제2장 도함수

2.1~2.9절

미분가능성과 도함수(2.2절)

1) 미분계수

정의) (1) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = $f'(a) = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$

$\Rightarrow f(x)$: 미분 가능 on $x=a$

(2) $f'(a) = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$: 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

※ $$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (x-a=h) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x = x-a,\ \Delta y = f(x)-f(a)) \end{aligned}$$

☞ (1) 물리적 관점

$f'(a)$: $x=a$에서 x에 관한 $y=f(x)$의 순간 변화율

(2) 수학적 관점

$f'(a)$: $y=f(x)$위의 한 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기

미분 가능성과 도함수(2)

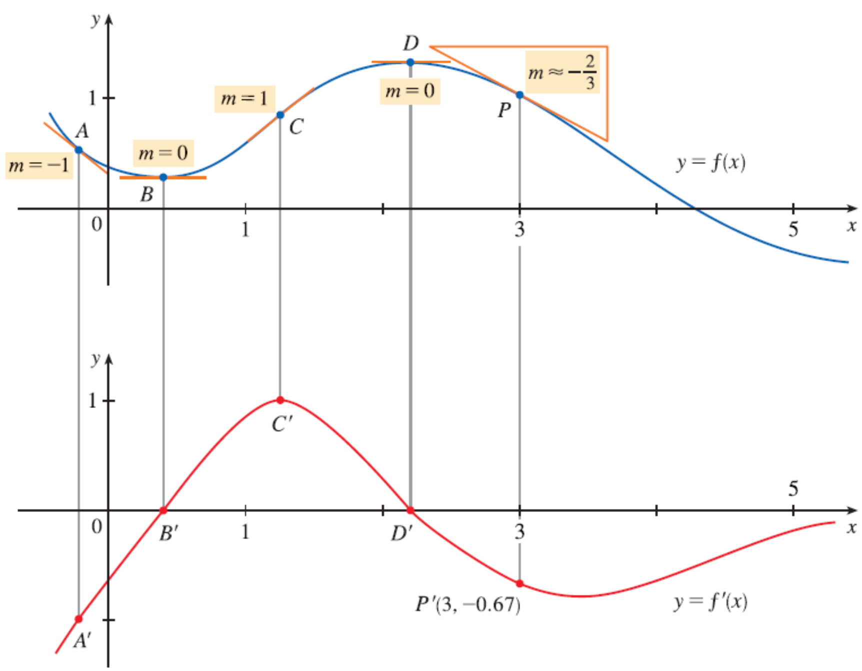
2) 도함수

정의) $y = f(x)$, $D_f = \{x \mid \exists f'(x)\}$

$$f' : D \to R \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ 일 때,}$$

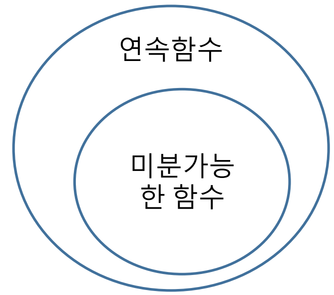
f' : f 의 도함수

※ f : 미분가능 on $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$: 미분가능 on (a,b)

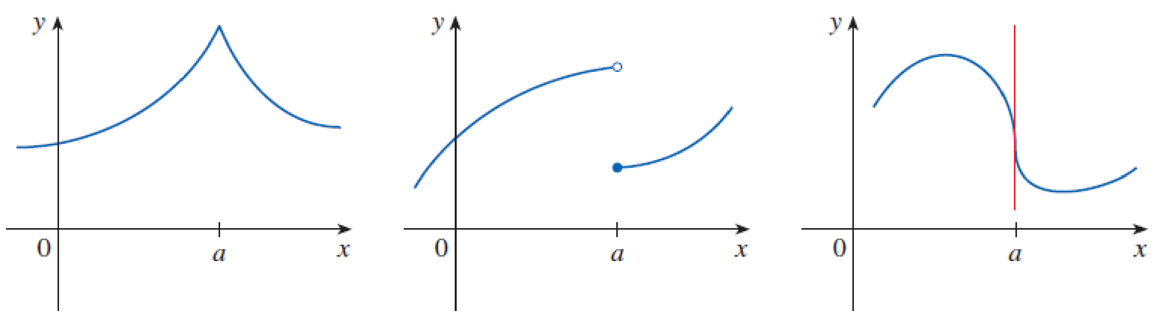


미분 가능성과 도함수(1)

Th) $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이다.



함수가 미분 불가능한 경우



(a) 꺾인 점 (b) 불연속점 (c) 수직접선

고계 도함수

고계 도함수

(1) $f(x)$: 미분가능한 함수

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \left(f'(x) = \frac{dy}{dx}\right)$$: 1계 도함수

(2) $f'(x)$: 미분가능한 함수

$$\Rightarrow f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \quad \left(f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$: 2계 도함수

(3) $f''(x)$: 미분가능한 함수

$\Rightarrow \quad f^{(3)}(x)$: 3계도함수

(4) $f^{(n-1)}(x)$: 미분가능한 함수

$\Rightarrow f^{(n)}(x)$: n계 도함수 ($f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$)

☞ $n \geq 2$인 경우의 $f^{(n)}(x)$를 통틀어서 고계도함수라고 함.

미분법(2.3절)

미분 공식표

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

삼각함수 미분(2.4절)

삼각함수의 도함수

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

연쇄법칙 (2.5절)

연쇄법칙 g가 x에서 미분가능하고 f가 $g(x)$에서 미분가능하면 $F(x) = f(g(x))$로 정의되는 합성함수 $F = f \circ g$는 x에서 미분가능하고 F'은 다음과 같은 곱으로 주어진다.

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1}$$

이를 라이프니츠 기호로 나타내면, $y = f(u)$와 $u = g(x)$가 모두 미분가능한 함수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{2}$$

예제 1 함수 $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$일 때 $F'(x)$를 구하라.

예제 2 다음을 미분하라.

(a) $y = \sin(x^2)$ (b) $y = \sin^2 x$

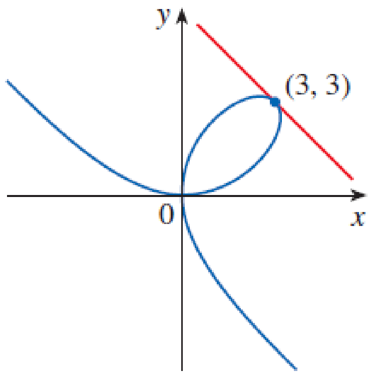
예제 7 $f(x) = \sin(\cos(\tan x))$일 때 연쇄법칙을 두 번 사용하면 다음을 얻는다.

음함수 미분법(2.6절)

정의) $f(x.y) = 0$: 음함수 ($y = f(x)$: 양함수)

(1) 음함수 미분법(y를 x에 대한 함수로 보고 x에 대해 미분한다.)

- $\frac{d}{dx}\ x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}\ y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$



예제 2

(a) $x^3 + y^3 = 6xy$일 때 y'을 구하라.

(b) 데카르트의 잎사귀선 $x^3 + y^3 = 6xy$ 위의 점 (3, 3)에서 접선의 방정식을 구하라.

(c) 제1사분면의 어떤 점에서 접선이 수평인가?

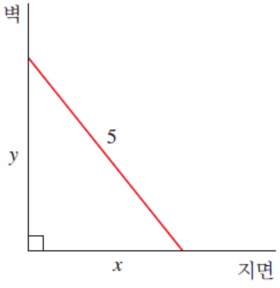
(2) 음함수의 2계 도함수

예제 4 $x^4 + y^4 = 16$일 때 y''을 구하라.

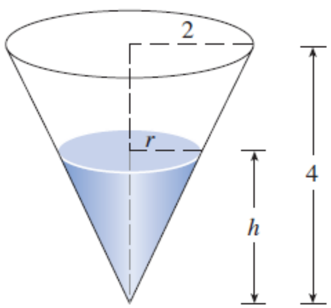
관련비율(2.8절)

y와 x의 관계식과 $\frac{dx}{dt}$를 알고 있으면 $\frac{dy}{dt}$를 구할 수 있다.
이때 $\frac{dx}{dt}$ 와 $\frac{dy}{dt}$ 를 관련 비율(related rate)이라 한다.

예제 2 길이 5 m의 사다리가 수직인 벽면에 기대어 있다. 사다리 바닥이 1 m/s의 비율로 벽면으로부터 미끄러진다. 사다리 바닥이 벽면으로부터 3 m 떨어질 때, 사다리 꼭대기는 얼마나 빨리 벽면을 따라 아래로 미끄러지는가?



예제 3 밑면의 반지름이 2 m, 높이가 4 m인 원뿔이 거꾸로 된 모양을 한 물탱크가 있다. 탱크 안으로 물이 2 m^3/min의 속도로 채워진다면, 물의 깊이가 3 m되는 순간의 수위는 어떤 비율로 상승하는가?



선형 근사와 미분 (2.9절)

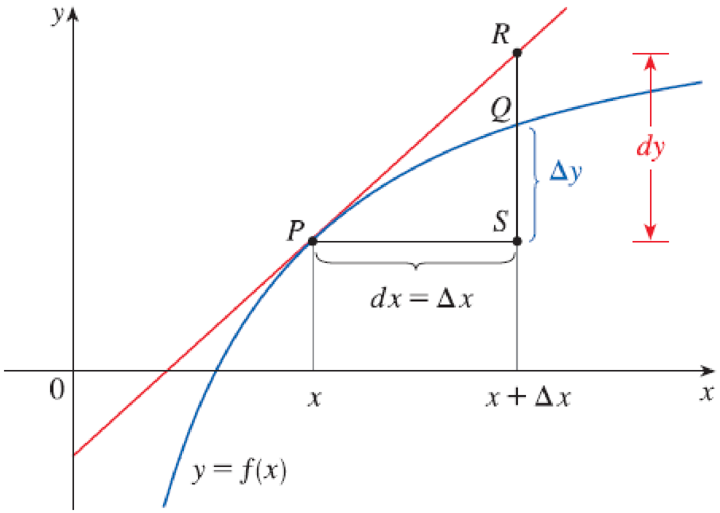
선형근사식 (1차근사식)

$y = f(x)$: 미분가능

(1) $dy = f'(x)dx$: y에 대한 미분

(2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$: 1차 근사식

☞ 1차 근사식은 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식이다.



예제 1 $a = 1$에서 $f(x) = \sqrt{x+3}$ 의 선형화를 구하고, 이것을 이용해서 $\sqrt{3.98}$ 과 $\sqrt{4.05}$ 의 근삿값을 구하라.

예제 3 $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$이고 x가 (a) 2에서 2.05로, (b) 2에서 2.01로 변할 때 Δy와 dy의 값을 비교하라.