1.3 행렬의 연산

행렬의 성분이 실수인 행렬의 덧셈과 곱셈 연산에 대하여 알아보자.

정의 1.3.1 [행렬의 상등]
행렬 A와 B의 크기가 같고 행렬의 각 성분이 서로 같으면 두 행렬은 같다. 즉, 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$과 $B = [b_{ij}]_{p \times q}$일 때, $A + B \Leftrightarrow m = p, n = q$이고 모든 $i = 1, 2, \cdots, m$과 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $a_{ij} = b_{ij}$이다.

행렬의 덧셈과 곱셈을 정의하기 전에 덧셈과 곱셈에 관한 항등원을 먼저 정의하자.

정의 1.3.2 [영행렬과 항등행렬]
(a) 크기가 $m \times n$인 행렬의 모든 성분이 0일 때, 이 행렬을 영행렬(zero matrix)이라 하고 다음과 같이 표현한다.

$$\mathbf{0} = [0]_{m \times n}$$

(b) $n \times n$인 정방행렬에서 대각성분이 모두 1이고 대각성분을 제외한 나머지 성분 모두가 0인 행렬을 항등행렬(identity matrix)이라 정의하고 I_n이라 표시한다. 즉, I_n은 다음과 같은 형태이다.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

크기에 상관없이 항등행렬을 I로 나타내자.

행렬의 덧셈과 상수곱에 관하여 정의하자.

정의 1.3.3 [행렬의 연산]
(a) **(행렬의 상수곱)** c가 상수일 때, 행렬 A에 상수 c의 곱은 행렬 A의 각 성분 a_{ij}에 상수 c를 곱하는 것이다.

$$(cA)_{ij} = ca_{ij}$$

(b) **(행렬의 덧셈)** 행렬 A와 B의 크기가 같을 때, 행렬의 덧셈은 다음과 같이 정의된다. 두 행렬의 합 $A+B$의 (i, j)번째 성분 $(A+B)_{ij}$는 행렬 A의 (i, j)번째 성분 a_{ij}와 행렬 B의 (i, j)성분 b_{ij}의 합이다. 즉,

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,.$$

행렬의 상수곱과 덧셈의 정의에 의하여 크기가 같은 행렬 A와 B의 뺄셈은 다음과 같다.

$$(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

정리 1.3.4 [행렬의 덧셈과 상수곱에 관한 연산법칙]
c_1과 c_2가 상수이고, A, B, C가 크기가 같은 행렬이며 $\mathbf{0}$를 주어진 행렬과 크기가 같은

영행렬이라 하면 다음 연산법칙이 성립한다.

(a) $A+B=B+A$
(b) $(A+B)+C=A+(B+C)$
(c) $\mathbf{0}+A=A+\mathbf{0}=A$
(d) $A+(-A)=\mathbf{0}=(-A)+A$
(e) $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$
(f) $c_1(A+B)=c_1A+c_1B$
(g) 만일 $c_1A=\mathbf{0}$ 이면 $c_1=0$ 이든지 또는 $A=\mathbf{0}$ 이다.

이제 행렬의 곱셈에 관하여 정의하자.

정의 1.3.5 [행렬의 곱셈]
$A=[a_{ij}]_{m\times p}$ 이고 $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ 일 때, 두 행렬 A와 B의 곱 AB는 $m\times n$ 행렬로 정의되고 $AB=C$라 하면 행렬 C의 각각의 성분은 다음과 같다.
모든 $i=1,2,\cdots,m$ 과 $j=1,2,\cdots,n$ 에 대하여 $AB=C=[c_{ij}]_{m\times n}$ 은

$$c_{ij}=a_{i1}b_{ij}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

이다.

(예제 1) $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&0\\1&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&-2&2\\4&-1&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&-2\\2&4\\-1&3\end{bmatrix}$

다음 행렬의 연산이 존재하면 행렬을 구하여라.

(1) $3A-4B$

(2) $B+C$

(3) AB

(4) BA

(5) DC

(6) CD

(7) AD

결론적으로 행렬의 곱 AB와 BA가 모두 정의될지라도 일반적으로 $AB \neq BA$이다. 따라서 행렬의 곱에 대한 교환법칙은 성립하지 않는다.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이고 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$일 때 $AB = \mathbf{0}$이다. 즉 행렬 A와 B가 모두 영행렬이 아니어도 행렬의 곱 AB가 영행렬이 될 수 있다.

행렬의 곱을 계산할 때 행렬을 좀 더 작은 부분행렬로 분할하여 생각하는 것이 편리할 때가 있다. 행렬의 분할과 분할된 행렬의 곱에 대해 알아보자.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

라 할 때,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

를 A의 **열벡터**(column vector)라 하고 행렬 A는

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$$

로 표현한다. 또한 A의 **행벡터**(row vector)는

$$A_1 = [a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}],\ A_2 = [a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{2n}],\ \cdots,\ A_m = [a_{m1}\ a_{m2}\ \cdots\ a_{mn}]$$

이며 행렬 A는

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

로 표현한다.

크기가 $n \times n$인 항등행렬 I_n의 열벡터

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

를 $\mathbb{R}^n$의 기본 **단위벡터**(unit vector)라 한다.

$A \in M_{m \times n}$이고 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$이면

$$A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2, \cdots, A\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a}_n$$

을 만족한다.

만일 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times n}$이고 행렬 $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$를 A의 행벡터로, 행렬 $[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n]$을 B의 열벡터로로 나타냈을 때, 행렬의 곱 AB는

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{bmatrix}=[A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_n]$$

이 되며 $(AB)_{ij}=A_i\boldsymbol{b}_j$가 된다.

(예제 2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$와 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$일 때, AB를 A의 행벡터와 B의 열벡터를 이용하여 구하여라.

크기가 5×5이 행렬 A을 다음과 같이 분할할 수 있다.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_3 & O_{3\times 2} \\ O_{2\times 3} & A_{2\times 2} \end{bmatrix}$$

만일 행렬 A와 B가

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

롤 분할이 되고 각 부분행렬 간에 곱셈이 정의된다고 하자. 그러면

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

가 된다.

(예제 3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$이고 $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$라 할 때, AB를 구하여라.

정리 1.3.6 [행렬의 곱셈법칙]

c가 상수이고 $A=[a_{ij}]_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times q}$, $C=[c_{ij}]_{q\times n}$이면 아래 연산이 정의되고 또한 이 연산은 다음의 성질을 만족한다.

(a) $(AB)C=A(BC)$

(b) $c(AB)=(cA)B=A(cB)$, $-(AB)=(-A)B=A(-B)$

(c) $(A+B)C=AC+BC$

(d) $A(B+C)=AB+AC$

(e) $I_m A=A=AI_p$

연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_nx_{mn} &= b_m \end{aligned}$$

의 계수행렬은 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$이고 상수행렬 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$이다.

$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$이라 하면 위의 연립방정식은 행렬의 곱 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$로 표현된다. 또한 A의 열벡터로

$$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n=\boldsymbol{b}$$

로 나타낸다.

(예제 4) 다음 연립방정식을 계수행렬과 계수행렬의 열벡터를 이용하여 나타내어라.

$$\begin{aligned} &x-y+3z=-4 \\ &2x-3y-z=2 \\ &-x+y+5ㅋ=-4 \end{aligned}$$

정의 1.3.7

만일 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p$이 $\mathbb{R}^n$의 원소이고 $c_1,c_2,\cdots,c_p$이 상수일 때

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_p\boldsymbol{a}_p$$

를 벡터 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p$의 일차결합(linear combination)이라 한다.

$\mathbb{R}^n$의 원소 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$

을 만족하므로 $\mathbb{R}^n$의 모든 원소는 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$의 일차결합으로 표시할 수 있다.

(예제 5) 다음의 $\mathbb{R}^3$의 원소가 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$의 일차결합으로 표시할 수 있는지 판정하여라.

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(예제 6) 예제 4의 연립방정식의 상수행렬이 연립방정식의 계수행렬의 열벡터의 일차결합인가? 일차결합이 되면 일차결합으로 표현하여라.

따라서 연립방정식의 해의 존재성에 대하여 다음 정리가 성립한다.

<u>정리 1.3.8</u>
연립방정식 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은 상수행렬 $\boldsymbol{b}$가 계수행렬 A의 열벡터의 일차결합이다.

행렬의 거듭제곱을 다음과 같이 정의하자.

<u>정의 1.3.9</u>

A가 정방행렬일 때 $A^2 = AA$로 정의하고 음의 정수가 아닌 k에 대하여 A^k을

$$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^k = AA\cdots A$$

로 정의한다.

k가 음수일 경우에도 정의되지만 이는 역행렬을 다룰 때 정의하자.

<u>정리 1.3.10</u> [행렬의 거듭제곱]

A가 정방행렬이고 k와 l이 음이 아닌 정수이면 다음이 성립한다.

(a) $A^k A^l = A^{k+l}$

(b) $(A^k)^l = A^{kl}$

(예제 7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$일 때, 수학적 귀납법을 이용하여 A^{100}을 구하여라.

<u>정의 1.3.11</u> [행렬 A의 전치행렬]

A가 $m \times n$일 때 A의 행과 열을 바꾸어 얻은 $n \times m$ 행렬을 A의 **전치행렬**(transpose)이라 하고 A^T로 나타낸다. 즉

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$이면 $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$이고 $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$이다.

(예제 8) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$일 때 A^T를 구하고 AA^T와 A^TA를 계산하여라.

<u>정리 1.3.12</u> [전치행렬의 성질]

c가 상수이고 행렬 A와 B가 아래의 연산이 정의되면 이들 연산은 다음의 성질을 만족한다.

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(cA)^T = cA^T$

(d) $(AB)^T = B^T A^T$

(e) 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여 $(A^k)^T = (A^T)^k$

<u>**정의 1.3.13**</u>

정방행렬 A가 $A^T = A$를 만족하면 행렬 A를 **대칭행렬**(symmetric matrix)이라 한다.

(예제 9) 임의의 행렬 A에 대하여 행렬 AA^T, A^TA와 $A+A^T$ 모두 대칭행렬이다.