제1강 함수의 극한 및 함수의 연속성

1. 함수의 극한

(정의) $y=f(x)$, $x=a$ ($x=a$에서 정의되지 않아도 됨)

$x \to a$ 일 때 $f(x) \to L$이면 L를 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값.

(표현) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

◍ **Cauchy의 정의**

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ such that $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$

☞ 1. 극한의 개념은 어떤 점에서의 함수값을 알아보는 것이 아니라 그 점 근방에서 함수값의 움직임을 알아보는 것이다.

2. 극한값이 존재하기 위한 필요충분조건은 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 같아야 한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

2. 극한에 관한 성질

(1) $\lim_{x \to a} c = c$ (c : 상수)

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = l_2 \Rightarrow \lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = l_2 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$

(4) $\lim_{x \to a} f(x) = l (\neq 0) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

(5) $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = l_2 (\neq 0) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

(6) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ 이면 $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$

☞ 이 성질은 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때도 성립한다.

(7) $h(x) \le f(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = L$

3. 여러 함수의 극한값

(1) $f(x)$: 다항함수, $a \in R \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = L,\ n \in N \Rightarrow \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (단, n:짝수이면 $L > 0$)

(3) $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$, $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

(4) $\lim_{x \to a} e^x = e^a$, $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a\ (a > 0)$

☞ $f(x)$: 다항함수이고 $\lim_{x \to f(a)} g(x) = L$이면 $\lim_{x \to a} g(f(x)) = L$

4. 부정형의 극한값

(1) $\frac{0}{0}$인 경우 : 분모, 분자가 모두 다항식이면 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분한다.

분모, 분자중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$인 경우 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(3) $\infty - \infty$인 경우 : 다항식의 최고차항으로 묶는다.

무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(4) $\infty \times 0$: $\infty \times (\text{상수}),\ \frac{\text{상수}}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

☞ 삼각함수의 극한 : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$,$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

☞ 지수로그의 극한 : $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$, $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

5. 연속성

(정의) $y = f(x)$: $x = a$에서 연속

$\Leftrightarrow$ ① 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 정의되어야 한다, 즉, $\exists f(a)$

② $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

◍ **Cauchy의 정의**

$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > o\ s.t. |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

(정의) $f(x)$: 연속 on $[a, b]$

① $f(x)$는 연속 on (a, b)

② $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),\ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

6. 연속함수의 성질

$f(x)$, $g(x)$: $x=a$에서 연속이면

(1) $f(x)\pm g(x)$: $x=a$에서 연속

(2) $f(x)\cdot g(x)$: $x=a$에서 연속

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$: $x=a$에서 연속

(4) $f(x)$: $x=a$에서 연속, $g(u)$: $u=f(a)$에서 연속

$\Rightarrow g(f(x))$: $x=a$에서 연속

7. 관련된 정리들

정의) 함수 f에서 $\forall x \in D_f$, $\exists a \in D_f$ $s.t.$ $f(x) \leqq f(a)$ $(f(x) \geqq f(a))$

$f(a)$을 f의 최대값 (최소값)이라 한다.

정리) 중간값 정리

함수 $f(x)$: $I=[a,b]$위에서 연속

$f(a) < k < f(b)$ or $f(b) < k < f(a)$인 k에 대하여

$\exists x_0 \in (a,b)$ such that $f(x_0)=k$

정리) 최대 ·최소정리

$f(x)$: $I=[a,b]$에서 연속이면 I 위에서 $f(x)$의 최대값과 최소값을 갖는다.