함수의 극한과 연속성

1.5절~1.8절

함수의 극한

(정의) $y=f(x)$, $x=a$ ($x=a$에서 정의되지 않아도 됨)

$x \to a$ 일 때 $f(x) \to L$이면 L를 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값.

(표현) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

◍ Cauchy 의 정의

$^{\forall}\epsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0$ such that $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$

☞ 1. 극한의 개념은 어떤 점에서의 함수값을 알아보는 것이 아니라 그 점 근방에서 함수값의 움직임을 알아보는 것이다.

2. 극한값이 존재하기 위한 필요충분조건은 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 같아야 한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

함수의 극한을 구하는 방법

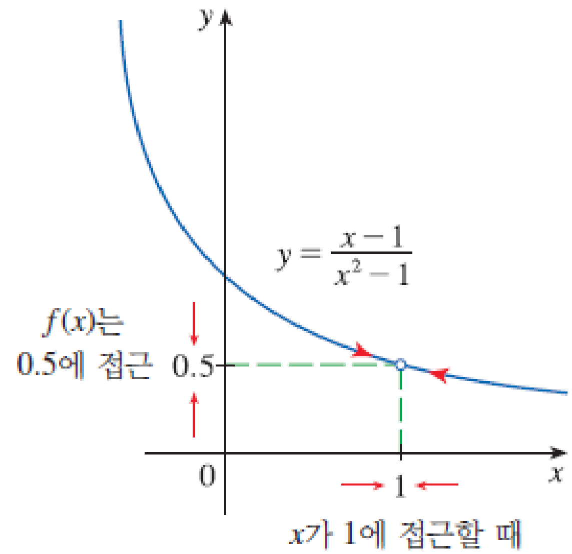
예1) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

M1) 수치적으로 구하는 방법

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0.5	0.666667	1.5	0.400000
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750
0.9999	0.500025	1.0001	0.499975

1　　0.5　　1　　0.5

M2) 그래프로 구하는 방법



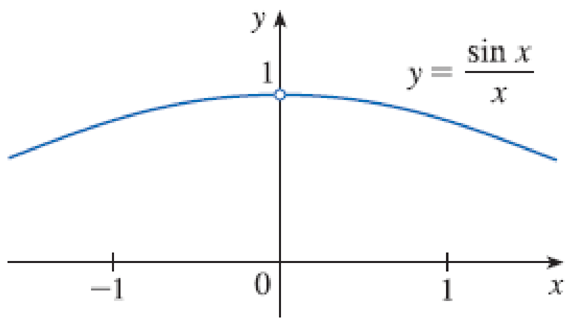
함수의 극한을 구하는 방법(2)

예2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

M1) 수치적으로 구하는 방법

x	$\frac{\sin x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

M2) 그래프로 구하는 방법



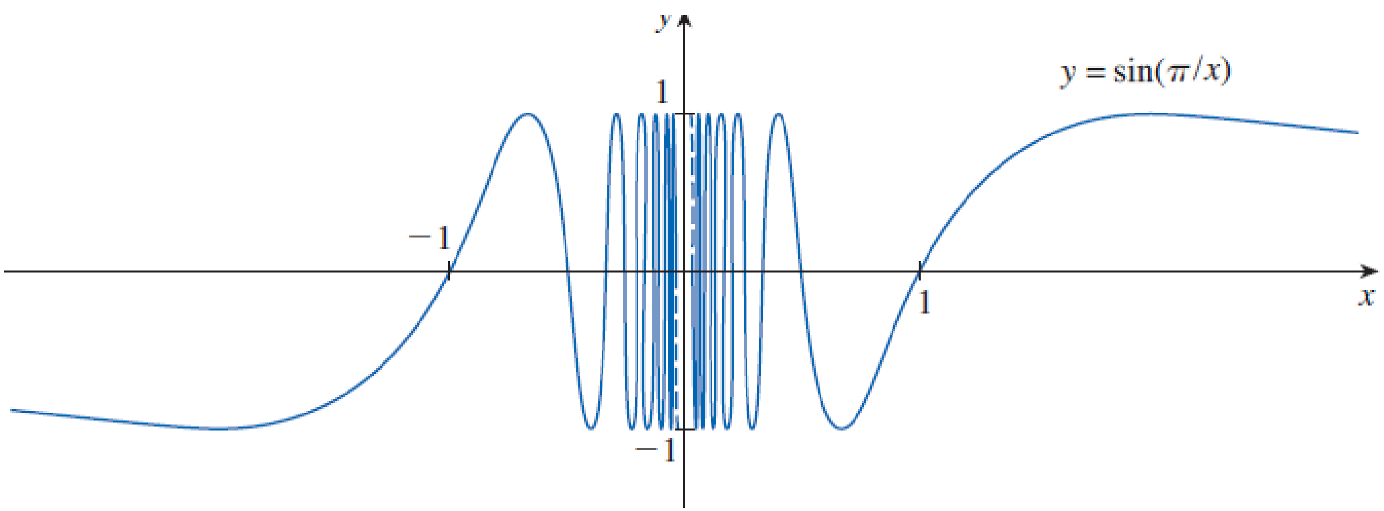
함수의 극한을 구하는 방법(3)

예5) $\lim_{x \to 0} \sin \frac{\pi}{x}$

$$f(1) = \sin \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sin 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \sin 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \sin 4\pi = 0$$

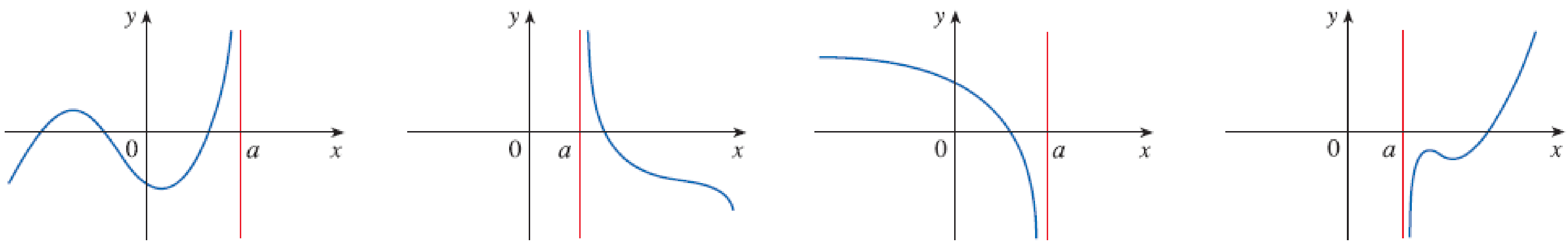
$$f(0.1) = \sin 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \sin 100\pi = 0$$



무한 극한과 수직 점근선

1. 무한 극한

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

2. 수직 점근선

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow x = a$를 $f(x)$의 수직점근선

극한에 관한 성질

극한 법칙 c가 상수이고 다음 극한이 존재하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x), \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ 단, $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

6. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$, n은 양의 정수

7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, n은 양의 정수

[n이 짝수일 때, $\lim_{x\to a} f(x) > 0$이라 가정한다.]

극한값 구하기

1. 직접 대입해서 극한값을 구한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$x \neq a$일 때 $f(x) = g(x)$이고 극한이 존재한다면, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$

2. 한쪽 극한을 이용하여 구한다.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$이기 위한 필요충분조건은 $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

3. 압축정리(Squeeze Theorem)

$f(x) \leq g(x)$ $\quad \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ $\quad \lim_{x \to a} g(x) = L$

함수의 체계

- 함수의 체계
  - 대수함수
    - 유리함수
      - 다항함수: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
      - 유리함수: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
    - 무리함수: $f(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
  - 초월함수
    - 지수함수: $f(x) = a^x \,/\, f(x) = e^x$
    - 로그함수: $f(x) = \log_a x \,/\, f(x) = \ln x$
    - 삼각함수: $f(x) = \sin x, \cos x, \tan x, \sec x, \csc x, \cot x$

함수의 연속성

(정의) $y=f(x)$: $x=a$에서 연속

$\Leftrightarrow$ ① 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어야 한다, 즉, $\exists f(a)$

② $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

③ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

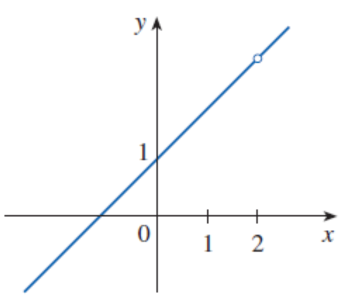
⦶ **Cauchy의 정의**

$\forall \epsilon > 0, \exists \ \delta > o \ \ s.t. \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$

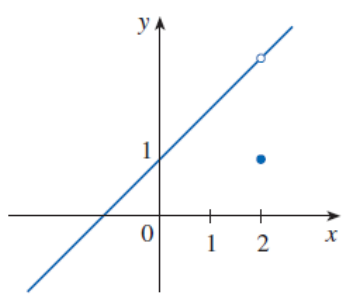
(정의) $f(x)$: 연속 on $[a,b]$

① $f(x)$는 연속 on (a,b)

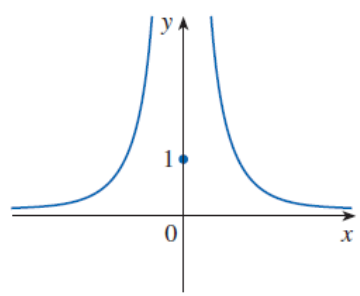
② $\lim f(x) = f(a), \lim f(x) = f(b)$



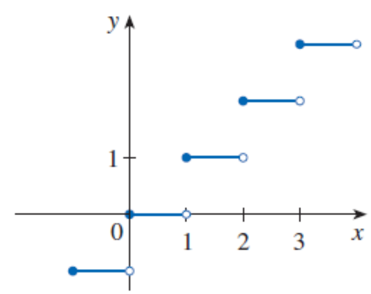
(a) 제거 가능한 불연속



(b) 제거 가능한 불연속



(c) 무한 불연속



(d) 도약 불연속

연속성의 성질

$f(x), g(x)$:연속 on $x=a,\ c\in R$

1. $cf(x)$: 연속 on $x=a$
2. $f(x)\pm g(x)$: 연속 on $x=a$
3. $f(x)g(x)$: 연속 on $x=a$
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(a)\neq 0)$: 연속 on $x=a$
5. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b,\ f(y)$: 연속 on $y=b \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(b)$

   $$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))$$

6. $g(x)$: 연속 on $x=a$, $f(y)$: 연속 on $y=g(a)\Rightarrow f\circ g$: 연속 on $x=a$

함수의 체계

- 함수의 체계
  - 대수함수
    - 유리함수
      - 다항함수
        $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots. + a_1 x + a_0$
      - 유리함수
        $$\frac{f(x)}{g(x)}$$
    - 무리함수
      $f(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
  - 초월함수
    - 지수함수
      $f(x) = a^x / f(x) = e^x$
    - 로그함수
      $f(x) = \log_a x / f(x) = \ln x$
    - 삼각함수
      $f(x) = \sin x, \cos x, \tan x, \sec x, \csc x, \cot x$

관련된 정리들

정의) 함수 f에서 $\forall x \in D_f$, $\exists a \in D_f$ $s.t.$ $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$

$f(a)$을 f의 최대값 (최소값)이라 한다.

정리) 중간값 정리

함수 $f(x)$: $I=[a, b]$위에서 연속

$f(a) < k < f(b)$ or $f(b) < k < f(a)$인 k에 대하여

$\exists x_0 \in (a, b)$ such that $f(x_0) = k$

정리) 최대 · 최소정리

$f(x)$: $I=[a, b]$에서 연속이면 I 위에서 $f(x)$의 최대값과 최소값을 갖는다.