Slope trick

Равилов Игорь Б05-325

Март 2024

1 Формулы и свойства

Slope trick - это способ представления функции. Назовём функцию **хорошей** (п.п. в оригинале: **slope-trick-able**), если она удовлетворяет следующим свойствам:

1. Она непрерывна.

2. Её можно разделить на несколько секций, где каждая секция является линейной функцией с целым *угловым коэффициентом.* (далее *угл. коэф.*)

3. Она является выпуклой вверх/вниз функцией. Другими словами, угл. коэф. каждой секции либо не убывает, либо не возрастает при взгляде на функцию слева-направо.

Например, функция $y = f(x) = |x|$ является **хорошей**, потому что её можно разделить на две секции линейных функций с целыми угл. коэф-ами ($y = -x$ для $x \in (-\infty, 0)$ и $y = x$ для $x \in [0, \infty)$) и угл. коэф. не уменьшается при взгляде на функцию слева-направо.

Определим точку изменения угл. коэф-та как x_{change}. В прошлом примере точкой изменения угл. коэф-та являлась x = 0, слева от неё он равен -1, справа 1.
Также заметим, что функция может иметь несколько точек изменения угл. коэф-та. Например:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < 2 \\ x, & \text{если } 2 \geq x < 8 \\ 4x - 24, & \text{если } 8 \geq x \end{cases}$$

Эта кусочно-заданная функция имеет две точки изменения монотонности
(т.е. как раз x_{change}) в x = 2 и x = 8.

Можно представить функцию из примера в следующем виде: сохраним линейную функцию самого правого участка и мультимножество всех точек изменения угл.коэф-та, где он изменяет свое значение на 1 (здесь подразумевается мультимножество в его математическом понятии, т.е. набор, в котором элементы повторяются). Это также означает, что если есть точка изменения угл. коэф-та, в которой он изменяет свое значение более чем на 1, то *мы сохраняем эту точку столько раз, сколько изменяется значение самого угл. коэф-та.*

Вернёмся к примерам. Используя это представление, можно записать функцию из первого примера примера как

$$[y = x, S = 0, 0]$$

а функцию из второго как

$$[y = 4x - 24, S = \{2, 8, 8, 8\}]$$

Заметим, что сохраняя эти значения, мы можем восстановить каждый промежуток и, следовательно, всю функцию саму по себе.
Давайте возьмем кусочно-заданную функцию из примера. Используя мультимножество точек смены угл. коэф-та, мы видим, что есть 3 промежутка $(-\infty, 2)$, $[2, 8)$, $[8, \infty)$. Последний содержит функцию $y = 4x - 24$. Вторая является функцией $y = x + b$ (угл. коэф. изменяется на 3, в точке $x = 8$, т.к. мы сохранили значение 8 в мультимножетсво 3 раза).
Теперь мы можем это решить: $x + b = 4x - 24$ в точке $x = 8 \rightarrow b = 0$. Следовательно, вторая функция равна $y = x$.
Аналогично решим первую: $y = c$ (угл. коэф. изменяется на 1 в точке $x = 2$)
$y = c = x$ в точке $x = 2 \rightarrow c = 2$. Следовательно, вторая функция равна $y = 2$.

Итак, самое важное свойство **хороших** функций – их можно складывать. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ являются **хорошими**, тогда $h(x) = f(x) + g(x)$ тоже **хорошая**.

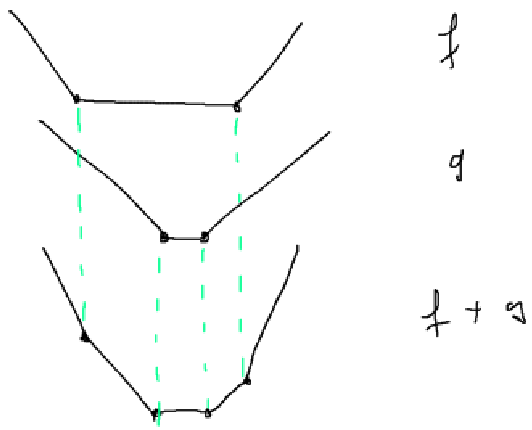


Рис. 1: Зарисовка, для лучшего интуитивного понимания

Обратим внимание на то, что мы складываем **хорошие** функции одного типа кривой (т.е. все слагаемые выпуклые либо вниз, либо вверх).
Ещё лучше то, что представление $h(x)$ легко вывести: самая правая функция $h(x)$ равна сумме самых правых функций $f(x)$ и $g(x)$, а мультимножество $S_h = S_f \cup S_g$. Чтобы понять, как работает это объединение, будем использовать алгоритм сканирующей прямой. За точки *событий* возьмем точки смены угл. коэф-та, а при сложении двух функций будем объединять все события вместе.

Суть slope trick заключается в гибкости преобразования наших функций путем простого представления функции в виде мультимножества описанного выше. Теперь перейдём к задачам.

2 713C - Соня и задача без легенды

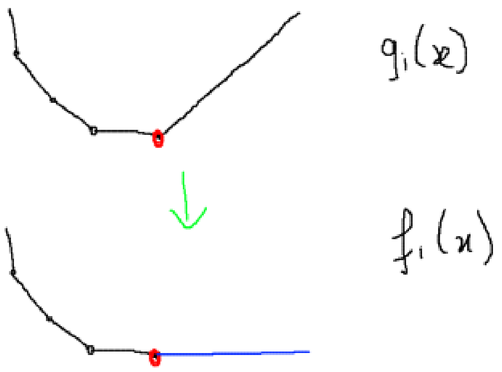
Для начала преобразуем порядок в искомом массиве с *строго возрастающего* на *неубывающее*. Для этого просто сделаем $a[i]$ -= i для всех элементов.

Обозначим функцию $f_i(x)$ как минимальное количество операций, необходимых для того, чтобы упорядочить первые i элементов массива по *неубыванию* при $a_i \geq x$. Можно видеть, что ответ к задаче это $f_i(\infty)$. Тогда, при помощи мат. индукции докажем, что $f_i(x)$ является **хорошей** выпуклой вниз функцией $\forall i$.

База: мы видим, что $f_0(x)$ является **хорошей**, $f_0(x) = 0$.

Предположение индукции: $f_{i-1}(x)$ является **хорошей** выпуклой вниз функцией.
Пусть $g_i(x)$ – минимальное количество операций, необходимых для того, чтобы упорядочить первые i по *неубыванию* при $a_i = x$. Заметим, что $g_i(x)$ почти аналогична $f_i(x)$, за тем исключением, что у первой условие при $a_i = x$, а у второй $a_i \geq x$. Мы видим, что $g_i(x) = f_{i-1}(x) + |x - a_i|$. Поскольку $|x - a_i|$ является **хорошей** выпуклая вниз функцией (аналогично первому примеру), а т.к. $f_{i-1}(x)$ **хорошая** и выпуклая вниз по предположению индукции, $g_i(x)$ тоже является **хорошей** и выпуклой вниз.

Итак, заметим, что $f_i(x) = min(g_i(t), \forall t \geq x)$ (т.е. f_i минимум-функция на префиксе g_i). Видно, что для $f_i(x)$ значение не убывает до тех пор, пока угл. коэф. не станет равным 1, и затем не убывает с этой точки и далее. Таким образом, чтобы получить $f_i(x)$ мы ***берем префикс*** $g_i(x)$ в точке, где угл. коэф. становится равен 1, и ***растягиваем*** эту точку вправо.



Поскольку операции ***взятия префикса*** и ***растягивания*** просто удаляют наибольшую точку смены угл. коэф-та и измененяют самую правую функцию до момента, пока ее угл. коэф. не станет равен 0, $f_i(x)$ также является **хорошей** выпуклая вниз функцией. К тому же, можно индуктивно доказать, что угл. коэф. функции правой секции $g_i(x)$ равен 1, именно поэтому нужно удалить её самую крупную точку смены угл. коэф-та, чтобы получить $f_i(x)$ (что мы выше и сделали).

Подводя итог: мы можем непрерывно поддерживать $f_i(x)$ вместе с увеличением i, используя в качестве структуры данных, например, очередь с приоритетом, которая будет поддерживать наше мультимножество точек смены угл. коэф-та S, и вывести *ответ* $f_n(\infty)$.

Асимптотика: $O(n \log(n))$

3 NOI in Singapore 2018 - Задача 5: Безопасность

Описание задачи: У вас есть массив из n неотрицательный целых чисел. Каждая операция позволяет увеличить или уменьшить значение элемента числа на 1, при этом числа должны оставаться неотрицательными. Найдите минимальное количество операций для того, чтобы массив удовлетворял условию $|a_i - a_{i+1}| \geq h$, $\forall i \in [1, n)$.

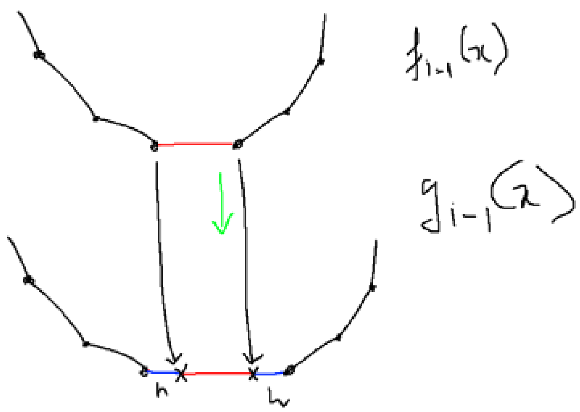
Решение
Заметим, что ограничение, на то, чтобы все элементы были неотрицательными, необязательно, потому что в оптимальной конструкции у нас никогда не будет отрицательных элементов (можно любой отрицательный элемент приравнять к 0, чтобы использовать меньше операций при этом удовлетворяя условию).

Обозначим функцию $f_i(x)$ как минимальное количество операций, необходимых для того, чтобы первые i элементов удовлетворяли условию $|a_i - x| \geq h$. Как и в *первой задаче*, докажем по мат. индукции, что эта функция является **хорошей** и выпуклая вниз $\forall i$.

База: $f_1(x) = |a_1 - x|$ – верно, $f_1(x)$ **хорошая**, опять же, по аналогии с *первым примером*.

Предположение индукции: $f_{i-1}(x)$ является **хорошей** выпуклая вниз функцией.
Пусть $g_i(x)$ – минимальное количество операций, необходимых для того, чтобы первые i элементов удовлетворяли условию $|a_i - x| \geq h$.
В свою очередь, $g_i(x) = min(f_i(t), |t - x| \geq h$ (т.е. своего рода функция локального минимума на f_i). Преобразуем f_{i-1} в g_{i-1}. Рассмотрим секции где угл. коэф. равен 0, и слева и справа от этой секции.

1. Секция, где угл. коэф. равен 0, будет такой же, как и в *прошлой задаче*, т.к. эта секция содержит минимальное значение f_{i-1}.
2. Секция слева (от секции где угл. коэф. равен 0), сдвигается влево на h, так как эта функция в этой секции не убывает, поэтому $g_{i-1}(x)$ всегда будет возвращать минимальное значение $f_{i-1}(t)$, где $x \geq t \geq x + h$.
3. Секция справа (от секции где угл. коэф. равен 0) аналогичным образом сдвигается справа на h.



Мы можем сохранить точки изменения угл. коэф-та, вычитая h из всех точек изменения угл. коэф-та вплоть до секции где угл. коэф. равен 0, и добавляя h ко всем остальным точкам изменения угл. коэф-та (нам также нужно пересчитать функцию правой секции). Поэтому $g_{i-1}(x)$ **хорошая** выпуклая вниз функция. Итак, мы видим, $f_i(x) = g_{i-1}(x) + |a_i - x|$. и, следовательно, $f_i(x)$ тоже является **хорошей** и выпуклой вниз.

Подводя итог: в качестве структуры данных можно использовать две очереди с приоритетом для поддержки точек смены угл. коэф-та левой и правой части, а вместо поддержки функции самого правого участка можно поддерживать функцию минимальной секции.

Асимптотика: $O(n \log(n))$

Источники

- Оригинал статьи
- Сканирующая прямая