MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Testes de Hipóteses Paramétricos

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
Instituto Politécnico de Setúbal
2023-2024

Testes de Hipóteses Paramétricos

São métodos que possibilitam validar ou não determinadas afirmações sobre os parâmetros de uma população.

Objetivo

Confirmar ou rejeitar um valor hipotético de um parâmetro θ de uma população, confrontado com a informação recolhida de uma amostra.

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

1. São definidas duas **hipóteses**:
   - **Hipótese Nula** $= H_0$ - é a hipótese que reflete a situação em que não há mudança, diz-se que traduz a situação estacionária, sendo usual colocar nesta hipótese a igualdade.
   - **Hipótese Alternativa** $= H_1$ - é a hipótese que se contrapõe à hipótese nula, a mudança que se pensa que ocorreu.
2. É definida uma **Estatística Teste**, que é a base da realização do teste e é construída a partir de uma amostra.

Observação: As estatísticas utilizadas nos testes de hipóteses são as estatísticas definidas anteriormente (indicadas no **formulário**).

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

3. A **regra de decisão** define as condições de rejeição ou não rejeição da hipótese testada. São construídas duas regiões:
   - **Região de Aceitação** $= RA$ - conjunto de valores observados para os quais H_0 é admissível.
   - **Região de Rejeição ou Região Crítica** $= RC$ - conjunto de valores observados para os quais H_0 não é admissível.

   O resultado do teste de hipóteses consiste na rejeição ou não rejeição de H_0, sendo esta decisão tomada com base na amostra.

   Seja θ o parâmetro da população sobre o qual se construiu as hipóteses e seja $\widehat{\theta}$ um estimador de θ. Com base na amostra recolhida calcula-se $\widehat{\theta}$ e, supondo H_0 verdadeira, calcula-se o valor observado da estatística de teste, $Estatística\_de\_Teste_{obs}$, e toma-se uma decisão:

$$\begin{cases} \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RC \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \\ \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RA \Rightarrow \text{não rejeitar } H_0. \end{cases}$$

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

4. **Erros de decisão** - um teste de hipóteses nem sempre conduz a decisões corretas, a análise de uma amostra pode falsear as conclusões quanto à população.

		Situação Verdadeira	
		H_0 verdadeira	**H_0 falsa**
Decisão Tomada	**Não rejeitar H_0**	decisão correta	decisão errada
	Rejeitar H_0	decisão errada	decisão correta

Erro de 1^a espécie - nível de significância do teste

$$\alpha = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right]$$

Erro de 2^a espécie

$$\beta = P\left[\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\right] = P\left[\text{não rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadeira}\right]$$

Na área da medicina,

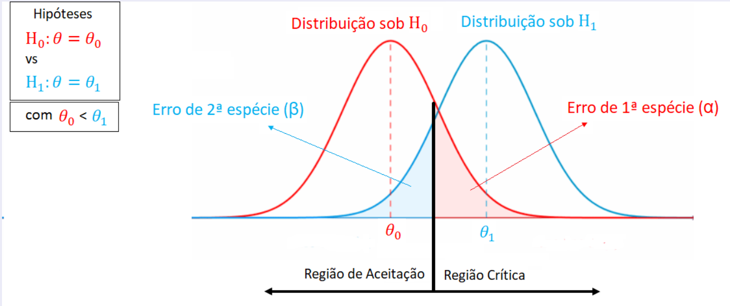
- o erro de 1ª espécie, α, corresponde aos "falsos positivos",
- o erro de 2ª espécie, β, corresponde aos "falsos negativos".

Na área criminal,

- o erro de 1ª espécie, α, corresponde a condenar um inocente,
- o erro de 2ª espécie, β, corresponde a considerar inocente quem é culpado.

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

O objetivo é minimizar ambos os erros, no entanto como α e β variam em sentidos contrários, tal não é possível.



O que se faz é controlar o erro de 1^a espécie, isto é, fixa-se o α e tenta-se minimizar o β.

Outra possibilidade seria fixar o α e o β e deixar variar o n, no entanto, leva a n's muito elevados, o que não é conveniente.

Cálculo das **probabilidades das decisões corretas**:

- $1 - \alpha = P\left[\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right]$

- Potência do Teste - **Função Potência**

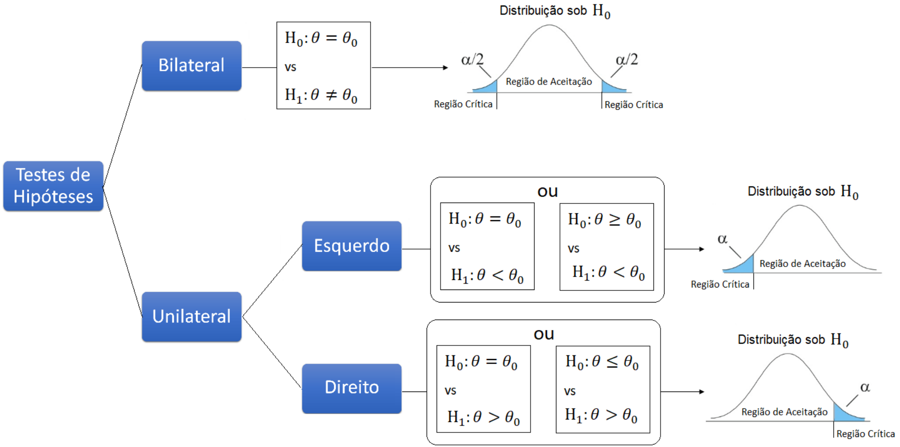
$$\pi = 1 - \beta =$$
$$= P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\right] = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadeira}\right]$$

  - Esta probabilidade é função do grau de falsidade de H_0, quanto mais falso for H_0 maior é esta probabilidade.
  - Quanto maior o valor da função potência menor o erro de 2^a espécie, maior a qualidade do teste.

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

5. **Tipos de Testes de Hipóteses** - de acordo com o número de elementos do parâmetro em análise, pode-se distinguir três formas de especificar H_0 e H_1:
   - hipótese simples contra hipótese simples:
     $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta = \theta_1$
     - se $\theta_0 < \theta_1$ - Teste unilateral direito;
     - se $\theta_0 > \theta_1$ - Teste unilateral esquerdo.
   - hipótese simples contra hipótese composta:
     - $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$ - Teste unilateral direito;
     - $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$ - Teste unilateral esquerdo;
     - $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$ - Teste bilateral;
   - hipótese composta contra hipótese composta:
     - $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$ - Teste unilateral direito;
     - $H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$ - Teste unilateral esquerdo;

Nota: A hipótese composta contra hipótese simples: $H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta = \theta_0$ não costuma ser usada pois, habitualmente, coloca-se em H_0 a hipótese que inclui a igualdade.


Testes de Hipóteses
Bilateral
$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$
Distribuição sob H_0
$\alpha/2$
$\alpha/2$
Região de Aceitação
Região Crítica
Região Crítica
Unilateral
Esquerdo
ou
$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$
$H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$
Distribuição sob H_0
α
Região de Aceitação
Região Crítica
Direito
ou
$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$
$H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$
Distribuição sob H_0
α
Região de Aceitação
Região Crítica

Metodologia a utilizar num Teste de Hipóteses

1. Formular as hipóteses;
2. Fixar o erro de 1^a espécie ou nível de significância do teste
$$\alpha = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right];$$
3. Escolher o estimador pontual $\widehat{\theta}$ e a respetiva Estatística de Teste (ou variável fulcral) - determinar a distribuição amostral;
4. Calcular a região crítica (RC) e a região de aceitação (RA) a partir do nível de significância do teste (α);
5. Com base na amostra recolhida e supondo H_0 verdadeira, calcula-se o valor observado da estatística de teste, $Estatística\_de\_Teste_{obs}$, e toma-se uma decisão:
$$\begin{cases} \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RC \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \\ \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RA \Rightarrow \text{não rejeitar } H_0. \end{cases}$$

Na prática, em vez de calcular a região crítica (RC) e a região de aceitação (RA), é usual calcular-se o **Valor-p** (ou **p-value**).

Valor-p (ou p-value)

É a probabilidade associada ao valor da estatística de teste, considerando H_0 verdadeira.

- Se o valor-p for pequeno significa que, no caso de H_0 ser verdadeira, estamos perante um evento muito raro, pouco provável de ocorrer, então deve optar-se por rejeitar H_0.

  Portanto, o valor-p também permite tomar decisões:

  - se valor-p $\leq \alpha$, então rejeita-se H_0
  - se valor-p $> \alpha$, então não se rejeita H_0

Valor-p (ou p-value)

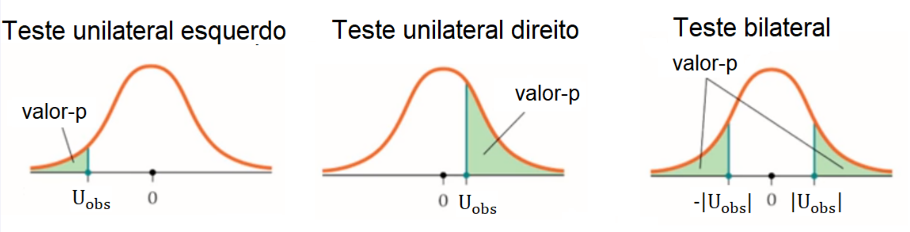
É a probabilidade associada ao valor da estatística de teste, considerando H_0 verdadeira.

- Considerando que H_0 é verdadeira, o valor-p indica a probabilidade da estimativa da estatística de teste ocorrer.
- O valor-p **não** é a probabilidade de H_0 ser verdadeira.
- O valor-p pode ser visto como o menor valor de α (nível de significância) para o qual os dados observados indicam que H_0 deve ser rejeitada.

Valor-p (ou p-value) - Distribuições Simétricas

Considere uma estatística U cuja distribuição amostral é Normal Reduzida ou t de Student (**distribuições simétricas**) e seja U_{obs} uma sua estimativa calculada com base na amostra recolhida e sob a hipótese H_0:

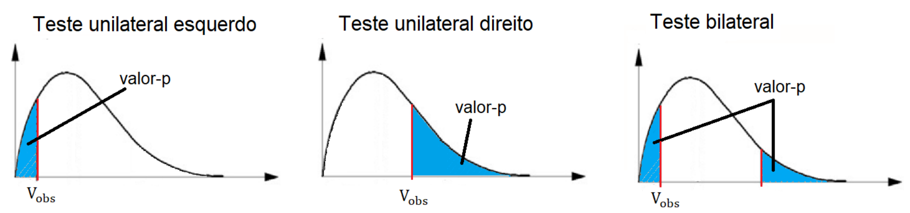
- Teste unilateral esquerdo: **valor-p** $= P\,(U \leq U_{\text{obs}})$;
- Teste unilateral direito: **valor-p** $= P\,(U \geq U_{\text{obs}})$;
- Teste bilateral: **valor-p** $= 2 \times P\,(U \geq |U_{\text{obs}}|)$.



Valor-p (ou p-value) - Distribuições Assimétricas

Considere uma estatística V cuja distribuição amostral é Qui-Quadrado ou F de Snedecor (**distribuições assimétricas**) e seja V_{obs} uma sua estimativa calculada com base na amostra recolhida e sob a hipótese H_0:

- Teste unilateral esquerdo: **valor-p** $= P\left(V \leq V_{\text{obs}}\right)$;
- Teste unilateral direito: **valor-p** $= P\left(V \geq V_{\text{obs}}\right)$;
- Teste bilateral: **valor-p** $= 2 \times min\left\{P\left(V \leq V_{\text{obs}}\right), P\left(V \geq V_{\text{obs}}\right)\right\}$.



Testes de Hipóteses Paramétricos

De acordo com as distribuições amostrais estudadas, podem-se definir os seguintes testes de hipóteses:

- Teste de Hipóteses para a média μ
- Teste de Hipóteses para a diferença de médias $\mu_1 - \mu_2$

- Teste de Hipóteses para a proporção p
- Teste de Hipóteses para a diferença de proporções $p_1 - p_2$

- Teste de Hipóteses para a variância σ^2
- Teste de Hipóteses para o quociente de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Testes de Hipóteses Paramétricos no R

- Para as médias (uma média ou diferença de médias):
  - z.test() (é necessário instalar o package "BSDA")
  - t.test()
- Para variâncias:
  - uma variância: varTest() (é necessário instalar o package "EnvStats")
  - quociente de variâncias: var.test()
- Para as proporções (uma proporção ou diferença de proporções):
  - z.test() (é necessário instalar o package "BSDA")

Exemplo 1

A associação dos proprietários de indústrias metalúrgicas está muito preocupada com o tempo perdido com acidentes de trabalho, sabe-se que, por ano, o número de horas/trabalhador perdido por acidentes de trabalho segue um comportamento Normal com média de 60 horas/trabalhador e desvio padrão de 20 horas/trabalhador. Tentou-se um programa de prevenção de acidentes, após o qual foi recolhida uma amostra de nove indústrias e medido o número de horas/trabalhador perdido por acidentes:

$$(25.8, 76.0, 59.6, 61.4, 51.3, 66.2, 30.4, 37.5, 57.2)$$

Teste, a um nível de significância de 5%, se, em média, há evidência de melhoria.

Exemplo 1

A associação dos proprietários de indústrias metalúrgicas está muito preocupada com o tempo perdido com acidentes de trabalho, sabe-se que, por ano, o número de horas/trabalhador perdido por acidentes de trabalho segue um comportamento Normal com média de 60 horas/trabalhador e desvio padrão de 20 horas/trabalhador. Tentou-se um programa de prevenção de acidentes, após o qual foi recolhida uma amostra de nove indústrias e medido o número de horas/trabalhador perdido por acidentes:

$$(25.8, 76.0, 59.6, 61.4, 51.3, 66.2, 30.4, 37.5, 57.2)$$

Teste, a um nível de significância de 5%, se, em média, há evidência de melhoria.

- **População**

X = tempo perdido com acidentes de trabalho

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

média populacional $= \mu = 60$
desvio padrão populacional $= \sigma = 20$

- **Amostra Aleatória**

dimensão $= n = 9$

estimativas:

média amostral $= \bar{x} = 51.711$
desvio padrão amostral $= s = 17.006$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 60 \rightarrow \quad \text{não há melhoria} \\ \text{contra} \\ H_1 : \mu < 60 \rightarrow \quad \text{há melhoria} \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste unilateral esquerdo

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

- **Estatística de Teste:**

  Como a População é Normal e $\sigma = 20$ conhecido tem-se:

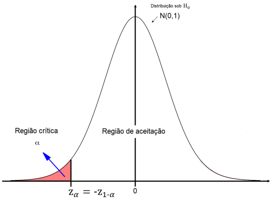
Condições	**Distribuição Amostral**	**R**
População Normal σ conhecido	$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$	z.test() library(BSDA)

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

  sob a hipótese H_0 tem-se $\mu = 60$

$$Z_{\text{obs}} = \frac{51.711 - 60}{\frac{20}{\sqrt{9}}} = -1.2433$$

- **Resolução 1: Região Crítica:**

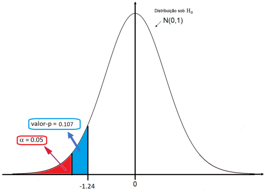


$$RC =]-\infty, z_\alpha] =]-\infty, z_{0.05}] =$$

$$=]-\infty, -1.6449]$$

- **Tomar a decisão:** Como $-1.2433 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\text{valor-p} = P\left(Z \leq -1.2433\right) =$$
$$= \Phi\left(-1.2433\right) =$$
$$= 0.1069$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.1069 > 0.05$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 5%, não há evidência estatística que tenha ocorrido melhorias após o programa de prevenção de acidentes.

Exemplo 2

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

1. Teste, a um nível de significância de 5%, se a empresa deve adquirir o novo processo de fabrico de embalagens, sabendo que a empresa não está interessada em mudar o processo de fabrico se a percentagem de defeitos for superior ao anunciado.

Exemplo 2

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

1. Teste, a um nível de significância de 5%, se a empresa deve adquirir o novo processo de fabrico de embalagens, sabendo que a empresa não está interessada em mudar o processo de fabrico se a percentagem de defeitos for superior ao anunciado.

- **População**

$$X \sim \mathit{Binomial}$$

proporção populacional $= p = 0.01$

- **Amostra Aleatória**

dimensão $= n = 1000$

<u>estimativa:</u>

proporção amostral $= p^* = 0.014$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.01 \rightarrow & \text{a empresa } \textbf{deve} \text{ adquirir o novo processo de fabrico} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p > 0.01 \rightarrow & \text{a empresa } \textbf{não deve} \text{ adquirir o novo processo de fabrico} \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste unilateral direito

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

- **Estatística de Teste:**

  Como a População é Binomial, então é obrigatório recolher uma amostra de dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n = 1000 \geq 30$, então:

Condições	**Distribuição Amostral**	**R**
$n \geq 30$	$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$	z.test() library(BSDA)

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**
  sob a hipótese H_0 tem-se $p = 0.01$

$$Z_{\text{obs}} = \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times (1-0.01)}{1000}}} = 1.2713$$

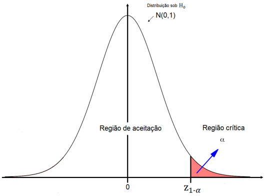
Tal como vimos nos intervalos e confiança, se pretender usar a função z.test do R, é necessário:

- construir o vetor da amostra onde o sucesso $= 1$ e o insucesso $= 0$
- considerar $\sigma = \sqrt{pq} = \sqrt{p \times (1 - p)}$

Neste caso fica:

- número de defeitos observados: $0.014 \times 1000 = 14$ defeitos
- amostra terá 14 uns e $1000 - 14 = 986$ zeros
- $\sigma = \sqrt{pq} = \sqrt{p \times (1 - p)} = \sqrt{0.01 \times (1 - 0.01)}$

- **Resolução 1: Região Crítica:**

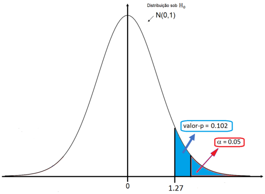


$$RC = [z_{1-\alpha}, +\infty[= [z_{1-0.05}, +\infty[=$$

$$= [z_{0.95}, +\infty[= [1.645, +\infty[$$

- **Tomar a decisão:** Como $1.2713 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= P\left(Z \geq 1.2713\right) = \\ &= 1 - P\left(Z < 1.2713\right) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} \\ &= 1 - \Phi\left(1.2713\right) = \\ &= 1 - 0.8982 = 0.1018 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.1018 > 0.05$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que a empresa deve adquirir o novo processo de fabrico.

Exemplo 2

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

2. Caso o novo processo de fabrico anunciasse uma proporção de embalagens com defeito inferior a 0.01, que teste utilizaria para testar a veracidade desta afirmação? Qual a decisão para um nível de significância de 10%?

Exemplo 2

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

2. Caso o novo processo de fabrico anunciasse uma proporção de embalagens com defeito inferior a 0.01, que teste utilizaria para testar a veracidade desta afirmação? Qual a decisão para um nível de significância de 10%?

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p < 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p < 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste unilateral esquerdo

- **nível de significância** $= \alpha = 0.10$

- **Estatística de Teste:**

  Como a População é Binomial, então é obrigatório recolher uma amostra de dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n = 1000 \geq 30$, então:

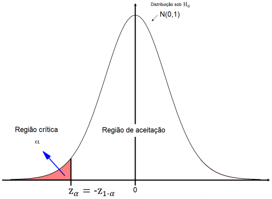
Condições	**Distribuição Amostral**	**R**
$n \geq 30$	$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$	z.test() library(BSDA)

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

  sob a hipótese H_0 tem-se $p = 0.01$

$$Z_{\text{obs}} = \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times (1 - 0.01)}{1000}}} = 1.2713$$

- **Resolução 1: Região Crítica:**

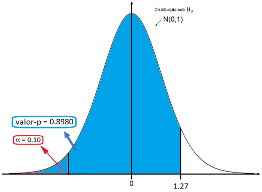


$$RC =]-\infty, z_\alpha] =]-\infty, z_{0.10}] =$$

$$=]-\infty, -1.282]$$

- **Tomar a decisão:** Como $1.2713 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\text{valor-p} = P\left(Z \leq 1.2713\right) = \Phi\left(1.2713\right) =$$

$$= 0.8982$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.8982 > 0.10$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 10%, há evidência estatística que a afirmação não é verdadeira.

Exemplo 2

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

3. Teste, a um nível de significância de 5%, a hipótese da proporção de embalagens com defeito publicitada ser verdadeira ou falsa.

Exemplo 2

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

3. Teste, a um nível de significância de 5%, a hipótese da proporção de embalagens com defeito publicitada ser verdadeira ou falsa.

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p \neq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p \neq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste bilateral

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

- **Estatística de Teste:**

  Como a População é Binomial, então é obrigatório recolher uma amostra de dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n = 1000 \geq 30$, então:

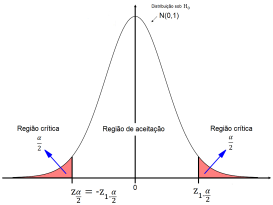
Condições	**Distribuição Amostral**	**R**
$n \geq 30$	$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$	z.test() library(BSDA)

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

  sob a hipótese H_0 tem-se $p = 0.01$

$$Z_{\text{obs}} = \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times (1 - 0.01)}{1000}}} = 1.2713$$

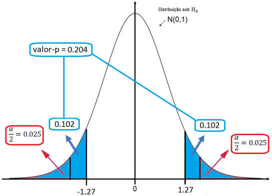
- **Resolução 1: Região Crítica:**



$$\begin{aligned} RC &= \left]-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[= \\ &= \left]-\infty, -z_{1-\frac{0.05}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{0.05}{2}}, +\infty\right[= \\ &= \left]-\infty, -z_{0.975}\right] \cup \left[z_{0.975}, +\infty\right[= \\ &= \left]-\infty, -1.960\right] \cup \left[1.960, +\infty\right[\end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $1.2713 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= 2 \times P\left(Z \geq |1.2713|\right) = \\ &= 2 \times P\left(Z \geq 1.2713\right) = \\ &\underset{\text{v.a. contínua}}{=} 2 \times \left(1 - \Phi\left(1.2713\right)\right) = \\ &= 2 \times (1 - 0.8982) = 0.2036 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.2036 > 0.05$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que a afirmação é verdadeira.

Observação:

No caso dos **testes de hipóteses bilaterais** há a possibilidade de se recorrer aos **intervalos de confiança** para a tomada de decisão. A região de aceitação de um teste de hipóteses bilateral corresponde ao intervalo de confiança, a única diferença está na escala utilizada. Nos testes de hipóteses bilaterais estamos a usar a escala da estatística de teste e nos intervalos de confiança utiliza-se a escala dos dados.

Se na alínea (3) não dissesse para fazer um teste, podíamos ter construído um Intervalo de confiança a 95% para a proporção:

$$\left]0.014 - 1.960 \times \sqrt{\frac{0.014 \times (1 - 0.014)}{1000}}, 0.014 + 1.960 \times \sqrt{\frac{0.014 \times (1 - 0.014)}{1000}}\right[=$$

$$=]0.0067, 0.0213[$$

Com 95% de confiança, a afirmação deve ser verdadeira pois 0.01 pertence ao intervalo de confiança.

Exemplo 3

Num exame de leitura numa escola do 1º ciclo obteve-se as notas (de 0 a 100) apresentadas nas seguintes tabelas de frequências:

meninos	
nota	frequência absoluta
64	9
72	16
74	2
90	5
	32

meninas	
nota	frequência absoluta
70	8
74	22
76	2
90	4
	36

Teste, ao nível de significância de 0.01, a hipótese de que, em média, não há diferença ao nível de leitura entre as meninas e os meninos do 1º ciclo.

Exemplo 3

Num exame de leitura numa escola do 1º ciclo obteve-se as notas (de 0 a 100) apresentadas nas seguintes tabelas de frequências:

meninos	
nota	frequência absoluta
64	9
72	16
74	2
90	5
	32

meninas	
nota	frequência absoluta
70	8
74	22
76	2
90	4
	36

Teste, ao nível de significância de 0.01, a hipótese de que, em média, não há diferença ao nível de leitura entre as meninas e os meninos do 1º ciclo.

Atenção:

- Como as amostras são amostras aleatórias **independentes**, então o teste de hipóteses a efetuar deve ser para $\mu_1 - \mu_2$ usando como estimador pontual $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ $\rightarrow$ estamos interessados na diferença das médias.

- **População 1**

X_1 = nota no exame de leitura das meninos

média populacional $= \mu_1$
desvio padrão populacional $= \sigma_1$

- **População 2**

X_2 = nota no exame de leitura das meninas

média populacional $= \mu_2$

desvio padrão populacional $= \sigma_2$

Amostras independentes

- **Amostra Aleatória da População 1**

dimensão $= n_1 = 32$

estimativas:

média amostral $= \overline{x}_1 = 72.6875$

desvio padrão amostral $= s_1 = 8.4029$

- **Amostra Aleatória da População 2**

dimensão $= n_2 = 36$

estimativas:

média amostral $= \overline{x}_2 = 75$

desvio padrão amostral $= s_2 = 5.6669$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \rightarrow & \textbf{não há} \text{ diferenças ao nível da leitura} \\ \text{vs} & \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \rightarrow & \textbf{há} \text{ diferenças ao nível da leitura} \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste bilateral

- **nível de significância** $= \alpha = 0.01$

- **Estatística de Teste:**

  Como as Populações não têm distribuição conhecida, então é necessário que as amostras tenham dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n_1 = 32 \geq 30$ e $n_2 = 36 \geq 30$ então pode-se considerar que as Populações são aproximadamente Normais (Teorema do Limite Central), então basta ver qual é a variável fulcral:

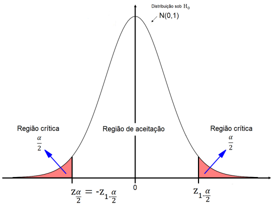
Condições	**Distribuição amostral**	**R**
Populações Quaisquer σ_1 e σ_2 desconhecidos Amostras Independentes $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$	$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)$	z.test() library(BSDA)

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

  sob a hipótese H_0 tem-se $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$Z_{\text{obs}} = \frac{(72.6875 - 75) - 0}{\sqrt{\frac{8.4029^2}{32} + \frac{5.6669^2}{36}}} = -1.31$$

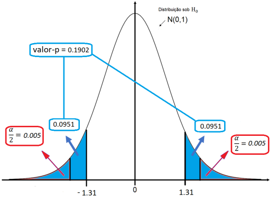
- **Resolução 1: Região Crítica:**



$$\begin{aligned} RC &= \left]-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[= \\ &= \left]-\infty, -z_{1-\frac{0.01}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{0.01}{2}}, +\infty\right[= \\ &= \left]-\infty, -z_{0.995}\right] \cup \left[z_{0.995}, +\infty\right[= \\ &= \left]-\infty, -2.576\right] \cup \left[2.576, +\infty\right[\end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $-1.31 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= 2 \times P\left(Z \geq |-1.31|\right) = \\ &= 2 \times P\left(Z \geq 1.31\right) = \\ &\underset{\text{v.a. contínua}}{=} 2 \times \left(1 - \Phi\left(1.31\right)\right) = \\ &= 2 \times \left(1 - 0.9049\right) = 0.19 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.19 > 0.01$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 1%, não há evidência estatística que, em média, haja diferenças ao nível da leitura entre as meninas e os meninos do 1º ciclo.

Exemplo 4

Para verificar a importância de uma determinada campanha de publicidade nas vendas de certo produto de uma marca de laticínios foram registadas as vendas semanais antes e depois da referida campanha:

Loja	1	2	3	4	5	6	7
antes	13	18	14	16	19	12	22
depois	16	24	18	14	26	17	29

Suponha que as vendas têm distribuição normal. Considerando um nível de significância de 5%, qual seria a conclusão sobre a eficiência da campanha?

Exemplo 4

Para verificar a importância de uma determinada campanha de publicidade nas vendas de certo produto de uma marca de laticínios foram registadas as vendas semanais antes e depois da referida campanha:

Loja	1	2	3	4	5	6	7
antes	13	18	14	16	19	12	22
depois	16	24	18	14	26	17	29

Suponha que as vendas têm distribuição normal. Considerando um nível de significância de 5%, qual seria a conclusão sobre a eficiência da campanha?

Atenção:

- Como as amostras são amostras aleatórias **emparelhadas**, então é necessário construir a amostra das diferenças, $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ e o teste de hipóteses a efetuar deve ser para μ usando como estimador pontual $\overline{X}_D$ (média das diferenças) $\rightarrow$ estamos interessados na diferença média.

Neste caso as amostras foram obtidas nas mesmas lojas em períodos diferentes, ou seja, temos amostras aleatórias emparelhadas. Como as amostras aleatórias são emparelhadas, não é possível realizar testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ pois uma das hipóteses das distribuições amostrais consideradas na construção dos testes impõe que as amostras aleatórias sejam independentes.

Como as amostras aleatórias são emparelhadas, vamos construir uma única amostra, a amostra das diferenças:

Loja	1	2	3	4	5	6	7
depois - antes	3	6	4	-2	7	5	7

Pretende-se recorrer a um teste de hipóteses com um nível de significância de 5% para verificar se a campanha foi eficaz, então vamos realizar um teste de hipóteses com um nível de significância de 5% para a média das diferenças (μ_D) e tomar uma decisão sobre a campanha.

- **População**

$$D = X - Y$$

com
X = vendas depois da campanha
Y = vendas antes da campanha

Como as vendas tem distribuição Normal então

$$D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$$

média populacional $= \mu_D$
desvio padrão populacional $= \sigma_D$

Amostras emparelhadas

- **Amostra Aleatória**

amostra: $(3, 6, 4, -2, 7, 5, 7)$

dimensão $= n_D = 7$

estimativas:

média amostral $= \overline{x}_D = \frac{30}{7} = 4.286$

desvio padrão amostral $= s_D = 3.147$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D \leq 0 \rightarrow & \text{a campanha } \textbf{não foi} \text{ eficaz} \\ \text{vs} & \\ H_1 : \mu_D > 0 \rightarrow & \text{a campanha } \textbf{foi} \text{ eficaz} \end{cases}$$

- **Diferença considerada**: $D =$ Depois - Antes
- **Tipo de Teste:** Teste unilateral direito
- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

- **Estatística de Teste:**

Como a População é Normal com σ desconhecido e a dimensão da amostra é $n = 7$, então a variável fulcral é:

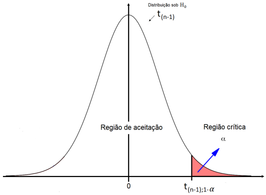
Condições	Distribuição Amostral	R
População Normal σ desconhecido	$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$	t.test()

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

sob a hipótese H_0 tem-se $\mu_D = 0$

$$T_{obs} = \frac{\frac{30}{7} - 0}{\frac{3.147}{\sqrt{7}}} = 3.60$$

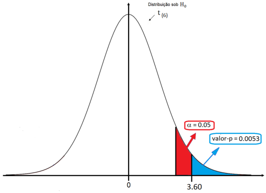
- **Resolução 1: Região Crítica:**



$$
\begin{aligned}
RC &= [t_{1-\alpha;n-1}, +\infty[= \\
&= [t_{1-0.05;7-1}, +\infty[= \\
&= [t_{0.95;6}, +\infty[= [1.94, +\infty[
\end{aligned}
$$

- **Tomar a decisão:** Como $3.60 \in RC$, a decisão é rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$
\begin{aligned}
\text{valor-p} &= P\left(T \geq 3.60\right) = \\
&= 1 - P\left(T < 3.60\right) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} \\
&= 1 - F\left(3.60\right) = \\
&\underset{T \sim t_{(6)}}{=} 1 - 0.9943 = 0.0057
\end{aligned}
$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.0057 \leq 0.05$, ou seja, valor-p $\leq \alpha$, então a decisão é rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que a campanha foi eficaz.

Exemplo 5

Considere a base de dados "mtcars" disponível no R. Estes dados foram extraídos da revista americana Motor Trend de 1974 e referem-se ao consumo de combustível, design e desempenho de 32 modelos de automóveis. Considere as seguintes variáveis:

- mpg = consumo de combustível em milhas/galão (medida americana)
- vs = motor (0 = em forma de V, 1 = em linha)
- am = transmissão (0 = automática, 1 = manual)

1. Teste para um nível de significância de 5%, se, em média, o consumo de combustível é superior nos automóveis com transmissão manual em relação aos automóveis com transmissão automática.

- **População 1**

X_1 = consumo dos automóveis com transmissão manual

média populacional $= \mu_1$
desvio padrão populacional $= \sigma_1$

- **População 2**

X_2 = consumo dos automóveis com transmissão automática

média populacional $= \mu_2$

desvio padrão populacional $= \sigma_2$

Amostras independentes

- **Amostra Aleatória da População 1**

dimensão $= n_1 = 13$

estimativas:

média amostral $= \overline{x}_1 = 24.3923$

desvio padrão amostral $= s_1 = 6.1665$

- **Amostra Aleatória da População 2**

dimensão $= n_2 = 19$

estimativas:

média amostral $= \overline{x}_2 = 17.1474$

desvio padrão amostral $= s_2 = 3.8340$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \rightarrow & \text{o consumo de combustível não é superior nos carros com transmissão} \\ & \text{manual em relação aos carros com transmissão automática} \\ \text{vs} & \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \rightarrow & \text{o consumo de combustível é superior nos carros com transmissão} \\ & \text{manual em relação aos carros com transmissão automática} \end{cases}$$

Vamos escrever o teste como uma diferença de médias:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \\ \text{vs} \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ \text{vs} \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste unilateral direito

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

- **Estatística de Teste:**

  Com a informação disponibilizada não é possível escolher uma distribuição amostral.

  Como as amostras têm dimensão $n < 30$ é necessário ter populações Normais para se poder realizar o teste. Vamos começar por recorrer a um **teste de Ajustamento** para verificar se é possível considerar que os dados vêm de Populações Normais:

  TA1 $H_0 : X_1 \sim Normal$ contra $H_1 : X_1 \nsim Normal$
  TA2 $H_0 : X_2 \sim Normal$ contra $H_1 : X_2 \nsim Normal$

  Como pretendemos testar a distribuição Normal e $n < 50$, em ambos os testes, vamos recorrer ao teste de ajustamento de Shapiro-Wilk:

  TA1 valor-p $= 0.5363$
  TA2 valor-p $= 0.8987$

  Como, em ambos os casos, valor-p $> \alpha = 0.05$, então não se rejeita H_0. Com base nas amostras e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que as populações podem ser consideradas Normais.

- **Estatística de Teste:**

  Embora se possa considerar que as populações são Normais, com a informação disponibilizada ainda não é possível escolher uma distribuição amostral.

  Como os desvios padrão populacionais são desconhecidos, precisamos de saber se podem ou não ser considerados iguais. Podemos recorrer a um **Intervalo de Confiança** <u>ou</u> a um **Teste de Hipóteses Paramétrico** para o <u>quociente de variâncias</u>:

  IC Intervalo de confiança a 95% para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$: $]0.9343, 8.0404[$

  Como $1 \in]0.9343, 8.0404[$, então com 95% de confiança as variâncias podem ser consideradas iguais, logo com 95% de confiança os desvios padrão podem ser considerados iguais.

  <u>OU</u>

  THP $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ contra $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. valor-p $= 0.0669$

  Como valor-p $> \alpha = 0.05$, então não se rejeita H_0. Com base nas amostras e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que as variâncias podem ser consideradas iguais, logo os desvios padrão também podem ser considerados iguais.

- **Estatística de Teste:**

  Como as Populações podem ser consideradas Normais, σ_1 e σ_2 são desconhecidos mas podem ser considerados iguais, então tem-se:

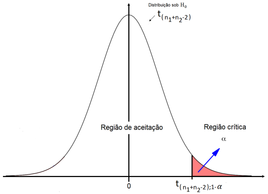
Condições	Distribuição amostral	R
Populações Normais σ_1 e σ_2 desconhecidos $\sigma_1 = \sigma_2$ Amostras Independentes	$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \times \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$	t.test()

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

  sob a hipótese H_0 tem-se $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$T_{\text{obs}} = \frac{(24.3923 - 17.14737) - 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{19}\right) \times \frac{(13-1)\times 38.0258 + (19-1)\times 14.6993}{13+19-2}}} = 4.1061$$

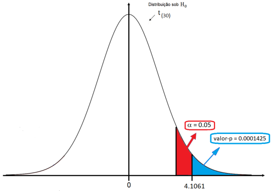
- **Resolução 1: Região Crítica:**



$$\begin{aligned} RC &= [t_{1-\alpha;n_1+n_2-2}, +\infty[= \\ &= [t_{1-0.05;13+19-2}, +\infty[= \\ &= [t_{0.95;30}, +\infty[= \\ &= [1.6973, +\infty[\end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $4.1061 \in RC$, a decisão é rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= P\left(T \geq 4.1061\right) = \\ &= 1 - P\left(T < 4.1061\right) = \\ &\underset{\text{v.a. contínua}}{=} 1 - F\left(4.1061\right) = \\ &\underset{T\sim t_{(30)}}{=} 0.0001425 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.0001425 \leq 0.05$, ou seja, valor-p $\leq \alpha$, então a decisão é rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que o consumo de combustível é superior nos automóveis com transmissão manual em relação aos automóveis com transmissão automática.

Exemplo 5

Considere a base de dados "mtcars" disponível no R. Estes dados foram extraídos da revista americana Motor Trend de 1974 e referem-se ao consumo de combustível, design e desempenho de 32 modelos de automóveis. Considere as seguintes variáveis:

- mpg = consumo de combustível em milhas/galão (medida americana)
- vs = motor (0 = em forma de V, 1 = em linha)
- am = transmissão (0 = automática, 1 = manual)

2. Teste para um nível de significância de 5%, se a variância do consumo de combustível nos automóveis com motores em forma de V é o dobro da variância do consumo de combustível nos automóveis com motores em linha.

- **População 1**

$Y_1 =$ consumo de combustível nos automóveis com motores em forma de V

média populacional $= \mu_1$
desvio padrão populacional $= \sigma_1$

- **População 2**

$Y_2 =$ consumo de combustível nos automóveis com motores em linha

média populacional $= \mu_2$

desvio padrão populacional $= \sigma_2$

Amostras independentes

- **Amostra Aleatória da População 1**

dimensão $= n_1 = 18$

estimativas:

média amostral $= \overline{y}_1 = 16.6167$

desvio padrão amostral $= s_1 = 3.8607$

- **Amostra Aleatória da População 2**

dimensão $= n_2 = 14$

estimativas:

média amostral $= \overline{y}_2 = 24.5571$

desvio padrão amostral $= s_2 = 5.3790$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = 2\sigma_2^2 \rightarrow & \text{a variância do consumo de combustível nos motores em forma de V} \\ & \text{é o dobro da variância do consumo de comb. dos motores em linha} \\ \text{vs} & \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq 2\sigma_2^2 \rightarrow & \text{a variância do consumo de comb. nos motores em forma de V não} \\ & \text{é o dobro da variância do consumo de comb. dos motores em linha} \end{cases}$$

Vamos escrever o teste como um quociente de variâncias:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = 2\sigma_2^2 \\ \text{vs} \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq 2\sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2 \\ \text{vs} \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 2 \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste bilateral

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

- **Estatística de Teste:**

  Com a informação disponibilizada não é possível escolher uma distribuição amostral.

  Como o teste é ao quociente de variâncias é necessário ter populações Normais para se poder realizar o teste. Vamos começar por recorrer a um **teste de Ajustamento** para verificar se é possível considerar que os dados vêm de Populações Normais:

  TA1 $H_0 : Y_1 \sim Normal$ contra $H_1 : Y_1 \not\sim Normal$
  TA2 $H_0 : Y_2 \sim Normal$ contra $H_1 : Y_2 \not\sim Normal$

  Como pretendemos testar a distribuição Normal e $n < 50$, em ambos os testes, vamos recorrer ao teste de ajustamento de Shapiro-Wilk:

  TA1 valor-p $= 0.4491$
  TA2 valor-p $= 0.1666$

  Como, em ambos os casos, valor-p $> \alpha = 0.05$, então não se rejeita H_0. Com base nas amostras e para um nível de significância de 5%, há evidência estatística que as populações podem ser consideradas Normais.

- **Estatística de Teste:**

  Como as Populações podem ser consideradas Normais, então tem-se:

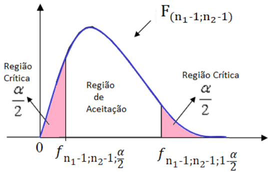
Condições	Distribuição amostral	R
Populações Normais Amostras Independentes	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$	var.test()

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

  sob a hipótese H_0 tem-se $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2$

$$F_{\text{obs}} = \frac{14.905}{28.9334} \times \frac{1}{2} = 0.26$$

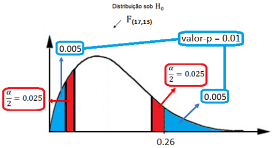
- **Resolução 1: Região Crítica:**



$$RC = \left[0, f_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}\right] \cup \left[f_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}, +\infty\right[=$$
$$= \left[0, f_{\frac{0.05}{2};18-1,14-1}\right] \cup \left[f_{1-\frac{0.05}{2};18-1,14-1}, +\infty\right[=$$
$$= [0, f_{0.025;17,13}] \cup [f_{0.975;17,13}, +\infty[=$$
$$= [0, 0.3589] \cup [3.0039, +\infty[$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.26 \in RC$, a decisão é rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\text{valor-p} =$$
$$= 2 \times min\left\{P\left(\text{F} \geq 0.26\right), P\left(\text{F} \leq 0.26\right)\right\} =$$
$$= 2 \times min\left\{0.005, 0.995\right\} =$$
$$= 2 \times 0.005 = 0.01$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.01 \leq 0.05$, ou seja, valor-p $\leq \alpha$, então a decisão é rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 5%, não há evidência estatística que a variância do consumo de combustível nos automóveis com motores em forma de V seja o dobro da variância do consumo de combustível nos automóveis com motores em linha.

Exemplo 5

Considere a base de dados "mtcars" disponível no R. Estes dados foram extraídos da revista americana Motor Trend de 1974 e referem-se ao consumo de combustível, design e desempenho de 32 modelos de automóveis. Considere as seguintes variáveis:

- mpg = consumo de combustível em milhas/galão (medida americana)
- vs = motor (0 = em forma de V, 1 = em linha)
- am = transmissão (0 = automática, 1 = manual)

3. Teste para um nível de significância de 5%, se o desvio padrão do consumo de combustível nos automóveis com motores em forma de V é inferior a 4 milhas/galão.

Exemplo 5

Considere a base de dados "mtcars" disponível no R. Estes dados foram extraídos da revista americana Motor Trend de 1974 e referem-se ao consumo de combustível, design e desempenho de 32 modelos de automóveis. Considere as seguintes variáveis:

- mpg = consumo de combustível em milhas/galão (medida americana)
- vs = motor (0 = em forma de V, 1 = em linha)
- am = transmissão (0 = automática, 1 = manual)

3. Teste para um nível de significância de 5%, se o desvio padrão do consumo de combustível nos automóveis com motores em forma de V é inferior a 4 milhas/galão.

- **População 1**

Y_1 = consumo de combustível nos automóveis com motores em forma de V

média populacional $= \mu_1$

desvio padrão populacional $= \sigma_1$

- **Amostra Aleatória da População 1**

dimensão $= n_1 = 18$

estimativas:

média amostral $= \overline{y}_1 = 16.6167$

desvio padrão amostral $= s_1 = 3.8607$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 \geq 4 \rightarrow & \text{o desvio padrão do consumo de combustível nos carros com} \\ & \text{motores em forma de V não é inferior a 4 milhas/galão} \\ \text{vs} & \\ H_1 : \sigma_1 < 4 \rightarrow & \text{texto desvio padrão do consumo de combustível nos carros com} \\ & \text{motores em forma de V é inferior a 4 milhas/galão} \end{cases}$$

Vamos escrever o teste como uma variância:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 \geq 4 \\ \text{vs} \\ H_1 : \sigma_1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \geq 16 \\ \text{vs} \\ H_1 : \sigma_1^2 < 16 \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste unilateral esquerdo

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

- **Estatística de Teste:**

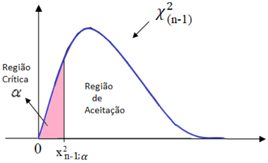
  Como a População pode ser considerada Normal (testado na alínea anterior), então tem-se:

Condição	Distribuição Amostral	R
População Normal	$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$	varTest() library(EnvStats)

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**
  sob a hipótese H_0 tem-se $\sigma_1^2 = 16$

$$X^2_{\text{obs}} = \frac{(18-1) \times 14.905}{16} = 15.8366$$

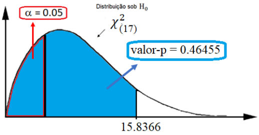
- **Resolução 1: Região Crítica:**



$$RC = \left[0, x^2_{\alpha;n-1}\right] = \left[0, x^2_{0.05;18-1}\right] =$$
$$= \left[0, x^2_{0.05;17}\right] = [0, 8.6718]$$

- **Tomar a decisão:** Como $15.8366 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\text{valor-p} = P\left(X^2 \leq 15.8366\right) =$$
$$= F\left(15.8366\right) =$$
$$\underset{X^2 \sim \chi^2_{(17)}}{=} 0.46455$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.46455 > 0.05$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 5%, não há evidência estatística que o desvio padrão do consumo de combustível nos automóveis com motores em forma de V seja inferior a 4 milhas/galão.

Exemplo 6

Uma associação beneficente adotou dois tipos de pedido de auxílio: por telefone e via Internet. No pedido feito por telefone, dos 1600 telefonemas realizados obteve 320 adesões. No pedido de auxílio feito pela internet, teve 475 adesões dentre os 2500 contactos realizados. Um dos diretores da associação afirma que o pedido por telefone é mais eficaz. Teste esta afirmação ao nível de significância de 1%.

- **População 1**

$X_1 \sim$ Binomial

proporção populacional $= p_1 =$ proporção de auxílio obtido via telefone

- **População 2**

$X_2 \sim$ Binomial

proporção populacional $= p_2 =$ proporção de auxílio obtido via Internet

Amostras independentes

- **Amostra Aleatória da População 1**

dimensão $= n_1 = 1600$

<u>estimativa:</u>

proporção amostral $= p_1^* = \frac{320}{1600} = 0.20$

- **Amostra Aleatória da População 2**

dimensão $= n_2 = 2500$

<u>estimativa:</u>

proporção amostral $= p_2^* = \frac{475}{2500} = 0.19$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p_1 \leq p_2 \rightarrow & \text{o pedido por telefone não é mais eficaz} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p_1 > p_2 \rightarrow & \text{o pedido por telefone é mais eficaz} \end{cases}$$

Vamos escrever o teste como uma diferença de proporções:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 \leq p_2 \\ \text{vs} \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 \leq 0 \\ \text{vs} \\ H_1 : p_1 - p_2 > 0 \end{cases}$$

- **Tipo de Teste:** Teste unilateral direito

- **nível de significância** $= \alpha = 0.01$

- **Estatística de Teste:**

  Como as Populações são Binomiais, então é obrigatório recolher amostras de dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n_1 = 1600 \geq 30$ e $n_2 = 2500 \geq 30$, então tem-se:

Condições	Distribuição Amostral	R
Amostras Independentes $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$	$Z = \frac{(p_1^* - p_2^*) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1^* q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^* q_2^*}{n_2}}} \dot{\sim} N(0, 1)$	z.test() library(BSDA)

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

  sob a hipótese H_0 tem-se $p_1 - p_2 = 0$

$$Z_{\text{obs}} = \frac{(0.20 - 0.19) - 0}{\sqrt{\frac{0.20 \times (1 - 0.20)}{1600} + \frac{0.19 \times (1 - 0.19)}{2500}}} = 0.7867$$

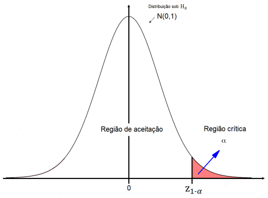
Tal como vimos nos intervalos de confiança, se pretender usar a função z.test do R, é necessário:

- construir vetores das amostras onde o sucesso $= 1$ e o insucesso $= 0$
- considerar
  $s_1 = \sqrt{p_1^* q_1^*} = \sqrt{p_1^* \times (1 - p_1^*)}$
  $s_2 = \sqrt{p_2^* q_2^*} = \sqrt{p_2^* \times (1 - p_2^*)}$

Neste caso fica:

- a amostra da população 1 terá 320 uns e $1600 - 320 = 1280$ zeros
- a amostra da população 2 terá 475 uns e $2500 - 475 = 2025$ zeros
- $s_1 = \sqrt{0.20 \times (1 - 0.20)}$
- $s_2 = \sqrt{0.19 \times (1 - 0.19)}$

- **Resolução 1: Região Crítica:**

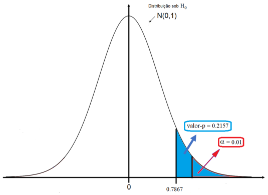


$$RC = [z_{1-\alpha}, +\infty[= [z_{1-0.01}, +\infty[=$$

$$= [z_{0.99}, +\infty[= [2.3263, +\infty[$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.7867 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0.

- **Resolução 2: valor-p:**



$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= P\left(Z \geq 0.7867\right) = \\ &= 1 - P\left(Z < 0.7867\right) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} \\ &= 1 - \Phi\left(0.7867\right) = \\ &= 0.2157 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:** Como $0.2157 > 0.01$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

- **Conclusão do teste:** Com base nas amostras recolhidas e para um nível de significância de 1%, não há evidência estatística que o pedido de auxílio pelo telefone seja mais eficaz. A afirmação do diretor não parece ser verdadeira.