$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta}}{\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \blacksquare$$

2.4 | 연습문제

1-11 다음 식을 미분하라.

1. $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$ **2.** $y = x^2 + \cot x$

3. $h(\theta) = \theta^2 \sin\theta$ **4.** $y = \sec\theta \tan\theta$

5. $f(\theta) = (\theta - \cos\theta)\sin\theta$ **6.** $H(t) = \cos^2 t$

7. $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$ **8.** $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

9. $f(w) = \dfrac{1 + \sec w}{1 - \sec w}$ **10.** $y = \dfrac{t\sin t}{1 + t}$

11. $f(\theta) = \theta\cos\theta\sin\theta$

---

12. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$임을 증명하라.

13. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$임을 증명하라.

14-15 주어진 점에서 곡선에 대한 접선의 방정식을 구하라.

14. $y = \sin x + \cos x, \quad (0, 1)$

15. $y = x + \tan x, \quad (\pi, \pi)$

---

16. (a) 점 $(\pi/2, \pi)$에서 곡선 $y = 2x\sin x$에 대한 접선의 방정식을 구하라.

(b) 곡선과 그것의 접선을 동일한 보기화면에 그려서 (a)를 설명하라.

17. (a) $f(x) = \sec x - x$일 때 $f'(x)$를 구하라.

(b) $|x| < \pi/2$인 구간에서 f와 f'의 그래프를 그려서 (a)에서 구한 답이 타당하다는 것을 확인하라.

18. $g(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$일 때, $g'(\theta)$와 $g''(\theta)$를 구하라.

19. (a) 몫의 공식을 이용해서 다음 함수를 미분하라.

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) $f(x)$를 $\sin x$와 $\cos x$로 나타내고 $f'(x)$를 구하라.

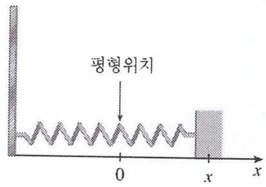
(c) (a)와 (b)가 같음을 보여라.

20. $f(x) = x + 2\sin x$의 그래프에서 수평접선을 갖는 x의 값을 구하라.

21. 용수철에 매달린 물체가 매끄러운 수평면(그림 참조)에서 수평으로 진동한다. 이 운동방정식은 $x(t) = 8\sin t$이다. 이때 t의 단위는 초이고 x의 단위는 cm이다.

(a) 시각 t에서 속도와 가속도를 구하라.

(b) 시각 $t = 2\pi/3$에서 물체의 위치와 속도, 가속도를 구하라. 그 시각에 물체는 어느 방향으로 움직이는가?



22. 길이가 6 m인 사다리가 수직벽에 기대어 있다. θ를 사다리의 꼭대기와 벽이 이루는 각이라고 하고, x를 사다리의 아래 끝에서 벽까지의 거리라 하자. 사다리의 아래 끝이 벽으로부터 미끄러질 경우 $\theta = \pi/3$일 때 h에 대한 x의 순간변화율을 구하라.

23-30 다음 극한을 구하라.

23. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$ **24.** $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t}{\sin t}$

25. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^2}$ **26.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{5x^3-4x}$

28. $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta+\tan\theta}$

29. $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\cos\theta-1}{2\theta^2}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

31. 처음 몇 개의 도함수로부터 일정한 패턴을 찾아 다음 도함수를 구하라.

$$\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\sin x)$$

32. 함수 $y=A\sin x+B\cos x$가 미분방정식 $y''+y'-2y=\sin x$를 만족하도록 상수 A, B를 구하라.

33. 다음 삼각 등식을 미분해서 새로운(또는 이미 알고 있는) 등식을 찾으라.

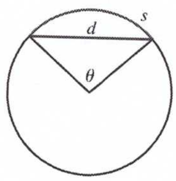
(a) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ (b) $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\sin x+\cos x=\dfrac{1+\cot x}{\csc x}$

34. 아래 그림은 중심각 θ에 대응하는 길이 s인 원호와 길이 d인 현을 나타낸다.

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{s}{d}$$

를 구하라.



2.5 | 연쇄법칙

다음 함수를 미분하려 한다고 가정하자.

$$F(x)=\sqrt{x^2+1}$$

이 경우에 앞에서 배운 미분 공식으로는 $F'(x)$를 구할 수 없다.

합성함수는 1.3절을 참고한다.

먼저 F는 합성함수임을 알아야 한다. 실제로 $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=x^2+1$로 놓으면, $y=F(x)=f(g(x))$, 즉 $F=f\circ g$로 쓸 수 있다. f와 g를 미분하는 방법을 알고 있으므로, f와 g의 도함수를 이용해서 $F=f\circ g$를 미분하는 방법을 알려주는 법칙이 유용할 것이다.

■ 연쇄법칙

합성함수 $f\circ g$의 도함수는 f와 g의 도함수들의 곱과 같다는 사실이 증명된다. 이 사실은 미분 공식에서 가장 중요한 것 중의 하나로, 이것을 **연쇄법칙**(chain rule)이라고 한다. 연쇄법칙은 도함수를 변화율로 해석하는 경우에 더 잘 이해되는 것 같다. du/dx를 x에 대한 u의 변화율, dy/du는 u에 대한 y의 변화율, dy/dx는 x에 대한 y의 변화율로 생각하자. u는 x보다 2배 빠르게 변하고, y는 u보다 3배 빠르게 변한다면, y는 x보다 6배 빠르게 변하는 것이 타당할 것이다. 따라서 다음과 같이 예상할 수 있다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$\boxed{5} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \quad (\Delta x \to 0\text{일 때 } \varepsilon \to 0)$$

ε은 Δx의 연속함수이다. 미분가능한 함수의 이 성질을 이용해서 연쇄법칙을 증명할 수 있다.

연쇄법칙의 증명 $u = g(x)$가 a에서 미분가능하고 $y = f(u)$가 $b = g(a)$에서 미분가능하다고 하자. Δx가 x의 증분이고 Δu와 Δy가 이에 대응하는 u와 y의 증분이라 하면, 식 $\boxed{5}$를 이용해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\boxed{6} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

여기서 $\Delta x \to 0$일 때 $\varepsilon_1 \to 0$이다. 같은 방법으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

여기서 $\Delta u \to 0$일 때 $\varepsilon_2 \to 0$이다. 식 $\boxed{6}$의 Δu를 식 $\boxed{7}$에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

따라서

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

$\Delta x \to 0$이면 식 $\boxed{6}$에 의해 $\Delta u \to 0$이 된다. 그러므로 $\Delta x \to 0$이면 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

이것으로 연쇄법칙이 증명됐다. ■

2.5 | 연습문제

1-3 합성함수를 $f(g(x))$의 형태로 쓰라. [내부함수는 $u = g(x)$, 외부함수는 $y = f(u)$라 한다.] 그리고 도함수 dy/dx를 구하라.

1. $y = (5 - x^4)^3$

2. $y = \sin(\cos x)$

3. $y = \sqrt{\sin x}$

4-24 다음 함수의 도함수를 구하라.

4. $f(x) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^5$

5. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$

6. $g(t) = \dfrac{1}{(2t + 1)^2}$

7. $A(t) = \dfrac{1}{(\cos t + \tan t)^2}$

8. $f(\theta) = \cos(\theta^2)$

9. $h(v) = v\sqrt[3]{1 + v^2}$

10. $F(x) = (4x + 5)^3(x^2 - 2x + 5)^4$

11. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

12. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x + 1}}$

13. $g(u) = \left(\dfrac{u^3 - 1}{u^3 + 1}\right)^8$

14. $H(r) = \dfrac{(r^2 - 1)^3}{(2r + 1)^5}$

15. $y = \cos(\sec 4x)$

16. $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$

17. $y = \left(\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\right)^4$

18. $f(x) = \sin x \cos(1 - x^2)$

19. $F(t) = \tan\sqrt{1 + t^2}$

20. $y = \sin^2(x^2 + 1)$ **21.** $y = \cos^4(\sin^3 x)$

22. $f(t) = \tan(\sec(\cos t))$

23. $g(x) = (2r \sin rx + n)^p$

24. $y = \cos\sqrt{\sin(\tan \pi x)}$

25-26 1계 도함수, 2계 도함수를 구하라.

25. $y = \cos(\sin 3\theta)$

26. $y = \sqrt{\cos x}$

27-28 주어진 점에서 곡선에 대한 접선의 방정식을 구하라.

27. $y = (3x - 1)^{-6}$, $(0, 1)$

28. $y = \sin(\sin x)$, $(\pi, 0)$

---

29. (a) 점 (1, 1)에서 곡선 $y = \tan(\pi x^2/4)$에 대한 접선의 방정식을 구하라.

(b) 곡선과 접선을 동일한 보기화면에 그려서 (a)를 설명하라.

30. (a) $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$일 때 $f'(x)$를 구하라.

(b) f와 f'의 그래프를 비교해서 (a)에 대한 답이 타당한지 확인하라.

31. 함수 $f(x) = 2 \sin x + \sin^2 x$에 대해 수평접선을 갖는 점을 모두 구하라.

32. $F(x) = f(g(x))$이고 $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, $g'(5) = 6$이라고 할 때 $F'(5)$를 구하라.

33. f, g, f', g'의 값이 다음 표와 같다.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

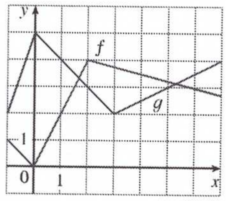
(a) $h(x) = f(g(x))$일 때 $h'(1)$을 구하라.

(b) $H(x) = g(f(x))$일 때 $H'(1)$을 구하라.

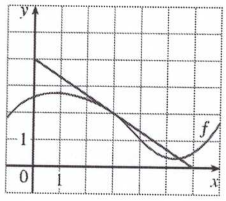
34. 함수 f와 g의 그래프가 아래와 같다.

$u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, $w(x) = g(g(x))$라 하자. 각각의 미분계수가 존재하면 구하라. 존재하지 않으면 그 이유를 설명하라.

(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



35. f의 그래프가 다음과 같고, $g(x) = \sqrt{f(x)}$일 때 $g'(3)$을 구하라.



36. $r(x) = f(g(h(x)))$이고, $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$, $f'(3) = 6$일 때 $r'(1)$을 구하라.

37. $F(x) = f(3f(4f(x)))$이고, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$일 때 $F'(0)$을 구하라.

38. 처음 몇 개의 도함수를 구하고, 일정한 패턴을 발견해서 다음 도함수를 구하라.

$$D^{103} \cos 2x$$

39. 진동하는 현 위의 물체의 변위가 다음과 같다.

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\sin(10\pi t)$$

여기서 s와 t의 단위는 각각 cm와 초이다. t초 후의 물체의 속도를 구하라.

40. 케페우스형 변광성은 별의 밝기가 교대로 증감하는 별이다. 이러한 별 중 가장 쉽게 볼 수 있는 별은 델타 케페우스로, 최대 밝기 사이의 시구간은 5.4일이다. 이 별의 평균 밝기는 4.0이고, 이것의 밝기에 대한 변화량은 ± 0.35이다. 이런 자료에 근거해서 델타 케페우스의 밝기는 시각 t(일)에서 다음과 같은 함수로 모형화되어 왔다.

$$B(t) = 4.0 + 0.35 \sin\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) t일 후 밝기의 변화율을 구하라.

(b) 1일 후 증가율을 소수점 아래 둘째 자리까지 정확하게 구하라.

41. 직선을 따라 움직이는 입자의 위치함수는 $s(t)$, $v(t)$는 속도,

$a(t)$는 가속도일 때 다음을 보여라.

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

도함수 dv/dt와 dv/ds의 의미의 차이를 설명하라.

42. 연쇄법칙을 이용해서 다음을 증명하라.
(a) 우함수의 도함수는 기함수이다.
(b) 기함수의 도함수는 우함수이다.

43. 연쇄법칙을 이용해서 θ가 도(°)로 측정되면 다음이 성립함을 보여라.

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(이것은 미적분학에서 삼각함수를 다룰 때 항상 라디안을 다루는 것이 편리함을 보이는 것 중의 하나이다. 라디안 대신 도를 사용한다면 미분 공식이 간단치 않다.)

44. $F = f \circ g \circ h$, 단 f, g, h는 미분 가능한 함수일 때, 연쇄법칙을 사용하여 다음을 증명하라.

$$F'(x) = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

2.6 | 음함수의 미분법

■ 음적으로 정의된 함수

지금까지 다룬 다음과 같은 함수들은 일반적으로 $y = f(x)$ 등과 같이 한 변수를 다른 변수로 명료하게 나타낼 수 있었다.

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{또는} \qquad y = x\sin x$$

그러나 다음과 같은 함수들은 x와 y 사이의 관계로 앞에서와는 달리 음함수꼴로 정의된다.

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

어떤 경우에는 y에 대한 방정식을 x에 대해 명백한 한 함수(또는 여러 개의 함수)로 풀 수도 있다. 예를 들어 방정식 $\boxed{1}$을 y에 관해 풀면 $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$이고, 방정식 $\boxed{1}$에 의해 결정되는 두 함수는 $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$이다. f와 g의 그래프는 원 $x^2 + y^2 = 25$의 상반원과 하반원이다(그림 1 참조).

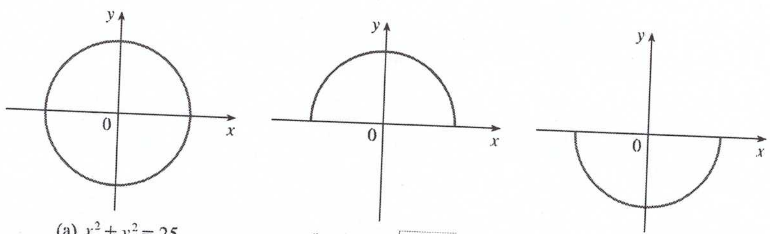


그림 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

이것을 y'에 대해 풀면 다음과 같다.

$$\boxed{3} \qquad y' = \frac{x^3}{y^3}$$

y''을 구하기 위해 y'에 몫의 공식을 이용하자. 이때 y는 x의 함수이다.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$
$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

여기에 식 $\boxed{3}$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$
$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

이때 x와 y는 $x^4 + y^4 = 16$을 만족해야 한다. 따라서 간단히 하면 다음과 같다.

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

■

그림 10은 예제 4의 곡선 $x^4 + y^4 = 16$의 그래프이다. 이것은 원 $x^2 + y^2 = 4$를 잡아 당겨 평평하게 해서 얻는다. 이런 이유로 비대한 원이라 불린다. 왼쪽에서는 매우 가파르게 시작해서 곧 평평해진다. 이것은 다음 표현으로 알 수 있다.

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

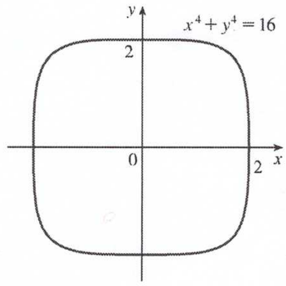


그림 10

2.6 | 연습문제

1-2

(a) 음함수의 미분법으로 y'을 구하라.

(b) 주어진 방정식을 y에 대해 풀고, 미분해서 x에 대한 y'을 구하라.

(c) (a)에서 구한 해를 y의 표현식에 대입해서 (a)와 (b)에서 얻은 해가 일치함을 확인하라.

1. $5x^2 - y^3 = 7$ **2.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

3-10 음함수의 미분법을 이용해서 dy/dx를 구하라.

3. $x^2 - 4xy + y^2 = 4$ **4.** $x^4 + x^2y^2 + y^3 = 5$

5. $\dfrac{x^2}{x+y} = y^2 + 1$ **6.** $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

7. $\sin(x+y) = \cos x + \cos y$ **8.** $\tan(x/y) = x + y$

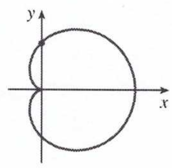
9. $\sqrt{x+y} = x^4 + y^4$ **10.** $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

11. $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$이고 $f(1) = 2$일 때 $f'(1)$을 구하라.

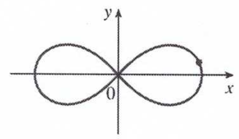
12. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$에서 y를 독립변수, x를 종속변수로 생각하고 음함수의 미분법을 이용해서 dx/dy를 구하라.

13-17 음함수의 미분법을 이용해서 주어진 점에서 곡선에 대한 접선의 방정식을 구하라.

13. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (심장형)



14. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $(3, 1)$ (연주형)



15. $y \sin 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $(-3\sqrt{3}, 1)$ (성망형)

17. $x^2 - xy - y^2 = 1$, $(2, 1)$ (쌍곡선)

---

18. (a) 방정식이 $y^2 = 5x^4 - x^2$으로 주어진 곡선을 **에우독소스의 곡선**이라 부른다. 점 $(1, 2)$에서 이 곡선에 대한 접선의 방정식을 구하라.

(b) (a)의 곡선과 접선을 동일한 보기화면에 그려라. (음함수로 정의된 곡선을 그릴 수 있으면 그래프를 그려라. 그렇지 않더라도 위 반쪽과 아래 반쪽을 따로 따로 그려 이 곡선의 그래프를 그릴 수 있다.)

19-20 음함수의 미분법을 이용해서 y''을 구하라.

19. $x^2 + 4y^2 = 4$ **20.** $\sin y + \cos x = 1$

---

21. $xy + y^3 = 1$일 때, $x = 0$에서 y''의 값을 구하라.

22. 음함수로 정의된 곡선의 그래프를 그릴 수 있는 소프트웨어를 사용해서 기발한 모양을 만들 수 있다.

(a) 방정식이 $y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$인 곡선의 그래프를 그려라. 얼마나 많은 점에서 이 곡선은 수평접선을 갖는가? 이 점들의 x좌표를 추정하라.

(b) 점 $(0, 1)$과 $(0, 2)$에서 접선의 방정식을 구하라.

(c) (a)에서 추정한 점들의 x좌표를 정확하게 구하라.

(d) (a)의 방정식을 수정해서 훨씬 기발한 곡선들을 그려라.

23. 연습문제 14의 연주형에서 접선이 수평인 점들을 찾으라.

24. 다음 쌍곡선에 있는 점 (x_0, y_0)에서 접선의 방정식을 구하라.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

25. 음함수 미분법을 이용해서, 원점 O을 중심으로 갖는 원 위의 점 P에서의 접선이 반지름 OP와 수직임을 보여라.

26-27 직교 절선 접선이 교점에서 서로 수직이면 두 곡선은 **직교한다**고 한다. 주어진 곡선족은 서로 **직교절선**이 됨을 보여라. 다시 말해서 한 곡선족에 있는 모든 곡선이 다른 곡선족에 있는 모든 곡선과 직교함을 보여라. 그리고 동일한 좌표축에 두 곡선족을 그려라.

26. $x^2 + y^2 = r^2$, $ax + by = 0$

27. $y = cx^2$, $x^2 + 2y^2 = k$

28. 타원 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$과 쌍곡선 $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$이 $A^2 < a^2$이고 $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$일 때 직교절선임을 보여라. (이때 타원과 쌍곡선의 초점은 같다.)

29. 기체 n(mol)에 대한 **반데르 발스 방정식**이 다음과 같다.

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

여기서 P는 압력이고 V는 부피이고 T는 기체의 온도이다. 상수 R는 보편기체상수이고 a, b는 특정 기체의 성질을 나타내는 양의 상수이다.

(a) T가 상수라면 음함수 미분법을 이용해서 dV/dP를 구하라.

(b) $V = 10$ L, $P = 2.5$ atm일 때 이산화탄소 1 mol의 압력에 대한 부피 변화율을 구하라.

이때 $a = 3.592\ \mathrm{L^2\text{-}atm/mol^2}$, $b = 0.04267$ L/mol이다.

30. 방정식 $x^2 - xy + y^2 = 3$은 '회전한 타원', 즉 타원의 축들이 좌표축과 평행하지 않은 타원을 나타낸다. 이 타원이 x축과 만나는 점들을 구하고, 이 점에서의 접선이 평행함을 보여라.

31. 접선의 기울기가 -1인 곡선 $x^2y^2 + xy = 2$ 위의 점을 구하라.

32. 음함수 미분법을 사용하여 다음 방정식의 dy/dx를 구하라.

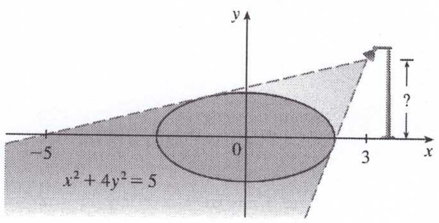
$$\frac{x}{y} = y^2 + 1 \qquad y \neq 0$$

그리고 이와 동치인 다음 방정식의 dy/dx를 구하라.

$$x = y^3 + y \qquad y \neq 0$$

dy/dx가 다르게 표현되어도 주어진 방정식을 만족하는 모든 점에서 일치함을 보여라.

33. 그림은 y축의 오른쪽으로 3 단위에 위치한 램프와 타원 영역에 의해 만들어진 그림자 $x^2 + 4y^2 \leq 5$를 보여준다. 점 $(-5, 0)$이 그림자의 가장자리에 있으면 램프가 x축보다 얼마나 위에 있는가?



마지막 예제로 근사 측정으로 인해 일어나는 오차를 추정하는 데 있어서 미분을 어떻게 이용하는지를 보이겠다.

예제 4 구의 반지름을 측정한 결과 측정 오차 범위 0.05 cm 이내에서 21 cm였다. 반지름의 값으로 이것을 사용한다면 구의 부피를 계산할 때 최대 오차는 얼마인가?

풀이 구의 반지름을 r라 하면 부피는 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$이다. r의 측정값에서 오차가 $dr = \Delta r$이면 V를 계산할 때 오차는 ΔV이고, 이제 미분을 이용해서 근삿값을 구하면 다음과 같다.

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

여기서 $r = 21$, $dr = 0.05$이므로 다음을 얻는다.

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 \approx 277$$

따라서 부피의 계산에서 최대오차는 약 277 cm³이다. ■

NOTE 예제 4에서 허용오차가 상당히 커 보인다. 오차에 대해 보다 나은 설명은 **상대오차**(relative error)로 할 수 있는데 다음과 같이 오차를 전체 부피로 나누어 계산한다.

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

따라서 부피의 상대오차는 반지름의 상대오차의 약 3배이다. 그러므로 예제 4에서 반지름의 상대오차는 약 $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$이고, 이에 따라 부피의 상대오차는 약 0.007이다. 이 오차는 반지름에 대하여 0.24%, 부피에 대해서는 0.7%인 백분율오차로 나타낼 수 있다.

2.9 | 연습문제

1-2 a에서 함수의 선형화 $L(x)$를 구하라.

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 3, \quad a = -2$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8$

3. $a = 0$에서 함수 $f(x) = \sqrt{1-x}$의 선형근사를 구하고, 이것을 이용해서 $\sqrt{0.9}$, $\sqrt{0.99}$의 근삿값을 구하라. f와 접선을 그려서 설명하라.

4-5 $a = 0$일 때 주어진 선형근사를 증명하라. 그 다음 선형근사가 오차 범위 0.1 이내에서 정확한 x의 값을 구하라.

4. $\sqrt[4]{1+2x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ **5.** $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$

6-9 다음 각 함수의 미분을 구하라.

6. $y = (x^2 - 3)^{-2}$ **7.** $y = \dfrac{1+2u}{1+3u}$

8. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$ **9.** $y = \sqrt{t - \cos t}$

10-11 (a) 미분 dy를 구하고, (b) x와 dx의 주어진 값에 대해 dy를 계산하라.

10. $y = \tan x, \quad x = \pi/4, \quad dx = -0.1$

11. $y = \sqrt{3 + x^2}, \quad x = 1, \quad dx = -0.1$

12-13 주어진 x와 $dx = \Delta x$의 값에 대해 Δy와 dy를 구하라. 그

리고 그림 5에서와 같이 길이가 dx, dy, Δy인 선분을 그려라.

12. $y = x^2 - 4x$, $x = 3$, $\Delta x = 0.5$

13. $y = \sqrt{x-2}$, $x = 3$, $\Delta x = 0.8$

14-15 x가 1에서 1.05로 바뀔 때 Δy와 dy의 값을 비교하라. x가 1에서 1.01로 바뀌면 어떻게 되는가? Δx가 작아질수록 근사값 $\Delta y \approx dy$가 좋아지는가?

14. $f(x) = x^4 - x + 1$ **15.** $f(x) = \sqrt{5-x}$

16-18 선형근사(또는 미분)을 이용해서 주어진 수를 추정하라.

16. $(1.999)^4$ **17.** $\sqrt[3]{1001}$

18. $\tan 2°$

19. 선형근사 또는 미분을 이용하여 $\sec 0.08 \approx 1$이 성립하는 이유를 설명하라.

20. 정육면체의 각 변의 길이는 허용 측정 오차 범위 0.1 cm 이내에서 30 cm로 측정됐다. 미분을 이용해서 다음을 계산할 때 최대 허용오차, 상대오차, 백분율오차를 추정하라.
(a) 정육면체의 부피 (b) 정육면체의 겉넓이

21. 구의 둘레가 허용오차 범위 0.5 cm 이내에서 84 cm이다.
(a) 미분을 이용해서 겉넓이를 계산할 때, 최대 오차를 추정하라. 상대오차는 얼마인가?
(b) 미분을 이용해서 부피를 계산할 때, 최대 오차를 추정하라. 상대오차는 얼마인가?

22. (a) 미분을 이용해서 높이 h, 내부 반지름 r, 두께 Δr인 얇은 원통껍질에 대한 근사 부피를 구하는 공식을 구하라.
(b) (a)의 공식에 수반되는 오차는 얼마인가?

23. 전류 I가 저항 R인 저항기를 지날 때 옴의 법칙은 전압강하가 $V = RI$임을 말한다. V가 일정하고 R이 어떤 오차 이내에서 측정된다면, 미분을 이용해서 I를 계산할 때 생기는 상대오차가 R의 상대오차와 거의 같음을 보여라.

24. 미분을 이용해서 다음 공식을 증명하라. 여기서 c는 상수이고 u와 v는 x의 함수이다.
(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$
(c) $d(u + v) = du + dv$ (d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$
(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
(f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

25. 함수 f에 대해 알고 있는 유일한 정보는 $f(1) = 5$이고, 그것의 **도함수**의 그래프는 아래와 같다.
(a) 선형근사를 이용해서 $f(0.9)$와 $f(1.1)$을 추정하라.
(b) (a)에서 구한 추정값이 너무 크거나 너무 작지는 않는가? 설명하라.