

# 제7장 적분 기법

---

# 목 차

---

1. 치환적분법
2. 부분적분법
3. 삼각함수 적분
4. 쌍곡선 함수의 적분
5. 무리함수 적분
6. 유리함수 적분
7. 특이적분

# 1. 치환적분법

## 1. 부정 적분의 치환 적분법

$$\int f(t) dt = F(t) \text{ 일 때,}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

$$\Leftrightarrow (1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

$$(2) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

## 2. 정적분의 치환 적분법

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

# 1. 부분 적분법

$e^x, x^n, \sin x, \cos x, \ln x$  계열,  $\text{arc}$ 계열 형태의 함수들에 곱으로 되어 있는 경우

## 1. 부정 적분의 부분 적분법

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C$$

## 2. 정적분의 부분 적분법

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

☞  $\int \{\ln x\}^n \frac{1}{x} dx$  인 경우, 치환적분법

☞  $f(x)$  :  $\text{arc}$ 계열 >  $\ln x$  계열 >  $x^n$  > 삼각함수 > 지수함수

# 7.1 예제 및 연습문제 풀이

『예제 1』  $\int x \sin x \, dx$ 를 구하라.

『예제 4』  $\int e^x \sin x \, dx$ 를 구하라.

『예제 2』  $\int \ln x \, dx$ 를 구하라.

『예제 5』  $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$ 를 계산하라.

7.  $\int \cos^{-1} x \, dx$

9.  $\int t \csc^2 t \, dt$

10.  $\int (\ln x)^2 \, dx$

16.  $\int_0^2 y \sinh y \, dy$

20.  $\int_0^{\pi/3} \sin x \ln(\cos x) \, dx$

22.  $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

24.  $\int x \ln(1 + x) \, dx$

32. 곡선  $y = x^2 \ln x$ 와  $y = 4 \ln x$ 로 유계된 영역의 넓이를 구하라.

35.  $y = e^{-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ ;  $x = 1$

36. 곡선  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ 로 유계된 영역을 다음 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

(a)  $y$ -축

(b)  $x$ -축

## 7.2 기본 공식

### 삼각함수와 쌍곡선 함수의 덧셈공식

	삼각함수	쌍곡선 함수
항등식	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$
덧셈정리	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$ $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$
2배각공식	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ $\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$
반각공식	$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$	$\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cosh x - 1)$ $\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cosh x + 1)$ $\tanh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}$

# 1. 삼각함수 적분(1)

## 1. 삼각함수의 유리식 적분

(1)  $\int R(\sin x) \cos x \, dx \Rightarrow \sin x = t \text{로 치환}$

(2)  $\int R(\cos x) \sin x \, dx \Rightarrow \cos x = t \text{로 치환}$

(3)  $\int R(\tan x) \sec^2 x \, dx \Rightarrow \tan x = t \text{로 치환}$

(4)  $\int R(\sin x, \cos x) \, dx \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = t \text{로 치환}$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

## 2. 삼각함수 적분(2)

### 2. 삼각함수의 거듭제곱 적분

$$(1) \int \sin^n x \, dx, \int \cos^n x \, dx$$

$$(2) \int \tan^n x \, dx, \int \cot^n x \, dx$$

$$(3) \int \sec^n x \, dx, \int \csc^n x \, dx$$

☞ 부분적분을 이용한 점화식

$$(1) \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$(2) \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$(3) \int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

$$(4) \int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

## 2. 삼각함수 적분(3)

### 3. 삼각함수 일반적인 적분

$$(1) \int \sin^m x \cos^n x dx$$

$$(2) \int \tan^m x \sec^n x dx, \int \cot^m x \csc^n x dx$$

$$(3) \int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx$$

$$(4) \int \cos mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x - \sin(m-n)x] dx$$

$$(5) \int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx$$

$$(6) \int \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] dx$$

### 3. 쌍곡선함수의 적분(2)

#### 쌍곡선 함수의 적분

$$(1) \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$(2) \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$(3) \int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + C$$

$$(4) \int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + C$$

$$(5) \int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1} |\sinh x| + C$$

$$(6) \int \operatorname{csch} x \, dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

#### Weierstrass 치환

$\int R(\sin x, \cos x) \, dx$	$\int R(\sinh x, \cosh x) \, dx$
$\tan \frac{x}{2} = t$ $\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$	$\tanh \frac{x}{2} = t$ $\begin{cases} \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \\ \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \frac{2}{1-t^2} dt \end{cases}$

## 7.2 연습문제 풀이

1-28 다음 적분을 계산하라.

$$1. \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

$$10. \int \sin^2 x \sin 2x \, dx$$

$$13. \int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$$

$$14. \int \tan^3 x \sec x \, dx$$

$$20. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^5 \phi \csc^3 \phi \, d\phi$$

$$22. \int \sin 8x \cos 5x \, dx$$

$$25. \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$$

$$27. \int x \tan^2 x \, dx$$

$$28. \int \frac{dx}{\cos x - 1}$$

35-36 다음 곡선으로 유계된 영역을 지정된 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

$$36. y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi/4; y = 1$$

# 4. 무리 함수 적분

(1)  $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx \Rightarrow \sqrt[n]{ax+b} = t$ 로 치환

(2)  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ 의 경우 삼각 치환

(3)  $(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(4)  $(\sinh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(5)  $(\cosh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C (\frac{x}{a} > 1)$

삼각 치환표

식	치환	등식
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

## 7.3 예제 & 연습문제(1)

(예제 1)  $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$ 를 계산하라.

(예제 2) 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

(예제 3)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} dx$ 를 구하라.

(예제 4)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$ 를 구하라.

(예제 5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, a > 0$ 을 계산하라.

(예제 7)  $\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$ 를 계산하라.

## 7.3 예제 & 연습문제(2)

$$1. \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$4. \int \frac{\sqrt{4x^2 - 25}}{x} dx, \quad x = \frac{5}{2} \sec \theta$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx$$

$$17. \int \sqrt{x^2 + 2x} dx$$

$$3. \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \sin \theta$$

$$5. \int x^3 \sqrt{16+x^2} dx$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$$

$$12. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}} dx$$

19. (a) 삼각치환을 이용해서 다음을 보여라.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

(b) 쌍곡선치환  $x = a \sinh t$ 를 이용해서 다음을 보여라.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

이 두 식은 6.7절의 공식 ③과 관련이 있다.

# 5. 유리함수 적분

$$(1) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$(2) (\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$(3) \begin{cases} (\tanh^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2} & |x| < 0 \\ (\coth^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2} & |x| > 0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C & \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \\ \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C & \left|\frac{x}{a}\right| > 1 \end{cases}$$

## 부분분수의 해

$$(1) \frac{p(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(cx+d)}$$

$$(2) \frac{p(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{C}{(ax+b)^n}$$

$$(3) \frac{p(x)}{(ax+b)(cx^2+dx+e)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)}$$

## 7.4 예제 & 연습문제(1)

(예제 2)  $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$ 를 계산하라.

(예제 4)  $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$ 를 구하라.

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

(예제 5)  $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$ 를 계산하라.

(예제 6)  $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$ 를 계산하라.

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

(예제 8)  $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$ 를 계산하라.

## 7.4 예제 & 연습문제(2)

$$4. \int \frac{5}{(x-1)(x+4)} dx$$

$$5. \int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} dx$$

$$8. \int \frac{x^2}{x-1} dx$$

$$10. \int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} dx$$

$$16. \int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$$

$$17. \int \frac{1}{x^3-1} dx$$

$$19. \int \frac{5x^4+7x^2+x+2}{x(x^2+1)^2} dx$$

$$25. \int \frac{1}{x-3\sqrt{x}+2} dx$$

$$28. \int \frac{dx}{1+e^x}$$

**적분 공식표** 적분상수는 생략했다.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$3. \int e^x dx = e^x$$

$$4. \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b}$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$8. \int \csc^2 x dx = -\cot x$$

$$9. \int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$10. \int \csc x \cot x dx = -\csc x$$

$$11. \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$12. \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x|$$

$$13. \int \tan x dx = \ln|\sec x|$$

$$14. \int \cot x dx = \ln|\sin x|$$

$$15. \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$16. \int \cosh x dx = \sinh x$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0$$

$$*19. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$*20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$$

# 6. 이상 적분 (1)

## 1. 특이 적분

피적분함수가 불연속인 이상 적분

case 1	case2
① $f(x)$ : 연속 on $[a,b]$ 즉, $x = b$ : 특이점 ② $x \rightarrow b^-$ 일 때, $ f(x)  \rightarrow \infty$ $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$	① $f(x)$ : 연속 on $(a,b]$ 즉, $x = a$ : 특이점 ② $x \rightarrow a^+$ 일 때, $ f(x)  \rightarrow \infty$ $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$

(case 3)

- ①  $f(x)$ : 연속 on  $[a,b]$ , 즉,  $x = c (\in (a,b))$  : 특이점  
②  $x \rightarrow c$  일 때,  $|f(x)| \rightarrow \infty \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$   
 $\int_a^c f(x) dx$  : 수렴 and  $\int_c^b f(x) dx$  : 수렴  $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  : 수렴

# 6. 이상 적분 (2)

## 2. 무한 적분

2) 무한 적분 : 적분한계가 무한인 이상적분

case 1	case 2
$f(x)$ : 연속 on $[a, \infty)$ $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$	$f(x)$ : 연속 on $(-\infty, a]$ $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$

(case 3)

$f(x)$ : 연속 on  $(-\infty, \infty)$   $a$ : 상수

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx : \text{수렴} \text{ and } \int_a^{\infty} f(x) dx : \text{수렴} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx : \text{수렴}$$

☞  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \text{발산} & p \leq 1 \end{cases}$

# 6. 이상 적분 (3)

## 3. 무한 적분에 대한 비교 판정법

$f, g :$ 연속함수이고  $x \geq a, f(x) \geq g(x) \geq 0$

(a)  $\int_a^{\infty} f(x)dx :$ 수렴  $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x)dx :$ 수렴

(b)  $\int_a^{\infty} g(x)dx :$ 발산  $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx :$ 발산