1º Teste Recuperação

1. Uma empresa envolvida no desenvolvimento de próteses de membros inferiores pretende personalizar soluções e contribuir significativamente para a melhoria da qualidade de vida de indivíduos amputados. Para tal pretende explorar fatores biomédicos e robóticos que possam influenciar o desempenho e a satisfação dos utilizadores de próteses de membros inferiores. Para atingir este objetivo recolheu uma amostra de alguns pacientes amputados que utilizam próteses de membros inferiores, cuja informação foi colocada no ficheiro "ProtesesMI_T1.txt" que se encontra no Moodle, e tem os seguintes campos:

   - paciente = código de identificação do paciente
   - idade = Idade do paciente (em anos)
   - protese = Tipo de prótese utilizada (1 = Robótica, 2 = Mecânica, 3 = Híbrida)
   - tempo = Tempo de uso da prótese (em meses)
   - satisfacao = Grau de satisfação com a prótese (valores de 1 a 5, onde 1 indica totalmente insatisfeito e 5 totalmente satisfeito)

[1.0] (a) Identifique a Amostra indicando a sua dimensão, a unidade estatística e as variáveis estatísticas, classificando-as.

[1.5] (b) Construa a tabela de frequências completa do grau de satisfação dos pacientes com a prótese.

[0.5] (c) Sabe-se que 30% dos paciente indicam um grau de satisfação no máximo, igual a um determinado valor. Qual é esse valor?

[1.5] (d) Represente graficamente o tempo de uso da prótese pelos pacientes. Caso considere necessário construir classes, recorra à regra de Sturges e considere classes fechadas à esquerda e abertas à direita.

[1.5] (e) Com base no diagrama de extremos e quartis, compare a idade dos pacientes por tipo de prótese. Comente os resultados obtidos.

[1.5] (f) Qual o conjunto de dados que apresenta maior dispersão, a idade dos pacientes ou o tempo de uso das próteses? Justifique a sua resposta.

1. (a) Amostra: Alguns pacientes amputados que utilizam próteses de membros inferiores

   Dimensão da Amostra: $n = 51$ pacientes

   Unidade estatística: paciente amputado que utiliza próteses de membros inferiores

   Variável estatística: idade. Classificação: Quantitativa contínua (mas foi recolhida como quantitativa discreta).

   Variável estatística: protese. Classificação: Qualitativa nominal.

   Variável estatística: tempo. Classificação: Quantitativa contínua.

   Variável estatística: satisfacao. Classificação: Qualitativa ordinal.

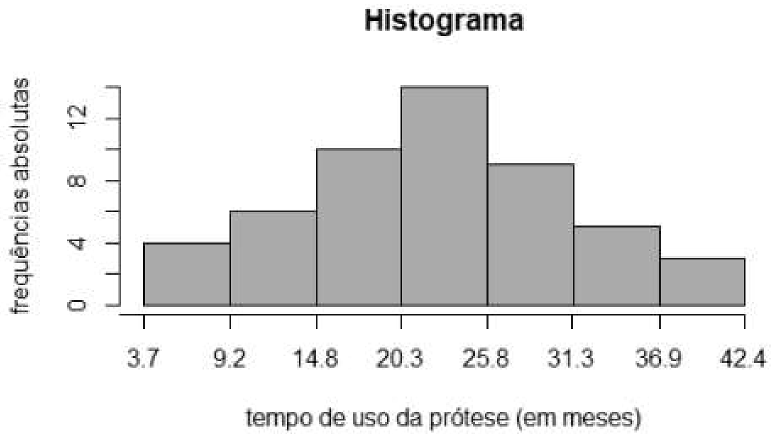
   (b) Tabela de frequências da variável Grau de satisfação:

i	Grau de Satisfação x_i	Frequência Absoluta n_i	Frequência Relativa f_i	Frequência Absoluta Acumulada N_i	Frequência Relativa Acumulada F_i
1	1	6	0.1176	6	0.1176
2	2	9	0.1765	15	0.2941
3	3	7	0.1373	22	0.4314
4	4	15	0.2941	37	0.7255
5	5	14	0.2745	51	1
		$n = 51$	1		

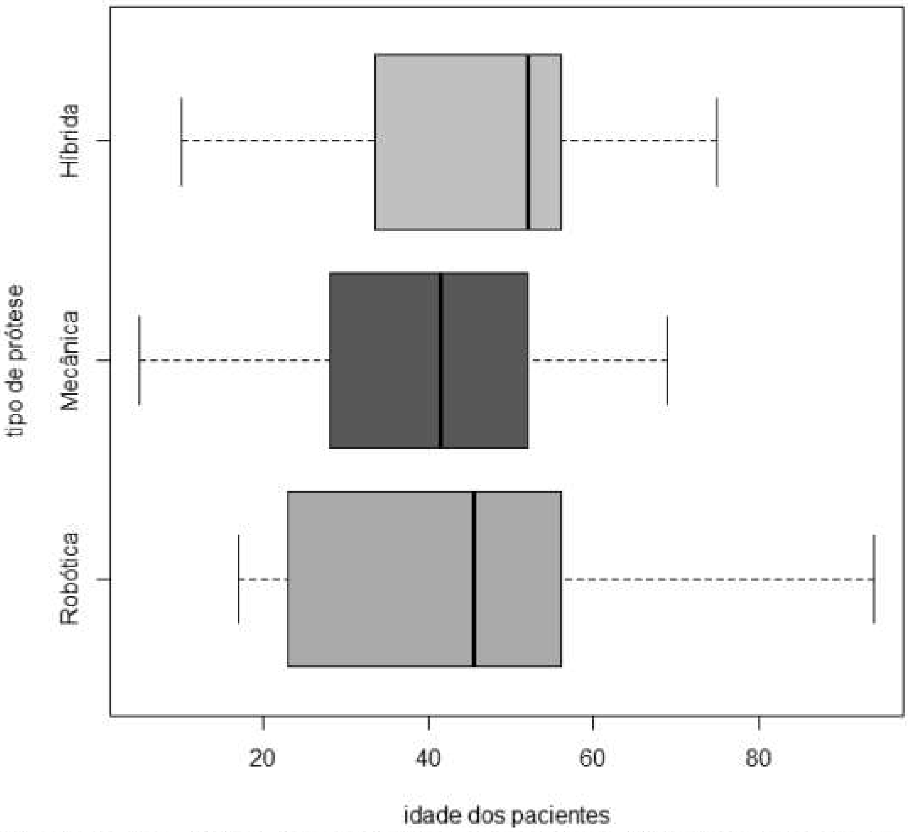
   (c) Pretende-se determinar em que valor da satisfação foi acumulada no máximo 30% das observações, pelas frequências relativas acumuladas verifica-se que foi em $F_3 = 0.4314 > 0.30$ (primeira frequência relativa acumulada que ultrapassa 0.30), ou seja, para um valor de satisfação até 3 (pois $x_3 = 3$).

   Outra possibilidade de resposta é considerar a definição de quantil, ou seja, pretende-se o quantil 0.30: $Q_{0.30} = 3$.

(d) Histograma com classes fechadas à esquerda e abertas à direita definidas com base na regra de Sturges:



(e) Diagrama de extremos e quartis da idade dos pacientes por tipo de prótese:



A distribuição das idades dos pacientes apresentam diferenças quando separadas por tipo de prótese. As idades nas próteses robóticas apresentam uma clara assimetria à direita, tem os pacientes mais idosos, tendo 94 anos o mais idoso, e apresenta a maior amplitude interquartil, 29.5 anos. As idades nas próteses mecânicas têm os pacientes mais novos, tendo 5 anos o mais novo, e a "caixa com bigodes"é a que se aproxima mais da simetria. As idades nas próteses híbridas é a que apresenta a mediana mais elevada, 52 anos, e tem a menor distância entre o terceiro quartil e a mediana, 4 anos (ou seja, 25% das idades encontram-se entre os 52 anos e 56 anos). Não há idades consideradas "outliers".

(f) Como os dados têm unidades de medida diferentes, é necessário recorrer ao coeficiente de variação para comparar a dispersão:

$$CV_{idade} = 43.9\% \qquad CV_{tempo} = 37.7\%$$

A idade dos pacientes apresenta maior dispersão do que o tempo de uso das próteses, pois $CV_{idade} > CV_{tempo}$.

2. O número de produtos produzidos, por semana, numa dada empresa é uma variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade:

x	1	3	4	5	7
$f(x)$	a	0.1	0.2	0.2	b

Sabe-se que, em média, são produzidos 5 produtos por semana.

[1.5] (a) Determine, justificando, os valores de a e b.

[1.5] (b) Suponha $a = 0.1$ e $b = 0.4$. Calcule $V\left[\frac{1-2X}{3}\right]$.

[1.5] (c) A duração, em centenas de horas, de um dos componentes eletrónicos produzidos por esta empresa é uma variável aleatória Y com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(y) = \begin{cases} 2y^{-3} & , y > 1 \\ 0 & , y \leq 1 \end{cases}$$

Suponha que esta empresa produz 10000 componentes eletrónicos por semana. Destes componentes, quantos espera que possuam uma duração superior a 250 horas?

2. Seja X = número de produtos produzidos, por semana, uma variável aleatória discreta com $D_x = \{1, 3, 4, , 7\}$. Tem-se $E[X] = 5$ produtos por semana.

(a) Como $f(x)$ é função de probabilidade, sabe-se:

- $f(x) \geq 0, \forall x$, logo $f(1) = a \geq 0$ e $f(7) = b \geq 0$
- $\sum_x f(x) = 1$, logo

$$f(1) + f(3) + f(4) + f(5) + f(7) = 1 \Leftrightarrow a + 0.1 + 0.2 + 0.2 + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 0.5$$

Como $E[X] = 5$ tem-se

$1 \times f(1) + 3 \times f(3) + 4 \times f(4) + 5 \times f(5) + 7 \times f(7) = 5 \Leftrightarrow 1 \times a + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.2 + 7 \times b = 5 \Leftrightarrow a + 7b = 2.9$

Juntando todos os resultados tem-se:

$$\begin{cases} a + b = 0.5 \\ a + 7b = 2.9 \\ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.5 - b \\ 0.5 - b + 7b = 2.9 \\ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.1 \\ b = 0.4 \\ 0.1 \geq 0 \wedge 0.4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.1 \\ b = 0.4 \end{cases}$$

(b) Com $a = 0.1$ e $b = 0.4$ tem-se

x	1	3	4	5	7
$f(x)$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.4

$$V\left[\frac{1-2X}{3}\right] = V\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3}X\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times V[X] = \frac{4}{9} \times \left(E\left[X^2\right] - E^2[X]\right)$$

Como $E[X] = 5$, falta calcular $E\left[X^2\right]$. Assim

$$E\left[X^2\right] = 1^2 \times f(1) + 3^2 \times f(3) + 4^2 \times f(4) + 5^2 \times f(5) + 7^2 \times f(7) =$$
$$= 1^2 \times 0.1 + 3^2 \times 0.1 + 4^2 \times 0.2 + 5^2 \times 0.2 + 7^2 \times 0.4 = 28.8$$

logo

$$V\left[\frac{1-2X}{3}\right] = \frac{4}{9} \times \left(28.8 - 5^2\right) = 1.6889$$

(c) Seja Y = duração, em centenas de horas, de um componente eletrónico, uma variável aleatória contínua. Sabe-se que 250 horas = 2.5 centenas de hora.

Seja W a variável aleatória discreta:

W = número de componentes, de um grupo de 10000 componentes, que possuem uma duração superior a 250 horas. $W \sim B(10000, 0.16)$ pois

$n = 10000$ componentes

$$p = P(\text{Sucesso}) = P(Y > 2.5) = 1 - P(Y \leq 2.5) = 1 - \int_{-\infty}^{2.5} f(y)dy =$$

$$= 1 - \left(\int_{-\infty}^{1} 0dy + \int_{1}^{2.5} (2y^{-3})dy \right) = 1 - \left(0 + \left[2 \times \frac{y^{-2}}{-2} \right]_1^{2.5} \right) =$$

$$= 1 - \left(2 \times \frac{2.5^{-2}}{-2} - 2 \times \frac{1^{-2}}{-2} \right) = 0.16$$

então

$$E[W] = n \times p = 10000 \times 0.16 = 1600 \text{ componentes}$$

3. Numa aldeia A existe apenas uma farmácia onde é vendido um determinado medicamento de consumo pouco frequente. O reabastecimento, feito com periodicidade fixa mensal, é de 5 unidades. Uma vez esgotado o *stock* mensal, um doente que procure o referido medicamento terá de se deslocar à farmácia da aldeia B, até novo abastecimento da farmácia da aldeia A. Estudos realizados revelam que a procura mensal do referido medicamento é um variável aleatória de Poisson de média 2 medicamentos por mês.

[1.5] (a) Qual a probabilidade de, num determinado mês, haver moradores da aldeia A que se tenham de deslocar à farmácia da aldeia B para adquirir o referido medicamento?

[1.5] (b) Qual deveria ser o stock inicial mínimo que a farmácia A deveria adquirir em cada mês de forma a que a probabilidade de rutura fosse inferior a 1%?

3. Considere a variável aleatória discreta X = procura mensal do medicamento, $X \sim P(2)$, pois $E[X] = 2$ medicamentos por mês. Sabe-se que o *stock* mensal é de 5 medicamentos.

   (a) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 0.0166$

   (b) Pretende-se determinar $s > 0$ tal que

$$P(X > s) < 0.01 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq s) < 0.01 \Leftrightarrow F(s) > 0.99 \Leftrightarrow s \geq 6 \text{ medicamentos}$$

4. Numa refinaria de açúcar existem 2 tipos de máquinas, M_1 e M_2, que se destinam a embalar pacotinhos de açúcar. Qualquer pacotinho é considerado defeituoso se a sua quantidade de açúcar for inferior a 5 gramas ou superior a 8 gramas.

   (a) A quantidade de açúcar contida num pacotinho embalado por M_1 é uma variável aleatória X normalmente distribuída, de valor médio 7 gramas e desvio padrão 2 gramas.

   [1.5] i. Calcule $P(4 \leq X \leq 8 | X \geq 5)$.

   [2.0] ii. Após saírem das máquinas de embalar, os pacotinhos são metidos em caixas, contendo cada caixa 25 pacotinhos embalados pela mesma máquina. Qual a probabilidade de pelo menos 10 dos pacotinhos, de uma caixa embalada por M_1, serem defeituosos?

[1.5] (b) A quantidade de açúcar contida num pacotinho embalado por M_2 é uma variável aleatória Y normalmente distribuída, de valor médio μ_2 gramas e desvio padrão 1.1 gramas. Calcule μ_2 sabendo que 55% dos pacotinhos embalados por M_2 têm uma quantidade de açúcar superior a 6 gramas.

4. Qualquer pacotinho é considerado defeituoso se a sua quantidade de açúcar for inferior a 5 gramas ou superior a 8 gramas.

   (a) Considere a variável aleatória contínua X = quantidade, em gramas, de açúcar contida num pacotinho embalado por M_1, $X \sim N(7, 2)$ pois $\mu = E[X] = 7$ gramas e $\sigma = \sqrt{V[X]} = 2$ gramas.

   i. Pretende-se

$$P(4 \leq X \leq 8 | X \geq 5) = \frac{P(4 \leq X \leq 8 \wedge X \geq 5)}{P(X \geq 5)} = \frac{P(5 \leq X \leq 8)}{1 - P(X < 5)} \underset{\text{v.a. contínua}}{=}$$

$$= \frac{F(8) - F(5)}{1 - F(5)} = \frac{0.6915 - 0.1587}{1 - 0.1587} = 0.6333$$

ii. Seja W a variável aleatória discreta:

W = número de pacotinhos de açúcar, de uma caixa embalada por M_1, serem defeituosos.

$W \sim B\,(25, 0.4672)$ pois

$n = 25$ pacotinhos de açúcar numa caixa

$p = P\,(\text{Sucesso}) = P\,(\text{pacotinho defeituoso}) = P\,(X < 5 \vee X > 8) = 1 - P\,(5 \leq X \leq 8) \underset{\text{v.a. contínua}}{=}$

$= 1 - (F(8) - F(5)) = 1 - (0.6915 - 0.1587) = 0.4672$

então

$$P\,(W \geq 10) = 1 - P\,(W < 10) \underset{\text{v.a. discreta}}{=} 1 - P\,(W \leq 9) = 1 - F\,(9) = 1 - 0.1916 = 0.8084$$

(b) Seja Y = quantidade, em gramas, de açúcar contida num pacotinho embalado por M_2, tem-se $Y \sim N(\mu_2, 1.1)$ pois $\sigma = \sqrt{V[Y]} = 1.1$ gramas. Tem-se

$$Y \sim N(\mu_2, 1.1) \Leftrightarrow Z = \frac{Y - \mu_2}{1.1} \sim N(0,1)$$

Pretende-se determinar μ_2 tal que

$$P\,(Y > 6) = 0.55 \Leftrightarrow 1 - P\,(Y \leq 6) = 0.55 \Leftrightarrow P\,(Y \leq 6) = 0.45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{6 - \mu_2}{1.1}\right) = 0.45 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{6 - \mu_2}{1.1}\right) = 0.45 \Leftrightarrow \frac{6 - \mu_2}{1.1} = z_{0.45} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - \mu_2}{1.1} = -0.1257 \Leftrightarrow \mu_2 = 6.1382 \text{ gramas}$$