DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESTATÍSTICA PARA A SAÚDE
1.º Semestre - 2023/2024
1.º Teste

Data: 18 novembro de 2023 Duração: 2 horas

- Parte do teste foi resolvido recorrendo ao software R: ver script_1teste_ES_23_24.R.

Resolução

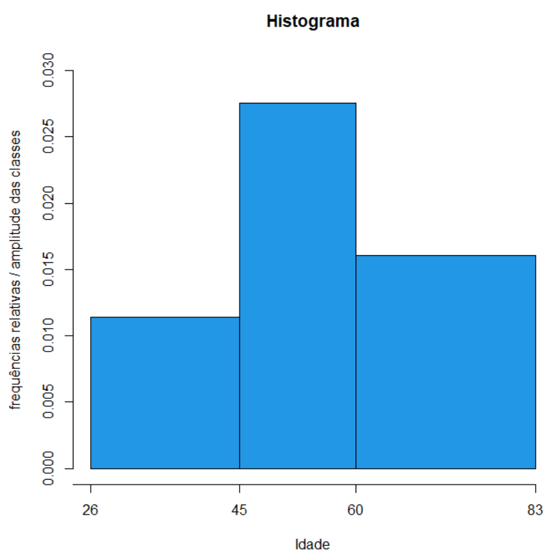
1. (a) Amostra: pacientes com distonia cervical que estão a fazer tratamento
Dimensão da Amostra: $n = 631$ pacientes
Unidade estatística: pacientes com distonia cervical
Variável estatística: treat. Classificação: Qualitativa nominal (mas se considerarmos que Placebo corresponde a 0 unidades de Botox B, pode ser classificada como qualitativa ordinal).
Variável estatística: age. Classificação: Quantitativa contínua (mas foi recolhida como quantitativa discreta)
Variável estatística: sex. Classificação: Qualitativa nominal
Variável estatística: twstrs. Classificação: Quantitativa contínua (mas foi recolhida como quantitativa discreta, também pode ser entendida como uma escala logo pode ser classificada como qualitativa ordinal).

(b) Tabela de frequências da variável sex:

i	Género x_i	Frequência Absoluta n_i	Frequência Relativa f_i
1	Feminino	395	0.626
2	Masculino	236	0.374
		$n = 631$	1

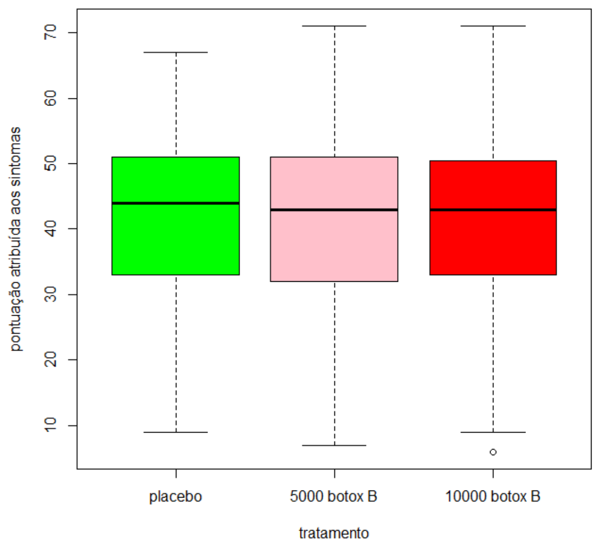
moda = Feminino
Com base na tabela de frequências pode-se comprovar que a moda é Feminino, pois é o que apresenta maior frequênmcia (absoluta e relativa). Logo a afirmação parece ser verdadeira, nesta amostra a distonia cervical ocorre com mais frequência nas mulheres do que nos homens.

(c) Como pretende-se ver o que acontece na classe $[45, 60[$, vamos construír um histograma com 3 classes: [mínimo dos dados, 45[, $[45, 60[$, [60, máximo dos dados]



Com base no histograma, a classe que apresenta maior frequência relativa proporcional à sua amplitude é o intervalo $[45, 60[$. A afirmação parece ser verdadeira, nesta amostra e com base no histograma, a distonia cervical é mais frequente em pessoas com idade no intervalo $[45, 60[$ quando comparado com os outros intervalos.

(d) Diagrama de extremos e quartis da pontuação atribuída aos sintomas por tipo de tratamento:



Não parece haver diferenças significativas em relação à pontuação atribuída aos sintomas nos diferentes tratamentos, os quartis são quase idêncticos. Os tratamentos com toxina botulínica B apresentam os valores mais baixos (6 e 7 pontos) e mais altos dessa pontuação (71 pontos). No caso do tratamento com 10 000 unidades da toxina botulínica B, o valor 6 aparece como o único "outlier" e é um "outlier" considerado moderado.

(e) O gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição Normal é um gráfico simétrico. Então vamos analisar a simetria com base nas medidas de localização central:

- moda = 57 anos
- mediana = 56 anos
- média = 55.616 anos

Como os valores são todos próximos, podemos dizer que os dados não se afastam muito da simetria no entanto apresentam uma ligeira assimetria negativa pois:

$$\text{média} < \text{mediana} < \text{moda}$$

Como a assimetria negativa não é muito acentuada ($b_1 = -0.0224 \approx 0$), então concordo que os dados da idade talvez possam ser modelados por uma distribuição Normal.

2. (a) A variável aleatória discreta X = número de próteses defeituosas produzidas por uma máquina em período experimental, tem domínio $D_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a sua função de probabilidade é:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

pois

- $f(1) = F(1) = 0.10$
- $f(2) = F(2) - F(1) = 0.40 - 0.10 = 0.30$
- $f(3) = F(3) - F(2) = 0.70 - 0.40 = 0.30$
- $f(4) = F(4) - F(3) = 0.90 - 0.70 = 0.20$
- $f(5) = F(5) - F(4) = 1 - 0.90 = 0.10$

(b) Pretende-se

$$P(X \geq 2|X \leq 4) = \frac{P(X \geq 2 \wedge X \leq 4)}{P(X \leq 4)} = \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{F(4)} = \frac{P(1 < X \leq 4)}{0.90} =$$
$$= \frac{F(4) - F(1)}{0.90} = \frac{0.90 - 0.10}{0.90} = \frac{8}{9} = 0.8889$$

(c) Pretende-se

$$V\left[\frac{7-2X}{3}\right] = V\left[\frac{7}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)X\right] = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times V[X] = \frac{4}{9} \times \left(E\left[X^2\right] - E^2[X]\right) =$$
$$= \frac{4}{9} \times \left(9.7 - 2.9^2\right) = 0.5733 \text{ defeitos}^2$$

pois

$$E[X] = \sum_x x f(x) = 1 \times f(1) + 2 \times f(2) + 3 \times f(3) + 4 \times f(4) + 5 \times f(5) =$$
$$= 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.1 = 2.9 \text{ defeitos}$$
$$E\left[X^2\right] = \sum_x x^2 f(x) = 1^2 \times f(1) + 2^2 \times f(2) + 3^2 \times f(3) + 4^2 \times f(4) + 5^2 \times f(5) =$$
$$= 1 \times 0.1 + 4 \times 0.3 + 9 \times 0.3 + 16 \times 0.2 + 25 \times 0.1 = 9.7 \text{ defeitos}^2$$

(d) Seja Y = tempo, em minutos, que uma destas próteses demora a ser fabricada.
Como 1 hora = 60 minutos, pretende-se

$$P(Y > 60) = \int_{60}^{+\infty} f(y)dy = \int_{60}^{80} \left(\frac{1}{40} - \frac{y}{3200}\right) dy + \int_{80}^{+\infty} 0dy = \left[\frac{1}{40} \times y - \frac{1}{3200} \times \frac{y^2}{2}\right]_{60}^{80} + 0 =$$
$$= \left(\frac{1}{40} \times 80 - \frac{1}{3200} \times \frac{80^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{40} \times 60 - \frac{1}{3200} \times \frac{60^2}{2}\right) = 0.0625$$

3. Seja X = número de falhas, por ano, numa prótese de disco cervical, $X \sim P(2)$ pois $E[X] = 2 = \lambda$.

(a) X' = número de falhas, em 5 anos, numa prótese de disco cervical. $X' \sim P(10)$ pois

$$\begin{array}{lcc} 1 \text{ ano} & \mapsto & \lambda = 2 \\ 5 \text{ anos} & \mapsto & \lambda = 2 \times 5 = 10 \end{array}$$

Pretende-se

$$P\left(X' = 3\right) = f(3) = 0.0076$$

(b) Seja T = tempo, em meses, entre falhas consecutivas. Pela relação entre a distribuiçao de Poisson e a distribuição Exponencial tem-se $T \sim Exp(6)$ pois $\theta = \frac{12}{2} = 6$. Logo

$$P(T > 6|T \geq 4) \underset{(*)}{=} P(T > 6 - 4) = P(T > 2) = 1 - P(T \leq 2) = 1 - F(2) = 0.7165$$

$(*)$ propriedade "Falta de memória" da distribuição Exponencial

(c) Seja Y = resistência, em MPa (megapascals), das próteses produzidas pelo material A, tem-se $Y \sim N(300, 20)$ pois $\mu = E[Y] = 300$ e $\sigma = \sqrt{V[X]} = 20$.

i. Seja W = número de próteses com fratura prematura, num grupo de 7 próteses, tem-se $W \sim B(7, 0.1587)$ pois

$$\begin{aligned} &n = 7 \\ &p = P(\text{fratura prematura}) = P\left(Y < 280\right) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} F(280) = 0.1587 \end{aligned}$$

Pretende-se

$$P\left(W \geq 1\right) = 1 - P\left(W < 1\right) \underset{\text{v.a. discreta}}{=} 1 - P\left(W \leq 0\right) = 1 - F(0) = 0.7016$$

ii. Pretende-se determinar m tal que

$$P\left(Y < m\right) = 0.05 \underset{\text{v.a. contínua}}{\Leftrightarrow} F(m) = 0.05 \Leftrightarrow m = 267.1029 \text{ MPa}$$

iii. Seja V = resistência das próteses produzidas com um material B, tem-se $V \sim N(290, \sigma)$ pois $\mu = E\left[V\right] = 290$. Tem-se

$$V \sim N(290, \sigma) \Leftrightarrow Z = \frac{V - 290}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Pretende-se determinar σ tal que

$$\begin{aligned} &P\left(V > 250\right) = 0.80 \Leftrightarrow 1 - P\left(V \leq 250\right) = 0.80 \Leftrightarrow P\left(V \leq 250\right) = 0.20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{250 - 290}{\sigma}\right) = 0.20 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right) = 0.20 \Leftrightarrow \frac{-40}{\sigma} = z_{0.20} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-40}{\sigma} = -0.8416 \Leftrightarrow \sigma = 47.52732 \text{ MPa} \end{aligned}$$