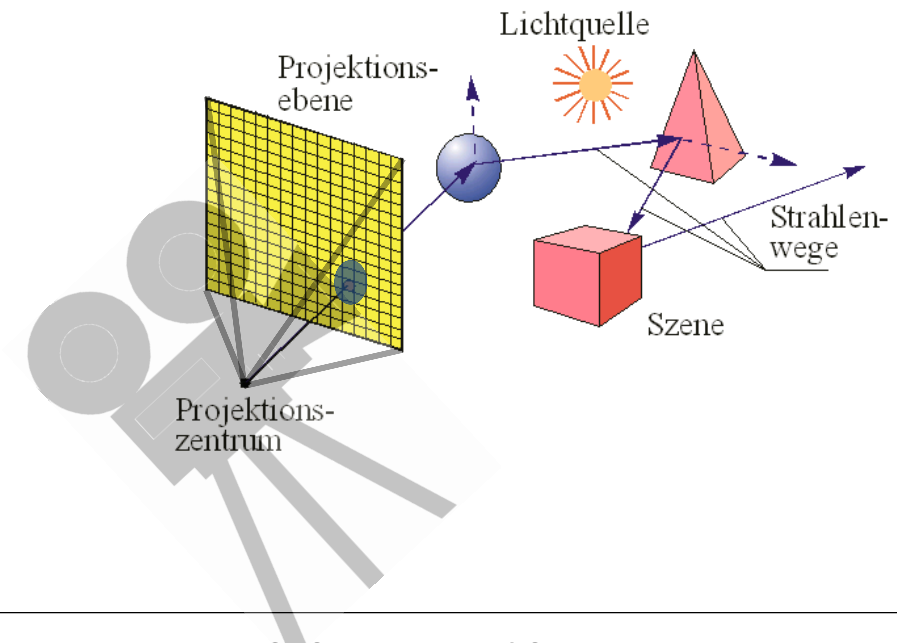
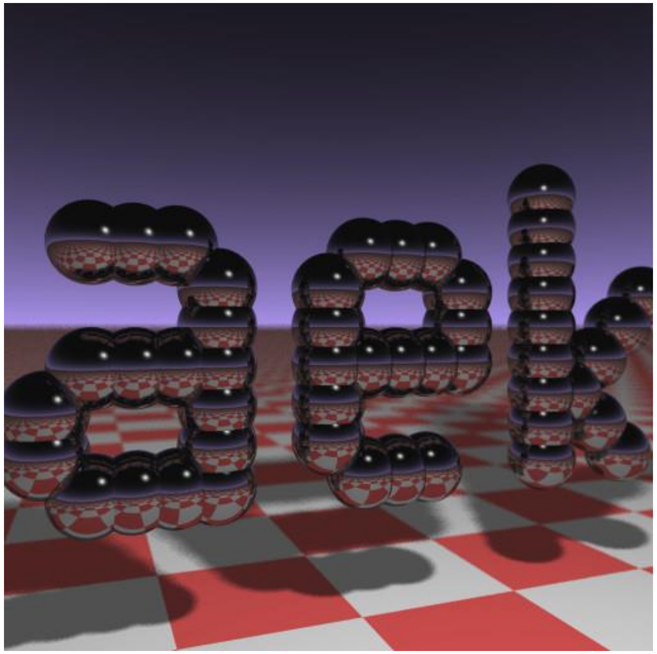
Raytracing


Lichtquelle
Projektions-
ebene
Strahlen-
wege
Szene
Projektions-
zentrum

Visitenkartenraytracer (1984)


```
#include <stdlib.h>   // card > aek.ppm
#include <stdio.h>
#include <math.h>
typedef int i;typedef float f;struct v{
f x,y,z;v operator+(v r){return v(x+r.x
,y+r.y,z+r.z);}v operator*(f r){return
v(x*r,y*r,z*r);}f operator%(v r){return
x*r.x+y*r.y+z*r.z;}v(){}v operator^(v r
){return v(y*r.z-z*r.y,z*r.x-x*r.z,x*r.
y-y*r.x);}v(f a,f b,f c){x=a;y=b;z=c;}v
operator!(){return*this*(1/sqrt(*this%*
this));}};i G[]={247570,280596,280600,
249748,18578,18577,231184,16,16};f R(){
return(f)rand()/RAND_MAX;}i T(v o,v d,f
&t,v&n){t=1e9;i m=0;f p=-o.z/d.z;if(.01
<p)t=p,n=v(0,0,1),m=1;for(i k=19;k--;)
for(i j=9;j--;)if(G[j]&1<<k){v p=o+v(-k
,0,-j-4);f b=p%d,c=p%p-1,q=b*b-c;if(q>0
){f s=-b-sqrt(q);if(s<t&&s>.01)t=s,n=!(
p+d*t),m=2;}}return m;}v S(v o,v d){f t
;v n;i m=T(o,d,t,n);if(!m)return v(.7,
.6,1)*pow(1-d.z,4);v h=o+d*t,l=!(v(9+R(
),9+R(),16)+h*-1),r=d+n*(n%d*-2);f b=l%
n;if(b<0||T(h,l,t,n))b=0;f p=pow(l%r*(b
>0),99);if(m&1){h=h*.2;return((i)(ceil(
h.x)+ceil(h.y))&1?v(3,1,1):v(3,3,3))*(b
*.2+.1);}return v(p,p,p)+S(h,r)*.5;}i
main(){printf("P6 512 512 255 ");v g=!v
(-6,-16,0),a=!(v(0,0,1)^g)*.002,b=!(g^a
)*.002,c=(a+b)*-256+g;for(i y=512;y--;)
for(i x=512;x--;){v p(13,13,13);for(i r
=64;r--;){v t=a*(R()-.5)*99+b*(R()-.5)*
99;p=S(v(17,16,8)+t,!(t*-1+(a*(R()+x)+b
*(y+R())+c)*16))*3.5+p;}printf("%c%c%c"
,(i)p.x,(i)p.y,(i)p.z);}}
```



http://fabiensanglard.net/rayTracing_back_of_business_card/

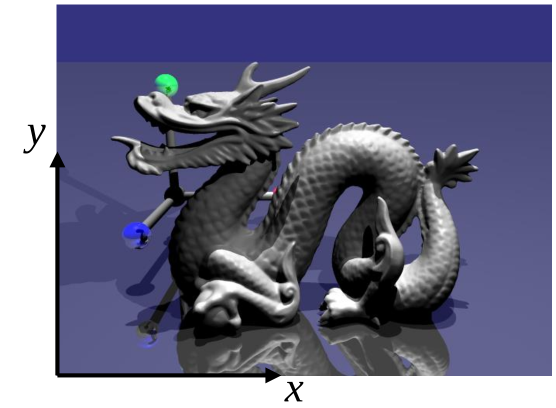
Inhalt

- Rekursives Raytracing
- Strahlverfolgung
  - Primärstrahlen (Supersampling)
  - Sekundärstrahlen (Epsilonproblematik)
  - Schattenstrahlen (Transparenzproblematik)
  - Distribution Raytracing
- Strahlschnitte
  - Ebene
  - Kugel
  - Achsenparallele Box
  - Dreieck
- Beschleunigungsdatenstrukturen
  - Gitter
  - KD-Baum
  - Hüllvolumen

Recursive Raytracing

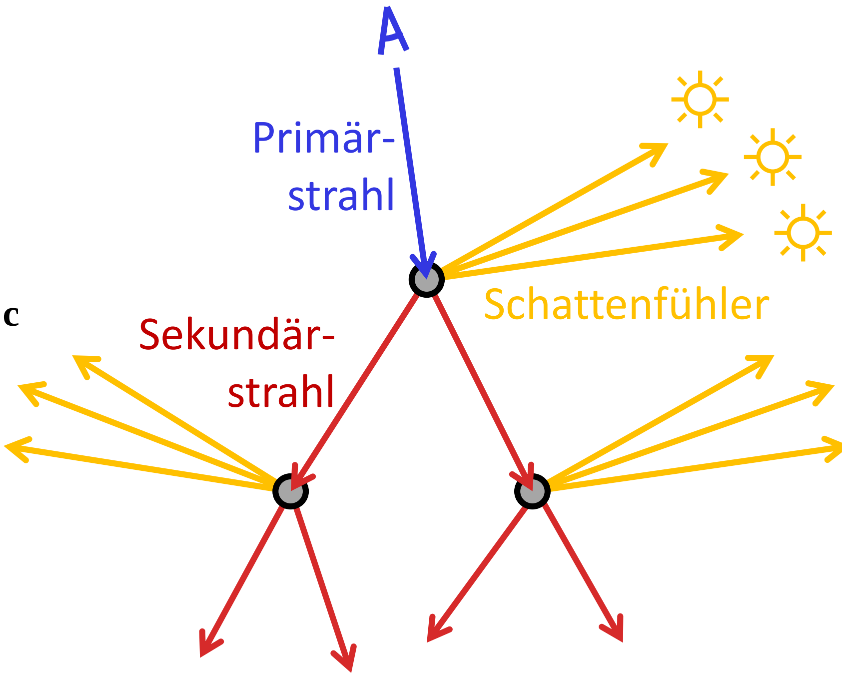
Äußere Schleife des Algorithmus:

for each pixel (x,y) of camera **do**
  generate a primary ray $R = (\underline{\boldsymbol{p}},v)$
  set image pixel to color of incoming light:
    $I[x,y] = trace(R)$



Rekursive Berechnung der Pixelfarbe:

$trace(R = (\underline{\boldsymbol{p}},v))$
  determine first intersection $\underline{\boldsymbol{q}}$ of R and scene
  if no intersection exists
    return background color
  initialize resulting color $\mathbf{c}$ to black
  for each light source $\underline{\boldsymbol{l}}$ **do**
    if scene intersects segment $(\underline{\boldsymbol{q}},\underline{\boldsymbol{l}})$ **continue**
    add light from $\underline{\boldsymbol{l}}$ reflected at $\underline{\boldsymbol{q}}$ in direction of $-v$ to $\mathbf{c}$
  if surface at $\underline{\boldsymbol{q}}$ has [partial] mirror reflection
    generate reflected secondary ray R_{refl}
    contribute $trace(R_{refl})$ to $\mathbf{c}$
  if surface at $\underline{\boldsymbol{q}}$ has [partial] transmission
    generate transmitted secondary ray R_{trans}
    contribute $trace(R_{trans})$ to $\mathbf{c}$
  return $\mathbf{c}$

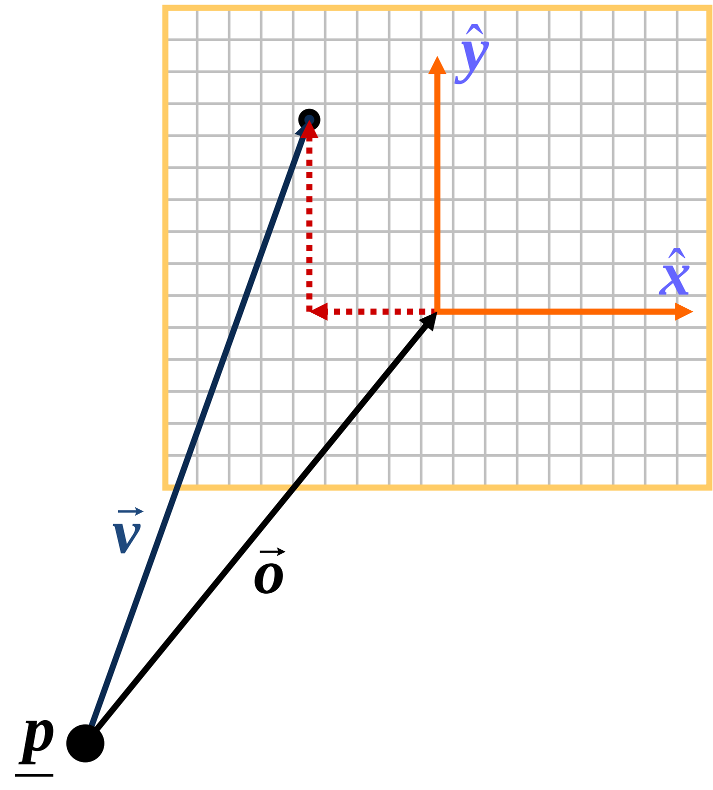


Strahlverfolgung
Primärstrahlen

Computergraphik und Visualisierung

- Inkrementelle Berechnung der Strahlen von Augpunkt durch Pixel der virtuellen Kamera:

```
for (x= 0; x < xres; x++)
  for (y= 0; y < yres; y++)
  {
    v = o + 2(x/xres - 0.5)·x
          + 2(y/yres - 0.5)·y;
    v = v/|v|; // Normalize
    col= trace(p, v);
    write_pixel(x,y,col);
  }
```

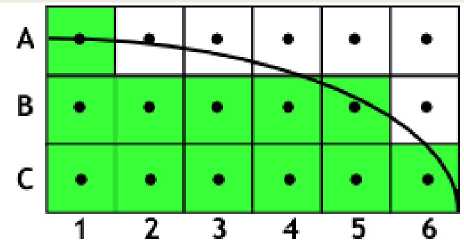


parametrisierter Strahl:

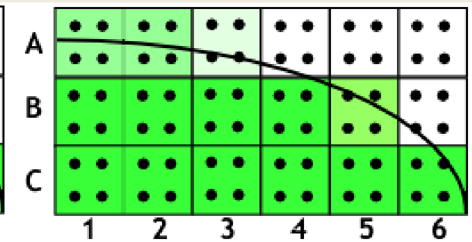
$$\underline{x}(t) = \underline{p} + t\vec{v}$$

Primärstrahlen
Supersampling

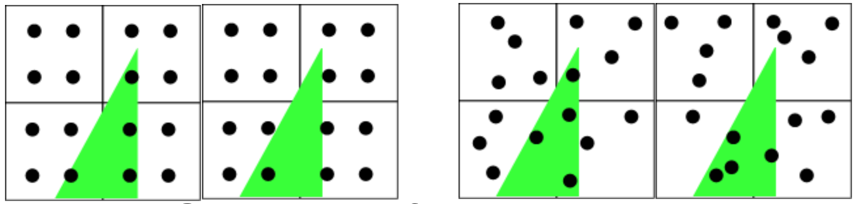
- Um Treppenstufenartefakte an Kanten und Schatten zu vermeiden, bietet sich der Einsatz von Supersampling an
- Im einfachsten Fall wird das Bild mit einer höheren Auflösung berechnet und danach die Auflösung mit einem Filter reduziert
- Meist wird aber pro Pixel ein Supersampling durchgeführt:
  - Gitter … regelmäßig
  - Zufall … ganz zufällig – neigt zur Verklumpung
  - Poisson … zufällig ohne Verklumpung
  - Jitter … zufällig pro Gitterzelle



Treppenstufen

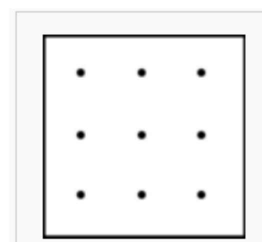


Antialiasing mit Gitter

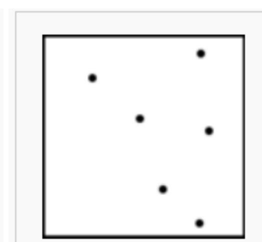


Gitter vs Zufallssampling

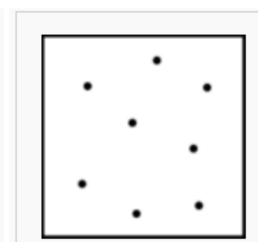
@www.andymeneely.com/prog/raytracer/supersampling/index.htm



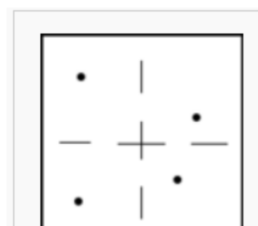
Gitter



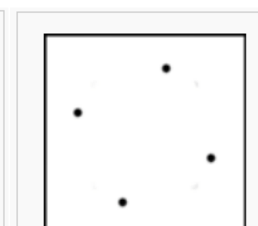
Zufall



Poisson



Jitter



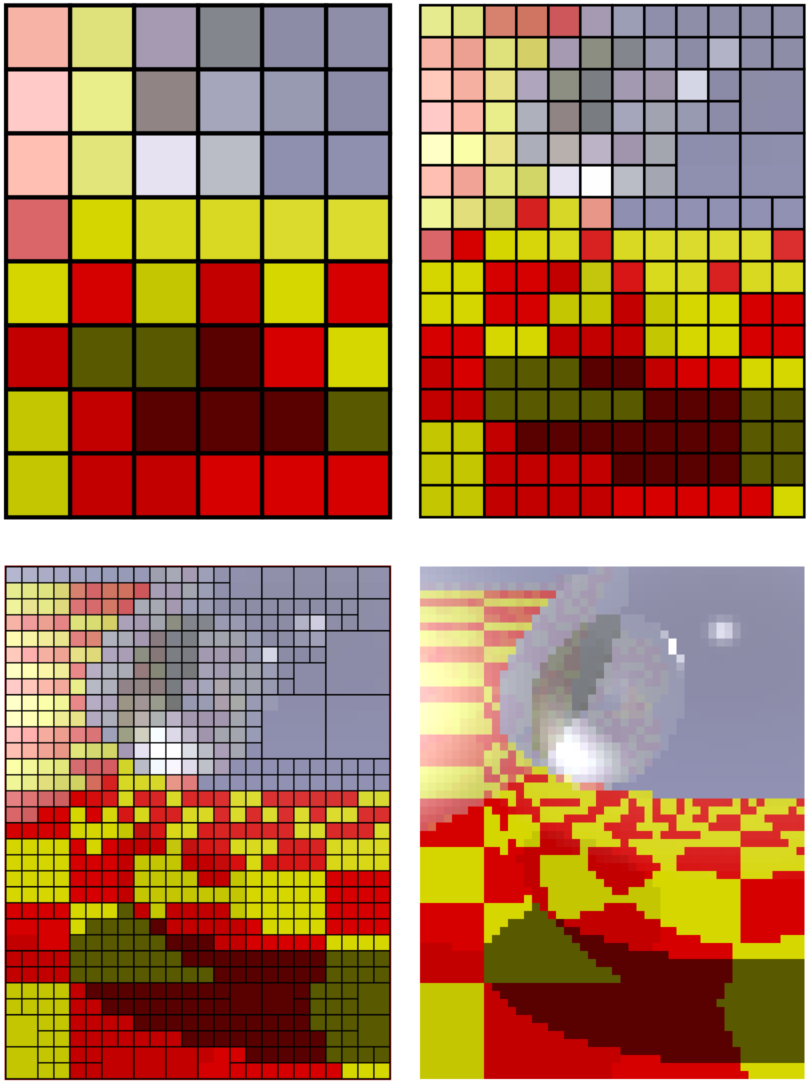
Gitter gedreht

@http://en.wikipedia.org/wiki/Supersampling

Primärstrahlen
Adaptives Sampling

Computergraphik und Visualisierung

- Idee: generiere Bild in grober Auflösung und verfeinere nur in den Bereichen, in denen sich der Farbwert stark ändert
- Betrachte dazu quadratische Zellen und generiere Strahlen durch die Eckpunkte der Zellen nicht durch die Mittelpunkte
- unterteile rekursiv alle Zellen in 4 gleich große Zellen, deren Farbwerte an den Eckpunkten deutlich unterschiedlich sind
- Zu beachten ist, dass die Anfangsauflösung fein genug sein muss.

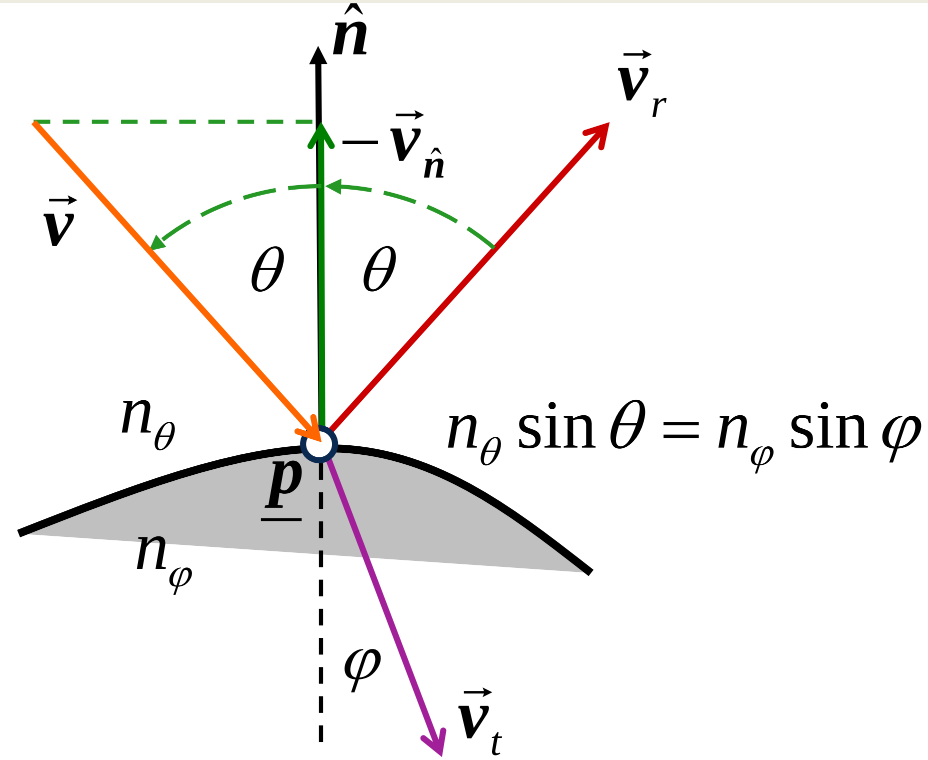


Strahlverfolgung
Sekundärstrahlen

Computergraphik und Visualisierung

- Trifft ein Strahl auf eine Oberfläche, so ergibt sich der Oberflächenpunkt $\underline{\boldsymbol{p}}$ aus dem Strahl-Flächenschnitt.
- Zusätzlich erhält man die Oberflächennormale $\boldsymbol{n}$
- Sekundärstrahlen werden erzeugt wenn das Material spiegelnd oder transparent ist.
- Die Sekundärstrahlen beginnen beide bei $\underline{\boldsymbol{p}}$ und haben die zu berechnenden Richtungen $\boldsymbol{v}_r$ und $\boldsymbol{v}_t$
- Zur Berechnung von $\boldsymbol{v}_t$ werden zusätzlich die Brechungsindizes benötigt. Die Herleitung der Formel basiert auf der Identität:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



Berechnung der Sekundärstrahlen

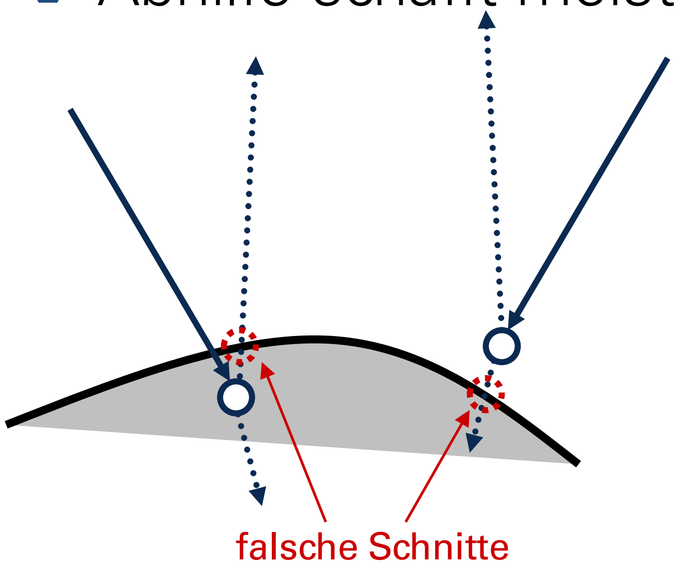
$$\vec{\boldsymbol{v}}_r = \vec{\boldsymbol{v}} - 2\langle \hat{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle \hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}_t = \frac{n_\theta}{n_\varphi}\vec{\boldsymbol{v}} - \left(\frac{n_\theta}{n_\varphi}\langle \hat{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle + \sqrt{1 - \left(\frac{n_\theta}{n_\varphi}\right)^2 \left(1 - \langle \hat{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle^2\right)} \right) \hat{\boldsymbol{n}}$$

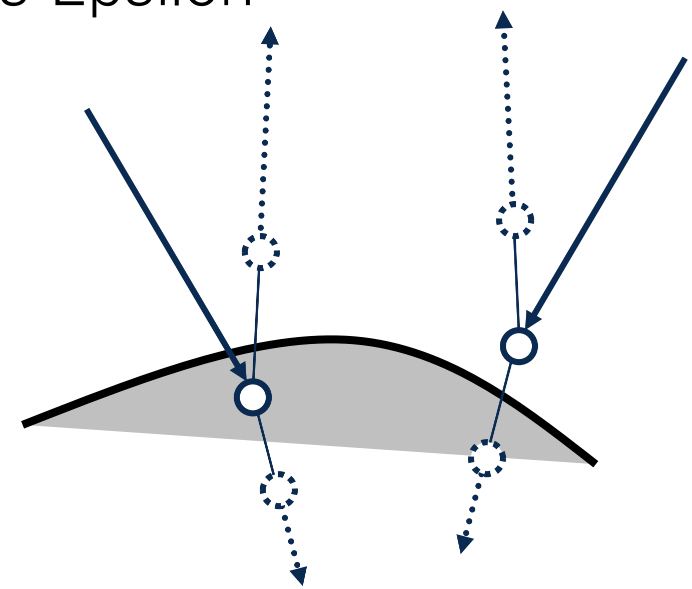
in Klausur gegeben

Sekundärstrahlen
Numerische Ungenauigkeiten

- Beim Verfolgen von Sekundärstrahl ausgehend von Schnitten mit Oberflächen, kann es durch numerische Ungenauigkeiten zu erneutem Schnitt mit derselben Oberfläche kommen.
- Abhilfe schafft meist ein globales Epsilon



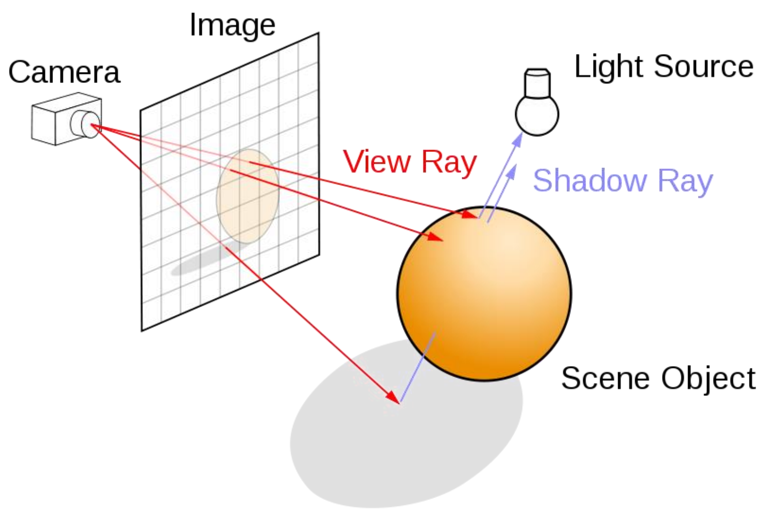
Problem: numerische Ungenauigkeiten



Abhilfe: richtungsabhängiges Offset im Sekundärstrahl

Strahlverfolgung
Schattenfühler

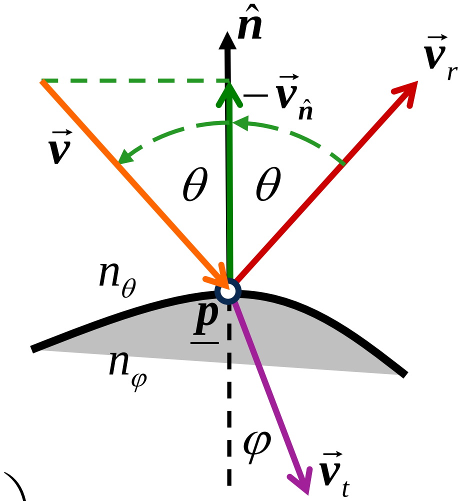
- Bei jedem Schnitt $\underline{\boldsymbol{p}}$ mit einer Oberfläche wird zu jeder Lichtquelle $\underline{\boldsymbol{l}}_i$ ein Schattenstrahl geschickt und geprüft, ob ein anderes Objekt zwischen aktuell betrachtetem Oberflächenpunkt und Lichtquelle ist.
- Hierzu wird nur ein beliebiger Schnitt benötigt, nicht unbedingt der erste. Deshalb werden meist zwei Schnittfunktionen implementiert:
  - `find_first_intersection`($\underline{\boldsymbol{p}}$,$\boldsymbol{v}$) … erster Schnitt vor $\underline{\boldsymbol{p}}$ in Richtung $\boldsymbol{v}$
  - `is_blocked`($\underline{\boldsymbol{p}}$,$\underline{\boldsymbol{q}}$) … Test, ob zwischen $\underline{\boldsymbol{p}}$ & $\underline{\boldsymbol{q}}$ irgendein Objekt liegt



Schattenfühler – geblockt und ungeblockt

Strahlverfolgung
Berechnung der Leuchtdichte

- Im einfachsten Fall werden die Materialparameter um einen skalaren Reflexions- , einen skalaren Refraktionskoeffizienten und einen Brechungsindex erweitert:
  - $\boldsymbol{r}_a$ … ambienter Reflektions-farbkoeffizient
  - $\boldsymbol{r}_d$ … diffuser Reflektions-farbkoeffizient
  - $\boldsymbol{r}_s$ … spekularer Reflektions-farbkoeffizient
  - s … shininess
  - r_r … Prozentsatz des ideal spiegelnden Lichts
  - r_t … Prozentsatz des refraktierten Lichts
  - n … Brechungsindex
  - n_{scene} … Brechungsindex der Szene
  - n_{ray} … Brechungsindex des Strahls



in Klausur gegeben

$$\dddot{L}_{\text{out}}(\underline{p}, -\vec{v}) = \left(\dddot{L}_{\text{scene},a} + \sum_{i=1}^{m} \dddot{L}_{i,a}\right) \otimes \ddot{r}_a + r_r \cdot \dddot{L}_{\text{in}}(\underline{p}, \vec{v}_r) + r_t \cdot \dddot{L}_{\text{in}}(\underline{p}, \vec{v}_t, n, n_{\text{ray}}) + \sum_{i=1}^{m} V(\underline{p}, \underline{l}_i)\, \dddot{L}_{\text{refl},d\&s}\left(\dddot{L}_{i,d\&s}, \ddot{r}_{d\&s}, s\right)$$

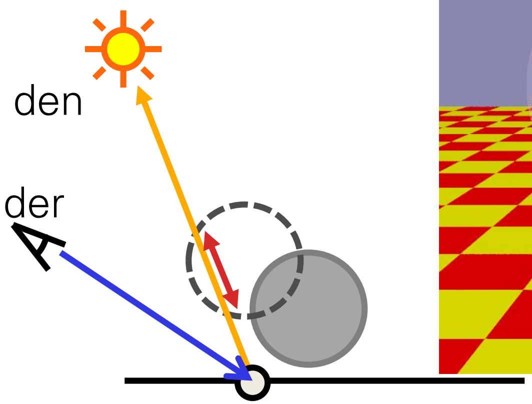
Sekundärstrahlen

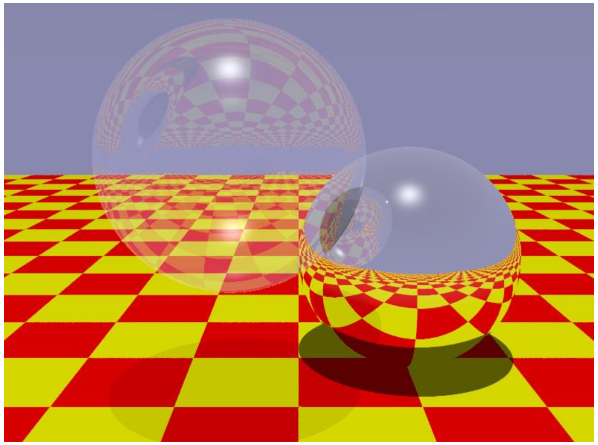
Visibilität

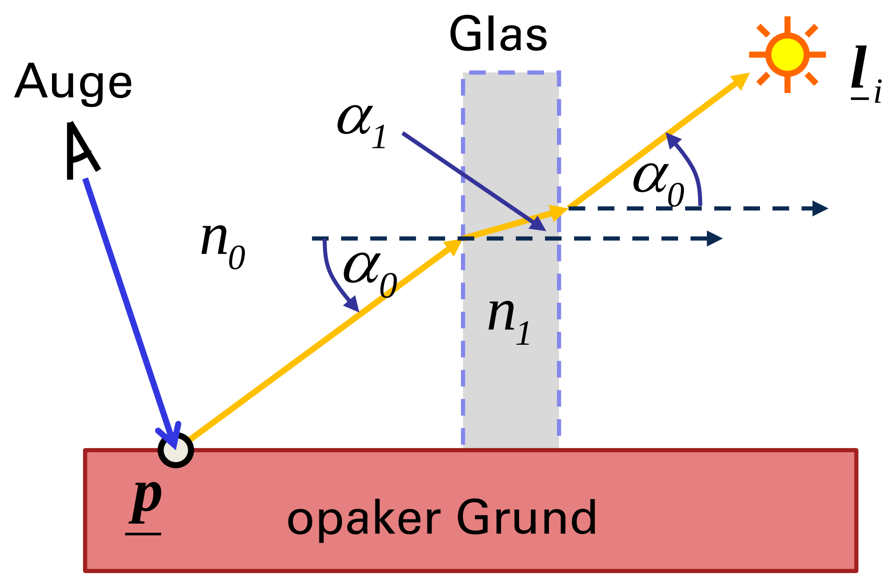
Lokales Beleuchtungsmodell

Strahlverfolgung
Schatten & Transparenz

- Der Visibilitätsfaktor ist 0 oder 1 je nachdem, ob der Schattenfühler geblockt wird oder nicht
- Blockiert ein transparentes Objekt den Schattenfühler, so kann man auch einen Visibilitätsfaktor berechnen, der angibt wie viel Prozent des Lichts durch das transparent Objekt hindurchkommt.
- Dazu wird die Länge des Durchganges durch das transparente Objekt mit einem vom Objekt abhängigen Absorpotionsfaktor multiplizert. Zusätzlich wird zweimal der Transmissionskoeffizient multipliziert.
- Das ist allerdings nur eine Approximation, weil der Schattenfühler an der Oberfläche des transparenten Objekts zwei mal gebrochen wird. Die Brechung ist zu kompliziert um berücksichtigt zu werden







Strahlverfolgung
Komplexität

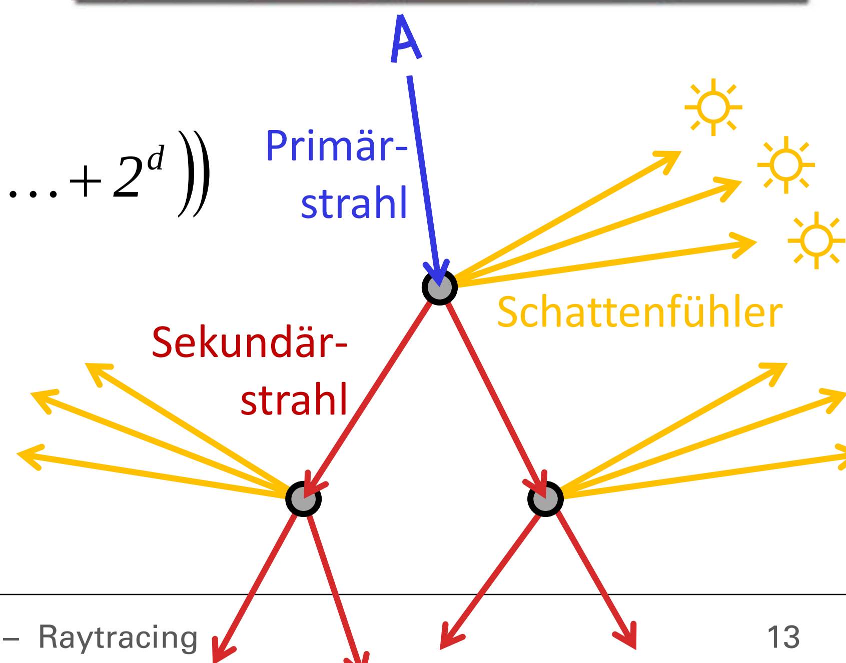
- Kenngrößen
  - w, h … Breite und Höhe des Ausgabebildes in Pixel
  - s … supersampling Faktor
  - n … Anzahl der Objekte in der Szene
  - m … Anzahl der Lichtquellen
  - d … maximale Rekursionstiefe
- worst case
  - Anzahl Strahlen:

$$\#_{\text{rays}} = O\left(w \cdot h \cdot s \cdot (1+m) \cdot \left(1+2+4+\ldots+2^d\right)\right)$$

$$= O\left(w \cdot h \cdot s \cdot (1+m) \cdot 2^{d+1}\right)$$

  - Anzahl Berechnungen:

$$\#_{\text{comp}} = O\left(n \cdot \#_{\text{rays}}\right)$$



Strahlverfolgung
Komplexität – Reduktion

Computergraphik und Visualisierung

- Zur Reduktion der Komplexität beschränkt man typischerweise die maximale Rekursionstiefe
- Außerdem werden Beschleunigungsdatenstrukturen verwendet, um die Schnittberechnung zwischen einem Strahl und allen Objekten in der Szene zu beschleunigen. Damit kann die Schnittberechnung Strahl-Szene auf $\log n$ reduziert werden
- Resultierende Laufzeit:

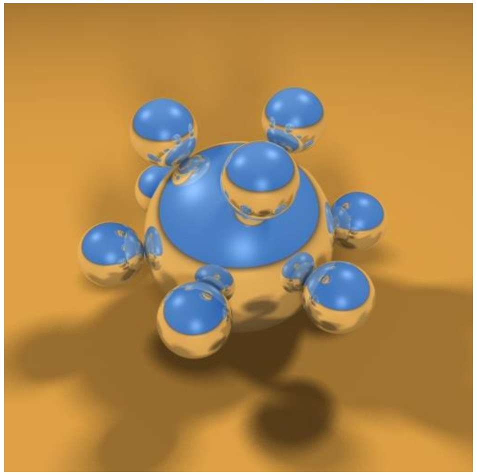
$$\#_{\text{comp}} = \mathrm{O}(w \cdot h \cdot s \cdot m \cdot \log n)$$

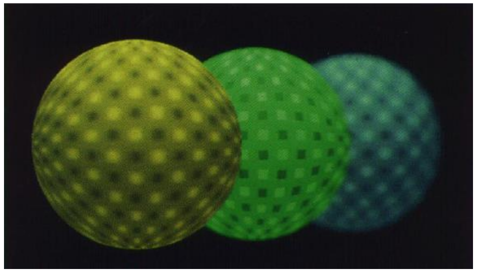
Rekursionstiefe auf 16 eingeschränkt

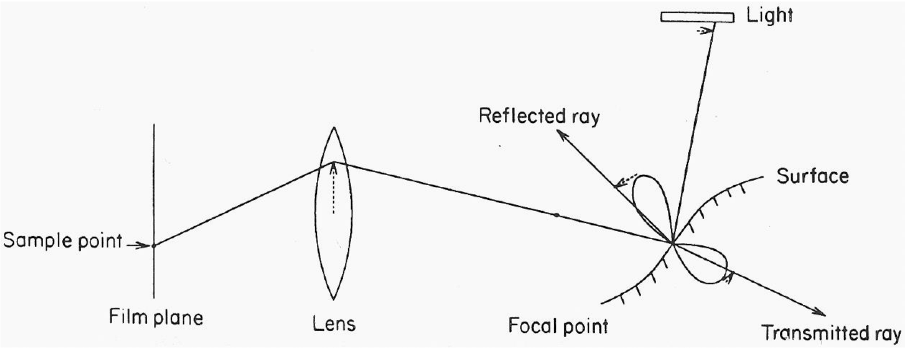
Strahlverfolgung
Distribution Raytracing

Computergraphik und Visualisierung

- Das Supersampling eines Pixels kann auch verwendet werden, um weiche Schatten, Motion Blur und Tiefenunschärfe zu modellieren
- Dazu werden für jedes Sample eines Pixels zufällig die jeweiligen Parameter ausgewählt:
  - weiche Schatten … Position auf der Flächenlichtquelle
  - Motion Blur … Zeit aus dem zu integrierenden Zeitintervall
  - Tiefenunschärfe … Position auf der ausgedehnten Blendenöffnung
- Dieses Verfahren nennt man Distribution Raytracing

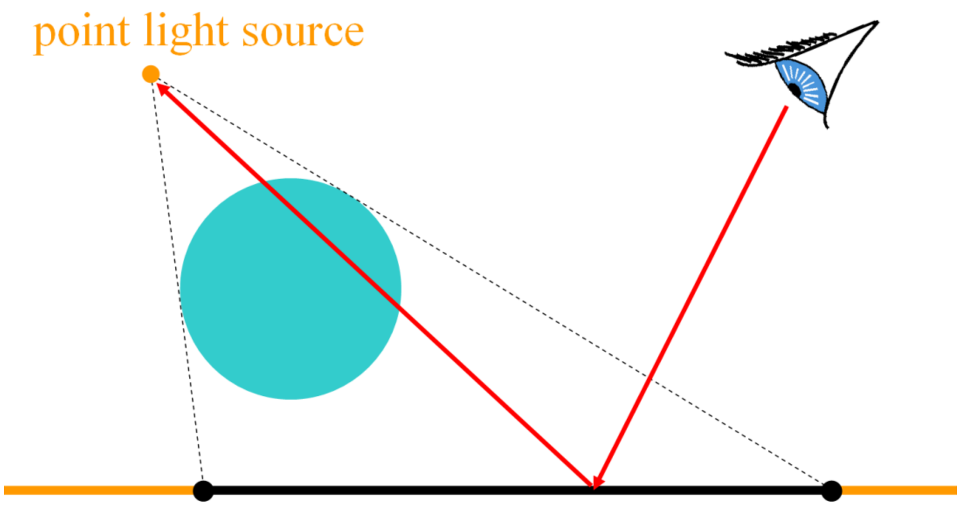


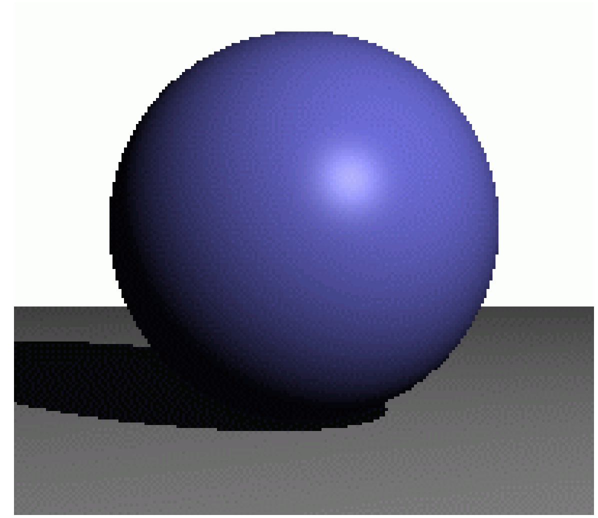


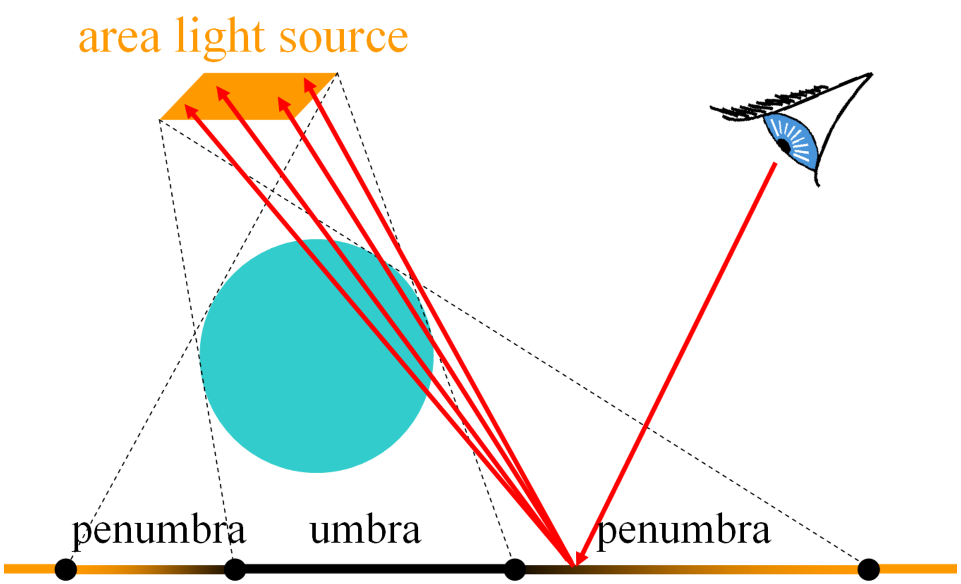


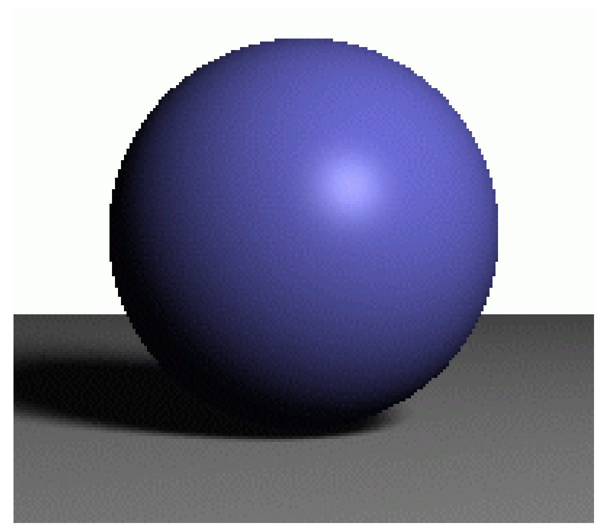
Distribution Raytracing
Weiche Schatten

Computergraphik und Visualisierung



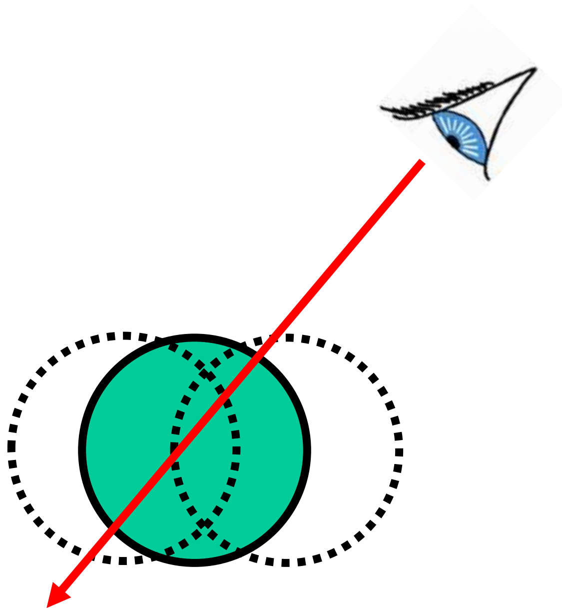






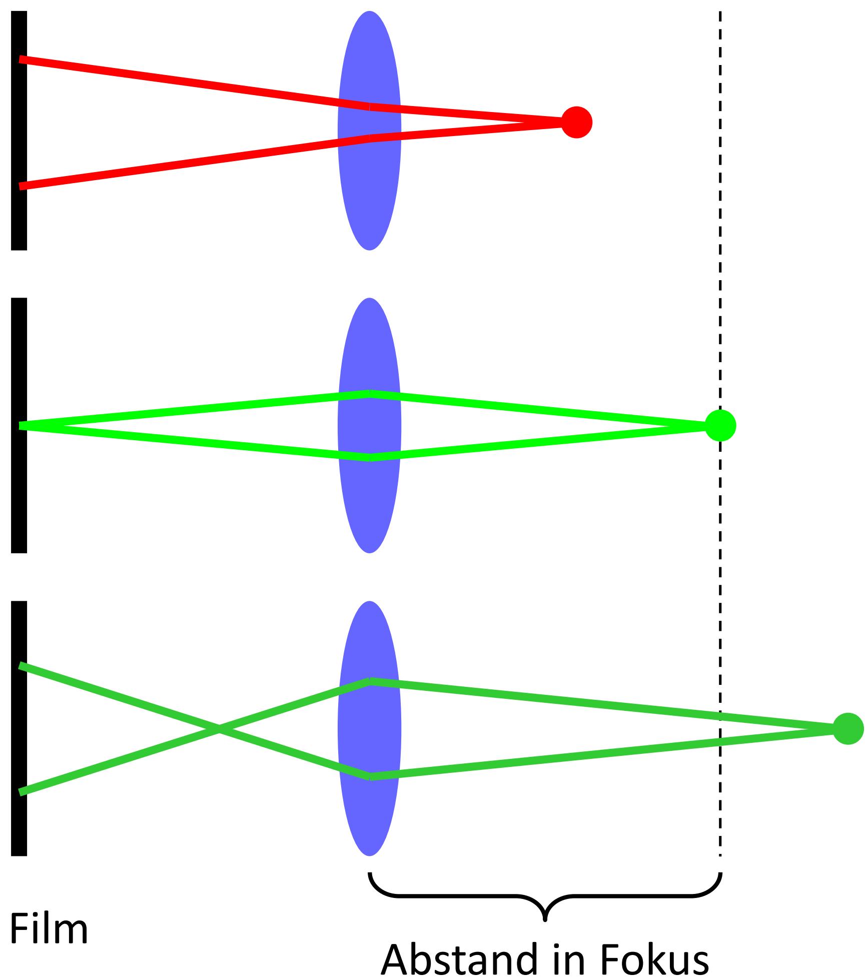
Distribution Raytracing
Motion Blur

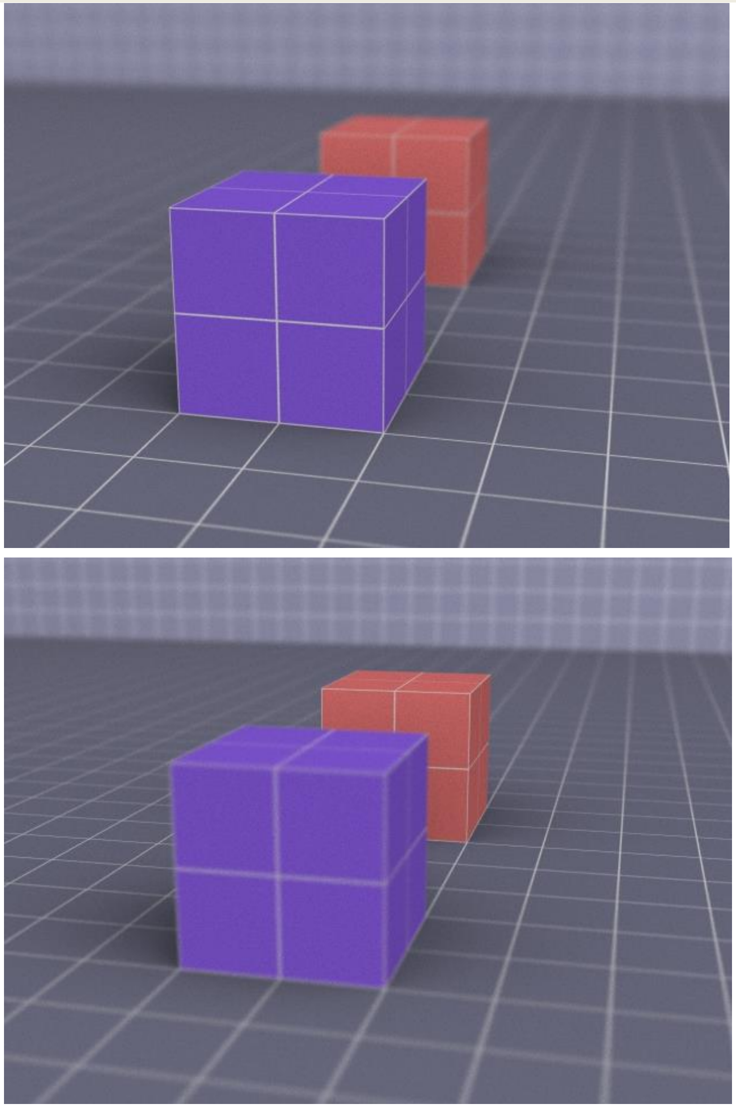
- Für jeden Strahl wird zufällig ein Zeitpunkt in dem darzustellenden Zeitintervall gewählt.
- Vorsicht: hier müssen auch die bewegten Objekte pro Strahl neu positioniert werden.



Rob Cook

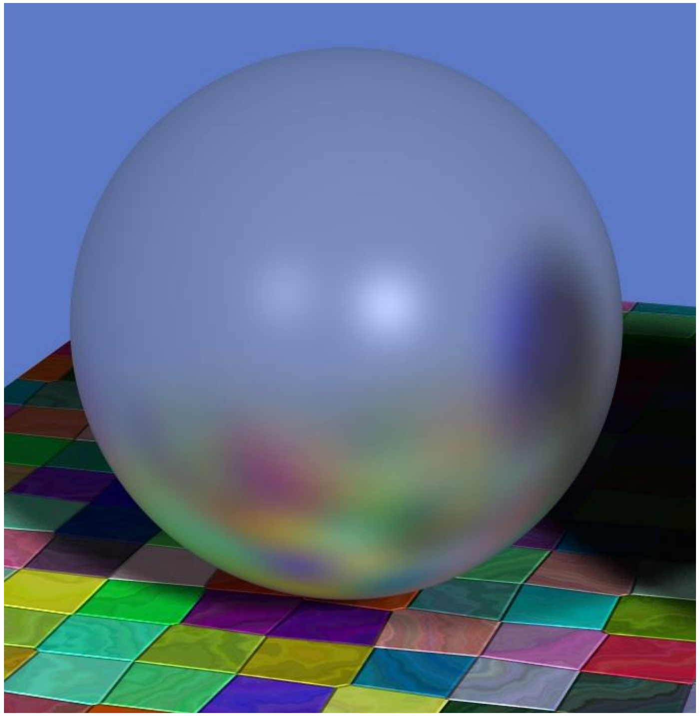
Distribution Raytracing Tiefenunschärfe

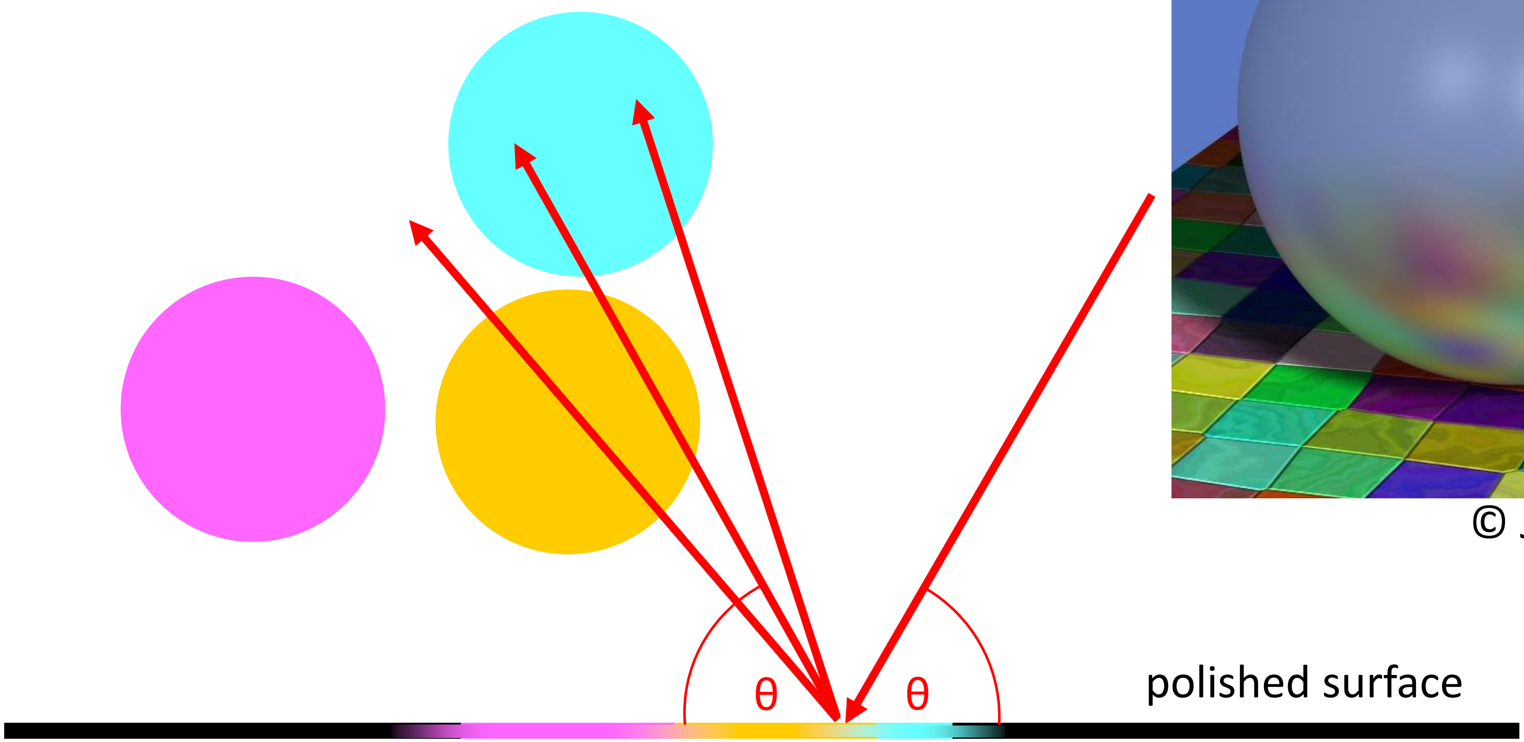




© Justin Legakis

Distribution Raytracing
diffuse Spiegelung





© Justin Legakis

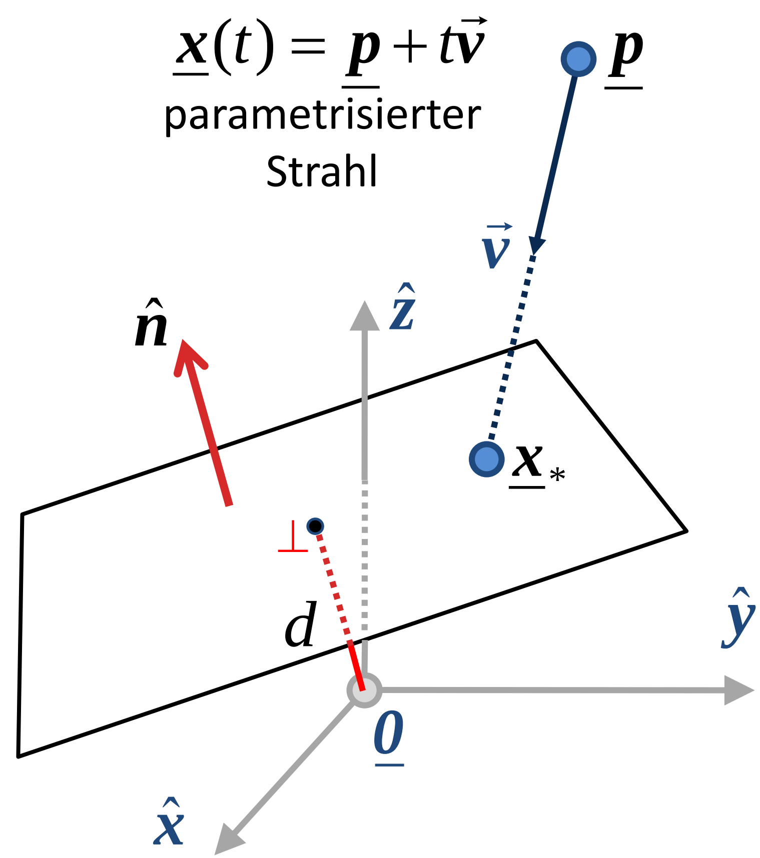
Schnittberechnung Ebene

- Bei vielen Strahl-Primitiv-Schnittberechnungen setzt man die parametrische Form des Strahls in eine implizite Darstellung des Primitives und berechnet den Strahlparameter:

$$\left\langle \hat{\boldsymbol{n}}, \underline{\boldsymbol{p}} + t_* \vec{\boldsymbol{v}} \right\rangle = d \Rightarrow t_* = \frac{d - \left\langle \hat{\boldsymbol{n}}, \underline{\boldsymbol{p}} \right\rangle}{\left\langle \hat{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{v}} \right\rangle}$$

- Als Ergebnis erhält man keinen, einen oder mehrere Schnittparameter (bei Ebene maximal einen). Daraus sucht man sich den mit dem kleinsten positiven t_{fst} aus
- wurde ein t_{fst} gefunden, berechnet man den Schnittpunkt und die Normale des Primitives am Schnittpunkt. Im Falle der Ebene:

$$\underline{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{fst}} = \underline{\boldsymbol{p}} + t_{\mathrm{fst}} \vec{\boldsymbol{v}}, \quad \hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{fst}} = \hat{\boldsymbol{n}}$$



$$\left\langle \hat{\boldsymbol{n}}, \underline{\boldsymbol{x}} \right\rangle = d$$

Hesse'sche Normalform

Schnittberechnung Kugel

- Beim Schnitt von Strahl mit Kugel geht man genauso vor:

$$\left\|\left(\underline{\boldsymbol{p}}+t_*\vec{\boldsymbol{v}}\right)-\underline{\boldsymbol{c}}\right\|^2=\left\|t_*\vec{\boldsymbol{v}}+\left(\underline{\boldsymbol{p}}-\underline{\boldsymbol{c}}\right)\right\|^2=r^2$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{\boldsymbol{v}}\right\|^2 t_*^2+2\left\langle\vec{\boldsymbol{v}},\underline{\boldsymbol{p}}-\underline{\boldsymbol{c}}\right\rangle t_*+\left\|\underline{\boldsymbol{p}}-\underline{\boldsymbol{c}}\right\|^2-r^2=0$$

$$at_*^2+bt_*+c=0$$

- Numerisch kann dies mit folgender Fallunterscheidung stabil gelöst werden: $t_1=\frac{q}{a}, t_2=\frac{c}{q}$, mit

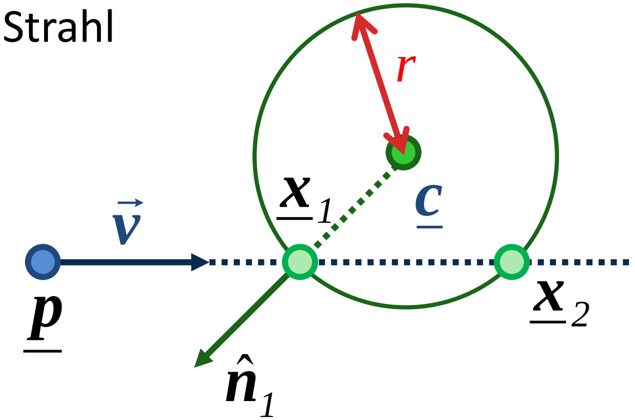
$$q=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\ldots\ b<0\\ -\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\ldots\text{sonst}\end{cases}$$

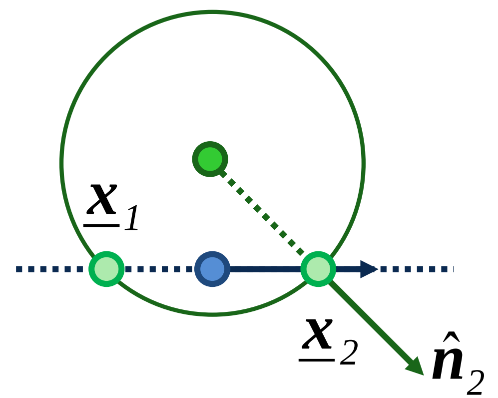
- Nach Auswahl von t_{fst} ergibt sich die Normale zu

$$\hat{\boldsymbol{n}}=\left(\underline{\boldsymbol{x}}_{\text{fst}}-\underline{\boldsymbol{c}}\right)/\left\|\left(\underline{\boldsymbol{x}}_{\text{fst}}-\underline{\boldsymbol{c}}\right)\right\|$$

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t)=\underline{\boldsymbol{p}}+t\vec{\boldsymbol{v}}$$

parametrisierter Strahl



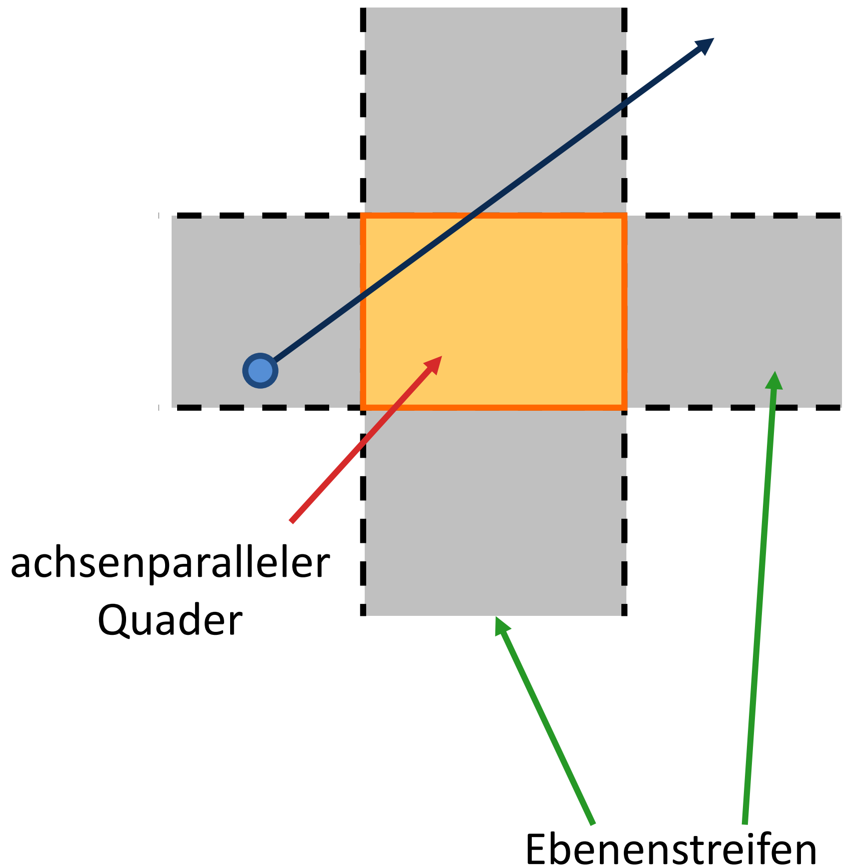


$$\left\|\underline{\boldsymbol{x}}-\underline{\boldsymbol{c}}\right\|^2=r^2$$

implizite Darstellung der Kugel

Schnittberechnung Achsenparalleler Quader

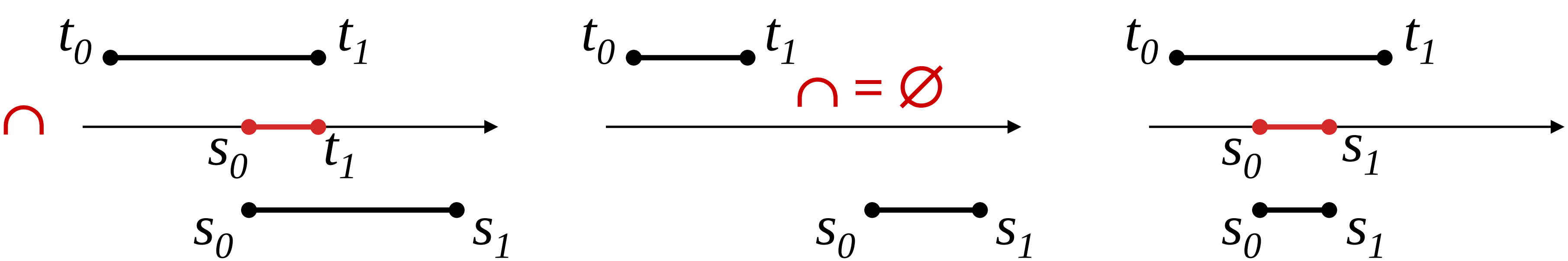
- Quader sind besonders wichtig für Hierarchien von Hüllvolumen.
- Idee: spalte Berechnung in Schnitt mit Ebenenstreifen und diese wiederum in Schnitt mit achsenparallelen Ebenen.
- Bilde Schnittmenge aus resultierenden Intervallen des Strahlparameters t und nutze dazu Intervallarithmetik.



Schnittberechnung Intervallarithmetik

- Motivation: der Schnitt zwischen einem Strahl und einem beliebigen Objekt führt auf Intervalle im Parameter t.
- Parameterintervall: $T = [t_0, t_1]$ mit $t_0 \leq t_1$ oder $T = \varnothing$
- Schnittoperation:

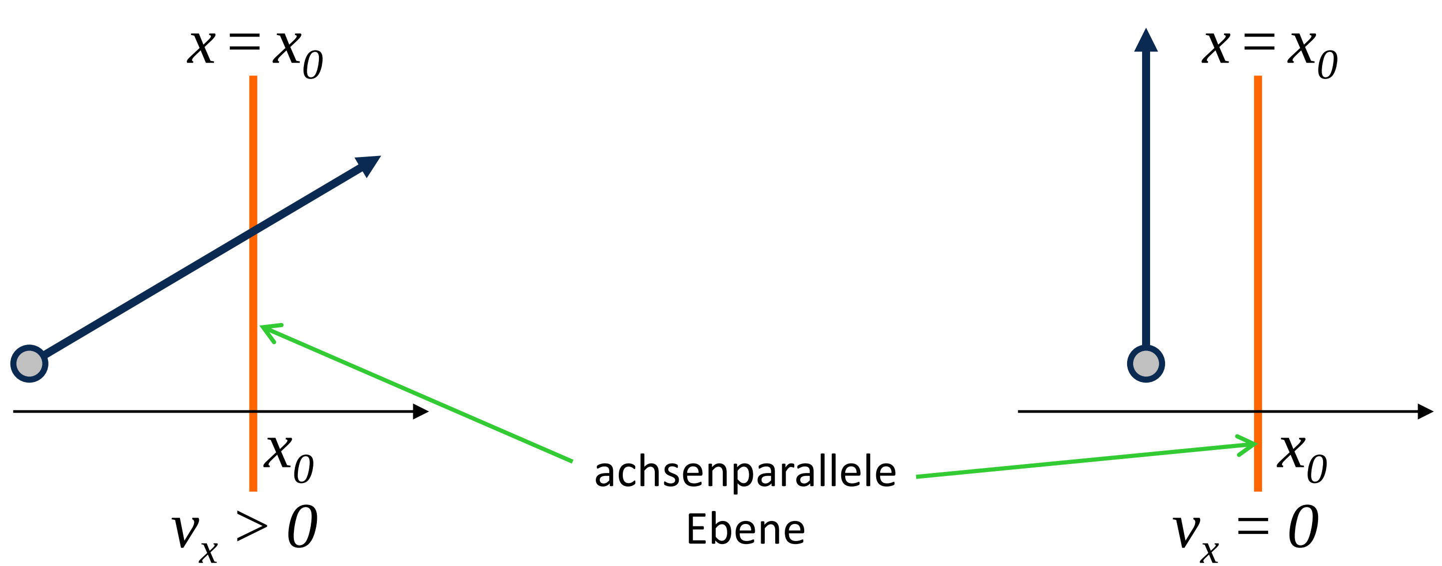
$$[t_0, t_1] \cap [s_0, s_1] = \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } \max\{t_0, s_0\} > \min\{t_1, s_1\} \\ [\max\{t_0, s_0\}, \min\{t_1, s_1\}], & \text{sonst} \end{cases}$$



Schnittberechnung
Achsenparallele Ebene

Computergraphik und Visualisierung

- Das Schnittproblem lässt sich auf eine Dimension reduzieren: der Strahl beginnt bei $x(t=0)=p_x$ und die x-Komponente wächst mit der Geschwindigkeit $\partial x/\partial t = v_x$
- Aus $x_0 = p_x + t_* \cdot v_x$ ergibt sich der Schnittparameter t_* zu: $t_* = \begin{cases} \dfrac{x_0 - p_x}{v_x} & : v_x \neq 0 \\ \text{undef} & : v_x = 0 \end{cases}$

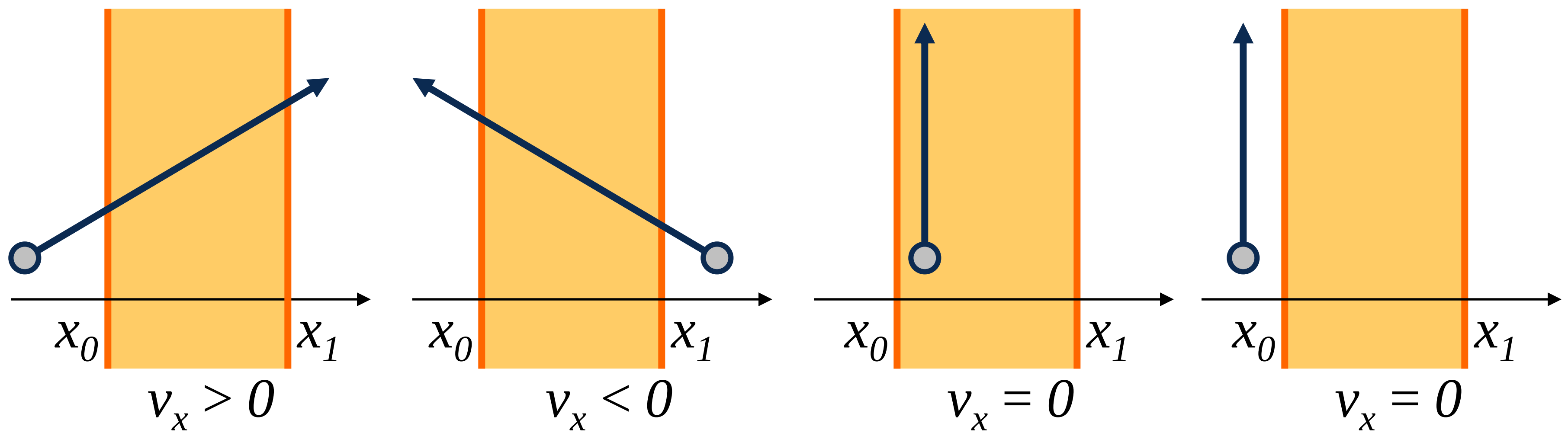


Schnittberechnung Achsenparalleler Ebenenstreifen

Computergraphik und Visualisierung

- Intervall wird abhängig vom Vorzeichen von v_x berechnet
- Weitere Fallunterscheidung bei Parallelität

$$[t_0, t_1] = \begin{cases} \left[\dfrac{x_0 - p_x}{v_x}, \dfrac{x_1 - p_x}{v_x}\right] & : v_x > 0 \\ \left[\dfrac{x_1 - p_x}{v_x}, \dfrac{x_0 - p_x}{v_x}\right] & : v_x < 0 \\ [-\infty, +\infty] & : v_x = 0 \wedge p_x \in [x_0, x_1] \\ \emptyset & : \text{sonst} \end{cases}$$

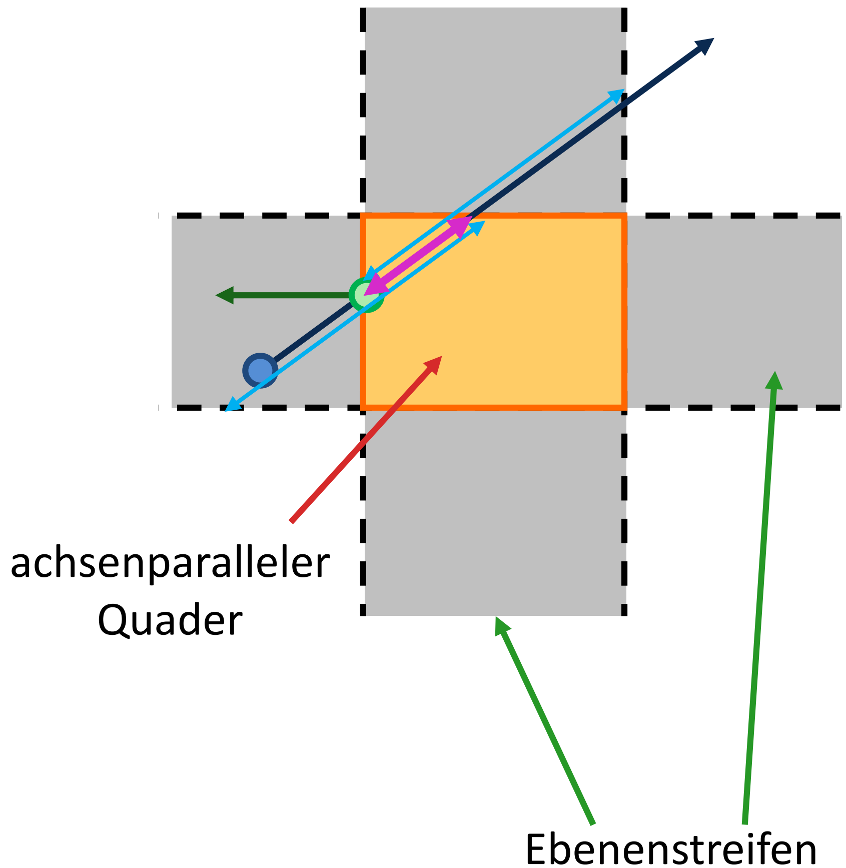


Schnittberechnung Achsenparalleler Quader

- Gegeben: Quader, definiert durch zwei Punkte aus den minimalen und maximalen Koordinaten: $\underline{\boldsymbol{x}}_{\min}, \underline{\boldsymbol{x}}_{\max}$
- Berechne Schnittintervall $T_{x/y/z}$ mit den drei Ebenenstreifen gemäß voriger Folie.
- Schnittintervall T_Q mit Quader ergibt sich aus dem Schnitt über alle drei Intervalle:

$$T_Q = T_x \cap T_y \cap T_z$$

- prüfe abschließend ob es ein $0 < t_{\text{fst}} \in T_Q$ gibt.
- die Normale ergibt sich entlang einer Koordinatenachse



Schnittberechnung Dreieck

- Setzt man $\sigma_2=1-\sigma_0-\sigma_1$, kann man den Strahlparameter t_* sowie σ_{0*} und σ_{1*} durch Gleichsetzen der parametrischen Strahldarstellung und der baryzentrischen Dreiecksdarstellung berechnen.
- Anschließend testen, ob alle $\sigma_i>0$ sind und prüfen, ob $t_*>0$
- falls ja, $\underline{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{fst}}$ und $\underline{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{fst}}$ berechnen:

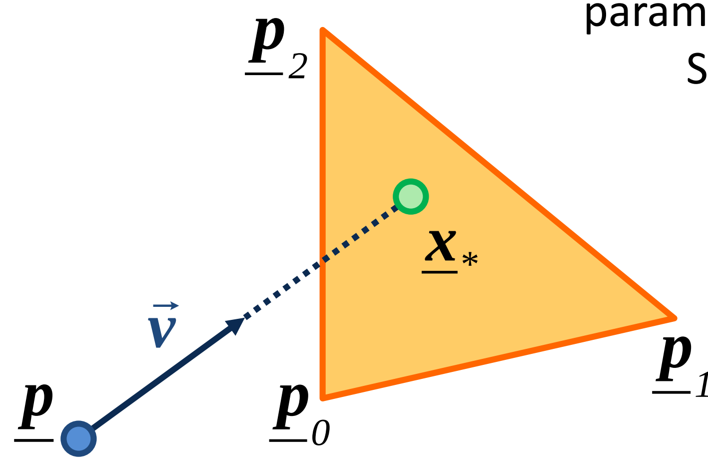
  $$\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{fst}} = \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0, \underline{\boldsymbol{p}}_1, \underline{\boldsymbol{p}}_2) / \left\| \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0, \underline{\boldsymbol{p}}_1, \underline{\boldsymbol{p}}_2) \right\|$$

  mit der Definition

  $$\vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0, \underline{\boldsymbol{p}}_1, \underline{\boldsymbol{p}}_2) = (\underline{\boldsymbol{p}}_1 - \underline{\boldsymbol{p}}_0) \times (\underline{\boldsymbol{p}}_2 - \underline{\boldsymbol{p}}_0)$$

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t) = \underline{\boldsymbol{p}} + t\vec{\boldsymbol{v}}$$

parametrisierter Strahl



$$\underline{\boldsymbol{x}} = \sigma_0 \underline{\boldsymbol{p}}_0 + \sigma_1 \underline{\boldsymbol{p}}_1 + \sigma_2 \underline{\boldsymbol{p}}_2, \forall i : \sigma_i \geq 0$$

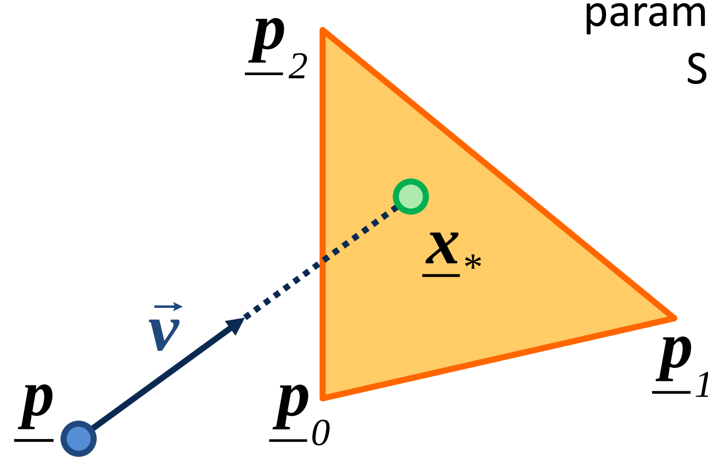
Dreieck in baryzentrischer Darstellung

Schnittberechnung Dreieck II

- Man kann optional auch den Schnittparameter t_* wie beim Schnitt mit einer Ebene bestimmen und die σ_{0*} direkt aus $\underline{\boldsymbol{x}}_*$ und den $\underline{\boldsymbol{p}}_i$ berechnen:

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t) = \underline{\boldsymbol{p}} + t\vec{\boldsymbol{v}}$$

parametrisierter Strahl



$$t_* = \frac{\left\langle \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{p}}_2), \underline{\boldsymbol{p}}_0 - \underline{\boldsymbol{p}} \right\rangle}{\left\langle \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{p}}_2), \vec{\boldsymbol{v}} \right\rangle}$$

$$\sigma_0 = f \cdot \left\langle \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{p}}_2), \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{x}}_*\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{p}}_2) \right\rangle$$

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \sigma_0\underline{\boldsymbol{p}}_0 + \sigma_1\underline{\boldsymbol{p}}_1 + \sigma_2\underline{\boldsymbol{p}}_2, \forall i : \sigma_i \geq 0$$

Dreieck in baryzentrischer Darstellung

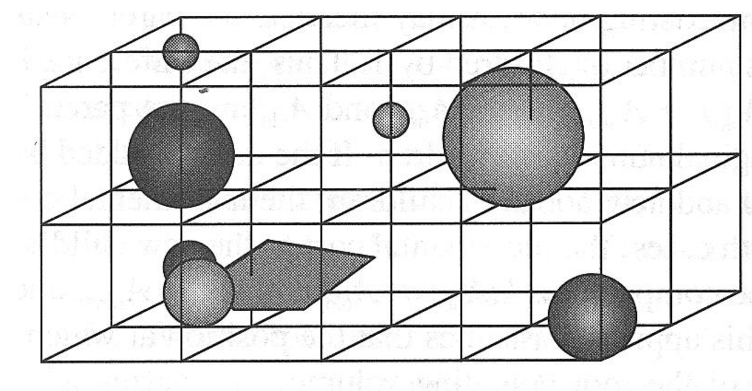
$$\sigma_1 = f \cdot \left\langle \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{p}}_2), \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{x}}_*\underline{\boldsymbol{p}}_2) \right\rangle$$

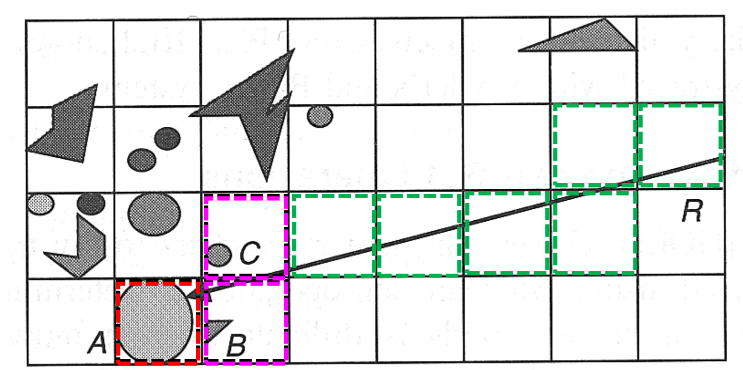
$$\sigma_2 = f \cdot \left\langle \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{p}}_2), \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{x}}_*) \right\rangle \text{ mit } f = \frac{1}{\left\| \vec{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{p}}_0\underline{\boldsymbol{p}}_1\underline{\boldsymbol{p}}_2) \right\|^2}$$

- Beim Vergleich $\sigma_i \geq 0$ kann f auch ignoriert werden

Beschleunigungstechniken
Gitter

- Unterteile Bounding Box in regelmäßiges Voxel
- Auflösung: oft $\sqrt[3]{n}$
- Objekte einfügen
  - füge in alle Voxel ein, die das Objekt überlappen
  - leicht optimierbar
- Traversierung
  - verfolge Voxel entlang des Strahls
  - schneide jeweils mit enthaltenen Objekten
  - terminiere wenn erster Schnitt gefunden wurde





Gitter Strahlverfolgung

- verfolge Zeitpunkte der Voxelübergänge für jede Achse getrennt
- berechne Startzelle aus:

$$i = \text{floor}\left(\frac{p_x - x_{\min}}{\Delta x}\right), \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$$

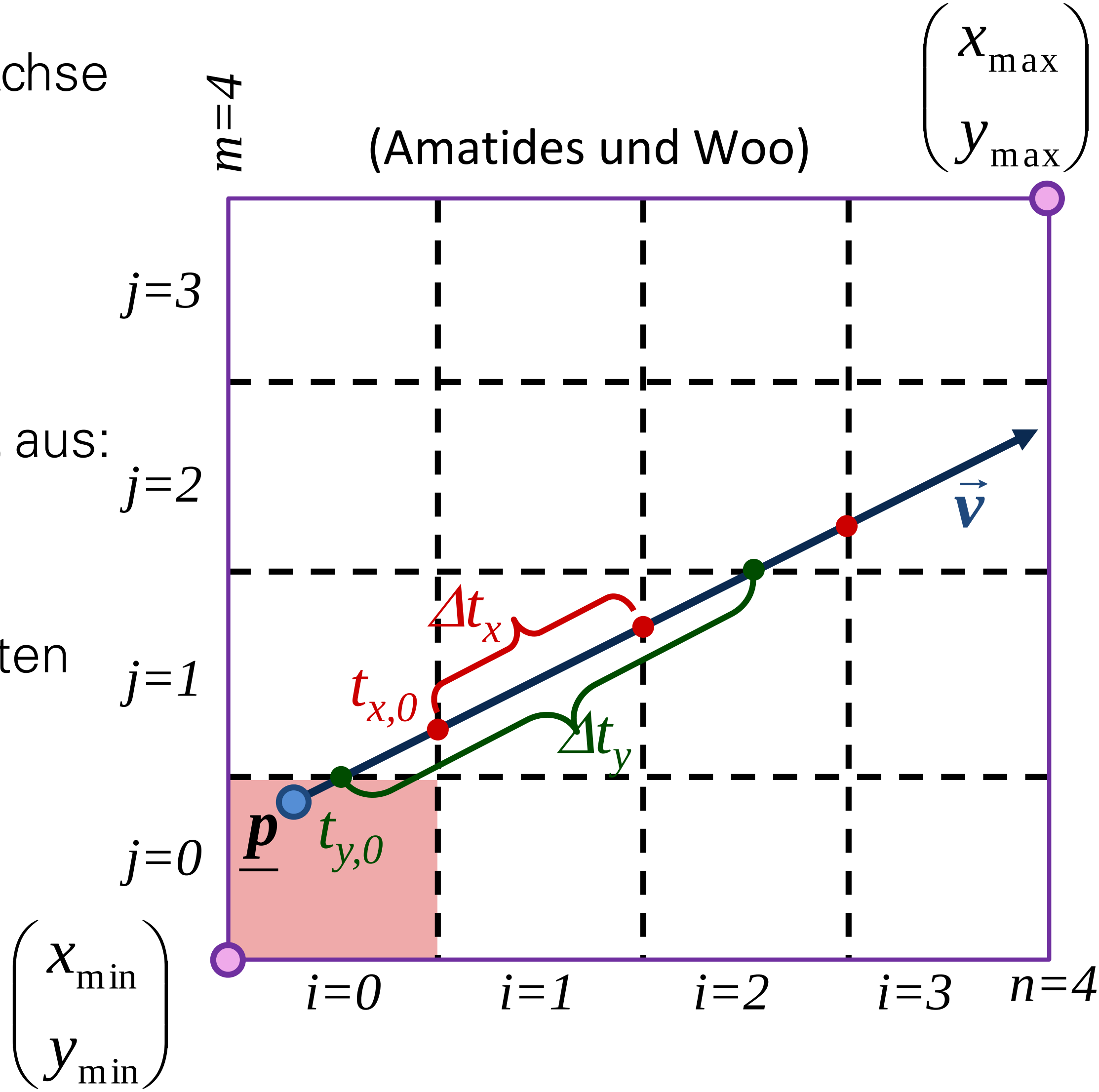
- und erste Schnittzeiten $t_{\alpha,0}$ aus:

$$x_{\min} + (i+1)\Delta x = p_x + v_x t_{x,0}$$

- Zeitschritte Δt_α zum nächsten Wechsel für alle $\alpha \in \{x,y,z\}$

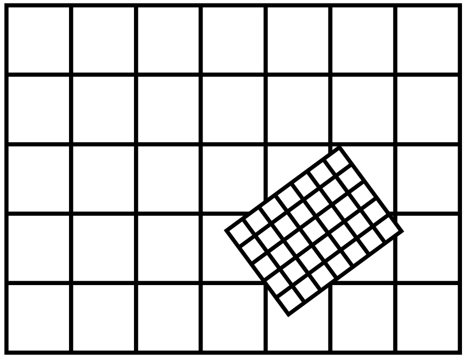
$$\Delta x = v_x \Delta t_x$$

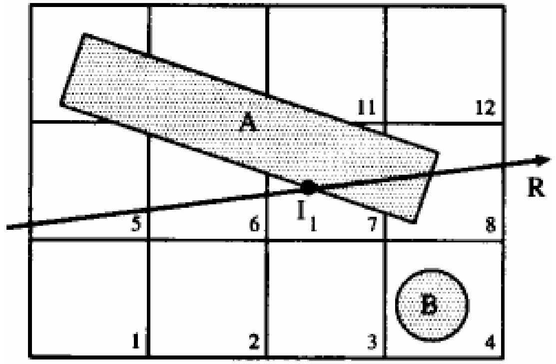
- verfolge Strahl entlang t und führe nächsten Wechsel durch

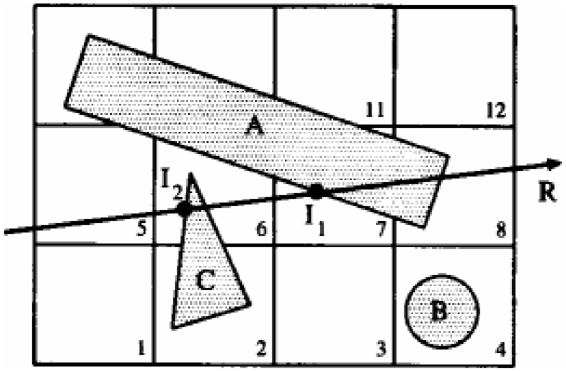


Gitter
Diskussion

- Gitterauflösung
  - hängt stark von Szene ab
  - keine Adaption an einen Fußball in einem Fußballstadium
  - mögliche Abhilfe: geschachtelte Gitter
- **Mailbox Technik**
  - Einsatz: wenn Objekte von mehreren umgebenden Volumen referenziert werden können, wie z.B. beim Gitter
  - Gebe jedem Strahl eine eindeutige ID und jedem Objekt eine Mailbox für letzte Schnittberechnung (ID, Schnittinfo)
  - Prüfe vor Schnittberechnung Mailbox des Objektes und speichere nach evtl. Neuberechnung Ergebnis in Mailbox

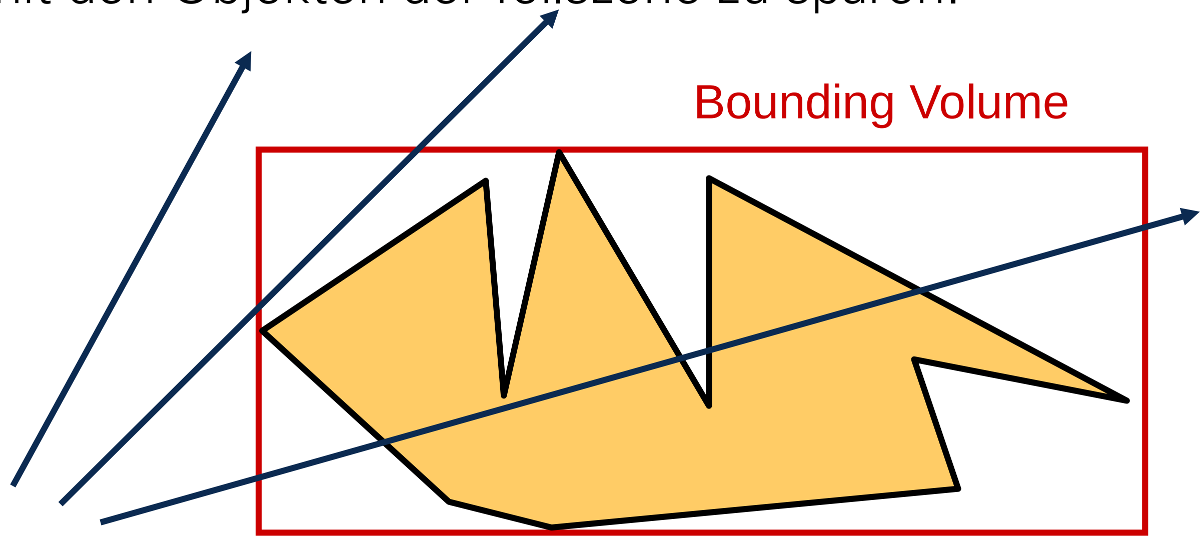






Beschleunigungstechniken Hüllvolumen

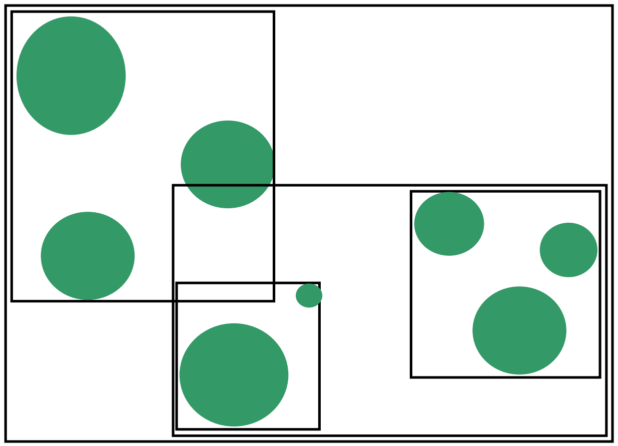
- Grundidee: Das Ziel besteht darin, Kosten bei den Schnittpunkttests eines Strahls mit den Objekten der Teilszene zu sparen.

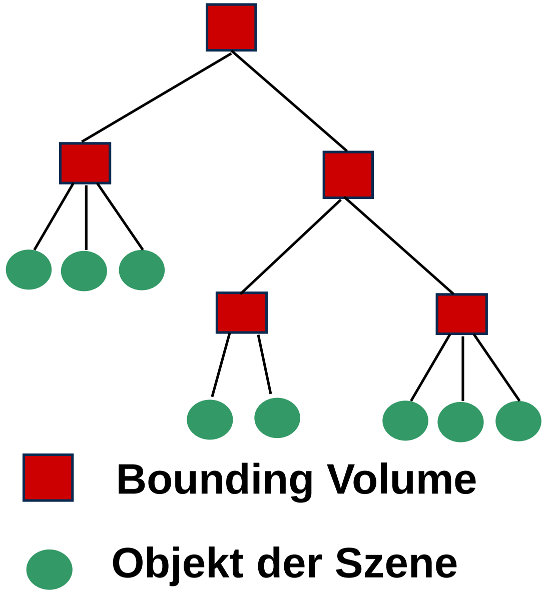


- Verfehlt der Strahl das Hüllvolume, so kann man auf den Schnitt mit der Teilszene verzichten
- Oft bietet es sich an, aus der Szene alle geometrischen Primitive (z.B. alles in Dreiecke zerlegen) in einem globalen Koordinatensystem zu extrahieren und darauf die Beschleunigungstechniken anzuwenden

Hüllvolumen Hierarchie

- Idee: Umschließe die Objekte in einer Hierarchie von sich zum Teil überlappenden Hüllvolumen (BVH)
- Teilbäume: Objekte nahe in der Szene beieinander
- minimiere Oberflächeninhalte der Hüllvolumen
- Fokus auf obere Knoten, weil hier das Abschneiden eines Teilbaumes mehr spart
- Berechnungszeit für Bild durch Raytracing sehr viel geringer trotz zusätzlicher Vorverarbeitung

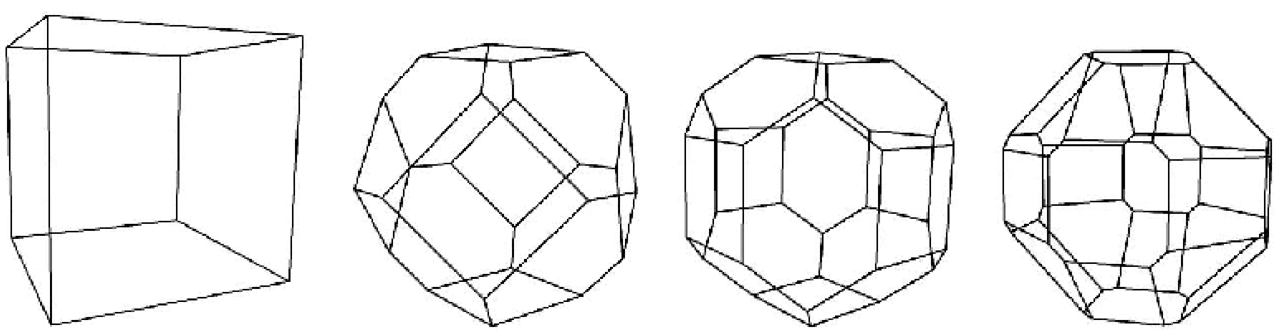




Hüllvolumen Entwurfskriterien

Computergraphik und Visualisierung

- Hüllvolumen werden so konstruiert, dass Teilobjekte komplett umschlossen werden $\Rightarrow$ keine Mailbox-Techniken nötig
- Man muss abwägen zwischen
  - einfache Hüllvolumen (z.B. Kugel, Ellipsoid, Quader) mit kleinen Schnittkosten haben relativ hohe Strahltrefferzahlen
  - enganliegende Hüllvolumen (z.B. konvexe Hülle) mit kleiner Strahltrefferzahl haben hohe Schnittkosten.
- Einen guten Kompromiss ergeben k-Dops:



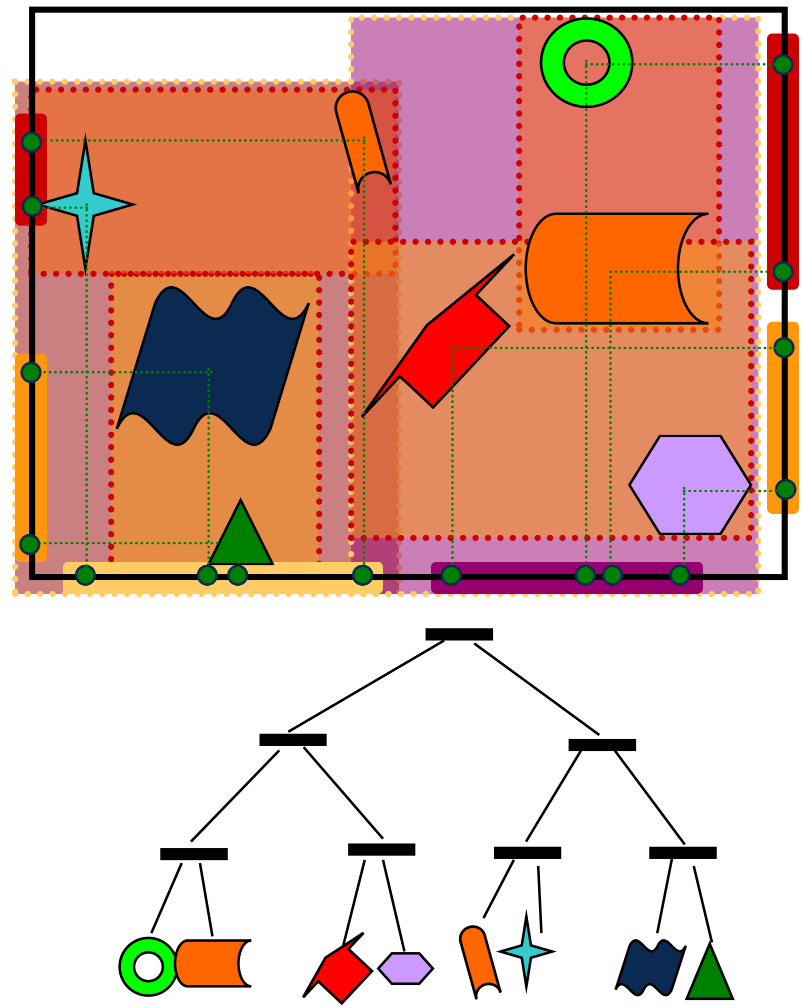
6-DOP 14-DOP 18-DOP 26-DOP

Hüllvolumen
AABB

Computergraphik und Visualisierung

Aufbau (top-down):

- Umschließe alle Objekte mit axis aligned bounding box (AABB) der Szene
- Spalte Box entlang erster Koordinatenrichtung und verteile Objekte gleichmäßig
- berechne Kindboxen so, dass sie die enthaltenen Objekte ganz umschließen
- dadurch können sich die Kind-boxen gegenseitig überlagern
- Rekursion mit nächster Koordinatenrichtung bis die Anzahl der Objekte in den Kindboxen klein genug

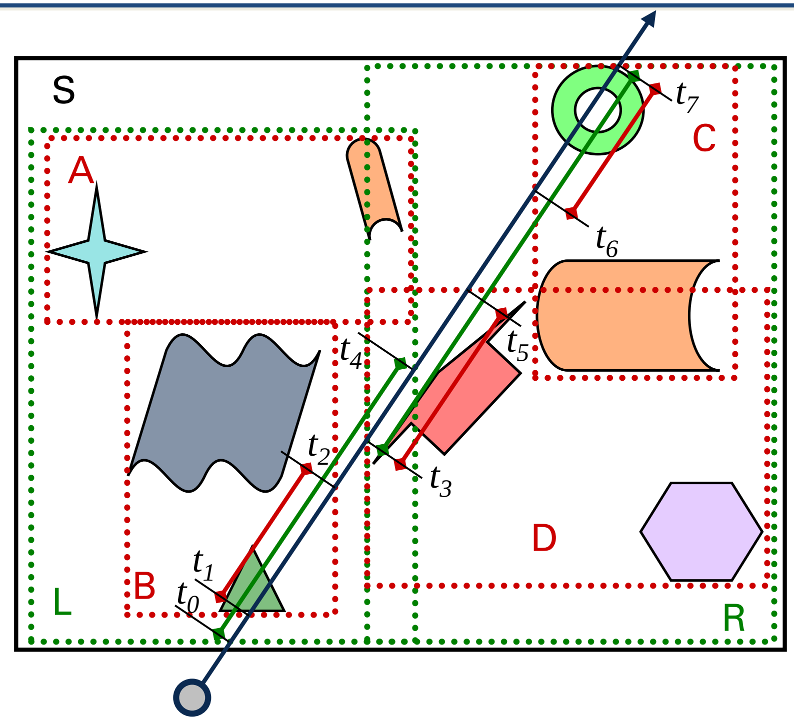


AABB Traversierung

Computergraphik und Visualisierung

Traversierung nach Kay et al.:

- initialisiere Heap von zu testenden AABBs mit Wurzel und setze gesuchten Schnittparameter auf $t_{\text{fst}}=\infty$
- sortiere Heap nach Schnittparameter t_{in} so, dass zuerst die AABB geprüft wird, die als erstes getroffen wird
- AABB ohne Schnitt werden ignoriert
- Test der nächstgelegen AABB
  - wenn $\min t_{\text{in}} > t_{\text{fst}}$ ist kein weiterer Test nötig
  - bei Blattknoten werden Schnitte mit enthaltenen Objekte berechnet und evtl. t_{fst} erneuert
  - sonst beide Kind-BVs in Heap eingetragen



Beispieltraversierung

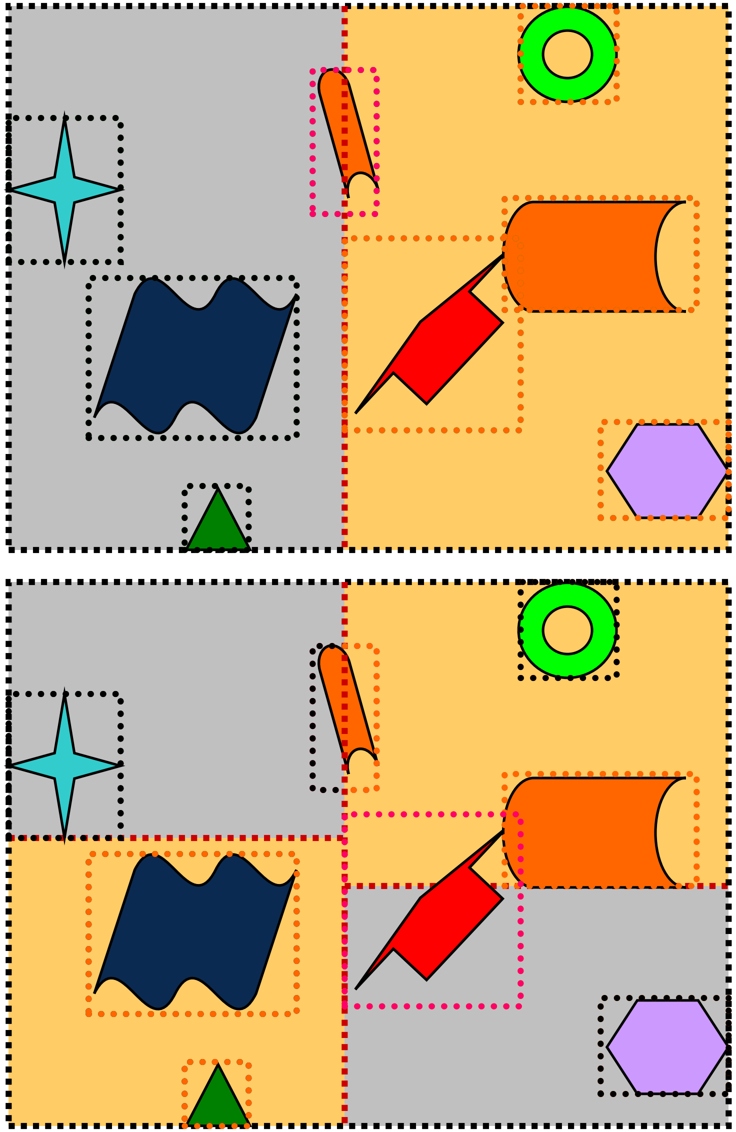
- push(S,t_0,t_7), $t_{\text{fst}}=\infty$
- pop S, $t_0 \le t_{\text{fst}}$, push(L,t_0,t_4), push(R,t_3,t_7)
- pop L, $t_0 \le t_{\text{fst}}$, A is skipped, push(B,t_1,t_2)
- pop B, $t_1 \le t_{\text{fst}}$, intersect objects, $t_{\text{fst}} := t_1$
- pop R, $t_3 > t_{\text{fst}}$, terminate

Beschleunigungstechniken
KD-Baum

Computergraphik und Visualisierung

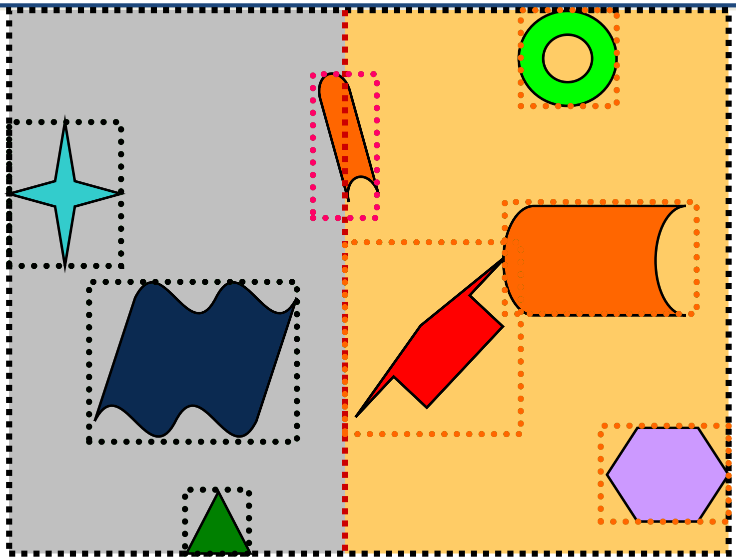
Aufbau

- Berechne für jedes Primitiv eine AABB und daraus die AABB der Szene
- Splitte AABB der Szene rekursiv an einer achsenparallelen Ebene in Binärbaum
- Optimierungspotential pro Split:
  - eine von drei Hauptachse
  - Position der Splittebene (man kann zeigen, dass man sich auf Grenzen der enthaltenen AABBs beschränken kann)
- Optimiere nach minimalen Kosten für den Schnitt mit einem zufällig gewählten Strahl



KD-Baum Kostenfunktion

- Pro Knoten zu entscheiden: wird gesplittet oder nicht, und wenn ja, dann in welcher Richtung und wo.
- Kostenmodell pro Knoten:
  - N Primitive mit Schnittkosten t_i
  - Kosten für Traversierung eines inneren Knotens: t_t
  - Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Strahl das Kind A, B schneidet, unter der Bedingung, dass der Elternknoten geschnitten wurde: p_A, p_B
- Kosten ohne Split: $T_{leaf} = \sum_{i=1}^{N} t_i$



- Für alle 3 Hauptachsen werden die Knoten nach der minimalen Position sortiert.
- Gehen N_A Primitive in Kind A und überlappen N_O Primitive, so sind die Kosten bei einem Split:

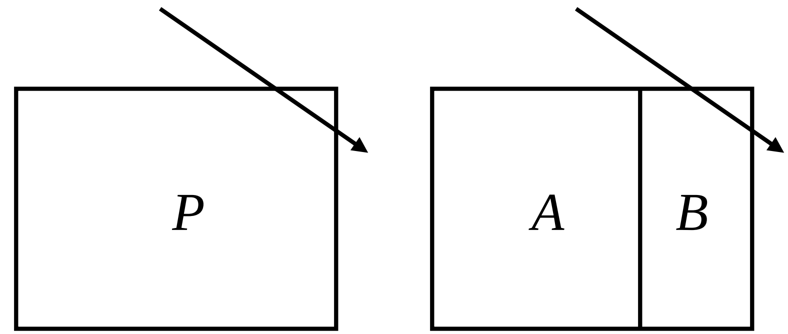
$$T_{split} = t_t + p_A \sum_{i=1}^{N_A} t_i + p_B \sum_{i=N_A-N_O+1}^{N} t_i$$

in Klausur gegeben

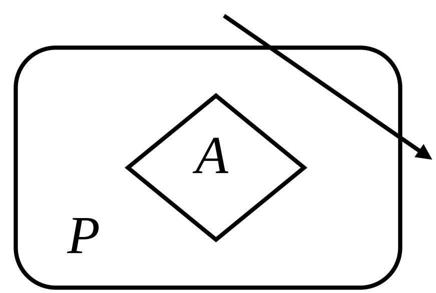
KD-Baum
Optimierung mit SAH

Computergraphik und Visualisierung

- Optimiert wird mit Hilfe einer vollständigen Suche über alle Hauptachsen und alle Grenzpositionen der AABBs der Primitive.
- Die noch fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B ergeben sich aus dem Quotient der Oberflächenverhältnisse von Kind durch Elternknoten (**S**urface **A**rea **H**euristic), was etwas allgemeiner Gültigkeit hat:
- **Satz:** Gegeben sei ein konvexes Volumen P mit Oberfläche s_P und ein darin enthaltenes konvexes Volumen A mit s_A. Ein zufällig gewählter Strahl, der P schneidet, schneidet A mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(A|P) = \frac{s_A}{s_P}$



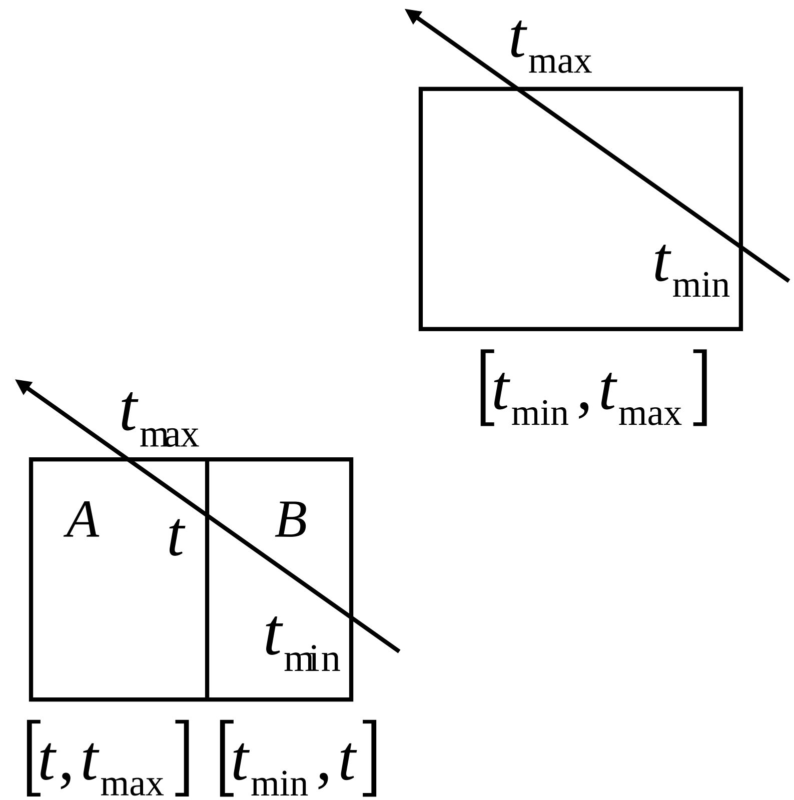
$$p_A = \frac{s_A}{s_P} \qquad p_B = \frac{s_B}{s_P}$$



KD-Baum
Traversierung beim Schnitttest

- Bei der Traversierung müssen die Blattknoten nach aufsteigend sortiertem Strahlparameter geprüft werden, bis der erste Schnitt gefunden ist:

1. Anfangs wird das Schnittintervall mit der Szenen-AABB berechnet und auf Abbruch geprüft.
2. In den Blättern werden Tests mit den Primitiven durchgeführt und die Mailboxtechnik angewandt
3. In inneren Knoten wird der Schnittparameter der Trennfläche berechnet um das aktuelle Parameterintervall in zwei Teile zu zerlegen.
4. Der vom Strahl zuerst durchwanderte Kindknoten wird auch zuerst rekursive traversiert.



5. Wurde im zuerst traversierten Teilbaum kein Schnitt vor der Trennebene gefunden, wird auch der zweite Kindknoten rekursive traversiert.