4장 정적분

3.9~4.4절 부정적분과 정적분

목차

1. 부정적분의 정의와 그 성질
2. 정적분의 정의
3. 정적분의 성질
4. 미적분학의 정리
5. 곡선의 둘러싸인 넓이(즉, 정적분)를 근사적으로 구하는 방법

1. 부정적분 정의와 성질

1. 부정 적분의 정의

일반적으로 x에 대한 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$ 또는 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 역도함수 또는 부정적분이라 한다.

(표시) $\int f(x)dx = F(x)+C$

2. 부정 적분의 성질

함수	특수 역도함수	함수	특수 역도함수
$cf(x)$	$cF(x)$	$\cos x$	$\sin x$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$	$\sin x$	$-\cos x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec^2 x$	$\tan x$
		$\sec x \tan x$	$\sec x$

2. 정적분의 정의

구간 $[a,b]$에서 정의된 임의의 함수 f에 대하여 a에서 b까지의 f의 정적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

※ $f(x)$: 적분 가능 on I 일 때,

(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(2) $(a<b)$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Th f : 연속 on $[a,b]$ $\Rightarrow$ f : 적분 가능 on $[a,b]$

3. 정적분의 성질

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, c는 임의의 상수

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, c는 임의의 상수

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

6. $a \le x \le b$에 대해 $f(x) \ge 0$이면 $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$이다.

7. $a \le x \le b$에 대해 $f(x) \ge g(x)$이면 $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$이다.

8. $a \le x \le b$에 대해 $m \le f(x) \le M$이면

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

4 . 미분 적분학 정리

1) 미적분학 정리 I

$f(x)$ 연속 on $[a,b]$이고, $F(x)$: $f(x)$의 부정적분이라면

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

2) 미적분학 정리 II

$f(x)$ 연속 on $[a,b]$이고, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$라면, $F'(x) = f(x)$ on $[a,b]$

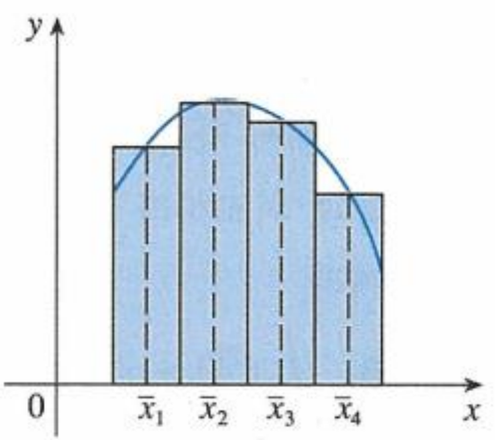
☞ $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$이면 $F'(x) = f(u(x))u'(x)$

(정리) 적분의 평균값 정리

$f(x)$ 연속 on $[a,b]$이면, $\exists\, c \in (a,b)\ \int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)$

5. 곡선에 둘러싸인 넓이(1)

1. 중점 법칙



중점 법칙

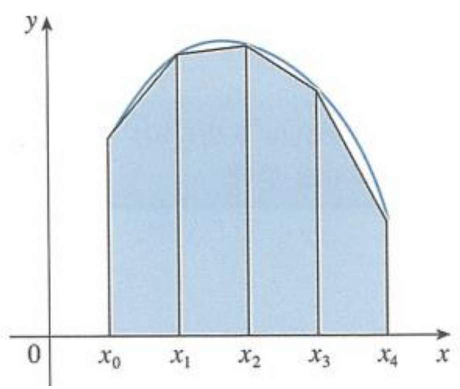
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\{f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}) + \cdots + f(\overline{x_n})\}$$

여기서 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ 이고

$\overline{x_i} = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$는 $[x_{i-1},\ x_i]$의 중점이다.

5. 곡선에 둘러싸인 넓이(2)

2. 사다리꼴 법칙



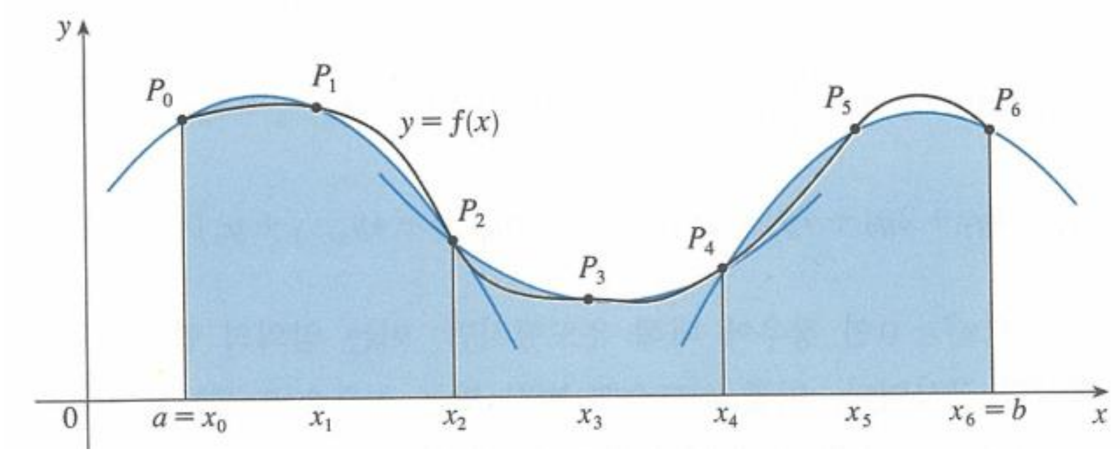
사다리꼴 법칙

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\{f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

여기서 $\Delta x = (b-a)/n$이고 $x_i = a + i\Delta x$이다.

5. 곡선에 둘러싸인 넓이(3)

3. Simpson 법칙



심프슨의 법칙

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

여기서 n은 짝수이고 $\Delta x = (b-a)/n$이다.