

5장 적분의 활용

목 차

1. 치환적분법(4.5절)
2. 곡선에 둘러싸인 넓이(5.1절)
3. 부피(5.2~5.3절)
 1. 입체 도형의 부피
 2. 회전체의 부피
 1. 워셔법
 2. 원주각법
4. 함수의 평균값(5.5절)

1. 치환적분법

1. 부정 적분의 치환 적분법

$$\int f(t) dt = F(t) \text{ 일 때,}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

$$\Rightarrow (1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

$$(2) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

2. 정적분의 치환 적분법

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

연습문제

14. $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x \, dx$

15. $\int \sec^3 x \tan x \, dx$

20. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x} \, dx$

22. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x) \, dx$

33. f 가 연속일 때 다음을 증명하라.

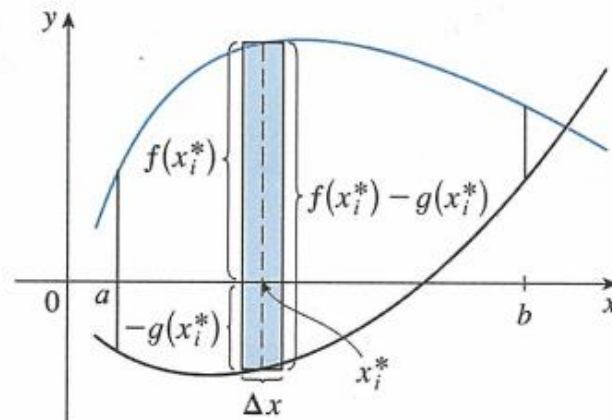
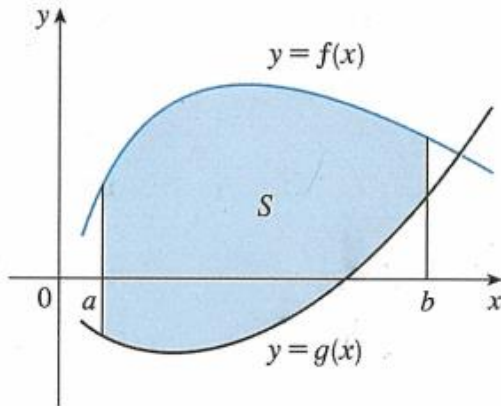
$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x) \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) \, dx$$

1. 넓이(1)

1) $f(x), g(x)$: 연속 on $[a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ 이면

곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a$ 와 $x = b$ 로 이루어진 도형의 내부 넓이

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



【예제 1】 $y = x^2 + 1$, $y = x$ 그리고 $x = 0$ 과 $x = 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

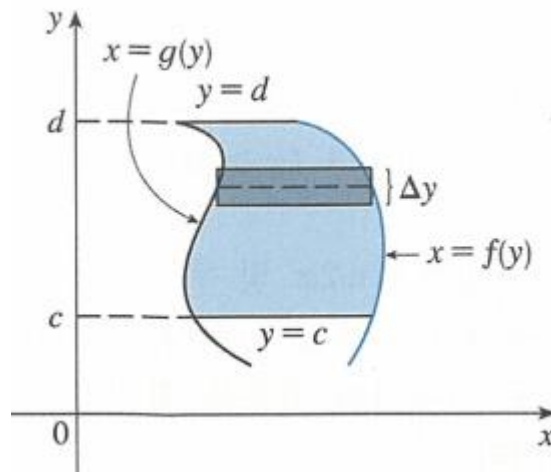
【예제 2】 포물선 $y = x^2$ 과 $y = 2x - x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

1. 넓이(2)

2) $x = f(y), x = g(y)$: 연속 on $[c, d], f(y) \geq g(y)$ 이면

곡선 $x = f(y)$ 와 $x = g(y)$ 및 두 직선 $y = a$ 와 $y = b$ 로 이루어진 도형의 내부 넓이

$$S = \int_c^d \{f(y) - g(y)\} dy$$

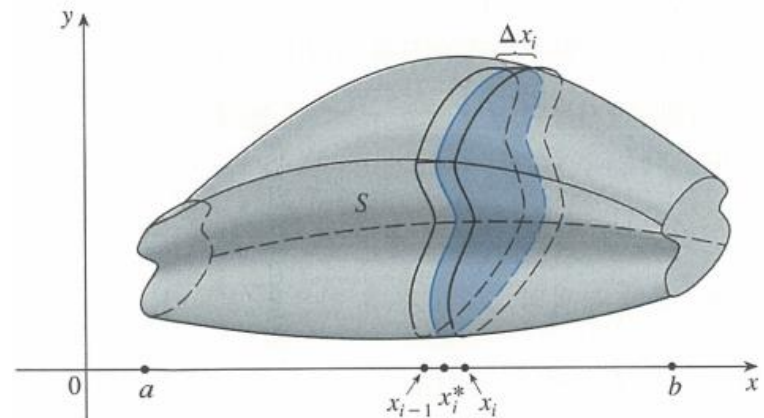
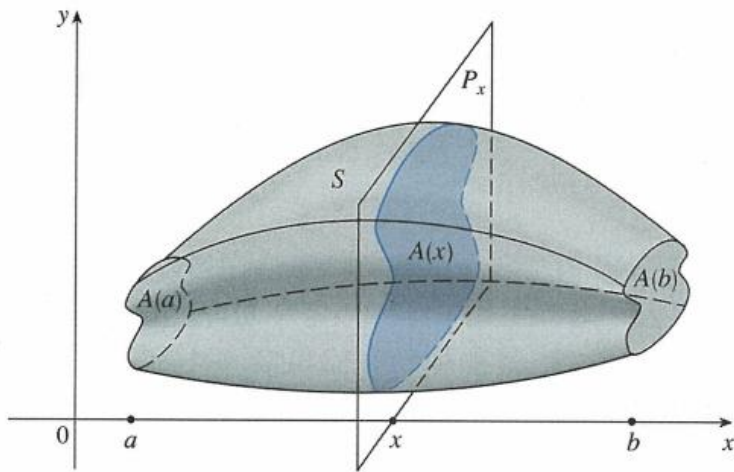


◀예제 5▶ 직선 $y = x - 1$ 과 포물선 $y^2 = 2x + 6$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

2. 부피(1)

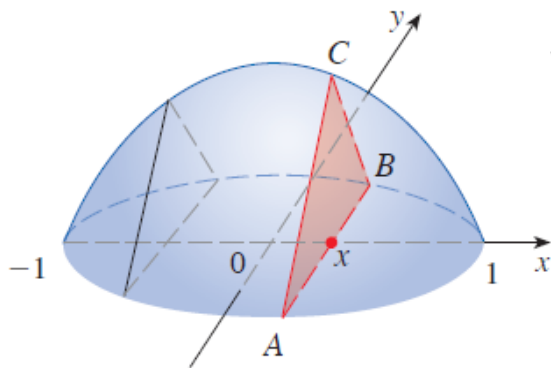
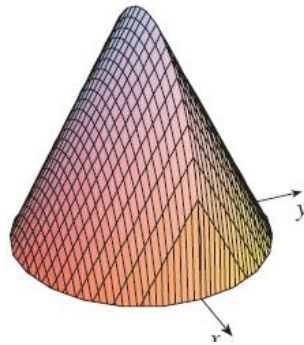
1) 절단면을 이용한 부피

$$V = \int_a^b A(x) dx, \quad A(x) : \text{절단면의 넓이}$$

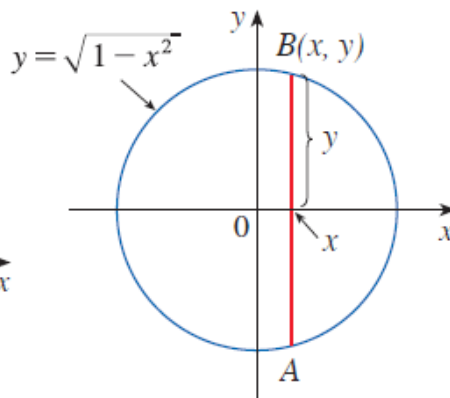


2. 부피(2)

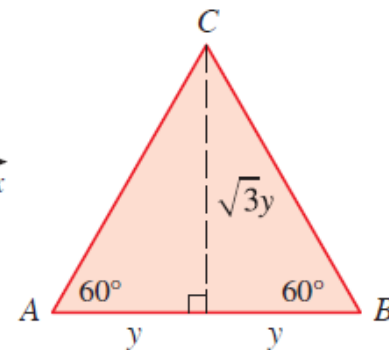
Ex) 입체의 밑면은 중심이 원점이고, 반지름이 1인 원이다. 밑면에 수직이고 서로 평행인 단면들은 모두 정삼각형이다. 이 입체의 부피를 구하시오.



(a) 입체



(b) 밑면



(c) 단면

2. 부피(3)

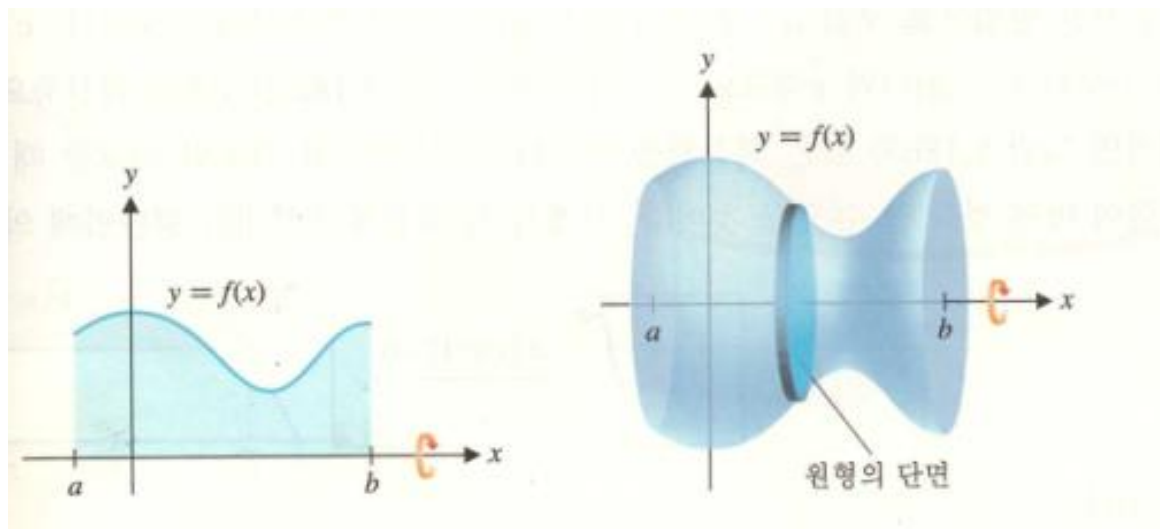
2) 회전체의 부피

① 원판법 (method of disks)

※ 모든 회전체의 단면은 원형

$f(x) \geq 0$ 연속 on $[a, b]$ $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역을 x 축 방향으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피

$$V = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx$$



2. 부피(4)

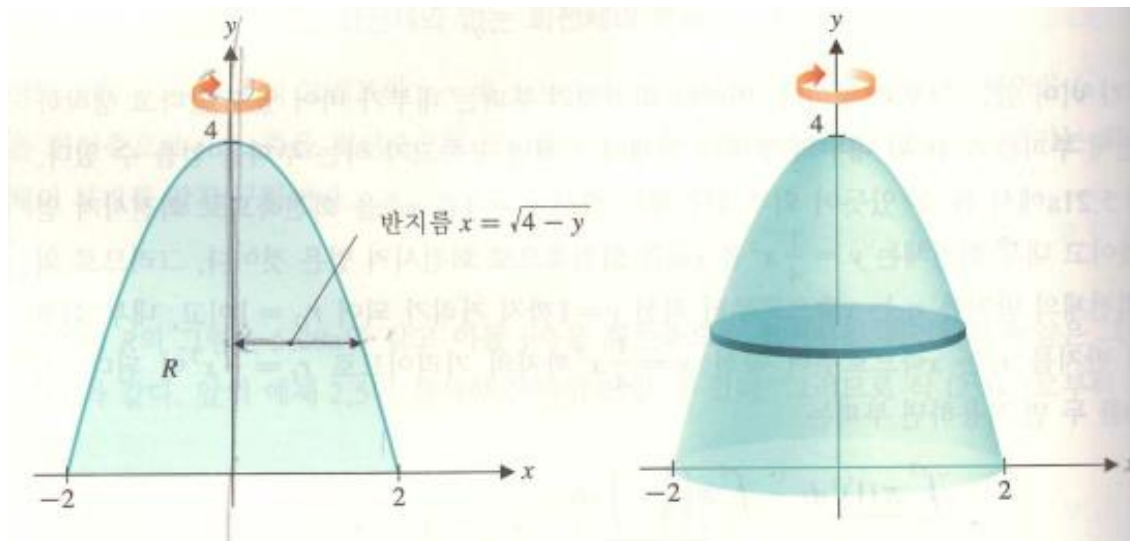
② 워셔법 (method of washer)

※ 회전체가 움푹 파여 그릇 모양이거나 내부에 구멍이 있는 경우

$$V = \{\text{외부회전체부피}\} - \{\text{내부회전체부피}\}$$

Ex) 영역 $R: y = 4 - x^2, y = 0$ 에 둘러싸인 부분

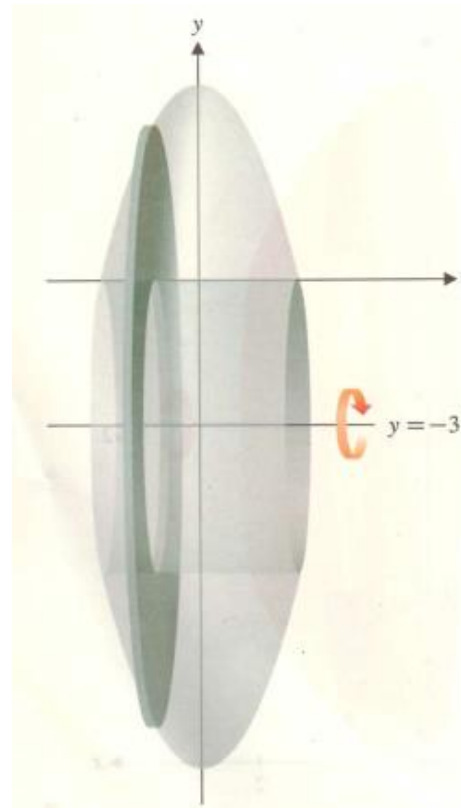
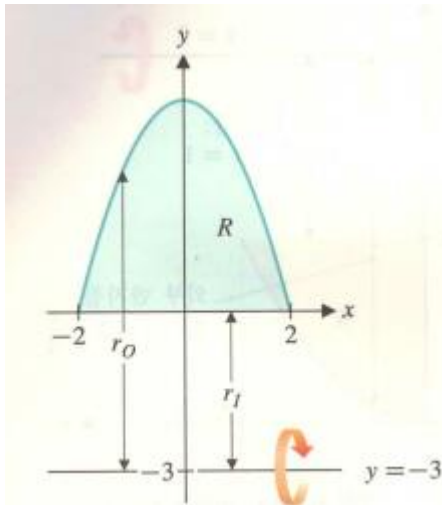
(a) y 축을 회전축



2. 부피(5)

Ex) 영역 $R: y = 4 - x^2, y = 0$ 에 둘러싸인 부분

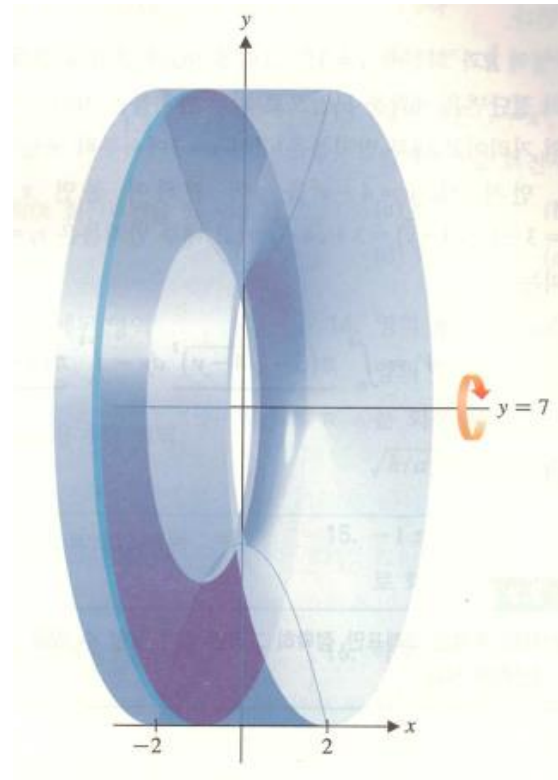
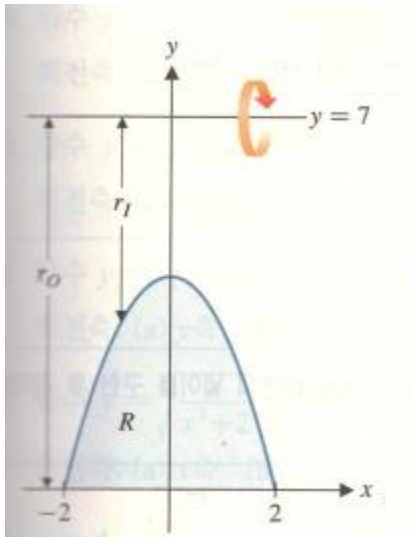
(b) $y = -3$ 을 회전축



2. 부피(5)

Ex) 영역 $R: y = 4 - x^2, y = 0$ 에 둘러싸인 부분

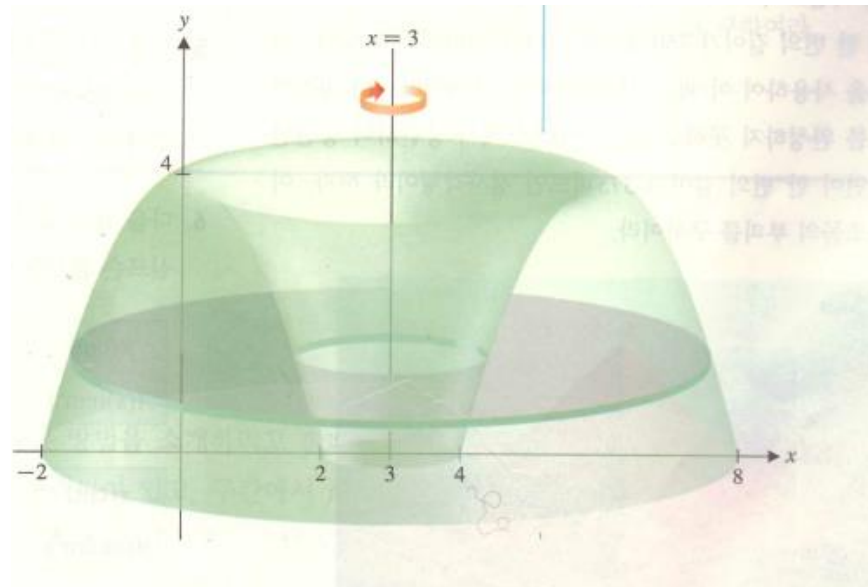
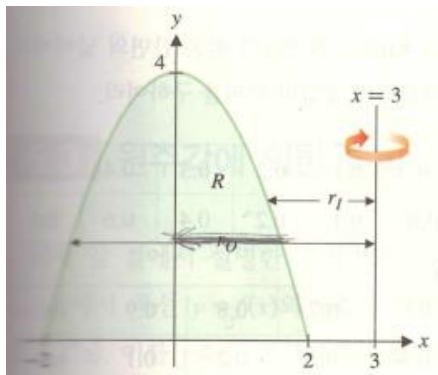
(c) $y = 7$ 을 회전축



2. 부피(6)

Ex) 영역 R: $y = 4 - x^2$, $y = 0$ 에 둘러싸인 부분

(d) $x = 3$ 을 회전축



$$\text{워셔법} : \int_0^4 \pi (3 + \sqrt{4 - y})^2 dy - \int_0^4 \pi (3 - \sqrt{4 - y})^2 dy$$

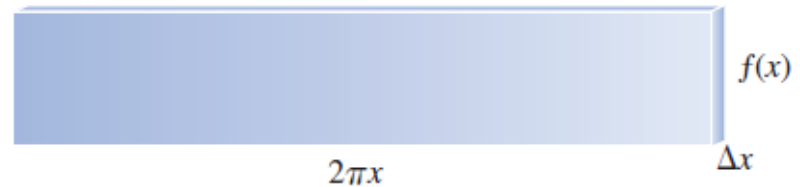
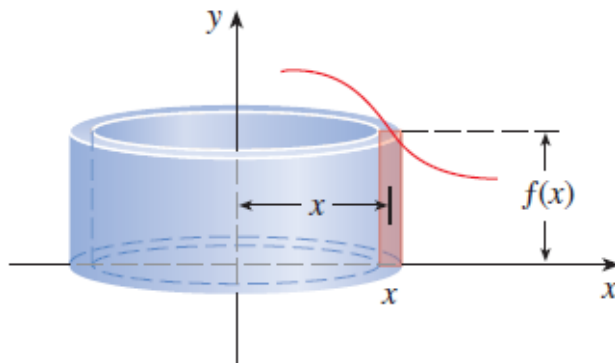
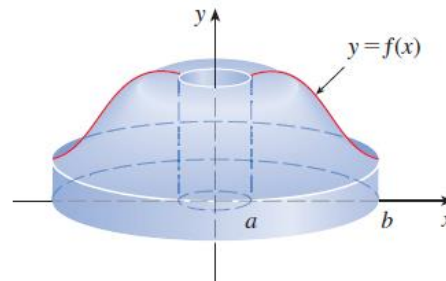
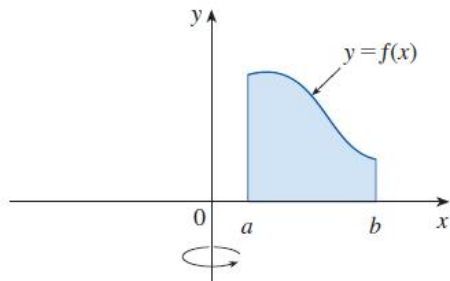
$$\text{원주각법 (원통껍질 방법)} : \int_{-2}^2 2\pi(3 - x)(4 - x^2)dx$$

2. 부피(7)

③ 원주각법(기둥껍질에 의한 부피)

※ 회전체가 움푹 파여 그릇 모양이거나 내부에 구멍이 있는 경우

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad (x : \text{반지름}, f(x) : \text{높이}, dx : \text{두께})$$



2. 부피(8)

【예제 1】 $y = 2x^2 - x^3$ 과 $y = 0$ 으로 유계된 영역을 y 축 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

【예제 2】 $y = x$ 와 $y = x^2$ 사이의 영역을 y 축 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

【예제 3】 원통껍질의 방법을 이용해서 0에서 1까지 곡선 $y = \sqrt{x}$ 아래의 영역을 x 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

【예제 4】 $y = x - x^2$ 과 $y = 0$ 으로 유계된 영역을 직선 $x = 2$ 를 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

3. 함수의 평균값

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

◀예제 1▶ 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x) = 1 + x^2$ 의 평균값을 구하라.