1.2 가우스 소거법

1.1절에서 연립방정식의 해를 첨가계수행렬에 기본행연산을 적용하여 후진대입법으로 연립방정식의 해를 구할 수 있도록 행렬을 변환하였다. 이렇게 연립방정식의 해를 구하는 방법을 **가우스 소거법**(Gauss elimination)이라 한다.

후진대입법을 적용할 수 있는 연립방정식의 첨가계수행렬은 다음과 같이 정의한다.

<u>정의 1.2.1</u>
다음 조건을 만족하는 행렬을 행사다리꼴(Row Echelon Form) 행렬 또는 REF라 한다.
(a) 각 행에서 처음 0이 아닌 성분은 1이다.
각 행에서 처음 0이 아닌 성분을 선행선분(leading entry) 또는 pivot이라 한다.
(b) 각 행에서 선행선분은 아래 행의 처음 0이 아닌 성분의 왼쪽 열에 위치한다.
(c) 모든 성분이 0인 행은 아래쪽에 있다.

(예제 1) 다음 행렬 중 행사다리꼴 행렬은?

(1) $\begin{bmatrix} 0&1&3&0 \\ 0&0&1&5 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1&2&0&0&4 \\ 0&0&1&0&2 \\ 0&0&0&1&2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2&0&1 \\ 0&1&2 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0&1&5&0 \\ 1&2&0&1 \\ 0&1&5&0 \\ 0&0&0&7 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$

(예제2) 기본행연산을 적용하여 다음 행렬을 행사다리꼴 행렬로 바꾸어라.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(예제3) 기본행연산을 적용하여 다음 행렬을 행사다리꼴 행렬로 바꾸어라.

$$\begin{bmatrix} 0&2&4&1 \\ 1&2&3&1 \\ 3&2&1&4 \end{bmatrix}$$

(예제4) 다음 연립방정식의 해를 가우스 소거법을 이용하여 구하여라.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -4 \end{aligned}$$

정의 1.2.2
선행성분 1을 포함하는 열에서 선행성분을 제외한 모든 성분이 0인 행사다리꼴 행렬을 **기약 행사다리꼴**(Reduced Row Echelon Form) 행렬 또는 RREF라 한다.

행렬을 기약 행사다리꼴 행렬로 변환시키면 기약 행사다리꼴 행렬은 유일하다.

정의 1.2.3
크기가 같은 두 행렬 A와 B가 같은 기약 행사다리꼴로 변형되었다면 두 행렬 A와 B는 **행동치**(row equivalence)라고 한다.

행렬 A가 행사다리꼴 행렬 B와 C로 변환되었다면 행렬 A, B와 C는 모두 행동치가 되며 행렬 A의 행사다리꼴 행렬과 기약행사다릴꼴 행렬은 서로 행동치가 된다. 또한 두 연립방정식의 첨가계수행렬이 행동치가 되면 두 연립방정식의 해집합은 같다.

(예제 5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$가 행동치 행렬임을 보여라. 또한 두 행렬을 첨가계수행렬로 가지는 연립방정식의 해가 같음을 보여라.

(예제6) 다음 행렬을 기약 행사다리꼴 행렬로 바꾸어라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

연립방정식의 첨가계수행렬을 기약 행사다리꼴로 변환시킨 후 연립방정식의 근을 구하는 방법을 가우스-조르단 소거법(Gauss-Jordan elimination)이라 한다.

(예제 7) 가우스-조르단 소거법을 이용하여 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ &2x_1 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ &x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ &-3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \end{aligned}$$

이제 연립방정식의 해가 존재하지 않거나 무한히 많은 해를 가지는 경우에 대해서 알아보자.

우선 동차 일차 연립방정식

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_n x_{mn} = 0
\end{aligned}
$$

은 자명한 해

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$$

이 존재함을 안다.
그러므로 동차 일차 연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우는 없다.
결론적으로 동차 일차 연립 방정식의 해는 자명한 해를 유일한 해로 가지거나 많은 해가 존재하는 경우뿐이다.

(예제 8) 연립방정식

$$
\begin{aligned}
&2x + y + z = 0 \\
&x - y + z = 0
\end{aligned}
$$

의 해집합을 가우스 소거법으로 구하여라.

동차 일차 연립방정식에서 방정식 개수 m이 미지수의 개수 n보다 적으면 연립방정식은 무한히 많은 해를 갖는다. 이때 연립방정식의 해집합에 대하여 다음 정리가 성립한다.

<u>정리 1.2.4</u>
n개의 미지수를 가진 동차 일차 연립방정식의 첨가계수행렬을 행사다리꼴로 변환시켰을 대 행사다리꼴 행렬에서 행의 성분이 모두 0이 아닌 행의 개수가 m이고 $m < n$을 만족하면, 이 동차 일차 연립방정식은 무수히 많은 해를 가지며 해집합에서의 상수 개수는 $n - m$이다. 만일 $m = n$이면 주어진 동차 연립방정식은 자명한 해만 갖는다.

(예제 9) 가우스 소거법을 이용하여 다음 동차 연립방정식의 해를 구하여라.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
&-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
&x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 0
\end{aligned}
$$

(예제 10) 가우스 소거법을 이용하여 다음 동차 연립방정식의 해를 구하여라.

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\
&2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\
&3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6
\end{aligned}
$$

(예제 11) 가우스 소거법을 이용하여 다음 동차 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$A \in M_{m \times n}$이라 하자. 연립방정식 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해를 가우스 소거법을 이용하여 구할 때 해집합의 원소 개수는 다음과 같이 요약할 수 있다.

연립방정식의 첨가계수행렬 $[A|\boldsymbol{b}]$를 행사다리꼴 행렬 $B = [C|\boldsymbol{d}]$로 변형시키고 행렬 B에서 성분이 모두 0이 아닌 행의 개수를 k라 하고 크기가 $m \times n$인 행렬 C에서 성분이 모두 0이 아닌 행의 개수를 l이라 하면 항상 $l \leq k$이 성립한다.

(i) 만일 $l < k$이면 연립방정식의 해는 존재하지 않는다.
(ii) 만일 $k = l = n$이면 미지수 개수와 방정식 개수 모두 같으므로 연립방정식은 유일한 해를 갖는다.
(iii) 만일 $k = l < n$이면 미지수 개수가 방정식 개수보다 많으므로 연립방정식은 무한히 많은 해를 갖는다.

(예제 12) 연립방정식

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2 - 12)x_3 &= a + 7 \end{aligned}$$

이

(1) 유일한 해를 가지도록,

(2) 무한히 많은 해를 가지도록,

(3) 해가 존재하지 않도록 상수 a의 값을 구하여라.