Aufgabenkomplex Transformationen

HA 1. Welche Transformationen repräsentieren folgende **homogene** 3x3-Matrizen? Zur Auswahl stehen:

- reine Rotation (rR)
- reine Translation (rT)
- reine Scherung (rS)
- reine perspektivische Transformation (rpT)
- reine uniforme Skalierung (ruS)
- reine nicht-uniforme Skalierung (rnuS)
- reine Punktspiegelung (rPS)
- reine Projektion auf eine Achse (rPA)
- keine reine Transformation (krT)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Lösung: rpT, rR, rT, rS, rPS, ruS, rPA, krT, rnuS

(HA) 2. Gegeben ist eine homogene 2D-Matrix $\widetilde{M} = \begin{pmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{pmatrix}$

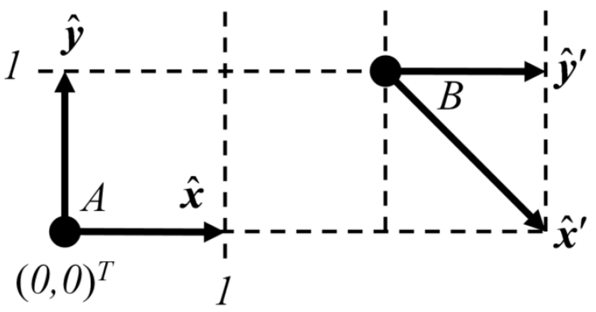
Welche der Matrix-Elemente von $\widetilde{M}$ bestimmen die folgenden Transformationen:

lineare Transformation: ______________________________

perspektivische Transformation: ______________________________

Translation: ______________________________

3. Gegeben sei folgende Skizze:



a) Geben Sie die **homogene** 3x3-Matrix der affinen Transformation an, die Vektoren im Koordinatensystem A so transformiert, dass sich die Basisvektoren von A auf die Basisvektoren von B abbilden. Lösung: $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) Wie berechnet man die Systemtransformation von A nach B?

(HA) 4. Gegeben ist die **nicht-homogene** Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ergänzen Sie diese um eine Translation $t = (1,1,2)^T$ und geben Sie die resultierende homogenen Matrix $\widetilde{M}$ an!

5. Transformieren Sie den nicht-homogenen Punkt $\underline{p}$ mit der zusammengesetzten perspektivischen Abbildung, die durch die homogene Matrix $\widetilde{M}$ gegeben ist und wandeln Sie das Ergebnis wieder in einen nicht-homogenen Punkt $\underline{p}'$ um. Benennen Sie die (drei) notwendigen Teilschritte.

a) 2D-Fall: $\underline{p} = (2,1)^T,\ \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Lösung: $\underline{p}' = (2,0)^T$

b) 3D-Fall: $\underline{p} = (1,2,-1)^T, \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Lösung: $\underline{p}' = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)^T$

HA 6. Welche der folgenden homogenen Vektoren stellen denselben **2D**-Punkt dar?

$\tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tilde{q}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \tilde{q}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \tilde{q}_6 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{q}_7 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$[\tilde{q}_1 \sim \tilde{q}_6], [\tilde{q}_2 \sim \tilde{q}_4], [\tilde{q}_3 \sim \tilde{q}_5 \sim \tilde{q}_7]$

HA 7. a) Erklären Sie den Begriff Fluchtpunkt.

b) Erklären Sie den Begriff Hauptfluchtpunkt.

c) Erklären Sie den Begriff Zentralperspektive.

d) Nennen Sie die drei Typen von Parallelprojektionen, die **nicht** entlang einer Hauptachse abbilden.

HA 8. Schreiben Sie unter die folgenden homogenen 3x3-Matrizen, welche Art der Transformation sie repräsentieren und geben Sie dazu die Erhaltungsgrößen mit ja/nein an.

	$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Art der Transformation			
Längen			
Winkel			
Flächen			

Lösung:

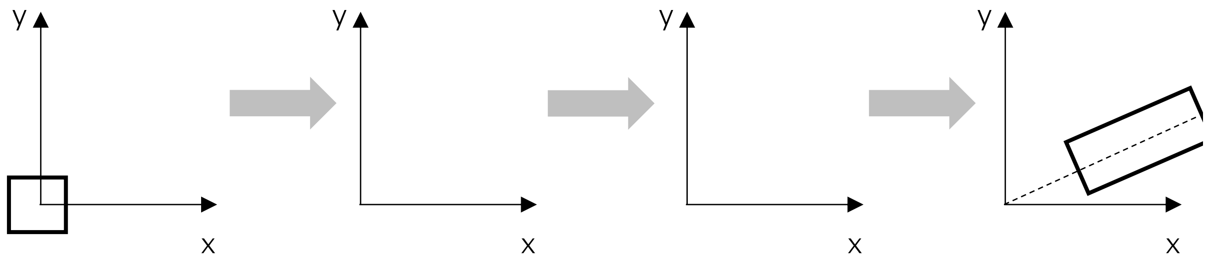
Rotation	persp. Abb.	Scherung
ja	nein	nein
ja	nein	nein
ja	nein	ja

HA 9. Wann werden Geradensegmente bei einer perspektivischen Transformation in zwei Teile zerlegt?

HA 10. Wie kann man Vektoren in homogener Darstellung interpretieren, wenn man auf sie eine affine Transformation anwendet. Wie ist die Interpretation bei perspektivischen Transformationen?

11. Erklären Sie die drei Schritte, die man durchführen muss, um eine Ebene (gegeben durch den Normalenvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$ und den Abstand zum Ursprung $\boldsymbol{d}$) mit einer perspektivischen Transformation, die als homogene Matrix $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ repräsentiert ist, abzubilden!

12. Die folgende Skizze zeigt die zusammengesetzte Transformation eines Objekts, welche durch Hintereinanderausführung der Teiltransformationen Translation in x-Richtung (T_x), Skalierung in x-Richtung (S_x) und Rotation (R) in einer geeigneten Reihenfolge realisiert wird.



a) Geben Sie alle Kombinationen der Teiltransformationen an, die zu einer validen Gesamttransformation M führen können. Verwenden Sie die Matrixproduktschreibweise.
Lösung: $M = RS_xT_x, M = RT_xS_x$
b) Zeichnen Sie für eine valide Kombination die Ergebnisse der Teiltransformationen in die Skizze ein.