Jonathan Rittmayer
Mat # 30001299

Algorithms & Data S
Homework # 5

5.3) Write a differential proof for $\lg n! = \Theta(n \lg n)$ without having to use Stirling's formula.

Proof:

Show: $\lg n! \leq c * n \lg n$

Assume: $\lg 1 * 2 * \dots * (n-1) * n \leq c * n \lg n$

Prove: $\lg 1 * 2 * \dots * (n-1) * n \leq \lg n * n * n * \dots * n * n$ (N times)

$\Rightarrow \lg n * n * n \dots * n * n = \lg n^n = n \lg n$

$\Rightarrow n \lg n \leq c * n \lg n$

It is true for $c \geq 1$ and $n \geq 1$:

$\lg n! \geq c * n \lg n - c * n$

$\Rightarrow \lg 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n \geq c * n \lg n - c * n$

When n is even:

$\lg 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n \geq \lg \frac{n}{2} * \dots * (n-1) * n$

$\Rightarrow \lg \frac{n}{2} * \dots * (n-1) * n \geq \lg (\frac{n}{2}+1) * \dots * (n-1) * n$

$\Rightarrow \lg (\frac{n}{2}+1) * \dots * (n-1) * n \geq \lg \frac{n}{2} * \frac{n}{2} * \dots * \frac{n}{2} * \frac{n}{2}$

$\Rightarrow \lg \frac{n}{2} * \frac{n}{2} * \dots * \frac{n}{2} * \frac{n}{2} = \lg (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2}$

$\Rightarrow c * n \lg n - c * n = cn * (\lg n - 1)$

$\Rightarrow \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} (\lg n - 1)$

$\Rightarrow \frac{n}{2}(\lg n - 1) \geq cn * (\lg n - 1)$

As such it is true for $c \leq \frac{1}{2}$ and $n \geq 1$

Jonathan Rittmeyer
Mat # 30001299

Algorithms & Data S
Homework # 5

5.3 cont.)

when n is odd:

$$\lg 1 * 2 * 3 * \ldots * (n-1) * n \geq \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil * \ldots * (n-1) * n$$

$$\Rightarrow \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil * \ldots * (n-1) * n \geq \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil * \ldots * \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\Rightarrow \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil * \ldots * \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq \lg \frac{n}{2} * \frac{n}{2} * \ldots * \frac{n}{2} * \frac{n}{2} = \lg \left(\frac{n}{2}\right)^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil * \lg \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow c * n \lg n - c * n = cn * (\lg n - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} (\lg n - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} (\lg n - 1) \geq cn * (\lg n - 1)$$

Thus true for $c \leq \frac{1}{2}$ and $n \geq 1$