

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

마찬가지로 x 가 3에 접근하고 3보다 작으면, $x-3$ 은 작은 음수이지만 $2x$ 는 여전히 (6에 가까운) 양수이다. 따라서 $2x/(x-3)$ 은 수치적으로 큰 음수가 된다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

곡선 $y = 2x/(x-3)$ 의 그래프는 그림 13과 같다. 정의 [6]에 의해 직선 $x=3$ 은 수직 점근선이다.

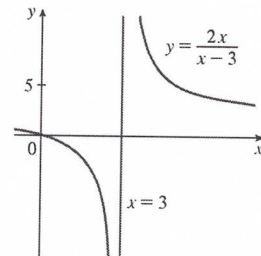


그림 13

NOTE 예제 6과 7에서 극한은 존재하지 않지만, 예제 6에서 x 가 0에 좌·우측에서 접근할 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = \infty$ 라고 쓸 수 있다. 예제 7에서는 x 가 오른쪽에서 3에 접근할 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이고, x 가 왼쪽에서 3에 접근할 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

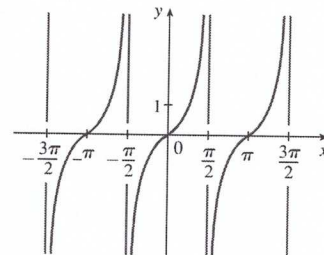
예제 8 $f(x) = \tan x$ 의 수직점근선을 구하라.

풀이 $\tan x = \sin x / \cos x$ 이므로 $\cos x = 0$ 에서 잠재적인 수직점근선이 존재한다. $x \rightarrow (\pi/2)^-$ 일 때 $\cos x \rightarrow 0^+$ 이고 $x \rightarrow (\pi/2)^+$ 일 때 $\cos x \rightarrow 0^-$ 이다. $\sin x$ 는 x 가 $\pi/2$ 부근에서 양수이기(거의 1) 때문에 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

이것은 직선 $x = \pi/2$ 는 수직점근선을 보여 준다. 비슷한 이유로 정수 n 에 대해 직선 $x = \pi/2 + n\pi$ 는 모두 $f(x) = \tan x$ 의 수직점근선이다. 그림 14의 그래프는 이를 뒷받침한다.

그림 14 $y = \tan x$

1.5 연습문제

1. 다음이 의미하는 것을 설명하라.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

이 명제는 $f(2) = 3$ 일 때에도 참인가? 설명하라.

2. 다음이 의미하는 것을 설명하라.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$$

3. 다음 함수 f 의 그래프를 이용해서 극한이 존재하면 구하라. 존재하지 않으면 이유를 설명하라.

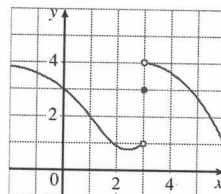
$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

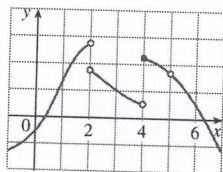
$$(c) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

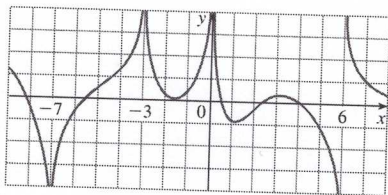
$$(e) f(3)$$



4. g 의 그래프에 대해 다음 설명을 만족하는 수 a 를 구하라.
- (a) $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 는 존재하지 않지만 $g(a)$ 는 정의된다.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 는 존재하지만 $g(a)$ 는 정의되지 않는다.
 - (c) $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ 는 존재하지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 는 존재하지 않는다.
 - (d) $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq g(a)$ 이다.



5. 다음 함수 f 의 그래프를 이용해서 각 극한을 구하라.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x)$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 - (d) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$
 - (e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$
 - (f) 수직점근선의 방정식



6. 다음 함수의 그래프를 그리고, 그래프를 이용해서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하는 a 를 결정하라.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 1/x, & x \geq 1 \end{cases}$$

7. 함수 $f(x) = x\sqrt{1+x^{-2}}$ 의 그래프를 이용하여 극한이 존재하면 구하라. 존재하지 않으면 이유를 설명하라.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- 8-9 다음 조건을 모두 만족하는 함수 f 의 예에 대한 그래프를 그려라.

8. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $f(1) = 2$

9. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$,
 $f(-1) = 2$, $f(2) = 1$

- 10-11 주어진 수로부터 함수의 값(소수점 아래 여섯째 자리까

지 정확한 값)을 계산해서 극한값을 추측하라.

10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$,

$x = 3.1, 3.05, 3.01, 3.001, 3.0001,$
 $2.9, 2.95, 2.99, 2.999, 2.9999$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + \tan x}$,

$x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.2, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01$

- 12-13 표를 이용해서 다음 극한값을 추정하라. 그래픽 도구가 있다면 결과를 그래프에서 확인하라.

12. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{\tan 2\theta}$

13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

- 14-18 무한극한을 결정하라.

14. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{x-5}$

15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-2)^2}$

16. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$

17. $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{1}{x} \sec x$

18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$

19. 다음 함수의 수직점근선을 구하라.

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+4}$$

20. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3 - 1}$ 과 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3 - 1}$ 을 다음과 같은 방법을 이용해서 판정하라.

- (a) x 가 1의 오른쪽과 왼쪽에서 접근할 때 $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ 를 계산해서

- (b) 예제 7에서의 같은 방법으로

- (c) f 의 그래프로부터

21. (a) $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ 에 대해 함수

$$f(x) = x^2 - \frac{2^x}{1000}$$

을 계산하고 다음 극한값을 추정하라.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

- (b) $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003, 0.001$ 일 때 $f(x)$ 를 구하고, 다시 추정하라.

22. 그래프를 이용해서 다음 곡선의 모든 수직점근선의 식을

1.6 | 연습문제

1. 극한 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$ 이 주어질 때 다음 극한이 존재하면 극한을 구하고, 존재하지 않으면 이유를 설명하라.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)]^3$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2-5 다음 각 극한을 구하고 각 단계에서 적절한 극한 법칙(들)을 들어 타당성을 밝히라.

2. $\lim_{x \rightarrow 5} (4x^2 - 5x)$ 3. $\lim_{v \rightarrow 2} (v^2 + 2v)(2v^3 - 5)$
 4. $\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{9 - u^3 + 2u^2}$ 5. $\lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{2t^5 - t^4}{5t^2 + 4} \right)^3$

6-17 다음 각 극한이 존재하면 값을 구하라.

6. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x - 7)$ 7. $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 2t - 8}{t - 4}$
 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 4}{x - 2}$ 9. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 + 5x - 2}$
 10. $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^3 - 27}{t^2 - 9}$ 11. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h - 3)^2 - 9}{h}$
 12. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$ 13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3}$
 14. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$ 15. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$
 16. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \frac{1}{t} \right)$ 17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

18. (a) 함수 $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$ 의 그래프를 이용해서 다음 값을 추정하라.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

- (b) x 가 0에 가까이 접근할 때 $f(x)$ 값을 표로 만들고 극한값을 추측하라.
 (c) 극한 법칙을 이용해서 추측이 옳다는 것을 보여라.

19. 압축 정리를 이용해서 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos 20\pi x = 0$ 임을 보여라. 동일한 보기화면에 함수 $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$,

$h(x) = x^2$ 의 그래프를 그려서 설명하라.

20. $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ ($x \geq 0$)일 때 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 를 구하라.

21. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$ 임을 증명하라.

22-24 극한이 존재하면 극한을 구하고, 존재하지 않으면 이유를 설명하라.

22. $\lim_{x \rightarrow -4} (|x + 4| - 2x)$ 23. $\lim_{x \rightarrow 0.5^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$
 24. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

25. 기호 sgn 으로 표기하는 부호함수(signum function)를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

(a) 함수의 그래프를 그려라.

(b) 다음 극한을 구하거나 극한이 존재하지 않으면 이유를 설명하라.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn } x$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn } x$
 (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$ (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} |\text{sgn } x|$

26. $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$ 하자.

(a) 다음을 구하라.

(i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 가 존재하는가?

(c) g 의 그래프를 그려라.

27. $B(t) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{2}t, & t < 2 \\ \sqrt{t + c}, & t \geq 2 \end{cases}$

라 하자. $\lim_{t \rightarrow 2} B(t)$ 가 존재하도록 c 의 값을 정하라.

28. (a) 기호 $\llbracket x \rrbracket$ 가 예제 10에서 정의된 최대정수함수를 나타낼 때 다음을 구하라.

(i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \llbracket x \rrbracket$ (iii) $\lim_{x \rightarrow -2.4} \llbracket x \rrbracket$

(b) n 이 정수일 때 다음을 계산하라.

(i) $\lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket$

- (c) a 의 어떤 값에서 $\lim_{x \rightarrow a} \lfloor x \rfloor$ 가 존재하는가?
29. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 가 존재하지만 $f(2)$ 와 같지 않음을 보여라.
30. p 가 다항함수일 때 $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ 임을 보여라.
31. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 를 구하라.
32. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{가 유리수} \\ 0, & x \text{가 무리수} \end{cases}$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 임을 증명하라.
33. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 는 존재하지 않지만 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$ 는 존재하는 예를 보여라.
34. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ 이 존재할 수 있도록 하는 a 가 있는가? 만약 있다면 a 의 값과 극한값을 구하라.

1.7 | 극한의 엄밀한 정의

1.5절에서 주어진 극한에 대한 직관적 정의는 때때로 이해하기가 어려울 수 있다. 왜냐하면 “ x 가 2에 가까이 간다.”와 “ $f(x)$ 가 L 에 점점 더 가까워진다.”와 같은 구절은 모호하기 때문이다. 결론적으로 다음을 증명하기 위해서는 극한에 대한 보다 더 엄밀한 정의가 필요하다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10,000} \right) = 0.0001 \quad \text{또는} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■ 극한의 엄밀한 정의

극한에 대한 엄밀한 정의에 동기를 부여하기 위해 다음 함수를 생각해 보자.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

직관적으로 $x \neq 3$ 이면서 x 가 3에 가까이 접근할 때 $f(x)$ 가 5에 가까이 접근하고, 따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ 임은 분명하다.

x 가 3에 가까이 접근할 때 $f(x)$ 가 어떻게 되는가에 대한 좀 더 세분화된 정보를 얻기 위해 다음과 같은 질문을 던져 보자.

$f(x)$ 와 5의 차이가 0.1보다 작기 위해서는 x 가 3에 얼마나 가까이 접근해야 하는가?

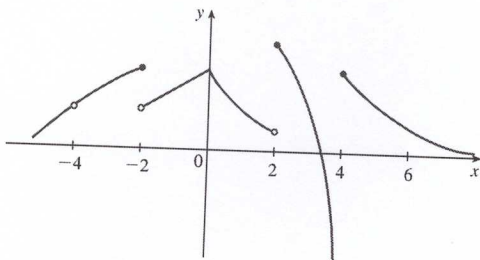
x 와 3 사이의 거리는 $|x - 3|$ 이고 $f(x)$ 와 5 사이의 거리는 $|f(x) - 5|$ 이므로, 이 문제는 다음 조건을 만족하는 δ (그리스 문자 델타)를 구하는 것이다.

$$x \neq 3 \text{이고 } |x - 3| < \delta \text{일 때 } |f(x) - 5| < 0.1$$

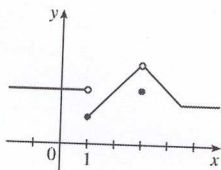
$|x - 3| > 0$ 이면 $x \neq 3$ 이므로 문제는 같은 공식인 다음 조건을 만족하는 δ 를 구하는 것이다.

1.8 연습문제

1. 함수 f 가 수 4에서 연속이라는 사실을 나타내는 방정식을 쓰라.
2. (a) f 의 그래프로부터 f 가 불연속인 수를 말하고 그 이유를 설명하라.
 (b) (a)에서 구한 각 수에 대해 f 가 오른쪽으로부터 연속인지 왼쪽으로부터 연속인지 또는 어느 쪽으로부터 연속도 아닌지를 조사하라.



3. 함수 f 의 그래프가 주어져 있다.



- (a) 어떤 수 a 에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하지 않는가?
 (b) 어떤 수 a 에서 f 가 연속이 아닌가?
 (c) 어떤 수 a 에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하지만 f 는 연속이 아닌가?
- 4-5 \mathbb{R} 에서 정의되고 언급된 불연속인 곳을 제외한 모든 곳에서 연속인 함수 f 의 그래프를 그려라.
4. -2에서 제거 가능한 불연속, 2에서 무한 불연속
5. 0과 3에서 불연속이지만, 0의 오른쪽으로부터 그리고 3의 왼쪽으로부터 연속
6. 유료 도로에서 어느 구간을 달리는 데 부과되는 통행료 T 는 혼잡 시간(오전 7~10시, 오후 4~7시)에는 7달러, 나머지 시간에는 5달러이다.
 (a) 시간 t 에 대한 함수 T 의 그래프를 차점을 지난 시간을 단위로 그려라.

(b) 함수의 불연속과 이것이 도로를 이용하는 사람들에게 의미하는 바에 대해 설명하라.

7-8 연속의 정의와 극한의 성질을 이용해서 다음 함수가 주어진 수 a 에서 연속임을 보여라.

7. $f(x) = 3x^2 + (x+2)^5$, $a = -1$

8. $p(v) = 2\sqrt{3v^2 + 1}$, $a = 1$

9. 연속의 정의와 극한의 성질을 이용해서

함수 $f(x) = x + \sqrt{x-4}$ 가 구간 $[4, \infty)$ 에서 연속임을 보여라.

10-12 주어진 함수가 주어진 수 a 에서 불연속인 이유를 설명하라. 각 경우에 함수의 그래프를 그려라.

10. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $a = -2$

11. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 1 \\ 1/x, & x \geq 1 \end{cases}$, $a = 1$

12. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1-x^2, & x > 0 \end{cases}$, $a = 0$

13. 함수 $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ 에 대해

(a) f 가 $x=3$ 에서 제거 가능한 불연속임을 보여라.

(b) f 가 $x=3$ 에서 연속이 되도록 (그러므로 불연속성이 제거되게) $f(3)$ 을 다시 정의하라.

14-17 정리 [4], [5], [7], [9]를 이용해서 주어진 함수가 그들의 정의역에 있는 모든 점에서 연속인 이유를 설명하라. 정의역을 구하라.

14. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+2}}$

15. $h(t) = \frac{\cos(t^2)}{1-t^2}$

16. $L(v) = v\sqrt{9-v^2}$

17. $M(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

18-19 연속을 이용해서 다음 극한을 계산하라.

18. $\lim_{x \rightarrow 2} x\sqrt{20-x^2}$

19. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} x^2 \tan x$

20. 다음 함수의 불연속을 찾고 그래프로 설명하라.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$$

21. 다음 함수 f 가 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속임을 보여라.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

22-23 함수 f 가 불연속이 되는 수를 구하라. 이들 중 f 의 어디에서 오른쪽, 왼쪽으로부터 연속이고 어디에서 오른쪽, 왼쪽으로부터 연속이 아닌가? f 의 그래프를 그려라.

$$22. f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x < 1 \\ 1/x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ 2x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$$

24. 다음 함수가 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이 되기 위한 상수 c 를 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & x < 2 \\ x^3 - cx & x \geq 2 \end{cases}$$

25. f 와 g 는 연속함수로서 $g(2) = 6$, $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$ 일 때 $f(2)$ 를 구하라.

26. 다음 함수 f 중 a 에서 제거 가능한 불연속인 함수를 찾아라. 그 불연속이 제거 가능하다면 $x \neq a$ 에서 f 와 일치하고 a 에서 연속인 함수 g 를 구하라.

$$(a) f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$$

$$(b) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$$

$$(c) f(x) = \lfloor \sin x \rfloor, \quad a = \pi$$

27. $f(x) = x^2 + 10 \sin x$ 이면 $f(c) = 1000$ 을 만족하는 수 c 가 존재함을 보여라.

28-29 중간값 정리를 이용해서 주어진 방정식의 근이 주어진 구간 내에 있음을 증명하라.

$$28. -x^3 + 4x + 1 = 0, \quad (-1, 0)$$

$$29. \cos x = x, \quad (0, 1)$$

30. $\cos x = x^3$ 에 대해

(a) 방정식이 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

(b) 계산기를 이용해서 해를 포함하는 길이가 0.01인 구간을 구하라.

31. $x^5 - x^2 - 4 = 0$ 에 대해

(a) 방정식이 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

(b) 그래프에 의해 소수점 아래 셋째자리까지 정확한 해를 구하라.

32. 그래프에 의하지 않고, $y = \sin x^3$ 이 구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 두 개의 x 절편이 있음을 보여라.

33. f 가 a 에서 연속이 되기 위한 필요충분조건이 다음과 같음을 증명하라.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

34. 코사인함수는 연속함수임을 증명하라.

35. 정리 8을 이용해서 1.6절의 극한 법칙 6과 7을 증명하라.

36. 다음 함수가 연속이기 위한 x 값을 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{가 유리수} \\ 1, & x \text{가 무리수} \end{cases}$$

37. 다음 함수가 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속임을 보여라.

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

38. 티베트의 수도승은 오전 7시 수도원을 떠나서 평상시 다니던 경로로 산 정상까지 오후 7시에 도착한다. 다음 날 아침 그는 오전 7시 정상에서 출발해서 똑같은 경로로 오후 7시 수도원에 도착한다. 중간값 정리를 이용해서 경로에서 수도승이 이를 동안 정확하게 똑같은 시간에 지나갈 수 있는 지점이 존재함을 보여라.