2º Teste

1. A distonia cervical, também chamada de torcicolo espasmódico, é uma condição dolorosa na qual os músculos do pescoço contraem-se involuntariamente, fazendo com que a cabeça torça ou vire para o lado, também pode fazer com que a cabeça se incline incontrolavelmente para frente ou para trás. Com o objetivo de analisar o efeito de um tratamento novo à base da toxina botulínica B, foram selecionados aleatoriamente pacientes e foram formados 2 grupos. A um grupo foi injetado no músculo afetado a toxina botulínica B (botox B) e ao outro grupo foi injetado um placebo. Para analisar os resultados obtidos aceda ao ficheiro "distonia2.txt", que se encontra no Moodle, e tem os seguintes campos:
   - id = identificação do paciente
   - treat = tipo de tratamento atribuído ao paciente (1= placebo, 2 = botox B)
   - age = idade do paciente, em anos
   - sex = género do paciente (1 = Feminino, 2 = Masculino)
   - twstrs_1 = pontuação atribuída aos sintomas para medir a gravidade, a dor e a incapacidade da distonia cervical antes do tratamento (pontuações mais altas significam mais sintomas)
   - twstrs_2 = pontuação atribuída aos sintomas para medir a gravidade, a dor e a incapacidade da distonia cervical depois do tratamento (pontuações mais altas significam mais sintomas)

[1.5] (a) Indique estimadores pontuais e calcule as respetivas estimativas para:
- a média e desvio padrão da idade dos pacientes;
- a percentagem de pacientes que foram injetados com um placebo.

[1.5] (b) Devido à forma como se distribuem as idades dos pacientes, considera-se que esses dados poderiam ser modelados por uma distribuição Normal de média 57 anos e desvio padrão 15 anos. Para um nível de significância de 1%, diga, justificando, se a afirmação é válida.

[2.0] (c) A distonia cervical é um distúrbio raro que, nas pessoas do género feminino, ocorre, em média, em idades superiores a 55 anos. Para um nível de significância de 3% e recorrendo à região crítica, diga se existe evidência estatística para fazer esta afirmação?

[2.0] (d) Com base num teste de hipóteses não paramétrico verifique, para um nível de significância de 10%, se nos pacientes que foram injetados com botox B ocorreu uma diminuição nos sintomas.

1. (a) Um estimador pontual para μ = idade média dos pacientes é $\bar{X}$ = média amostral da idade dos pacientes e uma sua estimativa pontual é

$$\bar{x} = 59.0781 \text{ anos}$$

Um estimador pontual para σ = desvio padrão da idade dos pacientes é S = desvio padrão amostral da idade dos pacientes e uma sua estimativa pontual é

$$s = 11.2282 \text{ anos}$$

Um estimador pontual para $p \times 100\%$ = percentagem de pacientes que foram injetados com um placebo é $p^* \times 100\%$ = percentagem amostral de pacientes que foram injetados com um placebo e uma sua estimativa pontual é

$$p^* \times 100\% = 51.5625\% \text{ pacientes}$$

(b) População: X = idade do paciente com distonia cervical

Hipóteses: $H_0 : X \sim N(57, 15)$ contra $H_1 : X \not\sim N(57, 15)$

Escolha do Teste: Como pretende-se testar se X comporta-se de acordo com uma Distribuição Normal completamente especificada, vamos recorrer ao teste de ajustamento de Kolmogorov-Smirnov.

Tomada de Decisão: Como valor$-p = 0.1268 > \alpha = 0.01$, então Não se rejeita H_0.

Conclusão: Com base na amostra e para um nível de significância de 1%, há evidência estatística que as idades dos pacientes poderiam ser modelados por uma distribuição Normal de média 57 anos e desvio padrão 15 anos. Logo a afirmação é válida.

(c) População: X_F = idade do paciente do género feminino com distonia cervical

Teste de hipóteses paramétrico para a média, μ_F = idade média do paciente do género feminino com distonia cervical

Hipóteses a testar:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_F \leq 55 \rightarrow & \text{a idade média dos pacientes do género feminino não é superior a 55 anos} \\ vs & \\ H_1 : \mu_F > 55 \rightarrow & \text{a idade média dos pacientes do género feminino é superior a 55 anos} \end{cases}$$

Tipo de teste: Teste Unilateral Direito

Estatística de Teste: População Qualquer, σ_F desconhecido e $n_F = 46 \geq 30$

$$Z = \frac{\bar{X}_F - \mu_F}{\frac{S_F}{\sqrt{n_F}}} \dot{\sim} N(0,1)$$

Estatística de teste observada sob H_0: $Z_{\text{obs}} = 2.5165$

nível de significância $= \alpha = 0.03$

Região Crítica: $RC = [z_{1-\alpha}, +\infty[= [z_{1-0.03}, +\infty[= [1.8808, +\infty[$

Decisão: como $Z_{\text{obs}} = 2.5165 \in RC$, Rejeita-se H_0

Então, com 3% de significância e com base na amostra, conclui-se que existe evidência estatística que a idade média dos pacientes do género feminino é superior a 55 anos.

(d) Populações:

Y = pontuação atribuída aos sintomas antes do tratamento pelo paciente que foi injetado com botox B

W = pontuação atribuída aos sintomas depois do tratamento pelo paciente que foi injetado com botox B

Amostras: amostras emparelhadas

Seja $D = W - Y$

Teste de hipóteses não paramétrico para a mediana $= Mediana_D$

Hipóteses a testar:

$$\begin{cases} H_0 : Mediana_D \geq 0 \rightarrow & \text{nos pacientes injetados com botox B não ocorreu uma diminuição nos sintomas} \\ vs & \\ H_1 : Mediana_D < 0 \rightarrow & \text{nos pacientes injetados com botox B ocorreu uma diminuição nos sintomas} \end{cases}$$

Escolha do Teste: Como as amostras são emparelhadas, então o teste de hipóteses não paramétrico adequado é o teste de Wilcoxon.

Tipo de teste: Teste Unilateral Esquerdo

nível de significância $= \alpha = 0.10$

Tomada de decisão: Como valor$-p = 0.05454 \leq \alpha = 0.10$, Rejeita-se H_0.

Com 10% de significância e com base nas amostras, há evidência estatística que nos pacientes que foram injetados com botox B ocorreu uma diminuição nos sintomas.

2. Para auxiliar um grupo de investigadores no seu estudo sobre a utilização e percepção de cores, responda às seguintes questões.

(a) Seja X o tempo, em segundos, que demoram a efetuar uma tarefa com um monitor colorido e seja Y o tempo, em segundos, que demoram a efetuar uma tarefa com um monitor a preto e branco. Pretende-se determinar se a utilização de monitores coloridos aumentam a velocidade com que se efetua uma tarefa em relação à utilização de monitores a preto e branco. Para tal colocaram-se 8 pessoas a efetuar uma determinada tarefa num computador com monitor colorido e 7 pessoas a realizar a mesma tarefa num computador com monitor a preto e branco. Os tempos, em segundos, que demoraram a efetuar a tarefa estão registados na tabela seguinte:

monitores coloridos	502	488	494	481	497	488	494	489
monitores a preto e branco	510	498	512	497	494	495	508	

[1.5] i. Mostre que, para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que X e Y seguem uma distribuição Normal.

[2.0] ii. Interprete e teste as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \sigma_x = \sigma_y \quad \text{contra} \quad H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y$$

Considere um nível de significância de 5% e tome a decisão com base na região critica.

[2.0] iii. Com base num teste de hipóteses paramétrico, diga a partir de que nível de significância, em média, a velocidade com que se efetua uma tarefa é superior quando se utiliza monitores coloridos em relação à utilização de monitores a preto e branco.

[2.0] iv. Da informação recolhida afirma-se: "Com $(1-\alpha) \times 100\%$ de confiança, o verdadeiro desvio padrão do tempo que se demora a realizar uma tarefa com um monitor a preto e branco é $]4.8662, k[$". Qual o grau de confiança associado a este intervalo e qual o valor de k?

(b) Sabe-se que 8% dos homens sofrem de alguma forma de daltonismo.

[1.5] i. Calcule a probabilidade de que numa amostra aleatória de 250 homens, pelo menos 10% sofra de algum tipo de daltonismo.

[2.0] ii. Para confirmar que a percentagem indicada de homens que sofrem de alguma forma de daltonismo é válida, pretende-se recolher uma amostra e construir um intervalo de confiança a 99% para essa percentagem. Qual a dimensão da amostra a recolher de modo a garantir que a margem de erro não ultrapassa os 2%.

[2.0] iii. A forma mais comum de daltonismo é a incapacidade de distinguir o vermelho do verde. Para analisar esta forma de daltonismo, 850 homens e 2000 mulheres foram selecionados aleatoriamente e testados em relação a este tipo de daltonismo. Foram classificados com este tipo de daltonismo 75 homens e 5 mulheres. Com base num intervalo de confiança a 90% mostre, justificando, que existem diferenças significativas nas percentagens de daltonismo entre homens e mulheres.

2. (a) Populações:

X = tempo, em segundos, que demoram a efetuar uma tarefa com um monitor colorido

Y = tempo, em segundos, que demoram a efetuar uma tarefa com um monitor a preto e branco.

Amostras: amostras aleatórias independentes, de dimensão $n_x = 8$ e $n_y = 7$

i. Hipóteses: $H_0 : X \sim Normal \quad \text{contra} \quad H_1 : X \nsim Normal$

Escolha do Teste: Como pretende-se testar se X comporta-se de acordo com uma Distribuição Normal (sem mais informação) e $n_x = 8 < 50$, vamos recorrer ao teste de ajustamento Shapiro-Wilk.

Tomada de Decisão: Como valor$-p = 0.9002 > \alpha = 0.05$, então Não se Rejeita H_0.

Conclusão: Com base na amostra e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que os dados podem vir de uma população com distribuição Normal.

Hipóteses: $H_0 : Y \sim Normal \quad \text{contra} \quad H_1 : Y \nsim Normal$

Escolha do Teste: Como pretende-se testar se Y comporta-se de acordo com uma Distribuição Normal (sem mais informação) e $n_y = 7 < 50$, vamos recorrer ao teste de ajustamento Shapiro-Wilk.

Tomada de Decisão: Como valor$-p = 0.1148 > \alpha = 0.05$, então Não se Rejeita H_0.

Conclusão: Com base na amostra e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que os dados podem vir de uma população com distribuição Normal.

ii. Interpretação das Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x = \sigma_y \rightarrow & \text{o desvio padrão do tempo a efetuar uma tarefa com um monitor colorido é igual} \\ & \text{desvio padrão do tempo a efetuar uma tarefa com um monitor a preto e branco} \\ vs & \\ H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y \rightarrow & \text{o desvio padrão do tempo a efetuar uma tarefa com um monitor colorido não é igual} \\ & \text{desvio padrão do tempo a efetuar uma tarefa com um monitor a preto e branco} \end{cases}$$

Hipóteses a testar:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_x = \sigma_y \\ vs \\ H_1: \sigma_x \neq \sigma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ vs \\ H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1 \\ vs \\ H_1: \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq 1 \end{cases}$$

Tipo de teste: Teste Bilateral
Estatística de Teste: Populações Normais (alínea (a)i.) e Amostras independentes

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} \times \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \sim F_{(n_x-1, n_y-1)}$$

Estatística de teste observada sob H_0: $F_{\text{obs}} = 0.7116$
nível de significância $= \alpha = 0.05$
Região Crítica:

$$RC = \left[0, f_{\frac{0.05}{2}, 8-1, 7-1}\right] \cup \left[f_{1-\frac{0.05}{2}, 8-1, 7-1}, +\infty\right[= [0, 0.1954] \cup [5.6955, +\infty[$$

Decisão: como $F_{\text{obs}} = 0.7116 \notin RC$, Não se rejeita H_0
Conclusão: Com base nas amostras e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que o desvio padrão do tempo que demoram a efetuar uma tarefa com um monitor colorido é igual ao desvio padrão do tempo que demoram a efetuar uma tarefa com um monitor a preto e branco.

iii. Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \leq \mu_y \rightarrow & \text{a velocidade média com que se efetua uma tarefa não é superior quando se utiliza} \\ & \text{monitores coloridos em relação à utilização de monitores a preto e branco} \\ \text{contra} & \\ H_1: \mu_x > \mu_y \rightarrow & \text{a velocidade média com que se efetua uma tarefa é superior quando se utiliza} \\ & \text{monitores coloridos em relação à utilização de monitores a preto e branco} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \leq \mu_y \\ vs \\ H_1: \mu_x > \mu_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_x - \mu_y \leq 0 \\ vs \\ H_1: \mu_x - \mu_y > 0 \end{cases}$$

nível de significância $= \alpha = 0.05$
Tipo de teste: Teste Unilateral Direito
Estatística de Teste:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Populações Normais (alínea (a)i.)} \\ \sigma_x \text{ e } \sigma_y \text{ desconhecidos} \\ \sigma_x = \sigma_y \text{ (alínea (a)ii.)} \end{array}\right\} T = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)\times\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}} \sim t_{(n_x+n_y-2)}$$

Tomada de decisão: valor$-p = 0.993$.
Como rejeita-se H_0 se valor$-p \leq \alpha$, então para $\alpha \geq 0.993$ rejeita-se a hipótese nula. Portanto, para $\alpha \geq 0.993$ a velocidade média com que se efetua uma tarefa é superior quando se utiliza monitores coloridos em relação à utilização de monitores a preto e branco.

iv. População Normal (alínea (a)i.), então o intervalo de confiança para σ_y, o verdadeiro desvio padrão do tempo que se demora a realizar uma tarefa com um monitor a preto e branco, é:

$$\left]\sqrt{\frac{(n_y-1)\,s_y^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2};n_y-1}}}, \sqrt{\frac{(n_y-1)\,s_y^2}{x^2_{\frac{\alpha}{2};n_y-1}}}\right[$$

Como sabemos que

$$\left]\sqrt{\frac{(n_y-1)\,s_y^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2};n_y-1}}}, \sqrt{\frac{(n_y-1)\,s_y^2}{x^2_{\frac{\alpha}{2};n_y-1}}}\right[=]4.8662, k[$$

tem-se

$$\sqrt{\frac{(n_y-1)\,s_y^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2};n_y-1}}}=4.8662 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(7-1)\times 59}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2};7-1}}}=4.8662 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2_{1-\frac{\alpha}{2};7-1}=14.9494 \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=F\,(14.9494) \underset{X^2\sim\chi^2_{(6)}}{\Leftrightarrow} 1-\frac{\alpha}{2}=0.9793 \Leftrightarrow \alpha=0.0413$$

Então o grau de confiança do intervalo é $(1-0.0413)\times 100\% = 95.87\%$

E o valor de k é

$$k=\sqrt{\frac{(7-1)\times 59}{x^2_{\frac{0.0413}{2};7-1}}}=17.5554$$

(b) Seja:

$p=0.08$ a proporção (populacional) de homens que sofrem de alguma forma de daltonismo

i. População Binomial e Amostra $n=250\geq 30$, então a Distribuição Amostral é

$$Z=\frac{p^*-p}{\sqrt{\frac{p\times q}{n}}}\stackrel{.}{\sim} N\,(0,1)$$

Então:

$$P\,(p^*\geq 0.10)=1-P\,(p^*<0.10)=1-P\left(Z<\frac{0.10-0.08}{\sqrt{\frac{0.08\times(1-0.08)}{250}}}\right)=1-P\,(Z<1.1656) \underset{\text{v.a. contínua}}{=}$$

$$=1-\Phi\,(1.1656)=0.1219$$

ii. Pretende-se determinar a dimensão da amostra n de modo a construir um intervalo de confiança a 99% para p com uma margem de erro que não ultrapassa os 2%.

População Binomial e Amostra $n\geq 30$, então o intervalo de confiança para a proporção é:

$$\left]p^*-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*\times q^*}{n}};p^*+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*\times q^*}{n}}\right[$$

Já sabemos que $n\geq 30$, agora vamos calcular a margem de erro:

$$\text{margem de erro}=\frac{\left(p^*+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*\times q^*}{n}}\right)-\left(p^*-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*\times q^*}{n}}\right)}{2}=z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*\times q^*}{n}}$$

logo:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*\times q^*}{n}}\leq 0.02$$

Considerando $p^*=0.5$, o valor que dá origem ao maior n, visto não se conhecer a estimativa da proporção:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{n}}\leq 0.02$$

Como pretendemos atribuir um grau de confiança de 99%, tem-se:
grau de confiança $=1-\alpha=0.99$
nível de significância $=\alpha=0.01$ portanto

$$z_{1-\frac{0.01}{2}}\sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{n}}\leq 0.02 \Leftrightarrow z_{0.995}\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{n}}\leq 0.02 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2.5758\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\leq 0.02 \Leftrightarrow n\geq\left(\frac{2.5758\times 0.5}{0.02}\right)^2 \Leftrightarrow n\geq 4146.81$$

Portanto a dimensão da amostra é

$$n\geq 4147$$

iii. Populações Binomiais com

p_1 = proporção de homens com a forma mais comum de daltonismo (incapacidade de distinguir o vermelho do verde)

p_2 = proporção de mulheres com a forma mais comum de daltonismo (incapacidade de distinguir o vermelho do verde)

Amostras aleatórias independentes:

$n_1 = 850$ e $p_1^* = \frac{75}{850} = 0.0882$

$n_2 = 2000$ e $p_2^* = \frac{5}{2000} = 0.0025$

Populações Binomiais e Amostras aleatórias independentes $n_1 = 850 \geq 30$ e $n_2 = 2000 \geq 30$, então o intervalo de confiança a $(1-\alpha) \times 100\%$ para a diferença de proporções, $p_1 - p_2$, é:

$$\left](p_1^* - p_2^*) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1^* q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^* q_2^*}{n_2}} ; (p_1^* - p_2^*) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1^* q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^* q_2^*}{n_2}} \right[$$

grau de confiança $= 1 - \alpha = 0.90$

nível de significância $= \alpha = 0.10$

Portanto, com base nas amostras recolhidas, o intervalo de confiança a 90% para a diferença de proporções, $p_1 - p_2$, é:

$$]0.0696, 0.1018[$$

ou seja, o intervalo de confiança a 90% para a diferença de percentagens, $(p_1 - p_2) \times 100\%$, é:

$$]6.96, 10.18[$$

Como $0 \notin]6.96, 10.18[$, então existem diferenças significativas nas percentagens de daltonismo entre homens e mulheres.

Fim do Teste