제3장 미분법의 응용

3.1절 ~ 3.8절

목 차

1. f'과 f''이 f에 대해 알려주는 것은?(3.3절)
2. 절대극값과 극값(3.1절)
3. 함수의 그래프(3.4,3.5,3.6절)
4. 최적화문제 (3.7절)
5. Newton 방법 (3.8절)
6. 관련된 정리 (3.2절)

f'과 f''이 f에 대해 알려주는 것은?

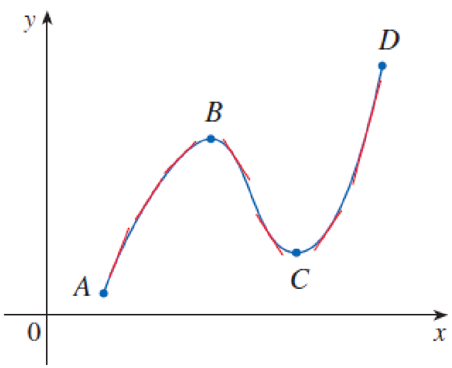
1. 함수의 증가 또는 감소(3.3절)

증가 또는 감소함수

구간 I에 있는 $x_1 < x_2$인 임의의 x_1, x_2에 대해 다음을 만족하면 함수 f는 구간 I에서 **증가함수**(increasing function)이다.

$$f(x_1) < f(x_2)$$

구간 I에 있는 $x_1 < x_2$인 임의의 x_1, x_2에 대해 다음을 만족하면 f는 구간 I에서 **감소함수**(decreasing function)이다.



증가/감소 판정법

(a) 어떤 구간에서 $f'(x) > 0$이면 그 구간에서 f는 증가한다.

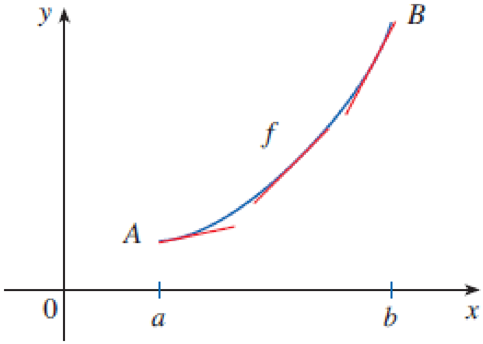
(b) 어떤 구간에서 $f'(x) < 0$이면 그 구간에서 f는 감소한다.

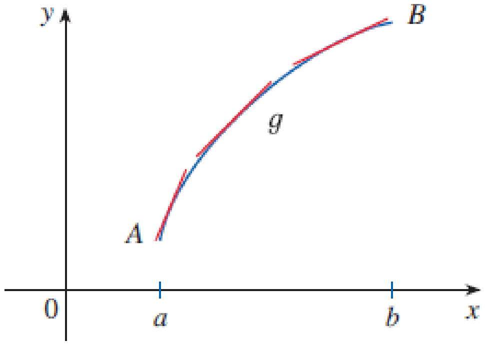
예제 1 함수 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$가 증가하는 곳과 감소하는 곳을 구하라.

2. 곡선의모양(1)(3.3절)

곡선의 모양

정의 함수 f의 그래프가 구간 I에서 모든 접선보다 위에 놓여 있을 때 함수 f는 I에서 **위로 오목**(concave upward)이라 한다. 함수 f의 그래프가 구간 I에서 모든 접선보다 아래에 놓여 있을 때 함수 f는 I에서 **아래로 오목**(concave downward)이라 한다.





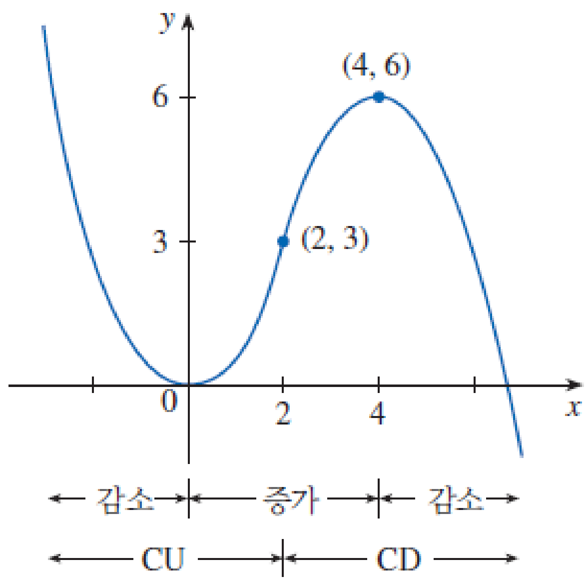
오목성 판정법

(a) 구간 I에서 $f''(x) > 0$이면 f의 그래프는 I에서 위로 오목이다.

(b) 구간 I에서 $f''(x) < 0$이면 f의 그래프는 I에서 아래로 오목이다.

2. 곡선의 모양(2)(3.3절)

정의 f가 곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점 P에서 연속이고 그 점에서 곡선이 위로 오목에서 아래로 오목으로 또는 아래로 오목에서 위로 오목으로 바뀌면 점 P를 **변곡점**(inflection point)이라 한다.



3. 절대 극값의 정의(3.1절)

최댓값과 최솟값

1 정의 c가 f의 정의역 D에 속한 수라고 하자. 그러면 $f(c)$는 다음과 같다.

- D에 속한 모든 x에 대해 $f(c) \geq f(x)$이면 D에서 f의 **최댓값**(absolute maximum)이다.
- D에 속한 모든 x에 대해 $f(c) \leq f(x)$이면 D에서 f의 **최솟값**(absolute minimum)이다.

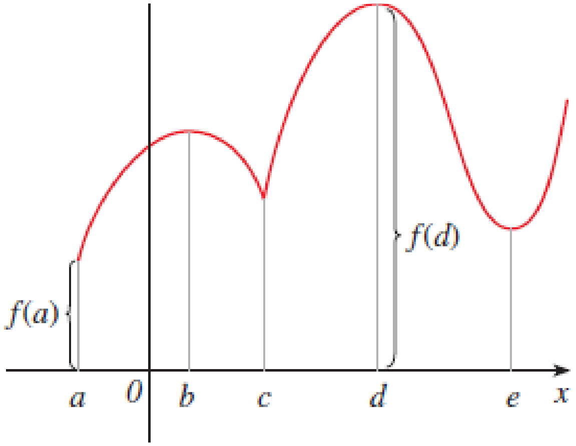


그림 2 최솟값 $f(a)$, 최댓값 $f(d)$
극솟값 $f(c)$, $f(e)$ 극댓값 $f(b)$, $f(d)$

4. 극값의 정의(3.1절)

극댓값과 극솟값

2 정의 수 $f(c)$는 다음과 같다.

- x가 c 부근에 있을 때, $f(c) \geq f(x)$이면 f의 **극댓값**(local maximum)이다.
- x가 c 부근에 있을 때, $f(c) \leq f(x)$이면 f의 **극솟값**(local minimum)이다.

정의 $x=c$: 임계수 of $f(x)$

① $c \in D_f$

② $f'(c)=0$ or $\nexists f'(c)$

$f(x)$가 $x=c$에서 극대 또는 극소이면 $x=c$는 $f(x)$의 임계수

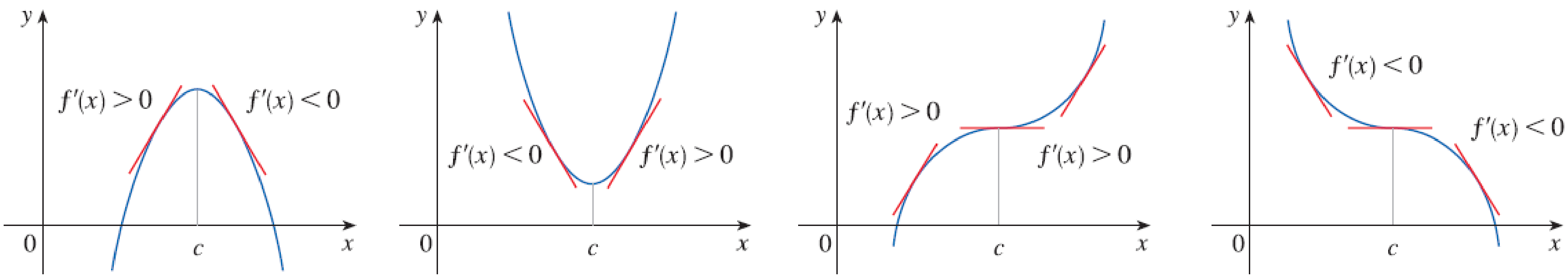
5. 극값을 구하는 방법(1)

1계 도함수 판정법 c를 연속함수 f의 임계수라고 가정하자.

(a) c에서 f'이 양에서 음으로 바뀌면 f는 c에서 극대이다.

(b) c에서 f'이 음에서 양으로 바뀌면 f는 c에서 극소이다.

(c) c의 양쪽에서 f'이 모두 양이거나 모두 음이면 f는 c에서 극대도 극소도 아니다.



(a) c에서 극대 (b) c에서 극소 (c) c에서 극대도 극소도 아니다. (d) c에서 극대도 극소도 아니다.

예제 3 함수 $g(x) = x + 2\sin x$, $0 \le x \le 2\pi$의 극댓값과 극솟값을 구하라.

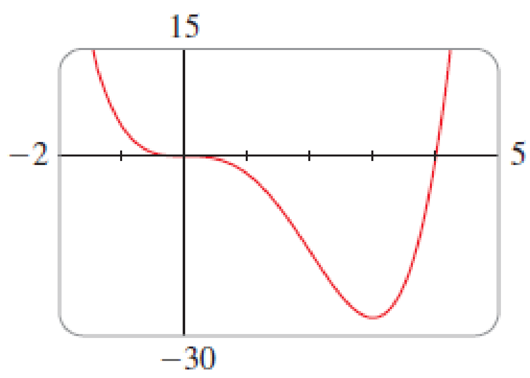
5. 극값을 구하는 방법(2)

2계 도함수 판정법 f''이 c의 부근에서 연속이라 가정하자.

(a) $f'(c) = 0$이고 $f''(c) > 0$이면 f는 c에서 극소이다.

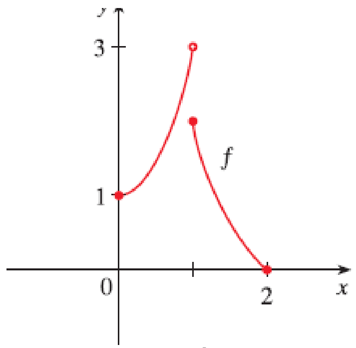
(b) $f'(c) = 0$이고 $f''(c) < 0$이면 f는 c에서 극대이다.

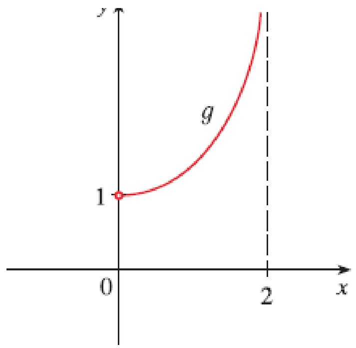
예제 6 곡선 $y = x^4 - 4x^3$의 오목성, 변곡점, 극대와 극소에 대해 설명하라.



6.절대 극값을 구하는 방법

3 극값 정리 함수 f가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면, f는 $[a, b]$의 어떤 수 c와 d에서 최댓값 $f(c)$와 최솟값 $f(d)$를 갖는다.





Case1) $y = f(x)$, 연속 $on\ D = R$

(1) 최댓값 = max {극값들(임계수의 함수값)}

(2) 최솟값= min{극값들(임계수의 함수값)}

Case2) $y = f(x)$ 연속 on $[a, b]$

(1) 최댓값 = max {극값들(임계수의 함수값), $f(a), f(b)$}

(2) 최솟값 =min{ 극값들(임계수의 함수값), $f(a), f(b)$}

7. 곡선 그리기(3.4, 3.5, 3.6)

1. 정의역 : 먼저 f의 정의역을 결정.
2. 절편 : x절편과 y절편이 있으면 구한다.
3. 수직 접선 : f의 정의역에는 있으나 f'의 정의역에는 속하지 않는 고립점에서 수직 접선을 갖는지 아닌지를 판정.
   해결 방안 : $f'(x)$의 극한값을 조사.
4. 점근선

(1) 수직점근선 : f의 정의역안에 있지 않는 고립점에서 수직 점근선을 갖는지 점프가 일어나는지 또는 제거 가능한 불연속점인지 결정.
해결 방안 : x가 그 점으로 접근할 때 f의 극한값을 조사.

※ 수직 점근선 $(x=c)$: 다음 중에 하나를 만족하면 수직 점근선을 가진다.

$$\lim_{x\to c+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to c+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to c-} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to c-} f(x)=-\infty$$

(2) 수평 점근선 : $x\to\infty$일 때와 $x\to-\infty$일 때 $f(x)$의 극한값 조사

※ 수평 점근선 $(y=a)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=a$

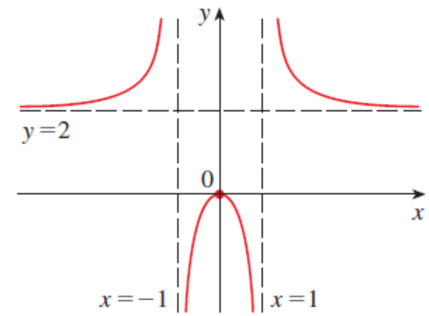
(3) 사선점근선 (slant asyptote) $(y=ax+b)$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \text{ 또는 } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

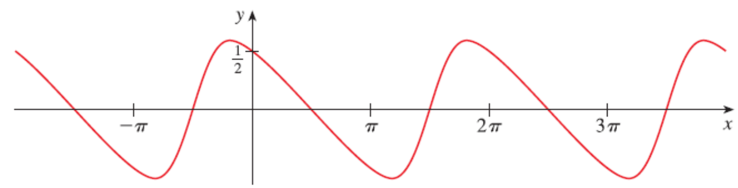
5. 1계 도함수 : f가 증가 또는 감소하는 부분과 극값을 결정.
6. 2계 도함수 : 그래프가 위로 볼록한 부분과 아래로 볼록한 부분, 변곡점의 위치를 조사
7. 대칭성, 주기성

예제 및 연습문제

예제 1 지침을 이용해서 곡선 $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$를 그려라.



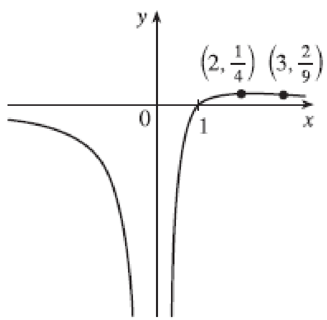
예제 3 $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$의 그래프를 그려라.

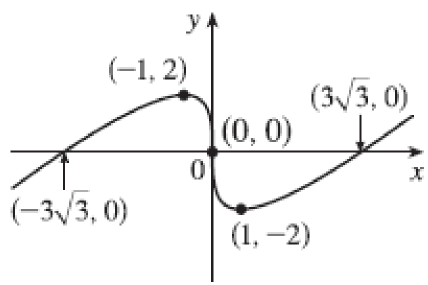


1-20 이 절의 지침을 이용해서 곡선을 그려라.

9. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

15. $y = x - 3x^{1/3}$





25-26 경사점근선의 방정식을 구하라. 곡선은 그리지 않는다.

25. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

26. $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{x^2 - x - 2}$

8. 최적화 문제(3.7절)

최적화문제를 해결하는 단계

Step 1. 문제를 이해한다.

Step 2. 가급적이면 그림을 그린다.

Step 3. 필요한 변수를 정한다.

Step4. 일변수 함수를 만들고, 이 함수의 정의역을 구한다.

Step5. 3.1절에서 배운 내용을 바탕으로 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

예제 및 연습문제

예제 1 농부가 재료 1200 m를 가지고 곧게 뻗은 강을 경계로 하는 직사각형 모양의 밭에 울타리를 치려고 한다. 강을 따라서는 울타리를 칠 필요가 없다. 최대 넓이를 형성하는 가로와 세로의 길이를 구하라.

예제 2 기름 1 L를 담을 원기둥 모양의 깡통을 만든다고 하자. 이 깡통을 만드는 재료비를 최소화하는 치수를 구하라.

예제 3 점 (1, 4)에 가장 가까운 포물선 $y^2 = 2x$의 점을 구하라.

예제 5 반지름 r인 반원에 내접하는 가장 큰 직사각형의 넓이를 구하라.

2. 두 수의 곱이 100이고 합이 최소가 되는 두 양수를 구하라.

20. 직원기둥이 반지름 r인 구 안에 내접하고 있을 때, 이 원기둥의 최대 겉넓이를 구하라.

9. Newton 방법(1)(3.8절)

$f(x)=0$의 근사값을 구하는 방법

Th $f(x)$: 2회 미분 가능 on $[a,b]$

(1) $f''(x)\neq 0\,(f''(x)>0 \text{ or } f''(x)<0)$

(2) $f(a)f(b)<0$이면

$a\leq x_0\leq b$ $f''(x)>0$일 때, $f(x_0)>0$, $f''(x)<0$일 때 $f(x_0)<0$인 x_0을 잡는다.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\ \ldots,\ x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0$이므로

(4) $[a,b]$에서 $f(x)=0$의 근은 α 뿐이다.

9. Newton 방법(2)

ex) $f(x) = x^2 - 2 = 0$의 근사치를 Newton방법에 의해 구하여라.

풀이) (1) $f'(x) = 2x,\ \ f''(x) = 2 > 0,\ \ f(1) = -1 < 0,\ \ f(2) = 2 > 0$ 이므로

$1 < x_0 < 2$인 근 x_0가 단 하나 있다.

(2) $x_1 = 2$ (x_0의 제1 근사값)

(3) $x_2 = 2 - \dfrac{f(2)}{f'(2)} = 1.5$ (x_0의 제2 근사값) $f(1.5) = 0.25,\ f'(1.5) = 3$이므로

(4) $x_3 = 1.5 - \dfrac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.4166....$ (x_0의 제3 근사값)

(5) $x_4 = 1.416 - \dfrac{f(1.416)}{f'(1.416)} = 1.414214....$ (x_0의제4 근사값)

(6) $x \approx 1.414214$

ex) $\sqrt[3]{7}$ 의 근사값을 구하여라.

풀이) (1) $f(x) = x^3 - 7 = 0$

(2) 위 정리에 맞는지 확인

(3) $x_0 = 2$

(4) $x_1 = 2 - \dfrac{23}{12} \approx 1.91666667$

(5) $x_2 = 1.912938458,\ \ x_3 = 1.912931183 \approx x_4$

(6) $\sqrt[3]{7} \approx 1.912931183$

10. 관련된 정리(1)(3.2절)

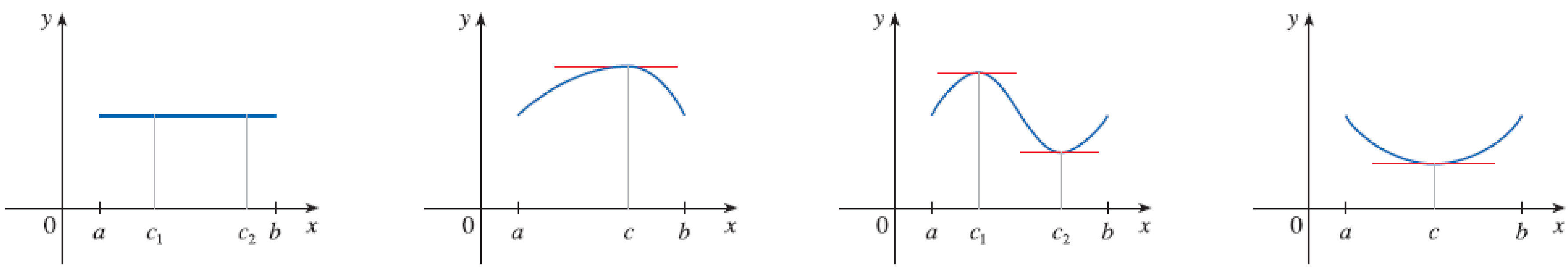
Rolle의 정리

(1) $f(x)$: 연속 on $[a,b]$

(2) $f(x)$: 미분가능 on (a,b)

(3) $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$, $f(c)=0$



(a) (b) (c) (d)

예제 2 방정식 $x^3+x-1=0$이 단 한 개의 실근을 가짐을 보여라.

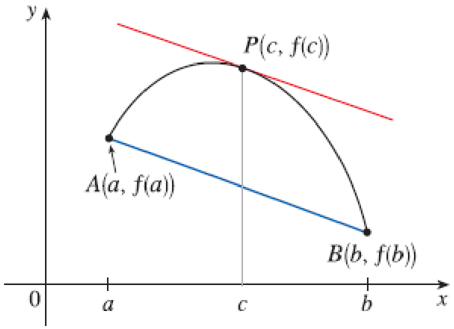
10. 관련된 정리(2)

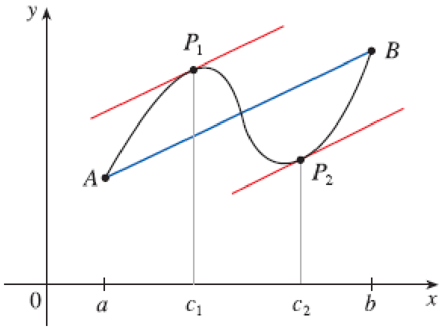
평균값 정리(Mean Value Theorem)

(1) $f(x)$: 연속 on $[a,b]$

(2) $f(x)$: 미분가능 on (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)\,,\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$





1. (물리적)평균변화율과 동일한 순간변화율이 존재한다.
2. (수학적) 할선의 기울기와 평행한 접선의 기울기가 존재한다.
3. 함수값의 차와 이에 대응되는 x 값의 차의 관계는 다음과 같다. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

정리 구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대해 $f'(x) = 0$이면 f는 (a, b)에서 상수이다.

따름정리 구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대해 $f'(x) = g'(x)$이면 $f - g$는 (a, b)에서 상수이다. 즉 $f(x) = g(x) + c$이다. 여기서 c는 상수이다.