Chapter 2. 행렬식

일반적인 $n \times n$인 경우의 행렬식은 복잡한 기호를 포함하여 이해하기 어려운 점이 있으므로 먼저 2×2와 3×3인 경우의 행렬식을 다룬다.

2.1 행렬식의 존재

귀납법을 이용하여 **행렬식**을 정의하고, 동시에 행렬식을 계산하는 공식을 도입하고자 한다.

2×2행렬식

행렬

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

를 체 K에서의 2×2 행렬이라 하면, A의 행렬식을 $ad - bd$로 정의한다. 또한, 행렬식은 K의 원소가 된다. 이 행렬식을

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

로 나타낸다.

행렬식은 행렬 A의 함수로 생각할 수도 있지만, 또한 A의 두 열의 함수로도 생각할 수 있다. 즉, 이 두 열을 A^1, A^2라 하면 행렬식은

$$D(A), \det(A), D(A^1, A^2)$$

등으로 나타낸다.

다음 성질은 행렬식에서 기본이 되는 성질로서 직접 계산하여 쉽게 보일 수 있다.
 (i) 열벡터의 함수로서 행렬식은 선형이다.

(ii) 두 열이 같으면 행렬식은 0 이다.

(iii) A 가 단위행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이면, $\det(A) = 1$ 이다.

(iv) 어떤 열의 상수배를 다른 열에 더하여도 행렬식의 값은 변하지 않는다.

(v) 두 열을 교환하면 행렬식은 부호만 바뀐다.

(vi) A 의 행렬식은 그 전치행렬의 행렬식과 같다.

3×3 행렬식

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

를 3×3 행렬이라 하자. A 의 행렬식을 행에 관한 전개에 의하여, 특히 첫째 항에 대한 전개로 정의하면, 즉

$$\begin{aligned} \det(A) &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ f & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \end{aligned}$$

로 정의한다. 또한 이 합을 다음과 같이 나타낼 수도 있다. A 에서 i 번째 행과 j 번째 열으 제외한 행렬을 A_{ij} 라 하면, 위의 $\det(A)$ 는

$$\det(A) = a\det(A_{11}) - b\det(A_{12}) + c\det(A_{13})$$

로 나타낼 수 있다.

(예제 1)

행렬 A를

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

라 하자. 이때 행렬식 $\det(A)$를 구하여라.

3×3 행렬의 행렬식은 2×2와 마찬가지로 세 열의 함수로 생각할 수 있다. 즉, 3×3 행렬 A의 세 열을 A^1, A^2, A^3라 하면 행렬식은

$$D(A) = D(A^1, A^2, A^3)$$

으로 나타낸다.

3×3 행렬식은 다음의 성질들이 성립하고, 이것은 일반적인 경우에도 성립하므로 기술은 일반적인 경우로 하고 증명은 3×3 행렬식에서 한다.

<u>정리 2.1.1</u>

행렬식은 다음 성질을 만족한다.

(a) 각 열벡터의 함수로서 행렬식은 선형함수이다. 즉 j번째 열 A^j가 두 열벡터의 합이면, 예를 들어 $A^j = C + C'$ 이면

$$\begin{aligned} &\det(A^1, \cdots, C + C', \cdots, A^n) \\ &= \det(A^1, \cdots, C, \cdots, A^n) + \det(A^1, \cdots, C', \cdots, A^n) \end{aligned}$$

이고, 또한 t가 수이면

$$\det(A^1, \cdots, tA^j, \cdots, A^n) = t\det(A^1, \cdots, A^j, \cdots, A^n)$$

이 성립한다.

(b) 두 개의 인접한 열이 같으면, 즉 어떤 $j = 1, 2, \cdots, n-1$에 대해 $A^i = A^{j+1}$이면, 행렬식 $D(A) = 0$이다.

(c) 단위행렬 I의 행렬식 $D(I) = 1$이다.

위의 증명에서 3×3 행렬식의 성질을 증명하기 위해서 2×2 행렬식의 성질이 이용되었음을 알 수 있다.

3×3 행렬식의 전개에서 첫째 행을 택한 특별한 이유는 없고, 다른 행 또는 열을 택하여도 전개할 수 있다. 부호는 다음 양식에 따라 결정된다.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

3×3 행렬식이 열의 함수로서 선형이므로 삼선형(tri-linear)이라고 할 수 있다. 이는 2×2 행렬식이 겹선형(bi-linear)이 것과 같은 맥락이다.

<u>정리 2.1.2</u>
$\det(A) = \det(A^T)$이다.
즉 행렬의 행렬식은 그 행렬의 전치행렬의 행렬식과 같다.

(예제 2)
형렬식

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

을 셋째 열에 대하여 전개하여 계산하여라.

<u>$n \times n$ 행렬식</u>

다음과 같은 n개의 열벡터로 이루어진 함수 F를 생각하자.

$$F : K^n = K \times \cdots \times K \to K, \text{ 여기서 } K\text{는 체}$$

F가 각 열에서 선형이면, 즉

$$F(A^1, \cdots C + C', \cdots, A^n) = F(A^1, \cdots, C, \cdots, A^n) + F(A^1, \cdots, C', \cdots, A^n)$$

$$F(A^1, \cdots, tC, \cdots, A^n) = tF(A^1, \cdots, C', \cdots, A^n)$$

을 만족할 때 F를 다선형사상(multi-linear map)이라 한다.

또한 어떤 j에 대하여 $A^{j} = A^{j+1}$이면

$$F(A^{1}, \cdots, A^{j}, A^{j+1}, \cdots A^{n}) = 0$$

을 만족할 때, F를 교대함수(alternating function)라 한다.

<u>**정리 2.1.3**</u>

$F(I) = 1$인 다선형 교대함수

$$F : K^{n} = K \times \cdots \times K \to K$$

가 존재한다.

정리 2.1.2에 의하여 다음 정리도 성립함을 알 수 있다.

<u>**정리 2.1.4**</u>

행렬식은 행과 열에 관한 전개를 만족한다. $n \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}]$의 임의의 열 A^{j}에 대하여

$$D(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj})$$

가 성립한다.