1.5 LU 분해와 연립방정식

방정식 개수와 미지수 개수가 같은 연립방정식의 해를 컴퓨터를 이용하여 구할 때 계수행렬을 0이 많은 두 개의 행렬의 곱으로 분해하여 계산하면 좋다.

이 절에서는 행렬의 LU 분해에 대하여 알아본다.

<u>정의 1.5.1</u>
$A=[a_{ij}]$가 정방행렬이라 하자. 만일 $i>j$일 때, $a_{ij}=0$이면 A를 **상삼각행렬**(upper triangular matrix)이라 하고 $i<j$일 때, $a_{ij}=0$이면 A를 **하삼각행렬**(lower triangular matrix)이라 한다. 하삼각행렬 또는 상삼각행렬을 삼각행렬(triangular matrix)이라 한다. A가 정방행렬일 때, $i\neq j$에 대하여 $a_{ij}=0$이면 A를 **대각행렬**이라 한다.

정의에 의하면 기약 행사다리꼴 행렬은 상삼각행렬이다.

(예제 1)

$$\begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 3&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

예에서 볼 수 있듯이 기본행렬이 항상 삼각행렬이 되는 것은 아니다.

<u>정리 1.5.2</u>
(a) 두 행을 서로 바꾸는 기본행연산으로 얻어진 기본행렬 E는 삼각행렬이 아니다.
(b) 한 행에 0이 아닌 상수곱을 하는 기본행연산으로 얻어진 기본행렬 E는 대각행렬이다.
(c) 위 행의 0이 아닌 상수를 곱하여 더하는 기본행연산으로 얻어진 기본행렬 E는 하삼각행렬이고 아래 행에 0이 아닌 상수를 곱하여 더하는 기본행연산으로 얻어진 기본행렬 E는 상삼각행렬이다.

삼각행렬에 대하여 다음 정리가 성립한다.

<u>정리 1.5.3</u>

(a) 상삼각행렬의 전치행렬은 하삼각행렬이고 하삼각행렬의 전치행렬은 상삼각행렬이다.

(b) 상삼각행렬의 곱은 상삼각행렬이고 하삼각행렬의 곱은 하삼각행렬이다.

(c) 가역인 상삼각행렬의 역행렬도 상삼각행렬이고 가역인 하삼각행렬의 역행렬도 하삼각행렬이다.

(예제 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때, A^T, A^2 와 A^{-1} 를 구하여라.

정방행렬 A 를 아래 행에 0 이 아닌 상수를 곱하여 우 행에 더하는 기본행연산만을 적용하여 행사다리꼴 B 로 바꾸었다고 하자. A 에 적용한 기본행연산을 순서대로 항등행렬에 적용한 기본행렬을

$$E_1, E_2, \cdots, E_k$$

라 하면 이들 기본행렬 모두 하삼각행렬이다. 따라서

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = B$$

가 되어

$$A = E_1^{-1} E_2^{-2} \cdots E_k^{-1} B$$

를 만족한다. $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ 이라 하면 L 은 하삼각행렬이 된다. B 는 행사다리꼴이므로 $U = B$ 라 하면 U 는 상삼각행렬로 행렬 A 는 하삼각행렬 L 과 상삼각행렬 U 의 곱 $A = LU$ 의 형태로 표현된다.

<u>정의 1.5.4</u>

정방행렬 A 가 하삼각행렬 L 과 상삼각행렬 U 의 곱 $A = LU$ 로 표시되면 이를 A 의 LU **분해**(LU factorization)라고 한다.

정방행렬 A를 가우스 소거법에서 행을 서로 바꾸는 기본행연산은 적용하지 않고 행사다리꼴 행렬로 변형할 수 있으면 A의 LU 분해는 존재한다.

(예제 3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$의 LU 분해를 구하여라.

(예제 4) 1행과 3행을 바꾼 기본행연산을 적용한 기본행렬 $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$은 LU 분해가 존재하지 않음을 보여라.

예제 3에서 행렬을 LU 분해하기 위하여 기본행렬의 역행렬을 구하였다. 이 과정을 생략하고 행사다리꼴로 바꾸는 과정에서 L을 구할 수 있다.

(예제 5) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 8 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$를 LU 분해하여라.

이제 LU 분해를 이용하여 연립방정식의 해를 구하는 방법을 알아보자.

정방행렬 A가 $A = LU$와 같이 LU 분해가 된다고 가정하자. 연립방정식 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$는 $LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 또는 $L(U\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$로 나타낼 수 있다. $\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x}$라 하면 다음 두 단계로 $\boldsymbol{b}$를 구할 수 있다.

(i) 전진대입법으로 $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$에서 $\boldsymbol{y}$를 구한다.

(ii) 후진대입법으로 $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$에서 $\boldsymbol{x}$를 구한다.

(예제 6) 다음 연립방정식의 해를 계수행렬의 LU 분해를 이용하여 구하여라.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad &= -1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$A = LU$로 LU 분해될 때 A를 하삼각행렬 L과 상삼각행렬 U의 대각성분이 1이 되도록 만드는 LDU 분해가 있다.

<u>정의 1.5.5</u>
정방행렬 A가 대각성분이 모두 1인 하삼각행렬 L과 대각성분이 모두 1인 상삼각행렬 U과 대각행렬 D의 곱인 $A = LDU$로 분해되면 이를 A의 LDU 분해(LDU factorization)라고 한다.

<u>정리 1.5.6</u>
A가 가역이고 LU 분해가 존재하면 LDU 분해는 유일하게 존재한다.

(예제 7) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 3 & -9 & -21 \\ 12 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$로 LU 분해될 때 A의 LDU 분해를 구하여라.