המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

תאריך: **7/02/2021**

היחידה למתמטיקה

שעות הבחינה: 8:30-11:30

שם הקורס: אלגברה ליניארית להנדסת תוכנה

מועד: א (מבחן מקוון)

תשפ"א סמסטר א'

שם המרצים: **ד"ר יבגניה אקרמן, ד"ר מנחם שלוסברג**

משך הבחינה – שלוש שעות + רבע שעה לסריקה והעלאת דפי הפתרון בלבד

חומר עזר — מחשבון רגיל, דף נוסחאות של הקורס (מצורף).

הוראות מיוחדות — הבחינה מורכבת מ- 5 שאלות. צריך לפתור 4 שאלות.

הבחינה מכילה 6 עמודים (כולל דפי נוסחאות ודף זה). יש לכתוב בכתב יד ברור ומסודר ולפרט כל שלב בחישובים.

יש לרשום ליד כל תשובה את מספר השאלה, ומספר הסעיף, במידה וישנו. הסבירו היטב את תשובותיכם. תשובות ללא הסבר לא יתקבלו.

בסיום הבחינה יש לסרוק את הפתרון ולהגישו לתיבת ההגשה ב-MOODLE. באחריות הסטודנט לוודא שהסריקה איכותית וברורה, יש לסרוק את הדפים מלמעלה ולא בזווית ולהעלות כקובץ PDF אחד.

שימו לב – המערכת ננעלת אוטומטית לאחר שלוש ורבע שעות – לא תתאפשר הגשה מאוחרת! מבחן שישלח לדואר האלקטרוני של המרצה/המתרגל לא ייבדק.

במהלך הבחינה תוכלו לשאול שאלות דרך פורום הבחינה או במסרים האישיים, הן יענו מידי 30 דקות - נא להמתין בסבלנות לתשובה.

במידה ויהיו עדכונים והבהרות במהלך הבחינה, הם יתפרסמו בפורום הבחינה.

שימו לב – כדי לראות את העדכונים והמסרים החדשים יש לרענן את העמוד באתר.

בהצלחה!

שאלה 1

1) (17 נק') נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-2m \\ m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$:

א) (14 נק') מצאו את ערכי הפרמטר m עבורם למערכת $A\cdot X=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3m+5 \end{pmatrix}$ אין

פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

ב) (3 נק') עבור אילו ערכי פרמטר m למערכת $A\cdot X=0$ יש אינסוף פתרונות? נמקו את תשובתכם.

2) (8 נק') הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם $T:U\to V$ טרנספורמציה ליניארית, אז

א) אם $u_1,\dots,u_n\in U$ תלויים ליניארית אז גם $T(u_1),\dots,T(u_n)\in V$ תלויים ליניארית.

ב) אם $T(u_1),\dots,T(u_n)\in V$ תלויים ליניארית אז גם $u_1,\dots,u_n\in U$ תלויים ליניארית.

שאלה 2

1) (20 נק') במרחב הוקטורי $P_3(\mathbb{R})$ נתונה קבוצת וקטורים
$S=\left\{v_1=1-t-t^3, v_2=1-2t^2, v_3=3t+t^2+7t^3, v_4=4-t+t^2+3t^3\right\}$.

א) (7 נק') בדקו אם הקבוצה תלויה ליניארית. אם כן, מצאו צירוף ליניארי לא טריוויאלי של וקטורי הקבוצה ששווה לוקטור האפס.

ב) (5 נק') מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3,v_4)$.

ג) (3 נק') האם וקטור v_2 שייך לתת המרחב הנפרש על ידי שאר הוקטורים של קבוצה S ?

ד) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: קיים $v\in P_3(\mathbb{R})$ כך ש- $\{v_1,v_3,v_4,v\}$ בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

2) (5 נק') נניח כי A,B מטריצות מסדר $n\times n$ המקיימות $(AB)^2=0$. הוכיחו כי $(BA)^3=0$.

שאלה 3

1) (18 נק') נתונה טרנספורמציה ליניארית $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a+3b+4c-3d \\ b+3c-2d \\ 3a+7b+6c-5d \end{pmatrix}$$

א) (3 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) (5 נק') מצאו את המימד ובסיס של $\operatorname{Im}T$.

ג) (6 נק') מצאו את המימד ובסיס של $KerT$.

ד) (4 נק') האם T חד חד ערכית? האם T על ? נמקו את תשובותיכם.

2) (7 נק') נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. חשבו את $\det\left(2A^{10}-2A^{9}\right)$.

שאלה 4

1) (17 נק') נתונה קבוצת וקטורים $W=\left\{v\in\mathbb{R}^4 \middle| Av=v\right\}$ כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א) (6 נק') הוכיחו כי W היא תת מרחב של $\mathbb{R}^4$.

ב) (6 נק') מצאו בסיס ומימד של W .

ג) (5 נק') מצאו מטריצה $B\in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ כך ש: $rank(B)=2$ וגם $(A-I)B=0$.

2) (8 נק') מצאו מטריצה X המקיימת את השוויון $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} .$$

שאלה 5

1) (19 נק') נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

א) (15 נק') מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של A. האם מטריצה A לכסינה ? נמקו את תשובתכם.

ב) (4 נק') מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש- $D=P^{-1}AP$.

2) (6 נק') הוכיחו או הפריכו על די דוגמה נגדית: אם V מרחב וקטורי, S,T תתי קבוצות לא ריקות של V המקיימות: $S\subseteq Span(T),\ T\subseteq Span(S)$, אז בהכרח $T=S$.

מחלקה להנדסת תוכנה

דף נוסחאות בקורס אלגברה ליניארית

מרחבים ווקטוריים:

מרחב ווקטורי V - קבוצה לא ריקה המקיימת את התנאים הבאים:
לכל ווקטורים $u,v,w \in V$ ולכל $k,t \in R$

1) קיים ווקטור יחיד $u+v \in V$ 2) קיים ווקטור יחיד $k \cdot u \in V$ 3) $u+v=v+u$

4) $(u+v)+w=u+(v+w)$ 5) קיים ווקטור $\overline{0} \in V$ כך ש: $u+\overline{0}=u$

6) לכל ווקטור u קיים ווקטור $-u$ כך ש: $u+(-u)=\overline{0}$ 7) $k(u+v)=ku+kv$

8) $(k+t)u=ku+tu$ 9) $k(tu)=(kt)u$ 10) $1 \cdot u = u$

R^n - מרחב כל הסדרות באורך n של מספרים ממשיים
$P(R)$ - מרחב כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים
$P_n(R)$ - מרחב הפולינומים מסדר n לכל היותר עם מקדמים ממשיים
$M_{m \times n}(R)$ - מרחב כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם מקדמים ממשיים

U תת מרחב של V אם ורק אם U תת קבוצה לא ריקה של V שהיא מרחב ווקטורי ביחס לאותן הפעולות.
U תת מרחב של V אם ורק אם
1) $\overline{0} \in U$ 2) לכל $u,v \in U$ מתקיים $u+v \in U$ 3) לכל $u \in U$ ולכל סקלר k מתקיים $ku \in U$

הווקטורים $u_1,u_2,...,u_n$ תלויים ליניארית אם ורק אם קיימים סקלרים $k_1,k_2,...,k_n$ שלא כולם אפסים כך ש:
$k_1u_1+k_2u_2+...k_nu_n=0$

$Span(u_1,...,u_n)$ - קבוצת כל הצירופים הליניאריים של הווקטורים $u_1,u_2,...,u_n$

$u_1,u_2,...,u_n$ בסיס של V אם ורק אם $u_1,u_2,...,u_n$ בלתי תלוים ליניארית ו - $Span(u_1,...,u_n)=V$

$rank(A)=\dim(RowA)=\dim(ColA)$

$RowA$ - מרחב הנפרש על ידי השורות של מטריצה A
$ColA$ - מרחב הנפרש על ידי העמודות של מטריצה A

עבור מטריצה A מסדר $m \times n$, $NulA=\left\{u \middle| u \in R^n,\ A \cdot u=\overline{0}\right\}$,
$\dim(NulA)=n-rankA$
טרנספורמציה $T:U \to V$ חד חד ערכית אם ורק אם לכל $u_1 \neq u_2$ השייכים ל U , מתקיים $T(u_1) \neq T(u_2)$
טרנספורמציה $T:U \to V$ היא טרנספורמציה על V אם ורק אם $\operatorname{Im}(T)=V$

וקטור קואורדינטות:

אם $u_1,u_2,...,u_n$ - בסיס של מרחב וקטורי V, אז לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה

$v=k_1u_1+k_2u_2+...+k_nu_n$

$[v]_{u_1,...,u_n}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\.\\.\\.\\k_n\end{pmatrix}$ - וקטור קוורדינטות של v לפי בסיס $u_1,u_2,...,u_n$

אם $B=\{b_1,b_2,..,b_n\}$ - בסיס ישן של מרחב וקטורי V, $C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ - בסיס חדש של V, אז לכל וקטור $u\in V$ מתקיים $[u]_C=\underset{C\leftarrow B}{T}\cdot[u]_B$, כאשר $\underset{C\leftarrow B}{T}$ - מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C.

מציאת מטריצת המעבר: $(C|B)\to...\to\left(I\middle|\underset{C\leftarrow B}{T}\right)$

טרנספורמציות:

עבור טרנספורמציה $T:U\to V$, $Ker(T)=\{u|u\in U,\ T(u)=\overline{0}\}$,

$\mathrm{Im}(T)=\{v|v\in V,\ for\ some\ u\in U, T(u)=v\}$

טרנספורמציה $T:U\to V$ חד חד ערכית אם ורק אם לכל $u_1\neq u_2$ השייכים ל - U, מתקיים $T(u_1)\neq T(u_2)$

טרנספורמציה $T:U\to V$ היא טרנספורמציה על V אם ורק אם $\mathrm{Im}(T)=V$

<u>הצגת טרנספורמציה ליניארית על ידי מטריצה:</u> אם $T:U\to V$ - ליניארית, $B=\{b_1,b_2,..,b_n\}$ - בסיס של U, $C=\{c_1,c_2,...,c_m\}$ - בסיס של V, אז $[T(u)]_C=A\cdot[u]_B$, כאשר $A=\left([T(b_1)]_C,...,[T(b_n)]_C\right)$

עבור $B=\{e_1,...,e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של U ו - $C=\{c_1,...,c_m\}$ הבסיס הסטנדרטי של V,

$A=\left([T(e_1)]_C,...,[T(e_n)]_C\right)$ - המטריצה הסטנדרטית של T.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים, לכסון מטריצה:

עבור אופרטור ליניארי $T:U\to U$, ווקטור $v\neq\overline{0}$ הוא ווקטור עצמי של T אם קיים סקלר k כך ש: $T(u)=ku$.

k הוא הערך העצמי המתאים לווקטור עצמי v.

מציאת ערכים עצמיים של אופרטור ליניארי בעל מטריצה סטנדרטית A : $|A-\lambda I|=0$

מציאת ווקטורים עצמיים: וקטור עצמי v הוא פתרון לא טריוויאלי למערכת הומוגנית $(A-\lambda I)\cdot v=\overline{0}$

מטריצה A לכסינה אם קיים בסיס של מרחב U המורכב מווקטורים עצמיים.

אם A לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית D (ערכים עצמיים באלכסון) ומטריצה הפיכה P (ווקטורים עצמיים בעמודות) כך ש: $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$

<u>חישוב חזקה:</u> אם A מטריצה לכסינה, אז $A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$