6장 역함수와 초월함수의 도함수

목 차

1. 역함수의 정의와 성질

1. 정의

$f : X \to Y$: 일대일 대응이고 Y의 원소 y에 X의 원소 x에 대응시킬 때

이 함수를 f의 역함수라고 한다. 즉, $f^{-1} : Y \to X$

1) $D_f = R_{f^{-1}}$, $R_f = D_{f^{-1}}$

2) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

3) 함수의 그래프 : $f(x)$와 $y = x$에 대해 대칭

2. 성질

1) $f \circ f^{-1} = I$, $f^{-1} \circ f = I$ 2) $(f^{-1})^{-1} = f$ 3) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

3. 정리

f : 연속 on $[a, b]$, 증가(감소)

$\Rightarrow$ ∃ 역함수 f^{-1} : 연속 on $[f(a), f(b)]([f(b), f(a)])$, 증가(감소)함수

4. 역함수 미분법

(1) $f(x)$: 미분가능, 증가(감소) on I

(2) $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(y)$: 미분가능 on R_f

$$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)}$$

2. 지수함수와 로그함수(1)

지수함수

$f(x)=a^x\,(a>0,\,a\neq 1)/f(x)=e^x$

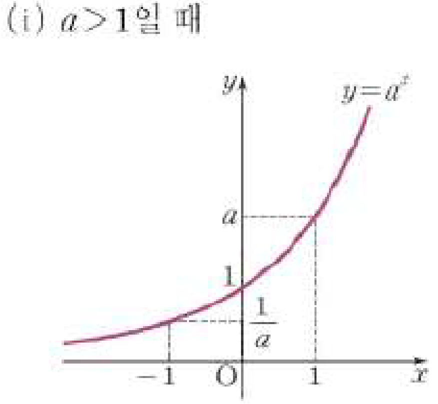
(1) $D_f=(-\infty,\infty),\ R_f=(0,\infty)$

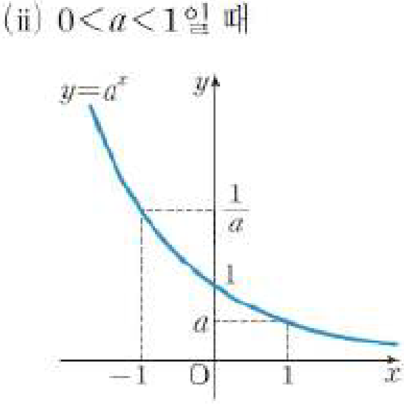
(2) 연속

(3) $0<a<1$: 감소. $a>1$: 증가

(4) $y=0$: 수평점근선

(5) 함수의 그래프





(6) $f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x \ln a,\ f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$

(7) $\int a^x dx=\dfrac{1}{\ln a}a^x+C,\ \int e^x dx=e^x+C$

2. 지수함수와 로그함수(2)

로그함수

$f(x)=\log_a x\,(a>0,\,a\neq 1)\,/\,f(x)=\ln x$

(1) $D_f=(0,\infty),\ R_f=(-\infty,\infty)$

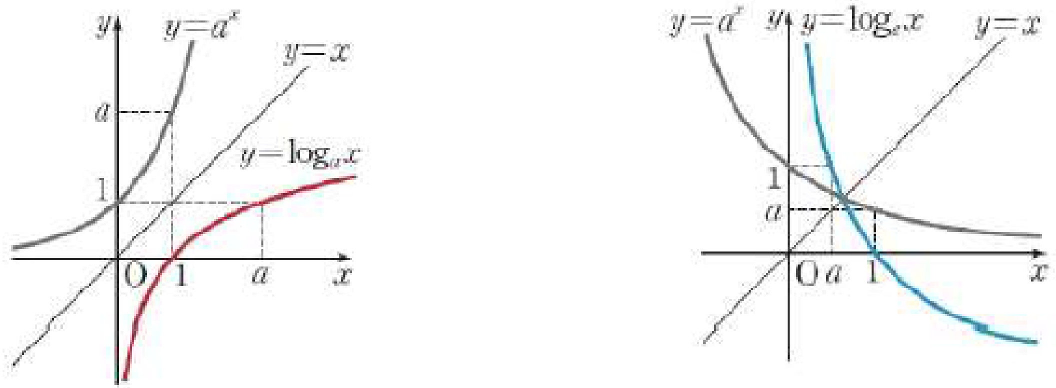
(2) 연속

(3) $0<a<1$: 감소. $a>1$: 증가

(4) $x=0$: 수직점근선

(5) 함수의 그래프

(i) $a>1$일 때, (ii) $0<a<1$일 때,



(6) $f(x)=\log_a x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a},\ f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$

(7) $\displaystyle\int \log_a x\,dx=\frac{1}{\ln a}(x\ln x-x)+C,\ \int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$

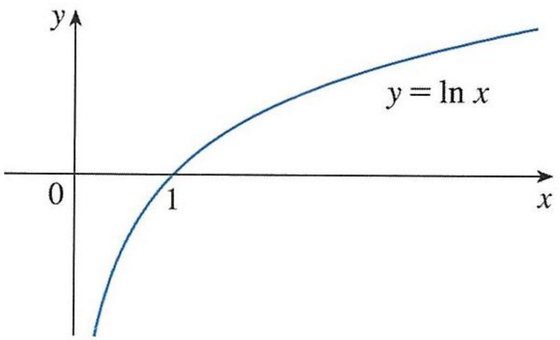
2. 지수함수와 로그함수*(2)

자연로그함수(Natural logarithmic function)

1. 자연로그함수

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \ (x > 0)$$

(1) $D_f = (0, \infty)$
(2) $R_f = (-\infty, \infty)$
(3) 연속, 증가함수



2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \ \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

3. 로그 법칙

$x > 0, \ y > 0, \ r \in Q$

(1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (2) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ (3) $\ln(x^r) = r \ln x$

4. $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$

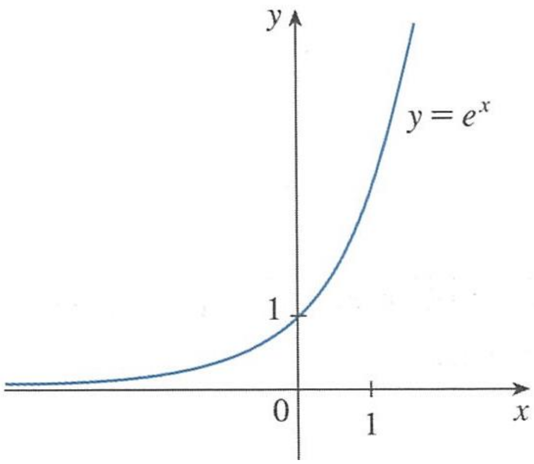
2. 지수함수와 로그함수*(2)

자연지수함수(Natural exponential function)

1. 자연지수함수

$$f(x) = e^x$$

(1) $D_f = (-\infty, \infty)$
(2) $R_f = (0, \infty)$
(3) 연속, 증가함수



2 $(e^x)' = e^x, \quad \int e^x dx = e^x + C$

3. 지수법칙

$$x, y \in R, r \in Q$$

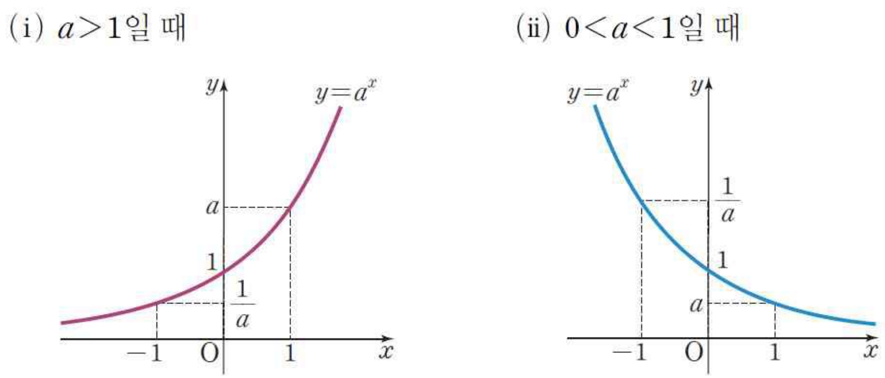
$$(1)\ e^{x+y} = e^x e^y \quad (2)\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (3)\ (e^x)^r = e^{xr}$$

2. 지수함수와 로그함수*(2)

일반적인 지수함수(general exponential function)

1. 일반적인 지수함수

$$f(x) = a^x = e^{x\ln a}$$



2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

3. 지수법칙

$x, y \in R$, $a, b > 0$

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$ (2) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ (3) $(a^x)^y = a^{xy}$ (4) $(ab)^x = a^x b^x$

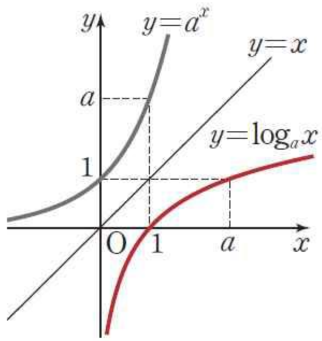
2. 지수함수와 로그함수*(2)

일반적인 로그함수(general logarithmic function)

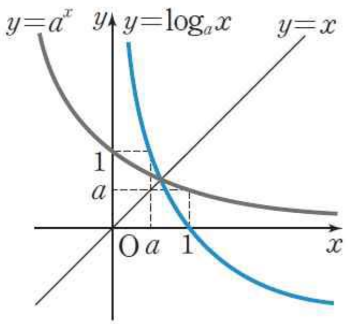
1. 일반적인 로그함수

$$f(x) = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

(i) $a>1$일 때,



(ii) $0<a<1$일 때,



2. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\displaystyle\int \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a}\{x \ln x - x\} + C$

4. $e = \displaystyle\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

3. 역삼각함수의 도함수(1)

삼각함수의 도함수

(1) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

(2) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

(3) $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

(4) $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$

(5) $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$

(6) $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

3. 역삼각함수의 도함수(2)

삼각함수의 부정적분

$$(1) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(2) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$(3) \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$(4) \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$(5) \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$(6) \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

3. 역삼각함수의 도함수 (3)

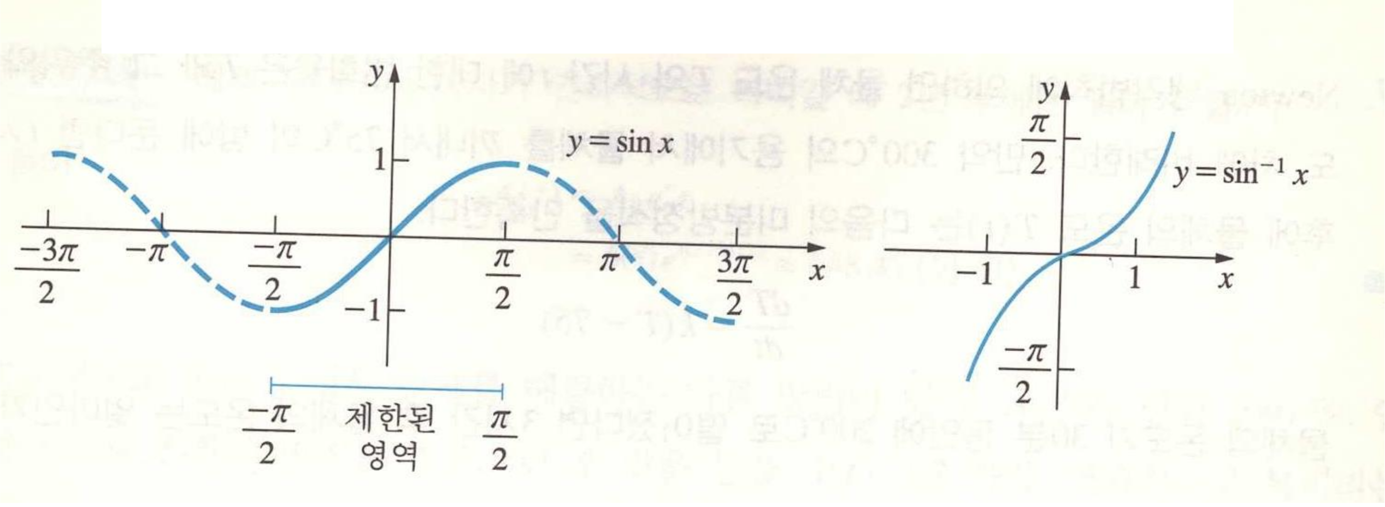
역사인 함수 (Arcsine)

$f(x) = \sin x$

(1) $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
(2) $R_f = [-1, 1]$
(3) 연속
(4) 증가

$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$

(1) $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$
(2) $R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
(3) 연속
(4) 증가



3. 역삼각함수의 도함수 (4)

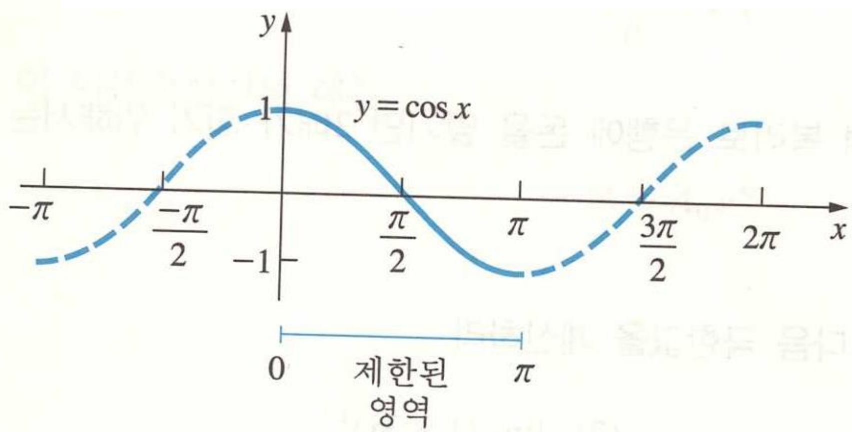
역코사인함수(Arccosine)

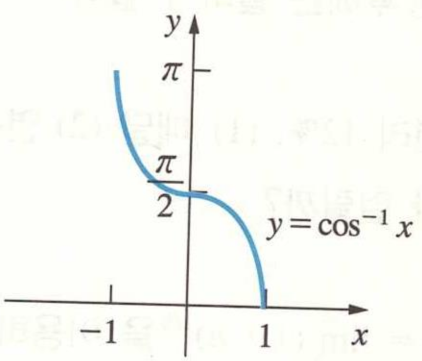
$f(x) = \cos x$

(1) $D_f = [0, \pi]$
(2) $R_f = [-1, 1]$
(3) 연속
(4) 감소

$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$

(1) $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$
(2) $R_{f^{-1}} = [0, \pi]$
(3) 연속
(4) 감소





3. 역삼각함수의 도함수 (5)

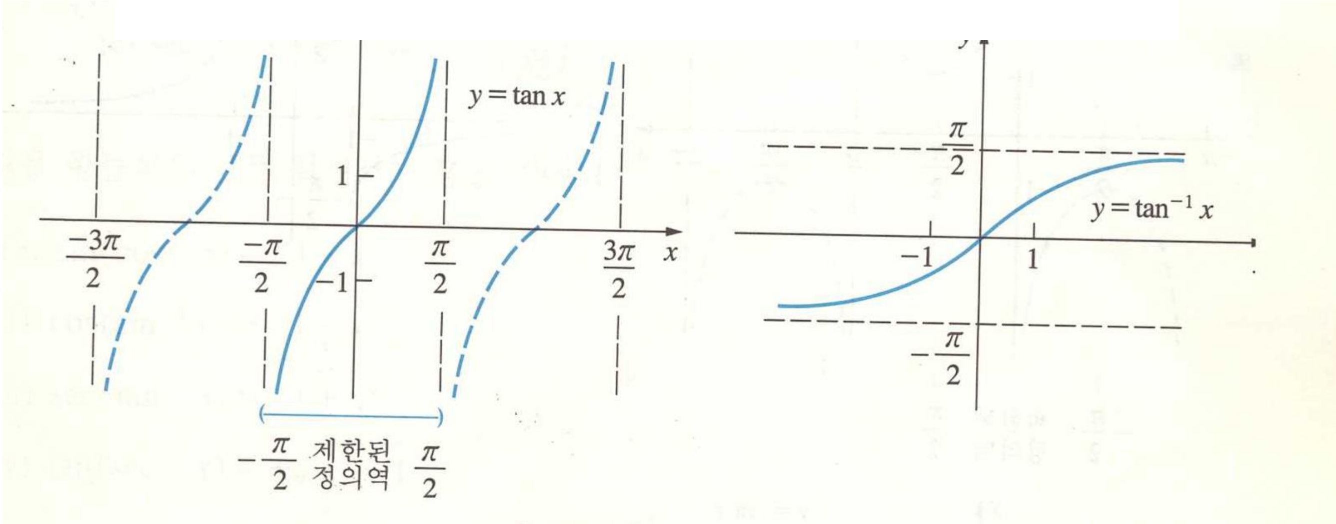
역탄젠트함수(Arctangent)

$f(x) = \tan x$

(1) $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
(2) $R_f = (-\infty, \infty)$
(3) 연속
(4) 증가

$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$

(1) $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$
(2) $R_{f^{-1}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
(3) 연속
(4) 증가



3. 역삼각함수의 도함수 (6)

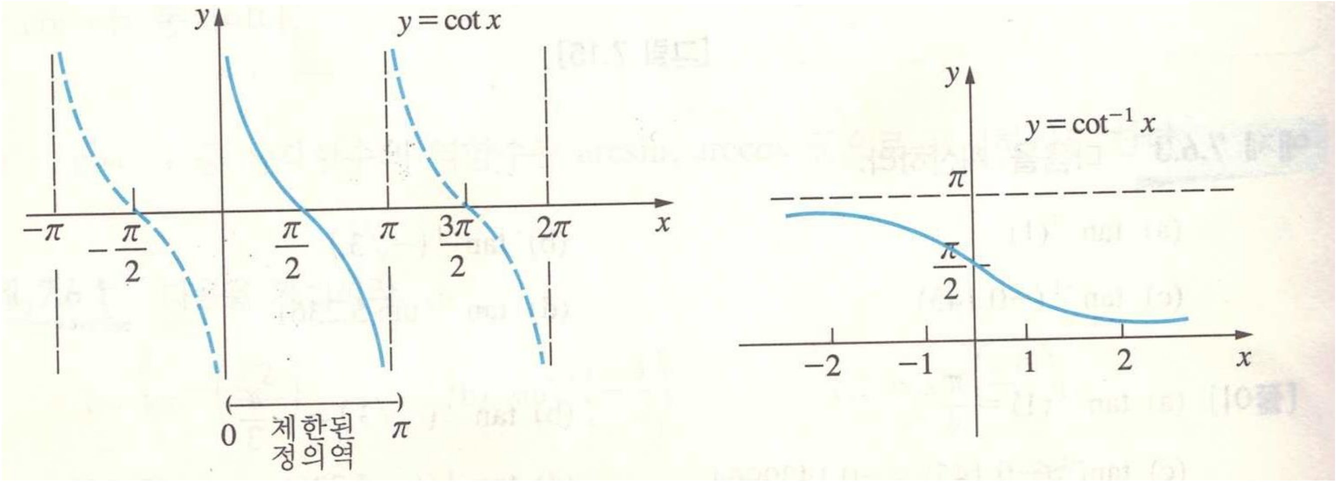
역코탄젠트 함수(Arccotangent)

$f(x) = \cot x$

(1) $D_f = (0, \pi)$
(2) $R_f = (-\infty, \infty)$
(3) 연속
(4) 감소

$f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$

(1) $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$
(2) $R_{f^{-1}} = (0, \pi)$
(3) 연속
(4) 감소



3. 역삼각함수의 도함수 (7)

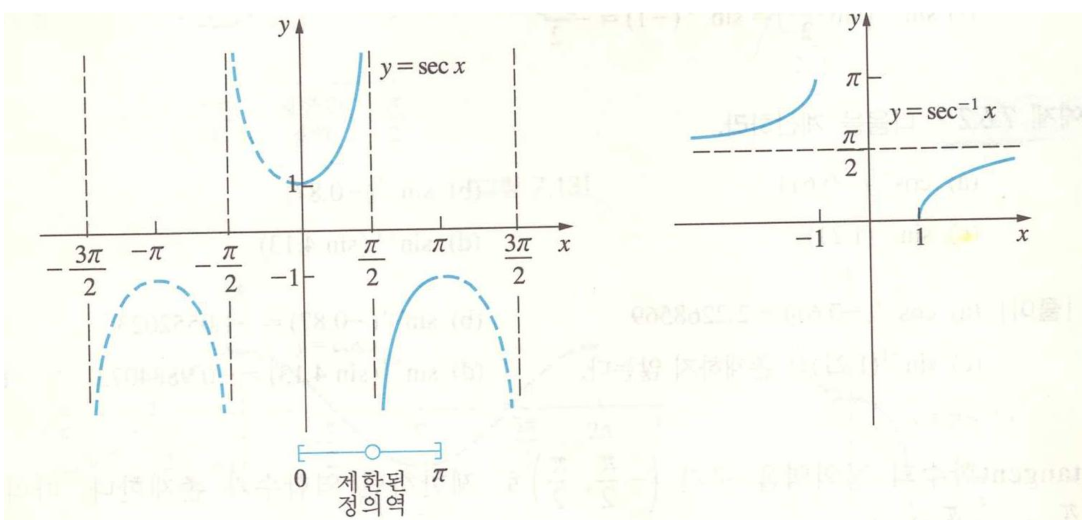
역시컨트함수(Arcsecant)

$f(x) = \sec x$

(1) $D_f = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
(2) $R_f = \{y \mid |y| \geq 1\}$
(3) 연속
(4) 증가

$f^{-1}(x) = \sec^{-1} x$

(1) $D_{f^{-1}} = \{x \mid |x| \geq 1\}$
(2) $R_{f^{-1}} = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
(3) 연속
(4) 증가



3. 역삼각함수의 도함수 (8)

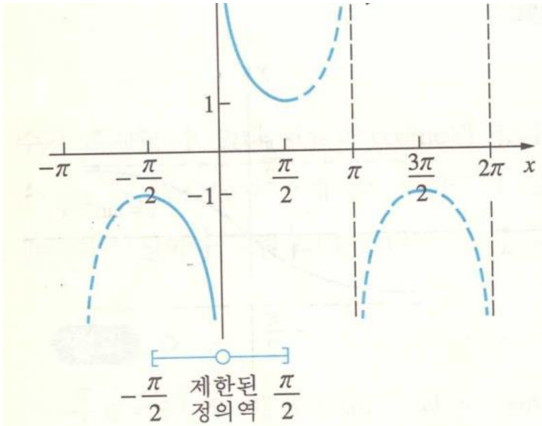
역코시컨트함수(Arccosecant)

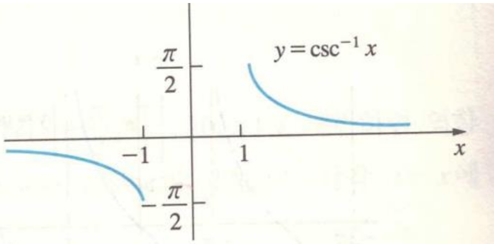
$f(x) = \csc x$

(1) $D_f = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$
(2) $R_f = \{y \mid |y| \geq 1\}$
(3) 연속
(4) 감소

$f^{-1}(x) = \csc^{-1} x$

(1) $D_{f^{-1}} = \{x \mid |x| \geq 1\}$
(2) $R_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$
(3) 연속
(4) 감소





3. 역삼각함수의 도함수 (9)

역삼각함수의 도함수

(1) $f(x) = \sin^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

(2) $f(x) = \cos^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

(3) $f(x) = \tan^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$

중요

(4) $f(x) = \cot^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$

(5) $f(x) = \sec^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1$

(6) $f(x) = \csc^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1$

6.6 예제 및 연습문제

《예제 1》 (a) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$, (b) $\tan(\arcsin\frac{1}{3})$을 계산하라.

《예제 2》 $f(x) = \sin^{-1}(x^2 - 1)$일 때 (a) f의 정의역, (b) $f'(x)$, (c) f'의 정의역을 구하라.

《예제 3》 $\cos(\tan^{-1}x)$를 간단히 표현하라.

《예제 4》 $\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$을 계산하라.

《예제 5》 (a) $y = \dfrac{1}{\sin^{-1}x}$, (b) $f(x) = x\arctan\sqrt{x}$ 를 미분하라.

《예제 6》 항등식 $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$를 증명하라.

《예제 7》 $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$를 구하라.

《예제 8》 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$를 구하라.

《예제 9》 $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+9}\,dx$를 구하라.

6.6 예제 및 연습문제

4. $\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

6. $\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2}$임을 증명하라.

7. $\sin(\tan^{-1}x)$를 다음을 간단히 하라.

12-19 다음 함수의 도함수를 구하라. 가능한 간단히 하라.

15. $y = \arctan(\cos\theta)$

16. $f(z) = e^{\arcsin(z^2)}$

17. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

19. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + \ln\sqrt{\dfrac{x - a}{x + a}}$

21. $g(x) = x\sin^{-1}(x/4) + \sqrt{16 - x^2}$일 때, $g'(2)$를 구하라.

30. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 + 1}$의 가장 일반적인 역도함수를 구하라.

31. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1 + x^2}\,dx$ **33.** $\displaystyle\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$

4. 쌍곡선 함수와 미분법 (1)

쌍곡선함수의 정의(1)

1) $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

(1) $D = (-\infty, \infty)$

(2) $R = (-\infty, \infty)$

(3) 함수의 그래프

2) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

(1) $D = (-\infty, \infty)$

(2) $R = [1, \infty)$

(3) 함수의 그래프

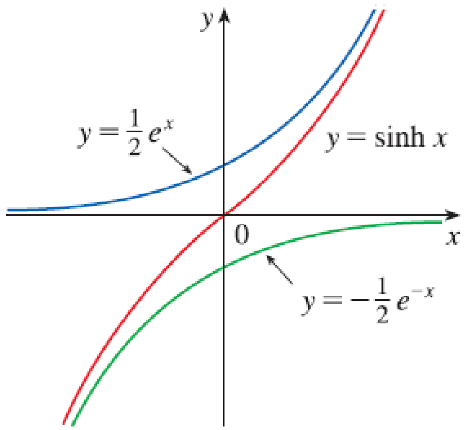
3) $f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

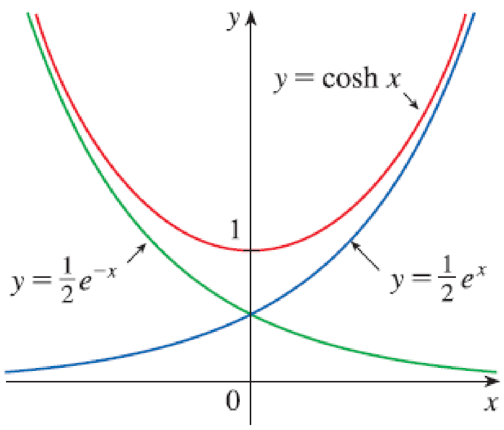
(1) $D = (-\infty, \infty)$

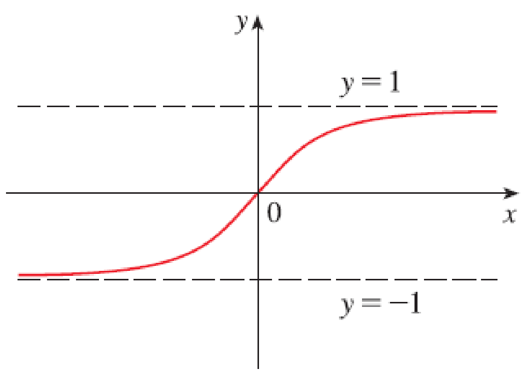
(2) $R = (-1, 1)$

(3) 점근선 $y = \pm 1$(수평점근선)

(4) 함수의 그래프







4. 쌍곡선 함수와 미분법 (1)

쌍곡선함수의 정의(2)

$\mathrm{csch}x = \dfrac{1}{\sinh x}$

(1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(2) $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(3) 점근선 : $x = 0,\ y = 0$

$\mathrm{sech}x = \dfrac{1}{\cosh x}$

(1) $D = (-\infty, \infty)$

(2) $R = (0, 1]$

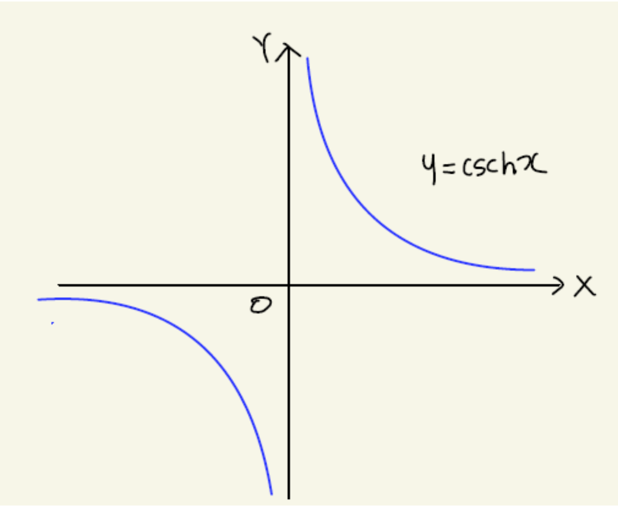
(3) 점근선 : $y = 0$

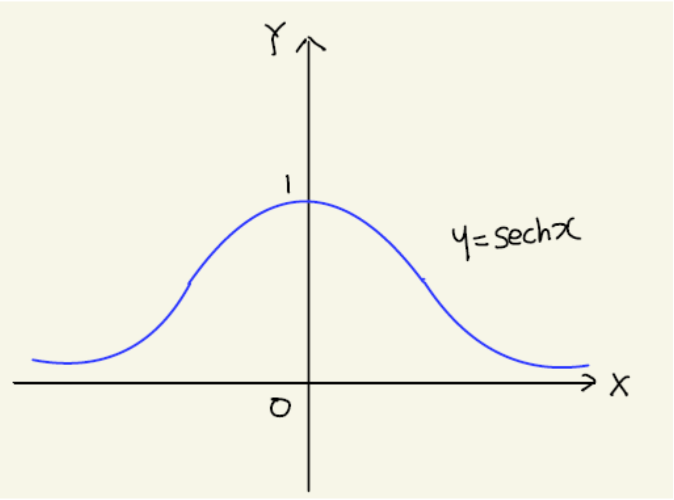
$\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$

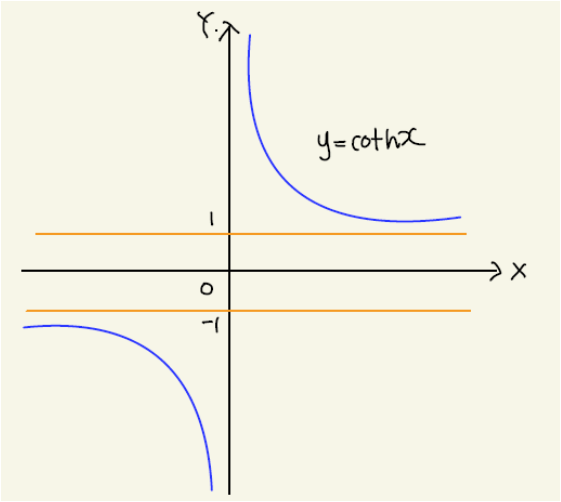
(1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(2) $R = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(3) 점근선 : $y = \pm 1$, $x=0$







4. 쌍곡선 함수와 미분법 (2)

쌍곡선 함수의 성질

(1) $\sinh(-x) = -\sinh x$

(2) $\cosh(-x) = \cosh x$

(3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(4) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(5) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

4. 쌍곡선 함수와 미분법 (3)

쌍곡선함수의 도함수

$$(1)\ f(x)=\sinh x \Rightarrow f'(x)=\cosh x$$

$$(2)\ f(x)=\cosh x \Rightarrow f'(x)=\sinh x$$

$$(3)\ f(x)=\tanh x \Rightarrow f'(x)=\operatorname{sech}^2 x$$

$$(4)\ f(x)=\coth x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{csch}^2 x$$

$$(5)\ f(x)=\operatorname{sech} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$(6)\ f(x)=\operatorname{csch} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{csch} x \coth x$$

5. 역쌍곡선 함수와 미분법 (1)

$f(x) = sinh^{-1}x$

$$y = \sinh^{-1}x \;\Rightarrow\; x = \sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^{y} - e^{-y}$$

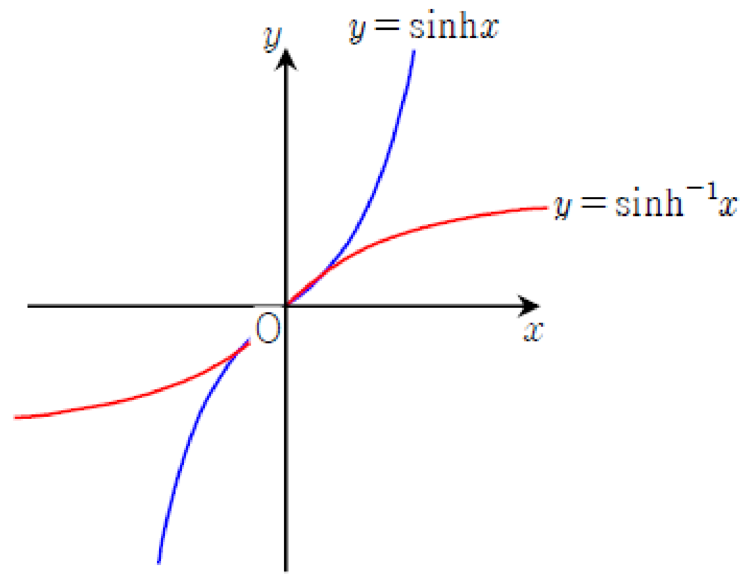
$$e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

$$e^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1} \;\; (\because\; e^{y} > 0)$$

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)$$

$$\therefore\;\; \sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$



출처 : 일등급 큐스터디/www.qstudy. kr

5. 역쌍곡선 함수와 미분법 (1)

$f(x) = cosh^{-1}x$

$$y = \cosh^{-1}x \;\Rightarrow\; x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y + e^{-y}$$

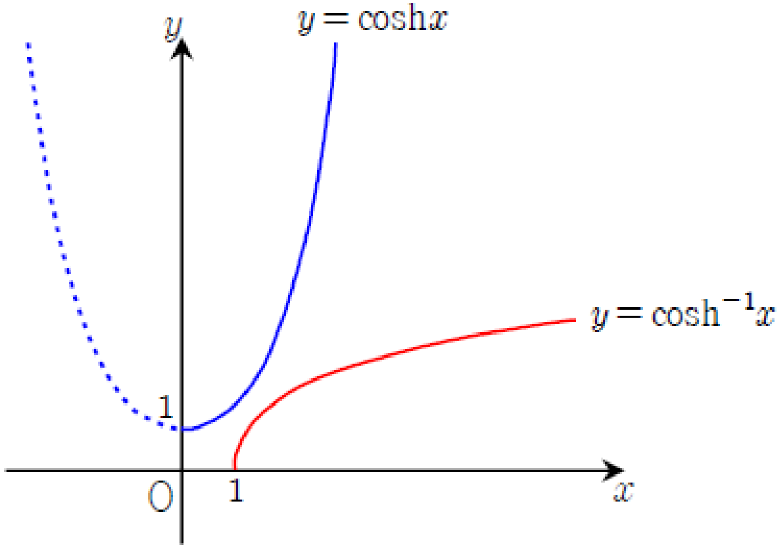
$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\therefore\; \cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

(단, $x \geq 1$)



5. 역쌍곡선 함수와 미분법 (1)

$f(x) = tanh^{-1}x$

$$y = \tanh^{-1}x \;\Rightarrow\; x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

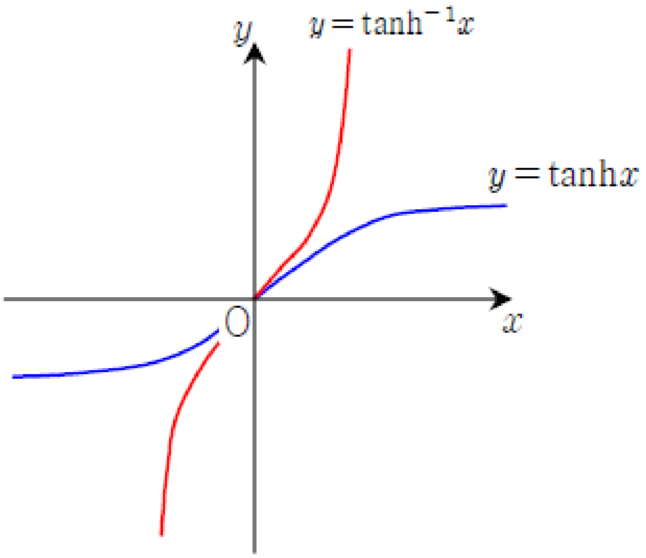
$$x \cdot e^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$(x-1)e^{2y} = -x - 1$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

$$\therefore\; \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

(단, $-1 < x < 1$)



5. 역쌍곡선 함수와 미분법 (1)

$f(x) = coth^{-1}x$

$$y = \coth^{-1}x \ \Rightarrow\ x = \coth y = \frac{e^{y}+e^{-y}}{e^{y}-e^{-y}} = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$$

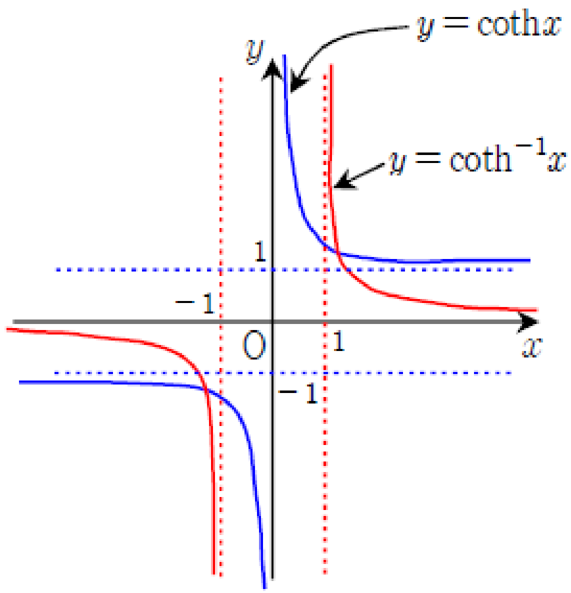
$$x \cdot e^{2y} - x = e^{2y}+1$$

$$(x-1)e^{2y} = x+1$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\therefore\ \coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

(단, $x > 1,\ x < -1$)



5. 역쌍곡선 함수와 미분법 (1)

$f(x) = sech^{-1}x$

$$y = \mathrm{sech}^{-1}x \;\Rightarrow\; x = \mathrm{sech}\,y = \frac{2}{e^y + e^{-y}} = \frac{2e^y}{e^{2y}+1}$$

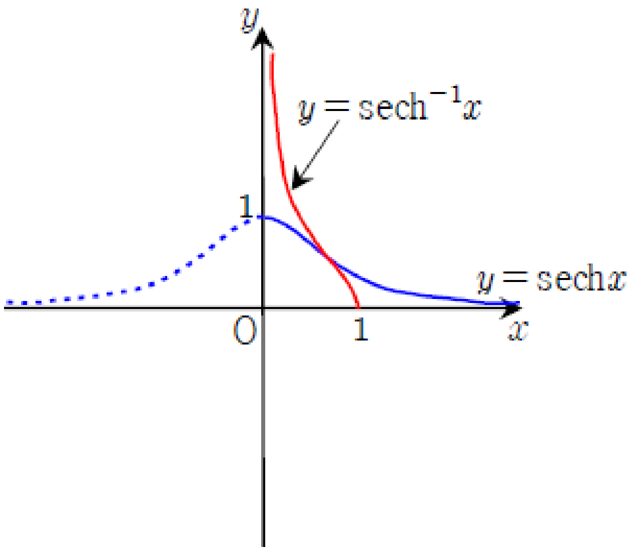
$$e^{2y} - \frac{2}{x}e^y + 1 = 0$$

$$e^y = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$$

$$\therefore\; \mathrm{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$$

(단, $0 < x \le 1$)



5. 역쌍곡선 함수와 미분법 (1)

$f(x) = csch^{-1}x$

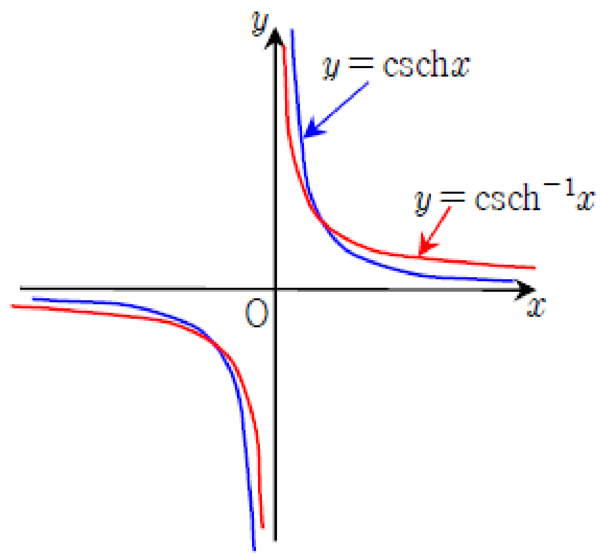
$$y = \mathrm{csch}^{-1}x \;\Rightarrow\; x = \mathrm{csch}\,y = \frac{2}{e^y - e^{-y}} = \frac{2e^y}{e^{2y}-1}$$

$$e^{2y} - \frac{2}{x}e^y - 1 = 0$$

$$e^y = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$$

$$\therefore\; \mathrm{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \quad (\text{단, } x \neq 0)$$



5. 역쌍곡선 함수와 미분법 (2)

6 역쌍곡선함수의 도함수

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$

6.7 예제와 연습문제 풀이

예제 2 $y = \cosh\sqrt{x}$ 일 때 dy/dx를 구하라.

예제 5 $\dfrac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\sin x)]$를 구하라.

예제 6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$를 구하라.

4. $8\sinh x + 5\cosh x$를 e^x, e^{-x}에 관해 표현하라.

5. $\sinh(\ln x)$를 x의 유리함수로 표현하라.

18-27 다음 함수의 도함수를 구하라. 가능한 한 간단히 하라.

20. $G(t) = \sinh(\ln t)$ **22.** $y = \operatorname{sech} x \tanh x$

24. $f(x) = \sinh^{-1}(-2x)$ **25.** $y = \cosh^{-1}(\sec\theta),\ 0 \le \theta < \pi/2$

28. $\dfrac{d}{dx}\arctan(\tanh x) = \operatorname{sech} 2x$임을 보여라.

33-37 다음 적분을 구하라.

35. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x - 1}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{t^2-9}}\,dt$ **37.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx$

6. 로피탈 법칙 (1)

Cauchy의 평균값 정리(base)

(1) $f(x)$, $g(x)$: 연속 on $[a,b]$

(2) $f(x)$, $g(x)$: 미분가능 on (a,b)

(3) $g(x) \neq 0$ on $\exists\, x \in (a,b)$

$$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b),\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$g(x) = x$ 인 경우, 평균값 정리

6. 로피탈 법칙 (2)

로피탈 법칙

(1) $f(x), g(x)$: 미분가능 on $x=a$의 근방 (즉, $(a-\delta, a+\delta)$)

(2) $g'(x) \neq 0$ on $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$

(4) $\exists \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(1) $f(x), g(x)$: n회 미분가능 on $x=a$의 근방 (즉, $(a-\delta, a+\delta)$)

(2) $g^{(n)}(x) \neq 0$ on $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$

(3) $f(a) = g(a) = 0, f'(a) = g'(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0$

(4) $\exists \lim_{x \to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

6. 로피탈 법칙 (3)

※ 부정형의 극한

부정형 형태 : $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\times\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}

☞ 로피탈 정리가 $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$이 형태인 경우 적용되므로, 다른 형태의 부정형들은 이 형태로 전환하여 극한을 구한다.

(1) $0\times\infty$인 경우

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

(2) $\infty-\infty$ 인 경우

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$$

(3) 0^{0}, 1^{∞}, ∞^{0} 인 경우

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}\ \ (y=f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y=g(x)\ln f(x) \Rightarrow y=e^{g(x)\ln f(x)})$$

6.8 예제 및 연습문제 풀이

예제 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$를 구하라.

예제 2 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$을 구하라.

예제 3 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$를 계산하라.

예제 4 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$를 구하라.

예제 5 $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x}$를 구하라.

예제 6 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x$를 구하라.

예제 8 $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \tan x)$를 구하라.

예제 10 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x}$를 구하라.

예제 11 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$을 구하라.

6.8 예제 및 연습문제 풀이

8. $\lim_{t \to 0} \frac{e^{2t} - 1}{\sin t}$

12. $\lim_{x \to 3} \frac{\ln(x/3)}{3 - x}$

16. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$

17. $\lim_{x \to 0} \frac{x 3^x}{3^x - 1}$

27. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

29. $\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

30. $\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

34. $\lim_{x \to 0^+} (1 + \sin 3x)^{1/x}$

35. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x + x - 1}$