Chapter 1. 행렬의 기본 정리

1.1 연립방정식과 행렬

$x_1, x_2, \cdots, x_n$이 n개의 미지수, 그리고 $a_1, a_2, \cdots, a_n$과 b가 고정된 실수일 때

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

의 형태로 표현된 방정식을 **일차방정식**(linear equation)이라 한다. 이 때 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 **미지수**(unknown value) 또는 **변수**(variable)이라 하고 $a_1, a_2, \cdots, a_n$을 **계수**(coefficient), 그리고 b를 **상수**(constant)라 한다.

n개의 미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여 m개의 일차방정식

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_n x_{mn} &= b_m \end{aligned}$$

으로 구성된 식을 **일차 연립방정식**(linear system)이라 한다.

상수항 $b_1, b_2, \cdots, b_m$이 모두 0인 일차 연립방정식을 **동차 일차 연립방정식**(homogeneous linear system)이라 하고 동차 일차 연립방정식이 아니면 **비동차 일차 연립방정식**(non-homogeneous linear system)이라 한다. 두 개의 연립방정식이 같은 해를 가지면 두 연립방정식은 **동치**(equivalence)라 한다.

동차 일차 연립방정식

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_n x_{mn} = 0 \end{aligned}$$

은 항상 자명한 해(trivial solution)

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$$

을 가진다.

비동차 연립방정식의 해는 존재하지 않을 수도 있으며 해가 존해하는 경우 무한히 많은 해가 존재할 수도 있다. 연립방정식의 모든 해로 이루어진 집합을 **해집합**(solution set)이라 한다.

계수가 실수인 일차 연립방정식의 해의 존재성은 다음 세 가지 경우 중의 하나이다.
(i) 유일한 해를 가진다.
(ii) 해가 없다.
(iii) 무수히 많은 해를 가진다.

연립방정식의 한 방정식에 다른 방정식의 상수를 곱하여 더하는 계산을 반복하여 변수의 개수를 줄여가는 소거법을 실행해서 연립방정식의 해를 구할 수 있다. 이런 방법으로 얻어진 연립

방정식과 주어진 연립방정식은 서로 동치가 된다.

(예제 1) 연립방정식

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 &= -1 \end{aligned}$$

의 해를 구하시오.

일차 연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_n x_{mn} &= b_m \end{aligned}$$

을 아래와 같이 간단하게 직사각형꼴로 배열해보자.

일차 방정식의 계수들로 이루어진 배열

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

을 연립방정식의 **계수행렬**(coefficient matrix)이라 하고 상수들로 이루어진 배열

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

을 연립방정식의 **상수행렬**(constant matrix)이라 한다.
한편 계수행렬과 상수행렬로 이루어진 배열

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

을 연립방정식의 **첨가계수행렬**(augmented matrix)이라 한다.

(예제 2) 연립방정식

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -2 \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= -7 \end{aligned}$$

의 계수행렬, 상수행렬과 첨가행렬을 구하여라.

(예제 3) 다음 행렬을 첨가행렬로 가지는 연립 일차방정식을 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

정의 1.1.1 [행렬의 정의]

수나 기호 또는 수식들을 직사각형꼴로 배열한

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

을 **행렬**(matrix)이라 한다. 행렬의 각 항 a_{ij} 들을 (i,j) **번째 성분**($(i,j)_{th}$ entry) 또는 (i,j) **번째 원소**($(i,j)_{th}$ element)라 하고 $[a_{i1}\, a_{i2}\, \cdots\, a_{in}]$ 을 i **번째 행**(i_{th} row)이라 하며, $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ 을 j **번째 열**(j_{th} column)이라 한다. m 개의 행과 n 개의 열로 구성된 위의 행렬의 크기는 $m \times n$ 이다.

정의 1.1.2

행렬의 각 성분이 실수이고 크기가 $n \times 1$ 인 모든 행렬의 집합을 $M_{n \times 1}$ 이라 정의하고 **유클리디안 n-공간**(Euclidean n-space)인

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

이라 한다. 크기가 $m \times n$ 이고 성분 모두가 실수인 모든 행렬의 집합을 $M_{m \times n}$ 으로 나타낸다. 특별히 행과 열의 개수가 같은 $n \times n$ 행렬을 **정방행렬**(square matrix)이라 하고 모든 정방행렬의 집합을 M_n 으로 나타낸다. 정방행렬에서 성분 $a_{ii}\,(i = 1, 2, \cdots n)$를 행렬의 **대각성분**(diagonal entry)이라 한다. 대각성분을 제외한 모든 성분이 0 인 정방행렬을 **대각행렬**(diagonal matrix)이라 한다. 한편 크기가 $m \times n$ 행렬 A 의 각 성분이 a_{ij} 인 행렬을 $A = (a_{ij})$ 또는 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 으로 표현하고 $a_{ij} = (A)_{ij}$ 로 하자.

(예제 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

일차 연립방정식의 해를 첨가계수행렬을 이용하여 구하는 방법에 대해 알아보자.
연립방정식

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 &= -1 \end{aligned}$$

의 해를 구하는 고정을 첨가계수행렬에 적용해보자.

주어진 연립방정식의 첨가계수행렬은 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ 이다.

단계1) 두 방정식을 서로 바꾼다.	두 행을 바꾼다.
$x_1 - 3x_2 = -1$ $2x_1 + x_2 = 5$	
단계2) 두 번째 방정식에 첫 번째 방정식에 -2를 곱한 식을 더한다.	두 번째 행에 첫 번째 행에 -2를 곱한 것을 더한다.
$x_1 - 3x_2 = -1$ $7x_2 = 7$	
단계3) 두 번째 방정식에 $\frac{1}{7}$을 곱한다.	두 번째 행에 $\frac{1}{7}$을 곱한다.
$x_1 - 3x_2 = -1$ $x_2 = 1$	
단계4) 두 번째 식에 3을 곱한 식을 첫 번째 식에 더한다.	두 번째 행에 3을 곱하여 첫 번째 행에 더한다.
$x_1 = 2$ $x_2 = 7$	

그러므로 연립방정식의 해는 $x_1 = 2$와 $x_2 = 1$이 된다.

단계4)를 실행하지 않고 단계3)에서 구한 $x_2 = 1$을 식 $x_1 - 3x_2 = -1$에 대입하여 $x_1 = 2$를 구할 수도 있다. 이렇게 연립방정식의 해를 구하는 방법을 후진대입법이라 한다.

위와 같이 연립 일차방정식에 다음과 같은 연산을 하여도 그 해는 변하지 않는다.
(i) 두 방정식을 서로 바꾼다.
(ii) 한 방정식에 0이 아닌 실수를 곱한다.
(iii) 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 방정식에 더한다.

연립방정식에 적용된 연산을 첨가계수행렬에 적용하는 것을 **기본행연산**(elementary row operation)이라 한다.

(정의 1.1.3) 행렬에 다음과 같은 연산을 하는 것을 기본행연산이라 한다.
ⓐ 두 행을 교환한다.
ⓑ 한 행에 0이 아닌 상수를 곱한다.
ⓒ 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 행에 더한다.

(예제 5) 연립방정식

$$\begin{aligned}&6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 9\\&4x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\\&2x_1 - x_2 + x_3 = 2\end{aligned}$$

의 해를 첨가계수행렬에 후진대입법을 이용하여 구하여라.

(예제 6) 연립방정식

$$\begin{aligned}&x_1 = 4\\&x_1 - x_2 = 5\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\end{aligned}$$

의 해를 구하여라.