

Licenciatura em Engenharia Informática

Métodos Estatísticos

Exercícios

Elementos da Teoria da Estimação

Departamento de Matemática



## 4 Elementos da Teoria da Estimação

**Exercício 4.1** Seja  $X$  uma população com distribuição normal de média  $\mu$  e desvio padrão igual a 2. Uma amostra aleatória de dimensão  $n = 25$  foi extraída desta população e revelou uma média  $\bar{x} = 78.3$ .

1. Calcule o intervalo de confiança para  $\mu$  a 99%.
2. Qual a amplitude do intervalo de confiança a 99% para  $\mu$ ?
3. Qual a margem de erro do intervalo de confiança a 99% para  $\mu$ ?
4. Qual deverá ser a dimensão da amostra para que a amplitude, do intervalo de confiança a 99% para  $\mu$ , não exceda os 0.1?
5. Calcule o intervalo de confiança a 95% para  $\mu$ .
6. Qual o efeito de variar o grau de confiança?
7. Qual deverá ser a dimensão da amostra para a amplitude, do intervalo de confiança 95% para  $\mu$ , não exceda os 0.1? E a 99.9% de confiança? Interprete os resultados.

**Exercício 4.2** Certo equipamento de empacotamento automático, encontra-se regulado para encher embalagens de um quilo de certo produto. O seu deficiente funcionamento origina prejuízo para a empresa: se a maioria das embalagens tem peso inferior ao estabelecido, haverá reclamações por parte dos clientes e perda de prestígio; peso excessivo será por outro lado anti-económico. Aceita-se da experiência passada que o peso das embalagens se comporta normalmente com desvio padrão de 12 gramas. Para verificar a afinação do equipamento, selecionaram-se em determinada altura, nove embalagens cujos pesos exatos (em gramas) foram anotados:

(983, 992, 1011, 976, 997, 1000, 1004, 983, 998).

1. Calcule uma estimativa pontual para a média da população.
2. Construa um intervalo de confiança para  $\mu$  com os seguintes graus de confiança: 90%, 95% e 99%. Como varia a precisão do intervalo (a sua amplitude) com o grau de confiança escolhido?
3. Com base nos intervalos de confiança calculados na alínea anterior, acha que a máquina está regulada?
4. Num intervalo de confiança a 95% para a média da população, qual deverá ser o tamanho da amostra a recolher para que a margem de erro não seja superior a 1?

**Exercício 4.3** A distância percorrida por um avião, desde o contacto com o solo até à imobilização total, é uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal. Os valores para  $X$ , numa série de 31 aterragens, foram compilados e são apresentados de seguida (valores em milhares de metros):

$$\sum_{i=1}^{31} x_i = 54.3 \qquad \sum_{i=1}^{31} x_i^2 = 95.57$$

1. Calcule estimativas pontuais para a média e variância da população.
2. Determine um intervalo de confiança a 99% para a média. Acha que é possível efetuar uma aterragem segura numa pista com menos de 1500 metros? Justifique.

**Exercício 4.4** Com a finalidade de estimar o peso médio (em quilos) das crianças de 15 anos de idade em determinada região geográfica, selecionaram-se aleatoriamente 10 crianças que forneceram os seguintes dados:

(33.1, 32.1, 40.9, 37.1, 37.7, 35.1, 30.2, 45.6, 27.8, 37.3)

Admita a normalidade.

1. Calcule estimativas para a média e o desvio padrão do peso das crianças.
2. Determine um intervalo de confiança a 99% para o peso médio de todas as crianças.
3. Considerando que a estimativa para o peso médio não é suficientemente precisa, dado que o intervalo de confiança é demasiado amplo, o que sugere fazer para diminuir a amplitude do intervalo de confiança?
4. Considerando que a estimativa para o peso médio não é suficientemente precisa (dado que o intervalo de confiança é demasiado grande), qual deve ser a dimensão da amostra a recolher de modo a obter uma amplitude de 3 quilos com um grau de confiança de 99%?

**Exercício 4.5** Considere uma população normal com parâmetros desconhecidos, de onde se obteve uma amostra aleatória com 16 observações, que permitiu construir o seguinte intervalo de confiança para a média da população:

]7.05, 12.95[

1. Determine a média amostral.
2. Sabendo que, com a informação da amostra, se obteve  $s = 4$ , qual o grau de confiança que pode atribuir ao intervalo referido?
3. Suponha que a variância da população é 44. Se pretender construir um intervalo de confiança a 95% para a média da população, cuja amplitude não exceda 3.5, qual deverá ser a dimensão da amostra a considerar?

**Exercício 4.6** A concentração ativa de um ingrediente num detergente líquido é supostamente afetada pelo catalisador usado no processo. O desvio padrão da concentração ativa é 3 gramas/litro independentemente do catalisador utilizado, sendo o comportamento do processo normal. Foram recolhidas 10 observações cada uma com o seu catalisador:

catalisador 1	57.9	66.2	65.4	65.2	62.6	67.6	63.7	67.2	71.0	65.4
catalisador 2	66.4	71.7	70.3	69.3	64.8	69.6	68.6	69.4	65.3	68.8

1. As amostras são independentes ou emparelhadas?
2. Determine um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias dos dados obtidos pelos dois catalisadores. Em média, os dados obtidos pelos dois catalisadores podem ser considerados iguais?

**Exercício 4.7** Pretende-se investigar o nível de remuneração salarial dos homens e mulheres de certa categoria profissional. De duas amostras obtidas entre dois grupos, destacam-se os seguintes resultados (em unidades monetárias):

$$\begin{array}{lll} \text{Amostra de 250 homens:} & \bar{x}_1 = 33.8 & s_1^2 = 5.7 \\ \text{Amostra de 150 mulheres:} & \bar{x}_2 = 31 & s_2^2 = 10.3 \end{array}$$

Construa um intervalo de confiança a 99% para as diferenças salariais médias entre os dois géneros e conclua sobre a possível existência de discriminação de género na atribuição de remunerações.

**Exercício 4.8** Deseja-se saber se um programa de reabilitação após enfarte de miocárdio diminui a frequência cardíaca de esforço. Para tal, 10 doentes com enfarte do miocárdio foram submetidos a uma prova de esforço antes e depois do programa. Os resultados, expressos em batimentos por minuto, estão na tabela seguinte:

Doente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes	147	122	127	141	150	132	157	147	157	155
Depois	132	117	142	124	116	130	122	118	135	117

Suponha que a variável em estudo segue uma distribuição normal.

1. As amostras são independentes ou emparelhadas?
2. Recorrendo a um intervalo de confiança a 95% para a diferença média, indique se acha que o programa de reabilitação foi eficaz.

**Exercício 4.9** Foi estudado o grau de satisfação (medido por questionário) de vários utentes de uma clínica dentária antes e depois de lhes ser aplicada uma nova prótese total removível. Os resultados, expressos em grau de satisfação, foram os apresentados na tabela seguinte:

Utente	1	2	3	4	5	6	7	8
Antes	4	10	8	13	7	3	15	7
Depois	4	16	11	17	17	4	18	11

Suponha que o grau de satisfação segue uma distribuição normal.

1. Estas amostras podem ser consideradas independentes?
2. Recorrendo a um intervalo de confiança a 99% para a diferença média, indique se a aplicação da nova prótese influenciou o grau de satisfação dos utentes.

**Exercício 4.10** Para comparar a eficiência de dois métodos de ensino, uma turma de 24 alunos foi dividida aleatoriamente em dois grupos. Cada grupo é ensinado de acordo com um método diferente. Os resultados no fim do semestre são os seguintes (numa escala de 0 a 100):

$$1.^{\circ} \text{ Grupo: } n_1 = 13 \quad \bar{x}_1 = 74.5 \quad s_1^2 = 82.6$$

$$2.^{\circ} \text{ Grupo: } n_2 = 11 \quad \bar{x}_2 = 71.8 \quad \sum_{i=1}^{11} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 1126$$

Supondo que as populações são normais (com variâncias iguais), obteve-se o seguinte intervalo de confiança para a diferença entre os valores esperados das duas populações:

$$] - 5.635, 11.035[.$$

1. Indique qual o grau de confiança utilizado no cálculo deste intervalo.
2. Com base num intervalo de confiança a 90% acha que, em média, os métodos de ensino podem ser considerados iguais?
3. Com base num intervalo de confiança a 90% verifique se a suposição das variâncias serem iguais é válida.

**Exercício 4.11** Duas marcas de comprimidos, um deles contendo aspirina, são anunciados como fazendo desaparecer a dor de cabeça em tempo recorde. Foram feitas experiências com cada um deles, tendo-se obtido duas amostras aleatórias independentes, cujos resultados (tempo em minutos) foram os seguintes:

Comprimido 1 (com aspirina):

9.6; 9.4; 9.3; 11.2; 11.4; 12.1; 10.4; 9.6; 10.2; 8.8; 13.0

Comprimido 2 (sem aspirina):

11.4; 12.1; 10.4; 9.6; 8.5; 9.7; 12.3; 12.4; 10.8; 10.8

Admita que as populações são normais e que os desvios padrão são iguais.

1. Construa um intervalo de confiança a 95% para a verdadeira diferença das médias das respostas aos dois medicamentos. Acha que, em média, as respostas dos dois medicamentos podem ser consideradas iguais?
2. Com base num intervalo de confiança a 95% verifique se a suposição dos desvios padrão serem iguais é válida.

**Exercício 4.12** Obtém-se uma amostra de 15 crânios de homens egípcios que viveram por volta de 1850 a.c.. Mede-se a largura máxima de cada crânio, e obtiveram-se da amostra uma média de 134.5 mm e um desvio padrão de 3.5 mm (com base em dados de *Ancient Races of Thebaid*, por Thomson e Randall-Maciver). Suponha que a largura máxima dos crânios tem um comportamento normal. Com esses dados amostrais, construa um intervalo de 95% de confiança para o desvio padrão populacional.

**Exercício 4.13** Pretende-se estudar a variabilidade do tempo de espera (em minutos) de clientes num dado banco, onde os clientes entram numa fila única. Suponha que o tempo de espera segue uma distribuição normal. Construa um intervalo de 95% de confiança para o desvio padrão populacional sabendo que se recolheu a seguinte amostra:

(6.5; 6.6; 6.7; 6.8; 7.1; 7.3; 7.4; 7.7; 7.7; 7.7).

**Exercício 4.14** Considere-se a seguinte amostra de uma população cuja distribuição é Normal:

(9; 14; 10; 12; 7; 3; 11; 12).

Nestas condições, construa o intervalo de confiança a 99% mais adequado para a variância dessa população.

**Exercício 4.15** Durante uma avaliação de desempenhos das escolas A e B, sugeriu-se que a escola A tinha uma maior variabilidade que a escola B em termos das notas finais dos alunos. Fizeram-se 16 registos de classificações para a escola A e 21 registos de classificações para a escola B conduzindo às variâncias de 6.62 e 3.80, respetivamente. Suponha que as populações em estudo têm um comportamento normal. Construa um intervalo de confiança a 90% para a razão das verdadeiras variâncias e diga se a variabilidade das escolas pode ser considerada diferente.

**Exercício 4.16** Numa região afetada por um surto epidémico, observou-se uma amostra de 2500 indivíduos, tendo-se encontrado 850 contaminados. Determine intervalos de confiança a 95% e 98% de confiança para a proporção de contaminados na população.

**Exercício 4.17** Num estudo de mercado efetuado sobre uma amostra aleatória de 400 consumidores, foi encontrado o seguinte intervalo de confiança para a proporção de pessoas recetivas a um novo tipo de espuma de banho a lançar em breve no mercado:

$]0.5114, 0.6086[$

1. Em relação à amostra recolhida, qual foi a percentagem de pessoas recetivas a um novo tipo de espuma de banho?
2. Mostre que o grau de confiança considerado no intervalo calculado é de 95%.
3. Comente as seguintes afirmações, indicando se estas lhe parecem corretas ou incorretas:
  - (a) 95% das pessoas vão passar a usar a nova espuma de banho.
  - (b) A quota de mercado poderá ser, com 95% de confiança, de 56%.

**Exercício 4.18** Recolheu-se uma amostra de 40 alunos do 1.º ano da EST-Setúbal tendo-se verificado que 10 destes alunos frequentam os cursos que escolheram em primeira opção.

1. Calcule um intervalo de confiança a 95%, para a verdadeira proporção de estudantes que está no curso que escolheu em primeira opção.
2. Se pretendesse reduzir a metade a amplitude do intervalo anterior:
  - (a) e manter a dimensão da amostra, qual o grau de confiança que deveria utilizar?
  - (b) e manter o grau de confiança, qual a dimensão da amostra que deveria utilizar? Suponha que não há alteração na estimativa da proporção.
  - (c) e manter o grau de confiança, qual a dimensão da amostra que deveria utilizar? Suponha que não conhece estimativas da proporção.

**Exercício 4.19** Uma repórter da revista Byte deseja fazer uma pesquisa para estimar a verdadeira proporção de todos os universitários que têm computador pessoal. Nos seus resultados a repórter quer ter 95% de confiança e uma margem de erro de 0.04. Quantos universitários devem ser pesquisados?

**Exercício 4.20** Pretende-se estimar o número total de médicos que trabalham numa certa cidade e estão associados a planos de saúde. Para isso recolheu-se uma amostra aleatória com 300 médicos dessa cidade e apurou-se que entre eles 216 se enquadram nessa condição. Obtenha um intervalo de confiança a 98% para a sua estimativa, sabendo que o número total de médicos na cidade é 28000.

**Exercício 4.21** Dois inquéritos realizados (em 2009 e 2019), relativamente ao consumo de bebidas alcoólicas, em idades entre os 15 e os 35 anos, forneceram os seguintes dados:

Ano	Número de inquiridos	Consumidores	Não consumidores
2009	4000	1750	2250
2019	5000	2250	2750

Através de um intervalo de confiança, a 98%, indique a veracidade da afirmação: "A percentagem de consumidores de bebidas alcoólicas, em indivíduos com idades compreendidas entre os 15 e os 35 anos, registou um grande aumento na década analisada."

**Exercício 4.22** Com o objetivo de verificar o efeito de um novo medicamento no tratamento de uma dada doença, dois grupos,  $A$  e  $B$ , foram formados, cada um composto por 100 indivíduos que apresentavam a tal doença, estando todos eles no mesmo estágio da mesma. O grupo  $A$  recebeu o novo medicamento e o grupo  $B$  recebeu um placebo. Curaram-se da doença 75 pessoas no grupo  $A$  e 65 no grupo  $B$ . É possível afirmar que o novo medicamento é eficaz no tratamento da doença? Justifique a sua resposta recorrendo a um intervalo de confiança a 95%.

**Exercício 4.23** No ficheiro EXCEL "Obesidade" tem as respostas a um inquérito efetuado num estudo sobre obesidade a um grupo de indivíduos obesos. No conjunto de variáveis disponíveis no ficheiro considere as seguintes:

- Género: Feminino, Masculino;

- Idade: em anos;
  - Altura: em metros;
  - Peso: em quilogramas;
  - FAVC = Se come alimentos altamente calóricos habitualmente: 1=Sim, 0=Não;
1. Calcule estimativas pontuais para a altura média e para a variância das alturas.
  2. Calcule um intervalo de confiança a 99% para a altura média.
  3. Qual a margem de erro do intervalo da alínea anterior?
  4. Recorrendo a um intervalo de confiança a 90%, acha que, em média, os pesos do género feminino podem ser considerados iguais aos pesos do género masculino? Justifique.
  5. Remova os "outliers" existentes nos dados referentes à Idade. Com os dados sem "outliers":
    - (a) calcule um intervalo de confiança a 92% para a idade média;
    - (b) recorrendo a um intervalo de confiança a 95%, acha que, em média, há diferenças na idade das pessoas que comem habitualmente alimentos altamente calóricos e os que não comem? Justifique.



## Soluções

- 4.1** 1)  $]77.2696, 79.3304[$  2) 2.0608 3) 1.0304 4)  $n \geq 10618$  5)  $]77.516, 79.084[$   
6) – 7)  $n \geq 6147$  e  $n \geq 17330$
- 4.2** 1) 993.78 gramas 2)  $]987.2, 1000.4[$ ;  $]985.94, 1001.6[$ ;  $]983.48, 1004.1[$ . Quanto maior o grau de confiança, maior a amplitude do intervalo de confiança (ou seja, menor a precisão). 3) Sim 4)  $n \geq 554$
- 4.3** 1)  $\bar{x} = 1.7516$  milhares de metros e  $s^2 = 0.0153$  milhares de metros<sup>2</sup> 2)  $]1.6944, 1.8088[$ . Com 99% de confiança, não parece ser possível efetuar uma aterragem segura.
- 4.4** 1)  $\bar{x} = 35.69$  kg e  $s = 5.2314$  kg. 2)  $]30.3137, 41.0663[$ . 3) Diminuir o grau de confiança ou aumentar a dimensão da amostra. 4)  $n \geq 85$
- 4.5** 1) 10 2) 99% 2)  $n \geq 56$
- 4.6** 1) As amostras são independentes. 2)  $] -5.8296, -0.5704[$ . Com 95% de confiança, em média, os dados obtidos pelos dois catalizadores não podem ser considerados iguais.
- 4.7**  $]2.021, 3.579[$ . Com 99% de confiança, parece existir discriminação de género na atribuição de remunerações.
- 4.8** 1) As amostras são emparelhadas. 2)  $] -30.36, -6.04[$ . Com 95% de confiança, o programa de reabilitação parece ser eficaz.
- 4.9** 1) As amostras são emparelhadas. 2)  $]0.05, 7.70[$ . Com 99% de confiança, a aplicação da nova prótese influenciou o grau de satisfação dos utentes.
- 4.10** 1) 95% 2)  $] -4.397, 9.797[$ . Com 90% de confiança, em média, os métodos de ensino podem ser considerados iguais. 3)  $]0.252, 2.017[$ . Com 90% de confiança, a suposição das variâncias serem iguais é válida.
- 4.11** 1)  $] -1.536, 0.846[$ . Com 95% de confiança, em média, as respostas dos dois medicamentos podem ser consideradas iguais. 2)  $]0.513, 1.986[$ . Com 95% de confiança, a suposição dos desvios padrão serem iguais é válida.
- 4.12**  $]2.563, 5.519[$
- 4.13**  $]0.328, 0.870[$
- 4.14**  $]4.118, 84.407[$
- 4.15**  $]0.792, 4.059[$ . Com 90% de confiança, a variabilidade das escolas não pode ser considerada diferente.
- 4.16**  $]0.3214, 0.3586[$  e  $]0.318, 0.362[$
- 4.17** 1) 56% 2) – 3a) Afirmação incorreta. 3b) Afirmação incorreta.
- 4.18** 1)  $]0.1158, 0.3842[$  2a) 67.3% 2b) 160 2c) 214
- 4.19** 2401
- 4.20**  $]18472, 21848[$
- 4.21**  $] -0.037, 0.012[$ . Com 98% de confiança, a afirmação não é verdadeira.
- 4.22**  $] -0.026, 0.226[$ . Com 95% de confiança, não é possível afirmar que o novo medicamento é eficaz no tratamento da doença.
- 4.23** 1)  $\bar{x} = 1.7017$  metros e  $s_X^2 = 0.0087$  metros<sup>2</sup> 2)  $]1.6964, 1.7069[$  3) 0.0052 metros  
4) Com 90% de confiança e com base nas amostras recolhidas, em média, os pesos do género feminino não podem ser considerados iguais aos pesos do género masculino 5a)  $]22.7736, 23.1156[$  5b) Com 95% de confiança e com base nas amostras recolhidas, em média, há diferenças na idade das pessoas que comem habitualmente alimentos altamente calóricos e os que não comem.