제2장 도함수와 미분법

1. 미분가능성

(1) $\exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\Delta x = x-a, \Delta y = f(a+\Delta x)-f(a)$)

$\Rightarrow f(x)$: 미분 가능 on $x=a$ 또는 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 도함수

(2) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$: 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

(3) $y=f(x)$, $D_f = \{x | \exists f'(x)\}$

$f' : D \to R$ $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 일 때, f' : f의 도함수

정리) $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이다.

2. 미분법칙

(1) $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$ (2) $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

(3) $(af(x)\pm bg(x))' = af'(x)\pm bg'(x)$ (4) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ (6) $g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$

(7) $\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)}$ (8) 로그미분법 (9) 음함수미분법

3. 관련된 정리

정리1) Rolle의 정리

f : $[a,b]$에서 연속, (a,b)에서 미분가능

$f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c\in(a,b)$, $f'(c)=0$

정리2) 평균치 정리

f : $[a,b]$에서 연속, (a,b)에서 미분가능

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

☞ 평균변화율과 동일한 순간변화율이 존재한다.
할선의 기울기와 평행한 접선의 기울기가 존재한다.
함수값의 차와 대응되는 x값의 차의 관계가 다음과 같다. $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

4. 각 함수의 미분

	함수의 종류	미분법
대수함수	$f(x)=a$(상수함수)	$f'(x)=0$
	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
삼각함수	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
	$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\sec^2 x$
	$f(x)=\cot x$	$f'(x)=-\operatorname{cosec}^2 x$
	$f(x)=\sec x$	$f'(x)=\sec x\tan x$
	$f(x)=\operatorname{cosec} x$	$f'(x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$
지수함수	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln a$
	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
로그함수	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
역삼각함수	$f(x)=\sin^{-1}x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f(x)=\cos^{-1}x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f(x)=\tan^{-1}x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
	$f(x)=\cot^{-1}x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$
	$f(x)=\sec^{-1}x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
	$f(x)=\operatorname{cosec}^{-1}x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

5. 선형 근사식

$y = f(x)$: 미분가능

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

$\epsilon \Delta x$: Δy와 $f'(x)\Delta x$의 오차,

$dy = f'(x)dx$: y의 미분

(1) $f(a + \Delta x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)\Delta x$: 1차 근사값(선형근사값)

(2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$: 1차 근사식

☞ 1차 근사식은 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식이다.

6. 함수의 그래프

1. 정의역 : 먼저 f의 정의역을 결정.
2. 절편 : x절편과 y절편이 있으면 구한다.
3. 수직 접선 : f의 정의역에는 있으나 f'의 정의역에는 속하지 않는 고립점에서 수직 접선을 갖는지 아닌지를 판정.
   해결 방안 : $f'(x)$의 극한값을 조사.
4. 점근선

(1) 수직점근선 : f의 정의역안에 있지 않는 고립점에서 수직 점근선을 갖는지 점프가 일어나는지 또는 제거 가능한 불연속점인지 결정.
해결 방안 : x가 그 점으로 접근할 때 f의 극한값을 조사.

※ 수직 점근선 $(x = c)$: 다음 중에 하나를 만족하면 수직 점근선을 가진다.

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to c+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to c-} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to c-} f(x) = -\infty$$

(2) 수평 점근선 : $x \to \infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때 $f(x)$의 극한값 조사

※ 수평 점근선 $(y = a)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

(3) 경사점근선 (slant asyptote) $(y = ax + b)$

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{또는} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

5. 1계 도함수 : f가 증가 또는 감소하는 부분과 극값을 결정.
6. 2계 도함수 : 그래프가 위로 볼록한 부분과 아래로 볼록한 부분, 변곡점의 위치를 조사
7. 대칭성

$f(-x) = -f(x)$: 기함수 $\Rightarrow$ 원점대칭

$f(-x) = f(x)$: 우함수 $\Rightarrow$ y축 대칭

7. 미분의 응용

1) 최적화 문제

① 그려 할 그림이 있다면 그린다.
② 변수가 무엇인지 그것들과의 관계가 어떻게 되는지 결정한다.
③ 최대가 되거나 최소가 되어야 할 양이 무엇인지 결정한 후에 함수로 나타낸다.
④ 사용하고 있는 변수에 대하여 허용된 범위(독립 변수의 절대극값을 구한다.
⑤ 문제를 푼다.

2) 상관비율문제

☞ y와 x에 대한 관계식과 $\dfrac{dx}{dt}$(t: 시간)를 알고 있으면 $\dfrac{dy}{dt}$를 구할 수가 있다.
이때 $\dfrac{dx}{dt}$와 $\dfrac{dy}{dx}$를 상관비율이라 한다.

① 가능한 경우 간단히 그림을 그린다.
② 관련된 모든 양을 포함하는 방정식을 구한다.
③ 방정식의 양변을 시간에 관하여 미분한다.
④ 알고 있는 모든 양과 도함수 값을 대입한다.
⑤ 남아 있는 비율에 대하여 푼다.