right)}}\overset{t=2^ks}{=\!=}\frac{1}{\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{f\left(2^ks\right)}{f(s)}}=1.$$

如此, $\forall m>0,\ \exists k>0$, 使得 $2^{-k}\leqslant m\leqslant2^k$. 由 f 单调递增有

$$\frac{f(2^{-k}t)}{f(t)}\leqslant\frac{f(mt)}{f(t)}\leqslant\frac{f(2^kt)}{f(t)}.$$

令 $t+\infty$, (利用两边夹法则) 知 $\forall m>0$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(mt)}{f(t)}=1$. 证毕.

(2) 已知: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 亦即

$$-\frac{\varepsilon}{3}|x|<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{3}|x|.$$

将 x 替换为 $\frac{x}{2^k}$, 得

$$-\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^k}|x|<f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)<\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^k}|x|(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

将诸式相加, [注意到 $\sum\limits_{i=0}^{n}\left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]=f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$] 得

$$-\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}|x|<f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)<\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}|x|.$$

令 $n\to\infty$, 取极限得 $-\frac{2\varepsilon}{3}|x|\leqslant f(x)\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}|x|$(因 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=2$), 故 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$. 表明: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.

问题 1.130 证明:

$$\ln\ln n \ll \ln n \overset{0<\alpha<1}{\ll} n^{\alpha} \overset{k\in\mathbf{N}}{\leqslant} n^k \overset{a>1}{\ll} a^n \ll n! \ll n^n (n\to\infty).$$

证明 1°

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0\text{明显，因}0<\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}\to 0(\text{当}n\to\infty\text{时}).$$

2°证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$. 记 $n_0=[a]$(不超过 a 的最大整数), 则当 $n>n_0$ 时, $0<\frac{a}{n_0+1},\cdots,\frac{a}{n-1}<1$,

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\cdots\frac{a}{n_0}\cdot\frac{a}{n_0+1}\cdots\cdots\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}<a^{n_0}\cdot\frac{a}{n}\to 0(n\to\infty).$$

3°

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}\overset{L'Hospital}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\cdots.$$

应用 k 次 L'Hospital 法则, 上式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{a^x(\ln a)^k}=0.$$

4°

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-a}}=0.$$

5°

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}.$$

令 $\ln x=y$, $x=\mathrm{e}^y$, 于是

$$\text{上式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{\alpha y}}\overset{L'Hosipital}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha\mathrm{e}^{\alpha y}}=0.$$

6°

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}.$$

令 $\ln x=y$, 则上式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0.$$

问题 1.131 设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在, 试求:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$(其中 $a_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$)

解 (1) 记 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n ka_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n[(k+(n-k))a_k-(n-k)a_k]=S_n-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_n$ 存在, 可知本题极限为 0.

(2)

$$0\leqslant(1a_1\cdot 2a_2\cdot\cdots\cdot na_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$$

(3)

$$\begin{aligned}0<&\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})}\leqslant\frac{n}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n}}}\\=&n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}\sqrt[n]{a_1\cdot 2a_2\cdot\cdots\cdot na_n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\end{aligned}$$

问题 1.132 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 公式) 设 $\{x_n\}$ 严格递增, (即 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $x_n < x_{n+1}$), 且 $\lim_{n\to\infty} = +\infty$.
(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = a$(有限数), 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a$;
(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$;
(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = -\infty$.

证明 1° 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = a$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left|\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 即

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}(k = N+1,\ N+2,\ \cdots,\ n-1,\ n,\ \cdots). \tag{1.33}$$

借助分数的和比性质:" 当 $m < \frac{b_k}{a_k} < M(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 时, 有 $m < \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} < M$". 于是由(1.33)可得 $a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y_n-y_N}{x_n-x_N} < a + \frac{\varepsilon}{2}$, 亦即

$$\left|\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{y_n}{x_n} - a = \frac{y_n - ax_n}{x_n} &= \frac{y_n - y_N - ax_n + ax_N}{x_n - x_N} \cdot \frac{x_n - x_N}{x_n} + \frac{y_N - ax_N}{x_n} \\ &= \left(\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - a\right) \cdot \left(1 - \frac{x_N}{x_n}\right) + \frac{y_N - ax_N}{x_n}.\end{aligned} \tag{1.34}$$

因 x_n 严格增加趋向 $+\infty$, 可默认 $x_n > 0$; 当 $n > N$ 时, 有 $\left|1 - \frac{x_N}{x_n}\right| \leqslant 1$. 固定 N, 让 n 进一步增大, 还能保持 $\left|\frac{y_N-ax_N}{x_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 故由(1.34)地

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - a\right| \leqslant \left|\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - a\right| + \left|\frac{y_N - ax_N}{x_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a$.

2°(极限为 $+\infty$ 的情况) 因已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = +\infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = 0$. 利用 1° 中的结论, 只要证明 y_n 严格增加趋向 $+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$(问题得证). 因 x_n 严格单调递增, y_n 严格单调递增, 只要证明 $\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} > 1$. 事实上, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = +\infty$, 所以对 $M = 1$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} > 1$, 即 $n > N$ 时,

$$y_n - y_{n-1} > x_n - x_{n-1} > 0. \tag{1.35}$$

所以当 $n > N$ 时, y_n 严格单调增加. 在式(1.35)中令 $n = N+1,\ N+2,\ \cdots,\ k$, 然后相加, 可知

$$y_k - y_N > x_k - x_N.$$

令 $k \to \infty$, 知 $y_k \to +\infty$.

3° 令 $y_n = -z_n$.

笔记 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = \infty$, 一般推不出 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \infty$. 如令 $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = \{0,\ 2^2,\ 0,\ 4^2,\ 0,\ 6^2,\ ,\ \cdots\}$. 这时虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = \infty$, 但

$$\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\} = \{0,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ \cdots \nrightarrow \infty\}.$$

问题 1.133 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在，$\{p_k\}$ 为单调增加的正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$, $p_{n+1}\neq p_n(n=1, 2, \cdots)$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$.

证明 记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ \text{则}\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=\sum_{k=2}^{n}p_k(S_k-S_{k-1})+p_1S_1=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(p_k-p_{k+1})+S_np_n.$$

由 Stolz 公式可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k(p_k-p_{k+1})}{p_n}=\lim_{n\to\infty}(-S_{n-1}).$$

故原式可证极限为 0.

问题 1.134 若 $0<\lambda<1$，$a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，试证

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{1-\lambda}$$

证明 令 $a_k=a+\alpha_k$ 左边可转化为

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-\lambda^{n+1})a}{1-\lambda}+\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\alpha_{n-k}\\
=&\frac{(1-\lambda^{n+1})a}{1-\lambda}+\sum_{i=0}^{n}\lambda^{n-i}\alpha_i\\
=&\frac{(1-\lambda^{n+1})a}{1-\lambda}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda^{-i}\alpha_i}{\lambda^{-n}}\to\frac{a}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

上式右端的极限可由 Stolz 解得.

问题 1.135 证明数列 $x_0 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdot$ 有极限, 并求其值.

证明 1° 显然 $1 \leqslant x_0 < 2$. 若 $1 \leqslant x_n < 2$, 则 $1 \leqslant x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2\cdot 2} = 2$. 故对一切 $n \in \mathbb{N}$, 有 $1 \leqslant x_n < 2$.

因 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{2x_n}}{x_n} = \sqrt{\frac{2}{x_n}} > \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$, 故 x_n 单调递增.

利用单调有界原理, 知道 $\{x_n\}$ 收敛. 记 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 在 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ 中取极限得 $A = \sqrt{2A}$, $A = 0$或2.

因 $x_n > 0$且x_n单调递增, 故 $A \neq 0$, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} = 2$.

2° 记 $f(x) = \sqrt{2x}(x > 0)$, 有 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0$, 故 $f(x)$ 单调增加, 从而由 $x_n > x_{n-1}$ 可知推出 $x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n-1}) = x_n$. 今有 $x_1 = \sqrt{2} > x_0 = 1$, 故 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, x_n单调递增. 其余与 1° 相同.

3°(利用压缩映像原理) 如 1°, 已有 $1 \leqslant x_n < 2$, 对 $f(x) = \sqrt{2x}$, 有

$$\left|f'(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{2x}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

满足压缩影像原理, 可知 $\{x_n\}$ 收敛. 其余同 1°.

4°

$$x_n = \sqrt{2x_{n-1}} = \sqrt{2\sqrt{2x_{n-2}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} \to 2(n\to\infty)$$

问题 1.136 设 $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n + y_n(\forall n \in N)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} y_k < +\infty$. 试证 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k < +\infty$ 收敛, 根据 Cauchy 准则, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} y_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} y_k - \sum_{k=1}^{n} y_k\right| < \varepsilon(\forall p \geqslant 0).$$

因恒有 $x_n \geqslant 0$，故 $\inf_{k\geqslant n} x_k = \alpha_n \geqslant 0$. 由下确界的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 > n$，使得根据已知条件 : $x_{n+1} \leqslant x_n + y_n$，有

$$x_{n_1+k+1} - x_{n_1+k} \leqslant y_{n_1+k}(\forall k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1).$$

诸式累加，得

$$x_{n_1+p+1} - x_{n_1} \leqslant \sum_{k=0}^{p} y_{n_1+k} = \sum_{k=n_1}^{n_1+p} y_k < \varepsilon \quad (\forall p \geqslant 0). \tag{1.36}$$

1) 若 $x_{n_1+p+1} \leqslant x_{n_1}$，则 $0 \leqslant \alpha_n \leqslant x_{n_1+p+1} \leqslant x_{n_1} \leqslant \alpha_n + \varepsilon$，知 $|x_{n_1+p+1} - x_{n_1}| < \varepsilon$.

2) 若 $x_{n_1} < x_{n_1+p+1}$，则由式 (1.36) : $0 < x_{n_1+p+1} - x_{n_1} \leqslant \sum\limits_{k=n_1}^{n_1+p} y_k < \varepsilon$.

总之数列 $\{x_n\}$ 符合 Cauchy 准则条件, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

问题 1.137 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件:$a_n > 0(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}+a_{n+4}}=0.$$

试证 $\{a_n\}$ 无界.

证明 由题目, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}+a_{n+4}}{a_n}=+\infty$, 即 $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{a_{n+2}+a_{n+4}}{a_n}>4.$$

用反证法. 假设 $\{a_n\}$ 有界, 有界必有上确界, 即有 $0<a_n\leqslant\alpha=\sup_n a_n$ 差在. 由上式 $4a_n<a_{n+2}+a_{n+4}\leqslant 2\alpha$, 亦即

$$2a_n\leqslant\alpha.$$

再对此式左端取上确界, 得 $2\alpha\leqslant\alpha$, (而 $\alpha>0$) 导致 $2\leqslant 1$, 谬误! $\{a_n\}$ 只能无界.

问题 1.138 已知数列 $\{u_n\}$ 由关系 $u_1 = b$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 (n \geqslant 1) \tag{1.37}$$

给出, 问当且仅当 a, b 是什么数时, 数列 $\{u_n\}$ 收敛? 其极限等于什么?

解 我们首先考察: 若 $\{u_n\}$ 收敛, a, b 应满足什么条件. 从式(1.37)知, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$, 则 $A = A^2 + (1-2a)A + a^2$, 从而 $A = a$. 又按式(1.37),

$$u_{n+1} = u_n + (u_n - a)^2 \geqslant u_n (n \geqslant 1),$$

因此 $\{u_n\} \nearrow A$. 故一切 $u_n \leqslant A = a$. 从而

$$u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 - a \leqslant 0,$$

但 $x^2 + (1-2a)x + a^2 - a = 0$ 的两根为 $(a-1)$ 与 $a^{-1}x^2$ 的系数 > 0, 故上式当且仅当

$$u_n \in [a-1,\ a]$$

时成立. $u_1 = b$, 这样我们知要极限存在必须

$$a - 1 \leqslant b \leqslant a.$$

反之, 假如上式成立, 按二次三项式的性质应有

$$u_2 = u_1^2 + (1-2a)u_1 + a^2 \in [a-1,\ a].$$

如此递推, 用数学归纳法可得

$$a - 1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant a,$$

$\{u_n\} \nearrow$ 有上界. 故由式(1.37)取极限, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

问题 1.139 (不动点方法) 已知数列 $\{x_n\}$ 在区间 I 上由 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 给出，f 是 I 上连续增函数, 若 f 在 I 上有不动点 x^* (即 $x^*=f(x^*)$) 满足

$$\left(x_1-f\left(x_1\right)\right)\left(x_1-x^*\right)\geqslant 0, \tag{1.38}$$

则此时数列 $\{x_n\}$ 必收敛, 且极限 A 满足 $A=f(A)$. 若(1.38) 式“$\geqslant$”改为“$>$”对任意 $x_1\in I$ 成立, 则意味着 x^* 是唯一不动点, 并且 $A=x^*$.

特别, 若 f 可导, 且 $0<f'(x)<1(x\in I)$, 则 f 严增, 且不等式 ((1.38)) (“$\geqslant$”可改为“$>$”) 会自动满足 $(\forall x_1\in I)$. 这时 f 的不动点存在且唯一, 从而 $A=x^*$.

证明 分三种情况进行讨论:

1° 若 $x_1>x^*$, 则 $x_2=f\left(x_1\right)\geqslant f\left(x^*\right)=x^*$, 一般地, 若已证到 $x_n\geqslant x^*$, 则 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)\geqslant f\left(x^*\right)=x^*$, 根据数学归纳法, 这就证明了对一切 $n: x_n\geqslant x^*$ (即 x^* 是 x_n 之下界）.

$$x_1\geqslant f\left(x_1\right)=x_2$$

另一方面, 由式 ((1.38)) 条件, 已有 $x_2=f\left(x_1\right)\leqslant x_1$, 由 $f\nearrow$ 知 $x_3=f\left(x_2\right)\leqslant f\left(x_1\right)=x_2,\ \cdots$. 一般地, 若已证到 $x_n\leqslant x_{n-1}$, 由 $f\nearrow$ 知 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)\leqslant f\left(x_{n-1}\right)=x_n$, 这就证明了 $x_n\searrow$. 再由单调有界原理, 知 $\{x_n\}$ 收敛. 在 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$ 中取极限, 因 $f(x)$ 连续, 可知 $\{x_n\}$ 的极限 A 适合方程 $A=f(A)$.

2°$x_1<x^*$ 的情况, 类似可证.

3° 若 $x_1=x^*$, 则对一切 n, $x_n=x^*$, 结论自明.

最后, 假若 $0<f'(x)<1(\forall x\in I)$, 由压缩映像原理可知 $\{x_n\}$ 收敛. 事实上, 这时也不难验证式 ((1.38)) 条件成立. 如: 对函数 $F(x)\equiv x-f(x)$ 应用微分中值定理 (注意到 $F\left(x^*\right)=0$, $F'(x)>0$), 知 $\exists\xi$ 在 x^* 与 x 之间, 使得

$$x-f(x)\equiv F(x)=F\left(x^*\right)+F'(\xi)\left(x-x^*\right)=F'(\xi)\left(x-x^*\right),$$

可见 $(x-f(x))\left(x-x^*\right)>0$. 即式 ((1.38)) 条件严格成立, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$.

问题 1.140 设 $f(x)$ 映 $[a, b]$ 为自身, 且

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|. \tag{1.39}$$

任取 $x_1 \in [a, b]$, 令

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left[x_n+f\left(x_n\right)\right], \tag{1.40}$$

求证数列有极限 x^*, x^* 满足方程 $f\left(x^*\right)=x^*$.

证明 式(1.39)表明 $f(x)$ 连续. 只要证明了 $\{x_n\}$ 单调, $\{x_n\} \in [a, b] (n=1, 2, \cdots)$, 自然 $\{x_n\}$ 就有极限, 在式(1.40)中取极限, 便知 $\{x_n\}$ 的极限 x^* 满足 $f(x^*)=x^*$.

因为 $f(x)$ 映 $[a, b]$ 为自身, 所以当 $x_n \in [a, b]$ 时, 由式 (1.40) 知 $x_{n+1} \in [a, b]$ 亦然. 既然 $x_1 \in [a, b]$, 故对一切 n, 恒有 $x_n \in [a, b]$. 剩下只需证明单调性. 事实上, 若 $x_1 \leqslant f\left(x_1\right)$, 则 $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+f\left(x_1\right)\right) \geqslant x_1$, 而任一 n, 若 $x_{n-1} \leqslant x_n$, 便有

$$f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_n\right) \leqslant\left|f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_n\right)\right| \leqslant\left|x_{n-1}-x_n\right|=x_n-x_{n-1}.$$

将带负号的项移到不等式的另一端, 然后同除以 2, 即得

$$x_n=\frac{1}{2}\left[x_{n-1}+f\left(x_{n-1}\right)\right] \leqslant \frac{1}{2}\left[x_n+f\left(x_n\right)\right]=x_{n+1},$$

故 $x_n \nearrow$. 同理若 $x_1 \geqslant f\left(x_1\right)$, 可证 $x_n \searrow$.

问题 1.141 设 $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $a_3^{(0)}$ 为三角形各边的长, 令

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(k)} &= \tfrac{1}{2}\left(a_2^{(k-1)} + a_3^{(k-1)}\right), \\ a_2^{(k)} &= \tfrac{1}{2}\left(a_1^{(k-1)} + a_3^{(k-1)}\right), \\ a_3^{(k)} &= \tfrac{1}{2}\left(a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

证明: $\lim\limits_{k\to\infty} a_i^{(k)} = \frac{a_1^{(0)}+a_2^{(0)}+a_3^{(0)}}{3}(i = 1,\ 2,\ 3)$.

证明 (分别求 $a_i^{(k)}(i = 1,\ 2,\ 3)$ 的表达式.) 由式(1.41)知

$$a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} = a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)} + a_3^{(k-1)} = \cdots = a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + a_3^{(0)} \overset{\text{记}}{=} l.$$

$$\begin{aligned} a_1^{(k)} &= \frac{1}{2}(a_2^{(k-1)} + a_3^{(k-1)}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a_1^{(k-2)} + a_3^{(k-2)}) + \frac{1}{2}(a_1^{(k-2)} + a_2^{(k-2)})\right] \\ &= \frac{l}{4} + \frac{1}{4}a_1^{(k-2)}. \end{aligned}$$

由此 $a_1^{(2k)} = \frac{l}{4} + \frac{l}{4^2} + \cdots + \frac{l}{4^k} + \frac{a_1^{(0)}}{4^k} = \frac{\frac{l}{4} - \frac{l}{4^{k+1}}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{a_1^{(0)}}{4^k} \to \frac{l}{3}(k \to \infty)$.

同理, $a_2^{(2k)} \to \frac{l}{3}$, $a_3^{(2k)} \to \frac{l}{3}(k \to \infty)$. 故 $a_1^{(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(a_2^{(2k)} + a_3^{(2k)}\right) \to \frac{l}{3}(k \to \infty)$.

同理, $a_2^{(2k+1)} \to \frac{l}{3}$, $a_3^{(2k+1)} \to \frac{l}{3}(k \to \infty)$. 故

$$\lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = \frac{l}{3} = \frac{a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + a_3^{(0)}}{3}.$$

通项并不总是轻而易举地能写出来, 有时需要引入适当的参量.

问题 1.142 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 记号 $\{x \mid \equiv x-[x]$ 表示 x 的小数部分, 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})" \mid$.(国外赛题)

解 $\left|(2+\sqrt{3})^n\right|$ 是 $(2+\sqrt{3})^n$ 的小数部分, 自然, 将 $(2+\sqrt{3})^n$ 中的整数项去掉, 不会影响它的值. 将 $(2+\sqrt{3})^n$ 展开, 合并同类项:

$$(2+\sqrt{3})^n=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(\sqrt{3})^k2^{n-k}=A_n+B_n\sqrt{3}, \tag{1.42}$$

其中 A_n 表示 k 为偶数的各项之和 , $B_n\sqrt{3}$ 是 k 为奇数的各项之和, 可见 A_n, B_n 都是整数. 去掉第一项 A_n, 不影响小数部分,

$$\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}=\left|B_n\sqrt{3}\right|. \tag{1.43}$$

为了进一步求 $\left|B_n\sqrt{3}\right|$ 的表达式, 打开思路, 考虑对偶问题. 与式(1.42) 比较, 有

$$0<(2-\sqrt{3})^n=A_n-B_n\sqrt{3}. \tag{1.44}$$

由此, 我们发现.$B_n\sqrt{3}<A_n$, y_n 是比无理数 $B_n\sqrt{3}$ 大的整数, 而且式(1.44)中 $0<2-\sqrt{3}<1$, 故由式(1.44),

$$A_n-B_n\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^n\to 0(n\to\infty). \tag{1.45}$$

这说明 A_n 不仅是比 $B_n\sqrt{3}$ 大的整数, 而且是与 $B_n\sqrt{3}$ 无限接近的整数. 故 $B_n\sqrt{3}$ 的小数部分 $\left|B_n\sqrt{3}\right|=B_n\sqrt{3}-(A_n-1)$. 联系式(1.43)和(1.45),

$$\left|(2+\sqrt{3})^n\right|=\left|B_n\sqrt{3}\right|=B_n\sqrt{3}-(A_n-1)=1-\left(A_n-B_n\sqrt{3}\right)\to 1(n\to\infty).$$

问题 1.143 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2n}=a$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{2n+1}=b$, 试证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+2+\cdots+n}=\frac{a+b}{2}.$$

证明 记 $x_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+2+\cdots+n}$, 则

$$\text{Stolz 公式} \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{(2n-1+2n)}\cdot\frac{a_{2n-1}}{2n-1}=\frac{b}{2}.$$

同理可证: $\lim_{n\to\infty}x''_{2n}=\frac{a}{2}$. 于是 $\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}(x'_{2n}+x''{}_{2n})=\frac{a+b}{2}$. 类似可证: $\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\frac{a+b}{2}$ (只需定义 $a_0=0$ (不影响敛散性和极限值), 并将 x_{2n+1} 写成

$$x_{2n+1}=\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{(0+1)+(2+3)+\cdots+(2n+2n+1)}+\frac{0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{(0+1)+(2+3)+\cdots+(2n+2n+1)}.$$

问题 1.144 设 $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$，$x_1 = x_0^2$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}$，$n = 1, 2, \cdots$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限.

解 I:

$$\begin{aligned}
|x_n - 4| &= \left|\sqrt{x_{n-1}} + \frac{x_{n-2}}{2} - 4\right| \leqslant |\sqrt{x_{n-1}} - 2| + \frac{|x_{n-2} - 4|}{2} \\
&= \left|\frac{x_{n-1} - 4}{\sqrt{x_{n-1}} + 2}\right| + \frac{|x_{n-2}| - 4}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{2}(|x_{n-1} - 4| + |x_{n-2} - 4|)(\text{再对}|x_{n-1} - 4|\text{应用此结果}) \\
&\leqslant \frac{1}{2^2}(3|x_{n-2} - 4| + |x_{n-3} - 4|) \\
&\leqslant \frac{1}{2^3}(5|x_{n-3} - 4| + |x_{n-4} - 4|) \\
&\leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}[(2n-1)|x_1 - 4| + (2n-3)|x_0 - 4|] \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}[(2n) \cdot 3 + (2n) \cdot 3] \leqslant \frac{n}{2^{n-5}} \to 0(n \to \infty).
\end{aligned}$$

II:

1° 用数学归纳可证:$1 < x_n < 4$，且 $\{x_n\}$.

说明: 事实上, 已有:$1 < x_0$，$x_1 < 4$; 若 $1 < x_{n-1}$，$x_n < 4$，则

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} > \sqrt{1} + \frac{1}{2} > 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} < \sqrt{4} + \frac{4}{2} = 4.$$

因此, $1 < x_n < 4$，$\{x_n\}$ 有界.

另一方面, 由 $1 < x_0 < x_0^2 = x_1$ 知:$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt{x_1} + \frac{x_0}{2}}{x_1} = \frac{3}{2x_0} \overset{x_0 < \frac{3}{2}}{>} 1$，故 $x_1 < x_2$.

设已证 $x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$，则有

$$x_{n+1} - x_n = \left(\sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}\right) - \left(\sqrt{x_{n-1}} + \frac{x_{n-2}}{2}\right) = (\sqrt{x_n} - \sqrt{x_{n-1}}) + \left(\frac{x_{n-1}}{2} - \frac{x_{n-2}}{2}\right) > 0,$$

亦即 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$，因此 x_n.

2° 根据单调有界原理, 令 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，在 $x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}$ 里取极限, 得 $a = \sqrt{a} + \frac{a}{2}$，$a = 4$.

问题 1.145 设 $0<a_1,\ b_1<1$, 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$a_n=\frac{1+b_{n-1}^2}{2},\qquad b_n=a_{n-1}-\frac{a_{n-1}^2}{2}. \tag{1.46}$$

试证 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛, 并求它们的极限.

解 I:

$1°n\geqslant 2$ 时,

$$a_n=\frac{1+b_{n-1}^2}{2}\geqslant\frac{1}{2},\ 0<b_n=a_{n-1}-\frac{a_{n-1}^2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{(a_{n-1}-1)^2}{2}\leqslant\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant a_{n+1}=a_n=\frac{1+b_n^2}{2}\leqslant\frac{5}{8},\ \frac{1}{2}\geqslant b_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{(a_n-1)^2}{2}\geqslant\frac{3}{8}.$$

可见, 当 $n\geqslant 3$ 时,

$$\frac{1}{2}\leqslant a_n\leqslant\frac{5}{8},\ \frac{1}{2}\geqslant b_n\geqslant\frac{3}{8}. \tag{1.47}$$

$2°$ 若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛, 极限分别记为 a 和 b. 在式(1.46)里取极限, 得

$$a=\frac{1+b^2}{2} \tag{1.48}$$

$$b=a-\frac{a^2}{2} \tag{1.49}$$

将式(1.49)改写成 $\frac{a^2}{2}=a-b\overset{(1.48)}{=}\frac{1+b^2-2b}{2}=\frac{(1-b)^2}{2}$, 故 $a=1-b(a=-(1-b)$舍去). 代入式(1.48)解得 $b=-1\pm\sqrt{2}$. 由式(1.47)可知 $a\geqslant\frac{1}{2}$, $b\geqslant\frac{3}{8}$, 故

$$b=\sqrt{2}-1,\qquad a=2-\sqrt{2}. \tag{1.50}$$

这说明 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 如果收敛, 那么极限必是此二数.

至此, 只需验证 $(n\to\infty):|a_n-a|\to 0$ 和 $|b_n-b|\to 0$.

$3°$ 利用式(1.46)至式(1.50):

$$|a_n-a|=\frac{1}{2}|b_{n-1}^2-b^2|=\frac{1}{2}|b_{n-1}+b||b_{n-1}-b|\leqslant\frac{1}{2}|b_{n-1}-b|,$$
$$|b_n-b|=\left|a_{n-1}-a-\frac{a_{n-1}^2-a^2}{2}\right|=|a_{n-1}-a|\left|\frac{2-(a_{n-1}+a)}{2}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}|a_{n-1}-a|(\text{因}|2-(a_{n-1}+a)|\leqslant 1),$$

两式迭代得

$$|a_n-a|\leqslant\frac{1}{4}|a_{n-2}-a|, \tag{1.51}$$

$$|b_n-b|\leqslant\frac{1}{4}|b_{n-2}-b|. \tag{1.52}$$

用式(1.51)进行迭代, 可得

$$|a_{2n}-a|\leqslant\frac{1}{4^{n-1}}|a_2-a|,\qquad |a_{2n+1}-a|\leqslant\frac{1}{4^{n-1}}|a_3-a|,$$

可见 $\{a_n\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=2-\sqrt{2}$.

类似地, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b=\sqrt{2}-1$.

II: 同上, $\forall n:$

$$1 > a_n = \frac{1+b_{n-1}^2}{2} \geqslant \frac{1}{2} \tag{1.53}$$

$$0 < b_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{(a_{n-1}-1)^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1.54}$$

故

$$|a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{2}|b_{n-1}^2 - b_{n-2}^2| = \frac{1}{2}|b_{n-1}+b_{n-2}||b_{n-1}-b_{n-2}| \overset{(1.54)}{\leqslant} \frac{1}{2}|b_{n-1}-b_{n-2}|.$$

类似地,

$$\begin{aligned}|b_n - bn - 1| &= \left|a_{n-1} - a_{n-2} - \left(\frac{a_{n-1}^2}{2} - \frac{a_{n-2}^2}{2}\right)\right| \\ &= |a_{n-1}-a_{n-2}|\left|\frac{2-(a_{n-1}+a_{n-2})}{2}\right| \overset{(1.53)}{\leqslant} \frac{1}{2}|a_{n-1}-a_{n-2}|.\end{aligned}$$

迭代即得

$$|a_n - a_{n-1}| \leqslant \frac{1}{4}|a_{n-2}-a_{n-3}|, \quad |b_n - b_{n-1}| \leqslant \frac{1}{4}|b_{n-2}-b_{n-3}|.$$

于是

$$|a_{2n} - a_{2n-1}| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}|a_2 - a_1| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}},$$

$$|a_{2n+1} - a_{2n}| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}|a_3 - a_2| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}|b_2 - b_1| = \frac{1}{2^{2n}}.$$

由此可得 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛, 解方程(1.47)和(1.48)可得式(1.49).

问题 1.146 设 $a_1,\ b_1$ 为任意选定的两实数，$a_n,\ b_n$ 定义如下:

$$a_n = \int_0^1 \max\{b_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \int_0^1 \min\{a_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots), \tag{1.55}$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 - \sqrt{2},\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2} - 1.$

证明 令 $a_1,\ b_1 \notin (0,\ 1)$, 迭代几次后，$a_n,\ b_n$ 会全部进入 $(0,\ 1)$ 中. 又因去掉有限项不影响数列的敛散性和极限值. 故可设 $a_1,\ b_1 \in (0,\ 1)$. 由式(1.55)有

$$a_n = \frac{1 + b_{n-1}^2}{2},\ b_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}^2}{2}.$$

于是, 问题转化为上题. 因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 - \sqrt{2}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2} - 1.$$

笔记 此处来证明: 不论 b_{n-1} 或 a_{n-1} 落在何处, 都推出：$a_n,\ b_n \in (0,\ 1)$.

1. 若 $a_{n-1} \in (0,\ 1)$, 则

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 \min\{a_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x = \int_0^{a_{n-1}} x\,\mathrm{d}x + a_{n-1}\int_{a_{n-1}}^1 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}a_{n-1}^2 + a_{n-1}(1 - a_{n-1}) = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}^2}{2} \in (0,\ 1). \end{aligned}$$

   若 $b_{n-1} \in (0,\ 1)$, 则

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \max\{b_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x = \int_0^{b_{n-1}} \max\{b_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x + \int_{b_{n-1}}^1 x\,\mathrm{d}x + \int_{b_{n-1}}^1 \max\{b_{n-1},\ x\}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{b_{n-1}} b_{n-1}\,\mathrm{d}x + \int_{b_{n-1}}^1 x\,\mathrm{d}x = b_{n-1}^2 + \frac{1}{2}(1 - b_{n-1}^2) = \frac{1 + b_{n-1}^2}{2} \in (0,\ 1). \end{aligned}$$

2. 若 $a_{n-1} \geqslant 1$, 则 $b_n = \frac{1}{2}$, 故 $a_{n+1} = \frac{5}{8} \in (0,\ 1)$. 从而 $b_{n+2} \in (0,\ 1)$.
   若 $b_{n-1} \geqslant 1$, 则 $a_n = b_{n-1} \geqslant 1$, 故 $b_{n+1} = \frac{1}{2} \in (0,\ 1)$.
3. 若 $a_{n-1} \leqslant 0$, 则 $b_n = 0$, 故 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \in (0,\ 1)$.
   若 $b_{n-1} \leqslant 0$, 则 $a_n = \frac{1}{2}$, 故

$$b_{n+1} = \int_0^{a_n} x\,\mathrm{d}x + a_n\int_{a_n}^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \in (0,\ 1).$$

从而 $a_{n+2} \in (0,\ 1)$.

总之无论怎样开始, 总有 $a_n,\ b_n \in (0,\ 1)$.

问题 1.147 证明: 若 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证明 设

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{1.56}$$

若 $\alpha = +\infty$, 不等式自明. 只要讧明 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 的情况. 要证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \alpha$, 只要证明 $\forall \varepsilon > 0$, 仿 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < \alpha + \varepsilon$. 由式(1.56), $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $i > N$ 时,

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} < \alpha + \varepsilon$$

任取 $n > N$, 上式中令 $i = N, N + 1, \cdots, n - 2, n - 1$, 将所得的 $n - N$ 个不等式相乘, 得

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{a_{N+2}}{a_{N-1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{*-2}} \frac{a_n}{a_{n-1}} < (\alpha + \varepsilon)^{n-1}.$$

此即

$$a_n < a_n(\alpha + \varepsilon)^{-N} \cdot (\alpha + \varepsilon)^n = M(\alpha + \varepsilon)^n,$$

其中 $M \equiv a_n(\alpha + \varepsilon)^{-1}$. 从而 $\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{M}(\alpha + \varepsilon)$. 令 $n \to \infty$, 取上极限得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \lim_{\cdots\infty} \sqrt[n]{M}(\alpha + \varepsilon) = \alpha + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得欲证的不等式.

问题 1.148 证明: 对任意正数序列 $\{x_n\}$，有

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1,$$

并举例说明右端数 1 是最佳估计 (即把右端 1 改换成任意比 1 大的数. 不等式不再成立.).

证明 1° (用反证法证明不等式.) 设 $\varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)<1$, 则 $\exists N>0$, 当 $n\geqslant N$ 时,

$$n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)<1,$$

此即 $\frac{1}{n+1}<\frac{x_n}{n}-\frac{x_{n+1}}{n+1}(n=N,\ N+1,\ \cdots,\ N+k-1\cdots)$. 这是无穷多个不等式, 将前 k 个不等式相加得

$$\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+k}<\frac{x_N}{N}-\frac{x_{N+k}}{N+k}<\frac{x_N}{N}.$$

此式应对一切 $k>1$ 成立, 但实际上, 左端当 $k\to\infty$ 时, 极限为 $+\infty$, 矛盾.

2° （证明 1 为最佳估计.) $\forall\alpha>0$, 令 $x_n=\alpha n$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)=\varlimsup_{n\to\infty} n\cdot\frac{1+\alpha(n+1)-\alpha n}{\alpha n}=\frac{1+\alpha}{\alpha}>1.$$

因 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1+\alpha}{\alpha}=1$, 可见 $\forall c>1$, 可取 $\alpha>0$ 充分大使得

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+x_{n\cdot 1}}{x_n}-1\right)=\frac{1+\alpha}{\alpha}<c.$$

1.5 谢惠民-数学分析习题课讲义

定义 1.1

数 e 是数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限.

定理 1.2

令 x_n=$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\forall n$, 则数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是收敛数列, 且有相同的极限.

证明 利用平均值不定式可以对这两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 作出统一处理. 先将 x_n “无中生有”地看成为不全相等的 $n+1$ 个非负数的乘积, 就可以从算术平均值-几何平均值不等式推出数列 $\{x_n\}$ 严格单调增加:

$$x_n=1\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(\sqrt[n+1]{1\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right)^{n+1}<\left(\frac{1+n\left(\frac{n+1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}.$$

然后利用调和平均值-几何平均值不等式, “无中生有”地将 y_n 看成为 $n+2$ 个不全相等的正数的乘积, 就可推出数列 $\{y_n\}$ 严格单调减少:

$$y_n=1\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\left(\sqrt[n+2]{1\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}\right)^{n+2}>\left(\frac{n+2}{1+(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}=y_{n+1}.$$

从不等式 $x_1\leqslant x_n<y_n\leqslant y_1$ 可见两个单调数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都有界, 因此都收敛. 又从

$$y_n=x_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

令 $n\to\infty$ 知道它们有共同极限.

注: 可以分别证明两个数列有界. 例如用平均值不等式于 $\{x_n\}$ 可以得到

$$x_n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}<\left(\frac{n\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2}=1,$$

可见 $\{x_n\}$ 以 4 为其上界. 再用调和平均值-几何平均值不等式于 $\{y_n\}$ 可以得到

$$y_n\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}>\left(\frac{n+2}{2+(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right)^{n+2}=1,$$

可见 $\{y_n\}$ 有下界 2. 因此只用其中一个数列就可以知道数 e 的定义的合理性.

问题 1.149 证明数

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

证明 记 $s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$. 将数列的通项 a_n 用二项式展开, 得到

$$\begin{aligned} a_n=(1+\frac{1}{n})^n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots \\ &+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}). \\ a_n<s_n &<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3, \end{aligned}$$

知 $\{s_n\}$ 以 3 为上界, 又因 $\{s_n\}$ 严格单调增加, 因此收敛, 记其极限为 s, 则从 $a_n<s_n$ 得到 $\mathrm{e}<s$. 固定正整数 m, 并令 $n>m$, 就有

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n}). \end{aligned}$$

其中不等号右边的和式是从 a_n 的表达式去掉后 $n-m$ 个正项得到的. 令 $n\to\infty$, 就有

$$\mathrm{e}\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m.$$

再令 $m\to\infty$, 得到 $\mathrm{e}\geqslant s$. 因此有 $s=\mathrm{e}$.

问题 1.150 记 $\varepsilon_n=\mathrm{e}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n(n+1)!=1$.

证明 写出

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(n+1)!=\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_n}{\frac{1}{(n+1)!}},$$

此时

$$\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n=-\frac{1}{(n+1)!},\qquad \frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}=-\frac{1}{n!(n+2)},$$

由 Stolz 定理可知所求极限为 1.

问题 1.151 对于上述 ε_n 成立不等式 $\frac{1}{(n+1)!}<\varepsilon_n<\frac{1}{n!n}$.

证明 从 $\varepsilon_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ 可见 $\varepsilon_n>\frac{1}{(n+1)!}$ 成立. 对任意的 $m>n$, 估计

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!} &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^k}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}\right) \\ &= \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{n!n}, \end{aligned}$$

再令 $m\to\infty$, 就得到所求的第二个不等式.

问题 1.152 自然对数的底 e 是无理数.

证明 用反证法. 如果 e 是有理数, 则可写为 $\mathrm{e}=\frac{p}{q}$, 这里 p 和 q 是正整数. 从上两个问题可知, 对于正整数 q, 可以将 e 的无穷级数展开式写成为两项之和, 即从级数的第一项到 $\frac{1}{q!}$ 为第一部分,

余下的 ε_q 为第二部分:

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) + \varepsilon_q.$$

由此可见, ε_q 一定是 $\frac{1}{q!}$ 的整数倍, 但是从上一题可以知道

$$0 < \varepsilon_q < \frac{1}{q!q},$$

因此这是不可能的.

引理 1.2

设 $n \geqslant 2$, 角 t 满足条件 $0 < nt < 90°$(即 nt 为锐角), 则成立不等式 $\tan nt > n \tan t$.

证明 用数学归纳法. 对 $n = 2$, 用正切函数的倍角公式就够了:

$$\tan 2t = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t} > 2\tan t,$$

这里利用了 $0 < 2t < 90°$ 时分母小于 1 的事实. 现设不等式对于 $n = k$ 已经成立, 则对于 $n = k + 1$ 就有

$$\begin{aligned}\tan(k+1)t &= \frac{\tan t + \tan kt}{1 - \tan t \cdot \tan kt} \\ &> \tan t + \tan kt \\ &> (k+1)\tan t,\end{aligned}$$

这样就完成了数学归纳法的证明.

注意: 当 $(k+1)t$ 为锐角时, kt 也是锐角, 因此可以推出分母在 $(0, 1)$ 内并可以用归纳假设.

定理 1.3

$x_n = n\sin\frac{180°}{n}\forall n$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 首先证明 $x_n\uparrow$. 令 $t = \frac{180°}{n(n+1)}$, 则有 $\frac{180°}{n} = (n+1)t$, $\frac{180°}{n+1} = nt$, 且当 $n \geqslant 2$ 时 nt 为锐角. 于是有

$$\begin{aligned}x_n = n\sin\frac{180°}{n} &= n\sin(n+1)t \\ &= n\sin nt\cos t + n\cos nt\sin t = n\sin nt\cos t\left(1 + \frac{\tan t}{\tan nt}\right) \\ &< n\sin nt\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)\sin nt \\ &= (n+1)\sin\frac{180°}{n+1} = x_{n+1}.\end{aligned}$$

又从单位圆的内接正 n 边形面积小于单位圆的外切正方形面积可知有

$$n\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{n} = n\sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n} < 4.$$

从而当 $n \geqslant 3$ 时有

$$x_n = n\sin\frac{180°}{n} < \frac{4}{\cos\frac{180°}{n}} \leqslant \frac{4}{\cos 60°} = 8,$$

可见 $\{x_n\}$ 有上界. 从单调有界数列收敛定理得出 $\{x_n\}$ 收敛.

定义 1.2

数 $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{180°}{n}$.

问题 1.153 证明实数集 $\mathbb{R}$ 不可列.

证明 用反证法. 设 $\mathbb{R}$ 为可列集, 则可以将所有实数表示为

$$\mathbb{R}=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}. \tag{1.57}$$

任取 $a<b$, 考虑有界闭区间 $[a,\ b]$. 将 $[a,\ b]$ 三等分, 则所得的 3 个闭子区间中至少有一个子区间不含 x_1, 将这个闭子区间取为 I_1. 然后再将 I_1 三等分, 在所得的三个子区间中至少又有一个子区间不含 x_2, 将它取为 I_2. 如此继续下去, 就归纳地得到一个闭区间套 $\{I_n\}$, 它们的长度满足

$$|I_n|=\frac{b-a}{3^n}\to 0.$$

因此从闭区间套定理知道存在 (惟一的) 实数 ξ, 它属于每一个 I_n, 即有 $\xi\in I_n\forall n$. 但从闭区间套 $\{I_n\}$ 的构造过程知道

$$x_n\notin I_n \quad \forall n,$$

因此对每一个 n 都只能是 $\xi\neq x_n$. 这就表明实数 ξ 不在实数全体的可列表示(1.57) 中, 引出矛盾. 因此 $\mathbb{R}$ 不是可列集.

定义 1.3

称 $\{x_n\}$ 为基本数列 (或 Cauchy 数列), 若对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n,\ m\geqslant N:|x_n-x_m|<\varepsilon$. ♣

定理 1.4

(Cauchy 收敛准则) 一个数列收敛的充分必要条件是该数列为基本数列. ♡

证明 必要性 ($\Longrightarrow$). 设 $\{x_n\}$ 收敛, 记其极限为 a, 则对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n\geqslant N:|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $n,\ m\geqslant N$ 时, 就有

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|a-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就证明了收敛数列一定是基本数列.

充分性 ($\Longleftarrow$). 设 $\{x_n\}$ 是基本数列. 首先证明它一定有界. 为此取 $\varepsilon=1,\ \exists N,\ \forall n,\ m\geqslant N:|x_n-x_m|<1$. 固定 $m=N$, 则当 $n\geqslant N$ 时, 就有 $|x_n|\leqslant|x_n-x_N|+|x_N|<1+|x_N|$, 因此对所有 n 就成立

$$|x_n|\leqslant\max\left\{|x_1|,\ \cdots,\ |x_{N-1}|,\ |x_N|+1\right\},$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界. 于是 $\exists\left[a_0,\ b_0\right],\ \forall n:a_0\leqslant x_n\leqslant b_0$. 用三分点将该区间等分为三个子区间:

$$\left[a_0,\ \frac{2a_0+b_0}{3}\right],\ \left[\frac{2a_0+b_0}{3},\ \frac{a_0+2b_0}{3}\right],\ \left[\frac{a_0+2b_0}{3},\ b_0\right].$$

可以看出位于左边和右边的两个子区间不可能同时含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 否则就会存在下标任意大的 $n,\ m$, 使得 $|x_n-x_m|\geqslant\frac{b_0-a_0}{3}(>0)$, 这与基本数列的条件矛盾.

不妨设上述三个子区间中左边 (或右边) 的一个子区间只含有数列中的有限多项. 去掉这个区间, 并将余下的两个子区间的并重记为 $\left[a_1,\ b_1\right]$, 则其长度 $b_1-a_1=\frac{2}{3}\left(b_0-a_0\right)$, 且 $\exists N_1,\ \forall n\geqslant N_1:x_n\in\left[a_1,\ b_1\right]$.

对 $\left[a_1,\ b_1\right]$ 重复以上做法, 如此继续下去就得到一个闭区间套 $\{[a_k,\ b_k]\}$, 使得它们的长度为 $b_k-a_k=\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(b_0-a_0\right)\to0$, 同时存在正整数列 $\{N_k\},\ \forall n\geqslant N_k:x_n\in\left[a_k,\ b_k\right]$.

用闭区间套定理, 存在惟一的 $\xi\in\left[a_k,\ b_k\right]\forall k$. 由于对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists K,\ \forall k\geqslant K:\left[a_k,\ b_k\right]\subset O_\varepsilon(\xi)$. 于是当 $n\geqslant N_K$ 时也有 $|x_n-\xi|<\varepsilon$, 即已经证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

问题 1.154 设 $f \in C^2[a, b]$(也就是 $f'' \in C[a, b]$), 于 (a, b) 三阶可微, 且 $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$, 证明: 对每个 $x \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x-a)^2(x-b).$$

证明 用待定常数法, 令 $\lambda = \frac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$, 构造辅助函数

$$F(t) = f(t) - \frac{\lambda}{6}(t-a)^2(t-b).$$

则只需要证明存在 ξ, 使得 $F'''(\xi) = 0$. 这时有 $F(a) = F(b) = F(x) = 0$. 用两次 Rolle 定理知道有 $\xi_1 \in (a, x)$, $\xi_2 \in (x, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

又因 $F'(a) = 0$, 对于 $a < \xi_1 < \xi_2$ 再用两次 Rolle 定理就知道存在 $\eta_1 \in (a, \xi_1)$, $\eta_2 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得 $F''(\eta_1) = F''(\eta_2) = 0$. 最后在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上再用 Rolle 定理, 就得到 ξ, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

问题 1.155 设 f 在 $[0,\ a]$ 上连续可微, 在 $(0,\ a)$ 上二阶可微, 且存在 $M>0$, 使得 $|f''(x)|\leqslant M\forall x\in(0,\ a)$, 又设 f 在 $(0,\ a)$ 内有驻点 c, 证明:

$$\left|f'(0)\right|+\left|f'(a)\right|\leqslant Ma.$$

证明 根据 $0<c<a$ 和 $f'(c)=0$, 分别在 $[0,\ c]$ 和 $[c,\ a]$ 上对于 f' 分别用 Lagrange 微分中值定理, 就有

$$\begin{aligned}\left|f'(0)\right|+\left|f'(a)\right|&=\left|f'(0)-f'(c)\right|+\left|f'(c)-f'(a)\right|\\&\leqslant M[c+(a-c)]=Ma.\quad\square\end{aligned}$$

问题 1.156 设函数 f 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上二阶可微, 记 $|f(x)|,\ |f'(x)|,\ |f''(x)|$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的上确界分别为 $M_0,\ M_1,\ M_2$, 证明成立不等式

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

证明 写出带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(\xi)}{2}t^2,$$

其中 $t \neq 0,\ \xi \in (x,\ x+t)$. 于是可以对一阶导函数估计为:

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &= \frac{1}{|t|}\left|f(x+t) - f(x) - \frac{f''(\xi)}{2}t^2\right| \\ &\leqslant \frac{2M_0}{|t|} + \frac{1}{2}|t|M_2,\end{aligned}$$

于是就得到

$$M_1 \leqslant \frac{2M_0}{|t|} + \frac{|t|}{2}M_2.$$

最后利用平均值不等式得到

$$M_1 \leqslant \min_{|t|}\left(\frac{2M_0}{|t|} + \frac{|t|}{2}M_2\right) = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

定理 1.5

(连续函数的零点存在定理) 有界闭区间上的连续函数若在区间的两个端点处异号, 则一定在此区间上有根. 这就是

$$f \in C[a, b],\ f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0.$$

证明 法 1: (用闭区间套定理, 并用 Bolzano 二分法构造闭区间套) 设 $f \in C[a, b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$. 记 $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, 其中 $a_1 = a,\ b_1 = b$, 考虑用它的中点分成的两个等长度的闭子区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. 若恰好有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 则不必再做下去. 否则, 在这两个闭子区间中一定有一个使得函数 f 在其两端异号, 就取它为 Δ_2. 这时 $|\Delta_2| = \frac{1}{2}|\Delta_1| = \frac{1}{2}(b-a)$. 然后取 Δ_2 的中点, 继续进行下去, 这时也有两种可能性. 一种可能是做了有限次后, 已经找到了 f 的零点, 于是就可以结束. 另一种可能就是需要将上面的二分法过程做无限次, 从而归纳地得到闭区间套 $\{\Delta_n\}$, 其中记 $\Delta_n = [a_n, b_n]$, $|\Delta_n| = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$. 这个闭区间套的主要特征是对每个 n , 成立

$$f(a_n) f(b_n) < 0.$$

根据闭区间套定理, 存在惟一的点 $\xi \in [a_n, b_n] \forall n$, 而且有

$$a_n \uparrow \xi, \quad b_n \downarrow \xi.$$

在不等式中令 $n \to \infty$, 并利用 f 在点 ξ 连续, 就得到

$$f^2(\xi) \leqslant 0,$$

因此只能是 $f(\xi) = 0$.

法 2(用确界存在定理, 并用 Lebesgue 方法构造数集和确界) 设 $f \in C[a, b]$, 对于条件 $f(a)f(b) < 0$ 不妨设 $f(a) > 0,\ f(b) < 0$. 否则可以对于 $-f$ 做下去. 定义数集

$$F = \{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\}.$$

由于 $f(a) > 0$, 因此 $a \in F$, 即 F 为非空数集. 从 F 的定义可见它有上界 b, 因此根据确界存在定理, 存在

$$\xi = \sup F \leqslant b.$$

存在数列 $\{x_n\} \subset F$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. 根据数集 F 的定义, 对每个 n 成立不等式 $f(x_n) > 0$. 令 $n \to \infty$, 并利用 f 在点 ξ 处连续, 就得到

$$f(\xi) \geqslant 0.$$

最后只需要证明 $f(\xi) > 0$ 是不可能的. 用反证法. 若 $f(\xi) > 0$, 则 $\xi < b$. 从连续函数的保号性定理, 存在 $\delta > 0$, 使得 $O_\delta(\xi) \subset [a, b]$, 且 f 在邻域 $O_\delta(\xi)$ 上处处大于 0. 于是有

$$f\left(\xi + \frac{\delta}{2}\right) > 0,$$

这表明有

$$\xi + \frac{\delta}{2} \in F,$$

因此与 $\xi=\sup F$ 矛盾. 这就证明了只能有 $f(\xi)=0$.

法 3(用有限覆盖定理) 设 $f\in C[a,\,b]$. 从 $f(a)f(b)<0$ 开始. 用反证法. 设在定理条件满足时 f 在 $[a,\,b]$ 没有零点. 对于 $[a,\,b]$ 中的每个点 x, 由于 $f(x)\neq 0$, 根据连续函数的局部保号性定理 (见定理 5.1), 存在点 x 的一个邻域 $O_\delta(x)$, 使得 f 在邻域 $O_\delta(x)$ 上严格大于 0, 或严格小于 0(即严格保号). 若 $x=a$ (或 $x=b$), 则将邻域改为它与 $[a,\,b]$ 的交集. 当然这里邻域的半径 δ 一般与点 x 有关. 对 $[a,\,b]$ 中的每个点都这样做, 就得到 $[a,\,b]$ 的一个开覆盖. 根据有限覆盖定理, 在这个开覆盖中存在有限子集, 即有限个开区间, 它们的并仍然覆盖 $[a,\,b]$. 以下只考虑覆盖 $[a,\,b]$ 的这有限个开区间, 并作如下处理. 从区间左端点 a 开始. 将有限个开区间中覆盖点 a 的某个开区间记为 O_1(若不惟一则任取其一个). 由于 f 在 O_1 上保号, $f(a)f(b)<0$, 因此 O_1 的右端点必小于点 b. 又由于 O_1 的端点不属于开区间 O_1, 因此在有限个开区间中一定存在覆盖 O_1 的右端点的一个开区间, 记为 O_2. 由于 f 在 O_1 和 O_2 上分别保号, 而这两个开区间有非空交, 因此 f 在它们的并集 $O_1\cup O_2$ 上保号. 然后再观察 O_2 的右端点, 依此类推进行下去. 由于覆盖 $[a,\,b]$ 一共只有有限个开区间, 有限次后一定会覆盖点 b, 而且发现 f 在 $[a,\,b]$ 上保号, 这与 $f(a)f(b)<0$ 的条件矛盾.

定义 1.4 (压缩映射的定义)

设函数 f 在区间 $[a,\ b]$ 上定义, $f([a,\ b])\subset[a,\ b]$, 并存在一个常数 k, 满足 $0<k<1$, 使得对一切 $x,\ y\in[a,\ b]$ 成立不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$, 则称 f 是 $[a,\ b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

命题 1.1 (压缩映射原理)

设 f 是 $[a,\ b]$ 上的一个压缩映射, 则

1. f 在 $[a,\ b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi=f(\xi)$;
2. 由任何初始值 $a_0\in[a,\ b]$ 和递推公式 $a_{n+1}=f(a_n),\ n\in\mathbf{N}^+$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ.
3. 成立估计式 $|a_n-\xi|\leqslant\frac{k}{1-k}|a_n-a_{n-1}|$ 和 $|a_n-\xi|\leqslant\frac{k^n}{1-k}|a_1-a_0|$(即事后估计和先验估计).

证明 (在这个证明中不需要函数 f 的连续性概念.) 由于 $f([a,\ b])\subset[a,\ b]$, 因此 $\{a_n\}$ 必在 $[a,\ b]$ 中, 根据 Cauchy 收敛准则估计

$$
\begin{aligned}
|a_n-a_{n+p}|\leqslant k|a_{n-1}-an+p-1|&\leqslant k^2|a_{n-2}-an+p-2|\\
&\leqslant\cdots\leqslant k^n|a_0-a_p|\leqslant k^n(b-a).
\end{aligned}
$$

可见对 $\varepsilon>0$, 只要取 $N=[\ln(\varepsilon/(b-a))/\ln k]$, 当 $n>N$ 和 $p\in\mathbf{N}^+$ 时, 就有 $|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon$. 因此 $\{a_n\}$ 是基本数列, 从而收敛. 记其极限为 $\xi\in[a,\ b]$. 为了证明这个 ξ 是 f 的不动点. 需要研究第二个数列 $\{f(a_n)\}$. 从不等式 $|f(a_n)-f(\xi)|\leqslant k|a_n-\xi|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$ 可见, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(\xi)$.

在 $a_{n+1}=f(a_n)$ 两边令 $n\to\infty$, 就得到 $\xi=f(\xi)$. 因此 ξ 是 f 的不动点.

如果 f 在 $[a,\ b]$ 内还有不动点 η, 即 $\eta=f(\eta)$, 则就有 $|\xi-\eta|=|f(\xi)-f(\eta)|\leqslant k|\xi-\eta|$. 由于 $0<k<1$, 就只能有 $\eta=\xi$. 因此 f 在 $[a,\ b]$ 内的不动点是唯一的. 这样就证明了命题的 1 和 2.

命题之 3 可从估计式:

$$
|a_n-\xi|=|f(a_{n-1})-f(\xi)|\leqslant k|a_{n-1}-\xi|\leqslant k(|a_{n-1}-a_n|+|a_n-\xi|)
$$

得到:

$$
|a_n-\xi|\leqslant\frac{k}{1-k}|a_n-a_{n-1}|.
$$

又由上式出发, 利用 $|a_j-a_{j-1}|\leqslant|a_{j-1}-a_{j-2}|$ 就可以如下得到 3 的后一个式子:

$$
|a_n-\xi|\leqslant\frac{k^2}{1-k}|a_{n-1}-a_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant\frac{k^n}{1-k}|a_1-a_0|.
$$

例题 1.2 覆盖定理在 $\mathbf{Q}$ 中不成立.

解 将在有理数的范围内构造一个开覆盖, 它将区间 $[0,\ 2]$ 中的每一个有理数都覆盖住, 但在这个开覆盖中的任何一个有限子集却做不到这点, 为清楚起见, 用 $J=[0,\ 2]\cap\mathbf{Q}$ 表示开覆盖的覆盖对象.

任取点 $x\in J\subset\mathbf{Q}$. 由于 $x\neq\sqrt{2}$, 可以取到有理数 r_x, 使 $\sqrt{2}\notin(x-r_x,\ x+r_x)$ 成立, (例如取 $r_x\in(0,\ |x-\sqrt{2}|\cap\mathbf{Q})$ 即可.) 这样就得到 J 中的一个开覆盖

$$\{(x-r_x,\ x+r_x)|x\in J,\ r_x\in\mathbf{Q}\}.$$

可以证明: 在这个开覆盖中的任何有限子集都不能覆盖 J.

任取上述开覆盖中的一个有限子集

$$(x_1-r_{x_1},\ x_1+r_{x_1}),\ \cdots,\ (x_n-r_{x_n},\ x_n+r_{x_n}),$$

先考察其中的一个开区间. 由于它不含有 $\sqrt{2}$, 同时区间的端点, 都是有理数, 因此它们的并也不会包含和 $\sqrt{2}$ 充分接近的有理数. 又由于只取有限个开区间, 因此它们的并也不会含有 $\sqrt{2}$ 以及和 $\sqrt{2}$ 充分接近的有理数. 具体来说, 令 $\delta_i=\max\{x_i-r_{x_i}-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-x_i-r_{x_i}\}$, $i=1,\ \cdots,\ n$, 再令 $\delta=\min\{\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n\}$, 则在上述开覆盖中的这个有限子集不能覆盖 J 中满足 $|\sqrt{2}-r|<\delta$ 的有理数 r.

例题 1.3 用 Lebesgue 方法证明覆盖定理.

证明 设闭区间 $[a,\, b]$ 有一个开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$. 定义数集

$$A=\{x\geqslant a|\text{区间}[a,\, x]\text{在}\{\mathcal{O}_\alpha\}\text{存在有限子覆盖}\}$$

从区间的左端点 $x=a$ 开始, 由于在开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中当然有一个开区间覆盖 a, 因此 a 及其右侧充分邻近的点均在数集 A 中. 这保证了数集 A 的定义可见, 如果 $x\in A$, 则整个区间 $[a,\, x]\subset A$. 因此如果 A 无上界, 则 $b\in A$, 这就是说区间 $[a,\, b]$ 在开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖.

如果 A 有上界, 用确界存在定理, 得到 $\xi=\sup A$. 这时可见每个满足 $x<\xi$ 的 x 都在 A 中, 事实上从 $\xi=\sup A$ 和上确界为最小上界的定义, 在 $x<\xi$ 时, 存在 $y\in A$, 使得 $x<y$. 由于 $[a,\, y]$ 在 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限开覆盖, 所以 $[a,\, x]\subset[a,\, y]$ 更没有问题, 这就是说 $x\in A$.

因此只要说明 $b<\xi$, 就知道 $b\in A$, 即 $[a,\, b]$ 在 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限开覆盖.

用反证法, 如果 $\xi\leqslant b$, 则 $\xi\in[a,\, b]$, 因此在开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中有一个开区间 $\mathcal{O}_{\alpha_0}$ 覆盖 ξ. 于是可以在这个开区间中找到 a_0 和 b_0, 使它满足条件 $a_0<\xi<b_0$. 由上面的论证可知道 $a_0\in A$. 这就是说区间 $[a,\, a_0]$ 在开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖. 向这恶鬼有限子覆盖再加上一个开区间 $\{\mathcal{O}_{\alpha_0}\}$, 就称为区间 $[a,\, b_0]$ 的覆盖, 所以得到 $b_0\in A$. 这与 $\xi=\sup A$ 矛盾.

例题 1.4 设 $y_n = x_n + 2x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$. 证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也收敛.

证明 由于 $\{y_n\}$ 收敛, 因此它有界. 取正数 $M > 0$ 使同时成立 $|x_1| \leqslant M$ 和 $|y_n| \leqslant M$, $n \in \mathbf{N}^+$. 将递推公式改写为 $x_{n+1} = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}x_n$, 则有

$$|x_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|y_n| + \frac{1}{2}|x_n|.$$

因此, 用数学归纳法可以知道 $|x_n| \leqslant M$ 对每个 n 成立. 即数列 $\{x_n\}$ 有界.

记 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = A$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = B$ 和 $\lim_{n\to\infty} y_n = C$, 则它们都是有限数. 只要证明 $A = B$. 在 $x_n = y_n - 2x_{n+1}$ 两边分别取上极限和下极限, 由于 $\{y_n\}$ 收敛, 可以得到等式 $A = C - 2B$ 和 $B = C - 2A$, 由此推出 $A = B$.

例题 1.5 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_{n+m} \leqslant a_n a_m$, $\forall n,\ m \in \mathbf{N}^+$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \left\{ \frac{\ln a_n}{n} \right\}.$$

证明 令 $\alpha = \inf_{n\geqslant 1} \left\{ \frac{\ln a_n}{n} \right\}$, 有

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}. \tag{1.58}$$

又从 α 为下确界 (即最大下界) 可见, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\frac{\ln a_N}{N} < \alpha + \varepsilon.$$

固定这个 N, 可以将每个正整数 n 写为 $n = mN + k$, 其中 $0 \leqslant k < N$. 从题设条件, 有不等式

$$a_n = a_{mN+k} \leqslant a_N^m a_k,$$

取对数后可以得到

$$\frac{\ln a_n}{n} \leqslant \frac{m}{n} \ln a_N + \frac{1}{n} \ln a_k \leqslant \frac{mN}{n}(\alpha + \varepsilon) + \frac{1}{n} \ln a_k.$$

在这个不等式两边令 $n \to \infty$, 右边第一项中有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{mN}{n} = 1,$$

而 a_k 最多只取 N 个值, 因此右边的极限是 $\alpha + \varepsilon$. 左边的极限虽然不知道是否存在, 但可利用上极限的保不等式性质, 在不等式两边取上极限, 从而得到

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 就得到

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \leqslant \alpha.$$

将这个不等式与(1.58)合并, 可见 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}$ 一定有意义, 且等于 α.

笔记 注 1 上述结论的意思是: 当 α 为有限数时数列 $\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}$ 一定收敛, 以 α 为极限, 而当 $\alpha = -\infty$ 时, 这个数列一定是负无穷大量.

注 2 又由此可见, 在正数列满足条件 $a_{n+m} \leqslant a_n a_m$, $\forall n,\ m \in \mathbf{N}^+$ 时, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 一定存在.

注 3 与此等价的命题是: 设 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, $\forall n,\ m \in \mathbf{N}^+$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}.$$

问题 1.157 对每个正整数 n, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,\ 1]$ 中的根, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 先证 $x_n > x_{n+1}$, 若 $x_n \leqslant x_{n+1}$ 可得

$$1=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n \leqslant x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n < x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1}=1$$

$\Rightarrow 1<1$ 矛盾.

故 $x_n > x_{n+1}$ 且 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 极限存在, 又因 $x_n<1$ 且 $\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1 \Rightarrow x_n=\frac{1-x_n}{1-x_n^n}$

令 $n\to\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1-\lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.

问题 1.158 设 $\{x_n\}$ 单调递增,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a,$$

证明:$\{x_n\}$ 收敛于 a.

证明 令 $\sigma_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, 由 $\{a_n\}$ 的单调递增性质 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 故

$$\sigma_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\frac{na_n}{n}=a_n$$

另一方面, 令 n 固定 , $m>n$, 有

$$\begin{aligned}\sigma_m&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m}{m}\\&=\frac{n}{m}\sigma_n+\frac{a_{n+1}+\cdots+a_m}{m}\\&\geqslant\frac{n}{m}\sigma_n+\frac{a_n+\cdots+a_n}{m}=\frac{n}{m}\sigma_n+\frac{m-n}{m}a_n\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$, 得 $a>0+a_n=a_n$. 于是

$$\sigma_n\leqslant a_n\leqslant a$$

由夹挤定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$.

问题 1.159 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且收敛于 A, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=A.$$

证明 若 $A=0$, 则有

$$0\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

已知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

所以由夹挤定理, 有 $\lim\limits_{n\to}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0=A$, 若 $A\neq 0$, 则对任意 $0<\varepsilon<A$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 对任何 $n>N$, 都有

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

则对 $(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ 进行放缩, 有

$$(a_1a_2\cdots a_N)^{\frac{1}{n}}\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-N}{n}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

可知左侧极限为 $A-\frac{\varepsilon}{2}$, 右侧极限为 A, 故存在 $N_0\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N_0$ 时

$$A-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}<(a_1a_2\cdots a_N)^{\frac{1}{n}}\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-N}{n}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<A+\varepsilon.$$

取 $N'=\max\{N,\ N_0\}$, 则当 $n>N'$ 时, 有

$$A-\varepsilon<(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}<A+\varepsilon$$

这说明了 $(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\to A(n\to\infty)$.

问题 1.160 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0<a_1<1$ 和 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)(n\geqslant 1)$, 证明: $\lim_{n\to\infty} na_n=1$.

证明 有如下结论: $0<x_1<1/q$, 其中 $0<q\leqslant 1$ 并且 $x_{n+1}=x_n\left(1-qx_n\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$, 则

$$\lim_{n\to\infty} nx_n=1/q$$

取 $q=1$, 即为本题所要证明的. 下面我们证明上述结论. 用数学归纳法说明 $0<x_n<1/q.n=1$ 时, 有 $0<x_1<1/q$, 假设 $0<x_{n-1}<1/q$, 则 $x_n=x_{n-1}\left(1-qx_{n-1}\right)<x_{n-1}<q$, 同时可以知道 $x_n>0$, 则 $0<x_n<1/q$ 成立, 则同时有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=1-qx_{n-1}<1, \tag{1.59}$$

即 $\{x_n\}$ 严格递减, 而 $\{x_n\}$ 又有下界 0, 故设 $\lim_{n\to\infty} x_n=x$, 对递推式两侧同时令 $n\to\infty$, 可以得到

$$x=x(1-qx)\Rightarrow x=0$$

则 $\{x_n\}$ 严格递减趋于 0, 那么对式(1.59)两侧同时令 $n\to\infty$ 就可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=1$$

又因为 $\{1/x_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 则要求 nx_n 极限即求 $n/\left(1/x_n\right)$ 的极限, 可以使用 Stolz 定理, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{qx_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{qx_{n-1}}=\frac{1}{q}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} nx_n=1/q$

问题 1.161 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = \alpha\beta.$$

证明 令 $\alpha = a$, $\beta = b$, 先对要求的式子做一下处理:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left|\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} - ab\right| \\ &\leqslant \left|\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} - a\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right| + \left|a\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} - ab\right| \end{aligned} \tag{1.60}$$

我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} - b\right) = 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|a\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} - ab\right| = 0$$

再考虑不等式(1.60)最后一部分加号前的一项, 记为 c_n, 因为数列 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界, 即存在 $M \geqslant 0$, 使得 $|b_n| \leqslant M$, 则

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{|b_1(a_n - a) + b_2(a_{n-1} - a) + \cdots + b_n(a_1 - a)|}{n} \\ &\leqslant M\frac{|a_n - a| + |a_{n-1} - a| + \cdots + |a_1 - a|}{n} \end{aligned}$$

因为 $\{a_n - a\}$ 为无穷小, 则可知 $\{|a_n - a|\}$ 为无穷小, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n - a| + |a_{n-1} - a| + \cdots + |a_1 - a|}{n} = 0$$

故有 $c_n \to 0(n\to\infty)$, 则对不等式(1.60) 使用夹挤定理可知 $\left|\frac{a_1b_n+a_2b_n-1+\cdots+a_nb_1}{n} - ab\right|$ 是无穷小, 得证.

问题 1.162 设 $k \in \mathbf{N}^+$, 证明:

$$\frac{k}{n+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$$

证明 令 $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}$

因为

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n\cdot(1+k/n)}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}$$

所以 $\{a_n\}$ 严格递增, 因为

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+k} < \left(\frac{1+(n+k)\cdot\frac{n}{n+k}}{n+k+1}\right)^{n+k+1} < \left(1+\frac{n+1}{n+k+1}\right)^{n+k+1}$$

所以 $\{b_n\}$ 严格递减, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^k$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k = \mathrm{e}^k$$

所以有 $\{a_n\}$ 严格递增趋于 e^k, $\{b_n\}$ 严格递减趋于 e^k, 则有

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \mathrm{e}^k < \left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}$$

对不等式取对数有

$$n\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < k < (n+k)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

再同时取倒数及移项可以得到

$$\frac{k}{n+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$$

即题中不等式得证.

问题 1.163

1. 设参数 $b>4,\ x_1=\frac{1}{2},\ x_{n+1}=bx_n(1-x_n),\ n\in\mathbf{N}^+$. 证明:$\{x_n\}$ 发散.
2. 设 $x_1=b,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n^2+1)$. 问:$b$ 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.
3. 设 $x_0=a,\ x_n=1+bx_{n-1},\ n\in\mathbf{N}^+$. 试求出使该数列收敛的 $a,\ b$ 的所有值.
4. 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且满足 $x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2,\ n\in\mathbf{N}^+$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解

1. $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{b}{4}>1\Rightarrow x_3<0\Rightarrow x_4<0$ 归纳可知 $x_n<0(n\geqslant 3)\Rightarrow\frac{x_{n+1}}{x_n}=b(1-x_n)>b(n\geqslant 3)$
$$\Rightarrow x_{n+1}<bx_n\Rightarrow x_{n+1}<\cdots<b^{n-2}x_3$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$$
2. 当 $|b|\leqslant 1$ 时, $\{x_n\}$ 收敛 , $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n^2+1)\geqslant x_n\Rightarrow\{x_n\}$ 单增, $|b|\leqslant 1$ 归纳可知 $x_n\leqslant 1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$
若 $|b|>1$ 时, $x_2=\frac{1+b^2}{2}>1$, 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{x_n\}$ 单增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ 又由于 $x_2\leqslant x_n\Rightarrow x_2\leqslant 1$ 矛盾.
3. (a). 若 $b=1$, 则 $x_n=x_{n-1}+1=\cdots=x_0+n$. 这说明 $\{x_n\}$ 是发散数列. 若 $b=-1$, 则 $x_{2n+1}-x_{2n-1}=0=x_{2n}-x_{2n-2}(n\in\mathbf{N})$. 这说明 $x_0=x_1$ 即 $x_1=-x_0+1$ 或 $x_0=\frac{1}{2}$ 时, $\{x_n\}$ 收敛.
   (b). 若 $b\neq\pm 1$, 则由题设可知 $x_{n+1}-x_n=b^{n-1}(x_2-x_1)$. 这说明 $x_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)+x_1=(x_2-x_1)\sum\limits_{k=1}^{n}b^{k-1}+a_1$. 注意到 $(a_2-a_1)=(b-1)a_1+1$. 故有
$$x_{n+1}=(x_2-x_1)(1-b^n)/(1-b)+x_1=b^n\left(x_1+\frac{1}{b-1}\right)-\frac{1}{b-1}$$
   由此知, 若 $|b|>1$, 则 $\{x_n\}$ 发散; 若 $|b|<1$, 则 $\{x_n\}$ 收敛.
4. 由题设知 $x_{n+1}+1/x_n<2\leqslant x_n+1/x_n$, 这说明 $\{x_n\}$ 是有界递减数列, $\{x_n\}$ 收敛, 进一步, 若令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $2\leqslant a+\frac{1}{a}\leqslant 2$, 即 $a=1$.

笔记

- $\sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n},\ \forall n$[数学归纳法或其他可证]
- $\sqrt[n]{n!}>\frac{n}{3},\ \forall n$[数学归纳法或其他]
- 观察 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1$, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0,\ \forall c>0$.
- $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}}<\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$
- 从 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$ 可得, $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$ 作为无穷小量与 $\frac{\mathrm{e}}{n}$ 等价.

$a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

Catalan 恒等式:

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}) \\
&= (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

问题 1.164

1. 设 $A>0,\ x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right),\ n\in\mathbf{N}^+$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$.
2. 设 $A>0,\ x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3A)}{3x_n^2+A},\ n\in\mathbf{N}^+$，证明:$\{x_n\}$ 收敛于 $\sqrt{A}$.

解

1. 由

$$x-1-\sqrt{A}=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)-\sqrt{A}=\frac{1}{2x_0}(x_0^2+A-2x_0\sqrt{A})$$
$$=\frac{1}{2x_0}(x_0-\sqrt{A})^2\geqslant 0$$

得

$$0\leqslant x_2-\sqrt{A}=\frac{1}{2}(x_1-\sqrt{A})\frac{(x_1-\sqrt{A}}{x_1}\leqslant\frac{1}{2}(x_1-\sqrt{A})$$

可得

$$0\leqslant x_n-\sqrt{A}\leqslant\frac{1}{2}(x_{n-1}-\sqrt{A})\leqslant\frac{1}{2^2}(x_{n-2}-\sqrt{A})\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}(x_1-\sqrt{A})$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$.

2.

$$x_{n+1}-\sqrt{A}=\frac{x_n^3+3Ax_n-3x_n^2\sqrt{A}-A^{\frac{3}{2}}}{3x_n^2+A}$$
$$=\frac{(x_n-\sqrt{A})^3}{3x_n^2+A}$$

若 $x_1\geqslant\sqrt{A},\Rightarrow x_n\geqslant\sqrt{A}$ 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n^2+3A}{3x_n^2+A}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8A}{3x_n^2+A}\right)\leqslant 1$$

$\Rightarrow\{x_n\}$ 的极限存在且易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$.

若 $x_1<\sqrt{A}\Rightarrow 0<x_n<\sqrt{A}$ 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n^2+3A}{3x_n^2+A}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8A}{3x_n^2+A}\right)>1$$

$\Rightarrow\{x_n\}$ 的极限存在且易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$.

1.6 丘维声-高等代数

问题 1.165 设数域 K 上 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的列向量组组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$,
证明:$\boldsymbol{H}$ 的任意 s 列 $(s\leqslant\min\{m,\ n\})$ 都线性无关当且仅当: 齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0} \tag{1.61}$$

的任一非零解的非零分量的数目大于 s.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{H}$ 的任意 s 列都线性无关. 假如齐次线性方程组 (1.61) 的一个非零解 $\boldsymbol{\eta}$ 为

$$\boldsymbol{\eta}=(0,\ \cdots,\ 0,\ c_{i_1},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ c_{i_l},\ 0,\ \cdots,\ 0)',$$

其中 $c_{i_1},\ \cdots,\ c_i$ 全不为 0, 且 $l\leqslant s$, 则

$$c_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\cdots+c_i\boldsymbol{\alpha}_{i_l}=\mathbf{0},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_l},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{i_l}$ 线性相关. 于是 $\boldsymbol{H}$d 的包含第 $i_1,\ \cdots,\ i_l$ 列的任意 s 列都线性相关, 这与假设矛盾, 因此方程组1.61的任一非零解的非零分量的数目大于 s. 充分性. 设方程组1.61的任一非零解的非零分量的数目大于 s. 假如 $\boldsymbol{H}$ 有 s 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\ \boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 线性相关, 则有不全为 0 的数 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0},$$

从而

$$\boldsymbol{\eta}=(0,\ \cdots,\ 0,\ k_1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ k_s,\ 0,\ \cdots,\ 0)'$$

是方程组1.61的一个非零解, 它的非零分量数目小于或等于 s. 与假设矛盾, 因此 $\boldsymbol{H}$ 的任意 s 列都线性相关.

问题 1.166 设数域 K 上的 n 级矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

满足

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

证明: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩等于 n.

证明 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 假如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 则在 K 中有一组不全为 0 的数 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

不妨设 $\quad |k_l|=\max\{|k_1|,\ |k_2|,\ \cdots,\ |k_n|\}.$

在上式考虑第 l 个分量的等式:

$$k_1a_{l1}+k_2a_{l2}+\cdots+k_la_{ll}+\cdots+k_na_{ln}=0,$$

从上式得

$$a_{ll}=-\frac{k_1}{k_l}a_{l1}-\cdots-\frac{k_{l-1}}{k_l}a_{l,\ l-1}-\frac{k_{l+1}}{k_l}a_{l,\ l+1}-\cdots-\frac{k_n}{k_l}a_{bn}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{k_j}{k_l}a_{lj}$$

从上式得

$$|a_{ll}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}\frac{|k_j|}{|k_l|}|a_{lj}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}|a_{lj}|$$

问题 1.167 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 0, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的 $(k,\ l)$ 元的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{kl} \neq 0$. 证明:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k1} \\ \boldsymbol{A}_{k2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{kn} \end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系.

证明 由于 $\boldsymbol{A}_{kl} \neq 0$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 有一个 $n-1$ 阶子式不为 0, 又由于 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n-1$, 从而这个齐次线性方程组的解空间 W 的维数为

$$\dim W = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n - (n-1) = 1.$$

考虑这个齐次线性方程组的第 i 个方程:

$$a_{i1}x_+ a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0.$$

当 $i \neq k$ 时, 有

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0$$

当 $i = k$ 时, 有

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{m}A_{m} = |\boldsymbol{A}| = 0;$$

因此 $\boldsymbol{\eta} = (A_{k1},\ A_{k2},\ \cdots,\ A_{kn})'$ 是这个齐次线性方程组的一个解. 由于 $A_{kl} \neq 0$, 因此 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零解, 从而 $\boldsymbol{\eta}$ 线性无关. 由于 $\dim W = 1$, 因此 $\boldsymbol{\eta}$ 是 W 的一个基, 即 $\boldsymbol{\eta}$ 是这个齐次线性方程组的一个基础解系.

问题 1.168 设 $n-1$ 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 把 $\boldsymbol{B}$ 划去第 j 列得到的 $n-1$ 阶子式记作 D_j, 令

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} D_1 \\ -D_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}D_n \end{pmatrix}$$

证明: (1) η 是这个齐次线性方程组的一个解; (2) 如果 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$, 那么 $\boldsymbol{\eta}$ 是这个齐次线性方程组的一个基础解系.

证明 证明 (1) 在所给的齐次线性方程组的下面添上一个方程:

$$0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=0,$$

得到 n 个方程的 n 元齐次线性方程组, 其系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$.$\boldsymbol{A}$ 的 $(n,\ j)$ 元的代数余子式 A_{nj} 为

$$A_{nj}=(-1)^{n+j}D_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

原齐次线性方程组的第 i 个方程 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 为

$$b_nx_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n=0.$$

由于 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 i 行 $(i\neq n)$ 元素与第 n 行相应元素的代数余子式的乘积之和为 0, 因此

$$b_nA_{n1}+b_{i2}A_{n2}+\cdots+b_nA_{nn}=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

由此得出, $\big(D_1,\ -D_2,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}D_n\big)'$ 是原齐次线性方程组的一个解. 有 $n-1$ 行, 因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=n-1$, 从而齐次线性方程组的解空间 W 的维数为

$$\dim W=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=n-(n-1)=1.$$

由于 $\boldsymbol{\eta}=\big(D_1,\ -D_2,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}D_n\big)'$ 是原齐次线性方程组的一个非零解, 因此 $\boldsymbol{\eta}$ 是 W 的一个基, 即 $\boldsymbol{\eta}$ 是原齐次线性方程组的一个基础解系.

问题 1.169 设 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的前 $s-1$ 行组成的子矩阵. 证明: 如果以 $\boldsymbol{A}_1$ 为系数矩阵的齐次线佅方程组的解都是方程

$$a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0$$

的解, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的第 s 行可以由 $\boldsymbol{A}$ 的前 $s-1$ 行线性表出.

证明 由已知条件立即得出: 以 $\boldsymbol{A}_1$ 为系数矩阵的齐次线性方程组和以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组同解, 即它们的解空间相等, 记为 W. 从 $\dim W=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1)$, $\dim W=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ 得出:$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{s-1}, \boldsymbol{\gamma}_s$. 由于 $\operatorname{rank}\left\langle\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{s-1}\right\rangle=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{s-1}, \boldsymbol{\gamma}_s\}$, 可得 $\boldsymbol{\gamma}_s$ 可以由 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{s-1}$ 线性表出, 即 $\boldsymbol{A}$ 的第 s 行可以由它的前 $s-1$ 行线性表出.

问题 1.170 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $s\times n$ 矩阵, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$. 以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1n}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2n}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r}=\begin{pmatrix}b_{n-r,\ 1}\\b_{n-r.2}\\\vdots\\b_{n-r,\ n}\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{B}$ 是以 $\boldsymbol{\eta}_1',\ \boldsymbol{\eta}_2',\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r}'$ 为行向量组的 $(n-r)\times n$ 矩阵. 试求以 $\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系.

解 由于 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\eta}_1',\ \boldsymbol{\eta}_2',\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r}'$ 线性无关, 因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=n-r$, 从而以 $\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间 W 的维数为

$$\dim W=n-(n-r)=r.$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_j$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的一个解, 因此对于 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ s\}$, 有

$$a_{i1}b_{j1}+a_{i2}b_{j2}+\cdots+a_{in}b_{jn}=0,$$

其中 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-r$. 由此看出

$$(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})'$$

是以 B 为系数矩阵的齐次线性方程组的一个解. 取 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\gamma}_{i_1},\ \cdots,\ \boldsymbol{\gamma}_{i_r}$, 则由上述结论得, $\boldsymbol{\gamma}_{i_1}',\ \cdots,\ \boldsymbol{\gamma}_{i_r}'$ 都是以 $\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解. 由于 $\dim W=r$, 因此 $\boldsymbol{\gamma}_{i_1}',\ \cdots,\ \boldsymbol{\gamma}_{i_r}'$ 是 W 的一个基, 即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的一个极大线性无关组取转置后, 是以, $\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系.

问题 1.171 设 A 是数域 K 上一个 $s\times n$ 矩阵, 证明: 如果 A 的秩为 r, 那么 A 的行向量组的一个极大线性无关组与 A 的列向量组的一个极大线性无关组交叉位置的元素按原来的排法组成的 r 阶子式不等于 0.

证明 设 $\boldsymbol{\gamma}_{i_1}, \boldsymbol{\gamma}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{i_r}$ 是 A 的行向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s$ 的一个极大线性无关组, $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 A 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组, 令

$$A_1=\begin{pmatrix}\gamma_{i_1}\\ \gamma_{i_2}\\ \vdots\\ \gamma_{i_r}\end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}(A_1)=r.A_1$ 的列向量记作 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_n$, 它们是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的缩短组. 由于 A 的每一列 $\boldsymbol{\alpha}_l$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出, 因此 $\boldsymbol{A}_1$ 的每一列 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_l$ 可以由 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_2}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_r}$ 线性表出. 由于 $\operatorname{rank}(A_1)=r$, 因此 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_2}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{A}_1$ 的列向量组的一个极大线性无关组. 从而由 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_2}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{j_r}$ 组成的子矩阵 A_2 的行列式不等于 0. 即

$$A\begin{pmatrix}i_1, & i_2, & \cdots, & i_r\\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_r\end{pmatrix}\neq 0.$$

问题 1.172 证明: 斜对称矩阵的秩是偶数

证明 设 n 级斜对称矩阵 A 的行向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots \boldsymbol{\gamma}_n$. 则 A' 的列向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1', \boldsymbol{\gamma}_2', \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n'$. 由于 $A' = -A$, 因此 A 的列向量组为 $-\boldsymbol{\gamma}_1', -\boldsymbol{\gamma}_2', \cdots, -\boldsymbol{\gamma}_n'$. $\operatorname{rank}(A) = r$. 取 A 的行向量组的一个极大线性无关组 $\gamma_{i_1}, \boldsymbol{\gamma}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{i_r}$, 则 $-\boldsymbol{\gamma}_{i_1}', -\boldsymbol{\gamma}_{i_2}', \cdots, -\boldsymbol{\gamma}_{i_r}'$ 是 A 的列向量组的一个极大线性无关组. 据上题的结论, 得

$$A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_r \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

由于 $A\left(i_u; i_v\right) = -A\left(i_v; i_u\right)$, $v, u \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 因此上述 r 阶子式是一个 r 级斜对称矩阵的行列式. 由于奇数级斜对称矩阵的行列式等于 0, 因此 r 必为偶数.

问题 1.173 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵, 则

$$\operatorname{rank}\left(A'A\right)=\operatorname{rank}\left(AA'\right)=\operatorname{rank}(A).$$

证明 法 1 如果能够证明 n 元齐次线性方程组 $(A'A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 与 $A\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 同解, 那么它们的解空间一致, 从而由解空间的维数公式, 得

$$n-\operatorname{rank}\left(A'A\right)=n-\operatorname{rank}(A),$$

由此得出, $\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(A)$. 现在来证明 $(A'A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 与 $A\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 同解. 设 η 是 $A\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的任意一个解, 则 $A\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$. 从而 $(A'A)\eta=\mathbf{0}$, 因此 η 是 $(A'A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的一个解. 反之, 设 $\boldsymbol{\delta}$ 是 $(A'A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的任意一个解, 则

$$\left(A'A\right)\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}.$$

上式两边左乘 $\boldsymbol{\delta}'$, 得即

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}'A'A\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0},\\ (A\boldsymbol{\delta})'A\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}.\end{gathered}$$

设 $(A\boldsymbol{\delta})'=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_s)$, 由于 A 是实数域上的矩阵, 因此 $c_1,\ c_2,\ \cdots c_s$ 都是实数. 由 (1) 式得

$$c_1^2+c_2^2+\cdots+c_s^2=0.$$

由此推出, $c_1=c_2=\cdots=c_s=0$. 从而 $A\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}$. 即 $\boldsymbol{\delta}$ 是 $A\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的一个解. 因此 $(A'A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 与 $A\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 同解. 于是

$$\operatorname{rank}\left(A'A\right)=\operatorname{rank}(A)$$

由这个结论立即得出

$$\operatorname{rank}\left(AA'\right)=\operatorname{rank}\left[\left(A'\right)'\left(A'\right)\right]=\operatorname{rank}\left(A'\right)=\operatorname{rank}(A).$$

法 2 设 $\operatorname{rank}(A)=r$, 则 $r\leqslant\min\{s,\ n\}.AA'$ 的任一 r 级主子式为

$$\begin{aligned}AA'\begin{pmatrix}i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\end{pmatrix}&=\sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_r\leqslant n}A\begin{pmatrix}i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_r\end{pmatrix}A'\begin{pmatrix}v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_r\\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\end{pmatrix}\\ &=\sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_r\leqslant n}\left[A\begin{pmatrix}i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_r\end{pmatrix}\right]^2.\end{aligned}$$

由于 A 有一个 r 阶子式不为 0, 因此 AA' 有一个 r 阶主子式不为 0. 从而 $\operatorname{rank}(AA')\geqslant r$. 又由于 $\operatorname{rank}(AA')\leqslant\operatorname{rank}(A)=r$, 因此 $\operatorname{rank}(AA')=r=\operatorname{rank}(A)$. 从而 $\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}\left[(A')(A')'\right]=\operatorname{rank}(A')=\operatorname{rank}(A)$.

问题 1.174 设 A 是复数域上 n 级循环矩阵, 它的第一行为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 求 $|A|$.

解 法一令 $w=\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$, 设

$$f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}.$$

任给 $i\in\{0, 1, \cdots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}|A|&=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}f\left(w^i\right)&a_2&\cdots&a_n\\w^if\left(w^i\right)&a_1&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\w^{i(n-1)}f\left(w^i\right)&a_3&\cdots&a_1\end{vmatrix}=f\left(w^i\right)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\w^j&a_1&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\w^{i(n-1)}&a_3&\cdots&a_1\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

因此 $|A|$ 有因子 $f\left(w^i\right)$, $i=0, 1, \cdots, n-1$. 由于 $|A|$ 中 a_1 的幂指数至多是 n, 且 a_1^n 的系数为 1, 因此

$$|A|=\prod_{i=0}^{\pi-1}f\left(w^i\right)$$

法二令 $w=\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$, 设 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$, 令

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&w&w^2&\cdots&w^{n-1}\\1&w^2&w^4&\cdots&w^{2(n-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&w^{n-1}&w^{2(n-1)}&\cdots&w^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix}$$

则

$$|AB|=\left|\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(m-1)(n-1)} \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} f(1) & f(w) & f\left(w^2\right) & \cdots & f\left(w^{n-1}\right) \\ f(1) & wf(w) & w^2 f\left(w^2\right) & \cdots & w^{n-1} f\left(w^{n-1}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(1) & w^{n-1} f(w) & w^{2(n-1)} f\left(w^2\right) & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} f\left(w^{n-1}\right) \end{vmatrix}$$

$$=f(1)f(w)f\left(w^2\right)\cdots f\left(w^{n-1}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & a^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=0}^{n-1} f\left(w^i\right)|B|.$$

又由于 $|AB|=|A||B|$，且 $|B|\neq 0$，因此

$$|A|=\prod_{i=0}^{\pi-1} f\left(w^i\right)$$

问题 1.175 设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵, $m\geqslant n-1$. 求 AA' 的 $(1,\ 1)$ 元的代数余子式.

解 AA' 是 n 级矩阵, AA' 的 $(1,\ 1)$ 元的余子式是 AA' 的一个 $n-1$ 阶子式. 由于 $n-1\leqslant m$, 因此

$$AA'\begin{pmatrix} 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n \end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_{n-1}\leqslant m} A\begin{pmatrix} 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix} A'\begin{pmatrix} v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_{n-1}\leqslant m}\left[A\begin{pmatrix} 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix}\right]^2.$$

又由于 $(-1)^{1+1}=1$, 因此 AA' 的 $(1,\ 1)$ 元的代数余子式等于 A 的第一行元素的余子式的平方和.

问题 1.176 设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵, $m\geqslant n-1$, 并且 A 的每一列元素的和都为 0. 证明: AA' 的所有元素的代数余子式都相等.

解 AA' 的 $(i,\ j)$ 元的代数余子式为

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{i+j}AA'\begin{pmatrix} 1,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ n \\ 1,\ \cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots,\ n \end{pmatrix}\\
&=(-1)^{i+j}\textstyle\sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_{n-1}\leqslant m} A\begin{pmatrix} 1,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix} A'\begin{pmatrix} v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \\ 1,\ \cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots,\ n \end{pmatrix}\\
&=(-1)^{i+j}\textstyle\sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_{n-1}\leqslant m} A\begin{pmatrix} 1,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1,\ \cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

计算

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} 1,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix}&=\begin{vmatrix} a_{1v_1} & a_{1v_2} & \cdots & a_{1v_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,\ v_1} & a_{i-1,\ v_2} & \cdots & a_{i-1,\ v_{n-1}} \\ a_{i+1,\ v_1} & a_{i+1,\ v_2} & \cdots & a_{i+1,\ v_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1} & a_{mv_2} & \cdots & a_{nn_{n-1}} \end{vmatrix}\\
&=(-1)^{i+1}A\begin{pmatrix} 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

因此 AA' 的 $(i,\ j)$ 元的代数余子式为

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{i+j}\sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_{n-1}\leqslant m}(-1)^{i+1}A\begin{pmatrix} 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix}(-1)^{j+1}A\begin{pmatrix} 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix}\\
&=\sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_{n-1}\leqslant m}\left[A\begin{pmatrix} 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1} \end{pmatrix}\right]^2.
\end{aligned}
$$

据上题的结果, 上式右端等于 AA' 的 $(1,\ 1)$ 元的代数余子式. 这证明了 AA' 的所有元素的代数余子式都相等.

问题 1.177 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别是数域 K 上的 $n \times m$, $m \times n$ 矩阵. 证明: 如果 $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}$ 可逆, 那么 $\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA}$ 也可逆; 并且求 $(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA})^{-1}$.

证明 设法找到 m 级矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA})$

$$(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}_m.$$

由上式得

$$-\boldsymbol{BA} + \boldsymbol{X} - \boldsymbol{BAX} = \boldsymbol{0},$$

即

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{BAX} = \boldsymbol{BA}.$$

令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BYA}$, 其中 $\boldsymbol{Y}$ 是待定的 n 级矩阵.
代入上式, 得

$$\boldsymbol{BYA} - \boldsymbol{BABYA} = \boldsymbol{BA},$$

即

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{ABY})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}.$$

如果能找到 $\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{ABY} = \boldsymbol{I}_n$, 那么上式成立, 由于 $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{ABY} = \boldsymbol{I}_n$ 等价于 $(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}_n$, 而已知条件中 $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}$ 可逆, 因此 $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}$. 由此受到启发, 有

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA})[\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}] \\
&= \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BAB}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{B}[(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1} - \boldsymbol{AB}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}]\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{B}[(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}]\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{BI}_n\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{I}_m,
\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA}$ 可逆, 并且

$$(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA})^{-1} = \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

问题 1.178 方阵 $\boldsymbol{A}$ 如果满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是数域 K 上的 n 级矩阵, 证明:

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是对合矩阵, 且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 都不可逆;

(2) 如果 $\boldsymbol{B}$ 是对合矩阵, 且 $|\boldsymbol{B}|=-1$, 那么 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.

证明 (1) 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, 因此 $|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{I}|$, 那么 $|\boldsymbol{A}|^2=1$. 由此得出, $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$. 由已知条件, 不妨设 $|\boldsymbol{A}|=1$, $|\boldsymbol{B}|=-1$. 由于

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|,$$
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}|,$$

因此

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,$$

从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0,$$

于是

$$|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0,$$

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 都不可逆.

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$. 则 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$. 由 (1) 可得出 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.

笔记 n 级可逆矩阵组成的集合对于矩阵的加法不封闭.

问题 1.179 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别是 $s \times n$, $n \times m$ 矩阵. 证明: 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

证明 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, 则显然结论成立, 下面设 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$, 由于 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$, 因此 $\boldsymbol{\beta}_j$ 属于 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 W, $j = 1, 2, \cdots, m$, 于是有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \dim < \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m > \leqslant \dim W = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}),$$

即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{B} \leqslant n.$$

问题 1.180 证明 Sylvester 秩不等式: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别是 $s\times n$, $n\times m$ 矩阵, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-n.$$

证明 只需证 $n+\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 首先我们有

$$n+\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}.$$

做分块矩阵的初等行 (列) 变换:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\xrightarrow{2+\boldsymbol{A}\cdot 1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\xrightarrow[2+1\cdot(-\boldsymbol{B})]{}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[2\cdot(-\boldsymbol{I}_m)]{}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\xrightarrow[(1,\,2)]{}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}.$$

根据分块矩阵的初等行 (列) 变换不改变矩阵的秩, 得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}),$$

因此

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-n.$$

问题 1.181 如果数域 K 上 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵. 证明: 数域 K 上 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵当且仅当

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n.$$

证明 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)=0$. 由于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix} \xrightarrow[(2)+(1)]{} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(1)+(-\boldsymbol{A}\cdot(2)} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix} \xrightarrow[(1)+(2)\cdot(-\boldsymbol{A})]{} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

从而

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)+n,$$

由此得出, n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)=0 \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.

问题 1.182 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵, 证明: 对于任意 $\boldsymbol{\beta}\in K^3$, 线性方程组 $A'A\boldsymbol{X}=A'\boldsymbol{\beta}$ 一定有解.

证明 只需证增广矩阵 $(A'A,\ A'\boldsymbol{\beta})$ 与系数矩阵 $A'A$ 的秩相等. 由于 A 是实数域上的矩阵, 因此 $\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(A')$. 从而

$$\operatorname{rank}\left(A'A,\ A'\boldsymbol{\beta}\right)=\operatorname{rank}\left(A'(A,\ \boldsymbol{\beta})\right)\leqslant\operatorname{rank}\left(A'\right)=\operatorname{rank}\left(A'A\right).$$

又由于 $\operatorname{rank}(A'A)\leqslant\operatorname{rank}(A'A,\ A'\boldsymbol{\beta})$, 因此

$$\operatorname{rank}\left(A'A,\ A'\boldsymbol{\beta}\right)=\operatorname{rank}\left(A'A\right).$$

从而线性方程组 $A'A\boldsymbol{X}=A'\boldsymbol{\beta}$ 有解.

问题 1.183 设 A 是 n 级矩阵 $(n \geqslant 2)$, 证明:

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

证明 若 $A=0$, 则结论显然成立下设 $A \neq 0$. 我们知道, $AA^* = |A|I$. 若 $|A| \neq 0$, 则 $|A|\,|A^*| = |A|^n$. 从而 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 若 $|A|=0$, 则 $AA^*=0$. 故

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A^*) \leqslant n.$$

从而

$$\operatorname{rank}(A^*) \leqslant n - \operatorname{rank}(A) < n.$$

因此 $|A^*| = 0$. 从而结论成立.

问题 1.184 设 A 是 n 级矩阵 $(n \geqslant 2)$, 证明:

$$\operatorname{rank}\left(A^{*}\right)=\begin{cases} n, & \text{当} \operatorname{rank}(A)=n, \\ 1, & \text{当} \operatorname{rank}(A)=n-1, \\ 0, & \text{当} \operatorname{rank}(A)<n-1.\end{cases}$$

证明 若 $\operatorname{rank}(A)=n$, 则 $|A| \neq 0$. 从而 $|A^{*}| \neq 0$. 于是 $\operatorname{rank}\left(A^{*}\right)=n$. 若 $\operatorname{rank}(A)=n-1$, 则 A 有一个 $n-1$ 阶子式不等于 0. 从而 A 有一个元素的代数余子式不等于 0. 于是 $A^{*} \neq 0$ 由于 $|A|=0$, 据上题的证明得

$$\operatorname{rank}\left(A^{*}\right) \leqslant n-\operatorname{rank}(A)=n-(n-1)=1.$$

由于 $A^{*} \neq 0$, 因此 $\operatorname{rank}\left(A^{*}\right)=1$. 若 $\operatorname{rank}(A)<n-1$, 则 A 的所有 $n-1$ 阶子式都等于 0, 从而 $A^{*}=0$. 于是 $\operatorname{rank}\left(A^{*}\right)=0$.

问题 1.185 设 A 是 n 级矩阵 $(n \geqslant 2)$. 证明:

(1) 当 $n \geqslant 3$ 时, $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;

(2) 当 $n = 2$ 时, $(A^*)^* = A$.

证明 (1) 设 $n \geqslant 3$. 若 $|A| \neq 0$, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 由于 $A^*(A^*)^* = |A^*|I$. 因此 $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A$. 若 $|A| = 0$, 则据上题的结果得 $\operatorname{rank}(A^*) \leqslant 1 < n-1$. 因此 $(A^*)^* = 0$. 于是结论也成立.

(2) 设 $n = 2$. 此时

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

因此

$$(A^*)^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

问题 1.186 设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 r 级可逆矩阵, A_4 是 s 级矩阵. 问: 还应满足什么条件, A 才可逆, 当 A 可逆时, 求 A^{-1}.

解 作分块矩阵的初等行变换: 从而

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{((2)+(-A_3A^{-1})\cdot(1)} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4-A_3A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_3A_1^{-1} & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4-A_3A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

两边取行列式, 得

$$|I_r|\,|I_s|\,|A|=|A_1|\left|A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right|.$$

由此得出, 再满足 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 可逆的条件, 则 A 可逆. 当 A 可逆时,

$$\begin{aligned}
A^{-1}&=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4-A_3A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_3A_1^{-1} & I_s \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \\ 0 & \left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_3A_1^{-1} & I_3 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} A_1^{-1}+A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \\ -\left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & \left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

问题 1.187 设 A, B, C, D 都是数域 K 上的 n 级矩阵, 且 $AC=CA$. 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

证明 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 可以作下述分块矩阵的初等行变换:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(-CA^{-1})\cdot(1)} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式, 得

$$|I||I|\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D-CA^{-1}B\right|.$$

于是

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left|A\left(D-CA^{-1}B\right)\right| = \left|AD-ACA^{-1}B\right| = |AD-CB|.$$

当 $|A|=0$ 时, 令

$$A(t) = A - tI,$$

则 $|A(t)| = |A-tI|$ 是 t 的 n 次多项式, 记作 $f(t)$. 显然有 $f(0)=|A|=0$. 因为 n 次多项式 $f(t)$ 在数域 K 中的根至多有 n 个, 所以存在 $\delta>0$, 使得 $\forall t \in (0-\delta,\ 0+\delta)$, 并且 $t \neq 0$, 都有 $f(t) \neq 0$, 即 $|A(t)| \neq 0$. 由于 $AC=CA$, 因此

$$A(t)C = (A-tI)C = AC - tC = CA - tC = C(A-tI) = CA(t).$$

由上一段刚证得的结果得, 当 $t \in (0-\delta,\ 0+\delta)$ 且 $t \neq 0$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} A(t) & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A(t)D-CB|.$$

令 $t \to 0$, 在上式两边取极限, 得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

问题 1.188 设 A 是数域 K 上 2 级矩阵, 证明: 如果 $|A|=1$, 那么 A 可以表示成 1° 型初等矩阵 $P(i,\ j(k))$ 的乘积 (即 A 可以表示成形如 $I+kE_{ij}$ 的矩阵的乘积, 其中 $i\neq j$).

证明 先看一个特殊情形, 设

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

若 $a=1$, 则 $A=I$, 已符合要求. 下面设 $a\neq 1$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\cdot a^{-1}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)+(1)\cdot(1-a^{-1})]{} \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(1)+(2)\cdot(1-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$P(2,\ 1(-1))P(1,\ 2(1-a))P\left(2,\ 1\left(a^{-1}\right)\right)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}P\left(1,\ 2\left(1-a^{-1}\right)\right)=I.$$

从而

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} &= P\left(2,\ 1(-a)^{-1}\right)P(1,\ 2(a-1))P(2,\ 1(1))P\left(1,\ 2\left(a^{-1}-1\right)\right) \\ &= \left(I-a^{-1}E_{21}\right)\left(I+(a-1)E_{12}\right)\left(I+E_{21}\right)\left(I+\left(a^{-1}-1\right)E_{12}\right).\end{aligned}$$

现在看一般情形, 设

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中 $|A|=ad-bc=1$. 若 $a\neq 0$, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\left(-ca^{-1}\right)} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d-ca^{-1}b \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)(-ba)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

利用上面证得结果, A 可以表示成 1° 型初等矩阵的乘积. 若 $a=0$, 则 $c\neq 0$. 从而

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix},$$

利用刚刚证得的结果, A 可以表示成 1° 型初等矩阵的乘积.

问题 1.189 设 A 是 n 级矩阵, 行标和列标都为 1, 2, $\cdots$, k 的子式称为 A 的 k 阶顺序主子式, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 证明: 如果 A 的所有顺序主子式都不等于 0, 那么存在 n 级下三角矩阵 B, 使得 BA 为上三角矩阵.

证明 证明 $n=1$ 时, 命题显然为真. 假设对于 $n-1$ 级矩阵, 命题为真. 下面看 n 级矩阵 $A=(a_{ij})$ 的情形. 设 A 的所有顺序主子式都不等于 0. 把 A 写成分块矩阵的形式:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 $n-1$ 级矩阵. 由于 A_1 的所有顺序主子式是 A 的 1, 2, $\cdots$, $n-1$ 阶顺序主子式, 因此对 A_1 可以用归纳假设, 有 $n-1$ 级下三角矩阵 B_1, 使得 B_1A_1 为上三角矩阵.

$$\begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+\left(-\boldsymbol{\beta}A_1^{-1}\right)\cdot(1)} \begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\beta}A_1^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A_1^{-1}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\beta}A_1^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}.$$

令

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\beta}A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_1^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

则 B 为下三角矩阵, 且

$$BA=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\beta}A_1^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix},$$

于是 BA 为上三角矩阵. 由数学归纳法原理, 对一切正整数 n, 命题为真.

问题 1.190 设 A 是实数域上的 n 级矩阵, 证明: 如果 A 可逆, 那么 A 可以唯一地分解成正交矩阵 T 与主对角元都为正数的上三角矩阵 B 的乘积: $A=TB$.

证明 先证可分解性. 由于 A 可逆, 因此 A 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 经过施密特正交化可得到与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 等价的正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n$. 可得到: 记

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\\
&\boldsymbol{\alpha}_2=\tfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\\
&\cdots\quad\cdots\\
&\boldsymbol{\alpha}_n=\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}\tfrac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\ \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\ \boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j+\boldsymbol{\beta}_n.
\end{aligned}$$

$$b_{ji}=\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\ \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\ \boldsymbol{\beta}_j)},\quad i=2,\ 3,\ \cdots,\ n;\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1.$$

再对每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 单位化, 即令

$$\boldsymbol{\eta}_i=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_i|}\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\\
&=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}1&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\beta}_1|&0&\cdots&0\\0&|\boldsymbol{\beta}_2|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{\beta}_n|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\beta}_1|&b_{12}\,|\boldsymbol{\beta}_1|&\cdots&b_{1n}\,|\boldsymbol{\beta}_1|\\0&|\boldsymbol{\beta}_2|&\cdots&b_{2n}\,|\boldsymbol{\beta}_2|\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{\beta}_n|\end{pmatrix}=TB,
\end{aligned}$$

其中 $T=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_n)$,

$$B=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\beta}_1|&b_{12}\,|\boldsymbol{\beta}_1|&\cdots&b_{1n}\,|\boldsymbol{\beta}_1|\\0&|\boldsymbol{\beta}_2|&\cdots&b_{2n}\,|\boldsymbol{\beta}_2|\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{\beta}_n|\end{pmatrix}.$$

显然 T 是正交矩阵, B 是主对角元都为正数的上三角矩阵. 再证唯一性. 假如 A 还有一种分解方

式:

$$A = T_1 B_1,$$

其中 T_1 是正交矩阵, B_1 是主对角元都为正数的上三角矩阵. 则

$$TB = T_1 B_1.$$

$$T_1^{-1} T = B_1 B^{-1}.$$

$$\text{从而} \quad T_1^{-1} T = B_1 B^{-1}.$$

左边 $T_1^{-1}T$ 是正交矩阵, 右边 $B_1 B^{-1}$ 是主对角元都为正数的上三角矩阵. 得, $T_1^{-1}T$ (即 B_1B^{-1}) 是对角矩阵, 且主对角元为 1, 那就是单位矩阵 I. 因此

$$T_1^{-1} T = B_1 B^{-1} = I.$$

由此得出

$$T = T_1, \quad B = B_1.$$

问题 1.191 决定所有的 2 级正交矩阵.

解 设 $A=(a_{ij})$ 是 2 级正交矩阵. 则 $A^{-1}=A'$, 即

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

由于 $|A|=1$ 或 -1. 因此分两种情形:

情形 1:$|A|=1$. 此时有

$$a_{22}=a_{11}, \quad a_{21}=-a_{12}.$$

由于 $a_{11}^2+a_{21}^2=1$, 因此在平面直角坐标系 Oxy 中, 点 $P(a_{11}, a_{21})$ 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上. 据三角函数的定义, 得

$$a_{11}=\cos\theta, \quad a_{21}=\sin\theta, \quad \theta\in\mathbf{R}.$$

于是

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta\in\mathbf{R}.$$

容易直接验证, 所求出的 A 是正交矩阵.

情形 2: $|A|=-1$. 此时有

$$a_{22}=-a_{11}, \quad a_{21}=a_{12}.$$

由于 $a_{11}^2+a_{21}^2=1$, 因此同情形 1 的理由得

$$a_{11}=\cos\theta, \quad a_{21}=\sin\theta.$$

于是

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta\in\mathbf{R}.$$

容易直接验证, 所求出的 A 是正交矩阵. 综上所述, 2 级正交矩阵有且只有下列两种类型:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta\in\mathbf{R}.$$

问题 1.192 设 A 是 n 级正交矩阵, 证明:

(1) 如果 |A|=1 , 那么 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式;

(2) 如果 |A|=-1 , 那么 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式乘以 -1 .

证明 由于 A 是正交矩阵, 因此 $A' = A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. 于是当 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$ 时, 有

$$A(i;j) = A'(j;i) = \frac{1}{|A|}A^*(j;i) = \frac{1}{|A|}A_{ij}.$$

(1) 如果 $|A| = 1$, 那么由上式得, $A(i;j) = A_{ij}$.

(2) 如果 $|A| = -1$, 那么由上式得, $A(i;j) = -A_{ij}$.

问题 1.193 设 A 是实数域上的 n 级矩阵证明:

(1) 如果 $|A| = 1$, 且 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式, 那么 A 是正交矩阵;

(2) 如果 $|A| = -1$, 且 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式乘以 -1, 那么 A 是正交矩阵.

证明 (1) 由于 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 因此当 $|A| = 1$ 时, 据已知条件得

$$A^{-1}(j;i) = A^*(j;i) = A_{ij} = A(i;j) = A'(j;i),$$

其中 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. 因此 $A^{-1} = A'$. 于是 A 是正交矩阵.

(2) 当 $|A| = -1$ 时, 据已知条件得

$$A^{-1}(j;i) = -A^{\cdot} \cdot (j;i) = -A_{ij} = A(i;j) = A'(j;i),$$

其中 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. 因此 $A^{-1} = A'$. 从而 A 是正交矩阵.

问题 1.194 设 A 是实数域上的 n 级矩阵证明:

(1) 如果 $|A| = 1$, 且 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式, 那么 A 是正交矩阵;

(2) 如果 $|A| = -1$, 且 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式乘以 -1, 那么 A 是正交矩阵.

证明 (1) 由于 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 因此当 $|A| = 1$ 时, 据已知条件得

$$A^{-1}(j;i) = A^*(j;i) = A_{ij} = A(i;j) = A'(j;i),$$

其中 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. 因此 $A^{-1} = A'$. 于是 A 是正交矩阵.

(2) 当 $|A| = -1$ 时, 据已知条件得

$$A^{-1}(j;i) = -A^{\cdot} \cdot (j;i) = -A_{ij} = A(i;j) = A'(j;i),$$

其中 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. 因此 $A^{-1} = A'$. 从而 A 是正交矩阵.

问题 1.195 设 U 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间. 令

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_U: \quad \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ \boldsymbol{\alpha} &\longmapsto \boldsymbol{\alpha}_1, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in U$, 并且 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1 \in U^{\perp}$, 则称 $\mathcal{P}_U$ 是 $\mathbf{R}^n$ 在 U 上的正交投影, 把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影. 证明: 对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}_1 \in U$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影当且仅当

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|, \ \forall \boldsymbol{\gamma} \in U.$$

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in U$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影, 则 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1 \in U^{\perp}$. 从而 $\forall \boldsymbol{\gamma} \in U$, 有

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1) \perp (\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}).$$

于是

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}|^2 = (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1) - 2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}) \\ &= |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 + |\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}|^2 \geqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 \\ &|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}| \geqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|. \end{aligned}$$

从而

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}| \geqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|$$

充分性. 设 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}| \quad \forall \boldsymbol{\gamma} \in U.$
假设 $\boldsymbol{\delta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影, 则根据刚才证得的必要性得, $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|$. 从而

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}| = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta} \in U^{\perp}$, $\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1 \in U$, 因此 $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}) \perp (\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1)$. 同上理, 得

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}|^2 + |\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2.$$

由此得出, $|\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 = 0$. 因此 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha}_1$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影.

问题 1.196 设 A 是实数域上的一个 $m\times n$ 矩阵, $m>n$, $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^m$. 如果 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$ $|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}_0|^2\leqslant|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}|^2, \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$, 那么称 $\boldsymbol{X}_0$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘解. 证明: $\boldsymbol{X}_0 A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘解当且仅当 $\boldsymbol{X}_0$ 是线性方程组

$$A'A\boldsymbol{X}=A'\boldsymbol{\beta}$$

的解.

证明 用 U 表示矩阵 A 的列空间, $U=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\rangle$, 则 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘解 $\Longleftrightarrow|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}_0|^2\leqslant|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}|^2, \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}_0|\leqslant|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}|,\ \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n\\
&\Longleftrightarrow|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}_0|\leqslant|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|,\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in U\\
&\Longleftrightarrow A\boldsymbol{X}_0\ \text{是}\boldsymbol{\beta}\ \text{在}U\ \text{上的正交投影}\\
&\Longleftrightarrow\boldsymbol{\beta}-A\mathbf{X}_0\in U^{\perp}\\
&\Longleftrightarrow(\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}_0,\ \boldsymbol{\alpha}_i)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\
&\Longleftrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_i}'(\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}_0)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\
&\Longleftrightarrow A'(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A}\mathbf{X}_0)=0\\
&\Longleftrightarrow A'A\boldsymbol{X}_0=A'\boldsymbol{\beta}\\
&\Longleftrightarrow\boldsymbol{X}_0\ \text{是}A'A\boldsymbol{X}=A'\boldsymbol{\beta}\ \text{的解}.
\end{aligned}$$

问题 1.197 设 A 是实数域上 $m\times n$ 列满秩矩阵, $m>n$. A 的列空间记作 U. 记 $\mathcal{P}_A=A\left(A'A\right)^{-1}A'$. 令

$$\mathcal{P}_A(\boldsymbol{X})=P_A\boldsymbol{X},\ \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^m.$$

证明:$\mathcal{P}_A$ 是 $\mathbf{R}^m$ 在 U 上的正交投影.

证明 设 A 的列向量组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$. 任取 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^m$. 先证 $\mathcal{P}_A\boldsymbol{X}\in U$. 由于 $\left(A'A\right)^{-1}A'\mathbf{X}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, 因此可设 $\left(A'A\right)^{-1}A'\boldsymbol{X}=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)'$. 从而

$$\begin{aligned}P_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}=A\left(A'A\right)^{-1}A'\boldsymbol{X}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\\&=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n\in U.\end{aligned}$$

再证 $\boldsymbol{X}-\mathcal{P}_A\boldsymbol{X}\in U^{\perp}$, 即要证 $\left(I-\mathcal{P}_A\right)\boldsymbol{X}\in U^{\perp}$. 由于

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1{}'\\\boldsymbol{\alpha}_2{}'\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n{}'\end{pmatrix}\left(I-\mathcal{P}_A\right)\boldsymbol{X}&=A'\left[I-A\left(A'A\right)^{-1}A'\right]\boldsymbol{X}\\&=\left[A'-A'A\left(A'A\right)^{-1}A'\right]\boldsymbol{X}=0\mathbf{X}=0,\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_j{}'\left(I-\mathcal{P}_A\right)\boldsymbol{X}=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 从而 $\left(I-\mathcal{P}_A\right)\boldsymbol{X}\in U^{\perp}$.

综上所述, $\mathcal{P}_A$ 是 $\mathbf{R}^n$ 在 U 上的正交投影.

问题 1.198 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵, 证明: A 的秩为 r 当且仅当存在数域 K 上 $s\times r$ 列满秩矩阵 B 与 $r\times n$ 行满秩矩阵 C, 使得 $A=BC$.

证明 必要性. 设 A 的秩为 r, 则存在数域 K 上 s 级, n 级可逆矩阵 P, Q, 使得

$$\begin{aligned} A&=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=(P_1,\ P_2)\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}^{\gamma}\\ &=(P_1,\ 0)\begin{pmatrix} Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}=P_1Q_1\end{aligned}$$

由于 P 是可逆矩阵, 因此 P 的列向量组线性无关. 从而 P_1 的列向量组线性无关. 于是 $\operatorname{rank}(P_1)=r$, 即 P_1 是 $s\times r$ 列满秩矩阵. 类似地可证 $\operatorname{rank}(Q_1)=r$, 因此 Q_1 是 $r\times n$ 行满秩矩阵. 令 $B=P_1$, $C=Q_1$, 即得 $A=BC$.

充分性. 设 $A=BC$, 其中 B 是 $s\times r$ 列满秩矩阵, C 是 $r\times n$ 行满秩矩阵. 由于

$$\operatorname{rank}(BC)\leqslant\operatorname{rank}(B)=r,$$

$$\operatorname{rank}(BC)\geqslant\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(C)-r=r,$$

因此 $\operatorname{rank}(BC)=r$, 即 $\operatorname{rank}(A)=r$.

问题 1.199 设 B_1, B_2 都是数域 K 上 $s \times r$ 列满秩矩阵, 证明: 存在数域 K 上 s 级可逆矩阵 P, 使得

$$B_2 = PB_1.$$

证明 由于 B_1 是 $s \times r$ 列满秩矩阵, 因此

$$B_1 \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

从而存在 s 级可逆矩阵 P_1, 使得

$$P_1 B_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

同理, 存在 s 级可逆矩阵 P_2, 使得从而

$$P_2 B_2 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $B_1 = \left(P_1^{-1} P_2\right) B_2$. 令 $P = P_1^{-1} P_2$, 则 P 是 s 级可逆矩阵, 使得 $B_1 = PB_2$.

问题 1.200 设 A 是实数域上的 n 级对称矩阵, 且 A 的秩为 $r(r>0)$. 证明:

(1) A 至少有一个 r 阶主子式不为 0;

(2) A 的所有不等于 0 的 r 阶主子式都同号.

证明 (1) 设 A 的行向量组为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, 则 A' 的列向量组是 $\gamma'_11, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_n$. 由于 $A'=A$, 因此 A 的列向量组为 $\gamma_11, \gamma_{\gamma'}, \cdots, \gamma'_n$. 取 A 的行向量组的一个极大线性无关组 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \cdots, \gamma_{i_r}$, 则 $\gamma_{i_1}', \gamma_{i_2}', \cdots, \gamma_{i_r}'$ 是 A 的列向量组的一个极大线性无关组. 有

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ i_1, i_2, \cdots, i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

(2) 由于 $\operatorname{rank}(A)=r$, 因此存在 n 级可逆矩阵 P, Q, 使

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

由于 $A'=A$, 因此

$$Q'\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P'=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

从而

$$P^{-1}Q'\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q\left(P'\right)^{-1}.$$

代入得

$$P^{-1}Q'=\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ H_3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_1' & H'_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由上式得,

$$H'_1=H_1,\ H_3=0.$$

从而

$$Q'=P\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & H_4 \end{pmatrix}$$

于是

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {H_1}' & 0 \\ {H_2}' & {H_4}' \end{pmatrix}P'=P\left[\begin{pmatrix} {H_1}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P'\right]$$

因此 $r=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} {H_1}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\left({H_1}'\right)=\operatorname{rank}\left(H_1\right)$. 从而 H_1 是可逆的 r 级对称矩

阵. 对于矩阵 A 的分解式可得

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \end{pmatrix} &= \sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_r\leqslant n} P\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \\ u_1, & v_2, & \cdots, & v_r \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} {H_1}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P'\right]\begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \cdots, & v_r \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_r\leqslant n} P\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \\ v_1, & v_2, & \cdots, & v_r \end{pmatrix} \sum_{1\leqslant \mu_1<\cdots<\mu_r\leqslant n} \begin{pmatrix} {H_1}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \cdots, & v_r \\ \mu_1, & \mu_2, & \cdots, & \mu_r \end{pmatrix} P' \left(\begin{matrix} \mu_1, & \mu_2, & \cdots, \\ k_1, & k_2, & \cdots, \end{matrix}\right. \\
&= \sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_r\leqslant n} P\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \\ v_1, & v_2, & \cdots, & v_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {H_1}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1, & v_2, & \cdots, & v_r \\ 1, & 2, & \cdots, & r \end{pmatrix} P'\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & r \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \\ 1, & 2, & \cdots, & r \end{pmatrix} |{H_1}'|\, P'\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & r \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \end{pmatrix} \\
&= \left[P\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \cdots, & k_r \\ 1, & 2, & \cdots, & r \end{pmatrix}\right]^2 |H_1'|
\end{aligned}
$$

由上式看出, A 的任一不等于 0 的 r 阶主子式都与 $|{H_1}'|$ 同号.

问题 1.201 设 A, B 分别是 $s\times n$, $n\times m$ 矩阵, 证明: $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n$ 充分必要条件是

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

证明 作分块矩阵的初等行 (列) 变换:

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{(1+A\cdot(2)} \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)+(2)(-B)]{} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(1),\,(2)]{} \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & -B \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)(-I_n)]{} \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n \\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{rank}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow\ &\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

问题 1.202 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 非零矩阵, 则矩阵方程

$$AXA=A$$

一定有解. 如果 $\operatorname{rank}(A)=r$, 并且

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, \tag{1.62}$$

其中 P, Q 分别是 K 上 s 级, n 级可逆矩阵, 那么矩阵方程的通解为

$$X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}.$$

其中 B, C, D 分别是数域 K 上任意的 $r\times(s-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(s-r)$ 矩阵.

证明 如果 $X=G$ 是矩阵方程的一个解, 则

$$AGA=A.$$

把 (1.62) 式代入上式, 得

$$P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QGP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, \tag{1.63}$$

上式两边左乘 P^{-1}, 右乘 Q^{-1}, 得

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QGP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.64}$$

把 QGP 写成分块矩阵的形式:

$$QGP=\begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.65}$$

代入 (1.64) 式得

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此得出, $H=I_r$. 于是从 (1.65) 式推出

$$G=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}. \tag{1.66}$$

下面我们来证: 对于任意的 $r\times(s-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(s-r)$ 矩阵 B, C, D, 由 (1.66) 式

给出的 G 确实是矩阵方程 $AXA=A$ 的解. 用 G 代替 X 后, 方程的左边为

$$\begin{aligned}AGA &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q \\ &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q \\ &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q = A.\end{aligned}$$

而矩阵方程的右边也是 A, 因此 G 是矩阵方程的解. 这样就证明了矩阵方程 $AXA=X$ 一定有解, 并且求出了它的通解的形式.

定义 1.5

设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵, 矩阵方程 $AXA=A$ 的每一个解都称为 A 的一个广义逆矩阵, 简称为 A 的广义逆, 用 A^- 表示 A 的任意一个广义逆. ♣

定理 1.6

(非齐次线性方程组的解的结构定理) 非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时, 它的通解为

$$\boldsymbol{X}=A^-\boldsymbol{\beta}.$$

♡

证明 设 γ 是 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解, 则 $A\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q,$$

其中 P, Q 分别是数域 K 上 s 级 , n 级可逆矩阵. 则

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q\gamma}=P^{-1}\boldsymbol{\beta}. \tag{1.67}$$

为了求 γ 的表达式, 先求 $Q\gamma$ 的表达式. 把 $Q\gamma$, $P^{-1}\boldsymbol{\beta}$ 写成分块矩阵的形式:

$$Q\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2\end{pmatrix},\quad P^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2\end{pmatrix}.$$

代人 (1.67) 式得

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2\end{pmatrix}.$$

由此得出, $\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{Z}_1$, $\mathbf{0}=\boldsymbol{Z}_2$. 还需要写出 Y_2 的表达式. 由于 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 因此 $P^{-1}\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{Z}_1\neq\mathbf{0}$. 设 $\boldsymbol{Z}_1=(k_1,\cdots,k_r)'$, 其中 $k_i\neq 0$. 在 A^- 的表达式中, 取 C 为

$$C=\left(0,\cdots,0,k_i^{-1}\mathbf{Y}_2,0,\cdots,0\right). \tag{1.68}$$

则

$$
\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}_1=\left(\mathbf{0},\ \cdots,\ \mathbf{0},\ k_i^{-1}\boldsymbol{Y}_2,\ \mathbf{0},\ \cdots,\ \mathbf{0}\right)\begin{pmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_i\\ \vdots\\ k_r \end{pmatrix}=\boldsymbol{Y}_2.
$$

于是

$$
\boldsymbol{Q}\gamma=\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1\\ C\boldsymbol{Z}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1\\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
$$

由此得出

$$
\boldsymbol{\gamma}=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1\\ \mathbf{0} \end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ C & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\boldsymbol{\beta}=A^{-}\boldsymbol{\beta},
$$

其中 A^{-} 的表达式中, $B=0,\ D=0,\ C$ 由 (1.68) 式给出. 这证明了线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以写出

$$
\boldsymbol{\gamma}=A^{-}\boldsymbol{\beta}.
$$

反之, 对于任意的 A^{-}, 由于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解, 得, $\boldsymbol{\beta}=AA^{-}\boldsymbol{\beta}$, 因此 $A^{-}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解. 综上所述得, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时, 它的通解是

$$
\boldsymbol{X}=A^{-}\boldsymbol{\beta}.
$$

其中 A^{-} 是 A 的任意一个广义逆.

定义 1.6

设 A 是复数域上 $s\times n$ 矩阵, 矩阵方程组

$$
\begin{cases} AXA=A,\\ XAX=X,\\ (AX)^{*}=AX,\\ (XA)^{*}=XA, \end{cases}
$$

称为 A 的 Penrose 方程组, 它的解称为 A 的 Moore-Penrose 广义逆, 记作 A^{+}. 方程组中 $(AX)^{*}$ 表示把 AX 的每个元素取共轭复数得到的矩阵再转置.

定理 1.7

如果 A 是复数域上 $s\times n$ 非零矩阵, A 的 Penrose 方程组总是有解, 并且它的解唯一. 设 $A=BC$, 其中 B, C 分别是列满秩与行满秩矩阵, 则 Penrose 方程组的唯一解是

$$
X=C^{*}\left(CC^{*}\right)^{-1}\left(B^{*}B\right)^{-1}B^{*}. \tag{1.69}
$$

证明 把 (1.69) 式代入 Penrose 方程组的每一个方程, 验证每一个方程都变成恒等式:

$$\begin{aligned} AXA &= (BC)C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^*(BC) = BC = A, \\ XAX &= C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^*(BC)C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^* \\ &= C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^* = X, \\ (AX)^* &= X^*A^* = B\left(B^*B\right)^{-1}\left(CC^*\right)^{-1}CC^*B^* \\ &= B\left(B^*B\right)^{-1}B^* = B\left(CC^*\right)\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^* = AX, \\ (XA)^* &= A^*X^* = C^*B^*B\left(B^*B\right)^{-1}\left(CC^*\right)^{-1}C \\ &= C^*\left(CC^*\right)^{-1}C = C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}\left(B^*B\right)C = XA. \end{aligned}$$

因此 (1.69) 式的确是 Penrose 方程组的解. 下面证解的唯一性. 设 X_1 和 X_2 都是 Penrose 方程组的解. 则

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1AX_1 = X_1\left(AX_2A\right)X_1 = X_1\left(AX_2\right)\left(AX_1\right) \\ &= X_1\left(AX_2\right)^*\left(AX_1\right)^* = X_1\left(AX_1AX_2\right)^* = X_1X_2^*\left(AX_1A\right)^* \\ &= X_1X_2^*A^* = X_1\left(AX_2\right)^* = X_1AX_2 = X_1\left(AX_2A\right)X_2 \\ &= \left(X_1A\right)\left(X_2A\right)X_2 = \left(X_1A\right)^*\left(X_2A\right)^*X_2 = \left(X_2AX_1A\right)^*X_2 \\ &= \left(X_2A\right)^*X_2 = X_2AX_2 = X_2. \end{aligned}$$

这证明了 Penrose 方程组的解的唯一性.

设 X_0 是零矩阵的 Moore-Penrose 广义逆, 则

$$X_0 = X_0 0 X_0 = 0.$$

问题 1.203 设 A, B 分别是数域 K 上 $s \times n$, $s \times m$ 非零矩阵, 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是

$$B = AA^{-}B,$$

在有解时, 它的通解为

$$X = A^{-}B + \left(I_n - A^{-}A\right)W,$$

其中 W 是任意 $n \times m$ 矩阵, A^{-} 是 A 的任意取定的一个广义逆.

证明 必要性. 设 $AX = B$ 有解 $X = G$, 则 $AG = B$. 因为 $A = AA^{-}A$, 所以

$$B = AG = AA^{-}AG = AA^{-}B.$$

充分性. 设 $B = AA^{-}B$, 则 $A^{-}B$ 是 $AX = B$ 的解. 任意取定 A 的一个广义逆 A^{-}, 则对于任意 $n \times m$ 矩阵 W, 有

$$A\left(I_n - A^{-}A\right)W = \left(A - AA^{-}A\right)W = (A - A)W = 0.$$

因此 $(I_n - A^{-}A)W$ 是 $AX = 0$ 的解.

反之, 设 H 是 $AX = 0$ 的解, 则

$$\left(I_n - A^{-}A\right)H = H - A^{-}AH = H.$$

综上所述, $(I_n - A^{-}A)W$ 是 $AX = 0$ 的通解. 于是 $A^{-}B + (I_n - A^{-}A)W$ 是 $AX = B$ 的通解.

问题 1.204 设 A, B 分别是数域 K 上 $s\times n$, $n\times s$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(A-ABA)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}\left(I_n-BA\right)-n.$$

证明 据 Sylvester 秩不等式得

$$\operatorname{rank}(A-ABA)=\operatorname{rank}\left[A\left(I_n-BA\right)\right]\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}\left(I_n-BA\right)-n.$$

下面只要证:$\operatorname{rank}(A-ABA)+n\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}\left(I_n-BA\right)$.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n-BA \end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+B\cdot(1)}\begin{pmatrix} A & 0 \\ BA & I_n-BA \end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(1)}$$
$$\begin{pmatrix} A & A \\ BA & I_n \end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+(-A)\cdot(2)}\begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ BA & I_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}\left(I_n-BA\right)&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n-BA \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ BA & I_n \end{pmatrix}\\ &\geqslant\operatorname{rank}(A-ABA)+\operatorname{rank}\left(I_n\right)\\ &=\operatorname{rank}(A-ABA)+n.\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{rank}(A-ABA)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}\left(I_n-BA\right)-n.$$

问题 1.205 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵, 证明: B 是 A 的一个广义逆的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}\left(I_n-BA\right)=n.$$

证明 由上题的结论立即得到

$$\begin{aligned}B\text{ 是}A\text{ 的一个广义逆}&\Longleftrightarrow ABA=A\\ &\Longleftrightarrow\operatorname{rank}(A-ABA)=0\\ &\Longleftrightarrow\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}\left(I_n-BA\right)=n.\end{aligned}$$

问题 1.206 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 非零矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}\left(A^{-}A\right)=\operatorname{rank}(A).$$

证明 设 $\operatorname{rank}(A)=r$, 则存在 s 级 , n 级可逆矩阵 P, Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q.$$

从而

$$A^{-}=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B\\ C & D\end{pmatrix}P^{-1}.$$

于是

$$A^{-}A=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B\\ C & D\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ C & 0\end{pmatrix}Q.$$

因此

$$\operatorname{rank}\left(A^{-}A\right)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ C & 0\end{pmatrix}\geqslant\operatorname{rank}\left(I_r\right)=r.$$

又有

$$\operatorname{rank}(A^{-}A)\leqslant\operatorname{rank}(A)=r.$$

从而

$$\operatorname{rank}\left(A^{-}A\right)=r=\operatorname{rank}(A).$$

问题 1.207 设 $A,\ B,\ C$ 分别是数域 K 上 $s\times n,\ l\times m,\ s\times m$ 非零矩阵, 证明: 存在 A 的一个广义逆 A^- 和 B 的一个广义逆 B^-, 使得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}\left[\left(I_s-AA^-\right)C\left(I_m-B^-B\right)\right].$$

证明 设 $\operatorname{rank}(A)=r,\ \operatorname{rank}(B)=t$. 则

$$A=P_1\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1,\quad B=P_2\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_2,$$

其中 $P_1,\ Q_1,\ P_2,\ Q_2$ 分别是 s 级，n 级，l 级，m 级可逆矩阵. 于是

$$A^-=Q_1^{-1}\begin{pmatrix} I_r & G_1 \\ H_1 & D_1 \end{pmatrix}P_1^{-1},\quad B^-=Q_2^{-1}\begin{pmatrix} I_t & G_2 \\ H_2 & D_2 \end{pmatrix}P_2^{-1}.$$

取 $G_1=0,\ H_2=0$, 则

$$AA^-=P_1\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P_1^{-1},\quad B^-B=Q_z^{-1}\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_z.$$

$$\left(I_s-AA^-\right)C\left(I_m-B^-B\right)=\left[I_s-P_1\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P_1^{-1}\right]C\left[I_m-Q_2^{-1}\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_2\right]$$

$$=P_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{s-r} \end{pmatrix}P_1^{-1}CQ_2^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix}Q_2.$$

令

$$P_1^{-1}CQ_2^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

则

$$\left(I_s-AA^-\right)C\left(I_m-B^-B\right)=P_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}Q_2.$$

于是

$$\operatorname{rank}\left[\left(I_s-AA^-\right)C\left(I_m-B^-B\right)\right]=\operatorname{rank}\left(C_4\right),$$

$$\begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{分块矩阵的初等行 (列) 变换}}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=r+t+\operatorname{rank}\left(C_4\right)$$

$$=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}\left[\left(I_s-AA^-\right)C\left(I_m-B^-B\right)\right].$$

问题 1.208 证明: 如果数域 K 上的 n 级矩阵 A, B 满足 $AB-BA=A$, 那么 A 不可逆.

证明 假如 A 可逆, 则在 $AB-BA=A$ 两边左乘 A^{-1}, 得

$$B-A^{-1}BA=I.$$

于是 $\operatorname{tr}\left(B-A^{-1}BA\right)=\operatorname{tr}(I)=n$. 又有

$$\operatorname{tr}\left(B-A^{-1}BA\right)=\operatorname{tr}(B)-\operatorname{tr}\left(A^{-1}BA\right)=\operatorname{tr}(B)-\operatorname{tr}(B)=0,$$

矛盾. 因此 A 不可逆.

问题 1.209 证明: 如果实数域上的 n 级矩阵 A 与 B 不相似, 那么把它们看成复数域上的矩阵后仍然不相似.

证明 假如把 A 与 B 看成复数域上的矩阵后它们相似, 则存在复数域上的 n 级可逆矩阵 U, 使得 $U^{-1}AU=B$. 设 $U=P+\mathrm{i}Q$, 其中 P, Q 都是实数域上的矩阵. 想构造一个实数域上的 n 级可逆矩阵. 为此任给实数 t, 考虑行列式 $|P+tQ|$, 它是 t 的至多 n 次的多项式. 由于数域 K 上的 n 次多项式在 K 中至多有 n 个根, 因此存在实数 t_0, 使得 $|P+t_0Q|\neq 0$. 令 $S=P+t_0Q$, 则 S 是实数域上的 n 级可逆矩阵. 由于 $U^{-1}AU=B$, 因此 $AU=UB$. 从而

$$A(P+\mathrm{i}Q)=(P+\mathrm{i}Q)B.$$

由此得出，$AP=PB$, $AQ=QB$. 因此

$$AS=A\left(P+t_0Q\right)=AP+t_0AQ=PB+t_0QB=SB.$$

于是 $S^{-1}AS=B$. 这表明实矩阵 A 与 B 相似, 与已知条件矛盾.

命题 1.2

设 λ_1 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的一个特征值, 则 λ_1 的几何重数不超过它的代数重数. ♠

证明 设 A 的属于特征值 λ_1 的特征子空间 W_1 的维数为 r. 在 W_1 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_r, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, 把它扩充为 K^n 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-r}$. 令

$$P=\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-r}\right),$$

则 P 是 K 上的 n 级可逆矩阵, 并且有

$$\begin{aligned}
&P^{-1}AP=P^{-1}\left(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, A\boldsymbol{\alpha}_r, A\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right)\\
&=\left(\lambda_1P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1, \lambda_1P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \lambda_1P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right).\\
&I=P^{-1}P=\left(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1, P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r, P^{-1}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, P^{-1}\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right),\\
&\boldsymbol{\varepsilon}_1=P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2=P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r=P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r.\\
&P^{-1}AP=\left(\lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_1, \lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_r, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right)\\
&=\begin{pmatrix}\lambda_1I_r & B\\ 0 & C\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

由于相似的矩阵有相等的特征多项式, 因此

$$\begin{aligned}
|\lambda I-A|&=\begin{vmatrix}\lambda I_r-\lambda_1I_r & -B\\ 0 & \lambda I_{n-r}-C\end{vmatrix}\\
&=\left|\lambda I_r-\lambda_1I_r\right|\left|\lambda I_{n-r}-C\right|\\
&=\left(\lambda-\lambda_1\right)^r\left|\lambda I_{n-r}-C\right|.
\end{aligned}$$

从而 λ_1 的代数重数大于或等于 r, 即 λ_1 的代数重数大于或等于 λ_1 的几何重数.

问题 1.210 证明: 幂零矩阵一定有特征值, 并且它的特征值一定是 0.

证明 设 A 是数域 K 上的 n 级幂零矩阵, 其幂零指数为 l. 则 $A^l = 0$. 于是 $|A|^l = 0$. 从而 $|A| = 0$. 因此得出

$$|0I - A| = |-A| = (-1)^n|A| = 0.$$

因此 0 是 A 的一个特征值.

设 λ_1 是 A 的一个特征值. 则存在 $\boldsymbol{\alpha} \in K^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, 使得 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}$. 两边左乘 A 得, $A^2\boldsymbol{\alpha} = A(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_1(A\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}$. 继续这个过程, 可得到 $A^l\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1^l\boldsymbol{\alpha}$. 由于 $A^l = 0$, 因此 $\lambda_1^l\boldsymbol{\alpha} = 0$. 由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, 因此 $\lambda_1^l = 0$. 从而 $\lambda_1 = 0$.

问题 1.211 证明: 幂等矩阵一定有特征值, 并且它的特征值是 1 或者 0.

证明 设 A 是数域 K 上的 n 级幂等矩阵. 如果 λ_0 是 A 的特征值, 那么有 $\boldsymbol{\alpha} \in K^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, 使得 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 两边左乘 A, 得 $A^2\boldsymbol{\alpha} = A\lambda_0\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0^2\boldsymbol{\alpha}$. 由于 $A^2 = A$, 因此 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0^2\boldsymbol{\alpha}$. 于是 $\lambda_0\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0^2\boldsymbol{\alpha}$. 从而 $\left(\lambda_0 - \lambda_0^2\right)\boldsymbol{\alpha} = 0$. 由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, 因此 $\lambda_0 - \lambda_0^2 = 0$. 由此推出 $\lambda_0 = 0$ 或 $\lambda_0 = 1$. 设 $\operatorname{rank}(A) = r$. 若 $r = 0$, 则 $A = 0$, 此时 0 是 A 的特征值, 1 不是 A 的特征值. 若 $r = n$, 则 $A = I$, 此时 1 是 A 的特征值, 但 0 不是 A 的特征值. 若 $0 < r < n$, 则 A 不满秩, 从而 $|A| = 0$, 因此 $|0I - A| = |-A| = (-1)^n|A| = 0$. 于是 0 是 A 的一个特征值. 由于 A 是幂等矩阵, $\operatorname{rank}(I - A) = n - \operatorname{rank}(A) < n$. 从而 $|I - A| = 0$, 于是 1 也是 A 的一个特征值.

问题 1.212 设 A 是数域 K 上的 n 级可逆矩阵, 证明:

(1) 如果 A 有特征值, 那么 A 的特征值不等于 0;

(2) 如果 λ_0 是 A 的一个 l 重特征值, 那么 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的一个 l 重特征值.

证明 (1) 由于 A 是 n 级可逆矩阵, 因此

$$|0I-A|=|-A|=(-1)^n|A|\neq 0.$$

从而 0 不是 A 的特征值. 这表明: 如果 A 有特征值, 那么 A 的特征值不等于 0.

(2) 设 λ_0 是 A 的一个 l 重特征值, 则 λ_0 是 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 的一个 l 重根, 于是有

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_0)^t g(\lambda),$$

其中 $g(\lambda)$ 是 $n-\lambda$ 次多项式, 且 $g(\lambda)$ 不含因式 $(\lambda-\lambda_0)$. 把 $g(\lambda)$ 在复数域中因式分解, 则上式成为

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_0)^t(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{\prime m},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是两两不等的复数, 且它们都不等于 λ_0, $l_1+\cdots+l_m=n-l$. λ 用 $\frac{1}{\lambda}$ 代人, 上式的左端展开成 λ 的多项式后, 从上式得

$$\left|\frac{1}{\lambda}I-A\right|=\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda_0\right)^{\prime}\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda_1\right)^{t_1}\cdots\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda_m\right)^{2}.$$

从而 A^{-1} 的特征多项式 $\left|\lambda I-A^{-1}\right|$ 为

$$\begin{aligned}\left|\lambda I-A^{-1}\right|&=\left|A^{-1}(-\lambda)\left(\frac{1}{\lambda}I-A\right)\right|=(-1)^n\lambda^n\left|A^{-1}\right|\left|\frac{1}{\lambda}I-A\right|\\&=(-1)^n\lambda^n\left|A^{-1}\right|\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda_0\right)^{\prime}\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda_1\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda_m\right)^{t_m}\\&=\left|A^{-1}\right|(-1+\lambda_0\lambda)^t(-1+\lambda_1\lambda)^{t_1}\cdots(-1+\lambda_m\lambda)^{t_m}\\&=\left|A^{-1}\right|\lambda_0^{\prime}\lambda_1^{\lambda_1}\cdots\lambda_m^{\prime}m\left(\lambda-\frac{1}{\lambda_0}\right)^t\left(\lambda-\frac{1}{\lambda_1}\right)^{t_1}\cdots\left(\lambda-\frac{1}{\lambda_m}\right)^{l_m}.\end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的特征多项式的 l 重根. 从而 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的 l 重特征值.

问题 1.213 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵, 证明: 如果 λ_0 是 A 的 l 重特征值, 那么 λ_0^2 是 A^2 的至少 l 重特征值.

证明 设 λ_0 是 A 的 l 重特征值, 则

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_0)^l\,g(\lambda),$$

其中 $g(\lambda)$ 是 $n-l$ 次多项式, 且 $g(\lambda)$ 不含因式 $(\lambda-\lambda_0)$. 把 $g(\lambda)$ 在复数域中因式分解, 则上式成为

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_0)^l\,(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{l_m}\,, \tag{1.70}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是两两不等的复数, 且它们都不等于 λ_0, $l_1+\cdots+l_m=n-l$. λ 用 $-\lambda$ 代人, 把 (1.70) 式左端展开成 λ 的多项式后, 从 (1.70) 式得

$$|-\lambda I-A|=(-\lambda-\lambda_0)^l\,(-\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(-\lambda-\lambda_m)^{l_m}\,,$$

于是有

$$|\lambda I+A|=(\lambda+\lambda_0)^l\,(\lambda+\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda+\lambda_m)^{l_m}\,. \tag{1.71}$$

把 (1.70) 式与 (1.71) 式相乘, 得

$$\left|\lambda^2I-A^2\right|=\left(\lambda^2-\lambda_0^2\right)^l\left(\lambda^2-\lambda_1^2\right)^{l_1}\cdots\left(\lambda_2-\lambda_m^2\right)^{l_m}.$$

λ^2 用 λ 代人, 把上式左端展开成 λ 的多项式后, 从上式得

$$\left|\lambda I-A^2\right|=\left(\lambda-\lambda_0^2\right)^l\left(\lambda-\lambda_1^2\right)^{l_1}\cdots\left(\lambda-\lambda_m^2\right)^{l_m}.$$

从上式看出 , λ_0^2 是 A^2 的特征多项式 $\left|\lambda I-A^2\right|$ 的至少 l 重根, 从而 λ_0^2 是 A^2 的至少 l 重特征值.

问题 1.214 设 A 是一个 n 级正交矩阵, 证明:
(1) 如果 A 有特征值, 那么它的特征值是 1 或 -1;
(2) 如果 $|A|=-1$, 那么 -1 是 A 的一个特征值;
(3) 如果 $|A|=1$, 且 n 是奇数, 那么 1 是 A 的一个特征值.

证明 (1) 如果 λ_0 是正交矩阵 A 的一个特征值, 那么在 $\mathbf{R}^n$ 中存在 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 使得 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 此式两边取转置得, $\boldsymbol{\alpha}'A'=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'$. 把这两个式子相乘, 得

$$\left(\boldsymbol{\alpha}'A'\right)(A\boldsymbol{\alpha})=\left(\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'\right)(\lambda_0\boldsymbol{\alpha}).$$

由此得出, $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0^2\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}$, 即 $\left(\lambda_0^2-1\right)\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}=0$, 由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}\neq 0$. 从而 $\lambda_0^2-1=0$. 于是 $\lambda_0=\pm1$.
(2) 如果正交矩阵 A 的行列式 $|A|=-1$, 那么

$$|-I-A|=\left|A\left(-A'-I\right)\right|=|A|\left|(-A-I)'\right|=-|-I-A|.$$

于是 $2|-I-A|=0$. 从而 $|-I-A|=0$. 因此 -1 是 A 的一个特征值.
(3) 如果 $|A|=1$, 且 n 是奇数, 那么

$$|I-A|=\left|A\left(A'-I\right)\right|=|A|\left|-(I-A)'\right|=(-1)^n|I-A|=-|I-A|.$$

于是 $2|I-A|=0$. 从而 $|I-A|=0$. 因此 1 是 A 的一个特征值.

问题 1.215 设 A, B 分别是数域 K 上 $s\times n$, $n\times s$ 矩阵. 证明:
(1) AB 与 BA 有相同的非零特征值, 并且重数相同;
(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 AB 的属于非零特征值 λ_0 的一个特征向量, 那么 $B\boldsymbol{\alpha}$ 是 BA 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

证明 (1)

$$\begin{aligned}\lambda^n\left|\lambda I_s-AB\right|&=\lambda^n\left|\lambda\left(I_s-\frac{1}{\lambda}AB\right)\right|=\lambda^n\lambda^s\left|I_s-\left(\frac{1}{\lambda}A\right)B\right|\\&=\lambda^n\lambda^s\left|I_n-B\left(\frac{1}{\lambda}A\right)\right|=\lambda^s\left|\lambda I_n-BA\right|.\end{aligned}\tag{1.72}$$

因此得出, K 中的非零数 λ_0 是 AB 的特征值当且仅当 λ_0 是 BA 的特征值. 从而 AB 与 BA 有相同的非零特征值. 设 $\lambda_0\neq 0$ 是 AB 的 l 重特征值, 把 AB 的特征多项式 $|\lambda I_s-AB|$ 在复数域中因式分解, 得

$$\left|\lambda I_s-AB\right|=\left(\lambda-\lambda_0\right)^l\left(\lambda-\lambda_1\right)^{l_1}\cdots\left(\lambda-\lambda_{s-1}\right)^{l_{s-1}},\tag{1.73}$$

其中 λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_{s-1}, $l+l_1+\cdots+l_{s-1}=s$. 把 (1.73) 式代入 (1.72) 式, 得

$$\lambda^n\left(\lambda-\lambda_0\right)^l\left(\lambda-\lambda_1\right)^{l_1}\cdots\left(\lambda-\lambda_{s-1}\right)^{t_{s-1}}=\lambda^s\left|\lambda I_n-BA\right|.$$

由此得出, λ_0 是 BA 的特征多项式 $|\lambda I_n-BA|$ 的 l 重根, 因此 λ_0 是 BA 的 l 重特征值. 同理, 若 $\lambda_0\neq 0$ 是 BA 的 l 重特征值, 则 λ_0 也是 AB 的 l 重特征值.
(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 AB 的属于非零特征值 λ_0 的一个特征向量, 则 $(AB)\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 此式两边左乘 B, 得

$$(BA)(B\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0(B\boldsymbol{\alpha}).$$

假如 $B\boldsymbol{\alpha}=0$, 则 $\lambda_0\boldsymbol{\alpha}=(AB)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 这与 $\lambda_0\neq 0$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ 矛盾. 因此 $B\boldsymbol{\alpha}\neq 0$.(1.73) 式表明 $B\boldsymbol{\alpha}$ 是 BA 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

问题 1.216 用 J 表示元素全为 1 的 n 级矩阵. 求数域 K 上 n 级矩阵 J 的全部特征值和特征向量.

解 $J=\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'$, 其中 $\mathbf{1}_n$ 表示元素全为 1 的 n 维列向量. 据上题的结论, J 与 $\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n=(n)$ 有相同的非零特征值. 由于 1 级矩阵 (n) 的特征值只有一个: n, 且它的重数为 1, 因此 J 的非零特征值只有一个: n, 且它的重数为 1. 由于 (1) 是 (n) 的属于 n 的一个特征向量, 因此, $\mathbf{1}_n(1)=\mathbf{1}_n$ 是 J 的属于 n 的一个特征向量. 由于 J 的特征值 n 的几何重数不超过它的代数重数 1, 因此 J 的属于 n 的特征子空间的维数为 1. 从而 J 的属于 n 的所有特征向量组成的集合是

$$\{k\mathbf{1}_n \mid k\in K \text{ 且} k\neq 0\}.$$

由于 $|J|=0$, 因此 0 是 J 的一个特征值. 显然 J 的秩为 1, 因此齐次线性方程组 $(0I-A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数等于 $n-1$. 容易求出这个方程组的一般解为

$$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n,$$

其中 $x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 是自由未知量. 于是它的一个基础解系是

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

从而 J 的属于特征值 0 的所有特征向量组成的集合是

$$\left\{k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1} \mid k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-1}\in K, \text{且它们不全为}0\right\}.$$

问题 1.217 求复数域上 n 级循环移位矩阵 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\ \boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1})$ 的全部特征值和特征向量.

解 C 的特征多项式 $|\lambda I-C|$ 为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$
$$=\lambda^n-1.$$

于是 n 级循环移位矩阵 C 的全部特征值是 $1,\ \xi,\ \cdots,\ \xi^{n-1}$, 其中 $\xi=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}$. 对于非负整数 $m(0\leqslant m<n)$, 有

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^m \\ \xi^{2m} \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^m \\ \xi^{2m} \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)m} \\ 1 \end{pmatrix} = \xi^m \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^m \\ \vdots \\ \xi^{(n-2)m} \\ \xi^{(n-1)m} \end{pmatrix}.$$

因此 C 的属于特征值 ξ^m 的所有特征向量组成的集合是

$$\left\{k\left(1,\ \xi^m,\ \xi^{2m},\ \cdots,\ \xi^{(n-1)m}\right)' \mid k\in\mathbf{C}\ 且 k\neq 0\right\}.$$

问题 1.218 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 是数域 K 上一个多项式. 证明: 如果 λ_0 是 K 上 n 级矩阵 A 的一个特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量, 那么 $f\left(\lambda_0\right)$ 是矩阵 $f(A)$ 的一个特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $f(A)$ 的属于 $f\left(\lambda_0\right)$ 的一个特征向量.

证明 由已知条件得, $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 于是

$$
\begin{aligned}
f(A)\boldsymbol{\alpha} &= \left(a_0I+a_1A+\cdots+a_mA^m\right)\boldsymbol{\alpha}\\
&= a_0\boldsymbol{\alpha}+a_1A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_mA^m\boldsymbol{\alpha}\\
&= a_0\boldsymbol{\alpha}+a_1\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_m\lambda_0^m\boldsymbol{\alpha}\\
&= \left(a_0+a_1\lambda_0+\cdots+a_m\lambda_0^m\right)\boldsymbol{\alpha}=f\left(\lambda_0\right)\boldsymbol{\alpha}.
\end{aligned}
$$

因此 $f\left(\lambda_0\right)$ 是 $f(A)$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $f(A)$ 的属于 $f\left(\lambda_0\right)$ 的一个特征向量.

问题 1.219 求复数域上 n 级循环矩阵

$$
A=\begin{pmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\
a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1
\end{pmatrix}
$$

的全部特征值和特征向量.

解

$$
A=a_1I+a_2C+\cdots+a_nC^{n-1},
$$

其中 C 是 n 级循环移位矩阵. 令

$$
f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1},\quad \xi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}},
$$

$A=f(C)$ 的全部特征值是 $f\left(\xi^m\right),\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$; A 的属于特征值 $f\left(\xi^m\right)$ 的所有特征向量组成的集合是

$$
\left\{k\left(1,\ \xi^m,\ \xi^{2m},\ \cdots,\ \xi^{(n-1)m}\right)' \mid k\in\mathbf{C}\ 且 k\neq 0\right\}.
$$

问题 1.220 复数域上的 n 级矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

称为 Frobenius 矩阵, $n \geqslant 2$. 求 A 的特征多项式和全部特征向量.

解

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $|\lambda I-A|$ 的全部复根. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, 有

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \\ -a_0-a_1\lambda_i-\cdots-a_{n-1}\lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix},$$

因此 $\left(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \cdots, \lambda_i^{n-1}\right)'$ 是 A 的属于特征值 λ_i 的一个特征向量. 由于

$$(\lambda_i I-A)\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 2, 3, \cdots, n \end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\neq 0,$$

而 $|\lambda_i I-A|=0$, 因此 $\operatorname{rank}(\lambda_i I-A)=n-1$. 从而齐次线性方程组 $(\lambda_i I-A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数为 $n-(n-1)=1$. 于是 A 的属于特征值 λ_i 的所有特征向量组成的集合是

$$\left\{k\left(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \cdots, \lambda_i^{n-1}\right)' \mid k \in \mathbf{C} \text{ 且} k \neq 0\right\}.$$

笔记 求 A 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量的方法二: 由于 $|\lambda_i I-A|=0$, $(\lambda_i I-A)\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 2, 3, \cdots, n \end{pmatrix}=$ $(-1)^{n-1}\neq 0$, 即 $\lambda_i I-A$ 的 $(n, 1)$ 元的代数余子式不等于 0,

$$\boldsymbol{\eta}=\left((\lambda_i I-A)_{n1}, (\lambda_i I-A)_{n2}, \cdots, (\lambda_i I-A)_{m}\right)'$$

是齐次线性方程组 $(\lambda_i I-A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 其中 $(\lambda_i I-A)_{nj}$ 是 $(\lambda_i I-A)(n, j)$, $j=1, 2, \cdots, n$. 容易计算得出, $(\lambda_i I-A)_{n1}=1$, $(\lambda_i I-A)_{n2}=\lambda_i$, $\cdots$, $(\lambda_i I-A)_{m}=\lambda_i^{n-1}$. 因此

$\boldsymbol{\eta}=\left(1,\ \lambda_i,\ \lambda_i^2,\ \cdots,\ \lambda_i^{n-1}\right)'$. 从而 A 的属于 λ_i 的所有特征向量组成的集合是

$$\left\{k\left(1,\ \lambda_i,\ \lambda_i^2,\ \cdots,\ \lambda_i^{n-1}\right)' \mid k\in\mathbf{C}\ 且 k\neq 0\right\}.$$

问题 1.221 斐波那契 (Fibonacci) 数列是

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

它满足下列递推公式:

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

以及初始条件 $a_0=0,\ a_1=1$. 求 Fibonacci 数列的通项公式, 并且求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

解 令

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

则

$$\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}. \tag{1.74}$$

令

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},$$

则 (1.74) 式可写成

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=A\boldsymbol{\alpha}_n.$$

从上式得出

$$\boldsymbol{\alpha}_n=A^n\boldsymbol{\alpha}_0. \tag{1.75}$$

于是为了求 Fibonacci 数列的通项公式就只要去计算 A^n. 可利用 A 的相似标准形来简化 A^n 的计算. 把 A 看成实数域上的矩阵.

$$|\lambda I-A|=\lambda^2-\lambda-1=\left(\lambda-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

于是 A 有两个不同的特征值: $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 从而 A 可对角化. 则从而

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}^nP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_2&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}&\lambda_2^{n+1}\\\lambda_1^n&\lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从 (1.75) 式及初始条件, 得

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

比较上式两边的第 2 个分量, 得

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n-\lambda_2^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

上式就是 Fibonacci 数列的通项公式.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618.$$

问题 1.222 设 A, B 分别是数域 K 上 n 级 , m 级矩阵, 它们分别有 n 个 , m 个不同的特征值. 设 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式, 且 $f(B)$ 是可逆矩阵. 证明: 对任意 $n \times m$ 矩阵 C, 都有矩阵

$$G=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

可对角化.

证明

$$\begin{aligned}|\lambda I-G|&=\begin{vmatrix} \lambda I_n-A & -C \\ 0 & \lambda I_m-B \end{vmatrix}=|\lambda I_n-A|\,|\lambda I_m-B|\,,\\&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\cdots(\lambda-\mu_m)\,.\end{aligned}$$

由已知条件知道, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 两两不等, $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\mu_m$ 两两不等. 由于 μ_j 是 B 的特征值, 因此 $f\left(\mu_j\right)$ 是 $f(B)$ 的特征值 , $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$. 由于 $f(B)$ 是可逆矩阵, 因此 $f\left(\mu_j\right)\neq 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$. 从而 $\mu_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 不是 A 的特征值. 于是 $(n+m)$ 级矩阵 G 有 $n+m$ 个不同的特征值. 从而 G 可对角化.

定理 1.8

实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵.

证明 对实对称矩阵的级数 n 作数学归纳法.

$n=1$ 时, $(1)^{-1}(a)(1)=(a)$, 因此命题为真. 假设对于 $n-1$ 级的实对称矩阵命题为真, 现在来看 n 级实对称矩阵 A. 由于实对称矩阵必有特征值, 因此取 A 的一个特征值 λ_1, 属于 λ_1 的一个特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, 且 $|\boldsymbol{\eta}_1|=1$. 把 $\boldsymbol{\eta}_1$ 扩充成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基, 然后经过施密特正交化和单位化, 可得到 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基: $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$. 令

$$T_1=(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n),$$

则 T_1 是 n 级正交矩阵. 我们有

$$T_1^{-1}AT_1=T_1^{-1}(A\boldsymbol{\eta}_1, A\boldsymbol{\eta}_2, \cdots, A\boldsymbol{\eta}_n)=\left(T_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1, T_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_2, \cdots, T_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_n\right).$$

由于 $T_1^{-1}T_1=I=(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$, 又有 $T_1^{-1}T_1=\left(T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_1, T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_2, \cdots, T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_n\right)$, 因此 $T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$. 从而得到

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}.$$

由于 A 是实对称矩阵, 因此 $T_1^{-1}AT_1$ 也是实对称矩阵. 由上式得, $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 且 B 也是实对称矩阵. 于是对 B 可以用归纳假设, 存在 $n-1$ 级正交矩阵 T_2, 使得

$$T_2^{-1}BT_2=\operatorname{diag}\{\lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

令

$$T=T_1\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}.$$

则 T 是正交矩阵, 并且有

$$\begin{aligned}T^{-1}AT&=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}^{-1}T_1^{-1}AT_1\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2^{-1}BT_2\end{pmatrix}=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.\end{aligned}$$

根据数学归纳法原理, 对于任意正整数 n, 命题为真.

问题 1.223 证明: 如果 A 是 $s \times n$ 实矩阵, 那么 $A'A$ 的特征值都是非负实数.

证明 法一: 由于 $A'A$ 是 n 级实对称矩阵, 因此存在 n 级正交矩阵 $\mathbf{T}$, 使得

$$T^{-1}\left(A'A\right)T=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right\},$$

其中 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 是 $A'A$ 的全部特征值, 于是

$$\begin{aligned}\lambda_i&=\left[(AT)'(AT)\right](i;i)=\sum_{k=1}^{n}\left[(AT)'(i;k)\right]\left[(AT)(k;i)\right]\\&=\sum_{k=1}^{n}[(AT)(k;i)]^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

法二: 设 λ_0 是 $A'A$ 的一个特征值, 则存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 使得 $A'A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}'$, 得

$$\boldsymbol{\alpha}'A'A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}.$$

即 $(A\boldsymbol{\alpha})'(A\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|^2>0$, 从而

$$\lambda_0=\frac{(A\boldsymbol{\alpha})'(A\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}=\frac{(A\boldsymbol{\alpha},\ A\boldsymbol{\alpha})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}\geqslant 0$$

问题 1.224 证明: n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是: A 的特征多项式在复数域中的根都是实数.

证明 必要性. 设 n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵 $B=(b_{ij})$, 则 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|=(\lambda-b_{11})(\lambda-b_{22})\cdots(\lambda-b_{mn})$. 这表明 $|\lambda I-A|$ 的根 $b_{11},\ b_{22},\ \cdots,\ b_{nn}$ 都是实数.

充分性. 对实矩阵的级数作数学归纳法.$n=1$ 时, 显然命题为真. 假设对于 $n-1$ 级实矩阵命题为真, 现在来看 n 级实矩阵 A. 由于 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数, 因此可以取 A 的一个特征值 λ_1. 设 $\boldsymbol{\eta}_1$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 且 $|\boldsymbol{\eta}_1|=1$. 把 $\boldsymbol{\eta}_1$ 扩充成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基, 然后经过施密特正交化和单位化, 得到 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基:$\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_n$. 令 $T_1=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_n)$, 则 T_1 是正交矩阵.

$$T_1^{-1}AT_1=T_1^{-1}(A\boldsymbol{\eta}_1,\ A\boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\eta}_n)=\left(T_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{T}_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{T}_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_n\right).$$

由于 $T_1^{-1}T_1=I$, 因此 $T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$. 从而

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}.$$

于是 $|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)|\lambda I-B|$. 因此 $n-1$ 级实矩阵 B 的特征多项式在复数域中的根都是实数. 从而对 B 可用归纳假设: 存在 $n-1$ 级正交矩阵 T_2, 使得 $T_2^{-1}BT_2$ 为上三角矩阵. 令

$$T=T_1\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}$$

则 T 是 n 级正交矩阵, 且

$$\begin{aligned}T^{-1}AT&=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}^{-1}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}^{-1}AT_1\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & T_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}T_2\\ \mathbf{0} & T_2^{-1}BT_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此 $T^{-1}AT$ 是上三角矩阵. 据数学归纳法原理, 对一切正整数 n, 此命题为真.

问题 1.225 证明: 任一 n 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵.

证明 对复矩阵的级数 n 作数学归纳法. $n=1$ 时, 显然命题为真, 假设 $n-1$ 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵. 现在来看 n 级复矩阵 A. 设 λ_1 是 n 级复矩阵 A 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是属于 λ_1 的一个特征向量. 把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 扩充成 $\mathbf{C}^n$ 的一个基: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$. 令 $P_1=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 P_1 是 n 级可逆矩阵, 且

$$P_1^{-1}AP_1=P_1^{-1}(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, A\boldsymbol{\alpha}_n)=\left(P_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_n\right).$$

由于 $P_1^{-1}P_1=I$, 因此 $P_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$. 从而

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}.$$

对 $n-1$ 级复矩阵 B 用归纳假设, 有 $n-1$ 级可逆矩阵 P_2, 使得 $P_2^{-1}BP_2$ 为上三角矩阵. 令

$$P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix},$$

则 P 是 n 级可逆矩阵, 且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & P_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}P_2\\ \mathbf{0} & P_2^{-1}BP_2\end{pmatrix}.$$

因此 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.

问题 1.226 证明: 实数域上斜对称矩阵的特征多项式在复数域中的根是 0 或纯虚数.

证明 设 A 是实数域上的 n 级斜对称矩阵. λ_0 是 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 在复数域中的一个根. 把 A 看成复矩阵, 则 λ_0 是 A 的一个特征值. 从而存在 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 使 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$.
由于 A 是实张阵, 因此从上式两边取共轨复数得, $A\bar{\alpha} = \bar{\lambda}_0\overline{\boldsymbol{\alpha}}$. 两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}'$, 得

$$\boldsymbol{\alpha}' A\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\lambda}_0\boldsymbol{\alpha}'\overline{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{1.76}$$

由于 A 是斜对称矩阵, 因此 $A' = -A_{\mathrm{a}}$ 在 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 两边取转櫂, 得 $\boldsymbol{\alpha}' A = -\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'$. 两边右乘 $\bar{\alpha}$, 得

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = -\lambda_0\boldsymbol{\alpha}'\overline{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{1.77}$$

从 (1.76) 式和 (1.77) 式, 得 $\left(\bar{\lambda}_0 + \lambda_0\right)\boldsymbol{\alpha}'\overline{\boldsymbol{\alpha}} = 0$. 由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}'\overline{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$. 从而 $\bar{\lambda}_0 = -\lambda_0$. 因此 λ_0 等于 0 或 λ_0 是纯虚数.

问题 1.227 设 A 是实数域上的 n 级斜对称矩阵. 证明:

$$\begin{vmatrix} 2I_n & A \\ A & 2I_n \end{vmatrix} \geqslant 2^{2n},$$

等号成立当且仅当 $A=0$.

证明

$$\begin{pmatrix} 2I_n & A \\ A & 2I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+\left(-\frac{1}{2}A\right)\cdot(1)} \begin{pmatrix} 2I_n & A \\ 0 & 2I_n-\frac{1}{2}A^2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\frac{1}{2}A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2I_n & A \\ A & 2I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2I_n & A \\ 0 & 2I_n-\frac{1}{2}A^2 \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{vmatrix} 2I_n & A \\ A & 2I_n \end{vmatrix}=|2I_n|\cdot\left|2I_n-\frac{1}{2}A^2\right|=2^n\cdot 2^n\left|I_n-\frac{1}{4}A^2\right|.$$

由于 $\left(A^2\right)'=A'A'=(-A)(-A)=A^2$, 因此 A^2 是实对称矩阵. 据上题的结论, 可设 A 的特征多项式在复数域中的全部根为 $b_1\mathrm{i},\ b_2\mathrm{i},\ \cdots,\ b_n\mathrm{i}$, 其中 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 是实数. 于是 A^2 的全部特征值为 $-b_1^2,\ -b_2^2,\ \cdots,\ -b_n^2$. 从而 $I_n-\frac{1}{4}A^2$ 的全部特征值是 $1+\frac{1}{4}b_1^2,\ 1+\frac{1}{4}b_2^2,\ \cdots,\ 1+\frac{1}{4}b_n^2$. 由于 $I_n-\frac{1}{4}A^2$ 是实对称矩阵, 因此

$$I_n-\frac{1}{4}A^2\sim\operatorname{diag}\left\{1+\frac{1}{4}b_1^2,\ 1+\frac{1}{4}b_2^2,\ \cdots,\ 1+\frac{1}{4}b_n^2\right\}.$$

从而

$$\left|I_n-\frac{1}{4}A^2\right|=\left(1+\frac{1}{4}b_1^2\right)\left(1+\frac{1}{4}b_2^2\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4}b_n^2\right)\geqslant 1. \tag{1.78}$$

因此

$$\begin{vmatrix} 2I_n & A \\ A & 2I_n \end{vmatrix}\geqslant 2^{2n}. \tag{1.79}$$

从 (1.78) 式看出, (1.79) 式的等号成立当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$. 于是如果等号成立, 那么实对称矩阵 A^2 相似于 $\operatorname{diag}\{0,\ 0,\ \cdots,\ 0\}$. 从而 $A^2=0$. 由于 A 是实数域上的斜对称矩阵, 因此 $A=0$. 反之, 若 $A=0$, 则显然 (1.79) 式的等号成立. 因此 (1.79) 式的等号成立当且仅当 $A=0$.

问题 1.228 设 A 是 n 级实矩阵, 证明: 如果 A 的特征多项式在复数域中的根都是非负实数, 且 A 的主对角元都是 1, 那么 $|A| \leqslant 1$.

证明 由于 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数, 可证 A 相似于一个上三角矩阵 $B=(b_{ij})$. 从而 $|A|=|B|=b_{11}b_{zz}\cdots b_{m}$, 且 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$. 由于 A 的主对角元都是 1, 因此

$$b_{11}+b_{2z}+\cdots+b_{m}=\operatorname{tr}(A)=n.$$

若 b_{11}, b_{z2}, $\cdots$, b_{m} 中有一个为 0, 则 $|A|=0$.

若 b_{11}, b_{22}, $\cdots$, b_{m} 都不为 0, 由于它们是 A 的特征多项式在复数域中的全部根, 因此由已知条件得, 它们都为正数. 从而

$$\sqrt[n]{b_{11}b_{22}\cdots b_{m}} \leqslant \frac{b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{m}}{n}=1.$$

由此得出, $b_{11}b_{22}\cdots b_{m} \leqslant 1$, 即 $|A| \leqslant 1$.

问题 1.229 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵, 证明: A 是斜对称矩阵当且仅当对于 K^n 中任一列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} = 0$.

证明 必要性. 设 A 是斜对称矩阵, 则 $A' = -A$. 于是

$$\left(\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}\right)' = \boldsymbol{\alpha}' A' \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}.$$

又由于 $\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}$ 是 1 级矩阵, 因此 $(\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha})' = \boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}$. 从而 $\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}$. 由此得出, $\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} = 0$.
充分性. 设 A 的列向量组是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$. 由已知条件得

$$\begin{aligned}
0 &= \boldsymbol{\varepsilon}_i' A \boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i' \left(\boldsymbol{\alpha}_i\right) = a_{ii}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \\
0 &= \left(\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_j\right)' A \left(\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_j\right) = \left(\boldsymbol{\varepsilon}_i' + \boldsymbol{\varepsilon}_j'\right) \left(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j\right) \\
&= a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ji}, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

因此 A 是斜对称矩阵.

问题 1.230 设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

是一个 n 级对称矩阵, 且 A_1 是 r 级可逆矩阵. 证明:

$$A \simeq \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix},$$

$$|A|=|A_1|\left|A_4-A_2'A_1^{-1}A_2\right|.$$

证明 由于 A 是对称矩阵, 因此 $A'=A$, 即

$$\begin{pmatrix} A_1' & A_3' \\ A_2' & A_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

从而 A_1, A_4 都是对称矩阵, 且 $A_3=A_2'$. 由于 A_1 可逆, 因此

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2' & A_4 \end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(-A_2^{prime}A_1^{-1})}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}\xrightarrow[(2)+(1)\cdot(-A_1^{-1}A_2)]{}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_2'A_1^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2' \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $\left(-A_1^{-1}A_2\right)'=-A_2'\left(A_1^{-1}\right)'=-A_2'\left(A_1'\right)^{-1}=-A_2'A_1^{-1}$, 因此从上式得出

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix},$$

$$|A|=|A_1|\left|A_4-A_2'A_1^{-1}A_2\right|.$$

问题 1.231 证明: 数域 K 上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵:

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (0), \cdots, (0)\right\}.$$

证明 对斜对称矩阵的级数 n 作第二数学归纳法. $n=1$ 时，$(0) \simeq (0)$.
$n=2$ 时, 设 $a \neq 0$, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\oplus \cdot a^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\oplus \cdot a^{-1}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设对于小于 n 级的斜对称矩阵, 命题为真. 现在来看 n 级斜对称矩阵 $A=(a_{ij})$. 情形 $1A$ 的左上角的 2 级子矩阵 $A_1 \neq 0$, 则 A_1 可逆. 把 A 写成分块矩阵的形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

则

$$A' = \begin{pmatrix} A_1' & A_3' \\ A_2' & A_4' \end{pmatrix}.$$

由于 $A' = -A$, 因此 $A_1' = -A_1$, $A_4' = -A_4$, $A_3 = -A_2'$. 从而

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2' & A_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\otimes + \left(A_2' A_1^{-1}\right) \cdot \Phi} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 + A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{0 + \Phi \cdot \left(-A_1^{-1} A_2\right)} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 + A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ A_2' A_1^{-1} & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ -A_2' & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & -A_1^{-1} A_2 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 + A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $\left(-A_1^{-1} A_2\right)' = -A_2' \left(A_1^{-1}\right)' = -A_2' \left(A_1'\right)^{-1} = -A_2' \left(-A_1\right)^{-1} = A_2' A_1^{-1}$, 因此从上式得出, 由于 A_1 是 2 级斜对称矩阵, 因此可用归纳假设, 存在 2 级可逆矩阵 C_1, 使得

$$A_1 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}.$$

则 C 是 n 级可逆矩阵, 且

$$C'\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} C_1'A_1C_1 & 0 \\ 0 & C_2'BC_2 \end{pmatrix}$$

$$=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},(0),\cdots,(0)\right\}.$$

情形 2 $A_1=0$, 但在 A 的第 1 行 (或第 2 行) 中有 $a_{1j}\neq 0$ (或 $a_{2j}\neq 0$).

若 $a_1\neq 0$, 则把 A 的第 j 行加到第 2 上, 接着把所得矩阵的第 j 列加到第 2 列上, 得到的矩阵 G 的 (2, 1) 元为 $-a_{1j}$, (1, 2) 元为 a_{1j}, (1, 1) 元和 (2, 2) 元仍为 0. 得,

$$A\simeq\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},(0),\cdots,(0)\right\}.$$

若 $a_{2j}\neq 0$, 则把 A 的第 j 行加到第 1 行上, 接者把第 j 列加到第 1 列上, 得到的矩阵 H 属于情形 1. 因此 A 合同于所腰求的分块对角矩阵.

情形 3 $A_1=0$, $A_2=0$. 此时

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}.$$

由于 A_4 是 $n-2$ 级斜对称矩阵, 因此可用归纳假设, 存在 $n-2$ 级可逆矩阵 C_3, 使得

$$C_3'A_6C_3=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},(0),\cdots,(0)\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}\xrightarrow{((1),(2))}\begin{pmatrix} 0 & A_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[((1),(2))]{}\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{n-2} \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_{n-2} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

又有

$$\begin{pmatrix} C_3 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_3 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_3'A_4C_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$A\simeq\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},(0),\cdots,(0),(0),(0)\right\}$$

根据第二数学归纳法原理, 对一切田整数 n , 命题为真.

笔记 由于合同的矩阵有相等的秩, 斜对称矩阵的秩是偶数.

问题 1.232 设 n 级实对称矩阵 A 的全部特征值按大小顺序排成: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. 证明: 对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 都有

$$\lambda_n \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2} \leqslant \lambda_1.$$

证明 因为 A 是 n 级实对称矩阵, 所以有 n 级正交矩阵 T, 使得 $T^{-1} A T=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right\}$. 任取 $\mathbf{R}^n$ 中一个非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 设 $(T \boldsymbol{\alpha})'=\left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right)$. 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha} & =\boldsymbol{\alpha}' T \operatorname{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right\} T^{-1} \boldsymbol{\alpha}=\left(T' \boldsymbol{\alpha}\right)' \operatorname{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right\}\left(T' \boldsymbol{\alpha}\right) \\ & =\lambda_1 b_1^2+\lambda_2 b_2^2+\cdots+\lambda_n b_n^2 \leqslant \lambda_1\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) \\ & =\lambda_1\left|T' \boldsymbol{\alpha}\right|^2=\lambda_1|\boldsymbol{\alpha}|^2 . \end{aligned}$$

同理

$$\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}=\lambda_1 b_1^2+\lambda_2 b_2^2+\cdots+\lambda_n b_n^2$$

因此

$$\lambda_n \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}' A \boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2} \leqslant \lambda_1$$

定理 1.9

(惯性定理) n 元实二次型 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的规范形是唯一的.

证明 设 n 元实二次型 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的秩为 r . 假设 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 分别经过非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=C\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}=B\boldsymbol{Z}$ 变成两个规范形:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}&=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,\\ \boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}&=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2.\end{aligned}$$

现在来证明 $p=q$, 从而 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的规范形唯一. 从上两式看出, 经过非退化线性替换 $\boldsymbol{Z}=\left(B^{-1}C\right)\boldsymbol{Y}$, 有

$$z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

记 $G=B^{-1}C=\left(g_{ij}\right)$. 假如 $p>q$, 我们想找到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 取的一组值, 使得上式右端大于 0, 而左端小于或等于 0, 从而产生矛盾. 为此让 $\boldsymbol{Y}$ 取下述列向量

$$\boldsymbol{\beta}=\left(k_1, \cdots k_p, 0, \cdots, 0\right),$$

其中 $k_1, \cdots, k_p$ 是待定的不全为 0 的实数, 使得变量 $z_1, \cdots, z_q$ 取的值全为 0. 由于 $\boldsymbol{Z}=G\boldsymbol{Y}$, 因此当 $\boldsymbol{Y}$ 取 $\boldsymbol{\beta}$ 时, 有从而我们考虑齐次线性方程组:

$$\begin{cases}g_{11}k_1+\cdots+g_{1p}k_p=0,\\ g_{21}k_1+\cdots+g_{2p}k_p=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ g_{q1}k_1+\cdots+g_{qp}k_p=0.\end{cases}$$

由于 $q<p$, 因此上面的齐次线性方程组有非零解. 于是 $k_1, k_2, \cdots, k_p$ 可取到一组不全为 0 的实数, 使得 $z_1=\cdots=z_q=0$. 此时 (5) 式左端的值小于或等于 0 , 而右端的值大于 0 , 矛盾. 因此 $p\leqslant q$. 同理可证 $q\leqslant p$. 从而 $p=q$.

问题 1.233 证明: 一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数 1 次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩等于 2 且符号差为 0, 或者它的秩等于 1.

证明 必要性. 设 n 元实二次型

$$\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}=\left(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right)\left(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n\right).$$

其中 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 不全为 0; $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 不全为 0.

情形 1:$(a_2,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 与 $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ 线性相关. 则 $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=k\left(a_1,\ a_2\ ,\ \cdots,\ a_n\right)$, 且 $k\neq 0$.

于是设 $a_i\neq 0$. 令

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}=k\left(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right)^2\\&x_j=y_j,\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ n;\\&x_i=\tfrac{1}{a_i}y_i-\tfrac{1}{a_i}\textstyle\sum_{j\neq i}a_jy_j.\end{aligned}$$

这是非退化线性替换, 且

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}=ky_i^2.$$

这时 $\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}$ 的秩等于 1.

情形 2:$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 与 $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ 线性无关. 则这个向量组的秩为 2, 以它们为行向量组的 $2\times n$ 矩阵必有一个 2 阶子式不等于 0, 不妨设 $\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\neq 0$. 令则此公式的系数矩阵 C 的行列式为

$$|C|=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

从而 C 可逆. 于是令 $\boldsymbol{X}=C^{-1}\boldsymbol{Y}$, 则

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}=y_1y_2.$$

再作非迟化线性替换:

$$\begin{aligned}&y_1=z_1+z_2,\\&y_2=z_1-z_2,\\&y_j=z_j,\qquad j=3,\ 4,\ \cdots,\ n.\\&\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}=z_1^2-z_2^2.\end{aligned}$$

则因此 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的秩等于 2, 且符号差等于 0.

充分性. 若 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的秩等于 2 且符号差为 0, 则经过一个适当的非退化线性替换 , $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 有

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}=y_1^2-y_2^2.$$

设 $C^{-1}=(d_{ij})$ 由于 $\boldsymbol{Y}=C^{-1}\boldsymbol{X}$, 因此

$$y_1=d_{11}x_1+d_{12}x_2+\cdots+d_{1n}x_n,$$

$$y_2=d_{21}x_1+d_{22}x_2+\cdots+d_{2n}x_n.$$

且 $(d_{11}, d_{12}, \cdots, d_{1n})$ 与 $(d_{21}, d_{22}, \cdots, d_{2n})$ 线性无关. 于是

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X} = [(d_{11}+d_{21})\,x_1+\cdots+(d_{1n}+d_{2n})\,x_n]\,[(d_{11}-d_{21})\,x_1+\cdots+(d_{1n}-d_{2n})\,x_n]$$

且

$$(d_{11}+d_{21}, \cdots, d_{1n}+d_{2n}) \neq 0,\ (d_{11}-d_{21}, \cdots, d_{1n}-d_{2n}) \neq 0.$$

因此 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 表示成了两个 1 次齐次多项式的乘积. 若 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的秩等于 1, 则经过一个适当的非退化线性替换 $\boldsymbol{X} = B\boldsymbol{Z}$, 有

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X} = kz_1^2,$$

其中 $k = 1$ 或 -1. 由于 $z = B^{-1}\boldsymbol{X}$, 因此

$$z_1 = e_1x_1 + e_2x_2 + \cdots + e_nx_n,$$

且 $(e_1, e_2, \cdots, e_n) \neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X} = k\,(e_1x_1 + e_2x_2 + \cdots + e_nx_n)^2\,.$$

从而 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 表示成了两个 1 次齐次系项式的乘积.

问题 1.234 设 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 是一个 n 元实二次型, 证明: 如果 $\mathbf{R}^n$ 中有列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1'A\boldsymbol{\alpha}_1 > 0$, $\boldsymbol{\alpha}_2'A\boldsymbol{\alpha}_2 < 0$, 那么在 $\mathbf{R}^n\boldsymbol{\alpha}_3$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_3'A\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$.

证明 作非退化线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 使得

$$\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X} = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

其中 $r = \operatorname{rank}(A)$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1'A\boldsymbol{\alpha}_1 > 0$, 因此 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数 $p > 0$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_2'A\boldsymbol{\alpha}_2 < 0$, 因此 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 的负惯性指数 $r - p > 0$ 即 $r > p$. 于是可以让 $\boldsymbol{Y}$ 取下述一列向量:

$$\boldsymbol{\beta} = (1, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)^{prime}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = C\boldsymbol{\beta}.$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_3'A\boldsymbol{\alpha}_3 = 1^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 - 1^2 - 0^2 \cdots - 0^2 = 0.$$

问题 1.235 设实二次型

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+u}^2,$$

其中 $l_i(i=1, 2, \cdots, s+u)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 1 次齐次多项式. 证明:$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 的正惯性指数 $p \leqslant s$, 负惯性指数 $q \leqslant u$.

证明 由于 $l_i(i=1, 2, \cdots, s+u)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 1 次齐次多项式, 因此

$$\boldsymbol{L}=H\boldsymbol{X},$$

其中 $\boldsymbol{L}=\left(l_1, l_2, \cdots, l_{s+\mu}, \cdots, l_n\right)'$, $l_j=0$, 当 $j>s+u$. 作非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=C\boldsymbol{Y}$, 使得

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2.$$

于是在 $\boldsymbol{L}=HC\boldsymbol{Y}$ 下, 有

$$l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{++1}^2-\cdots-l_{s+u}^2=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2. \tag{1.80}$$

设 $HC=\left(g_{ij}\right)$. 假如 $p>s$. 让 $\boldsymbol{Y}$ 取下述列向量:

$$\boldsymbol{\beta}=\left(k_1, \cdots, k_p, 0, \cdots, 0\right)',$$

其中 $k_1, \cdots, k_p$ 是待定的不全为 0 的实数, 使得 $l_1=0, \cdots, l_s=0$. 由于 $\boldsymbol{L}=(HC)\boldsymbol{Y}$, 因此当 $\boldsymbol{Y}$ 取 $\boldsymbol{\beta}$ 时, 有

$$\begin{cases} l_1=g_{11}k_1+g_{12}k_2+\cdots+g_{1p}k_p, \\ l_2=g_{21}k_1+g_{22}k_2+\cdots+g_{2p}k_p, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ l_s=g_{s1}k_1+g_{s2}k_2+\cdots+g_{sp}k_p. \end{cases}$$

为此考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}k_1+g_{12}k_2+\cdots+g_{1p}k_p=0, \\ g_{21}k_1+g_{22}k_2+\cdots+g_{2p}k_p=0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ g_{s1}k_1+g_{s2}k_2+\cdots+g_{sp}k_p=0. \end{cases}$$

由于 $s<p$, 因此这个齐次线性方程组有非零解. 从而 $k_1, \cdots, k_p$ 可取到一组不全为 0 的数, 使得 $l_1=\cdots=l_s=0$. 此时 (1.80) 式左端小于或等于 0, 而右端大于 0, 矛盾. 因此 , $p \leqslant s$. 类似地, 假如 $q>u$, 可以证明 $\boldsymbol{Y}$ 可取到一个列向量, 使得 (1.80) 式右端小于 0, 而左端大于或等于 0, 矛盾. 因此 $q \leqslant u$.

问题 1.236 n 级实对称矩阵组成的集合中, 符号差为给定数 s 的合同类有多少个?

证明 由于秩 r 和符号差 s 确定后, 正惯性指数 p 就随之确定: $p=\frac{s+r}{2}$, 因此秩和符号差也是 n 级实对称矩阵组成的集合的一组完全不变量. 从而当符号差 s 为给定的数后, 秩 r 有多少种取法就有多少个合同类.

当 $s<0$ 时, 设 $s=-m$, 其中 m 是正整数. 由于正惯性指数 p 是非负整数, 且 $r=2p-s=2p+m$, 因此 r 可取 $m,\ m+2,\ m+4,\ \cdots,\ m+2l$, 其中 $m+2l=n$ 或 $n-1$. 于是 $l=\left\lfloor\frac{n-m}{2}\right\rfloor |=\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor$, 从而 r 的取法有 $1+l=1+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor$ 种, 即当 $s<0$ 时, 符号差为 s 的合同类有 $1+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor$ 个.

当 $s\geqslant 0$ 时, 由于 $p\leqslant r$, 因此 $r\geqslant s$. 从而 r 可以取 $s,\ s+2,\ s+4,\ \cdots,\ s+2t$, 其中 $s+2t=n$ 或 $n-1$. 于是 r 的取法有 $1+t=1+\left\lfloor\frac{n-s}{2}\right\rfloor$ 种. 即当 $s\geqslant 0$ 时, 符号差为 s 的合同类有 $1+\left\lfloor\frac{n-s}{2}\right\rfloor$ 个.

问题 1.237 设二元实值函数 $F(x, y)$ 有一个稳定点 $\boldsymbol{\alpha}=(x_0, y_0)$ (即 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的一阶偏导数全为 0) . 设 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个邻域里有 3 阶连续偏导数. 令

$$H=\begin{pmatrix} F_{xx}''(x_0, y_0) & F_{xy}''(x_0, y_0) \\ F_{xy}''(x_0, y_0) & F_{yy}''(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

称 H 是 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的何塞 (Hesse) 矩阵. 如果 H 是正定的, 那么 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处达到极小值; 如果 H 是负定的, 那么 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处达到极大值.

证明 由于 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域里有 3 阶连续偏导数, 因此 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可展开成泰勒级数:

$$\begin{aligned} F(x_0+h, y_0+k)=&F(x_0, y_0)+\left[hF_x'(x_0, y_0)+kF_y'(x_0, y_0)\right]+ \\ &\frac{1}{2}\left[h^2F_{xx}''(x_0, y_0)+2hkF_{xy}''(x_0, y_0)+k^2F_{yy}''(x_0, y_0)\right]+R \\ =&F(x_0, y_0)+\frac{1}{2}\left(ah^2+2bhk+ck^2\right)+R, \end{aligned}$$

其中 $a=F_{xx}''(x_0, y_0)$, $b=F_{xy}''(x_0, y_0)$, $c=F_{yy}''(x_0, y_0)$.

$$\begin{aligned} R&=\frac{1}{6}\left[h^3F_{xxx}'''(z)+3h^2kF_{xxy}'''(z)+3hk^2F_{xyy}'''(z)+k^3F_{yyy}'''(z)\right], \\ \boldsymbol{z}&=(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \quad 0<\theta<1. \end{aligned}$$

如果 $|h|, |k|$ 足够小, 那么 $|R|<\frac{1}{2}\left|ah^2+2bhk+ck^2\right|$. 从而 $F(x_0+h, y_0+k)-F(x_0, y_0)$ 将与 $ah^2+2bhk+ck^2$ 同号. 表达式

$$f(h, k)=ah^2+2bhk+ck^2$$

是 h, k 的实二次型, 它的矩阵就是 H. 如果 H 是正定的, 那么对于足够小的 $|h|, |k|$, 且 $(h, k)\neq(0, 0)$, 有

$$F(x_0+h, y_0+k)-F(x_0, y_0)>0,$$

这表明 $F(x, y)$ 在 (x_0y_0) 处达到极小值. 如果 H 是负定的, 那么对于足够小的 $|h|, |k|$, 且 $(h, k)\neq(0, 0)$ 有

$$F(x_0+h, y_0+k)-F(x_0, y_0)<0,$$

这表明 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处达到极大值.

问题 1.238 证明: 如果 A 是 n 级正定矩阵 , B 是 n 级实对称矩阵, 则存在一个 n 级实可逆矩阵 C, 使得 $C'ACC'BC$ 都是对角矩阵.

证明 由于 A 是 n 级正定矩阵. 因此 $A \simeq I$. 从而存在 n 级实可逆矩阵 C_1, 使得 $C_1'AC_1 = I$. 由于 $(C_1'BC_1)' = C_1'B'C_1 = C_1'BC_1$, 因此, $C_1'BC_1$ 是 n 级实对称矩阵. 于是存在 n 级正交矩阵 T, 使得

$$T'\left(C_1'BC_1\right)T = T^{-1}\left(C_1'BC_1\right)T = \operatorname{diag}\left\{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n\right\}.$$

令 $C = C_1T$, 则 C 是实可逆矩阵, 且使得

$$\begin{aligned} C'AC &= (C_1T)'A(C_1T) = T'(C_1'AC_1)T = T'IT = I, \\ C'BC &= T'(C_1'BC_1)T = \operatorname{diag}\{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n\}. \end{aligned}$$

问题 1.239 证明: 如果 A 是 n 级正定矩阵, B 是 n 级半正定矩阵, 那么

$$|A+B| \geqslant |A|+|B|,$$

等号成立当且仅当 $B=0$.

证明 据上题的证明过程可知, 存在一个 n 级实可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC=I, \quad C'BC=\operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}=D.$$

由于 B 半正定, 因此 $\mu_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, n$. 于是

$$\begin{aligned} |A+B| &= \left|\left(C'\right)^{-1} IC^{-1}+\left(C'\right)^{-1} DC^{-1}\right| = \left|\left(C'\right)^{-1}(I+D)C^{-1}\right| \\ &= \left|C^{-1}\right|^2 (1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n). \end{aligned}$$

$$|A|=\left|C^{-1}\right|^2, \ |B|=\left|C^{-1}\right|^2 \mu_1\mu_2\cdots\mu_n.$$

由于

$$(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n) \geqslant 1+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,$$

因此

$$|A+B| \geqslant \left|C^{-1}\right|^2(1+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)=|A|+|B|,$$

若等号成立, 则 $(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)+(\mu_1\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}\mu_n)+\cdots+\mu_2\mu_3\cdots\mu_n=0$, , $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=0$. 从而 $B=0$. 显然, 当 $B=0$ 时, 等号成立.

定理 1.10

任给 a, $b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$, 则存在唯一的一对整数 q, r, 使得 $a = qb + r, \quad 0 \leqslant r < |b|$.

证明 我们瞄准余数 $r = a - qb$ 的形式和 $r \geqslant 0$ 的条件, 考虑集合

$$S = \{a - kb \mid k \in \mathbf{Z},\ a - kb \geqslant 0\}.$$

首先要说明 S 非空集,从而商 q 才有可能存在.分两种情形: 若 $b > 0$, 则 $a - \left(-a^2\right) b = a + a^2 b \geqslant 0$; 若 $b < 0$, 则 $a - a^2 b \geqslant 0$. 因此 S 非空集. 由于 S 是自然数集的子集, 因此 S 必有最小的数. 设 S 中最小的数为 $a - qb$, 令 $r = a - qb$. 据集合 S 的定义得，$r \geqslant 0$. 下面还要证 $r < |b|$. 用反证法, 假如 $r \geqslant |b|$, 若 $b > 0$, 则 $r - b \geqslant 0$. 从而

$$r - b = a - qb - b \geqslant 0,$$

即 $a - (q+1)b \geqslant 0$. 于是 $a - (q+1)b \in S$, 即 $r - b \in S$. 但是 $r - b < r$, 这与 r 是 S 中最小数矛盾. 若 $b < 0$, 则 $r + b \geqslant 0$. 于是 $r + b = a - qb + b \geqslant 0$, 即 $a - (q-1)b \geqslant 0$. 于是 $a - (q-1)b \in S$, 即 $r + b \in S$. 但是 $r + b < r$. 矛盾, 所以 $r < |b|$. 存在性得证.

唯一性. 假如还有整数 q', r', 使得

$$a = q'b + r', \quad 0 \leqslant r' < |b|;$$

则 $qb + r = q'b + r'$. 不妨设 $r \leqslant r'$. 于是

$$\left(q - q'\right) b = r' - r \geqslant 0.$$

由于 $0 \leqslant r < |b|$, $0 \leqslant r' < |b|$, 因此 $r' - r < |b|$. 从而

$$\left|q - q'\right| = \frac{r' - r}{|b|} < 1.$$

由此得出，$q - q' = 0$, 即 $q = q'$, 从而 $r = r'$.

问题 1.240 设 $d,\ n \in \mathbf{N}^*$, 则在 $K[x]$ 中，$x^d - 1 \,|x^n - 1 \Longleftrightarrow d| \, n$.

证明 充分性. 设 $d \mid n$, 则 $n = sd,\ s \in \mathbf{N}^*$. 显然有

$$x^s - 1 = (x-1)\left(x^{5-1} + x^{5-2} + \cdots + x + 1\right).$$

由于 $K[x]$ 可看成是 K 的一个扩环, 因此不定元 x 可用 x^d 代人, 从上式得

$$\left(x^d\right)^s - 1 = \left(x^d - 1\right)\left(x^{d(s-1)} + x^{d(5-2)} + \cdots + x^d + 1\right).$$

由此得出

$$x^d - 1 \mid x^n - 1.$$

必要性. 在整数环 $\mathbf{Z}$ 中, 作带余除法:

$$n = sd + r, \qquad 0 \leqslant r < d,$$

假如 $r \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= x^{sd+r} - 1 \\ &= x^{sd} \cdot x^r - x^r + x^r - 1 \\ &= x^r\left(x^{sd} - 1\right) + (x^r - 1). \end{aligned} \tag{1.81}$$

由充分性所证的结论得，$x^d - 1 \mid x^{sd} - 1$. 又由已知条件得，$x^d - 1 \mid x^n - 1$. 因此从(1.81)式得，$x^d - 1 \mid x^r - 1$.

由此推出，$d \leqslant r$.

这与 $r < d$ 矛盾. 因此 $r = 0$, 从而 $d \mid n$.

问题 1.241 设 $A \in M_n(K)$, $f(x)$, $g(x) \in K[x]$. 证明: 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 那么齐次线性方程组 $d(A)\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解空间 W_3 等于 $f(A)\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解空间 W_1 与 $g(A)\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解空间 W_2 的交.

证明 存在 $u(x)$, $v(x) \in K[x]$, 使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

由于 $K[A]$ 可看成是 K 的一个扩环, 因此 x 可用 A 代人, 从上式得

$$d(A) = u(A)f(A) + v(A)g(A).$$

任取 $\boldsymbol{\eta} \in W_1 \cap W_2$, 则 $f(A)\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ 且 $g(A)\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$. 于是

$$d(A)\boldsymbol{\eta} = u(A)f(A)\boldsymbol{\eta} + v(A)g(A)\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}.$$

因此 $\boldsymbol{\eta} \in W_3$, $W_1 \cap W_2 \subseteq W_3$.

设

$$f(x) = f_1(x)d(x),\ g(x) = g_1(x)d(x).$$

则 x 用 A 代人, 从上面两式得,

$$f(A) = f_1(A)d(A),\ g(A) = g_1(A)d(A).$$

任取 $\boldsymbol{\delta} \in W_3$, 则 $d(A)\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, 从而

$$f(A)\boldsymbol{\delta} = f_1(A)d(A)\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}, \quad g(A)\boldsymbol{\delta} = g_1(A)d(A)\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}.$$

因此 $\boldsymbol{\delta} \in W_1 \cap W_2$, 从而 $W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$.

综上所述得,

$$W_3 = W_1 \cap W_2.$$

问题 1.242 设 $A \in M_n(K)$, $f_1(x)$, $f_2(x) \in K[x]$, 记 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$. 证明: 如果 $(f_1(x),\ f_2(x)) = 1$, 那么 $f(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的任一个解可以唯一地表示成 $f_1(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个解与 $f_2(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个解的和.

证明 可表性. 由于 $(f_1(x),\ f_2(x)) = 1$, 因此存在 $u(x)$, $v(x) \in K[x]$, 使得 $u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x) = 1$. 不定元 x 用 A 代人, 从上式得

$$u(A)f_1(A) + v(A)f_2(A) = I.$$

任取 $f(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个解 $\boldsymbol{\eta}$, 则 $f(A)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}$, 从上式得

$$\boldsymbol{\eta} = I\boldsymbol{\eta} = u(A)f_1(A)\boldsymbol{\eta} + v(A)f_2(A)\boldsymbol{\eta}.$$

记 $\boldsymbol{\eta}_1 = v(A)f_2(A)\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = u(A)f_1(A)\boldsymbol{\eta}$, 则 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_1$. 由于 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 因此 $f(A) = f_1(A)f_2(A)$, 从而

$$\begin{aligned} f_1(A)\boldsymbol{\eta}_1 &= f_1(A)v(A)f_2(A)\boldsymbol{\eta} = v(A)f_1(A)f_2(A)\boldsymbol{\eta} \\ &= v(A)f(A)\boldsymbol{\eta} = v(A)\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}, \\ f_2(A)\boldsymbol{\eta}_2 &= f_2(A)u(A)f_1(A)\boldsymbol{\eta} \\ &= u(A)f(A)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2 f_1(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$, $f_2(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个解.

唯一性. 任取 $f(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个解 $\boldsymbol{\eta}$, 设

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \qquad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2,$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_i$, $\boldsymbol{\delta}_i$ 是 $f_i(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解 , $i = 1,\ 2$. 则

$$\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}_2 - \boldsymbol{\eta}_2.$$

用 W_i 表示 $f_i(A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 , $i = 1,\ 2$, 则 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\delta}_1 \in W_1 \cap W_2$. 由于 $(f_1(x),\ f_2(x)) = 1$, 因此用上题的结论得, $I\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 $W_3 = W_1 \cap W_2$. 显然 $W_3 = \{\boldsymbol{0}\}$, 因此 $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$. 从而 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\delta}_1$. 于是 $\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\delta}_2$.

问题 1.243 证明: 在 $K[x]$ 中, 如果 $(f(x),\ g(x))=1$, 并且 $\deg f(x)>0$, $\deg g(x)>0$, 那么在 K[x] 中存在唯一的一对多项式 $u(x)$, $v(x)$, 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$$

且 $\deg u'(x)<\deg g(x)$, $\deg v(x)<\deg f(x)$.

证明 由于 $(f(x),\ g(x))=1$, 因此存在 $p(x),\ q(x)\in K[x]$, 使得

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=1. \tag{1.82}$$

用 $g(x)$ 去除 $p(x)$, 有 $h(x),\ r(x)\in K[x]$, 使得

$$p(x)=h(x)g(x)+r(x),\ \deg r(x)<\deg g(x). \tag{1.83}$$

把(1.83)式代入(1.82)式, 得

$$r(x)f(x)+[h(x)f(x)+q(x)]g(x)=1.$$

令 $u(x)=r(x)$, $v(x)=h(x)f(x)+q(x)$, 则上式成为

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1, \tag{1.84}$$

其中 $\deg u(x)=\deg r(x)<\deg g(x)$. 由于 $\deg g(x)>0$, 因此从(1.84)式看出 $u(x)\neq 0$. 假如 $\deg v(x)\geqslant \deg f(x)$, 则

$$\begin{aligned}\deg[v(x)g(x)]&=\deg v(x)+\deg g(x)\geqslant \deg f(x)+\deg g(x)\\&>\deg f(x)+\deg u(x)=\deg[u(x)f(x)].\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\deg[u(x)f(x)+v(x)g(x)]&=\deg[v(x)g(x)]\\&\geqslant \deg f(x)+\deg g(x)>0.\end{aligned}$$

这与(1.84)式矛盾, 因此 $\deg v(x)<\deg f(x)$. 存在性得证.
唯一性. 假设 $K[x]$ 中, 还有一对多项式 $u_1(x)$, $v_1(x)$, 使得

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1,$$

且 $\deg u_1(x)<\deg g(x)$, $\deg v_1(x)<\deg f(x)$, 则

$$[u_1(x)-u(x)]\,f(x)=[v(x)-v_1(x)]\,g(x).$$

由于 $(f(x),\ g(x))=1$, 因此从上式得

$$g(x)\mid [u_1(x)-u(x)]\,.$$

假如 $u_1(x)-u(x)\neq 0$, 则 $\deg g(x)\leqslant \deg\,[u_1(x)-u(x)]<\deg g(x)$, 矛盾. 因此 $u_1(x)-u(x)=0$, 从而 $v(x)-v_1(x)=0$. 即

$$u(x)=u_1(x),\qquad v(x)=v_1(x).$$

问题 1.244 设 $m,\ n\in\mathbf{N}^*$, 证明: 在 $K[x]$ 中,

$$(x^m-1,\ x^n-1)=x^{(m,\ n)}-1.$$

证明 当 $m=n$ 时 , $(m,\ n)=m$, 显然有

$$(x^m-1,\ x^m-1)=x^m-1.$$

下面设 $m>n$, 对幂指数 m 和 n 的最大值作第二数学归纳法. 当 $\max\{m,\ n\}=2$ 时, $m=2,\ n=1,\ (m,\ n)=1$. 显然有 $\left(x^2-1,\ x-1\right)=x-1$. 假设幂指数的最大值小于 m 时, 命题为真, 现在来看 $\max\{m,\ n\}=m$ 的情形.

$$\begin{aligned}(x^m-1,\ x^n-1)&=\left(x^m-x^{m-n}+x^{m-n}-1,\ x^n-1\right)\\&=\left(x^{m-n}\left(x^n-1\right)+x^{m-n}-1,\ x^n-1\right).\end{aligned}$$

由于

$$\{x^{m-n}(x^n-1)+x^{m-n}-1\text{与}x^n-1\text{的最大公因式}\}=\{x^n-1\text{与}x^{m-n}-1\text{的公因式}\}$$

因此

$$\left(x^{m-n}\left(x^n-1\right)+x^{m-n}-1,\ x^n-1\right)=\left(x^n-1,\ x^{m-n}-1\right).$$

由于 $\max\{n,\ m-n\}<m$, 且 $(n,\ m-n)=(m,\ n)$, 因此据归纳假设得

$$\left(x^n-1,\ x^{m-n}-1\right)=x^{(n,\ m-n)}-1=x^{(m,\ n)}-1.$$

从而

$$(x^m-1,\ x^n-1)=x^{(m,\ n)}-1.$$

据数学归纳法原理, 对一切正整数 $m,\ n$, 命题为真.

问题 1.245 设 $f(x),\ g(x)\in K[x]$, $K[x]$ 中一个多项式 $m(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最小公倍式, 如果

$1^\circ f(x)|m(x),\ g(x)|m(x)$;

$2^\circ f(x)|u(x),\ g(x)|u(x)\Longrightarrow m(x)\mid u(x)$.

(1) 证明: $K[x]$ 中任意两个多项式都有最小公倍式, 并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式在相伴的意义下是唯一的;

(2) 用 $[f(x),\ g(x)]$ 表示首项系数是 1 的最小公倍式, 证明: 如果 $f(x),\ g(x)$ 的首项系数都是 1, 那么

$$[f(x),\ g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),\ g(x))}.$$

证明 (1)0 与 0 的公倍式只有 0, 从而 0 与 0 的最小公倍式是 0. 设 $f(x),\ g(x)$ 是 $K[x]$ 中不全为 0 的多项式, 则

$$f(x)=f_1(x)(f(x),\ g(x)),\ g(x)=g_1(x)(f(x),\ g(x)).$$

令

$$m(x)=f_1(x)g_1(x)(f(x),\ g(x))$$

则

$$f(x)\mid m(x),\ g(x)\mid m(x)$$

假设 $f(x)|u(x),\ g(x)|u(x)$, 则存在 $p(x),\ q(x)\in K[x]$, 使得从而

$$p(x)f(x)=q(x)g(x).$$

于是

$$p(x)f_1(x)(f(x),\ g(x))=q(x)g_1(x)(f(x),\ g(x)).$$

因此

$$p(x)f_1(x)=q(x)g_1(x).$$

由于 $(f_1(x),\ g_1(x))=1$, 因此 $f_1(x)\mid q(x)$. 从而存在 $h(x)\in K[x]$, 使得

$$q(x)=h(x)f_1(x).$$

于是

$$u(x)=h(x)f_1(x)g(x)=h(x)m(x).$$

因此 $m(x)\mid u(x)$. 从而 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式.

设 $m_1(x),\ m_2(x)$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式, 则

$$m_1(x)\mid m_2(x),\ m_2(x)\mid m_1(x)$$

因此

$$m_1(x)\sim m_2(x).$$

(2) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是首项系数为 1 的多项式, 则从第 (1) 小题的证明可以看出

$$
\begin{aligned}
[f(x),\ g(x)] &= f_1(x)g_1(x)(f(x)g(x)) \\
&= \frac{f(x)g(x)}{(f(x),\ g(x))}.
\end{aligned}
$$

问题 1.246 在 $K[x]$ 中, 设 $(f,\ g_i)=1,\ i=1,\ 2$, 证明:

$$(fg_1,\ g_2)=(g_1,\ g_2)\,.$$

证明 证法一: 设 $g_1(x),\ g_2(x)$ 的标准分解式为

$$g_1(x)=b_1q_{1^1}^{r_1}(x)\cdots q_{m^m}^{r_m}(x)q_{m+1}^{r_{m+1}}(x)\cdots q_{t^t}^{r_t}(x),$$
$$g_2(x)=b_2q_1^{k_1}(x)\cdots q_{m'_m}^{k_m}(x)u_1^{e_1}(x)\cdots u_{n^n}^{r'}(x).$$

由于 $(f,\ g_i)=1,\ i=1,\ 2$, 因此 f(x) 的标准分解式为

$$f(x)=ap_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x).$$

其中 $p_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 在 $g_1(x),\ g_2(x)$ 的标准分解式中不出现. 于是

$$(fg_1,\ g_2)=q_1^{\min\{r_1,\ k_1\}}(x)\cdots q_m^{\min\{r_m,\ k_m\}}=(g_1,\ g_2)\,.$$

证法二: 显然, 若 $c_1(x)\mid g_1(x)c_1(x)\mid g_2(x)$, 则 $c_1(x)\mid f(x)g_1(x)$ 且 $c_1(x)\mid g_2(x)$. 反之, 若 $c_2(x)\mid f(x)g_1(x)$ 且 $c_2(x)\mid g_2(x)$, 由于 $(f,\ g_i)=1,\ i=1,\ 2$, 因此 $(f,\ g_1g_2)=1$. 于是存在 $u(x),\ v(x)\in K[x]$, 使得 $u(x)f(x)+v(x)g_1(x)g_2(x)=1$. 从而

$$u(x)f(x)g_1(x)+v(x)g_1^2(x)g_2(x)=g_1(x).$$

因此 $c_2(x)\mid g_1(x)$. 由上述推出 , $(fg_1,\ g_2)=(g_1,\ g_2)\,.$

问题 1.247 设 K 是数域, 证明: $K[x]$ 中一个 n 次 $(n \geqslant 1)$ 多项式 $f(x)$ 能被它的导数整除的充分必要条件是它与一个一次因式的 n 次幂相伴.

证明 充分性: 设 $f(x)=a(cx+b)^n$, 则

$$f'(x)=na(cx+b)^{n-1}c.$$

从而

$$f'(x) \mid f(x).$$

必要性: 设 $f'(x) \mid f(x)$, 则 $(f(x), f'(x)) = cf'(x)$, 其中 c^{-1} 是 $f'(x)$ 的首项系数. 由于用 $(f(x), f'(x))$ 去除 $f(x)$ 所得的商式 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式 (不计重数), 且 $g(x)$ 没有重因式, 因此

$$f(x)=\mathrm{cg}(x)f'(x).$$

由于 $\deg f(x)=n$, $\deg f'(x)=n-1$, 因此 $g(x)=a(x+b)$. 从而

$$f(x)=a(x+b)^n.$$

问题 1.248 设 K 是一个数域，$f(x) \in K[x]$ 且 $f(x)$ 的次数 n 大于 0. 证明: 如果在 $K[x]$ 中，$f(x) \mid f(x^m)$, m 是一个大于 1 的整数, 那么 $f(x)$ 的复根只能是 0 或单位根.

证明 任取 $f(x)$ 的一个复根 c, 则 $f(c)=0$. 由于在 $K[x]$ 中，$f(x) \mid f(x^m)$, 因此存在 $h(x) \in K[x]$, 使得

$$f(x^m) = h(x)f(x). \tag{1.85}$$

x 用 c 代人, 从上式得 $f(c^m) = h(c)f(c) = 0$. 于是 c^m 是 $f(x)$ 的一个复根.
x 用 c^m 代人, 从(1.85)式得 $f\left(c^{m^2}\right) = h(c^m) f(c^m) = 0$. 于是 c^{m^2} 也是 $f(x)$ 的一个复根. 依次下去可得，$c, c^m, c^{m^2}, c^{m^3}, \cdots$ 都是 $f(x)$ 的复根. 把 $f(x)$ 看成 $\mathbf{C}[x]$ 中的多项式, 由于 $\deg f(x) = n$, 因此 $f(x)$ 恰有 n 个复根 (重根按重数计算). 于是必存在正整数 j, 使得 $c^{m^i} = c^{m^i}$ 对于某个正整数 $i < j$. 由此得出 $c^{m^i}\left(c^{m^i - m^i} - 1\right) = 0$. 因此 $c^{m^i} = 0 c^{m^i - m^i} = 1$. 从而 $c = 0$ 或 c 是单位根.

笔记 从证明过程可以看出, 运用一元多项式环的通用性质才能把从 c 是 $f(x)$ 的复根推导出 $c^m, c^{m^2}, c^{m^3}, \cdots$ 都是 $f(x)$ 的复根的道理讲清楚. 否则, 不仅道理说不清楚, 而且很容易产生差错.

问题 1.249 设 K 是一个数域，R 是一个有单位元的交换环, 且 R 可看成是 K 的一个扩环, 设 $a \in R$, 令

$$J_a = \{f(x) \in K[x] \mid f(a) = 0\},$$

设 $J_a \neq \{0\}$, 证明:

(1) J_a 中存在唯一的首一多项式 $m(x)$, 使得

$$J_a = \{h(x)m(x) \mid h(x) \in K[x]\}; \tag{1.86}$$

(2) 如果 R 是无零因子环, 那么第 (1) 小题中的 $m(x)$ 在 $K[x]$ 中不可约.

证明 (1) 在 J_a 中取一个次数最低的首一多项式, 记作 $m(x)$, 任取 $f(x) \in J_a$, 在 $K[x]$ 中, 用 $m(x)$ 去除 $f(x)$, 作带余除法:

$$f(x) = h(x)m(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg m(x).$$

假如 $r(x) \neq 0$, x 用 a 代入, 从上式得

$$f(a) = h(a)m(a) + r(a).$$

由此得出, $r(a) = 0$, 从而 $r(x) \in J_a$, 这与 $m(x)$ 的取法矛盾, 因此 $r(x) = 0$. 即 $f(x) = h(x)m(x)$, 从而(1.86)式成立. 设首一多项式 $m_1(x)$ 也使得

$$J_a = \{h(x)m_1(x) \mid h(x) \in K[x]\},$$

则 $m(x) \mid m_1(x)$ 且 $m_1(x) \mid m(x)$. 从而 $m(x) \sim m_1(x)$. 又由于它们首一, 因此 $m(x) = m_1(x)$.

(2) 假如 $m(x)$ 在 $K[x]$ 中可约, 则在 $K[x]$ 中有

$$m(x) = m_1(x)m_2(x),\ \deg m_i(x) < \deg m(x),\ i = 1,\ 2.$$

x 用 a 代入, 从上式得

$$m(a) = m_1(a)m_2(a).$$

由于 $m(a) = 0$, 且 R 是无零因子环, 因此 $m_1(a) = 0$ 或者 $m_2(a) = 0$. 从而 $m_1(x) \in J_a$ 或者 $m_2(x) \in J_a$, 这与 $m(x)$ 是 J_a 中次数最低的多项式矛盾. 所以 $m(x)$ 在 $K[x]$ 中不可约.

问题 1.250 取 K 为复数域 $\mathbf{C}$, 取 R 为 $\mathbf{C}[A]$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$J_A m(x).$$

解

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2(A-I).$$

因此

$$A^2 - 2A + 2I = 0.$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2,$$

$$(A) = A^2 - 2A + 2I = 0.$$

则 $f(A) = A^2 - 2A + 2I = 0$. 从而 $f(x) \in J_A$, 由上题知, $m(x) \mid f(x)$. 在 $\mathbf{C}[x]$ 中,

$$f(x) = [x - (1+\mathrm{i})][x - (1-\mathrm{i})].$$

显然, $x - (1 \pm \mathrm{i}) \notin J_A$, 因此 $m(x) = f(x)$. 即

$$m(x) = x^2 - 2x + 2.$$

问题 1.251 设 $f(x),\ g(x)\in\mathbf{C}[x]$，证明：如果 $f^{-1}(0)=g^{-1}(0)$，且 $f^{-1}(1)=g^{-1}(1)$，那么 $f(x)=g(x)$.

证明 设 $\max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\}=n$，不妨设 $f(x)$ 的次数为 n，显然 $f^{-1}(0)\cap f^{-1}(1)=\varnothing$，如果能证明

$$\left|f^{-1}(0)\cup f^{-1}(1)\right|\geqslant n+1.$$

那么由于 $f^{-1}(0)=g^{-1}(0)$ 且 $f^{-1}(1)=g^{-1}(1)$，因此 $f(x)=g(x)$. 设 $f(x),\ f(x)-1$ 的标准分解式分别为

$$f(x)=a\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{r_i},$$

$$f(x)-1=a\prod_{j=1}^{s}(x-d_j)^{t_j}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=n=\sum\limits_{j=1}^{s}t_j$. 显然

$$f^{-1}(0)=\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m\},\ f^{-1}(1)=\{d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m\},$$

因此 $\left|f^{-1}(0)\cup f^{-1}(1)\right|=m+s$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=(f(x)-1)'\\&=\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{r_i-1}\cdot\prod_{j=1}^{s}(x-d_j)^{t_j-1}\cdot h(x),\end{aligned}$$

其中 $h(x)$ 不能被 $x-c_i$ 整除，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$; 也不能被 $x-d_j$ 整除, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ s$. 于是

$$\sum_{i=1}^{m}(r_i-1)+\sum_{j=1}^{s}(t_j-1)\leqslant\deg f'(x)=n-1.$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(r_i-1)+\sum_{j=1}^{s}(t_j-1)&=\sum_{i=1}^{m}r_i-m+\sum_{j=1}^{s}t_j-s\\&=2n-(m+s).\end{aligned}$$

因此 $2n-(m+s)\leqslant n-1$. 由此得出 $m+s\geqslant n+1$. 即

$$\left|f^{-1}(0)\cup f^{-1}(1)\right|\geqslant n+1.$$

从而

$$f(x)=g(x).$$

定理 1.11

实数域上的不可约多项式有且只有一次多项式和判别式小于 0 的二次多项式.

证明 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 是不可约的, 把 $f(x)$ 看成复系数多项式, 根据代数基本定理, $f(x)$ 有一个复根 c.

情形 1:c 是实数, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中有一次因式 $x-c$. 由于 $f(x)$ 不可约, 因此 $f(x) \sim (x-c)$, 从而

$$f(x) = a(x-c),\ a \in \mathbb{R}^*$$

情形 2:c 是虚数, 则 $\bar{c} \neq c$. 故 $\bar{c}$ 也是 $f(x)$ 的一个复根, 于是在 $\mathbb{C}[x]$ 中

$$(x-c) \mid f(x), \qquad (x-\bar{c}) \mid f(x).$$

由于 $x-c$ 与 $x-\bar{c}$ 互素, 因此在 $\mathbb{C}[x]$ 中

$$(x-c)(x-\bar{c}) \mid f(x),$$

即

$$x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c} \mid f(x).$$

由于 $c+\bar{c}$ 与 $c\bar{c}$ 都是实数, 且整除性不随数域的扩大而改变, 因此在 $\mathbb{R}[x]$ 中

$$x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c} \mid f(x),$$

由于 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中不可约, 因此 $f(x) \sim (x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c})$, 从而

$$f(x) = a[x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c}], \qquad a \in \mathbb{R}^*.$$

由于 $f(x)$ 有虚根, 因此 $f(x)$ 的判别式小于 0. 反之, $\mathbb{R}[x]$ 中任意一个一次多项式都是不可约的, 判别式小于 0 的二次多项式由于没有实根, 因此没有一次因式, 从而也是不可约的.

问题 1.252 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个复系数多项式, 其次数 $n\geqslant 1$. 令

$$M=\max\left\{\left|a_{n-1}\right|,\ \left|a_{n-2}\right|,\ \cdots,\ \left|a_0\right|\right\},$$

则当 $|z|\geqslant 1+\frac{M}{|a_n|}$ 时, 有

$$\left|a_nz^n\right|>\left|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0\right|.$$

证明 当 $M=0$ 时, 结论显然成立. 下设 $M\neq 0$. 当 $|z|\geqslant 1+\frac{M}{|a_n|}$ 时, 有 $|z|>1$ 且 $|a_n|\geqslant\frac{M}{|z|-1}$. 从而有

$$\begin{aligned}\left|a_nz^n\right|&=\left|a_n\right||z|^n\geqslant\frac{M|z|^n}{|z|-1}>\frac{M\left(|z|^n-1\right)}{|z|-1}\\&=M\left(|z|^{n-1}+\cdots+|z|+1\right)\\&\geqslant\left|a_{n-1}\right||z|^{n-1}+\cdots+\left|a_1\right||z|+\left|a_0\right|\\&=\left|a_{n-1}z^{n-1}\right|+\cdots+\left|a_1z\right|+\left|a_0\right|\\&\geqslant\left|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0\right|.\end{aligned}$$

问题 1.253 求多项式 x^n+1 别在复数域上和实数域上的标准分解式.

解 先求 x^n+1 的全部复根. $z=r(\cos\theta+\mathrm{isin}\theta)$ 是 x^n+1 的复根

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\\
&\Longleftrightarrow r^n=1\text{ 且}n\theta=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\\
&\Longleftrightarrow r=1\text{ 且}\theta=\frac{(2k+1)\pi}{n},\ k\in\mathbf{Z}\\
&\Longleftrightarrow z=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n},\ k\in\mathbf{Z}.
\end{aligned}
$$

令

$$
w_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}},\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.
$$

易证 $w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_{n-1}$ 两两不等, 从而它们是 x^n+1 的全部复根, 因此 x^n+1 在 $\mathbf{C}[x]$ 中的标准分解式为

$$
x^n+1=(x-w_0)(x-w_1)\cdots(x-w_{n-1}).
$$

当 $0\leqslant k<n$ 时, 有从而 $\overline{w_k}=w_{n-k-1}$. 于是

$$
w_k+w_{n-k-1}=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}.
$$

情形 1: $n=2m+1$. 此时有

$$
w_m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2m+1)x}{2m+1}}=-1.
$$

从而在 $\mathbf{R}[x]$ 中 $x^{2m+1}+1$ 的标准分解式为

$$
\begin{aligned}
x^{2m+1}+1&=(x-w_0)(x-w_{2m})\cdots(x-w_{m-1})(x-w_{m+1})(x-w_m)\\
&=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{2m+1}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}+1\right)(x+1)\\
&=(x+1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m+1}+1\right).
\end{aligned}
$$

情形 2:$n=2m$. 此时在 $\mathbf{R}[x]$ 中 $x^{2m}+1$ 的标准分解式为

$$
\begin{aligned}
x^{2m}+1=&(x-w_0)(x-w_{2m-1})\cdots(x-w_{m-2})(x-w_{m+1})(x-w_{m-1})(x-w_m)\\
=&\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{2m}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(2m-3)\pi}{2m}+1\right)\cdot\\
&\left(x^2-2x\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}+1\right)\\
=&\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m}+1\right).
\end{aligned}
$$

问题 1.254 求多项式 x^n-1 在实数域上的标准分解式.

解 记 $\xi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. 在 $\mathbf{C}[x]$ 中, 有

$$x^n-1=(x-1)(x-\xi)\left(x-\xi^2\right)\cdots\left(x-\xi^{n-1}\right).$$

当 $0<k<n$ 时, 有 $\xi^k\xi^{n-k}=1$, 由于 $\xi^k\overline{\xi^k}=\left|\xi^k\right|^2=1$, 因此 $\xi^k=\xi^{n-k}$. 从而 $\xi^k+\xi^{n-k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$. 情形 1:$n=2m+1$. 此时有

$$\begin{aligned}
x^{2m+1}-1&=(x-1)(x-\xi)\left(x-\xi^{2m}\right)\cdots\left(x-\xi^m\right)\left(x-\xi^{n+1}\right)\\
&=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{2m+1}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{2m\pi}{2m+1}+1\right)\\
&=(x-1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+1\right).
\end{aligned}$$

情形 2:$n=2m$. 此时有 $\xi^m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}m\pi}{2m}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$. 从而

$$\begin{aligned}
x^{2m}-1&=(x-1)(x-\xi)\left(x-\xi^{2m-1}\right)\cdots\left(x-\xi^{n-1}\right)\left(x-\xi^{n+1}\right)\left(x-\xi^m\right)\\
&=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{2m}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{2(m-1)\pi}{2m}+1\right)(x+1)\\
&=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).
\end{aligned}$$

问题 1.255 证明:

$$\cos\frac{\pi}{2m+1}\cos\frac{2\pi}{2m+1}\cdots\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m}.$$

证明 在上题的公式中，x 用 -1 代人, 得

$$-2=-2\prod_{k=1}^{m}\left(2+2\cos\frac{2k\pi}{2m+1}\right).$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^m}&=\prod_{k=1}^{m}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{2m+1}\right)\\&=\prod_{k=1}^{m}2\cos^2\frac{k\pi}{2m+1}\end{aligned}$$

由此得出

$$\frac{1}{2^m}=\prod_{k=1}^{m}\cos\frac{k\pi}{2m+1}.$$

问题 1.256 证明:

$$\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.$$

证明 从上题的公式

$$x^{2m}-1=\left(x^2-1\right)\left(x^{2(m-1)}+x^{2(m-2)}+\cdots+x^4+x^2+1\right)$$

得

$$x^{2(m-1)}+x^{2(m-2)}+\cdots+x^4+x^2+1=\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).$$

x 用 1 代人, 从上式得于是

$$m=\prod_{k=1}^{m-1}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{m}\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{m}{2^{m-1}}&=\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{m}\right)\\&=\prod_{k=1}^{m-1}2\sin^2\frac{k\pi}{2m}\end{aligned}$$

由此得出

$$\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}=\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{2m}.$$

问题 1.257 设实系数多项式 $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 的 3 个复根都是实数, 证明:$a_2^2\geqslant 3a_1$.

证明 设 $f(x)$ 的 3 个复根为实数 c_1, c_2, c_3. 则

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant (c_1-c_2)^2+(c_2-c_3)^2+(c_3-c_1)^2\\
&=2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)-2\left(c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1\right)\\
&=2\left[(c_1+c_2+c_3)^2-2c_1c_2-2c_1c_3-2c_2c_3\right]-2\left(c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1\right)\\
&=2\left(c_1+c_2+c_3\right)^2-6\left(c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3\right)\\
&=2\left(-a_2\right)^2-6a_1.
\end{aligned}$$

从而 $a_2^2\geqslant 3a_1$.

问题 1.258 设 $f(x)$ 是实系数多项式, 其次数 $n \geqslant 2$, 证明: 如果对任意 $t \in \mathbf{R}$ 都有 $f(t) \geqslant 0$, 那么存在两个实系数多项式 $g(x)$, $h(x)$, 使得

$$f(x) = g^2(x) + h^2(x).$$

证明 把 $f(x)$ 因式分解, 得

$$f(x) = a\,(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_s)^{r_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\cdots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{k_m}.$$

其中 $c_1, \cdots, c_s$ 是两两不等的实数; $(p_1, q_1), \cdots, (p_m, q_m)$ 是不同的实数对, 且满足 $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$; $r_1, \cdots, r_i, k_1, \cdots, k_m$ 都是非负整数. 由于 $f(t) \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, 因此 $a > 0$, 且 $r_1, \cdots, r_s$ 都是偶数 (假如有 r_j 是奇数, 则可以找到 t 使得 $f(t) < 0$ 矛盾). 设 $r_i = 2r_i'$, 则

$$f(x) = a\left(x^2-2c_1x+c_1^2\right)^{r_1}\cdots\left(x^2-2c_sx+c_s^2\right)^{r_s'}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\cdots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{k_m}. \tag{1.87}$$

则(1.87)式中出现的二次多项式都形如 x^2+bx+c, 其中 $b^2-4c \leqslant 0$. 用待定系数法可以证明这种二次多项式可以表示成

$$x^2+bx+c = (d_1x+e_1)^2 + (d_2x+e_2)^2 \tag{1.88}$$

分别比较二次项、一次项的系数以及常数项, 得

$$1 = d_1^2 + d_2^2,$$

$$b = 2d_1e_1 + 2d_2e_2, \tag{1.89}$$

$$c = e_1^2 + e_2^2. \tag{1.90}$$

取 $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $d_1^2 + d_2^2 = 1$, 代人(1.89)式, 得

$$b = e_1 + \sqrt{3}e_2. \tag{1.91}$$

从(1.91)式得, $e_1 = b - \sqrt{3}e_2$, 代人(1.90)式得

$$c = b^2 - 2\sqrt{3}be_2 + 4e_2^2. \tag{1.92}$$

从(1.92)式可以看出, e_2 应当是二次方程

$$4y^2 - 2\sqrt{3}by + b^2 - c = 0 \tag{1.93}$$

的实根. 由于二次方程(1.93)的判别式

$$\Delta = (-2\sqrt{3}b)^2 - 4\cdot 4\left(b^2-c\right) = 4\left(4c-b^2\right) \geqslant 0,$$

因此方程(1.93)有实根, 从而可解得 e_2, 进而可求出 e_1. 所以(1.88) 式的确成立. 设 $f_1(x) = g_1^2(x)+$

$h_1^2(x)$, $f_2(x)=g_2^2(x)+h_2^2(x)$, 则

$$\begin{aligned}
f_1(x)f_2(x)&=\left[g_1^2(x)+h_1^2(x)\right]\left[g_2^2(x)+h_2^2(x)\right]\\
&=\begin{vmatrix} g_1(x) & -h_1(x)\\ h_1(x) & g_1(x)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} g_2(x) & -h_2(x)\\ h_2(x) & g_2(x)\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} g_1(x)g_2(x)-h_1(x)h_2(x) & -g_1(x)h_2(x)-h_1(x)g_2(x)\\ h_1(x)g_2(x)+g_1(x)h_2(x) & -h_1(x)h_2(x)+g_1(x)g_2(x)\end{vmatrix}\\
&=\left[g_1(x)g_2(x)-h_1(x)h_2(x)\right]^2+\left[g_1(x)h_2(x)+h_1(x)g_2(x)\right]^2.
\end{aligned}$$

用数学归纳法可以证明: 若 $f_i(x)=g_i^2(x)+h_i^2(x)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ v$, 则存在 $g(x)$, $h(x)\in\mathbf{R}[x]$, 使得

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_v(x)=g^2(x)+h^2(x).$$

于是由(1.87)式和(1.88)式得, 存在 $g(x)$, $h(x)\in\mathbf{R}[x]$, 使得

$$f(x)=g^2(x)+h^2(x).$$

笔记 证明例 10 的关键是把 $f(x)$ 分解成实系数不可约多项式的乘积, 并且从已知条件推出 $f(x)$ 的一次因式的幂指数应当都是偶数, 从而 $f(x)$ 可分解成二次多项式的方幂的乘积, 其中每个二次因式都形如 x^2+bx+c, 且满足 $b^2-4c\leqslant 0$. 然后对 x^2+bx+c (其中 $b^2-4c\leqslant 0$) 很容易用待定系数法证明它可以表示成两个一次多项式的平方和, 最后可证得所要求的结论.

引理 1.3

(高斯 (Gauss) 引理) 两个本原多项式的乘积还是本原多项式. ♡

证明 设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

是两个本原多项式. 设

$$h(x) = f(x)g(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

其中 $c_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j$, $s = 0, 1, \cdots, n+m$. 假如 $h(x)$ 不是本原多项式, 则存在一个素数 p, 使得

$$p \mid c_s, \quad s = 0, 1, 2, \cdots, n+m.$$

由于 $f(x)$ 是本原多项式, 因此 p 不能同时整除 $f(x)$ 的每一项的系数. 于是存在 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 满足

$$p \mid a_0, \ p \mid a_1, \ \cdots, \ p \mid a_{k-1}, \ p \times a_k. \tag{1.94}$$

由于 $g(x)$ 是本原的, 因此存在 $l(0 \leqslant l \leqslant m)$ 满足

$$p \mid b_0, \ p \mid b_1, \ \cdots, \ p \mid b_{l-1}, \ p \times b_l. \tag{1.95}$$

考虑 $h(x)$ 的 $k+l$ 次项的系数:

$$c_{k+1} = a_{k+1} b_0 + \cdots + a_{k+1} b_{l-1} + a_k b_l + a_{k-1} b_{l+1} + \cdots + a_0 b_{k+l}$$

由(1.94)(1.95)两式以及 $p \mid c_{k+l}$ 得 , $p \mid a_k b_l$. 由于 p 是素数, 因此 $p \mid a_k$ 或 $p \mid b_l$. 矛盾. 于是 $h(x)$ 是本原多项式.

定理 1.12

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个次数 n 大于 0 的整系数多项式, 如果 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根, 其中 $p,\ q$ 是互素的整数, 那么 $p\,|a_n,\ q|\,a_0$.

证明 设 $f(x)=rf_1(x)$, 其中 $r\in\mathbf{Z}^*$, $f_1(x)$ 是本原多项式. 设 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的一个根, 则 $0=f\left(\frac{q}{p}\right)=rf_1\left(\frac{q}{p}\right)$. 从而 $\frac{q}{p}$ 也是 $f_1(x)$ 的一个根. 于是在 $\mathbf{Q}[x]$ 中, $\left(x-\frac{q}{p}\right)\mid f_1(x)$. 因此 $(px-q)\mid f_1(x)$. 由于 $(p,\ q)=1$, 因此 $px-q$ 是本原多项式.

$$f_1(x)=(px-q)g(x),$$

其中 $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是本原多项式. 于是 $f(x)=r(px-q)g(x)$ 分别比较上式两边多项式的首项系数与常数项, 得

$$a_n=rpb_{n-1},\qquad a_0=-rqb_0.$$

因此 $p\,|a_n,\ q|\,a_0$.

笔记 从定理的证明过程看到, 如果 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根, 且 $(p,\ q)=1$, 那么存在一个整系数多项式 $g(x)$, 使得 $f(x)=(px-q)g(x)$. 当 $\frac{q}{p}\neq\pm1$ 时, 可推出

$$\frac{f(1)}{p-q}\in\mathbf{Z},\qquad\frac{f(-1)}{p+q}\in\mathbf{Z}.$$

因此如果计算出 $\frac{f(1)}{p-q}\notin\mathbf{Z}$ 或 $\frac{f(-1)}{p+q}\notin\mathbf{Z}$, 那么 $\frac{q}{p}$ 便不是 $f(x)$ 的根. 这种判断方法在求整系数多项式的有理根时很有用.

定理 1.13

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个次数 n 大于 0 的整系数多项式, 如果存在一个素数 p, 使得

$$p \mid a_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \quad p \nmid a_0,\ p^2 \nmid a_n,$$

那么 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 假如 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则存在两个次数分别为 $n_1,\ n_2\,(n_i<n,\ i=1,\ 2)$ 的整系数多项式 $f_1(x),\ f_2(x)$, 使得

$$f(x)=f_1(x)f_2(x).$$

不定元 x 用 $\mathbf{Q}(x)$ 中的元素 $\frac{1}{x}$ 代入, 从从上式得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f_1\left(\frac{1}{x}\right)f_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

在上式两边乘以 x^n, 得

$$x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=x^{n_1}f_1\left(\frac{1}{x}\right)x^{n_2}f_2\left(\frac{1}{x}\right).$$

显然, $x^{n_i}f_i\left(\frac{1}{x}\right)$ 是整系数多项式, 且次数为 $n_i,\ i=1,\ 2.$

$$x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n.$$

由已知条件, 据 Eisenstein 判别法得, $x^nf\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 这与上式矛盾. 因此 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

问题 1.259 设 p 是一个素数, 多项式

$$f_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

称为 p 阶分圆多项式. 证明 $f_p(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 我们有 x 用 $x+1$ 代人, 从上式得

$$(x-1)f_p(x)=x^p-1.$$

$$\begin{aligned}xf_p(x+1)&=(x+1)^p-1\\&=x^p+px^{p-1}+\cdots+c_p^kx^{p-k}+\cdots+px.\end{aligned}$$

于是 $\quad g(x):=f_p(x+1)=x^{p-1}+px^{p-2}+\cdots+c_p^kx^{p-k-1}+\cdots+p$. 我们知道

$$\mathrm{C}_p^k=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!},\qquad 1\leqslant k<p.$$

由于 $(p,\ k!)=1$, 因此

$$k!\mid(p-1)\cdots(p-k+1).$$

从而

$$p\mid \mathrm{C}_p^k,\ 1\leqslant k<p.$$

又 $p\times 1$, $p^2\times p$, 因此 $g(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 从而 $f_p(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

笔记 $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=(x-\xi)\left(x-\xi^2\right)\cdots\left(x-\xi^{-1}\right)$, 其中 $\xi=\mathrm{i}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}}$. 由于 p 是素数, 因此对任意 $j(1\leqslant j<p)$, 都有 $(p,\ j)=1$, 得, $\xi,\ \xi^2,\ \cdots,\ \xi^{p-1}$ 都是本原 p 次单位根. 显然它们是全部本原 p 次单位根, 因此 $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 是 p 阶分圆多项式. 分圆多项式的定义如下: 设 n 是一个正整数, $\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_r$ 是全部两两不等的本原 n 次单位根, 令

$$f_n(x):=(x-\eta_1)(x-\eta_2)\cdots(x-\eta_r),$$

则称 $f_n(x)$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶分圆多项式.

问题 1.260 设 m, n 都是正整数, 且 $m < n$, 证明: 如果 $f(x)$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的 m 次多项式, 那么对任意素数 p, 都有 $\sqrt[n]{p}$ 不是 $f(x)$ 的实根.

证明 假如 $\sqrt[n]{p}$ 是 $f(x)$ 的实根, 则 $f(x)$ 作为实数域上的多项式有一次因式 $x-\sqrt[n]{p}$. 由于 $(\sqrt[n]{p})^n = p$, 因此 $\sqrt[n]{p}$ 是多项式 $g(x) = x^n - p$ 的一个实根. 从而 $g(x)$ 作为实数域上的多项式有一次因式 $x - \sqrt[n]{p}$. 于是在 $\mathbf{R}[x]$ 中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素. 由于互素性不随数域的扩大而改变, 因此在 $\mathbf{Q}[x]$ 中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 也不互素. 又由于素数 p 能整除 $g(x)$ 的首项系数以外的一切系数, 但不能整除首项系数 1, 且 $p^2 \times p$, 因此 $g(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. 从而 $g(x)$ 能整除 $f(x)$. 由此得出 , $n \leqslant m$. 这与 m<n 矛盾. 因此 $\sqrt[n]{p}$ 不是 $f(x)$ 的实根.

问题 1.261 设 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ 是一个次数大于 0 的整系数多项式, 证明: 如果 $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ 是一个奇数, 那么 1 和 -1 都不是 $f(x)$ 的根.

证明 由于 $f(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ 是奇数, 因此 1 不是 $f(x)$ 的根. 设 $f(x) = mg(x)$, 其中 $g(x)$ 是本原多项式 , $m \in \mathbf{Z}^*$. 假如 -1 是 $f(x)$ 的根, 则 $0 = f(-1) = mg(-1)$, 从而 $g(-1) = 0$. 于是 $g(x)$ 有一次因式 $x + 1$. 据本节性质 4 得, 存在整系数多项式 h(x) , 使得 g(x)=(x+1) h(x) , 于是有

$$f(x) = m(x + 1)h(x).$$

x 用 1 代入, 从上式得, $f(1) = 2m \cdot h(1)$. 这与 $f(1)$ 是奇数矛盾. 因此 -1 不是 $f(x)$ 的根.

笔记 本题不需要什么计算就证明了 -1 不是 $f(x)$ 的根. 也可以采用下述方法证明这一结论: 假如 -1 是 $f(x)$ 的根, 则

$$0 = f(-1) = a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \cdots + a_1(-1) + a_0.$$

当 n 是奇数时, 从上式得

$$a_n + a_{n-2} + \cdots + a_1 = a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_2 + a_0.$$
$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 2\left(a_n + a_{n-2} + \cdots + a_1\right).$$

这与已知条件矛盾. 当 n 是偶数时, 类似的计算可得出与已知条件矛盾. 因此 -1 不是 $f(x)$ 的根.

问题 1.262 设 $f(x)$ 是一个次数大于 0 的首一整系数多项式, 证明: 如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数, 那么 $f(x)$ 没有有理根.

证明 假如 $f(x)$ 有一个有理根 b, 由于 $f(x)$ 的首项系数为 1, 因此 b 必为整数. 于是 $x-b$ 是本原多项式, 且 $x-b$ 是 $f(x)$ 的一个因式. 又由于 $f(x)$ 也是本原多项式, 存在整系数多项式 $h(x)$, 使得 x 分别用 0 和 1 代入, 从上式得

$$f(x)=(x-b)h(x).$$

$$f(0)=(-b)h(0), \quad f(1)=(1-b)h(1).$$

由于 $-b$ 和 $-b+1$ 必有一个是偶数, 因此 $f(0)$ 和 $f(1)$ 必有一个是偶数. 这与已知条件矛盾, 所以 $f(x)$ 没有有理根.

问题 1.263 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两不等的整数. 证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 假如 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则

$$f(x)=g_1(x)g_2(x), \quad \deg g_i(x)<n, \quad g_i(x)\in\mathbf{Z}[x],\ i=1,\ 2.$$

x 用 a_j 代人, 从上式得

$$-1=f(a_j)=g_1(a_j)g_2(a_j), \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

从而 $g_1(a_j)$ 与 $g_2(a_j)$ 一个为 1, 另一个为 -1. 于是 $g_1(a_j)+g_2(a_j)=0$, $j=1, 2, \cdots, n$. 这表明多项式 $g_1(x)+g_2(x)$ 有 n 个不同的根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 但是 $g_1(x)+g_2(x)$ 的次数小于 n, 因此, $g_1(x)+g_2(x)=0$, 从而 $f(x)=-g_1^2(x)$.$f(x)$ 的首项系数为 1, 这与 $-g_1^2(x)$ 的首项系数为负数矛盾. 因此 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

问题 1.264 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两不等的整数.
(1) 证明: 当 n 是奇数时, $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约;
(2) 证明: 当 n 是偶数且 $n\geqslant 6$ 时, $f(x)\mathbf{Q}$ 上不可约;
(3) 当 $n=2$ 或 4 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是否不可约?

证明 证明假如 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则

$$f(x)=g_1(x)g_2(x),\ \deg g_i(x)<n,\ g_i(x)\in\mathbf{Z}[x],\ i=1,\ 2.$$

x 用 a, 代人, 从上式得

$$1=f\left(a_j\right)=g_1\left(a_j\right)g_2\left(a_j\right),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

于是 $g_1\left(a_j\right)$ 与 $g_2\left(a_j\right)$ 同为 1, 或同为 -1. 从而

$$g_1\left(a_j\right)-g_2\left(a_j\right)=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

这表明多项式 $g_1(x)-g_2(x)$ 有 n 个不同的根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 但是 $g_1(x)-g_2(x)$ 的次数小于 n, 因此 $g_1(x)-g_2(x)=0$. 从而 $f(x)=g_1^2(x)$, 于是 $\deg f(x)=2\deg g_1(x)$. 这与已知 n 是奇数矛盾, 因此 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.
(2) 证明假如 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 由第 (1) 小题的证明过程得, $f(x)=g_1^2(x)$. 从而对一切 $t\in\mathbf{R}$, 有 $f(t)=g_1^2(t)\geqslant 0$. 不妨设

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<\cdots<a_n.$$

x 用 $a_1+\frac{1}{2}$ 代人, 由 $f(x)$ 的表达式得

$$\begin{aligned}f\left(a_1+\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{2}-a_2\right)\cdots\left(a_1+\frac{1}{2}-a_n\right)+1\\&=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\left(a_2-a_1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(a_n-a_1-\frac{1}{2}\right)+1.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{gathered}a_2-a_1-\tfrac{1}{2}\geqslant 1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2},\ \cdots,\\ a_1-a_1-\tfrac{1}{2}\geqslant(j-1)-\tfrac{1}{2}=\tfrac{2j-3}{2},\ \cdots,\\ a_n-a_1-\tfrac{1}{2}\geqslant(n-1)-\tfrac{1}{2}=\tfrac{2n-3}{2},\end{gathered}$$

且 $n\geqslant 6$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(a_2-a_1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(a_n-a_1-\frac{1}{2}\right)&\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-3}{2}\\&\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\\&=\frac{15\times 63}{64}>1.\end{aligned}$$

由于 n 是偶数, 因此

$$f\left(a_1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(a_2-a_1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(a_n-a_1-\frac{1}{2}\right)+1<-1+1=0,$$

矛盾, 因此当 n 为偶数且 $n\geqslant 6$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

(3) 解当 $n=2$ 或 4 时, $f(x)$ 有可能在 $\mathbf{Q}$ 上可约. 例如, $(x-1)(x+1)+1=x^2$,

$$\begin{aligned} x(x-1)(x+1)(x+2)+1 &= x^4+2x^3-x^2-2x+1 \\ &= \left(x^2+x-1\right)^2. \end{aligned}$$

问题 1.265 设 $f(x)=\left(x-a_1\right)^2\left(x-a_2\right)^2\cdots\left(x-a_n\right)^2+1$，其中 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 是两两不等的整数. 证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 假如 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则

$$f(x)=g_1(x)g_2(x),\ \deg g_i(x)<2n,\ g_i(x)\in\mathbf{Z}[x],\ i=1,\ 2.$$

x 用 a_j 代人, 从上式得

$$1=f\left(a_1\right)=g_1\left(a_1\right)g_2\left(a_j\right),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

于是 $g_1\left(a_j\right)$ 与 $g_2\left(a_j\right)$ 同为 1, 或同为 -1. 由于 $f(x)$ 没有实根, 因此 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 都没有实根. 从而 $g_i\left(a_1\right),\ g_1\left(a_2\right),\ \cdots,\ g_i\left(a_n\right)$ 同号，$i=1,\ 2$. 于是不妨设 $g_i\left(a_1\right)=g_i\left(a_2\right)=\cdots=g_i\left(a_n\right)=1,\ i=1,\ 2$.

情形 1: $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 中之一的次数小于 n. 不妨设 $\deg g_1(x)<n$，由于 $g_1(a_j)-1=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 因此多项式 $g_1(x)-1$ 有 n 个不同的根. 于是 $g_1(x)-1=0$. 从而 $f(x)=g_2(x)$, 这与 $\deg g_2(x)<2n$ 矛盾.

情形 2:$g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的次数都等于 n. 由于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 都是 $g_i(x)-1$ 的根, 且 $g_i(x)-1$ 的首项系数为 1, 因此

$$g_i(x)-1=\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right),\quad i=1,\ 2.$$

从而

$$\begin{aligned}f(x)&=\left[\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right)+1\right]^2\\&=\left(x-a_1\right)^2\left(x-a_2\right)^2\cdots\left(x-a_n\right)^2+1+2\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right).\end{aligned}$$

由此推出, $2\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right)=0$, 矛盾. 由于 $\deg g_1(x)+\deg g_2(x)=\deg f(x)=2n$, 因此只有上述两种可能的情形. 从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

问题 1.266 有理系数多项式 $f(x)=x^4+ux^2+v$ 何时在 $\mathbf{Q}$ 上可约?

解 先寻找 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约的必要条件. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则 $f(x)$ 在一阶因式或者有两个二次因式.

情形 1: $f(x)$ 有一次因式. 此时 $f(x)$ 有一个有理根 t, 从而 t^2 是二次多项式 x^2+ux+v 的有理根. 于是判别式 u^2-4v 是一个有理数的平方.

情形 2:$f(x)$ 有两个二阶因式, 此时

$$f(x)=\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)\left(b_2x^2+b_1x+b_0\right),\ a_2\neq 0,\ b_2\neq 0.$$

比较系数, 得

$$\begin{cases}1=a_2b_2,\\ 0=a_2b_1+a_1b_2,\\ u=a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2,\\ 0=a_1b_0+a_0b_1,\\ v=a_0b_0.\end{cases}$$

不妨取 $a_2=1,\ b_2=1$. 于是 $b_1=-a_1,\ u=b_0-a_1^2+a_0,\ a_1\left(b_0-a_0\right)=0,\ v=a_0b_0$. 若 $a_1=0$, 则 $b_1=0,\ u=b_0+a_0,\ v=a_0b_0$. 于是

$$u^2-4v=\left(b_0+a_0\right)^2-4a_0b_0=\left(b_0-a_0\right)^2.$$

若 $a_1\neq 0$, 则 $b_0=a_0,\ u=2a_0-a_1^2,\ v=a_0^2$. 于是

$$\pm 2\sqrt{v}-u=a_1^2.$$

综上所述, $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约的必要条件是: u^2-4v 是一个有理数的平方; 或者 v 是一个有理数的平方, 且 $\pm 2\sqrt{v}-u$ 是有理数的平方.

问题 1.267 设 $p(x)$ 是 n 次有理系数多项式, n 为大于 1 的奇数, 且 $p(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. 证明: 如果 c_1 和 c_2 是 $p(x)$ 的两个不同的复根, 那么 c_1+c_2 不是有理数.

证明 记 $c_1+c_2=c$. 假设 c 是有理数, 由于

$$0=p\left(c_2\right)=p\left(c-c_1\right),$$

因此 c_1 是多项式 $g(x):=p(c-x)$ 的一个复根. 由于 c 是有理数, 因此 $g(x)$ 是有理系数多项式. 由于 $g(x)$ 与 $p(x)$ 有公共复根 c_1, 因此它们在 $\mathbf{C}[x]$ 中有公共的一次因式 $x-c_1$, 从而不互素. 于是它们在 $\mathbf{Q}[x]$ 中也不互素. 由于 $p(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 因此 $p(x) \mid g(x)$. 从而存在有理系数多项式 $h(x)$, 使得 $g(x)=p(x)h(x)$. 由于 $g(x)$ 与 $p(x)$ 的次数相等, 因此 $h(x)$ 是非零有理数. 由于 n 是奇数, 因此 $g(x)$ 的首项系数是 $p(x)$ 的首项系数的相反数. 从而 $h(x)=-1$, 于是 $g(x)=-p(x)$.x 用 $\frac{c}{2}$ 代人得 , $g\left(\frac{c}{2}\right)=-p\left(\frac{c}{2}\right)$. 又 $g\left(\frac{c}{2}\right)=p\left(c-\frac{c}{2}\right)=p\left(\frac{c}{2}\right)$, 从而 $p\left(\frac{c}{2}\right)=0$. 于是 $p(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中有一次因式 $x-\frac{c}{2}$. 由于 $\deg p(x)=n>1$, 因此 $p(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 矛盾. 所以 c 不是有理数.

笔记 证明的思路是利用 c_2 是 $p(x)$ 的复根, 得出 $0=p\left(c_2\right)=p\left(c-c_1\right)$, 由此受到启发去考虑多项式 $g(x):=p(c-x)$, 使得 c_1 是 $g(x)$ 的一个复根, 从而 c_1 是 $p(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公共复根.

第 2 章 Algebra

2.1 行列式

1. 二阶行列式: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
2. 三阶行列式:
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\end{aligned}$$
   将 a_{ij} 所在的行和列划去, 剩下的元素按原来的次序组成低一阶的行列式, 称为 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij}. 而 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.
3. n 阶行列式:
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn} \\ &= a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}\end{aligned}$$
   也经常用 $\det \boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 若 $r \neq s$, 则
$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = 0$$
$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0$$
4. 行列式的八条性质:
   - 上 (下) 三角行列式的值等于其对角线元系之积.
   - 某行或某列全部为 0 , 则行列式的值等于 0 .
   - 用常数 c 乘以行列式的某一行或者某一列, 新的行列式值等于原来行列式值的 c 倍.
   - 交换行列式不同的两行 (列), 行列式的值改变符号.
   - 若行列式的两行或两列成比例, 则行列式的值为 0 , 特别地, 若行列式两行或两列相同, 则行列式的值为 0 .
   - 行列式中, 某行 (列) 元素均为两项之和, 则行列式可表示为两个行列式之和.
   - 行列式的某一行 (列) 乘以某个常数加到另一行 (列) 上, 行列式的值不变.
   - 行列式和其转置具有相同的值.
5. Cramer(克莱姆) 法则:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{cases}
$$

系数行列式记为 $|\boldsymbol{A}|$, 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则方程组有且仅有一组解. 令 $|A_j|$ 是由 $|\boldsymbol{A}|$ 去掉第 j 列, 换成方程组右侧的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 组成的列而成. 那么

$$
x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad x_2=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \cdots, x_n=\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}
$$

6. Vander Monde(范德蒙) 行列式:

$$
\begin{aligned}
V_n=&\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} \\
&=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})V_{n-1} \\
&=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
F_n=&\begin{vmatrix}
\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\
-1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\
0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1
\end{vmatrix} \\
&=\lambda F_{n-1}+a_n \\
&=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n
\end{aligned}
$$

8. 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 一个大数排在一个小数前面, 则称为一个逆序对. 一个排列的所有逆序对的总个数称为这个排列的逆序数. 设 k_1 后面有 m_1 个数比 k_1 小, k_2 后面有 m_2 个数比 k_2 小, $\cdots\cdots$, k_{n-1} 后面有 m_{n-1} 个数比 k_{n-1} 小, 那么排列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的逆序数为 $m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}$, 记为 $N(k_1, k_2, \cdots, k_n)$. 常序排列 $(1, 2, \cdots, n)$ 的逆序数为 0. 逆序数为偶数 (包括 0) 的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列. 将任意的 k_i 和 $k_j(i\neq j)$ 对换位置, 其余数不动, 则排列的奇偶性改变.

9. 设 S_n 为 1, 2, $\cdots$, n 的所有排列构成的集合, 则 S_n 的元素个数为 $n!.S_n$ 中的奇排列和偶排列各占一半.
10. 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n$, 通过 $N(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 次相邻对换, 可将 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 变成常序排列 $(1, 2, \cdots, n)$, 那么
$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$$
11. 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是一个 n 阶行列式, $k < n$. 又 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 及 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 是两组自然数且适合条件:
$$\begin{gathered} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n \end{gathered}$$
取行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 i_1 行, 第 i_2 行, $\cdots$, 第 i_k 行以及第 j_1 列, 第 j_2 列, $\cdots$, 第 j_k 列交点上的元素, 按原来 $|\boldsymbol{A}|$ 中的相对位置构成一个 k 阶行列式. 我们称之为 $|\boldsymbol{A}|$ 的一个 k 阶子式, 记为
$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \tag{2.1}$$
$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$
在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中去掉第 i_1 行, 第 i_2 行, $\cdots$, 第 i_k 行以及第 j_1 列, 第 j_2 列, $\cdots$, 第 j_k 列以后剩下的元素按原来的相对位置构成一个 $n-k$ 阶行列式. 这个行列式称为子式(2.1)的余子式, 记为
$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$
若令 $p = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$, $q = j_1 + j_2 + \cdots + j_k$, 记
$$\begin{aligned} &\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \\ =\ & (-1)^{p+q} M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$
称之为子式 (1.1) 的代数余子式.
12. Laplace 定理: 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式, 在 $|\boldsymbol{A}|$ 中任取 k 行 (列), 那么含于这 k 行 (列) 的全部

k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和等于 $|\boldsymbol{A}|$. 即若取定 k 个行: $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 则

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

同样地, 若取定 k 个列: $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$, 则

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_L\leqslant n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

2.2 矩阵

13. 上三角矩阵: 主对角线左下方的元蒙全部是 0; 下三角矩阵: 主对角线右上方的元素全部是 0 .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

14. 只有行数和列数都相等的两个矩阵才能进行加减法, 矩阵的加减法就是所有的相同位置的元素分别进行加减法. 矩阵的加减法满足交换律和结合律.
15. 矩阵的数乘运算就是用一个常数与矩阵的所有元系相乘.
16. 设有 $m \times k$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$ 以及 $k \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{k\times n}$, 设 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{m\times n}$, 则

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义, 矩阵乘法一般也不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

17. 矩阵乘法满足以下规则:

(1) 结合律: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(2) 分配律: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

(3) $c(\boldsymbol{AB}) = (c\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{B})$, c 为一个常数.

(4) 对任意 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n$, 其中, $\boldsymbol{I}_m$ 和 $\boldsymbol{I}_n$ 分别是 m 阶和 n 阶单位矩阵.

18. 若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 则 $\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{A}^s = \boldsymbol{A}^{r+s}$, $(\boldsymbol{A}^r)^s = \boldsymbol{A}^{rs}$.

19. 矩阵转置的运算规则: $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.
20. 若 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵. 若 $\boldsymbol{A}' = -\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵, 反对称阵的主对角线上的元素均为 0.
21. 一个矩阵的共轭矩阵就是将其每一个元素都变成共轭复数. $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵用 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 表示, $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵用 $\bar{\boldsymbol{A}}'$ 表示. 若 $\bar{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵. 若 $\bar{\boldsymbol{A}}' = -\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是斜 Hermite 矩阵.
22. n 阶基础矩阵是指 n^2 个 n 阶方阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$, $i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 它的 $(i,\ j)$ 位置的元素为 1, 其它元素全部为 0.
    - $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl} = \delta_{jk}\boldsymbol{E}_{il}$. 其中 δ_{jk} 为 Kronecker 符号, $j = k$ 时, $\delta_{jj} = 1$; $j \neq k$ 时, $\delta_{jk} = 0$.
    - 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 则 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{kl} = a_{jk}\boldsymbol{E}_{il}$.
23.
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$
24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}.\boldsymbol{O}$ 代表所有元素均为 0 的矩阵 (称为零矩阵).
25. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶上三角阵且主对角线上元素全为 0, 则 $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{O}$.
26. 任一 n 阶矩阵均可表示为一个对称阵和一个反对称阵之和. $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}') + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')$.
27. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵, 同时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆阵, 记为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}$. 凡是有逆阵的矩阵, 称为可逆阵或非奇异阵, 否则称为奇异阵.
28. 矩阵求逆运算规则:(以下假设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是非异阵)
    (1) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
    (2)$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
    (3) $c \neq 0, \quad (c\boldsymbol{A})^{-1} = c^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
    (4) $(\boldsymbol{A}')^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)'$.
29. 设 $A_{ij} = (-1)^{i-j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式, $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵记为 $\boldsymbol{A}^*$,

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n$$

$$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}, \quad (c\boldsymbol{A})^* = c^{n-1}\boldsymbol{A}^*, \quad (\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* \quad (|\boldsymbol{A}| \neq 0)$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* \quad (|\boldsymbol{A}| \neq 0)$$

$$(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*, \quad \left(\boldsymbol{A}^-\right)' = (\boldsymbol{A}')^-$$

30. 上 (下) 三角矩阵的逆矩阵也是上 (下) 三角矩阵. (反) 对称矩阵的逆矩阵也是 (反) 对称矩阵.
31. 以下形式的矩阵称为循环矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.
32. 三类初等变换:
(1) 第一类: 对调矩阵中两行 (列) 的位置;
(2) 第二类: 用一非零常数乘以矩阵的某一行 (列);
(3) 第三类: 将矩阵的某一行 (列) 乘以常数 c 后加到另一行 (列).
对单位阵施以第一类、第二类、第三类初等变换后得到的矩阵, 分别称为第一类、第二类、第三类初等矩阵.
33. 如果一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换后能变成 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是等价的, 或 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 任何一个 $m \times n$ 矩阵均与一个主对角线上元素等于 1 或 0, 而其余元素均为 0 的 $m \times n$ 矩阵相抵. 以下矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准型.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

34. 任意矩阵经过有限次初等行变换, 总可以变成阶梯型矩阵. (阶梯点的列指标随行数严格递增).
35. 三类初等矩阵形状如下:

第一类: 将单位阵的第 i 行与第 j 行对换 (或者第 i 列与第 j 列对换).

$$\boldsymbol{P}_{ij}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

第二类: 将单位阵的第 i 行乘以常数 c.(或者第 i 列乘以常数 c.)

$$\boldsymbol{P}_i(c)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}$$

第三类: 将单位阵的第 i 行乘以 c 后加到第 j 行 (或者第 j 列乘以 c 后加到第 i 列).

$$\boldsymbol{T}_{ij}(c)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&\vdots&&\vdots&&\\&&c&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

36. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 则对 $\boldsymbol{A}$ 做一次初等行变换后得到的矩阵, 等于用一个 m 阶相应的初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$ 后得到的积. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做一次初等列变换后得到的矩阵, 等于用一个 n 阶相应的初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$ 后所得的积.
37. 初等矩阵都是非异阵, 且其逆阵仍是同类初等矩阵.

$$P_{ij}^{-1}=P_{ij},\ P_i(c)^{-1}=P_i\left(\frac{1}{c}\right),\ T_{ij}(c)^{-1}=T_{ij}(-c)$$

38. 非异阵经初等变换后仍是非异阵, 奇异阵经初等变换后仍是奇异阵.
39. 三类初等矩阵的行列式如下:

$$|\boldsymbol{P}_{ij}|=-1,\ |\boldsymbol{P}_i(c)|=c,\ |\boldsymbol{T}_{ij}(c)|=1$$

40. 矩阵的相抵关系具有下列性质:

(1) $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $B \sim \boldsymbol{A}$;

(3) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

41. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶可逆阵 (非异阵), 则仅用初等行变换或仅用初等列变换就可以将它化为单位阵 $\boldsymbol{I}_n$.
42. 任一 n 阶非异阵均可表示成有限个初等矩阵的积.
43. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, $\boldsymbol{Q}$ 是一个 n 阶初等矩阵, 则 $|\boldsymbol{QA}| = |\boldsymbol{Q}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{AA}|$.
44. 一个 n 阶方阵 A 为非异阵的充分必要条件是它的行列式值不等于 0.
45. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A||B|$.
46. 一个奇异阵与任一同阶方阵之积仍为奇异阵, 两个同阶非异阵之积仍为非异阵.
47. 若 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.
48. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$), 则 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$ (或 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$), 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.
49. 分块矩阵的加减、数乘、乘法, 与普通矩阵类似 (略).
50. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶, n 阶方阵, 利用 Laplace 定理, 对于分块上 (下) 三角行列式有:

$$|\boldsymbol{G}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|, \quad |\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$$

51. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵, $\boldsymbol{D}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $n \times m$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆 (对 $\boldsymbol{D}$ 是否可逆不做要求), 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \left|\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|$$

若 $\boldsymbol{D}$ 可逆 (对 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆不做要求), 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$$

当 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ 都是可逆阵时, 有如下行列式的降阶公式:

$$|\boldsymbol{D}| \left|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\right| = |\boldsymbol{A}| \left|\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|$$

52. 设 S 是有限个向量组成的向量族且至少包含一个非零向量, 则 S 的极大无关组一定存在. (一般来说, 极大无关组并不唯一.)
53. 设 A, B 是 V 中的两组向量, A 中含有 r 个向量, B 中含有 s 个向量, 如果 A 中向量线性无关且 A 中每个向量均可用 B 中向量线性表示, 则 $r \leqslant s$. 逆否命题: “多”若可以用“少”来线性表示, 则“多”线性相关.
54. 设 A, B 都是线性无关的向量组. 又 A 中任一向量可用 B 中向量的线性组合来表示, B 中

任一向量也可用 A 中向量的线性组合来表示, 则这两个向量组所含的向量个数相等.

55. 设 A, B 都是向量族 S 的极大线性无关组, 则 A 与 B 所含的向量个数相等. 向量族 S 的极大无关组所含的向量个数称为 S 的秩, 记做 $\mathrm{rank}(S)$ 或 $\mathrm{r}(S)$.
56. 若向量组 A 和 B 可以互相线佚表示, 则称这两个向量组等价. 等价的向量组有相同的秩.
57. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空闰, 若在 V 中存在线佚无关的向量 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 使得 V 中任一向量均可表示为这组向量的线性组合, 则称 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基, 线性空回 V 称为 n 维线性空间 (具有维数 n). 如果不存在有限个向量组成 V 的一组基, 则称 V 是无限维线性空间.
58. n 维线性空间 V 中任一超过 n 个向量的向量组必线性相关.
59. 设 V 是 n 维线性空问, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 V 中的 n 个向量, 若它们适合下列条件之一, 则 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基.

    (1)$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关.

    (2) V 中任一向量均可由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性表示.
60. 基扩张定理: 设 V 是 n 维线性空间, $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是 V 中的 $m(m<n)$ 个线性无关的向量, 又假定 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 则必可在 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中选出 $n-m$ 个向量, 使之和 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 一起组成 V 的一组基. 等价表述: n 维线性空间 V 中任意 $m(m<n)$ 个线性无关的向量均可扩张成 V 的一组基, 或 V 的任意一个子空间的基均可扩张为 V 的一组基.
61. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的行秩.$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的列秩. 矩阵的行秩和列秩在初等变换下不变. 任一矩阵的行秩等于列秩.
62. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组, 则对任意的 m 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 矩阵 $\boldsymbol{QA}$ 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列向量也是 $\boldsymbol{QA}$ 的列向量的极大无关组.
63. 设 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于其非零行的个数, 且阶梯点所在的列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组.
64. 对任意一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在 m 阶非异阵 P 和 n 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.
65. 任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的转置 A' 有相同的秩.
66. 任一矩陎与非异阵相乘, 其秩不变.
67. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为非异阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩阵 (秩等于阶数).
68. 两个 $m\times n$ 矩阵等价的充分必要条件是它们具有相同的秩.
69. 两个向量组等价的充分必要条件是: 它们的秩相同, 且一个向量组可用另一个向量组线性表示.
70. 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 有一个 r 阶子式不等于 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 阶子式 (若存在) 都等于 0, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$. 反之, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 中必有一个 r 阶子式不等于 0, 而所有 $r+1$

阶子式都等于 0.

71. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, ($\boldsymbol{A}$ 是列满秩), 则必存在秩等于 n 的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$.

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$, ($\boldsymbol{A}$ 是行满秩), 则必存在秩等于 m 的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}_m$.

72. 设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

73.
- $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$.
- $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;
- $k\neq 0$, $\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$
- $|\mathrm{r}(\boldsymbol{A})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})|\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.
- Frobenius 不等式:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{r}(\boldsymbol{BC})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$$

- $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{AA}'\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

74. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,
- $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵 (即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$) 的充分必要条件是:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\right)=n$$

- $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵 (即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$) 的充分必要条件是:

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\right)+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\right)=n$$

- $\mathbf{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\right)\geqslant n$.
- 若 $\boldsymbol{B}$ 也是 n 阶方阵, 则:

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{I}_n\right)\leqslant \mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n\right)+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n\right)$$

75. 一个矩阵添加一行或一列, 其秩不变或增加 1.

76. 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, 且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n\\&=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{e}_n\end{aligned}$$

则 $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_n=b_n$. 有序数 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 称为 α 在基 $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ 下的坐标向量.

77. 设 V, U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, 若存在 V 到 U 上的一个一一对应的映射 φ, 使得对任意 V 中的向量 α, β 以及 $\mathbb{K}$ 中的数 k, 均有

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$$

$$\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$$

则称 V 与 U 这两个线性空间同构, 记为 $V\cong U$.

78. 数域 $\mathbb{K}$ 上的任一 n 维线性空间 V 均与 $\mathbb{K}$ 上的 n 维行向量空间 $\mathbb{K}^n$ 同构.

79. (1) 设 $\varphi: V \to U$ 为线性空间的同构, 则 $\varphi(0)=0$;

(2) φ 将线性相关的向量组映成线性相关的向量组, 将线性无关的向量组映成线性无关的向量组;

(3) 同构关系是一个等价关系, 即

(i) $V \cong V$;

(ii) 若 $V \cong U$, 则 $U \cong V$;

(iii) 若 $V \cong U$, $U \cong W$, 则 $V \cong W$;

(4) 数域 $\mathbb{K}$ 上的两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们具有相同的维数.

80. 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是线性空间 V 的基, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 中的向量. 它们在这组基下的坐标向量依次为 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$, 则向量组 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 有相同的秩.

81. 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的一组基, $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 是另一组基, 则 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 可用 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 的下列线性组合表示:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{f}_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{f}_n = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

上述表示式中 $\boldsymbol{e}_i$ 的系数组成了一个元系在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 这个矩阵的转置

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为从基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵. 过渡矩阵必是可逆阵. 从基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 到基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的过渡矩阵就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

82. 如果从基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}$, 从基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{B}$, 那么从基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{AB}$.

83. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, V_0 是 V 的非空子集, 且对 V_0 中的任意两个向量 α, β 以及 $\mathbb{K}$ 中任一数 k, 总有 $\alpha+\beta \in V_0$ 及 $k\alpha \in V_0$, 则称 V_0 是 V 的线性子空间, 简称子空间. V_0 在 V 的加法及数乘下是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 任一线性空间 V 至少有两个子空间, 一是零向量 $\{0\}$ 组成的子空间, 称为零子空间 (维数规定为 0), 另一个是 V 自身. 这两个子空间称为平凡子空间.

84. 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 定义它们的交 $V_1 \cap V_2$ 为既在 V_1 又在 V_2 中的全体向量组成的集合,

定义它们的和 V_1+V_2 为所有形如 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的向量的集合,其中 $\alpha \in V_1$, $\beta \in V_2$.$V_1\cap V_2$, V_1+V_2 都是 V 的子空间.

85. 设 S 是线性空间 V 的子集,记 $L(S)$ 为 S 中向量所有可能的线佚组合构成的子集. 则 $L(S)$ 是 V 的一个子空间,称之为由集合 S 生成的子空间,或 S 张成的子空间.
(1) $S\subseteq L(S)$ 且若 V_0 是包含集合 S 的子空间,则 $L(S)\subseteq V_0$, 即 $L(S)$ 是包含 S 的 V 的最小子空间;
(2)$L(S)$ 的维数等于 S 中极大无关组所含向量的个数,且若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 S 的极大无关组,则

$$L(S)=L\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m\right)$$

86. 设 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m$ 是线性空间 V 的子空间,则

$$L\left(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m\right)=V_1+V_2+\cdots+V_m$$

87. 设 $V_1,\ V_2$ 是线性空间 V 的子空间,则

$$\dim\left(V_1+V_2\right)=\dim V_1+\dim V_2-\dim\left(V_1\cap V_2\right)$$

88. 设 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m$ 是线性空间 V 的子空间,若对一切 $i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$,

$$V_i\cap\left(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_m\right)=0,$$

则称和 $V_1+V_2+\cdots+V_m$ 为直接和,简称直和,记为

$$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$$

89. 设 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m$ 是线性空间 V 的子空间,$V_0=V_1+V_2+\cdots+V_m$, 则下列命题等价:
(i) $V_0=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$ 是直和; (ii) 对任意的 $2\leqslant i\leqslant m$,

$$V_i\cap\left(V_1+V_2+\cdots+V_{i-1}\right)=0;$$

(iii) $\dim\left(V_1+V_2+\cdots+V_m\right)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_m$ (iv)$V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m$ 的一组基可以拼成 V_0 的一组基;
(v)V_0 中的向量表示为 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m$ 中的向量之和时,其表示唯一.

90. 设 $U,\ V$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间,$W=U\times V$ 是 U 和 V 的积集合,即 $W=\{(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})\mid \boldsymbol{u}\in U,\ \boldsymbol{v}\in V\}$. 在 W 上定义加法和数乘:

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)$$

$$k(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=(k\boldsymbol{u},\ k\boldsymbol{v})$$

则 W 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 (称为 U 和 V 的外直和).

91. 每一个 n 维线性空间均可表示为 n 个一维子空间的直和.

92. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 是 V 的 m 个非平凡子空间, 则 V 中必存在一个向量, 它不属于任何一个 V_i.

93. n 个末知数 , m 个方程:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全部为 0 时, 称为齐次线性方程组; 不全为 0 时, 称为非齐次线性方程组. 系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$, 增广矩阵记为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ (把 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 作为列向量添加到 A 的右侧), 则:

(i) 若 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的秩都等于 n, 则该方程组有唯一一组解;

(ii) 若 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等但小于 n, 则该方程组有无穷多组解;

(iii) 若 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的秩不相等, 则该方程组无解.

94. 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解. 它的解构成 n 维列向量空间的一个 $n-r$ 维子空间, 即: 存在 $n-r$ 个向量构成的基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$, 使方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ 的任一组解均可表示为 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$ 的线性组合. 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ 时只有零解 (称为平凡解).

95. 设有 (数域 $\mathbb{K}$ 中的) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$, 它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的秩都等于 r, 且 $r < n$. 假定 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的相伴齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$, 又设 γ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的任一特解, 则其所有解均可表示为如下形式:

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r} + \boldsymbol{\gamma}$$

其中, $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 可取 ($\mathbb{K}$ 中的) 任意数.

96. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是线性空间 V 的 k 个真子空间, 则 V 中必有一组基, 使得其中每个基向量哮不在诸 V_i 的并中.

97. 设 V_0 是 $\mathbb{K}_n$ 的一个非平凡子空间, 则必存在矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使 V_0 是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间.

98. 反对称矩阵的秩必为偶数.

99. 设 $\boldsymbol{A}$ 是矩阵, $|\boldsymbol{D}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式, $\boldsymbol{A}$ 中所有包含 $|\boldsymbol{D}|$ 为 r 阶子式的 $r+1$ 阶子式称为 $|\boldsymbol{D}|$ 的 $r+1$ 阶加边子式. 那么, 矩阵 A 的秩等于 r 的充分必要条件是: A 存在一个 r 阶子式 $|\boldsymbol{D}|$ 不等于 0, 而 $|\boldsymbol{D}|$ 的所有 $r+1$ 阶加边子式全等于 0.

100. 平面上 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 位于同一条直线上的充分必要条件:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & \cdots & y_n - y_1 \end{pmatrix} \leqslant 1$$

或

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leqslant 2$$

101. 三维实空间中 4 个点 $(x_i,\ y_i,\ z_i)\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 共面的充分必要条件:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{pmatrix} \leqslant 2$$

或

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leqslant 3$$

102. 通过平面内不在一条直线上的 3 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ 的圆的方程为:

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

2.3 线性映射

103. 满映射 (映上的映射)、单映射、双射 (既单又满, 一一对应).
104. 设 f 是集合 $A\to B$ 的映射, 如果存在 $B\to A$ 的映射 g, 使 $gf=1_A$, $fg=1_B$, 则 f 是双射且 $g=f^{-1}$.
105. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 到 $\mathbb{K}$ 上线性空间 U 的映射, 如果 φ 适合下列条件:
(1) $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $\alpha,\ \beta\in V$; (2) $\boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{\alpha})=k\varphi(\alpha)$, $k\in\mathbb{K}$, $\alpha\in V$, 则称 φ 是 $V\to U$ 的线性映射 , V 到自身的线性映射称为 V 上的线性变换. 若 $\varphi: V\to U$ 作为映射是单的, 则称 φ 是单线性映射; 若 φ 作为映射是满的, 则称 φ 是满线性映射. 若 φ 是双射, 则称 φ 是线性同构, 简称同构. 若 $V=U$, V 自身上的同构称为自同构. (不同数域上线性空间之间的映射不是线性映射.)
106. 设 φ 是 $V\to U$ 的线性映射, 则
(1) $\varphi(0)=0$; (2) $\varphi(k\alpha+l\beta)=k\varphi(\boldsymbol{\alpha})+l\varphi(\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V$, $k,\ l\in\mathbb{K}$;

(3) 若 φ 是同构, 则其逆映射 φ^{-1} 也是线性映射, 从而是 $U \to V$ 的同构.

107. 设 φ, ψ 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 $V \to U$ 的线性映射, 定义 $\varphi+\psi$ 为 $V \to U$ 的映射:

$$(\varphi+\psi)(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\ \alpha \in V$$

若 $k \in \mathbb{K}$, 定义 $k\varphi$ 为 $V \to U$ 的映射:

$$(k\varphi)(\boldsymbol{\alpha})=k\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\alpha} \in V$$

108. 设 $\mathcal{L}(V, U)$ 是 $V \to U$ 的线性映射全体, 则在 (上一条中的) 线性映射的加法及数乘定义下, $\mathcal{L}(V, U)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 特别地, $V \to \mathbb{K}$ 上的所有线性函数全体构成一个线性空间. V 上的所有线性函数构成的线性空间通常称为 V 的共轭空间, 记为 V^*. 当 V 是有限维线性空间时, V^* 也称为 V 的对偶空间. 如果 $V=U$, 那么用 $\mathcal{L}(V)$ 来代替 $\mathcal{L}(V, V)$, 即 V 上线性变换全体组成的集合.

109. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 如果在 A 上定义了一种乘法 "." (通常可以省略), 使对 A 中任意元素 a, b, c 及 $\mathbb{K}$ 中元素 k, 适合下列条件:

(1) 乘法结合律: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

(2) 存在 A 中元 e, 使得对一切 $a \in A$, 均有 $e\cdot a=a\cdot e=a$;

(3) 分配律:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$
$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a;$$

(4) 乘法与数乘的相容性: $(ka)\cdot b=k(a\cdot b)=a\cdot(kb)$, 则称 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的代数, 元素 e 称为 A 的恒等元.

110. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 则 $\mathcal{L}(V)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的代数.

111. 在 $\mathcal{L}(V)$ 中, 定义线性变换 φ 的 n 次幂为 n 个 φ 的复合, $\left(\varphi^0=\boldsymbol{I}_V\right.$ 为恒等变换), 则

$$\varphi^n \circ \varphi^m=\varphi^{n+m}, \quad (\varphi^n)^m=\varphi^{nm}$$

若定义 $\varphi^{-n}=\left(\varphi^{-1}\right)^n$, 则有 $\varphi^{-n}=(\varphi^n)^{-1}$. 线性变换的复合通常不满足交换律, 即一般而言:$\varphi\circ\psi \neq \psi\circ\varphi$ 跃进一步地, $(\varphi\circ\psi)^n \neq \varphi^n\circ\psi^n$. 如果 φ, ψ 都是可逆线性变换, 则 $\varphi\circ\psi$ 也是可逆线性变换, 且

$$(\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi})^{-1}=\boldsymbol{\psi}^{-1}\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}$$

若 $k \neq 0$, φ 可逆, 则 $k\varphi$ 也可逆, 且

$$(k\varphi)^{-1}=k^{-1}\varphi^{-1}$$

112. 设有 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 和 U, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基, 则

(1) 如果有从 V 到 U 的线性映射 φ 和 ψ, 对任意的 i, 都有 $\varphi(e_i)=\psi(e_i)$, 则 $\varphi=\psi$;

(2) 给定 U 中的 n 个向量 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$, 有且仅有一个从 V 到 U 的线性映 φ, 满足 $\varphi(e_i)=\beta_i (i=1, 2, \cdots, n)$.

113. 设 V 和 U 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维及 m 维线性空间, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基,

$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 是 U 的一组基, φ 是从 V 到 U 的线性映射, 设

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{12}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{1m}\boldsymbol{f}_m \\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_2) = a_{21}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{2m}\boldsymbol{f}_m \\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_n) = a_{n1}\boldsymbol{f}_1 + a_{n2}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{f}_m \end{cases}$$

以上系数矩阵的转置, 称为 φ 在给定基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 下的表示矩阵, 简称为 φ 在给定基下的矩阵.

114. 设 $\mathcal{L}(V, U)$ 是 $V \to U$ 的线性映射全体, $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 是 $\mathbb{K}$ 上全体 $m \times n$ 矩阵组成的集合, $\boldsymbol{T}$ 为从 $\mathcal{L}(V, U)$ 到 $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 的映射, 对任意 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$, $T(\varphi) = \boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是 φ 在给定基下的表示矩阵. $\boldsymbol{T}$ 是一个一对应. 记 η_1 是 V 到 $\mathbb{K}_n$ 的线性同构, η_2 是 U 到 $\mathbb{K}_m$ 的线性同构, 则 $\boldsymbol{T}$ 是一个线性同构, 且 $\eta_2\varphi = \varphi_A\eta_1$, 即有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle\eta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta_2} \\ \mathbb{K}_n & \xrightarrow{\varphi_A} & \mathbb{K}_m \end{array}$$

再设 W 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_p\}$ 是 W 的一组基, $\psi \in \mathcal{L}(V, U)$, 则 $T(\psi\varphi) = \boldsymbol{T}(\psi)\boldsymbol{T}(\varphi)$.

115. $\boldsymbol{T} : \mathcal{L}(V) \to M_n(\mathbb{K})$ 是线性同构, 并对任意的 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, 有 $\boldsymbol{T}(\psi\varphi) = \boldsymbol{T}(\psi)\boldsymbol{T}(\varphi)$, 即 T 保持了乘法. 同构 $\boldsymbol{T}$ 还具有下列性质:

(1)$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{I}_V) = \boldsymbol{I}_n$.

(2) φ 是 V 上的自同构的充分必要条件是 $T(\varphi)$ 是可逆阵且这时有 $T\left(\varphi^{-1}\right) = T(\varphi)^{-1}$.

116. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, 又设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的两组基, 且从 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 若 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 A, 在基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 下的表示矩阵为 B, 则

$$B = P^{-1}AP$$

117. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵且存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 记为 $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$. 相似关系是一种等价关系. V 上的线性变换 φ 在不同基下的表示矩阵是相似的. 相似的矩阵具有相同的迹.

118. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

119. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 到 U 的线性映射, φ 的全体像元素组成 U 的子集称为 φ 的像, 记为 $\operatorname{Im}\varphi$. 又, V 中在 φ 下映射为零向量的全体向量构成 V 的子集, 称为 φ 的核. 记为 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}$. $\operatorname{Im}\varphi$ 是 U 的子空间. $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 V 的子空间. 像空间 $\operatorname{Im}\varphi$ 的维数称为 φ 的秩, 记为 $\mathrm{r}(\varphi)$. 核空间 $\operatorname{Ker}\varphi$ 的维数称为 φ 的零度.

120. 线性映射 φ 是满映射的充分必要条件是

$$\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim U$$

线性映射 φ 是单映射的充分必要条件是

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{0}$$

121. 设 $\varphi: V \to U$ 为线性映射, $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ 为子空间且满足 $\varphi(V') \subseteq U'$, 则通过定义域的限制可得到线性映射 $\varphi': V' \to U'$, 使得 φ' 与 φ 具有相同的映射法则. 进一步, 若 φ 是单映射, 则 φ' 也是单映射.

122. 设 V 和 U 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维及 m 维线性空间, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基, $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 是 U 的一组基, φ 是从 V 到 U 的线性映射, 它在给定基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则

$$\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \qquad \dim\operatorname{Ker}\varphi = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$$
$$\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\operatorname{Ker}\varphi = \dim V = n$$

123. φ 是从 V (n 维) 到 U (m 维) 的线性映射,
   - φ 是单映射的充分必要条件是: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$, 即表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个列满秩阵. 或者, 存在 U 到 V 的线性映射 ψ, 使 $\psi\varphi = \boldsymbol{I}d_V$, ($\boldsymbol{I}d_V$ 表示 V 上的恒等映射) .
   - φ 是满映射的充分必要条件是:$r(\boldsymbol{A}) = m$, 即表示矩阵 A 是一个行满秩阵; 或者, 存在 U 到 V 的线性映射 η, 使 $\varphi\eta = \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{d}_U$, ($\boldsymbol{I}\boldsymbol{d}_U$ 表示 U 上的恒等映射) .
   - n 维线性空间 V 上的线性变换是可逆变换的充分必要条件是: 它是单映射或它是沐映射.(一个 n 阶方阵可逆的充分必要条件是: 它是行满秩阵或它是列满秩阵.)
   - n 维线性空间 V 上的线性变换是可逆变换的充分必要条件是: 它将 V 的基变为基.
   - n 维线性空间 V 上的线性变换是单映射 (或满纳射) 的充分必要条件是: 它在 V 的任意一组基下的表示矩阵是可逆阵.

124. 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换, U 是 V 的子空间, 若 U 适合条件: $\varphi(U) = U$, 则称 U 是 φ 的不变子空间 (或 φ-不变子空间). 这时把 φ 的定义域限制在 U 上, 则 φ 在 U 上定义了一个线性变换, 称为由 φ 诱导出的线性变换, 或称为 φ 在 U 上的限制, 记为 $\varphi|_U$. 零子空间及全空间 V 称为平凡的 φ -不变子空间.

125. 线性变换 φ 的像与核都是 φ 的不变子空间. 若 φ 是 V 上的数乘变换, 即存在常数 k, 使 $\varphi(\alpha) = k\alpha$, 则 V 的任一子空间都是 φ 的不变子空间.

126. 设 U 是 V 上的线性变换 φ 的不变子空间, 且设 U 的基为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$. 将 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$ 扩充为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, 则 φ 在这组基下的表示矩阵具有下列形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & a_{r+1,\,1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} & a_{r+1,\,r} & \cdots & a_{nr} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,\,r+1} & \cdots & a_{n,\,r-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,\,n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

127. 设 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 V_1, V_2 都是线性变换 φ 的不变子空间. 又 $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_r\}$ 是 V_1 的基, $\{e_{r+1},\ e_{r+2},\ \cdots,\ e_n\}$ 是 V_2 的基, 则 φ 在基 $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ 下的表示矩阵为分块对角阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$, 其中, $\boldsymbol{A}_1$ 是 r 阶方阵, $\boldsymbol{A}_2$ 是 $n-r$ 阶方阵. 还可以进一步推广到 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, 其中每个 V_i 都是 φ 的不变子空间, 那么在 V 中存在一组基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为分块对角阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $\varphi|_{V_i}$ 的表示矩阵, 它是 $r_i = \dim V_i$ 阶方阵.

128. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m \times n$ 矩阵, 则方程 $\boldsymbol{Ax} = 0$, $Bx = 0$ 同解的充分必要条件是: 存在可逆阵 P, 使 $B = PA$.

129. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^n\right) = \mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{n+1}\right) = \mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{n+2}\right) = \cdots$$

130. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 那么必存在正整数 m, 使得:

$$\operatorname{Im}\varphi^m = \operatorname{Im}\varphi^{m+1}, \quad \operatorname{Ker}\varphi^m = \operatorname{Ker}\varphi^{m+1}$$
$$V = \operatorname{Im}\varphi^m \oplus \operatorname{Ker}\varphi^m$$

131. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 若 $\mathrm{r}\left(\varphi^2\right) = \mathrm{r}(\varphi)$, 则 $V = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$.

132. 设 U 是有限维线性空间 V 的子空间, φ 是 V 上的线性变换, 则

$$\dim U - \dim \operatorname{Ker}\varphi \leqslant \dim \varphi(U) \leqslant \dim U$$
$$\dim \varphi^{-1}(U) \leqslant \dim U + \dim \operatorname{Ker}\varphi$$

133. 设 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ 为线性空间 V 关于子空间 $V_i(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的直和分解, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{v}$ 可分解成 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_m$, 其中 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$. 定义 $\varphi_i : V \to V_i$, $\varphi_i(v) = v_i$, 称为 V 到 V_i 的投影变换. 投影变换等价于幂等变换.

134. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且满足条件:

$$\varphi_i^2=\varphi_i, \quad \varphi_i\varphi_j=0(i\neq j)$$
$$\operatorname{Ker}\varphi_1\cap\cdots\cap\operatorname{Ker}\varphi_m=0$$

则 $V=\operatorname{Im}\varphi_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}\varphi_m$.

2.4 多项式

135. 数域 $\mathbb{K}$ 上关于未定元 x 的一元多项式全体记为 $\mathbb{K}[x]$.$\mathbb{K}[x]$ 也称为 $\mathbb{K}$ 上的一元多项式环. 若 $f(x)\equiv a$, 则称 $f(x)$ 为常数多项式, 当 $a\neq 0$ 时称为零次多项式; 当 $a=0$ 时, 称之为零多项式, 规定其次数为 $-\infty$.

136. 若 $f(x), g(x)\in\mathbb{K}[x]$, 则

$$\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$$
$$\deg(cf(x))=\deg f(x),\ c\in\mathbb{K},\ c\neq 0$$
$$\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\}$$

- 若 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$, 则 $f(x)g(x)\neq 0$.
- 右 $f(x)\neq 0$ 且 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$, 则 $g(x)=h(x)$.

137. $f(x), g(x), h(x)\in\mathbb{K}\mid x], 0\neq c\in\mathbb{K}$, 则

(i) 若 $f(x)\mid g(x)$, 则 $cf(x)\mid g(x)$, 非零常数多项式 c 是任一非零多项式的因子;

(ii) $f(x)\mid f(x)$;

(iii) 若 $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$, 则 $f(x)\mid h(x)$;

(iv) 若 $f(x)|g(x), \quad f(x)|h(x)$, 则对任意多项式 $u(x), v(x)$, 有 $f(x)\mid g(x)u(x)+h(x)v(x)$;

(v) 若 $f(x)|g(x), g(x)|f(x)$ 且 $f(x), g(x)$ 都是非零多项式, 则存在 $\mathbb{K}$ 中非零元 c, 使 $f(x)=cg(x)$. 此时, 這两个多项式称为相伴多项式, 记为 $f(x)\sim g(x)$.

138. 设 $f(x), g(x)\in\mathbb{K}[x], g(x)\neq 0$, 则必存在唯一的 $q(x), r(x)\in\mathbb{K}[x]$, 使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

且 $\deg r(x)<\deg g(x)$. 那么 $f(x)\mid g(x)$ 的充分必要条件是: $g(x)$ 除 $f(x)$ 后的余式 $r(x)$ 为零.

139. 设 $f(x), g(x)\in\mathbb{K}[x]$, 两者的最大公因式 (g.c.d.) 记为 $(f(x), g(x))$; 最小公倍式 (l.c.m.) 记为 $[f(x), g(x)]$. 必存在 $u(x), v(x)\in\mathbb{K}[x]$, 使得

$$f(x)v(x)+g(x)v(x)=d(x)=(f(x),\ g(x))$$

140. 设 $f(x), g(x), h(x)\in\mathbb{K}[x]$, 则

$$\begin{aligned}((f(x),\ g(x)),\ h(x))&=(f(x),\ (g(x),\ h(x)))\\&=(f(x),\ g(x),\ h(x))\end{aligned}$$

141. 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathrm{K}[x]$, 若 $(f(x),\ g(x)) = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素. 两者互素的充分必要条件是: 存在 $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{K}|x|$, 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

如果 $f(x)$, $g(x)$ 互素且次数都大于等于 1 , 则还有 $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$. 当 $f(x)$, $g(x)$ 都是零次多项式 (常数) 时, 就没有以上两个次数不等式.

142.
- 若 $f_1(x)\,|g(x)$, $f_2(x)|\,g(x)$, 且 $(f_1(x),\ f_2(x)) = 1$, 则
$$f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$$
- 若 $(f(x),\ g(x)) = 1$, 且 $f(x) \mid g(x)h(x)$, 则
$$f(x) \mid h(x)$$
- 若 $(f(x),\ g(x)) = d(x)$, $f(x) = f_1(x)d(x)$, $g(x) = g_1(x)d(x)$, 则
$$(f_1(x),\ g_1(x)) = 1$$
- 若 $(f(x),\ g(x)) = d(x)$, 则
$$(t(x)f(x),\ t(x)g(x)) = t(x)d(x)$$
- 若 $(f_1(x),\ g(x)) = 1$, $(f_2(x),\ g(x)) = 1$, 则
$$(f_1(x)f_2(x),\ g(x)) = 1$$
- 若 $f(x)$, $g(x)$ 是非零多项式, 则
$$f(x)g(x) \sim (f(x),\ g(x))[f(x),\ g(x)]$$
(对于正整数 a, b 也存在类似的定理, $ab = (a,\ b)[a,\ b]$.)

143. 中国剩余定理 (孙子定理): 设 $\{f_i(x)\}$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是两两互素的多项式, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $\cdots$, $a_n(x)$ 是 n 个多项式, 则存在多项式 $g(x)$, $q_i(x)(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 使得 $g(x) = f_i(x)q_i(x) + a_i(x)$ 对一切 i 成立.

144. 若 $(f(x),\ g(x)) = 1$, 则 $(f(x)g(x),\ f(x) + g(x)) = 1$.

145. $(f(x),\ g(x)) = 1$ 的充分必要条件是: 对任意正整数 m, n, $(f(x)^m,\ g(x)^n) = 1$.

146.
$$(f(x)^n,\ g(x)^n) = (f(x),\ g(x))^n$$
$$[f(x)^n,\ g(x)^n] = [f(x),\ g(x)]^n$$

147. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非常数多项式, 若 $f(x)$ 可以分解成两个次数小于 $f(x)$ 次数的 $\mathbb{K}$ 上的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可约多项式, 否则, 称之为 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式. 多项式的可约或不可约与数域密切相关, 比如 $x^2 - 2$ 在有理数域上是不可约多项式, 但在实数域上是可约多硕式.

148. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, 则对 $\mathbb{K}$ 上任一多项式 $g(x)$, 或者 $f(x) \mid g(x)$, 或者 $(f(x),\ g(x)) = 1$.

149. 设 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, $f_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 是 $\mathbb{K}$ 上多项式且 $p(x) \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$, 则 $p(x)$ 必可整除其中某个 $f_i(x)$.
150. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式且 $\deg f(x) \geqslant 1$, 则
(1)$f(x)$ 可以分解为 $\mathbb{K}$ 上的有限个不可约多项式之积;
(2) 若

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) \\ &= q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x) \end{aligned}$$

是 $f(x)$ 的两个不可约分解, 即 $p_i(x)$, $q_i(x)$ 都是 $\mathbb{K}$ 上次数大于 0 的不可约多项式, 则 $s=t$, 且经过适当调换因式的次序以后有:$q_i(x) \sim p_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$.
151. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个多项式. 在它们的标准分解式中适当添加零次项,

$$f(x) = c_1p_1(x)^{\alpha_1}p_2(x)^{\alpha_2}\cdots p_n(x)^{\alpha_n}$$

$$g(x) = c_2p_1(x)^{\beta_1}p_2(x)^{\beta_2}\cdots p_n(x)^{\beta_n}$$

其中, $n=\max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\}$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.
则 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式

$$(f(x),\ g(x)) = p_1(x)^{k_1}p_2(x)^{k_2}\cdots p_n(x)^{k_n}$$

其中, $k_i=\min\{\alpha_i,\ \beta_i\}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.
$f(x)$, $g(x)$ 的最小公倍式

$$[f(x),\ g(x)] = p_1(x)^{h_1}p_2(x)^{h_2}\cdots p_n(x)^{h_n}$$

其中, $h_i=\max\{\alpha_i,\ \beta_i\}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.
152. 数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是: $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.
153. 设 $d(x)=(f(x),\ f'(x))$, 则 $\frac{f(x)}{d(x)}$ 是一个没有重因式的多项式, 且这个多项式的不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同 (不计重数).
154. 设 $\deg f(x)=n \geqslant 1$, 若 $f'(x) \mid f(x)$, 则 $f(x)$ 有 n 重根.
155. $g(x)^2 \mid f(x)^2$ 的充分必要条件是:$g(x) \mid f(x)$.
156. $a \neq 0$, 则 $\left(x^d-a^d\right) \mid (x^n-a^n)$ 的充分必要条件是: $d \mid n$.
157. 设 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, $b \in \mathbb{K}$, 则存在 $g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使

$$f(x) = (x-b)g(x) + f(b)$$

特别地, b 是 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x-b) \mid f(x)$.
158. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式且 $\deg f(x) \geqslant 2$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中没有根.
159. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中最多只有 n 个根.
160. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的次数不超过 n 的两个多项式, 若存在 $\mathbb{K}$ 上 $n+1$ 个不同的数 b_1, b_2, $\cdots$, b_{n+1}, 使

$$f(b_i) = g(b_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$$

则 $f(x)=g(x)$.

161. 代数基本定理: 每个次数大于 0 的复数域上的多项式都至少有一个复数根.

162. 复数域上的一元 n 次多项式恰有 n 个复根 (包括重根). 复数域上的不可约多项式都是一次多项式.

复数域上的一元 n 次多项式必可分解为一次因式的乘积.

163. Vieta 定理: 若数域 $\mathbb{K}$ 上的一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

在 $\mathbb{K}$ 上有 n 个根 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

164. 考虑形如 $x^3+px+q=0$ 的三次方程. 引入新的未知数 $x=u+v$, 则 $x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=u^3+v^3+3uvx$, 即 $x^3-3uvx-\left(u^3+v^3\right)=0$, 比较系数可得:

$$\begin{cases}-3uv=p\left(u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}\right)\\ u^3+v^3=-q\end{cases},$$

于是, u^3, v^3 是二次方程 $y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0$ 的根, 二次方程的判别式除以 4 以后仍用 Δ 表示, $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$. 那么三次方程 $x^3+px+q=0$ 的求根公式可表达如下:

$$\begin{cases}x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\\ x_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\\ \text{其中}, w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.\end{cases}$$

四次方程也有求根公式, 而五次及更高次的一般方程, 没有求根公式.

165. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是实系数多项式, 若复数 $a+b\mathrm{i}(b\neq 0)$ 是它的根, 则 $a-b\mathrm{i}$ 也是它的根.

166. 实数域上的不可约多项式为一次或二次多项式 $ax^2+bx+c\left(b^2-4ac<0\right)$. 实数域上的多项式 $f(x)$ 必可分解为有限个一次因式及不可约二次因式的乘积.

167. 设有 n 次整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 则有理数 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的

根的必要条件是 $p\,|a_n$, $q|\,a_0$, 其中, p, q 是互素的整数.

168. 设有 n 次整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 若 a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1, a_0 的最大公约数等于 1, 则称 $f(x)$ 为本原多项式.

Gauss 引理: 两个本原多项式之积仍是本原多项式.

169. 若整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约, 则它必可分解为两个次数较低的整系数多项式之积.

170. Eisenstein 判别法: 设有 $n(n\geqslant 1)$ 次整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 若 $p\mid a_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$, 但 p 不能整除 a_n 且 p^2 不能整除 a_0, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

171. 设 $n\geqslant 1$, 则 x^n-2 在有理数域上不可约. 这说明, 存在任意次的有理数域上的不可约多项式.

172. 若 p 是素数, 则 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在有理数域上不可约.

173. $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, 当 n 是素数时, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

174. 若 $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$ 和 $g\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元多项式且非 0, 则按字典排列法排列后乘积的首项等于 f 的首项与 g 的首项之积.

175. 若 $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)\neq 0$, $g\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)\neq 0$, $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)g\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)\neq 0$.

176. 若 $h\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)\neq 0$, 且

$$\begin{aligned}&f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)h\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)\\=&g\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)h\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)\end{aligned}$$

则 $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)=g\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$.

177. 设 $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元非 0 多项式, 则必存在 $\mathbb{K}$ 中的元 k_1, k_2, $\cdots$, k_n, 使 $f(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)\neq \boldsymbol{c}^2$

178. 数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 n 元多项式 $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$ 和 $g\left(x_{数}\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$ 相等的充分必要条件是: 对一切 k_1, k_2, $\cdots : k_n\in\mathbb{K}$, 均有

$$f\left(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n\right)=g\left(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n\right)$$

179. 设 $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元多项式, 若对任意的 $i\neq j(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$, 均有

$$\begin{aligned}&f\left(x_1,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_j,\ \cdots,\ x_n\right)\\=&f\left(x_1,\ \cdots,\ x_j,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_n\right)\end{aligned}$$

则称 $f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 元对称多项式. 设 k_1, k_2, $\cdots$, k_n 是数组 $(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的一个全排列, 则

$$f\left(x_{k_1},\ x_{k_2},\ \cdots,\ x_{k_n}\right)=f\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\right)$$

称 $x_1\to x_{k_1}$, $x_2\to x_{k_2}$, $\cdots$, $x_n\to x_{k_n}$ 是末定元的一个置换, 对称多项式在末定元的任一置换下不变.

180. n 元初等对称多项式:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\\
&\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

对称多项式基本定理: 设 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元对称多项式, 则必存在 $\mathbb{K}$ 上唯一的一个多项式 $g\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$, 使得

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=g\left(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\right)$$

181. 记

$$\begin{aligned}
&s_0=n\\
&s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k\geqslant 1)
\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
f(x)&=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_n\right)\\
&=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n
\end{aligned}$$

则

$$x^{k-1}f'(x)=\left(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k\right)f(x)+g(x)$$

其中, $\deg g(x)\leqslant n$.

182. Newton 公式: (记号同上) 若 $k\leqslant n-1$, 则

$$\begin{gathered}
s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots\\
+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^kk\sigma_k=0
\end{gathered}$$

若 $k\geqslant n$, 则

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^ns_{k-n}\sigma_n=0$$

183. 设 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式, 则 $d(x)\neq 1$ 的充分必要条件是存在 $\mathbb{K}$ 上的非零多项式 $u(x)$, $v(x)$, 使

$$f(x)u(x)=g(x)v(x),$$

且

$$\deg u(x)<\deg g(x),\ \deg v(x)<\deg f(x).$$

184. 设

$$\begin{aligned}
f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\
g(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m
\end{aligned}$$

以下 $m+n$ 阶行列式称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式, 或 Sylvester 行列式.

$$R(f,\ g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \ldots & b_m & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \ldots & b_{m-1} & b_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \ldots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$
$$=a_0^m b_0^n \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (x_i-y_j)$$

其中, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 是 $f(x)$ 的根, $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$ 是 $g(x)$ 的根.

185. 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域中有公共根的充分必要条件是: 它们的结式 $R(f,\ g)=0$. 反之, 两者互素 (没有公共根) 的充分必要条件是: $R(f,\ g)\neq 0$.

186. 设 λ 是任意复数, 则

$$R(f(x),\ g(x)(x-\lambda))=(-1)^n f(\lambda)R(f,\ g)$$
$$R(f(x),\ x-\lambda)=(-1)^n f(\lambda)$$

187. 多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的判别式:

$$\begin{aligned}\Delta(f)&=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_0^{-1}R\left(f,\ f'\right)\\&=a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(x_i-x_j\right)^2\end{aligned}$$

其中, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 是 $f(x)$ 的根. $f(x)$ 有重根的充分必要条件是: 它的判别式 $\Delta(f)=0$.

188. 设 $f(x)$ 是实系数多项式,

(1) 若 $\Delta(f)<0$, 则 $f(x)$ 无重根且有奇数对虚根;

(2) 若 $\Delta(f)>0$, 则 $f(x)$ 无重根且有偶数对虚根.

189. $R\left(f,\ g_1g_2\right)=R\left(f,\ g_1\right)R\left(f,\ g_2\right)$.

190. 设 $f(x)=x^{2n+1}-1$, $f(x)$ 的不等于 1 的根为 $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ w_{2n}$, 则

$$\left(1-\omega_1\right)\left(1-\omega_2\right)\cdots\left(1-\omega_{2n}\right)=2n+1$$

191. 设 $\varepsilon=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ 是 1 的 n 次单位根, 则 $\varepsilon^{mk}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是 $x^n-1=0$ 的全部根的充分必要条件是: $(m,\ n)=1$.

192. 设 $f(x)$ 是次数小于 n 的多项式, $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. 则

$$f(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\varepsilon^k\right)$$

193. 实系数三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的根的实部全是负数的充分必要条件是:

$$p>0, \quad r>0, \quad pq>r$$

2.5 特征值

194. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V 上的线性变换, 若 $\lambda\in\mathbb{K}$, $x\in V$, $x\neq 0$, 使 $\varphi(x)=\lambda x$, 则称 λ 是线性变换 φ 的一个特征值, 向量 x 称为 φ 属于特征值 λ 的特征向量. φ 属于特征值 λ 的特征向量全体加上零向量构成 V 的子空间, 记为 V_λ, 称为 φ 属于特征值 λ 的特征子空间 V_λ 是 φ 的不变子空间.
195. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 若存在 $\lambda\in\mathbb{K}$ 以及 n 维非零列向量 α, 使得 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$, 则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, α 为 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ 的特征向量. 齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 V_λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ 的特征子空间. $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.
196. 若 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有相同的特征多项式, 从而具有相同的特征值 (记重数).

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}| &= \left|\boldsymbol{P}^{-1}\left(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{P}^{-1}\right||\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

若 φ 是 V 上的线性变换，它在某组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 与基或表示矩阵的选取无关. $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 也称为 φ 的特征多项式.
197. 任一复数方阵必 (复) 相似于一上 (或下) 三角阵. 上 (下) 三角阵的特征值等于主对角线上的全部元素. 若数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全在 $\mathbb{K}$ 中, 则存在 $\mathbb{K}$ 上的非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是一个上 (下) 三角阵.
198. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征: 值, 又 $f(x)$ 是一个多项式, 则 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值.
199. 方阵的所有特征值之和等于方阵的迹, 即主对角线上所有元系之和; 而所有特征值之积等于方阵的行列式.
200. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 适合一个多项式 $g(x)$, 即 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 也必适合 $g(x)$, 即 $g(\lambda)=0$.
201. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵, $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的全部特征值为 λ_1^{-1}, λ_2^{-1}, $\cdots$, λ_n^{-1}.
202. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充分必要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. (这样的矩阵称为可对角化矩阵).
203. 若 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_k 为数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 的不同的特征值, 则

$$V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$$

204. 线性变换 φ 属于不同特征值的特征向量必线性无关. 若 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 有 n 个不同的特征值，则 φ 必可对角化.

205. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, λ_0 是 φ 的一个特征值, V_{λ_0} 是属于 λ_0 的特征子空间, 称 $\dim V_{\lambda_0}$ 为 λ_0 的度数或几何重数.λ_0 作为 φ 的特征多项式根的重数称为重数或代数重数. λ_0 的几何重数总是小于等于其代数重数.
206. 若 φ 的任一特征值的几何重数等于代数重数, 则称 φ 有完全的特征向量系.φ 可对角化的充分必要条件是: φ 有完全的特征向量系.
207. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$(或 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ) 适合一个非零首一多项式 $m(x)$, 且 $m(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$(或 φ) 所适合的非零多项式中次数最小者, 则称 $m(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ (或 φ) 的一个极小多项式或最小多项式.
208. 若 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 适合的一个多项式, 则 A 的极小多项式 $m(x)$ 整除 $f(x)$. 任意 n 阶方阵的极小多项式必唯一.
209. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵的充分必要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式的常数项不为 0.
210. 相似的矩阵具有相同的极小多项式.
211. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个分块对角阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 都是方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于诸 $\boldsymbol{A}_i$ 的极小多项式的最小公倍式.
212. 设 $m(x)$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $(x-\lambda_0)\mid m(x)$.
213. Cayley-Hamilton(凯莱-哈密顿) 定理: 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $f(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

推论一:n 阶方阵 A 的极小多项式是其特征多项式的因式. 特别地, $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式的次数不超过 n.

推论二: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式和特征多项式有相同的根 (不计重数).

推论三: 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $f(x)$ 是 φ 的特征多项式, 则 $f(\varphi)=0$.
214. Gerschgorin(戈氏) 圆盘第一定理: $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值在复平面上下列圆盘中: $|z-a_{ii}|\leqslant R_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 其中,

$$\begin{aligned}R_i&=\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\\&=|a_{i1}|+\cdots+|a_{i,\ i-1}|+|a_{i,\ i-1}|+\cdots+|a_{in}|\end{aligned}$$

215. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 n 次复系数多项式, 则 $f(x)$ 的 n 个根 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 都是 $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0$ 的连续函数.
216. 戈氏圆盘第二定理: 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个戈氏圆盘分成若干个连通区域，若其中一

个连通区域包含有 k 个戈氏圆盘, 则有且只有 k 的特征值落在这个连通区域内. (若两个戈氏圆盘重合, 需计重数. 又若特征值为重根, 也计重数.)

217. n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的 6 条判据:
(1) 有 n 个不同的特征值;
(2) 有 n 个线性无关的特征向量;
(3) $\mathbb{C}^n$ 是所有特征子空间的直和;
(4) 有完全的特征向量系 (任一特征值的几何重数等于代数重数);
(5) 极小多项式无重根;
(6) Jordan 块都是一阶的 (初等因子都是一次多项式).

2.6 相似标准型

218. 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 它的元素 $a_{ij}(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上以 λ 为末定元的多项式, 这样的矩阵称之为多项式矩阵或 λ -矩阵.

219. λ -矩阵的初等变换、相抵、初等 λ -矩阵、逆 λ -矩阵 (略). (第二类是乘以 $\mathbb{K}$ 中的非零常数 c, 第三类是乘以 $\mathbb{K}$ 中的多项式 $f(\lambda)$ 后再加到另一行 (列) 上去.)

220. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不是可逆 λ-矩阵, 因为矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不是 λ -矩阵 $(\lambda^{-1}$ 不是多项式).

221. 设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 可以化为如下形状:
$\boldsymbol{M}(\lambda)=\boldsymbol{M}_m\lambda^m+\boldsymbol{M}_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+\boldsymbol{M}_0$
其中 $\boldsymbol{M}_i$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶数字矩阵. 因此, 一个多项式矩阵可以化为系数为矩阵的多项式, 反之亦然. 若 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 是可逆 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{M}_0$ 是非异阵.

222. 设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{N}(\lambda)$ 是两个 n 阶 λ -矩阵且都不等于零. 又设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶数字矩阵, 则必存在 λ -矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 及 $\boldsymbol{S}(\lambda)$ 和数字矩阵 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{T}$, 使下式成立:

$$\boldsymbol{M}(\lambda)=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}(\lambda)+\boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{N}(\lambda)=\boldsymbol{S}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{T}$$

223. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是 λ -矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 相抵.

224. 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 是任一非零 λ -矩阵, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 必相抵于这样的一个 λ-矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)$ 可整除 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 中的任一元素 $b_{ij}(\lambda)$.

225. 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda);0,\ \cdots,\ 0\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r-1)$. 上式中的对角 λ -矩阵称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的法式或相抵标准型.

226. 任一 n 阶可逆 λ-矩阵都可表示为有限个初等 λ -矩阵的积.

227. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 必相抵于

$$\operatorname{diag}\{1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_m(\lambda)\}$$

其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$.

228. 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵, k 是小于等于 n 的某个正整数. 如果 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因子 (它是首一多项式) 不等于零, 则称这个多项式为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子, 记为 $D_k(\lambda)$. 如果 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的所有 k 阶子式都等于零, 则规定 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子为零.

229. 设 $D_1(\lambda),\ D_2(\lambda),\ \cdots,\ D_r(\lambda)$ 是 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的非零行列式因子, 则

$D_i(\lambda)\mid D_{i+1}(\lambda),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r-1.$

$g_1(\lambda)=D_1(\lambda),\ g_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda),\ \cdots,\ g_r(\lambda)=$
$D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$ 称为$\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子.

230. 相抵的 λ-矩阵有相同的行列式因子, 从而有相同的不变因子.

231. 设 n 阶 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的法式为

$$\Lambda=\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda);0,\ \cdots,\ 0\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i-1}(\lambda)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r-1)$, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda)$. 特别, 法式和不变因子之间相互唯一确定.

232. 设 $\boldsymbol{A}(\lambda),\ \boldsymbol{B}(\lambda)$ 为 n 阶 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵当且仅当它们有相同的法式.

233. n 阶 λ-矩阵的法式与初等变换的选取无关.

234. 数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 和 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 具有相同的行列式因子或不变因子.

235. 设 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}$ 是两个数域, $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的两个矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上相似的充分必要条件是它们在 $\mathbb{K}$ 上相似.

236. 设 r 阶矩阵

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \cdots & -a_1\end{pmatrix}$$

则 (1) $\boldsymbol{F}$ 的行列式因子为

$$1,\ \cdots,\ 1,\ f(\lambda)$$

其中共有 $r-1$ 个 1, $f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r$, $\boldsymbol{F}$ 的不变因子组也由上式给出;
(2) $\boldsymbol{F}$ 的极小多项式等于 $f(\lambda)$.

237. 设 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于对角 λ-矩阵

$$\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_n(\lambda)\}$$

λ-矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵于对角 λ-矩阵

$$\operatorname{diag}\{d_1'(\lambda),\ d_2'(\lambda),\ \cdots,\ d_n'(\lambda)\}$$

且 $d_1'(\lambda),\ d_2'(\lambda),\ \cdots,\ d_n'(\lambda)$ 是 $d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_n(\lambda)$ 的一个置换 (若不计次序, 这两组多项式完全相同), 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于 $\boldsymbol{B}(\lambda)$.

238. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为

$$1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,\ d_k(\lambda)$$

其中 $\deg d_i(\lambda)=m_i$, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于下列分块对角阵:

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1 & & & \\ & \boldsymbol{F}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{F}_k\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 的阶等于 m_i, 且 $\boldsymbol{F}_i$ 是形如引理 261 中的矩阵, F_i 的最后一行由 $d_i(\lambda)$ 系数 (除最高次项) 的负值组成. 上式称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型或 Frobenius(弗罗本纽斯) 标准型, 每个 $\boldsymbol{F}_i$ 称为 Frobenius 块.

239. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,\ d_k(\lambda)$$

其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\ \cdots,\ k-1)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)=d_k(\lambda)$.

240. 设 $d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_k(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子, 在 $\mathbb{K}$ 上把 $d_i(\lambda)$ 分解成不可约因式之积:

$$\begin{aligned} d_1(\lambda)&=p_1(\lambda)^{e_{11}}p_2(\lambda)^{e_{12}}\cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}\\ d_2(\lambda)&=p_1(\lambda)^{e_{21}}p_2(\lambda)^{e_{22}}\cdots p_t(\lambda)^{e_{2t}}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ d_k(\lambda)&=p_1(\lambda)^{e_{k1}}p_2(\lambda)^{e_{k2}}\cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}}\end{aligned}$$

其中 e_{ij} 是非负整数 (注意 e_{ij} 可以为零!). 由于 $d_i(\lambda)|d_{i-1}(\lambda)$, 因此 $e_{1j}\leqslant e_{2j}\leqslant\cdots\leqslant e_{kj}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$. 若上式中的 $e_{ij}>0$, 则称 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子, $\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子称为 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组.

241. 数域 $\mathbb{K}$ 上的两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子组, 即矩阵的初等因子组是矩阵相似关系的全系不变量.

242. r 阶矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0\end{pmatrix}$$

的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_0)^r$.

243. 设特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化为下列对角阵:

$$\begin{pmatrix}f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda)\end{pmatrix}$$

其中 $f_i(\lambda)(i=1,\cdots,n)$ 为非零首一多项式. 将 $f_i(\lambda)$ 作不可约分解, 若 $(\lambda-\lambda_0)^k$ 能整除 $f_i(\lambda)$, 但 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$ 不能整除 $f_i(\lambda)$, 就称 $(\lambda-\lambda_0)^k$ 是 $f_i(\lambda)$ 的一个准素因子, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组等于所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子的集合.

244. 设 $\boldsymbol{J}$ 是分块对角阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_k\end{pmatrix}$$

其中每个 $\boldsymbol{J}_i$ 都是形如上式的矩阵, $\boldsymbol{J}_i$ 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$, 则 $\boldsymbol{J}$ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$

245. 设 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上的矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 相似于分块对角阵:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_k\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{J}_i$ 为 r_i 阶矩阵, 且

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}$$

上式中的矩阵 $\boldsymbol{J}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型, 每个 $\boldsymbol{J}_i$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 Jordan 块.

246. 设 φ 是复数域上线性空间 V 上的线性变换, 则必存在 1 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为上式所示的 Jordan 标准型.
247. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 则下列结论等价:
   (1) $\boldsymbol{A}$ 可对角化;
   (2) $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式无重根;
   (3) $\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是一次多项式.
248. 设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换, 则 φ 可对角化当且仅当 φ 的极小多项式无重根, 当且仅当 φ 的初等因子都是一次多项式.
249. 设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换, V_0 是 φ 的不变子空间. 如果 φ 可对角化, 则 φ 在 V_0 上的限制也可对角化.
250. 设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换, 且 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$, 其中每个 V_i 都是 φ 的不变子空间, 则 φ 可对角化的充分必要条件是 φ 在每个 V_i 上的限制都可对角化.
251. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全在 $\mathbb{K}$ 中, 则 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上相似于其 Jordan 标准型.
252. 线性变换 φ 的特征值 λ_1 的度数等于 φ 的 Jordan 标准型中属于特征值 λ_1 的 Jordan 块的个数, λ_1 的重数等于所有属于特征值 λ_1 的 Jordan 块的阶数之和.
253. 设 V_0 是线性空间 V 的 r 维子空间, ψ 是 V 上线性变换. 若存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V_0$, 使 $\{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}),\ \cdots,\ \boldsymbol{\psi}^{r-1}(\boldsymbol{\alpha})\}$ 构成 V_0 的一组基且 $\boldsymbol{\psi}^r(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, 则称 V_0 为关于线性变换 $\boldsymbol{\psi}$ 的循环子空间. 每个 Jordan 块对应的子空间是一个循环子空间.
254. 设 λ_0 是 n 维复线性空间 V 上线性变换 φ 的特征值, 则

$$R(\lambda_0)=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}\mid(\boldsymbol{\varphi}-\lambda_0\boldsymbol{I})^n(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}\}$$

   构成了 V 的一个子空间, 称为属于特征值 λ_0 的根子空间.
255. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换.
   (1) 若 φ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

   则 V 可分解为 k 个不变子空间的直和:

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$$

其中 V_i 的维数等于 r_i 且是 $\varphi-\lambda_i I$ 的循环子空间;

(2) 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 φ 的全体不同特征值, 则 V 可分解为 s 个不变子空间的直和:

$$V=R(\lambda_1)\oplus R(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus R(\lambda_s),$$

其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间, $R(\lambda_i)$ 的维数等于 λ_i 的重数, 且每个 $R(\lambda_i)$ 又可分解为上式中若干个 V_j 的直和.

256. 复数域上的方阵 $\boldsymbol{A}$ 必可分解为两个对称阵的乘积.

257. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶可对角化复矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则它们可同时对角化, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 都是对角阵.

258. (Jordan-Chevalley 分解) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 适合下面条件:

(1) $\boldsymbol{B}$ 是一个可对角化矩阵;

(2) $\boldsymbol{C}$ 是一个幂零阵;

(3) $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$;

(4) $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均可表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式. 不仅如此, 上述满足条件 (1) $\sim$ (3) 的分解是唯一的.

259. 设 $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i$ 是复幂级数, 则

(1) 方阵幂级数 $f(\boldsymbol{X})$ 收敛的充分必要条件是对任一非异阵 $\boldsymbol{P}$, $f\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XP}\right)$ 都收敛, 这时

$$f\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XP}\right)=\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{X})\boldsymbol{P}$$

(2) 若 $\boldsymbol{X}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_k\}$, 则 $f(\boldsymbol{X})$ 收敛的充分必要条件是 $f(\boldsymbol{X}_1), \cdots, f(\boldsymbol{X}_k)$ 都收敛, 这时

$$f(\boldsymbol{X})=\operatorname{diag}\{f(\boldsymbol{X}_1), \cdots, f(\boldsymbol{X}_k)\}$$

(3) 若 $f(z)$ 的收敛半径为 r, J_0 为 r 阶 Jordan 块

$$\boldsymbol{J}_0=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0\end{pmatrix}$$

则当 $|\lambda_0|<r$ 时 $f(\boldsymbol{J}_0)$ 收敛, 且

$$f(\boldsymbol{J}_0)=$$

$$f(\boldsymbol{J}_0)=\begin{pmatrix}f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_0) & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} \\ & & f(\lambda_0) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda_0)}{(n-3)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda_0)\end{pmatrix}$$

260. 设 $f(z)$ 是复幂级数, 收敛半径为 r. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵, 特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 记

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\lambda_i|\}$$

则

(1) 若 $\lambda<r$, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 收敛;

(2) 若 $\lambda>r$, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 发散;

(3) 若 $\lambda=r$, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 收敛的充分必要条件是: 对每一绝对值等于 r 的特征值 λ_j, 若 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_j 的初等因子中最高幂为 n_j 次, 则 n_j 个数值级数

$$f\left(\lambda_j\right), f'\left(\lambda_j\right), \cdots, f^{(n_j-1)}\left(\lambda_j\right)$$

都收敛;

(4) 若 $f(\boldsymbol{A})$ 收敛, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为

$$f\left(\lambda_1\right), f\left(\lambda_2\right), \cdots, f\left(\lambda_n\right).$$

261. 一般而言, 对矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\neq\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$, 但如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$.

2.7 二次型

262. 设 f 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次齐次多项式:

$$\begin{aligned}&f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\\=&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称 f 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次型, 简称二次型. 将上式改写成

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 是一个对称阵, 称为该二次型的相伴矩阵或系数矩阵. 反过来, 若给定数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$, 则由上式, 我们可以得到一个 $\mathbb{K}$ 上二次型, 称为对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的相伴二次型. 二次型理论的基本问题是要寻找一个线性变换把它变成只含平方项.

263. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 若存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是合同的或称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有合同关系. 合同关系是一个等价关系.

264. 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的下列变换都是合同变换:

(1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行, 再对换第 i 列与第 j 列;

(2) 将非零常数 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行, 再将 k 乘以第 i 列;

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上, 再将第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

265. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非零对称阵, 则必存在非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的第 $(1,\ 1)$ 元素不等于零.

266. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称阵, 则必存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角阵.

267. 实反对称阵的行列式总是非负实数. 元素全是整数的反对称阵的行列式是某个整数的平方.

268. 用配方法化二次型为只含平方项的过程中, 必须保证变换矩阵是非异阵.

269. (惯性定理) 设 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是一个 n 元实二次型, 且 f 可化为两个标准型:

$$c_1y_1^2+\cdots+c_py_p^2-c_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-c_ry_r^2,$$
$$d_1z_1^2+\cdots+d_kz_k^2-d_{k+1}z_{k+1}^2-\cdots-d_rz_r^2,$$

其中 $c_i>0,\ d_i>0,$ 则必有 $p=k$.

270. 设 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是一个实二次型, 若它能化为如下形式 (规范标准型):

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

则称 r 是该二次型的秩, p 是它的正惯性指数, $q=r-p$ 是它的负惯性指数, $s=p-q$ 称为 f 的符号差. 由于实对称阵与实二次型之间的等价关系, 将实二次型的秩、惯性指数及符号差也称为相应的实对称阵的秩、惯性指数及符号差.

271. 溱与符号差 (或正负惯性指数) 是实对称阵在合同关系下的全系不变量.

272. 设 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型.

(1) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0,$ 则称 f 是正定二次型 (简称正定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵 (简称正定阵);

(2) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}<0,$ 则称 f 是负定二次型 (简称负定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为负定矩阵 (简称负定阵);

(3) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0,$ 则称 f 是半正定二次型 (简称半正定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为半正定矩阵 (简称半正定阵);

(4) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\leqslant 0,$ 则称 f 是半负定二次型 (简称半负定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为半负定矩阵 (简称半负定阵);

(5) 若存在 $\boldsymbol{\alpha},$ 使 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$; 又存在 $\boldsymbol{\beta},$ 使 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}<0,$ 则称 f 是不定型.

273. 实二次型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 n;
$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 n;
$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是半正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 f 的秩 r;
$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是半负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 f 的秩 r.

274. 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵当且仅当它合同于单位阵 $\boldsymbol{I}_n$; $\boldsymbol{A}$ 是负定阵当且仅当它合同于 $-\boldsymbol{I}_n$; $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 是半负定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

275. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的 n 个子式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序圭子式.

276. n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.

277. 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 则:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的任一 k 阶主子阵, 即由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k$ 行及 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k$ 列交点上元素组成的矩阵, 必是正定阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式全大于零, 特别地, $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素全大于零;

(3) $\boldsymbol{A}$ 中绝对值最大的元索仅在主对角线上.

278. Hermite 型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j$ 可写成如下矩阵相乘形式

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

且满足 $\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{A}$, 这样的矩阵称为 Hermite 矩阵.

279. 设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ 是两个 Hermite 矩阵, 若存在非异复矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使

$$\boldsymbol{B}=\bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是复相合的.

280. 若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 Hermite 矩阵, 则必存在一个非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\bar{C}AC$ 是一个对角阵且主对角线上的元奚都是实数.

281. 设 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是一个 Hermite 型, 则它总可以化为如下标准型:

$$\bar{y}_1 y_1+\cdots+\bar{y}_p y_p-\bar{y}_{p+1}y_{p+1}-\cdots-\bar{y}_r y_r$$

且若 f 又可化为另一个标准型:

$$\bar{z}_1 z_1+\cdots+\bar{z}_k z_k-\bar{z}_{k+1}z_{k+1}-\cdots-\bar{z}_r z_r$$

则 $p=k$. 称 r 为 f 的秩, p 是它的正惯性指数, $q=r-p$ 是它的负惯性指数, $p-q$ 为 f 的

符号差. 秩与符号差 (或正负惯性指数) 是 Hermite 矩阵复相合的全系不变量.

282. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 Hermite 型, 若对任一组不全为零的复数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 均有

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$$

则称 f 是正定 Hermite 型, 它对应的矩阵称为正定 Hermite 矩阵.

283. n 阶 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.

2.8 内积空间

284. 设 V 是实数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对 V 中任意一组有序向量 $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$, 都唯一地对应一个实数, 记为 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, 且适合如下规则:

(1) $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})i$

(3) $(c\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, c 为任一实数;

(4) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = 0$, 则称在 V 上定义了一个内积. 实数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积. 线性空间 V 称为实内积空间. 有限维实内积空间称为 Euclid 空间, 简称为欧氏空间.

285. 设 V 是复数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对 V 中任意一组有序向量 $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$, 都唯一地对应一个复数, 记为 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, 且适合如下规则:

(1) $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$;

(3) $(c\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, c 为任一复数;

(4) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则称在 V 上定义了一个内积. 复数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积. 线性空间 V 称为复内积空间 (complex inner product space). 有限维复内积空间称为酉空间 (Unitary space).

286. 设 $\mathbb{C}_n$ 是 n 维复列向量空间, $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 定义

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

则在此定义下 $\mathbb{C}_n$ 成为一个酉空间, 上述内积称为 $\mathbb{C}_n$ 的标准内积.

287. 设 V 是内积空间 (实或复), $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中的向量, 定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 (或范数) 为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}}$$

即实数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 的算术根.

288. 设 V 是实或复的内积空间, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, c 是任一常数 (实数或复数), 则

(1) $\|c\boldsymbol{\alpha}\| = |c|\|\boldsymbol{\alpha}\|$;

(2) $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|$; (3) $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|$
$\leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$.

289. 当 V 是实内积空间时, 定义非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

当 V 是复内积空间时, 定义非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos\theta=\frac{|(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

内积空间中两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 若适合 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})=0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直或正交, 用记号 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 来表示. 显然, 零向量和任何向量都正交; 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 也正交; 两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交时夹角为 $90°$.

290. Cauchy 不等式:

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant \\ \left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\right)$$

设 V 是 $[a,\ b]$ 上连续函数全体构成的实线性空间, 内积定义为 $(f,\ g)=\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$, 则有下列 Schwarz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t$$

291. 设 V 是酉空间, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{v}_1+b_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{v}_n$,

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)&\ldots&(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_n)\\(\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\boldsymbol{v}_n,\ \boldsymbol{v}_1)&(\boldsymbol{v}_n,\ \boldsymbol{v}_2)&\cdots&(\boldsymbol{v}_n,\ \boldsymbol{v}_n)\end{pmatrix}$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{y}}$$

其中 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的坐标向量, $\boldsymbol{H}$ 是一个正定 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{H}$ 称为基向量 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$ 的 Gram (格拉姆) 矩阵或内积空间 V 为在给定基下的度量矩阵.

292. 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 是 n 维内积空间 V 的一组基. 若 $e_i\perp e_j$ 对一切 $i\neq j$ 成立, 则称这组基是 V 的一组正交基. 又若 V 的一组正交基中每个向量的长度等于 1, 则称这组正交基为标准正交基.

293. 内积空间 V 中的任何一组两两正交的非零向量必线性无关.

294. 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_k$ 中每个向量正交, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和由向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_k$ 生成的子空间中每个向量正交.

295. n 维内积空间中任意一个正交非零向量组的向量个数不超过 n.

296. 设 V 是内积空间, $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m$ 是 $\boldsymbol{V}$ 中 m 个线性无关的向量, 则在 V 中存在 m 个两两正交的非零向量 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m$, 使 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m$ 张成的 V 的子空间恰好为由

$\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m$ 张成的 V 的子空间，即 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m$ 是该子空间的一组正交基.

297. Gram-Schmidt(格拉姆-施密特) 正交化方法: 设 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1$, 假定 $\boldsymbol{v}_k$ 已定义好 $(1\leqslant k<m)$, 这时 $\boldsymbol{v}_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 两两正交非零且 $\boldsymbol{v}_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 皆属于由 $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_k$ 张成的子空间. 令

$$\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{u}_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}\boldsymbol{v}_j$$

注意 $\boldsymbol{v}_{k+1}\neq 0$. 对任意的 $1\leqslant i\leqslant k$, 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_{k+1},\ \boldsymbol{v}_i)&=(\boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{v}_i)-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}(\boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{v}_i)\\&=(\boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{v}_i)-(\boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{v}_i)=0\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_{k+1}$ 两两正交.

298. 任一有限维内积空间均有标准正交基.

299. 设 U 是内积空间 V 的子空间. 令

$$U^{\perp}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}\mid(\boldsymbol{v},\ U)=0\}$$

这里 $(\boldsymbol{v},U)=0$ 表示对一切 $\boldsymbol{u}\in U$, 均有 $(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})=0$.$U^{\perp}$ 是 V 的子空间, 称为 U 的正交补空间.

300. 设 V 是 n 维内积空间, U 是 V 的子空间, 则

(1) $V=U\oplus U^{\perp}$;

(2) U 上的任一组标准正交基均可扩张为 V 上的标准正交基.

301. 设 V 是 n 维内积空间, $V_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 是 V 的子空间. 如果对任意的 $\alpha\in V_i$ 和任意的 $\beta\in V_j(j\neq i)$ 均有 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})=0$, 则称子空间 V_i 和 V_j 正交. 若 $V=V_1+V_2+\cdots+V_k$ 且 V_i 两两正交, 则称 V 是 $V_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 的正交和, 记为

$$V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k$$

302. 正交和必为直和且任一 V_i 和其余子空间的和正交.

303. 设 $V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k$, 定义 V 上的线性变换 $\boldsymbol{E}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 如下: 若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_i+\cdots+\boldsymbol{v}_k\,(\boldsymbol{v}_i\in V_i)$, 令 $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_i$. 容易验证 $\boldsymbol{E}_i$ 是 V 上的线性变换且 $\boldsymbol{E}_i^2=\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j=\boldsymbol{0}(i\neq j)$, $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{I}_V$. 线性变换 $\boldsymbol{E}_i$ 称为 V 到 V_i 的正交投影 (简称投影).

304. 设 U 是内积空间 V 的子空间, $V=U\perp U-$. $\boldsymbol{E}$ 是 V 到 U 的正交投影, 则对任意的 $\alpha,\ \beta\in V$, 都有

$$(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\beta}))$$

305. Bessel(塞尔) 不等式: 设 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m$ 是内积空间 V 中的正交非零向量组, $\boldsymbol{y}$ 是 V 中任

一向量, 则

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{|(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{v}_k)|^2}{\|\boldsymbol{v}_k\|^2}\leqslant\|\boldsymbol{y}\|^2$$

等号成立的充分必要条件是: $\boldsymbol{y}$ 属于由 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m\}$ 张成的子空间.

306. 设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若存在 V 上的线性算子 φ^*, 使等式

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^*(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V$ 成立, 则称 φ^* 是 φ 的伴随算子. 简称为 φ 的伴随.

307. 设 V 是 n 维内积空间, φ 是 V 上的线性变换, 则存在 V 上唯一的线侏变换 φ^*, 使对一切 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V$, 成立

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^*(\boldsymbol{\beta}))$$

308. 设 V 是 n 维内积空间, $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 若 V 上的线性算子 φ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 则如果 V 是酉空间, 那么 φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}'=(\bar{a}_{ij})'$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置. 如果 V 是欧氏空间, 那么 φ^* 的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}'$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的转置.

309. 设 V 是有限维内积空间, 若 φ 及 ψ 是 V 上的线性变换, c 为常数, 则

(1)$(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*$;

(2)$(c\varphi)^*=\bar{c}\varphi^*$;

(3) $(\varphi\psi)^*=\psi^*\varphi^*$;

(4)$(\varphi^*)^*=\varphi$.

310. 设 V 是 n 维内积空间, φ 是 V 上的线性算子.

(1) 若 U 是 φ 的不变子空间, 则 $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间;

(2) 若 φ 的全体特征值为 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$, 则 φ^* 的全体特征值为 $\bar{\lambda}_1,\ \bar{\lambda}_2,\ \cdots,\ \bar{\lambda}_n$.

311. 设 V 与 U 是域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, $\mathbb{K}$ 是实数域或复数域, φ 是 $V\to U$ 的线性映射. 若对任意的 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in V$, 有

$$(\varphi(\boldsymbol{x}),\ \varphi(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

则称 φ 是 $V\to U$ 的保持内积的线性映射. 又若 φ 作为线性映射是同构. 则称 φ 是内积空间 V 到 U 上的保积同构.

312. 若 φ 是内积空间 V 到内积空间 U 的保持范数的线性映射, 则 φ 保持内积. 对于复空间，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=&\frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\\&+\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

对于实空间，有

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$$

313. 设 V 与 U 都是 n 维内积空间 (同为实空间或同为复空间), 若 φ 是 $V\to U$ 的线性映射, 则

下列命题等价:

(1) φ 保持内积;

(2) φ 是保积同构;

(3) φ 将 V 的任一组标准正交基变成 U 的一组标准正交基;

(4)φ 将 V 的某一组标准正交基变成 U 的一组标准正交基.

314. 两个有限维内积空间 V 与 U (同为实空间或同为复空间) 同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

315. 设 V 是欧氏空间, 若 φ 是 V 上保持内积的线性变换, 则称 φ 为 V 上的正交变换或正交算子. 若 U 是酉空间, 则 U 上保持内积的线性变换称为酉变换或酉算子.

316. 设 φ 是欧氏空间或酉空间上的线性变换, 则 φ 是正交变换或酉变换的充分必要条件是 φ 非异, 且

$$\varphi^{-1} = \varphi^{n}$$

317. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵, 若 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵. 正交矩阵满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$; 又若 $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶复方阵且 $\bar{\boldsymbol{C}}' = \boldsymbol{C}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{C}$ 是酉矩阵. 酉矩阵满足 $\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{C}}' = \overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_n$.

318. 设 φ 是欧氏空间 (酉空间) V 上的正交变换 (酉变换), 则在 V 的任一组标准正交基下, φ 的表示矩阵是正交矩阵 (酉矩阵).

319. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是:

$$\begin{gathered} a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = 0, \quad i \neq j \\ a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1 \end{gathered}$$

或

$$\begin{gathered} a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0, \quad i \neq j \\ a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1 \end{gathered}$$

换言之, $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是它的 n 个行向量是 n 维实行向量空间组成的欧氏空间 (取标准内积) 的标准正交基; 或它的 n 个列向量是 n 维实列向量空间组成的欧氏空间 (取标准内积) 的标准正交基.

320. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵的充分必要条件是:

$$\begin{gathered} a_{i1}\bar{a}_{j1} + a_{i2}\bar{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\bar{a}_{jn} = 0, \quad i \neq j \\ |a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = 1 \end{gathered}$$

或

$$\begin{gathered} a_{1i}\bar{a}_{1j} + a_{2i}\bar{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\bar{a}_{nj} = 0, \quad i \neq j, \\ |a_{1i}|^2 + |a_{2i}|^2 + \cdots + |a_{ni}|^2 = 1 \end{gathered}$$

换言之, $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵的充分必要条件是它的 n 个行向量是 n 维复行向量空间组成的酉空间 (取标准内积) 的标准正交基; 或它的 n 个列向量是 n 维复列向量空间组成的酉空间 (取标准内积) 的标准正交基.

321. 若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则

(1) $\boldsymbol{A}$ 的行列式值等于 1 或 -1;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的绝对值 (模长) 等于 1.

322. 若 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵, 则

(1) $\boldsymbol{A}$ 的行列式值的模长等于 1;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的绝对值 (模长) 等于 1.

323. (1) 单位阵是正交矩阵也是酉矩阵;

(2) 对角阵是正交矩阵的充分必要条件是主对角线上的元素为 1 或 -1.

324. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实 (复) 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$, 其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交 (酉) 矩阵, $\boldsymbol{R}$ 是一个上三角阵且主对角线上的元奚均大于等于零, 并且若 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 则这样的分解必唯一.

325. 正交 (酉) 变换的积仍是正交 (酉) 变换, 正交 (酉) 变换的逆也是正交 (酉) 变换. 正交 (酉) 矩阵的积仍是正交 (酉) 矩阵, 正交 (酉) 矩阵的逆仍是正交 (酉) 矩阵.

326. 二阶正交矩阵具有下列形状:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

327. 上三角 (或下三角) 正交矩阵必是对角阵且主对角线上的元素为 1 或 -1.

328. 欧氏空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵, 酉空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵.

329. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实矩阵, 若存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}$ 成立, 则称 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 正交相似. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶复矩阵, 若存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{B}=\bar{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{AP}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 酉相似. 正交 (酉) 相似是等价关系.

330. 设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是 φ 的伴随, 若 $\varphi^*=\varphi$, 则称 φ 是自伴随算子. 在 V 是欧氏空间的情形, φ 称为对称算子或对称变换, 在 V 是酉空间的情形, φ 称为 Hermite 算子或 Hermite 变换.

331. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则 φ 的特征值全是实数且属于不同特征值的特征向量互相正交.

332. Hermite 矩阵的特征值全是实数, 实对称阵的特征值也全是实数. 这两种矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交.

333. 设 V 是 n 维内积空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

334. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵, 则存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{AP}$ 为实对角阵, 即 Hermite 矩阵酉相似于实对角阵. 又若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵. 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}$ 为对角阵, 即实对称矩阵正交相似于对角阵. 上述正交矩阵或酉矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量恰为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交且长度等于 1 的特征向量.

335. 实对称 (Hermite) 矩阵的特征值是实对称 (Hermite) 矩阵正交 (酉) 相似的全系不变量.

336. 设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 变元实二次型, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 f 经正交变换可以化为下列标准型:

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

因此, f 的正惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数, 负惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的负特征值的个数. f 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数.

337. 设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 变元实二次型, 则 f 是正定型当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是正数;f 是负定型当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是负数; f 是半正定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全非负;f 是半负定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全非正.

338. 设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是其伴随, 若 $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$, 则称 φ 是 V 上的正规算子. 为了不引起混淆, 称酉空间 (欧氏空间) V 上的正规算子 φ 为复正规算子 (实正规算子). 一个复矩阵 A 若适合 $\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}$, 则称其为复正规矩阵. 一个实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若适合 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$, 则称其为实正规矩阵.

339. 设 φ 是内积空间 V 上的正规算子, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 成立

$$\|\varphi(\boldsymbol{\alpha})\|=\|\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})\|$$

340. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的正规算子.

(1) 向量 $\boldsymbol{u}$ 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量的充分必要条件为 $\boldsymbol{u}$ 是 φ^* 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量:

(2) 属于 φ 不同特征值的特征向量必正交.

341. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 又 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 设 φ 在这组基下的表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个上三角阵, 则 φ 是正规算子的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵.

342. Schur(舒尔) 定理: 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵.

推论: 任一 n 阶复矩阵均酉相似于一个上三角阵.

343. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的正规算子, 则 V 有一组标准正交基, 在这组标准正交基下, φ 的表示矩阵是对角阵, 且这组基向量恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

344. 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为复正规矩阵.

345. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, 其所有不同的特征值为 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$, 则 φ 是正规算子的充分必要条価是

$$V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k$$

其中 $V_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 是属于特征值 λ_i 的特征子空间.

346. 任一 n 阶酉矩阵必酉相似于下列对角阵:

$$\mathrm{diag}\,\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n\}$$

其中 c_i 为模长等于 1 的复数.

347. 设 V 是 n 维欧氏空间, $f(x)$ 是一个实多项式, 若 φ 是 V 上的正规算子, 则 $f(\varphi)$ 也是 V 上的正规算子.

348. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是欧氏空间 V 上的正规算子, $f(x)$, $g(x)$ 是互素的实多项式. 假定 $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f(\boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} g(\boldsymbol{\varphi})$, 则

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = 0$$

349. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子. 令 $g(x)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的极小多项式, 且 $g_1(x), \cdots, g_k(x)$ 为 $g(x)$ 的所有互不相同的首一不可约因子, 则 $\deg g_i(x) \leqslant 2$ 且

$$g(x) = g_1(x) \cdots g_k(x)$$

又若 $W_i = \operatorname{Ker} g_i(\boldsymbol{\varphi})$, 则

(1) $W_i \perp W_j (i \neq j)$;

(2) $V = W_1 \perp \cdots \perp W_k$;

(3) $W_i (i = 1, \cdots, k)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的不变子空间, 且若 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 表示 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 W_i 上的限制, 则 $g_i(x)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 的极小多项式且 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 是 W_i 上的正规算子.

350. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子且 $\boldsymbol{\varphi}$ 适合多项式 $g(x) = x^2 + 1$. 设 $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})$, 则

$$\varphi^*(v) = -u, \quad \varphi^*(u) = v$$

且 $\|u\| = \|v\|$, $u \perp v$.

351. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子且 $\boldsymbol{\varphi}$ 适合多项式 $g(x) = (x-a)^2 + b^2$, 其中 a, b 都是实数且 $b \neq 0$. 设 $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{u} = b^{-1}(\boldsymbol{\varphi} - a\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v})$, 则 $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$, $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, 且

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}) = -b\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{u};$$
$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v} - b\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u}) = b\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{u}.$$

352. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子, φ 的极小多项式为 $g(x) = (x-a)^2 + b^2$, 其中 a, b 是实数且 $b \neq 0$, 则存在 s, 使 $g(x)^s$ 是 φ 的特征多项式且存在 V 的 s 个二维子空间 $V_1, \cdots, V_s$, 使

$$V = V_1 \perp \cdots \perp V_s$$

每个 V_i 有标准正交基 $\{\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{v}_i\}$, 且

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}_i) = a\boldsymbol{u}_i - b\boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_i) = b\boldsymbol{u}_i + a\boldsymbol{v}_i$$

353. 设 V 是 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子, 则存在一组标准正交基, 使 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_r, c_{2r+1}, \cdots, c_n\}$$

其中 $c_j(j=2r+1,\cdots,n)$ 是实数, $\boldsymbol{A}_i$ 为形如

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

的二阶实矩阵.

354. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_r;1,\cdots,1;-1,\cdots,-1\}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix},\ i=1,\cdots,r$$

355. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实反对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_r;0,\cdots,0\}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix},\ i=1,\cdots,r$$

356. 实反对称阵的秩必是偶数, 且其实特征值必为 0, 虚特征值为纯虚数.

357. 谱分解定理: 设 V 是有限维内积空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性算子, 当 V 是酉空间时, $\boldsymbol{\varphi}$ 为正规算子; 当 V 是欧氏空间时, $\boldsymbol{\varphi}$ 为自伴随算子. $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 φ 全体不同的特征值, W_i 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 属于 λ_i 的特征子空间, 则 V 是 $W_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的正交直和. 这时若设 $\boldsymbol{E}_i$ 是 V 到 W_i 上的正交投影, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 有下列分解式:

$$\boldsymbol{\varphi}=\lambda_1\boldsymbol{E}_1+\lambda_2\boldsymbol{E}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{E}_k$$

358. 若 $f_j(x)=\prod_{i\neq j}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_i}(x-\lambda_i)$, 则 $\boldsymbol{E}_j=f_j(\boldsymbol{\varphi})$.

359. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是酉空间 V 上的线性算子, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 是正规算子的充分必要条件是存在复系数多项式 $f(x)$, 使 $\boldsymbol{\varphi}^*=f(\varphi)$.

360. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是内积空间 V 上的自伴随算子, 若对任意的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 总有 $(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})>0((\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0)$, 则称 $\boldsymbol{\varphi}$ 为正定 (半正定) 自伴随算子.

361. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是酉空间 V 上的正规算子. 若 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值全是实数, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 是自伴随算子; 若 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值全是非负实数, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 是半正定自伴随算子; 若 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值全是正实数, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 是正定自伴随算子; 若 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值的模长等于 1, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 是酉算子.

362. 设 V 是有限维内积空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的半正定自伴随算子, 则存在 V 上唯一的半正定自伴随算子 $\boldsymbol{\psi}$, 使 $\boldsymbol{\psi}^2=\boldsymbol{\varphi}$.

推论: 设 $\boldsymbol{A}$ 是半正定实对称 (Hermite) 矩阵, 则必存在唯一的半正定实对称 (Hermite) 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$.

363. 设 V 是 n 维酉空间 (欧氏空间), $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的任一线性算子, 则存在 V 上的酉算子 (正交算子) $\boldsymbol{\omega}$ 以及 V 上的半正定自伴随算子 $\boldsymbol{\psi}$, 使 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\psi}$ (极分解), 其中 $\boldsymbol{\psi}$ 是唯一的, 并且若 $\boldsymbol{\varphi}$

是非异线性算子, 则 $\boldsymbol{\omega}$ 也唯一.

364. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 则存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 以及 n 阶半正定实对称阵 $\boldsymbol{S}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QS}$. 又设 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶复矩阵, 则存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 以及 n 阶半正定 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{H}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{UH}$. 上述分解式当 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为非异阵时被唯一确定.

365. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵, 如果存在非负实数 σ 以及 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, m 维非零实列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 使

$$\boldsymbol{A\alpha}=\sigma\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{A\beta}=\sigma\boldsymbol{\alpha}$$

则称 σ 是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 关于 σ 的右奇异向量与左奇异向量.

366. 设 V, U 分别是 n 维, m 维欧氏空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 $V\to U$ 的线性映射. 若存在 $U\to V$ 的线性映射 $\boldsymbol{\varphi}^*$, 使得对任意的 $\boldsymbol{v}\in V$, $\boldsymbol{u}\in U$, 都有

$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u}))$$

成立, 则称 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的伴随. $\boldsymbol{\varphi}$ 的伴随 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 存在且唯一. $\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的半正定自伴随算子, $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^*$ 是 U 上的半正定自伴随算子.

367. 设 V, U 分别是 n 维, m 维欧氏空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 $V\to U$ 的线性映射, 则存在 V 和 U 的标准正交基, 使 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这两组基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r\end{pmatrix}$$

是一个 r 阶对角阵, $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 是 φ 的非零奇异值.

368. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r, 则存在 m 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r\end{pmatrix}$$

是一个 r 阶对角阵, $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 是 φ 的非零奇异值. $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 称

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正交相抵标准型, 而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}'$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解. 通过奇异值分解很容易得到极分解.

369. 设 W 是有限维内积空间 V 的子空间, $\boldsymbol{v}\in V$, 则

(1) 在 W 中存在唯一的向量 $\boldsymbol{u}$, 使 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ 最小且这时 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\perp W$;

(2) 若 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_m\}$ 是 W 的标准正交基, 又 $\{\boldsymbol{e}_{m+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 是 $W^{\perp}$ 的标准正交基, 这样 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 就成为 V 的一组标准正交基, 则

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2+\cdots+(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_m)\,\boldsymbol{e}_m$$

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_{m+1})\,\boldsymbol{e}_{m+1}+\cdots+(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_n)\,\boldsymbol{e}_n$$

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|=\left[|(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_{m+1})|^2+\cdots+|(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_n)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

370. 假设有矛盾线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$(方程个数大于末知数个数), 两边左乘 $\boldsymbol{A}'$ 有 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\beta}$, 设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 n, 那么 $\boldsymbol{A}'$ 的秩也是 n, 故 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为非异 n 阶方阵. 于是

$$\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\beta}$$

这就是矛盾线性方程组的最小二乘解.

2.9 双线性型

371. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 称 $V\to\mathbb{K}$ 的线性映射 ($\mathbb{K}$ 作为一维空间) 为 V 上的线性函数. 令 V^* 为 V 上的线性函数全体组成的集合. 可以在 V^* 上定义加法与数乘, 使 V^* 成为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. V^* 称为 V 的共轭空间, 当 V 是有限维空间时, 常称 V^* 是 V 的对偶空间.

372. 引进记号 $\langle,\ \rangle$:

$$\langle\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{x}\rangle=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

其中 $\boldsymbol{x}\in V$, $\boldsymbol{f}\in V^*$.$\langle,\ \rangle$ 有下列性质:

(1) 若 $\langle\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{x}\rangle=0$ 对一切 $\boldsymbol{x}\in V$ 成立, 则 $\boldsymbol{f}=0$;

(2) $\langle\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{x}\rangle=0$ 对一切 $\boldsymbol{f}\in V^*$ 成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

373. 设 V, U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 $V\to U$ 的线性映射, $\boldsymbol{\varphi}^*:U^*\to V^*$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的对偶映射, 则

(1) 对任意的 $\boldsymbol{x}\in V$ 及任意的 $\boldsymbol{g}\in U^*$, 总成立:

$$\langle\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{g}),\ \boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle,$$

若 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^*$ 是 $U^*\to V^*$ 的线性映射且等式

$$\langle\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{g}),\ \boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle$$

对一切 $\boldsymbol{x}\in V$, $\boldsymbol{g}\in U^*$ 成立, 那么 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{\varphi}^*$;

(2) 若 V, U 是有限维线性空间, 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基, $\{\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{f}_n\}$ 是

其对偶基; $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ 是 U 的一组基, $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m\}$ 是其对偶基. 设 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ 下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}$, 则 φ^* 在基 $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m\}$ 和基底 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}'$.

374. 设 V, U, W 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, φ, φ_1, φ_2 是 $V \to \mathbb{Z}$ 的线性映射, ψ 是 $U \to W$ 的线性映射, 则

(1) $(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)^* = k_1\varphi_1^* + k_2\varphi_2^*$, 其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$;

(2) $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$;

(3) 若 $\varphi : V \to U$ 是线性同构, 则 $\varphi^* : U^* \to V^*$ 也是线性同构, 此时 $(\varphi^*)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)^*$;

(4) 若 V, U 都是有限维线性空间, 则 φ 是单映射的充分必要条件是 φ^* 为满映射, φ 是满映射的充分必要条件是 φ^* 为单映射. 特别地, φ 是线性同构的充分必要条件是 φ^* 也是线性同构.

375. 设 U, V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $U \times V$ 是它们的积集合. 若存在集合 $U \times V \to \mathbb{K}$ 的映射 g, 适合下列条件:

(1) 对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, $\boldsymbol{z} \in V$, $k \in \mathbb{K}$,

$$g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$
$$g(k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = kg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

(2) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in V$, $k \in \mathbb{K}$,

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$$
$$g(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{z}) = kg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

则称 g 是 U 与 V 上的双线性函数或双线性型.

376. 设 g 是 U 和 V 上的双线性型, 则必存在 U 的基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 及 V 的基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, 使

$$g\left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_j\right) = \delta_{ij}, \ (i, j = 1, \cdots, r)$$
$$g\left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_j\right) = 0, \ (i > r \text{ 或} j > r)$$

其中 r 为 g 的秩.

377. 设 g 是 U 和 V 上的双线性型. 令

$$L = \{\boldsymbol{u} \in U \mid g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}) = 0, \ \text{对一切}\boldsymbol{y} \in V\},$$
$$R = \{\boldsymbol{v} \in V \mid g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0, \ \text{对一切}\boldsymbol{x} \in U\},$$

则 L 与 R 分别是 U 与 V 的子空间, 分别称为 g 的左根子空间与右根子空间.

378. 一个双线性型 g 称为非退化, 若 g 的左、右根子空间都为零.

379. U 和 V 上的双线性型 g 为非退化双线性型的充分必要条件是

$$\dim U = \dim V = r$$

其中 r 为 g 的秩. 推论: U 和 V 上的双线性型 g 为非退化的充分必要条件是 g 在 U 和 V 的任意两组基下的表示矩阵是非异阵.

380. 设 g_1 及 g_2 是 U 和 V 上的两个非退化双线性型, 则存在 U 上的非异线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 及 V 上的非异线性变换 $\boldsymbol{\psi}$, 使

$$g_2(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}) = g_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}), \quad g_2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{y})) = g_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in V$ 成立.

381. 设 g 是 $V \times V \to \mathbb{K}$ 的双线性函数, 则称 g 是 V 上的纯量积或数量积. 若

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$$

对一切 $x,\ y \in V$ 成立, 则称 g 是 V 上的对称型. 若

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = -g(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$$

对一切 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$ 成立, 则称 g 是 V 上的交错型 (也称反对称型). 纯量积在不同基下的表示矩阵是合同的.

382. 设 g 是 V 上的纯量积, 则在 V 中 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ 等价于 $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$ 的充分必要条件是 g 为对称型或交错型.

383. 若 g 是 V 上的对称型或交错型, U 是 V 的子空间, 记

$$U^{-t} = \{\boldsymbol{x} \in V \mid g(\boldsymbol{x},\ U) = 0\}$$
$$U^{\perp r} = \{\boldsymbol{x} \in V \mid g(U,\ \boldsymbol{x}) = 0\}$$

则 $U^{-t} = U^{\perp r}$. 特别地, g 的左根子空间等于右根子空间. 这时记 $U^{\perp} = U^{\perp l} = U^{\perp r}$, 称为 U 的正交补空间. g 的左右根子空间重合, 称为 g 的根子空间.

384. 设 g 是 n 维线性空间 V 上非退化的对称型 (交错型), U 是 V 的子空间, 则 $U \cap U^{\perp} = 0$ 的充分必要条件是 g 限制在 U 上是 U 的一个非退化的纯量积. 这时有直和分解:

$$V = U \oplus U^{-}$$

385. 设 g 与 h 是 V 上的两个非退化的纯量积, 则存在 V 上唯一的非异线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$, 使

$$h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$ 成立.

386. 设 g 是 n 维线性空间 V 上的交错型, 则存在 V 的一组基

$$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{v}_r; \boldsymbol{w}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{w}_{n-2r}\}$$

使 g 在这组基下的表示矩阵为分块对角阵:

$$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{S},\ \cdots,\ \boldsymbol{S}; 0,\ \cdots,\ 0\}$$

其中共有 r 个二阶方阵 $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}$ 为如下形状:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

387. 数域 $\mathbb{K}$ 上的反对称阵的秩必是偶数, 且它的行列式等于 $\mathbb{K}$ 中某个元素的平方.

388. 数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 n 阶反对称阵合同的充分必要条件是它们具有相同的秩.

389. 设 V 是 $\mathbb{K}$ 上的有限维线佅空间, 若 V 上定义了一个非退化的交错型, 则称 V 是一个辛空间 (symplectic space)

390. 设 V 是一个辛空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的非异线性变换, 且

$$g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})) = g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$ 成立, 则 φ 称为 V 上的一个辛变换.

391. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的辛空间, 则

(1) V 上线性变换 φ 是辛变换的充分必要条件是 φ 将辛基变为辛基;

(2) 两个辛变换之积仍是辛变换;

(3) 恒等变换是辛变换;

(4) 辛变换的逆变换是辛变换.

392. 设 $V_i(i=1,\ 2)$ 是有限维线性空间, $g_i(i=1,\ 2)$ 是 V_i 上非退化的对称型. 若存在 $V_1 \to V_2$ 的线性同构 η, 使

$$g_2(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y})) = g_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V_1$ 成立, 则称 η 是 $V_1 \to V_2$ 的保距同构. 特别地, 当 $V_1 = V_2 = V,\ g_1 = g_2 = g$ 时, $\boldsymbol{\eta}$ 称为 $(V,\ g)$ 上的一个正交变换.

393. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, g 是 V 上非退化的对称型, 则

(1)V 上两个正交变换之积仍是正交变换;

(2)V 上恒等变换是正交变换;

(3)V 上正交变换的逆变换也是正交变换.

394. Cartan-Dieudonne 定理: 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, g 是 V 上非退化的对称型. 若 $\boldsymbol{\eta}$ 是 V 上的正交变换, 则 η 可以表示为不超过 n 个镜像变换之积. 正交几何有许多与欧氏几何相仿的性质, 但也有一个明显的不同. 在欧氏空间中, 任一非零向量不能与自身垂直, 但在正交几何中这是可能的.

395. 设 V 是有限维线性空间, g 是 V 上非退化的对称型. 若 $\boldsymbol{v}$ 是 V 中的非零向量, 且 $g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{v}$ 是 V 上的一个迷向向量. 含有迷向向量的子空间称为迷向子空间, 不含任何迷向向量的子空间称为全不迷向子空间. 若一个子空间的非零向量全是迷向向量, 则称之为全迷向子空间. 一个二维线性空间若带有一个非退化的对称型且含有迷向向量, 则称之为双曲平面. 对双曲平面有如下结论:

(1) V 是双曲平面的充分必要条件是 V 有一组基 $\{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\}$, 适合条件:

$$g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}) = 0$$
$$g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}) = 1$$

即 g 在这组基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) 任何两个双曲平面皆保距同构;

(3) 任何一个双曲平面有且只有两个一维的全迷向子空间.

396. 设 V 是实数域上的四维空间, 若 g 是一个非退化的对称型且其正惯性指数等于 3, 则称 $(V,\ g)$ 是一个 Minkowski(闵可夫斯基) 空间.g 在 V 的适当基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

V 上的正交变换称为 Lorentz (洛伦兹) 变换, V 中的迷向向量称为光向量, V 中适合 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) > 0$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 称为空间向量. 而适合 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) < 0$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 称为时间向量. Minkowski 空间在相对论中有重要应用.

第 3 章 Weierstrass Approximation Theorem

3.1 Lemma

引理 3.1

对所有实数 x,

$$\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\le\frac{n}{4}.$$

♡

证明 考虑二项式

$$(x+y)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^py^{n-p}.$$

关于 x 微分, 再乘以 x, 得

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p}x^py^{n-p}.$$

类似地, 把这个二项式关于 x 微分两次再乘以 x^2 得

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n}p(p-1)\binom{n}{p}x^py^{n-p}.$$

于是, 若令

$$r_p(x)=\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p},$$

则有

$$\sum_{p=0}^{n}r_p(x)=1,\qquad\sum_{p=0}^{n}pr_p(x)=nx,$$

$$\sum_{p=0}^{n}p(p-1)r_p(x)=n(n-1)x^2.$$

因而

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2r_p(x)&=n^2x^2\sum_{p=0}^{n}r_p(x)-2nx\sum_{p=0}^{n}pr_p(x)+\sum_{p=0}^{n}p^2r_p(x)\\&=n^2x^2-2nx(nx)+\left[nx+n(n-1)x^2\right]\\&=nx(1-x).\end{aligned}$$

但 $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\ge 0$, 故 $x(1-x)\le\frac{1}{4}$, 从而得到

$$\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\le\frac{n}{4}.$$

3.2 Bernshteĭn 多项式

定义 3.1

设 f 是定义在区间 $[0,\ 1]$ 上的实值函数. 由

$$B_n(f;x)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}f\left(\frac{p}{n}\right)x^p(1-x)^{n-p},\quad x\in[0,\ 1],$$

定义的函数 $B_n(f)$ 叫做函数 f 的 n 阶 Bernshteĭn 多项式.$B_n(f)$ 是次数 $\leq n$ 的多项式. ♣

Bernshteĭn 多项式关于函数 f 是线性的, 即, 若 $a_1,\ a_2$ 是常数, $f=a_1f_1+a_2f_2$, 则

$$B_n(f)=a_1B_n(f_1)+a_2B_n(f_2).$$

由于在 $[0,\ 1]$ 上

$$\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\geq 0,$$

并且

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}=[x+(1-x)]^n=1, \tag{3.1}$$

故当在 $[0,\ 1]$ 上 $m\leq f(x)\leq M$ 时有

$$m\leq B_n(f;x)\leq M.$$

定理 3.1

(Bernshteĭn): 对 $[0,\ 1]$ 上的任意连续函数 f, $\{B_n(f)\}$ 在 $[0,\ 1]$ 上一致收敛于 f. ♡

证明 设在 $[0,\ 1]$ 上 $|f(x)|\leq M<+\infty$. 由 f 的一致连续性, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使 $|x-x'|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

任取 $x\in[0,\ 1]$, 由(3.1)有

$$f(x)=\sum_{p=0}^{n}f(x)\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p},$$

因此

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leq\sum_{p=0}^{n}\left|f\left(\frac{p}{n}-f(x)\right)\right|\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}. \tag{3.2}$$

把数 $p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 如此分成两类 A 与 B :

$$当\left|\frac{p}{n}-x\right|<\delta 时 p\in A;$$
$$当\left|\frac{p}{n}-x\right|\geq\delta 时 p\in B.$$

则当 $p \in A$ 时有

$$\left|f\left(\frac{p}{n} - f(x)\right)\right| < \varepsilon.$$

因而由(3.2)得

$$\begin{aligned}\sum_{p\in A}\left|f\left(\frac{p}{n} - f(x)\right)\right|\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} &< \varepsilon\sum_{p\in A}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\\ &\leq \varepsilon\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} = \varepsilon.\end{aligned} \tag{3.3}$$

当 $p \in B$ 时有

$$\frac{(p-nx)^2}{n^2\delta^2} \geq 1,$$

因而由引理得

$$\begin{aligned}\sum_{p\in B}\left|f\left(\frac{p}{n} - f(x)\right)\right|\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} &\leq \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{p\in B}(p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\\ &\leq \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\\ &\leq \frac{M}{2n\delta^2}\end{aligned} \tag{3.4}$$

结合(3.2)(3.3), (3.4)可以看到: 对任一 $x \in [0,\ 1]$,

$$|B_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

而这就是说, 只要 $n > \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$, 便有

$$|B_n(f;x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

3.3 Weierstrass

定理 3.2 (Weierstrass Approximation Theorem)

设 $f(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的连续函数, 则存在多项式函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

兹证 Weierstrass 逼近定理. 若 $[a,\ b] = [0,\ 1]$, 则它是上述定理得直接结果. 设 $[a,\ b] \neq [0,\ 1]$. 考虑 y 的函数 $f(a + y(b-a))$. 这个函数在 $[0,\ 1]$ 上有定义且连续, 因此存在多项式 $Q(y)$, 使对所有 $y \in [0,\ 1]$ 有

$$|f(a + y(b-a)) - Q(y)| < \varepsilon.$$

当 $x \in [a,\ b]$ 时, $\frac{x-a}{b-a} \in [0,\ 1]$. 于是

$$\left|f(x) - Q(\frac{x-a}{b-a})\right| < \varepsilon.$$

因而多项式 $P(x)=Q(\frac{x-a}{b-a})$ 即为所求.

第 4 章 Inequality

定义 4.1 (凸函数)

若函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(\tau x+(1-\tau)y)\leqslant \tau f(x)+(1-\tau)f(y)$$

对于所有 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 和每个 $0\leqslant\tau\leqslant 1$ 成立, 则称 f 为凸函数.

定理 4.1 (支撑超平面)

假设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是凸函数. 则对于每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 存在 $r\in\mathbb{R}^n$ 使得以下不等式

$$f(y)\geqslant f(x)+r\cdot(y-x)$$

对所有 $y\in\mathbb{R}^n$ 成立.

映射 $y\mapsto f(x)+r\cdot(y-x)$ 确定了 f 在 x 处的支撑超平面, 上述不等式表示 f 的图像位于每个支撑超平面之上. 如果 f 可微, 则 $r=Df(x)$.

如果 f 是 C^2 类函数, 那么 f 是凸函数当且仅当 $D^2f\geqslant 0$. 如果 $D^2f\geqslant\theta I$ 对于某个常数 $\theta>0$ 成立: 这意味着

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_ix_j}(x)\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|^2\quad(x,\ \xi\in\mathbb{R}^n).$$

定理 4.2 (Jesen's inequality)

假设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是凸函数且 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集. 令 $\mathbf{u}:\ U\to\mathbb{R}^m$ 是可积的. 则有

$$f(\fint_U \mathbf{u}\,\mathrm{d}x)\leqslant\fint_U f(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x.$$

证明 由于 f 是凸函数, 对 $\forall p\in\mathbb{R}^m$, $\exists r\in\mathbb{R}^m$ 使得

$$f(q)\geqslant f(p)+r\cdot(q-p)\quad\forall q\in\mathbb{R}^m.$$

取 $p=\fint_U\mathbf{u}\,\mathrm{d}y,\ q=\mathbf{u}(x):$

$$f(\mathbf{u}(x))\geqslant f\left(\fint_U\mathbf{u}\,dy\right)+r\cdot\left(\mathbf{u}(x)-\fint_U\mathbf{u}\,dy\right)$$

在等式两边对 x 在 U 上积分有

$$\int_U f(\mathbf{u}(x))\,\mathrm{d}x\geqslant\int_U f\left(\fint_U\mathbf{u}\,dy\right)\,\mathrm{d}x+r\cdot\left(\int_U\mathbf{u}(x)\,\mathrm{d}x-|U|\fint_U\mathbf{u}\,dy\right)=f(\fint_U\mathbf{u}\,\mathrm{d}x),$$

故定理得证.

笔记 此处 $\fint_U\mathbf{u}\,\mathrm{d}x$ 为 $\mathbf{u}$ 在 U 上的平均值, 即 $\fint_U\mathbf{u}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|U|}\int_U\mathbf{u}\,\mathrm{d}x$.

命题 4.1 (C^2 下凸函数的 Jesen 不等式)

设 f 为区间 I 上的二阶可微下凸函数, 则对任和 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ 与满足条件 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 的 n 个正数成立不等式

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 f x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n)$$

又若 f 严格下凸, 则上述不等式成立等号的充分必要条件是

$$x_1=x_2=\cdots=x_n.$$

证明 记 $\bar{x}=\lambda_1 f x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n$(即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的加权平均值), 并写出 $f(x_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 在点 $\bar{x}$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$f(x_i)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x_i-\bar{x})+\frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i-\bar{x})^2,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

将这 n 个公式分别乘以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 后相加, 利用 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 和二阶导数非负, 就得到 Jesen 不等式.

命题 4.2 (广义的算数平均值-几何平均值不等式)

设有非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 则成立不等式

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

其中当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

证明 令 $f(u)=-\ln u,\ u>0$. 由于 $f''(u)=\frac{1}{u^2}>0$, 因此 $f(u)$ 是严格下凸函数, 由 Jesen 不等式得到

$$-\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leqslant -\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln x_k.$$

移项即可证明.

命题 4.3 (Young's inequality)

令 $1<p,\ q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad (a,b>0).$$

证明 我们有映射 $x \mapsto \mathrm{e}^x$ 为凸函数, 故由 Jesen 不等式可得

$$ab=\mathrm{e}^{\log a+\log b}=\mathrm{e}^{\frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^{\log a^p}+\frac{1}{q}\mathrm{e}^{\log b^q}=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

命题 4.4 (ε-Young's inequality)

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q \quad (a,\ b > 0,\ \varepsilon > 0), \quad C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p}/q$$

证明 我们在 Young's inequality$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ 中取 $\frac{x^p}{p} = \varepsilon a^p$ 可得 $x = (p\varepsilon)^{1/p}a$, 为了保证 $xy = ab$ 可得 $y = (p\varepsilon)^{-1/p}b$ 可得证.

命题 4.5 (Hölder 不等式)

假设 $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则若有 $u \in L^p(U),\ v \in L^q(U)$, 有

$$\int_U |uv|\,\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^q(U)}.$$

证明 由齐次性, 可以假设 $\|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^q(U)} = 1$. 则由 Young's inequality 可得对 $1 < p,\ q < \infty$ 有

$$\int_U |uv|dx \leq \frac{1}{p}\int_U |u|^p dx + \frac{1}{q}\int_U |v|^q dx = 1 = \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

命题 4.6 (Minkowski 不等式)

假设 $1 \leqslant p \leqslant \infty,\ u,\ v \in L^p(U)$. 则有

$$\|u+v\|_{L^p(U)} \leqslant \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{L^p(U)} &= \int_U |u+v|^p\,\mathrm{d}x \leqslant \int_U |u+v|^{p-1}(|u|+|v|)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_U |u+v|^{p-1}|u|\,\mathrm{d}x + \int_U |u+v|^{p-1}|v|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_U |u+v|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_U |u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_U |v|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\right] \\
&= \|u+v\|_{L^p(U)}^{p-1}(\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}).
\end{aligned}$$

笔记 同样的证明方法可以证明 Hölder 不等式以及 Minkowski 不等式的离散版本:

$$\begin{cases}
\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \\
\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},
\end{cases}$$

其中 $a = (a_1, \ldots, a_n),\ b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leqslant p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

命题 4.7 (Hölder 不等式的一般形式)

令 $1 \leqslant p_1, \ldots, p_n \leqslant \infty$, 且有 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$ 则有

$$\|u_1 \cdots u_n\|_{L^r(U)} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|_{L^{p_k}(U)}.$$

证明 由数学归纳法,

1. 当 $n = 2$ 时, 此时为 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, 需证 $\|fg\|_{L^r(U)} \leqslant \|f\|_{L^p(U)} \|g\|_{L^q(U)}$.
   由于此时有 $1 = \frac{r}{p} + \frac{r}{q}$, 在 Hölder 不等式中取 f^r, g^r 得证.
2. 假设不等式对 $n-1$ 时成立, 下面证明 n 的情况.
   取
   $$p = \frac{p_n}{p_n - r},\ q = \frac{p_n}{r},\ \text{有},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
   此时有
   $$\int_U |u_1 \cdots u_n|^r \,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_U |u_1 \cdots u_{n-1}|^{rp} \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_U |u_n|^{rq} \right)^{1/q}.$$
   对于右边第一项我们首先有
   $$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p_n} = \frac{p_n - r}{r p_n}$$
   则由 $n-1$ 的形式以及上述可得
   $$\left(\int_U |u_1 \cdots u_{n-1}|^{rp} \right)^{1/p} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \left(\int_U |u_k|^{rp \frac{p_n - r}{r p_n} p_k} \right)^{\frac{r p_n}{p_n - r} p_k \frac{1}{p}} = \prod_{k=1}^{n-1} \|u_k\|_{L^{p_k}(U)}^r$$

命题 4.8 (Bernoulli 不等式)

在 $x > -1$ 时, 对于 $0 < \alpha < 1$ 成立不等式

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x,$$

而对于 $\alpha < 0$ 和 $\alpha > 1$ 则成立相反的不等式

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x,$$

而且这些不等式中当 $x = 0$ 时成立等号.

证明 对于函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 计算导数:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

再注意到 $y = 1 + \alpha x$ 是曲线 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 处的切线与函数的凸性可证.

命题 4.9 (Hadamard 不等式)

设 f 是 $(a,\ b)$ 上的下凸函数, 则对每一对 $x_1,\ x_2 \in (a,\ b).x_1 < x_2$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

证明 可知 f 连续, 因此可积性没有问题. 注意到点 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 不仅是 x_1 和 x_2 的中点, 同时也是 $x_1+\lambda(x_2-x_1)$ 和 $x_2-\lambda(x_2-x_1)$ 的中点, 其中 $\lambda \in [0,\ 1]$. 利用 f 为下凸函数, 则就有不等式

$$\frac{1}{2}[f(x_1+\lambda(x_2-x_1))+f(x_2-\lambda(x_2-x_1))] \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

将上式两边对 λ 从 0 到 1 积分, 经计算就可以得到

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

另一方面, 由 f 是下凸函数又可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^1 f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\ \mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \int_0^1 [\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)]\ \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\end{aligned}$$

笔记

- 其中每一个不等式都是函数下凸地充分必要条件
- 若其中任何一个不等式对所有的 $x_1,\ x_2 \in (a,\ b)$ 成立等号, 则 f 只能是线性函数.

命题 4.10 (Jesen 不等式)

设 $f,\ p \in R[a,\ b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $p(x)$ 非负且 $\int_a^b p(x)\ \mathrm{d}x > 0$, 则当 φ 是 $[m,\ M]$ 上的下凸函数时, 成立不等式:

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b} p(x)\ \mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\ \mathrm{d}x}$$

若 φ 为上凸函数则不等式反向.

命题 4.11 (Schwarz 不等式)

设 $f,\ g \in R[a,\ b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\ \mathrm{d}x.$$

证明 如果 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ 两个积分中至少有一个不等于 0, 我们不妨设 $\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \neq$

0. 由于对一切实数 λ，在 $[a.b]$ 上 $[\lambda f(x)-g(x)]^2 \geqslant 0$，因此有

$$\int_a^b [\lambda f(x)-g(x)]^2 \ \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

将它展开, 得到关于 λ 的非负二次三项式

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x) \ \mathrm{d}x - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) \ \mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x) \ \mathrm{d}x \geqslant 0,$$

因此它的判别式 $\Delta \leqslant 0$，即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) \ \mathrm{d}x\right)^2 - \int_a^b f^2(x) \ \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x) \ \mathrm{d}x \leqslant 0,$$

移项即得所欲证的不等式. 如果积分 $\int_a^b f^2(x) \ \mathrm{d}x = \int_a^b g^2(x) \ \mathrm{d}x = 0$，则可如下证明:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(x) \ \mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^b |f(x)||g(x)| \ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2} \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x) \ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x) \ \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

命题 4.12 (Young 不等式)

设 f 在 $[0, +\infty]$ 上连续可导且严格单调增加, $f(0)=0$，a，$b>0$，则有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x) \ \mathrm{d}x + \int_0^b g(y) \ \mathrm{d}y.$$

其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 而等号当且仅当 $b=f(a)$ 时成立.

证明 将上式右端的两个积分之和记为 I. 利用 $g(f(x)) \equiv x$，对其中第二个积分作变量代换 $y=f(x)$，即 $x=g(y)$，然后分部积分得到:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^a f(x) \ \mathrm{d}x + \int_0^b g(y) \ \mathrm{d}y = \int_0^a f(x) \ \mathrm{d}x + \int_0^{g(b)} x \ \mathrm{d}f(x) \\ &= \int_0^a f(x) \ \mathrm{d}x + xf(x)\Big|_0^{g(b)} - \int_0^{g(b)} f(x) \ \mathrm{d}x \\ &= bg(b) - \int_a^{g(b)} f(x) \ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中利用了 $f(g(b))=b$. 如果 $a=g(b)$，也就是 $b=f(a)$，就已经得到了等号成立的情况.

在 $a<g(b)$ 时, 对于上述积分利用 $f(x)$ 在区间 $[a, g(b)]$ 上严格单调递增, $f(x) \leqslant f(g(b)) = b$，就可以得到 $I > bg(b)-[g(b)-a]b = ab$. 在 $a>g(b)$ 时, 类似地可以得到

$$I = bg(b) + \int_{g(b)}^a f(x) \ \mathrm{d}x > bg(b) + [a-g(b)]b = ab.$$

命题 4.13 (Carleman 不等式)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 则成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

其中右边的系数 e 不能再改进.

证明 对部分和估计如下 (其中利用不等式 $\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n!$):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt[n]{a_1 2a_2 \cdots n a_n}}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n \sqrt[n]{n!}} \\
&\leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)} = \mathrm{e} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{n=1}^{n} k a_k \\
&= \mathrm{e} \sum_{n=1}^{N} k a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \mathrm{e} \sum_{n=1}^{N} k a_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right) \\
&\leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{N} a_k,
\end{aligned}$$

然后令 $N \to \infty$ 即可得到 *Carleman* 不等式. 最后, 对于每个 N 构造一个数列:$a_n = 1/n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$, 而 $a_n = 0,\ \forall n > N$, 然后作出由 $\{a_n\}$ 得到的两个级数和之比, 令 $N \to \infty$, 且用 Stolz 定理可以得到

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n} = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{\sqrt[N]{N!}} = \mathrm{e}.$$

这表明不等式右边的系数 e 不能再改进.

笔记 [Hardy 不等式] 其中当 $p > 1$ 时为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

令 $p \to +\infty$ 就导出 Carleman 不等式.

命题 4.14 (AM-GM 不等式推广)

$$x^{\alpha} y^{1-\alpha} \leqslant x + y, \quad \forall x,\ y > 0,\ \alpha \in [0,\ 1]$$

证明 当 $\alpha = 0, 1$ 时易证.

其余情况下原式可转为证明

$$1 \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}$$

即证明

$$1 \leqslant t^{-\alpha}(t+1), \quad \forall t>0, \alpha \in (0,1)$$

令 $f(t)=t^{-\alpha}(t+1),\ g(t)=t^t$, 有

$$f'(t)=t^{-\alpha-1}[(1-\alpha)t-\alpha]$$

且有当 $t \in (0,\ \frac{\alpha}{1-\alpha})$ 时单减, $t \in (\frac{\alpha}{1-\alpha},\ 1)$ 时单增. 故有

$$\min_{t\in(0,1)} f(t)=f(\frac{\alpha}{1-\alpha})=\frac{1}{\alpha^\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)^{1-\alpha}}.$$

研究函数 $g(t)$ 可得 $g(t)<1$, $\forall t \in (0,1)$, 由 α 的范围可知不等式得证.

第 5 章 Eight Equivalence Theorems

Dedekind 分割原理: 全体实数 $\mathbb{R}^1$ 的任何一个分割 $(X,\ Y)$，只能要么 X 有最大数, Y 有最小数, 即对 $\mathbb{R}^1$ 的任何一个分割 $(X,\ Y)$，必存在唯一的实数 $\alpha \in \mathbb{R}^1$，使对任意的 $x \in X,\ y \in Y$ 有

$$x \leq \alpha < y \text{或} x < \alpha \leq y.$$

所谓实数集 D 的一个 Dedekind 分割, 就是将 D 中的元素分成两个子集 X 和 Y, 且满足下列条件:

- X 与 Y 都不空;
- $X \bigcap Y = \varnothing$
- 每一个属于 X 的元小于 Y 中的所有元, 称 X 为 D 的前段, Y 为 D 的后段, 且将 D 的分割记为 $(X,\ Y)$.

确界存在原理: 非空有上 (下) 界的数集, 必有上 (下) 确界.

单调有界原理: 递增 (递减) 有上界 (下界) 的数列必定收敛.

Cantor **区间套定理:** 设 $[a_n,\ b_n]\,(n=1,\ 2,\ \ldots)$ 是一列闭区间. 又设

(i) $[a_{n+1},\ b_{n+1}] \subset [a_n,\ b_n]\,(n=1,\ 2,\ \ldots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一数 $x_0 \in [a_n,\ b_n]\,(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

Heiene-Borel **有限覆盖定理:** 有界闭集的任何开覆盖必有有限子覆盖.

聚点原理: 有界无穷点集 E 至少有一个聚点 (极限点).

Bolazano-Weierstrass **定理:** 有界数列必有收敛子列.

Cauchy **收敛准则:** 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 数列.

问题 5.1 Dedekind 分割原理 $\Rightarrow$ 确界存在原理

解 只要证明, 若数集 D 有上界, 则 D 必有唯一的上确界.

1° 若 D 有最大值 M, 则 M 就是 D 的上确界.

2° 设 D 为无限集且无最大值, 做实数集 $\mathbb{R}^1$ 的分割 $(X,\ Y)$, 其中 Y 为 D 的一切上界所组成之集, X 为 Y 的补集. 于是

(i) $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$,

(ii) $X \cap Y = \varnothing$,

(iii) 任取 $x \in X$, 若存在 $y \in Y$ 使 $y \leq x$, 则 x 成为 D 的一个上界, 从而 $x \in X$, 这与 (ii) 矛盾, 故对任意 $y \in Y$, $x \in X$, 均有 $x < y$.

因此 $(X,\ Y)$ 是一个 Dedekind 分割. 由分割原理, 存在唯一的实数 $\alpha \in \mathbb{R}^1$, 使对任意的 $x \in X$, $y \in Y$ 有

$$x \leq \alpha < y \text{ 或 } x < \alpha \leq y.$$

因 α 不可能是 X 的最大值 (若α 是X的最大值, 则$\alpha \in Y$, 从而$X \bigcap Y \neq \varnothing$, 矛盾!) 故对一切 $x \in X$, 均有 $x < \alpha$, 即 $x \leq \alpha < y$ 不能成立. 这样, 只有 $x < \alpha \leq y$ 成立, 即 α 是 Y 中的最小者, 也就是 D 的上界中的最小者, 故 D 有唯一的上确界 α.

问题 5.2 确界存在原理 $\Rightarrow$ 单调有界原理

解 不妨假设 $\{x_n\}$ 单调增加有上界. 据确界存在原理, $\{x_n\}$ 必有上确界 a, 即

$$\sup\{x_n\} = a.$$

证明 a 就是 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限. 事实上, 由上确界定义知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0, 使

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a.$$

由 $\{x_n\}$ 单调增加, 可知对任何 $n > n_0$ 均有

$$x_{n_0} \leq x_n \leq a.$$

因此, 当 $n > n_0$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = a.$$

问题 5.3 单调有界原理 ⇒Cantor 区间套定理

解 设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\,(n = 1, 2, \dots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

由 (i) 知数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = a \geq a_n\,(n = 1, 2, \dots). \tag{5.1}$$

又因对每一 n, b_n 是 $\{a_n\}$ 的上界, 且 a 是 $\{a_n\}$ 的最小上界, 故

$$a \leq b_n\,(n = 1, 2, \dots). \tag{5.2}$$

由(5.1)(5.2)可知 $a_n \leq a \leq b_n\,(n = 1, 2, \dots)$, 即

$$a \in [a_n, b_n]\,(n = 1, 2, \dots).$$

若还存在实数 b 使

$$b \in [a_n, b_n]\,(n = 1, 2, \dots),$$

则 $0 \leq |a - b| \leq b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$, 故 $a = b$.

问题 5.4 Cantor 区间套定理 ⇒Heiene-Borel 有限覆盖定理

解 设 $\mathcal{D}$ 是闭区间 $[a,\,b]$ 的一个开覆盖. 假如 $[a,\,b]$ 不能被 $\mathcal{D}$ 中任何有限个开集覆盖, 将 $[a,\,b]$ 等分为两个区间, 则其中至少有一个区间不能被 $\mathcal{D}$ 中任何有限个开集覆盖, 记此区间为 $[a_1,\,b_1]$. 再等分 $[a_1,\,b_1]$, 同样至少有一个不能被 $\mathcal{D}$ 中任何有限个开集覆盖, 记此区间为 $[a_2,\,b_2]$. 如此继续下去, 得到一列闭区间

$$[a_1,\,b_1]\,,\,[a_2,\,b_2]\,,\,\ldots,\,[a_n,\,b_n]\,,\,\ldots$$

适合

(i) 任何一个 $[a_n,\,b_n]$ 都不能被 $\mathcal{D}$ 中任何有限个开集覆盖.

(ii) $[a_{n+1},\,b_{n+1}]\subset[a_n,\,b_n]\subset[a,\,b]\,(n=1,\,2,\,\ldots)\,.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$

据区间套定理, 存在唯一实数 $c\in[a_n,\,b_n]\,(n=1,\,2,\,\ldots)$, 且

$$\lim_{n\to}a_n=\lim_{n\to}b_n=c.$$

因 $\mathcal{D}$ 覆盖了 $[a,\,b]$, 故 $\mathcal{D}$ 中至少有一个开集从而至少有一个开区间 $(\alpha,\,\beta)$, 使得

$$c\in(\alpha,\,\beta)\,.$$

由极限性质知存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时有

$$\alpha<a_n<b_n<\beta,$$

即 $[a_n,\,b_n]\subset(\alpha,\,\beta)$. 因此, $(\alpha,\,\beta)$ 覆盖了 $[a_n,\,b_n]\,(n>n_0)$. 这与 (i) 发生矛盾.

问题 5.5 Heiene-Borel 有限覆盖定理 $\Rightarrow$ 聚点原理

解 设 D 为有界的无限集，令

$$a=\inf D,\ b=\sup D,$$

则 $D\subset[a,\ b]$. 假如 D 没有聚点, 那么对于任意 $x\in[a,\ b]$, 存在 x 的邻域 $U(x,\ \delta_x)=(x-\delta_x,\ x+\delta_x)$, 使 $U(x,\ \delta_x)$ 中至多含有 D 的有限个点, 即 $U(x,\ \delta_x)\cap D$ 是有限集. 显然, 当 x 走遍 $[a,\ b]$ 时, 这些邻域就覆盖了 $[a,\ b]$, 即

$$[a,\ b]\subset\bigcup_{x\in[a,\ b]}U(x,\ \delta_x)$$

据有限覆盖定理, 存在有限个邻域, $U(x_1,\ \delta_{x_1}),\ \ldots,\ U(x_n,\ \delta_{x_n})$, 它们覆盖 $[a,\ b]$, 即

$$[a,\ b]\subset\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i,\ \delta_{x_i})$$

从而 $D\subset\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i,\ \delta_{x_i})$. 由此得到 D 为有限集, 此为矛盾. 因此, D 必有聚点.

问题 5.6 聚点原理 $\Rightarrow$Bolazano-Weierstrass 定理

解 设 $\{x_n\}$ 是有界无穷数列. 若 $\{x_n\}$ 是由有限个实数重复出现而构成的数列, 则至少有一个数 c 要重复出现无穷多次. 设 c 重复出现的项为 $n_1, n_2, \ldots$, 则

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c,$$

即 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列.

现设 $\{x_n\}$ 确由无穷多个不同实数组成. 则此数列为一有界无穷集. 据聚点原理, $\{x_n\}$ 至少有一聚点 c. 于是, 对任何 k, $\left(c-\frac{1}{k},\ c+\frac{1}{k}\right)$ 中必含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 从而在 $\left(c-\frac{1}{k},\ c+\frac{1}{k}\right)$ 中可选出 $\{x_n\}$ 的一个项 x_{n_k} 使 $x_{n_k} \neq c$. 因 k 是任意正整数, 故得 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\{x_{n_k}\} \in \left(c-\frac{1}{k},\ c+\frac{1}{k}\right)$, 因而

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

问题 5.7 Bolazano-Weierstrass 定理 $\Rightarrow$Cauchy 收敛准则

解 必要性显然.

兹证充分性. 据条件, 对 $\varepsilon = 1$, 存在 n_0, 当 n, $m > n_0$ 时有

$$|x_n - x_m| < 1.$$

于是,

$$|x_n| \leq |x_n - x_{n_0+1}| + |x_{n_0+1}| < 1 + |x_{n_0+1}|.$$

令

$$M = \max\left\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0}|, 1 + |x_{n_0+1}|\right\},$$

则 $|x_n| \leq M\,(n = 1, 2, \ldots)$, 故 $\{x_n\}$ 有界. 因此存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

于是由不等式

$$|x_n - c| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c|$$

可知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

问题 5.8 Cauchy 收敛准测 $\Rightarrow$Dedekind 分割原理

解 设 $(X,\ Y)$ 是全体实数 $\mathbb{R}^1$ 的任意一个分割. 因 $X \neq \varnothing,\ Y \neq \varnothing$, 故可任取 $a_1 \in X,\ b_1 \in Y$, 则 $b_1 > a_1$. 将 $[a_1,\ b_1]$ 等分为二, 若分点 $\frac{a_1+b_1}{2} \in X$ 就取右半区间并记为 $[a_2,\ b_2]$; 若 $\frac{a_1+b_1}{2} \in Y$, 则取左半区间并记为 $[a_2,\ b_2]$. 总之, $a_2 \in X,\ b_2 \in Y$. 如此继续下去, 得到闭区间列 $\{[a_n,\ b_n]\}$, 满足

(i) $[a_{n+1},\ b_{n+1}] \subset [a_n,\ b_n]\,(n=1,\ 2,\ \ldots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

(iii) $a_n \in X,\ b_n \in Y\,(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

由 (i), (ii) 可知数列

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$$

是 Cauchy 数列, 因而收敛. 设其极限为 $c \in \mathbb{R}^1$. 若 $c \in X$, 可证 c 必为 X 的最大值. 事实上, 假如存在 $x \in X$ 而有 $c < x$, 取正数 $\varepsilon = x - c$, 则

$$(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon) \subset X.$$

由 (iii), 每个 $b_n \notin (c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$, 这与 $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$ 收敛于 c 发生矛盾. 因此, c 为 X 的最大值. 此时 Y 显然无最小值. 类似地可证, 若 c 在 Y 中, 则 c 必是 Y 地最小值, 此时 X 无最大值.

至此证明了

Dedekind 分割原理 确界存在原理 单调有界原理 Cantor 区间套定理 Heiene-Borel 有限覆盖定理 聚点原理 Bolazano-Weierstrass 定理 Cauchy 收敛准则

这八条之间的等价性, 并且这八个等价的断语从不同的角度刻画了实数的连续 (完备) 性.

第 6 章 Differential Manifold

6.1 微分流形的基本概念

6.1.1 微分流形

流形:m 维拓扑流形 (简称" 流形") 是指**局部**同胚于 m 维欧氏空间中的开集 T_2(即 Hausdorff 性) 且 C_2(即具有可数基) 拓扑空间, 一维的理解为曲线, 二维理解为曲面.

笔记

- $m \in \mathbf{N}$
- 流形满足 $T_1 - T_3$, C_1, C_2, 局部道路连通性, 局部紧性, 仿紧性
- 类似可延拓流形的定义至带边流形 M, 记 ∂M 为 M 的边界点集. 若 M 为带边流形, 则 M 为流形 $\Leftrightarrow \partial M = \varnothing$.
- 在流形中, 往往对它的道路连通分支感兴趣, 又由于流形具有道路连通性, 所以流形的连通性等价于道路连通性.

微分流形: 一个 m 维流形 M 就是一个赋予了微分结构的 m 维流形, 即存在一个坐标卡 $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$(即流形定义中的局部同胚映射), 使得:

- $\mathcal{A}$为$\mathcal{M}$ 的一个开覆盖;
- 任意两个坐标卡 (U, ϕ) 和 (V, ψ) 满足 $U \cap V = \varnothing$, 或者交集非空时 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 与 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 皆为 C^{∞} 函数;
- $\mathcal{A}$ 为极大的 (该条件可由前两条唯一生成)

微分流形的直观含义是指, 这个流形是由同胚于欧氏空间的部分局部光滑粘贴起来的, 就是很光滑的曲线或者曲面等等. 并且一旦赋予了微分结构, 流形上的每一点 p 都会有一个局部坐标卡 $\{u^i\}$, 方便我们在流形上进行局部的运算.

以下所说的" 流形" 均指 (赋予了微分结构的)"微分流形".

微分同胚: 现实中, 我们往往会思考两个流形是不是一样, 如何判断这两个流形一样, 使得在计算和分析的时候可以用另一个流形来代替? 于是引入了微分同胚 (或称光滑同胚) 的概念: 两个流形微分同胚是指存在一个可逆的光滑映射, 并且逆映射也是光滑的 (注意与同胚的区别: 同胚是指存在一个可逆的连续映射, 并且逆映射也连续). 因此一旦两个流形微分同胚, 那么上面问题都是可以肯定回答的了. 值得一提的是, 对维数不超过 3 的流形, 同胚一定是微分同胚. 而四维以上便有了著名的"七维怪球"的反例!

6.1.2 流形上的切空间和与切空间

切空间: 给了一个 m 维流形 M 后, 既然它是光滑的, 那么对于其上的每一点 p, 就有和 p"相切"的 m 维线性空间, 好比一条光滑曲线 (1 维流形) 上的任一点有一条 (1 维) 切线, 一个光滑曲

面 (2 维流形) 上任一点有一个二维切平面一样, 称这个相切的线性空间为 M 在 p 点的 (m维) 切空间, 记为 T_p(或 T_pM). 在取定 p 的一个局部的坐标卡 $\{u^i\}$ 后, T_p 的一组基有表示 $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}_{i=1}^m$.

余切空间: 由于一个线性空间 V 有一个对偶空间 V^*, 那么上述流形在 p 点的切空间 T_p 的对偶空间 T_p^* 称为点 p 上的余切空间, 并且 T_p^x 中的元素 $\mathrm{d}f$ 在 T_p 中元素 X_p 上的共轭作用记为 $< X_p, (\mathrm{d}f)_p >$, 其中 f 是 M 上光滑函数空间 $C^\infty(M)$ 中的元素, $\mathrm{d}f$ 为 f 在流形 M 上的全微分 (因此 $\mathrm{d}f$ 也属于是 M 上的一个一次微分形式, 即余切场). 在取定 p 的一个局部坐标卡 $\{u^i\}$ 后, T_p^* 的一组基有表示 $\{\mathrm{d}u^i|_p\}_{i=1}^m$.

当流形是 $\mathbb{R}^2$(欧式平面) 时, $< X_p, \mathrm{d}f >$ 就是光滑函数 f 在 p 点的处沿 X_p 方向的方向导数 (设 $X_p = \sum\limits_{i=1}^{2} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\mathrm{d}f = \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$, 则 $< X_p, \mathrm{d}f >= \sum\limits_{i=1}^{2} a^i \frac{\partial f}{\partial x^u} = \mathrm{D}_{X_p} f$).

拉回和推前映射: 如果两个流形间存在一个光滑映射 $\varphi : M \to N$, (M 为 m 维流形, N 为 n 维流形) 那么由这个映射自然诱导出流形 M 上每一点 p 处切空间 T_p 到 N 上相应点 $q = \varphi(p)$ 上切空间 T_q 的线性映射 φ_*(称为**推前映射**或 **Frechet 导数**), 以及 T_q^* 到 T_p^* 的线性映射 φ^*(称为拉回映射). 有以下关系图:

$$\varphi : M \to N$$

$$\varphi_* : T_p \to T_q$$

$$\varphi^* : T_q^* \to T_p^*$$

并且这种如果 φ 在 p 处的 Frechet 导数是矩阵 $A = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right)_{n\times m}$ ($\{u^i\}$ 为 p 的局部坐标卡, $\{v^i\}$ 为 q 的局部坐标卡), 那么 φ_* 的矩阵表示便是 A, 而 φ^* 的矩阵表示便是 A^T(表示转置).

笔记 在微分同胚下, 这两种映射可以从局部的 p 点扩大到整个流形上, 即把流形上的场拉回或推前到另一个流形上形成另一个流形的一个场, 且此时拉前或拉回为同构, 但是, 如果只是光滑映射, 则推前映射不能把"场"推前到"场", 而拉回映射可以把"场"拉回到"场", 因为光滑映射不能保证是满射且单射!

6.2 流形上的全体切场

6.2.1 切场 —— 切丛的截面

在上章可以看到, 流形 M 上的每一个点 p 都有一个切空间 T_P, 自然地, 想知道有没有一种比较好 (光滑) 的映射 (切场), 把每个点 p 映射到切空间 T_P 中的一个元素. 在一般的 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们知道 (光滑) 的向量场 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的定义, 但是流形上的切场如何定义

切丛: 一种很漂亮的想法是在 M 中每个点 p 上放一个切空间 T_P, 并且把这些切空间并起来形成拓扑和 $T_M = \bigcup\limits_{p\in M} T_p$, 可以证明这也是一个流形, 称之为 M 的切丛

切场接着, 考虑底空间 M 到切丛 T_M 的一个截面 X(定义为:$X : M \to \bigcup_{p\in M} T_p$ 是光滑映射, 且 $\pi \circ X = \mathrm{id} : M \to M$, 其中 π 为 $TM \to M$ 的自然投影, 其为光滑满射. 这样就很好地

把流形上的每一个点映射到这个点的切空间中的一个切向量), 记 $\Gamma(TM)$ 为所有 X 构成的全体, 并称 X 为流形 M 的一个 (光滑) 切场.(映射怎么理解成截面? 想象 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的一个函数 f, 在 $\mathbb{R}^3$ 中, f 可以看成一个面.)

6.2.2 另一个角度看切场全体 —— 一般先行李代数 $\mathcal{L}(C^\infty(M))$ 的子李代数

切场的另一种等价定义: 让流形 M 上所有光滑函数全体构成的线性空间 $C^\infty(M)$, 则 M 上的切场 X 可以看成该空间上的“具有特殊性质”的线性变换算子. 在先前定义的切场中, 我们可以通过针对 M 上每一点 p, 令 $(Xf)_{:} =< X_P,\ \mathrm{d}f >$, 从而 X 视作 $C^\infty(M)$ 上所有线性变换算子构成的线性空间 $\mathcal{L}(C^\infty(M))$ 的子空间.

$\Gamma(TM) \subset \mathcal{L}(C^\infty(M))$: 可以验证, 这些“具有特殊性质”的线性变换算子的全体构成的集合 $\Gamma(TM)$ 是一个线性空间, 所以也是 $C^{\infty(M)}$ 上所有线性变换算子构成的线性空间 $\mathcal{L}(C^\infty(M))$ 的子空间.

$\Gamma(TM)$ 为李代数: 由后面可知在 $\mathcal{L}(C^\infty(M))$ 上可以定义李括号构成一般线性李代数 $(\mathcal{L}(C^\infty(M)),\ [,\ ]$ 由于 $C^\infty(M)$ 可看成一个代数, 因此记为 $O_p(C^\infty(M))$. 同样可验证子空间 $\Gamma(TM)$ 关于李括号封闭, 所以其也是一个李代数 (Γ(TM), [,]), 是上述一般线性李代数的子李代数, 更具体的, $\Gamma(TM) \cong \mathrm{Der}(C^\infty(M))$, 为 $O_p(C^\infty(M))$ 的子李代数 (此即上述所说的“具有特殊性质”的一类线性算子).

综上, 可以得出结论, 流形 M 上的切场全体 $\Gamma(TM)$ 在李括号下构成一个 (线性) 李代数 $(\Gamma(TM),\ [,\ ])$!

6.3 李代数

李代数: 抽象的李代数的定义为: 一个定义了特殊的二元运算的线性空间 (运算满足双线性、反对称性和 Jacobi 性, 但不要求满足结合律). 但是定义太抽象了, 有一类更具体的例子: 线性空间 V, $\mathcal{L}(V)$ 是 V 上所有线性变换算子构成的线性空间, (其上由乘法运算, 定义为两个算子的复合) 在 $\mathcal{L}(V)$ 上定义李括号:

$$[,\ ] : \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V),\ (X,\ Y) \to [X,\ Y] = XY - YX$$

则可以验证 $\mathcal{L}(V)$ 关于李括号的运算成为一个李代数, 称为一般先行李代数.(特别地, 当 V 是一个代数时, 记为 $O_p(V)$, 称 V 上满足 $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ 的线性算子 D 为 A 的导子. 记 A 上所有导子构成的全体为 $\mathrm{Der}(V)$, 则 $\mathrm{D}(V)$ 为 $O_p(V)$ 的子李代数)H 称为李代数 V 的子李代数, 当且仅当 H 是 V 的在二元运算下封闭的线性子空间 (H 也是一个李代数). 特别地, 一般线性李代数的子李代数称为先行李代数.

有限维李代数与结构常数的相互决定: 当一个李代数 V 的维数, 是有限维的时候, 它决定了 V 的维数是有限维的时候, 它决定了 V 上的一个特殊的 (1, 2) 型张量 C(称为结构张量), 在取定这个李代数的一组基 $\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m\}$ 后, C 有了坐标形式 C_{ij}^k(称为结构常数), 并且 $C_{ij}^k X_k$, 这样, 我们就知道了一个李代数具体的运算法则. 那么, 给定线性空间上的一组基, 并且给定了一

个结构常数 C_{ij}^k, 那么我们能不能决定这个空间的一个李代数结构? 这是肯定的, 所以一个李代数和赋予了一个结构常数 (给定基) 的线性空间是一一决定的!

6.4 李群的李代数 —— 左不变切场全体

李群: 李群 G 是一个特殊的 m 维流形, 其上不仅有微分结构, 还有群的结构, 并且群运算 (乘法和求逆) 是光滑的, 称这样的流形 G 为一个 m 维的李群, 两个李群通过是指这两个李群微分同胚且群同构, 两个李群同态是指两者间存在一个光滑映射, 且这个映射是一个群同态.

李群的李代数 $\mathcal{G}$(左不变切场全体): 在一个赋有"群性质"的微分流形上, 称它所有左不变切场 $\mathcal{G}$(其同构于 G 在单位元 e 处的切空间 T_e, 因此, $\mathcal{G}$ 是 m 维线性空间) 为这个李群 G 的李代数. 由于 $\Gamma(TM)$ 太过平凡, 故 $\Gamma(TM)$ 不是它的李代数, 不要求 G 是一个李群, 哪怕 G 是任一个微分流形都有这种全体切场构成的李代数, 所以试图将 $\Gamma(TM)$ 缩小一些, 得到它的子空间 $\mathcal{G}$. 由于 $\mathcal{G}$ 中的元素也是切场, 而且是一些只有在 G 是李群时才会有特殊性质的切场 (由上述讨论也可知这类特殊的切场又是一些"更"特殊线性变换算子), 并且, 可以验证 $\mathcal{G}$ 在李括号下也封闭, 因此 $\mathcal{G}$ 也是一个 (线性) 李代数, 称为李群 G 的李代数, 而 $\mathcal{G}$ 的特殊性在于其同构于 T_e, 故可以得出 $\mathcal{G}$ 的维数 m, 是一个有限维的李代数!(而 $\Gamma(TM)$ 是无限维的李代数) 并且任意 $X \in \mathcal{G}$, X 在 g 点的取值可以由 X 在 e 点的值加上左移动 $L_g(L_g : G \to G,\ a \to ga)$ 决定! 于是便有:

$$(Lg)_* X = X(\text{左不变的含义})$$

另一种意义下, 只要取 T_e 中的一个元素 X_e, 就能把 X_e 经过上述的有李群的有本身性质决定的左移动延拓成整个流形 G 上的一个切场, 因此这个意义上说, $\mathcal{G}$ 和 T_e 是同构的.

以下, 在李群中, 李代数均特指左不变切场全体构成的李代数

结构方程: 现在知道了李群能决定其上的一个李代数 (左不变切场), 如何获取这个李代数的信息, 由于有限维李代数和结构常数相互决定, 不妨看看这个李代数的结构常数是什么, 求结构常数的一种方法, 称为结构方程法, 通过结构方程求得结构常数, 进而知道李代数的结构. 具体而言, 考虑 m 维李代数 $\mathcal{G}$(同构于 T_e) 的对偶空间 $\mathcal{G}^*$(同构于 T_e^*), 取定 T_e 中的一组基 $\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m\}$ 后, 我们可以得到 T_e^* 中的对偶基 $\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m\}$, 再由同构诱导出 $\mathcal{G}^*$ 的一组基 $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, w_m\}$(称为李群 G 的 Maurer-Cartan 形式), 这样可以得到一个方程 $\mathrm{d}w_i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i \omega_j \bigwedge \omega_k$, 称为李群 G 的结构方程, 利用方程可以计算出结构常数 C_{ij}^k, 也就获取了李代数 (左不变切场) 的信息.

综上, 有如下结论: 流形 M 上的切场全体 $\Gamma(TM)$ 在李括号下构成一个 (线性) 李代数 $(\Gamma(TM), [,])$; 李群的左不变切场 $\mathcal{G}$(又称为李群的李代数) 在李括号下构成一个 m 维的 (线性) 李代数 $(\mathcal{G}, [,])$.

6.5 单参数李氏变换群 —— 再论流形上的切场以及李群上的左不变切场

从全体到个体: 已知一般流形的切场全体与李群的左不变切场全体都是一个先行李代数, 接下来深入考虑以下这两个切场全体中的元素 —— 切场与左不变切场是否能和单参数变换群对应起来, 以及切场全体上的李括号有无更直观的含义.

6.5.1 李群的作用

在 ≪ 群表示论 ≫ 中知道群作用的定义 $\varphi : G \times M \to M$, 其中, G 为一个群, M 为一个集合.

特别地, 在微分流形中, 我们取 M 为一个流形, G 为一个李群, 并且作用 φ 保持光滑性, 于是称这样地 φ 为一个**李群的作用**, 又称为**李氏变换群.**

其隐含了 G 到 $\mathrm{Diff}(M)$(M 上全体自微分同胚构成的群) 的群同态, 这样 G 中的每一个元素 g 可以看成 M 到 M 的一个微分同胚.

特别地, 取 G 为实数加法群 R, 这样群作用变成了 $\varphi : R \times M \to M$, 称为**单参数李氏变换群.**

笔记 [拓扑群的作用] 若 G 是一个拓扑群, M 是一个拓扑空间, $\varphi : G \times M \to M$ 为一个连续映射, 则称 φ 为一个拓扑群作用, 其暗含了 G 到 $\mathrm{Homeo}(M)$(M 上全体自同胚构成的群) 的群同态.

6.5.2 一般流形上, 切场与单参数李氏变换群的相互诱导

单参数李氏变换群决定了切场: 对固定的 $p \in M$, 记 $\varphi_t = \varphi(t,\ p)$, 那么在 M 上一条过 p 点的一条参数曲线, 由于 φ_0 是恒同变换, 所以 $\gamma_p(0) = p$. 定义 p 处的切向量 $X_p := \frac{\mathrm{d}(\gamma_p(t))}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$(此时恰好满足: 如果 q 在 p 的轨道上, 可设 $q = \gamma_p(s)$, 则 $X_q = \frac{\mathrm{d}\gamma_p(s+t)}{\mathrm{d}t}$, 且 $(\varphi_s)_* X_p = X_q$) 让 p 跑遍 M, 就有 M 上的一个切场 X(可验证具有光滑性). 这样一个单参数李氏变换群 φ_t 就决定了 M 上的一个切场 X.

切场决定了局部单参数李氏变换群: 那么反问题是, 给定了 M 上的一个切场 X, 能不能决定作用在 M 上的一个单参数李氏变换群? 答案是否定的, 但是可以决定一个**局部**的单参数李氏变换群! 即任一点 p, 存在 p 的邻域 U, 以及 $\varepsilon > 0$, 使得 φ_t 为局部作用:$(-\varepsilon,\ \varepsilon) \times U \to M$, 并且 φ_t 在 U 上诱导的经过 p 的局部轨道是 X 经过 p 的一条局部积分曲线 (X(r)=$\frac{r}{\mathrm{d}t}$), 诱导的切场等于原切场 X 在 U 上的限制, 并且这种诱导在局部上是唯一的. 若 M 是紧的流形, 那么可以利用开覆盖定理证明 M 上的任意切场可以决定 M 上一个 (整体的) 单参数李氏变换群!

6.5.3 切场全体中的李括号运算的另一种含义 —— 李导数

李导数: 首先定义一种二元运算:

$$L_{()}() : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) : \text{对}X,\ Y \in \Gamma(TM),$$
$$L_X Y := \lim_{t\to 0} \frac{Y - (\varphi_t)_* Y}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t},$$

称为 Y 关于 X 的李导数, 其中, φ_t 为 X 诱导的局部单参数李氏变换群.Y 关于 X 的李导数在 p 点处的具体含义是: 由 X 在 p 点诱导了一个局部单参数李氏变换群因而也诱导了过 p 的局部轨道 $X_p(t)$, 让切场 Y 限制在这条轨道上, 那么 Y 关于 X 在 p 的李导数就是 Y 沿轨道 $X_p(t)$ 在 p 点处让 t 趋于 0 时的变化率, 通俗一点, 就是 Y 限制在 $X_p(t)$ 上无限靠近 p 时的变化率.

(广义的李导数还可以延伸到一般的张量场上, 即 $\Gamma(TM) \times \Gamma(T^r_s M) \to \Gamma(T^r_s M) : (X,\ \xi) \to L_X \xi = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\phi_t(\xi) - \xi}{t} \in \Gamma(T^r_s M)$, 其中 ϕ_t 为诱导 φ_t 诱导的 $T^r_s(\varphi_t(p))$ 与 $T^r_s(p)$ 间的同构; 数量场 f 关于 X 的李导数规定为 $L_X f := D_X f$. 可以同样理解为张量场 ξ 沿 X_p 在点 p 的变化率).

切场上李导数与李括号等价: 李括号 [,] 是切场全体 $\Gamma(TM)$ 上的二元运算, 而刚刚我们定义的李导数 $L_{()}()$ 也是 $\Gamma(TM)$ 上的二元运算, 而这两个是等价的, 因此, 流形 M 上的切场全体和李群 G 上的左不变切场全体构成的李代数 $(\Gamma(TM),\ [,\ ])$ 与 $(\mathcal{G},\ [,\ ])$ 又可以写成 $(\Gamma(TM),\ L_{()}())$ 与 $(\mathcal{G},\ L_{()}())$.

6.5.4 李群上, 左不变切场与李氏变换群的相互诱导

左不变切场决定了单参数李氏变换群: 一般流形上的切场只能诱导局部的单参数李氏变换群, 但是李群比一般流形性质好就是李群 G 上的左不变切场 X 可以决定 G 上 (整体的) 单参数李氏变换群 φ_t! 并且这个单参数变换群在单位元 e 处的轨道 $\gamma_e(t)$ 是 G 的一条一维李子群 (单参数子群)! 同时, X 在其他点 p 的轨道 $\gamma_p(t)$ 是由轨道 $\gamma_e(t)$ 右作用在 p 上生成的 ($\gamma_p(t) = p \cdot \gamma_e(t)$,) 所以也称左不变切场为无穷小右移动!

指数映射: 有了上述结论, 可以继续深入看以下李代数 T_e 和李群 G 的关系, 考虑映射 $exp : T_e \to G$, 如下定义: 对任意 $X \in T_e$, 由于 X 决定了 G 的一条单参数子群 $\sigma_X(t) = \gamma_e(t)$, 因此定义 $exp(X) = \sigma_X(1)$, 即把单位元切空间中的切向量 (也可以看成切空间中的点) 通过诱导的单参数子群映射到 G 中, 并且还可以得出两条结论:

- 在局部上, exp 是 T_e 到 G 的一个微分同胚 (T_e 在零点的某个邻域与 G 在 e 点的某个邻域微分同胚)!
- (第一类标准坐标卡)G 在 e 处存在局部坐标卡 $(U; u^i)$, 使得 $X = \sum\limits_{j=1}^{r} a^j \frac{\partial}{\partial u^j}|_e \in T_e$ 所决定的单参数子群 $\sigma_X(t)$ 限制在 U 内有方程 $u^i(\sigma_X(t)) = ta^i$

因此, 在局部上指数映射把 e 处切空间的点和 e 邻域内的点用同一个坐标一一对应了起来.