

제7장 적분 기법

목 차

1. 치환적분법
2. 부분적분법
3. 삼각함수 적분
4. 쌍곡선 함수의 적분
5. 무리함수 적분
6. 유리함수 적분
7. 특이적분

1. 치환적분법

1. 부정 적분의 치환 적분법

$$\int f(t) dt = F(t) \text{ 일 때,}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

$$\Rightarrow (1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

$$(2) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

2. 정적분의 치환 적분법

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

1. 부분 적분법

$e^x, x^n, \sin x, \cos x, \ln x$ 계열, \arcsin 계열 형태의 함수들에 곱으로 되어 있는 경우

1. 부정 적분의 부분 적분법

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx + C$$

2. 정적분의 부분 적분법

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

☞ $\int \{\ln x\}^n \frac{1}{x} dx$ 인 경우, 치환적분법

☞ $f(x)$: \arcsin 계열 > $\ln x$ 계열 > x^n > 삼각함수 > 지수함수

7.1 예제 및 연습문제 풀이

◀예제 1▶ $\int x \sin x \, dx$ 를 구하라. ▶예제 2▶ $\int \ln x \, dx$ 를 구하라.

◀예제 4▶ $\int e^x \sin x \, dx$ 를 구하라. ▶예제 5▶ $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$ 를 계산하라.

7. $\int \cos^{-1} x \, dx$ 9. $\int t \csc^2 t \, dt$ 10. $\int (\ln x)^2 \, dx$

16. $\int_0^2 y \sinh y \, dy$ 20. $\int_0^{\pi/3} \sin x \ln(\cos x) \, dx$

22. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ 24. $\int x \ln(1+x) \, dx$

32. 곡선 $y = x^2 \ln x$ 와 $y = 4 \ln x$ 로 유계된 영역의 넓이를 구하라.

35. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$; $x = 1$

36. 곡선 $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$ 로 유계된 영역을 다음 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

(a) y 축

(b) x 축

7.2 기본 공식

삼각함수와 쌍곡선 함수의 덧셈공식

	삼각함수	쌍곡선 함수
항등식	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$
덧셈정리	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$ $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$
2배각공식	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ $\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$
반각공식	$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$	$\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cosh x - 1)$ $\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cosh x + 1)$ $\tanh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}$

1. 삼각함수 적분(1)

1. 삼각함수의 유리식 적분

(1) $\int R(\sin x) \cos x \, dx \Rightarrow \sin x = t$ 로 치환

(2) $\int R(\cos x) \sin x \, dx \Rightarrow \cos x = t$ 로 치환

(3) $\int R(\tan x) \sec^2 x \, dx \Rightarrow \tan x = t$ 로 치환

(4) $\int R(\sin x, \cos x) \, dx \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = t$ 로 치환

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

2. 삼각함수 적분(2)

2. 삼각함수의 거듭제곱 적분

$$(1) \int \sin^n x \, dx, \int \cos^n x \, dx$$

$$(2) \int \tan^n x \, dx, \int \cot^n x \, dx$$

$$(3) \int \sec^n x \, dx, \int \csc^n x \, dx$$

☞ 부분적분을 이용한 점화식

$$(1) \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$(2) \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$(3) \int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

$$(4) \int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

2. 삼각함수 적분(3)

3. 삼각함수 일반적인 적분

$$(1) \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$(2) \int \tan^m x \sec^n x \, dx, \int \cot^m x \csc^n x \, dx$$

$$(3) \int \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \, dx$$

$$(4) \int \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x - \sin(m-n)x] \, dx$$

$$(5) \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx$$

$$(6) \int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] \, dx$$

3. 쌍곡선함수의 적분(2)

쌍곡선 함수의 적분

$$(1) \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$(2) \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$(3) \int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + C$$

$$(4) \int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + C$$

$$(5) \int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1} |\sinh x| + C$$

$$(6) \int \operatorname{csch} x \, dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

Weierstrass 치환

$\int R(\sin x, \cos x) \, dx$	$\int R(\sinh x, \cosh x) \, dx$
$\tan \frac{x}{2} = t \quad \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$	$\tanh \frac{x}{2} = t \quad \begin{cases} \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \\ \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \frac{2}{1-t^2} dt \end{cases}$

7.2 연습문제 풀이

1-28 다음 적분을 계산하라.

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

10. $\int \sin^2 x \sin 2x \, dx$

13. $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$

14. $\int \tan^3 x \sec x \, dx$

20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^5 \phi \csc^3 \phi \, d\phi$

22. $\int \sin 8x \cos 5x \, dx$

25. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$

27. $\int x \tan^2 x \, dx$

28. $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$

35-36 다음 곡선으로 유계된 영역을 지정된 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

36. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi/4; y = 1$

4. 무리 함수 적분

(1) $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx \Rightarrow \sqrt[n]{ax+b} = t$ 로 치환

(2) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ 인 경우 삼각 치환

(3) $(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(4) $(\sinh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(5) $(\cosh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \left(\frac{x}{a} > 1\right)$

삼각 치환표

식	치환	등식
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

7.3 예제 & 연습문제(1)

《예제 1》 $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$ 를 계산하라.

《예제 2》 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

《예제 3》 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}} dx$ 를 구하라.

《예제 4》 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$ 를 구하라.

《예제 5》 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0$ 을 계산하라.

《예제 7》 $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$ 를 계산하라.

7.3 예제 & 연습문제(2)

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \sin \theta$

4. $\int \frac{\sqrt{4x^2-25}}{x} dx, \quad x = \frac{5}{2} \sec \theta$

5. $\int x^3 \sqrt{16+x^2} dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

17. $\int \sqrt{x^2+2x} dx$

12. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}} dx$

19. (a) 삼각치환을 이용해서 다음을 보여라.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

(b) 쌍곡선치환 $x = a \sinh t$ 를 이용해서 다음을 보여라.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

이 두 식은 6.7절의 공식 **3**과 관련이 있다.

5. 유리함수 적분

$$(1) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$(2) (\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$(3) \begin{cases} (\tanh^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2} & |x| < 1 \\ (\coth^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2} & |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C & \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \\ \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C & \left|\frac{x}{a}\right| > 1 \end{cases}$$

부분분수의 해

$$(1) \frac{p(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(cx+d)}$$

$$(2) \frac{p(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{C}{(ax+b)^n}$$

$$(3) \frac{p(x)}{(ax+b)(cx^2+dx+e)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)}$$

7.4 예제 & 연습문제(1)

◀예제 2▶ $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$ 를 계산하라.

◀예제 4▶ $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$ 를 구하라.

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

◀예제 5▶ $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$ 를 계산하라.

◀예제 6▶ $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$ 를 계산하라.

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

◀예제 8▶ $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$ 를 계산하라.

7.4 예제 & 연습문제(2)

4. $\int \frac{5}{(x-1)(x+4)} dx$

5. $\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} dx$

8. $\int \frac{x^2}{x-1} dx$

10. $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} dx$

16. $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$

17. $\int \frac{1}{x^3-1} dx$

19. $\int \frac{5x^4+7x^2+x+2}{x(x^2+1)^2} dx$

25. $\int \frac{1}{x-3\sqrt{x}+2} dx$

28. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

적분 공식표 적분상수는 생략했다.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$3. \int e^x dx = e^x$$

$$4. \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b}$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$8. \int \csc^2 x dx = -\cot x$$

$$9. \int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$10. \int \csc x \cot x dx = -\csc x$$

$$11. \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$12. \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x|$$

$$13. \int \tan x dx = \ln|\sec x|$$

$$14. \int \cot x dx = \ln|\sin x|$$

$$15. \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$16. \int \cosh x dx = \sinh x$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0$$

$$*19. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$*20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

6. 이상 적분 (1)

1. 특이 적분

피적분함수가 불연속인 이상 적분

case 1	case2
① $f(x)$: 연속 on $[a, b)$ 즉, $x = b$: 특이점	① $f(x)$: 연속 on $(a, b]$ 즉, $x = a$: 특이점
② $x \rightarrow b^-$ 일 때, $ f(x) \rightarrow \infty$ $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$	② $x \rightarrow a^+$ 일 때, $ f(x) \rightarrow \infty$ $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$

(case 3)

① $f(x)$: 연속 on $[a, b]$, 즉, $x = c (\in (a, b))$: 특이점

② $x \rightarrow c$ 일 때, $|f(x)| \rightarrow \infty \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

$\int_a^c f(x) dx$: 수렴 and $\int_c^b f(x) dx$: 수렴 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$: 수렴

6. 이상 적분 (2)

2. 무한 적분

2) 무한 적분 : 적분한계가 무한인 이상적분

case 1	case 2
$f(x)$: 연속 on $[a, \infty)$ $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$	$f(x)$: 연속 on $(-\infty, a]$ $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$

(case 3)

$f(x)$: 연속 on $(-\infty, \infty)$ a : 상수

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx : \text{수렴} \text{ and } \int_a^{\infty} f(x) dx : \text{수렴} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx : \text{수렴}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \text{발산} & p \leq 1 \end{cases}$$

6. 이상 적분 (3)

3. 무한 적분에 대한 비교 판정법

f, g : 연속함수이고 $x \geq a$, $f(x) \geq g(x) \geq 0$

(a) $\int_a^\infty f(x)dx$: 수렴 $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$: 수렴

(b) $\int_a^\infty g(x)dx$: 발산 $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$: 발산