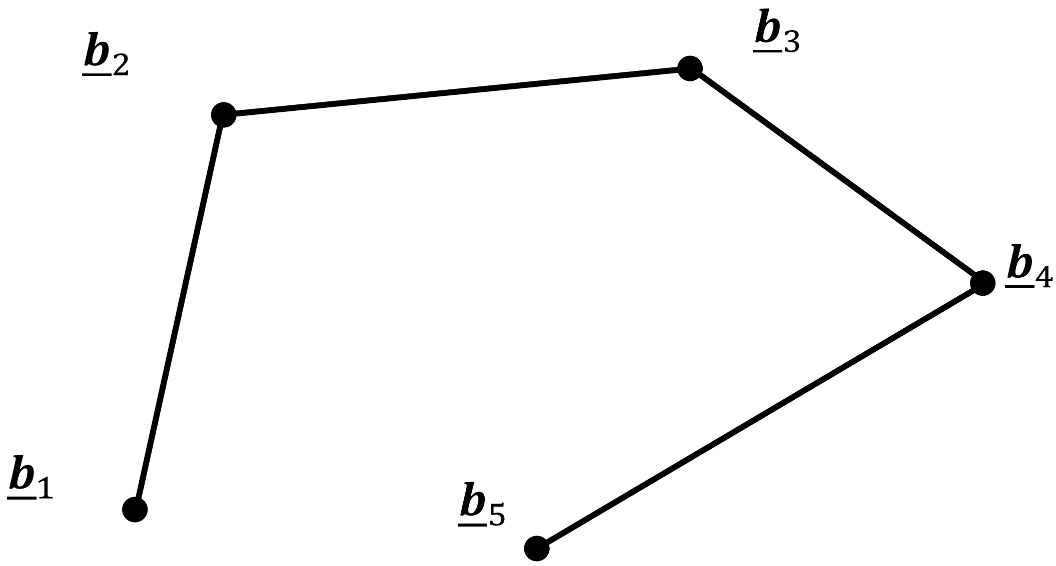
Aufgabenkomplex Kurven

1. Führen Sie graphisch den De-Casteljau-Algorithmus für den Parameterwert $t = 0.25$ auf folgendem Kontrollpolygon durch.



(HA) 2. a) Bestimmen Sie die mathematische Darstellung einer Bézier-Kurve in der Bernsteinbasis mit den Kontrollpunkten $\underline{\boldsymbol{b}}_1$, $\underline{\boldsymbol{b}}_2$ und $\underline{\boldsymbol{b}}_3$. *Hinweis: Sie brauchen den Term nicht expandieren.*

b) Stellen Sie die x- und y-Komponente dieser Bézier-Kurve als Polynome dar. Die Komponenten der Bernsteinbasis sind wie folgt definiert: $B_i^g(t) = \binom{g}{i}(1-t)^{g-i}t^i$. Die Kontrollpunkte sind:

$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, Lösung: $\begin{pmatrix}c_x(t)\\c_y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t^2+4t+1\\2t^2-2t\end{pmatrix}$

HA c) Berechnen Sie den Kurvenpunkt bei $t = 0.1$. Lösung: $c(t = 0.1) = \begin{pmatrix}1.39\\-0.18\end{pmatrix}$

(HA) 3. Gegeben sei die stückweise definierte Funktion $f(t)$. Berechnen Sie die C-Stetigkeit bei t.

a) $t = 1,\ f(t) = \begin{cases}-t^2, & t < 1\\ -2t+1, & t \geq 1\end{cases}$, Lösung: C^1-stetig

HA b) $t = 0,\ f(t) = \begin{cases}2, & t < 0\\ t^2+2, & t \geq 0\end{cases}$, Lösung: C^1-stetig

HA c) $t = 1\ \ f(t) = \begin{cases}-t^2, & t < 1\\ t-2, & t \geq 1\end{cases}$, Lösung: C^0-stetig

4. Gegeben sei die Transformationsmatrix von Bézier-Kontrollmatrizen in Hermite-Kontrollmatrizen $T_{H\leftarrow B}$. Rechnen Sie damit aus den gegebenen Bézier-Kontrollpunkten $\underline{\boldsymbol{b}}_1 = \binom{2}{0}$, $\underline{\boldsymbol{b}}_2 = \binom{2}{2}$, $\underline{\boldsymbol{b}}_3 = \binom{1}{2}$ und $\underline{\boldsymbol{b}}_4 = \binom{-2}{0}$ die Kontrollpunkte $\underline{\boldsymbol{q}}_1$ und $\underline{\boldsymbol{q}}_2$ sowie die Kontrolltangentenvektoren $\vec{\boldsymbol{m}}_1$ und $\vec{\boldsymbol{m}}_2$ einer äquivalenten Hermite-Darstellung aus.

$$T_{H\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{q}}_1 & \vec{\boldsymbol{m}}_1 & \vec{\boldsymbol{m}}_2 & \underline{\boldsymbol{q}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-9} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

HA 5. Gesucht ist eine Gewichtsfunktion $L_i^g(t)$ mit den folgenden Eigenschaften: $L_i^g(1) = 0$, $L_i^g(2) = 1$, $L_i^g(5) = 0$.
a) Geben Sie Grad g und Index i der gesuchten Lagrange Basisfunktion an. Lösung: $g = 2, i = 1$
b) Geben Sie ein Polynom $L_i^g(t)$ an, das den Vorgaben entspricht. Lösung: $L_1^2(t) = -\frac{1}{3}(t-1)(t-5)$

6. a) Erklären Sie den Begriff konvexe Hülleigenschaft.
b) Wie lautet die mathematische Definition dieser Eigenschaft?
c) Welche der folgenden Kurven erfüllen diese Eigenschaft? Bézier-Kurve, Lagrange-Kurve, Hermite-Spline, B-Spline

HA 7. Was ist der Grad g eines Polynoms und wie viele Koeffizienten benötigt man, um ein Polynom vom Grad g zu definieren?

HA 8. Welche der folgenden Kurven interpolieren **alle** Kontrollpunkte? Bézier-Kurve, Lagrange-Kurve, Hermite-Spline, B-Spline

HA 9. Für welche der folgenden Kurven kann man die Endtangenten explizit oder über das Kontrollpolygon vorgeben? Bézier-Kurve, Lagrange-Kurve, Hermite-Spline, B-Spline

HA 10. Geben Sie Pseudo-Code für die Auswertung eines Polynoms in Monombasis mit Hilfe des Hornerschemas an.

11. Gegeben ist $K = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ als Koeffizientenmatrix für die Monombasis einer Kurve $c(t)$ in $\mathbb{R}^2$ (ein Punkt pro Spalte). Geben Sie den Kurvenpunkt für den Laufparameterwert $t = 0.5$ an.
Lösung: $c(t = 0.5) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(HA) 12. HA a) Wie lautet die Bézier-Basis vom Grad $g = 1$? Lösung: $B = (1 - t, t)^T$
b) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix $A_{B\leftarrow M}$ von der Monombasis zur Bézierbasis für Grad $g = 1$. Lösung: $A_{B\leftarrow M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
HA c) Wie lautet die Transformationsmatrix für den Koeffizientenvektor $T_{B\leftarrow M}$ für den Grad $g = 1$? Lösung: $T_{B\leftarrow M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. Skizzieren Sie jeweils eine G^0-, G^1- und G^2-Unstetigkeit.

(HA) 14. In welchem Zusammenhang steht die Anzahl K der Kontrollpunkte mit der Anzahl n der Kurvensegmente bei einem B-Spline vom Grad g?
HA a) bei einem offenen B-Spline
b) bei einem geschlossenen B-Spline

15. Geben Sie einen Knotenvektor für einen offenen B-Spline vom Grad 4 mit 8 Kontrollpunkten an, der die Eigenschaft der Endpunktinterpolation besitzt.

HA 16. Wieviele Kontrollpunkte beeinflussen jeweils ein Kurvensegment in einem geschlossenen B-Spline vom Grad 3?