<정리 4.1.2>

행렬 A가 0으로 구성된 행 또는 열을 갖고 있는 정방행렬이면 $\det(A)=0$

<정리 4.1.3>

행렬 A가 삼각행렬이면 $\det(A)$는 주대각선 원소들의 곱과 같다.

<정의 4.1.4>

정방행렬 A에서 제 i행과 제 j열을 삭제해서 얻은 행렬의 행렬식을 성분 a_{ij}의 소행렬식이라 하고 이것을 M_{ij}로 나타낸다.
$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 를 a_{ij}의 여인수라고 한다.

<정리 4.1.5>

$n \times n$ 행렬의 행렬식은 어느 한 행 또는 열의 원소에 그에 대응하는 여인수들의 곱을 합하여 계산된다. 모든 $1 \le i \le n$ 과 $1 \le j \le n$ 에 대하여 $\det(A)$는

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(j번째 열에 관한 여인수 전개)

$$\det(A) = a_{i1}C_{1j} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(i번째 행에 관한 여인수 전개)

<정리 4.2.2> A를 $n \times n$ 행렬

(a) 행렬 A의 한 행(열)에 상수 k를 곱하여 얻은 행렬을
$B \Rightarrow \det(B) = k\det(A)$

(b) 행렬 A의 두 행(열)을 교환하여 얻은 행렬을
$B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

(c) 행렬 A의 한 행(열)에 다른 한 행(열)의 상수배를 더한 행렬을 $B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$

<정리 4.2.3> A를 $n \times n$ 행렬
(a) A의 두 행 또는 두 열이 같으면, $\det(A)=0$
(b) A의 두 행 또는 두 열이 비례이면, $\det(A)=0$
(c) $\det(kA) = k^n \det(A)$

<정리 4.2.4>
정방행렬 A가 가역행렬일 필요충분 조건은 $\det(A) \neq 0$

<정리 4.2.5> A와 B가 같은 크기의 정방행렬이라면,
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
- $A^n = AA \cdots A$ (n은 인수)
$$\det(A^n) = [\det(A)]^n$$
<정리 4.2.6> A가 가역행렬이면
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$
<정리 4.2.7> A가 $n \times n$ 행렬이면, 다음은 동치이다.
(a) A의 행사다리꼴은 I이다
(b) A는 기본행렬의 곱으로 표현할 수 있다.
(c) A는 가역행렬이다.
(d) $Ax=0$는 자명한 해만 가진다.
(e) $Ax=b$는 R^n의 모든 b에 대해 해가 존재한다.
(f) $Ax=b$는 R^n의 모든 b에 대해 유일한 해를 가진다.
(g) A의 열 벡터들은 일차 독립이다.
(h) A의 행 벡터들은 일차 독립이다.
(i) $\det(A) \neq 0$

<정리 4.3.1>

정방행렬의 어떠한 행(열)의 성분과 다른 행(열)의 성분의 여인수들을 곱하면 그 합은 0

<정리 4.3.2> A가 $n \times n$ 행렬이고 C_{ij}는 a_{ij}의 여인수이면 다음 행렬을 A의 여인수 행렬

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

이 행렬의 전치행렬을 A의 딸림행렬, $\mathrm{adj}(A)$로 표기

<정리 4.3.3> A가 가역행렬이면

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$$

<정리 4.3.4>

(Cramer 규칙) $Ax = b$가 n개의 미지수와 n개의 방정식으로 이루어진 선형계일 때, 선형계가 유일한 해를 가질 필요충분조건은 $\det(A) \neq 0$ 이며, 이 경우 해는

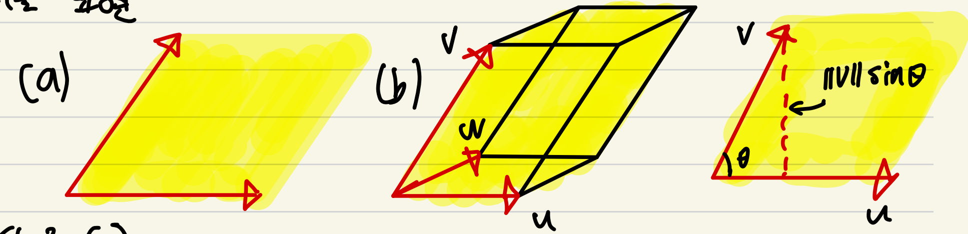
$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad \cdots \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

여기서 A_j는 A의 j번째 열이 b로 바뀐 행렬

<정리 4.3.5>

(a) A가 2×2 행렬이면, $|\det(A)|$는 A의 2개 열벡터가 시점이 같을 때 2개 열벡터로 이루어지는 평행사변형의 면적을 표현

(b) A가 3×3 행렬이면, $|\det(A)|$는 A의 3개 열벡터가 시점이 같을 때 3개 열벡터로 이루어지는 평행육면체의 부피를 표현



<정리 4.3.6>

xy 평면에서 꼭지점이 $P_1(x_1\ y_1)$, $P_2(x_2\ y_2)$, $P_3(x_3\ y_3)$로 주어진 삼각형, 삼각형은 P_1에서 P_2, P_3까지 시계 반대방향으로 그려지는 것, 삼각형의 면적은

$$\triangle P_1P_2P_3\text{의 면적} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

* $(x_3\ y_3)$가 원점이면, 정리 4.3.6에서 삼각형의 면적은 2×2 행렬식으로 표현

$$\triangle P_1P_2P_3\ \text{면적} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

<정리 4.2.7>은 선형계가 유일한 해를 가질 필요충분조건

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

<정의 4.3.7> $u = (u_1\ u_2\ u_3)$ 와 $v = (v_1\ v_2\ v_3)$ 가
R^3 의 벡터 $u \times v$ 로 표시되는 u와 v 의 외적은

$$u \times v = (u_2v_3 - v_3u_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ v_1u_2 - u_2v_1)$$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

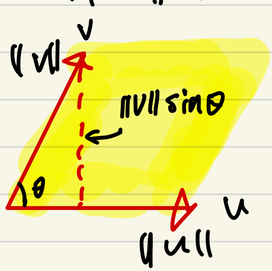
<정리 4.3.8> u, v, w 가 R^3 의 벡터들이고 k가 스칼라

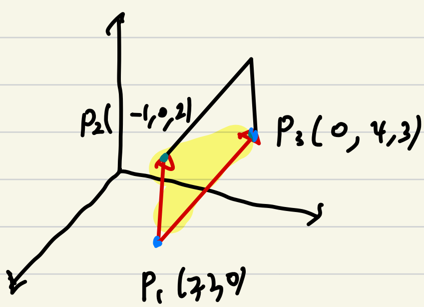
(a) $u \times v = -v \times u$
(b) $u \times (v+w) = (u+v) + (u \times w)$
(c) $(u+v) \times w = (u+w) + (v+w)$
(d) $k(u+v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
(e) $u \times 0 = 0 \times u = 0$
(f) $u \times u = 0$

<정리 4.3.10> u와 v를 R^3의 0이 아닌 벡터라 하고, θ를 이 벡터들의 사이각

(a) $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin\theta$
(b) u와 v가 인접한 모서리인 평행사변형 A의 면적은

$$A = \|u \times v\|$$





<정리 4.4.1> A가 $n \times n$ 행렬, 다음 명제는 동일하다.
(a) A는 자명하지 않은 고정점을 가진다.
(b) $I-A$ 는 특이행렬이다.
(c) $\det(I-A)=0$

* 행렬 A의 고정점을 찾는 법
$Ax=Ix \rightarrow (I-A)x=0$

<정의 4.4.3> A가 $n \times n$ 행렬일 때 $Ax=\lambda x$ 인 0이 아닌 벡터 x가 존재하면 스칼라 λ를 A의 고유값이라 한다.
λ가 A의 고유값이면, $Ax=\lambda x$ 인 0이 아닌 모든 벡터는 λ에 대응하는 A의 고유벡터

- $n \times n$ 행렬 A의 고유값을 구하는 가장 직접적인 방법
$Ax=\lambda I x$ or $(\lambda I - A)x=0$ ... (1)
- 선형계 (1)가 자명하지 않은 해를 갖는 λ값을 찾는 것
- (1)는 계수행렬 $\lambda I - A$가 특이행렬일 때에만 자명하지 않은 해를 가지므로

$$\det(\lambda I - A)=0$$

- 식(5)를 A의 특성방정식
λ가 A의 고유값이면, (1)는 0이 아닌 해공간을 갖게 되고, 이는 λ에 대응하는 A의 고유공간

<정리 4.4.4> A가 $n \times n$ 행렬이고 λ가 스칼라이면, 다음의 명제는 동일하다.
(a) λ는 A의 고유값이다
(b) λ는 방정식 $\det(\lambda I - A)=0$ 의 해가 된다
(c) 선형계 $(\lambda I - A)x=0$는 자명하지 않은 해를 가진다.

<정리 4.4.5> A가 삼각행렬 (대각까지) 이면, A의 고유값은
A의 주대각 성분들이다.

A가 대각 원소가 a_{11} a_{22} ⋯ 와 a_{nn}로 주어진 $n \times n$ 삼각행렬
~ A의 특성 다항식

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

$$\lambda_1 = a_{11},\ \lambda_2 = a_{22}\ \cdots\ \lambda_n = a_{nn}$$

<정리 4.4.6> λ가 행렬 A의 고유값이고 x가 대응하는
고유벡터이고 k가 양의 정수이면, λ^k는 A^k의 고유값이고
x는 대응하는 고유벡터이다.

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

<정리 4.4.7> A가 $n \times n$ 행렬이면 ↓

(a) A의 행사다리꼴은 I이다
(b) A는 기본행렬의 곱으로 표현할 수 있다.
(c) A는 가역행렬이다.
(d) $Ax = 0$는 자명한 해만 가진다.
(e) $Ax = b$는 R^n의 모든 b에 대해 해가 존재한다.
(f) $Ax = b$는 R^n의 모든 b에 대해 유일한 해를 가진다.
(g) A의 열 벡터들은 일차 독립이다.
(h) A의 행 벡터들은 일차 독립이다.
(i) $\det(A) \neq 0$
(j) $\lambda = 0$은 A의 고유값이 아니다

복소고유값

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}\lambda+2 & 1\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

- 특성방정식의 근들은 허수인 $\lambda=i$ 와 $\lambda=-i$

대수적 중복도

- $det(\lambda I-A)$은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n$$

- A의 특성다항식

$$p(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n$$

- 특성다항식을 인수분해 할 때 세 가지 중 하나가 발생

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n$$

1. 실수들만 가지고 서로 다른 선형 인수들로 다항식을 완전하게 인수분해 할 수 있는 경우다. 예를 들면

$$\lambda^3+\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda^2+\lambda-2)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)$$

2. 실수들만 가지고 서로 다른 선형 인수들로 다항식을 완전하게 인수분해 할 수 있지만 어떤 인수들은 중복되는 경우, 예를 들면

$$\lambda^6-3\lambda^4+2\lambda^3=\lambda^3(\lambda^3-3\lambda+2)=\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

3. 실수들만 가지고 다항식을 1차와 2차 인수들로 완전히 인수분해 할 수 있지만, 허수들을 사용하지 않고는 2차 인수들(그런 2차 인수들은 실수로 약분되지 않는다고 한다)을 1차 인수들로 분해 할 수 없는 경우 예를 들면

$$\lambda^4-1=(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i)$$

→ 여기서 λ^2+1은 실수들로 약분되지 않는다.

- 허수 고유값들이 허용된다면, 행렬 A의 특성다항식이 다음과 같이 인수분해

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) \quad (18)$$

→ 특성다항식의 완전일차인수분해

- (18)에서 일부 인수들이 중복된다면

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

→ 지수 m_i는 고유값 λ_i 의 대수적 중복도

- 고유값들의 대수적 중복도의 합은 특성다항식의 차수가 n 이기 때문에 반드시 n

- 6×6 행렬 A의 특성다항식이 다음과 같으면,

$$\lambda^6-3\lambda^4+2\lambda^3=\lambda^3(\lambda^3-3\lambda+2)=\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

→ 서로 다른 고유값들은 $\lambda=0$, $\lambda=1$, $\lambda=-2$

→ 고유값들의 대수적 중복도는 각각 3, 2, 1이며 합은 6

<정리 4.4.8> A가 $n\times n$ 행렬이면 A의 특성다항식은

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

$\lambda_1\,\lambda_2\cdots\lambda_k$는 서로 다른 A의 고유값이고 $m_1+m_2+\cdots m_k=n$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc$$

$$=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$$

- A의 대각합과 행렬식을 이용

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^2-tr(A)\lambda+\det(A)$$

- A의 특성방정식

$$\lambda^2-tr(A)\lambda+\det(A)=0$$

<정리 4.4.9> A가 실수 성분들을 가지는 2x2 행렬이라면 A의 특성방정식은 다음과 같고

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

다음이 성립한다

(a) $tr(A)^2 - 4det(A) > 0$ A는 서로 다른 두 개의 실수 고유값

(b) $tr(A)^2 - 4det(A) = 0$ A는 하나의 중복된 실수 고유값

(c) $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$ A는 두 켤레 허수 고유값

<정리 4.4.10> 실수성분들을 가지는 2x2 대칭행렬은 실수 고유값들을 가진다. 또한 A가 다음과 같은 형태일 때 하나뿐인 $\lambda = a$인 중복된 고유값을 가지며,

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$ 그렇지 않을 때는 두 개의 서로 다른 고유값

<정리 4.4.11>

(a) 실수성분들을 가지는 2x2 대칭행렬이 하나의 중복된 고유값을 가진다면, 그 고유값에 대응되는 고유공간은 R^2이다.

(b) 실수성분들을 가지는 2x2 대칭행렬이 두 개의 서로 다른 고유값을 가진다면, 이런 고유값들에 대응되는 고유공간들은 R^2의 원점을 지나는 수직되는 직선들이다.

<정리 4.4.12> A가 고유값 $\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n$ (중복도에 따라 중복됨)을 가지는 $n \times n$ 행렬이라면

(a) $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

(b) $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$