UICI
UNIVERSITAS INSAN CITA INDONESIA

Calculus

Sri Retnowati, S.Pd., M.Pd.
Prodi Sains Data
[SD613513] - Pertemuan 11
Kontak Dosen: 085865835463

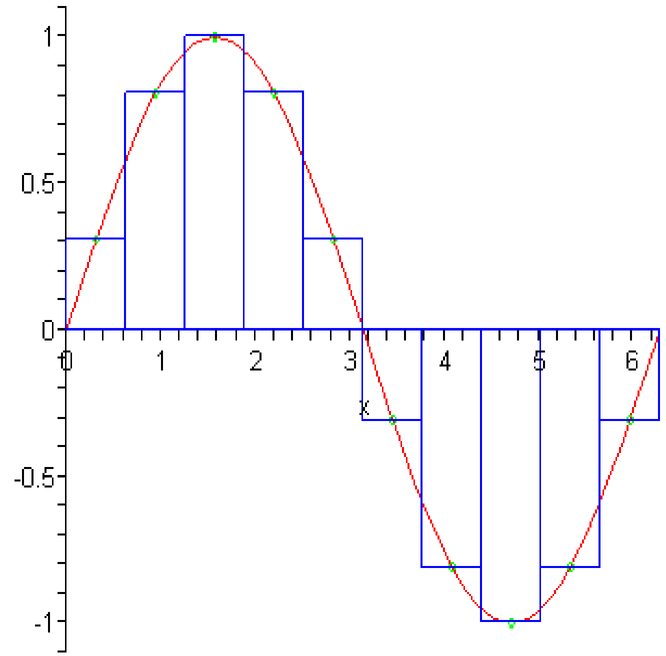
UNIVERSITAS INSAN CITA INDONESIA

Aplikasi Integral & Integral Parsial


Encarta Encyclopedia, ProFiles West/Michael J. Howell

Pilar-pilar jembatan pada gambar di atas membentuk partisi-partisi yang akan kita temukan dalam pokok bahasan menghitung luas daerah dengan menggunakan integral.

Menentukan luas daerah dengan *limit jumlah* dapat diilustrasikan oleh gambar di samping. Langkah utama yang dilakukan adalah *memartisi*, *mengaproksimasi*, *menjumlahkan*, *dan menghitung limitnya*.



Luas Sebagai Limit Jumlah

Langkah menghitung luas daerah dengan limit jumlah adalah:

1. Bagilah interval menjadi selang yang sama panjang.

2. Partisilah daerah tersebut.

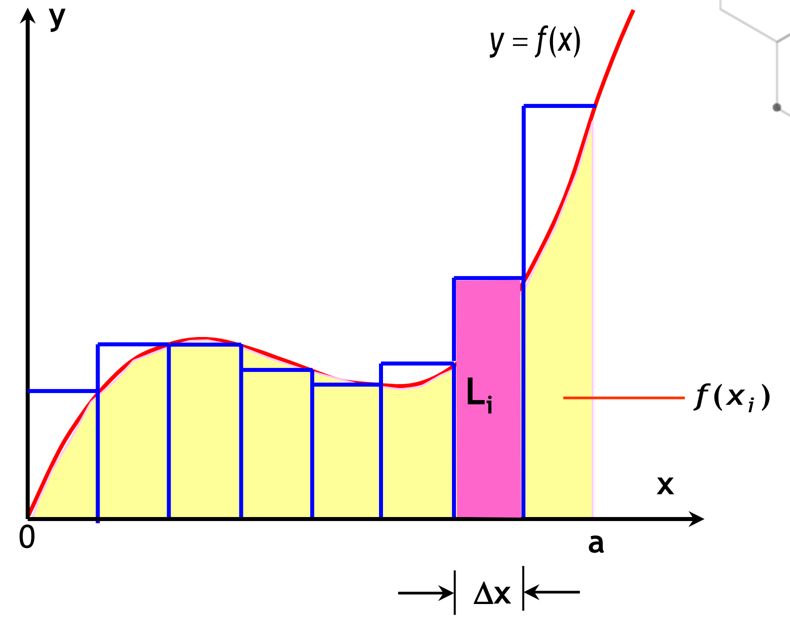
3. Masing-masing partisi buatlah persegi panjang.

4. Perhatikan persegi panjang pada interval $[x_{i-1}, x_i]$.

5. Tentukan luas persegi panjang ke-i (L_i)

6. Jumlahkan luas semua persegi panjang

7. Hitung nilai limit jumlahnya

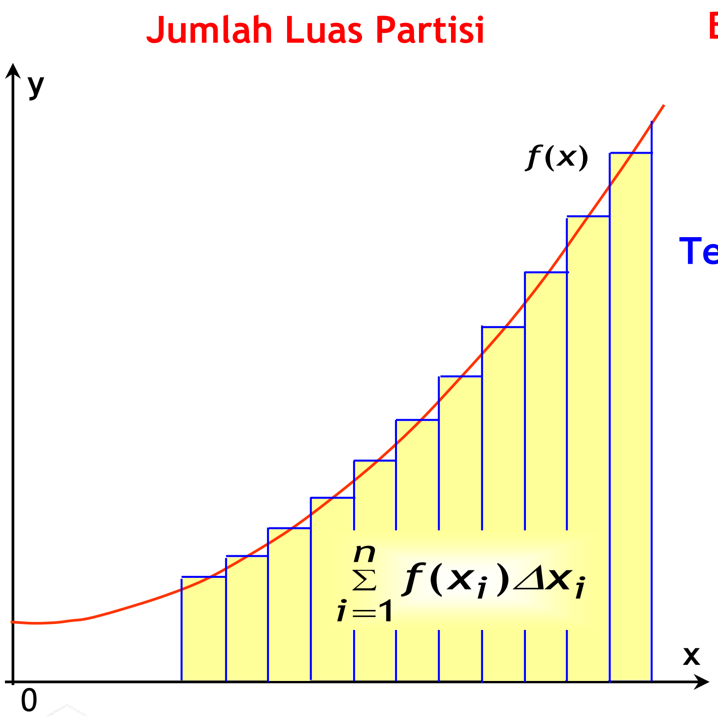


Luas sebuah persegi panjang: $L_i = f(x_i)\,\Delta x$

Jumlah luas persegi panjang : $L \approx \Sigma\, f(x_i)\,\Delta x$

Limit jumlah : $L = \lim \Sigma\, f(x_i)\,\Delta x \quad (n \to \infty)$

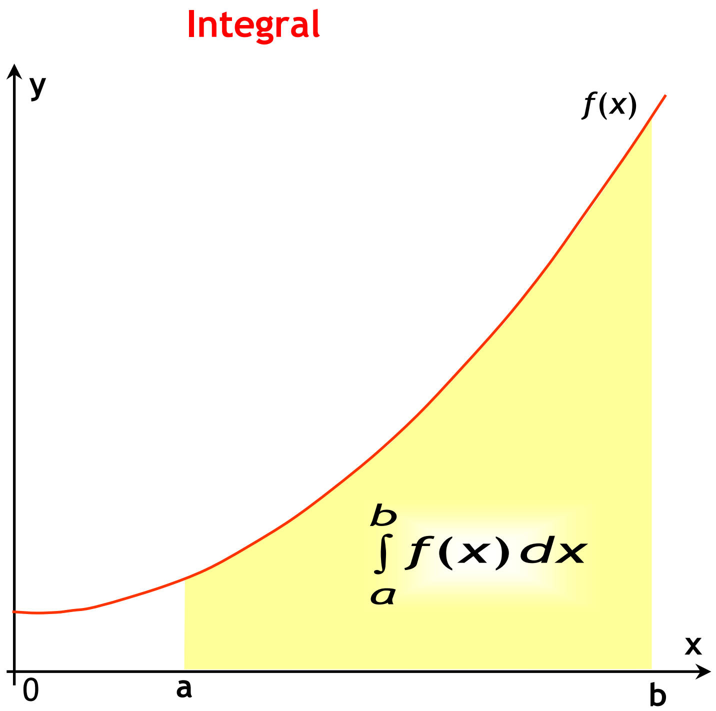
Menghitung luas daerah dengan integral



Berubah Menjadi

Tentukan limitnya

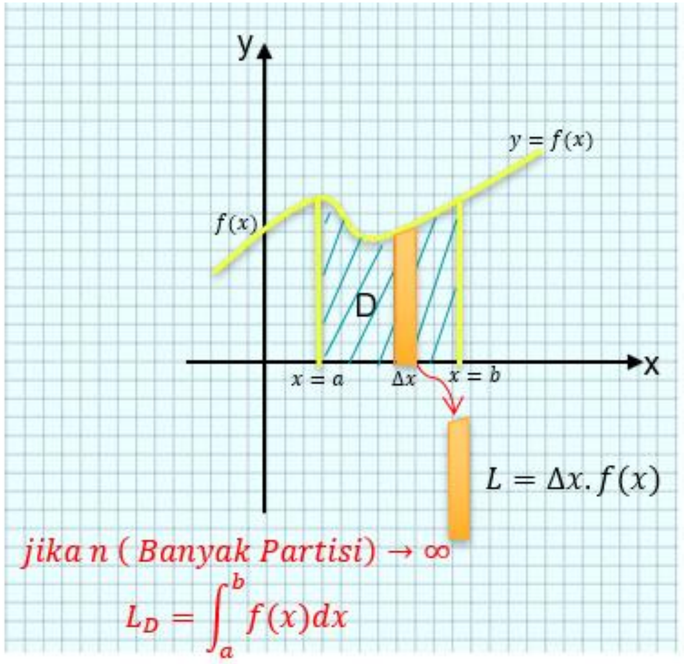
$n \to \infty$



definisi integral Riemaan di atas dapat diartikan sebagai luas daerah di bawah kurva *y* = *f*(x) pada interval [a, b].

$$L = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Menghitung luas daerah dengan integral



Dalam menghitung luas daerah dengan integral tentu adalah:

1. Gambar daerahnya.

2. Partisi daerahnya

3. Aproksimasi luas sebuah partisi $L_i \approx f(x_i)\,\Delta x_i$

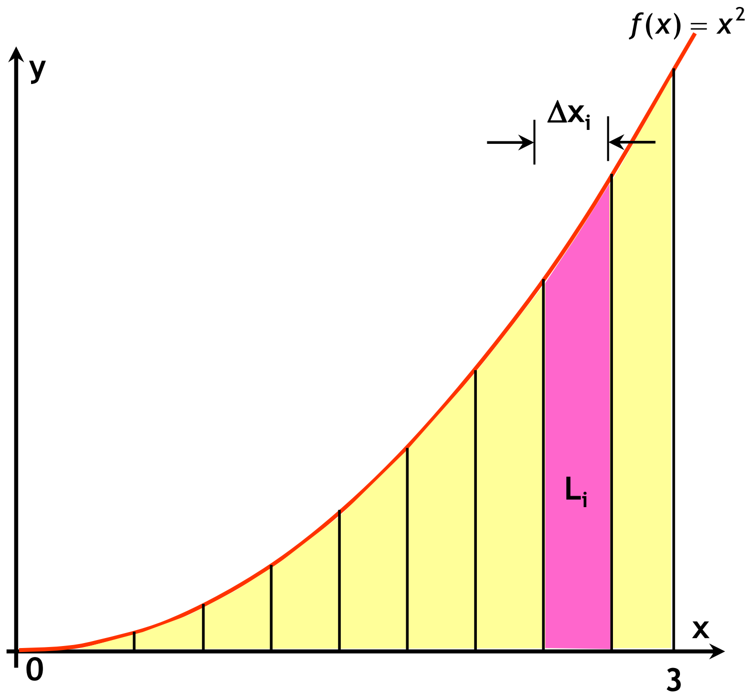
4. Jumlahkan luas partisi $L \approx \sum f(x_i)\,\Delta x_i$

5. Ambil limitnya $L = \lim \sum f(x_i)\,\Delta x_i$

6. Nyatakan dalam integral $L = \int_0^a f(x)\,dx$

Contoh:

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu x, dan garis x = 3



Solusi:

1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luasnya $L_i \approx x_i^2 \, \Delta x_i$
4. Jumlahkan luasnya $L \approx \sum x_i^2 \, \Delta x_i$
5. Ambil limit jumlah luasnya

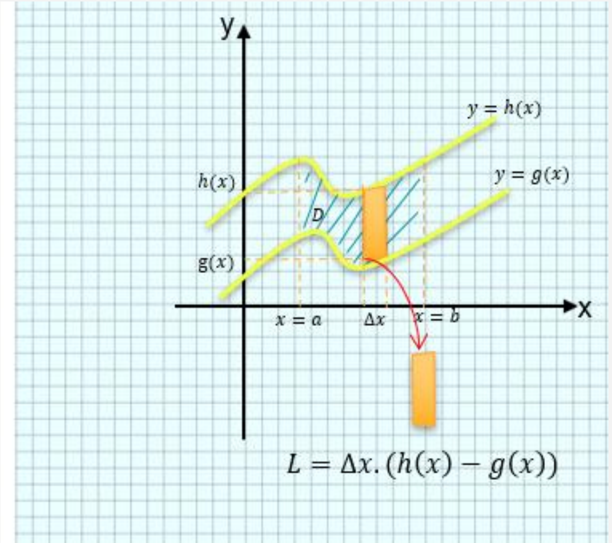
$$L = \lim \sum x_i^2 \, \Delta x_i$$

6. Nyatakan dalam integral dan hitung nilainya

$$L = \int_0^3 x^2 \, dx$$

$$L = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$

Luas Daerah Antara Dua Kurva



Perhatikan kurva y = $f(x)$ dan y = $g(x)$ dengan $f(x) > g(x)$ pada selang [a, b] di bawah ini. Dengan menggunakan cara : *partisi*, *aproksimasi*, *jumlahkan*, *ambil limitnya*, *integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kurva tersebut.

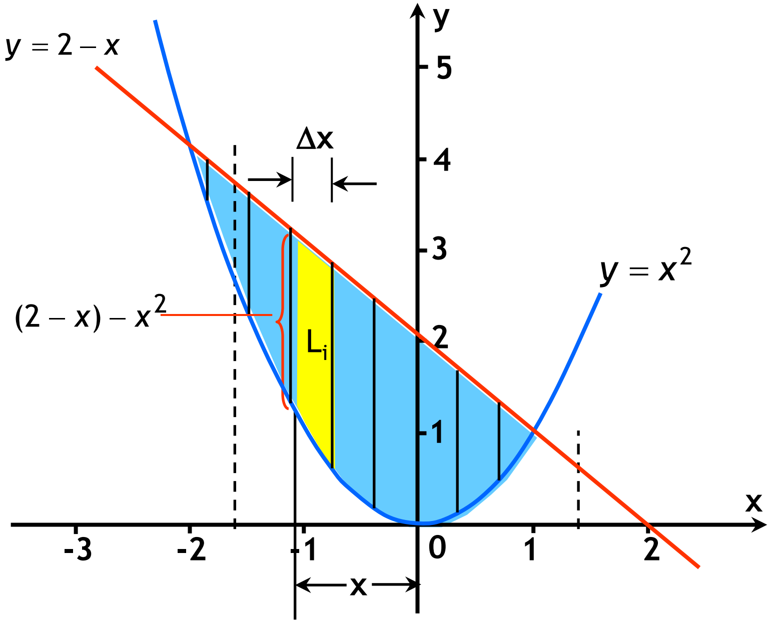
Langkah penyelesaian:

1. Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx [\, f(x) - g(x) \,] \Delta x$
4. Jumlahkan : $L \approx \sum [\, f(x) - g(x) \,] \Delta x$
5. Ambil limitnya : $L = \lim \sum [\, f(x) - g(x) \,] \Delta x$
6. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Contoh:

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2 - x$



Solusi:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva

   $x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$

   diperoleh x = -2 dan x = 1
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya $L_i \approx (2 - x - x^2)\Delta x$
5. Jumlahkan luasnya $L \approx \sum (2 - x - x^2)\Delta x$
6. Tentukan limit jumlah luasny $L = \lim \sum (2 - x - x^2)\Delta x$
7. Nyatakan dalam integral tertentu $L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx$

Contoh:

$$L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx$$

$$L = \left[2x - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1}$$

$$L = \left(2(1) - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

$$L = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right)$$

$$L = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

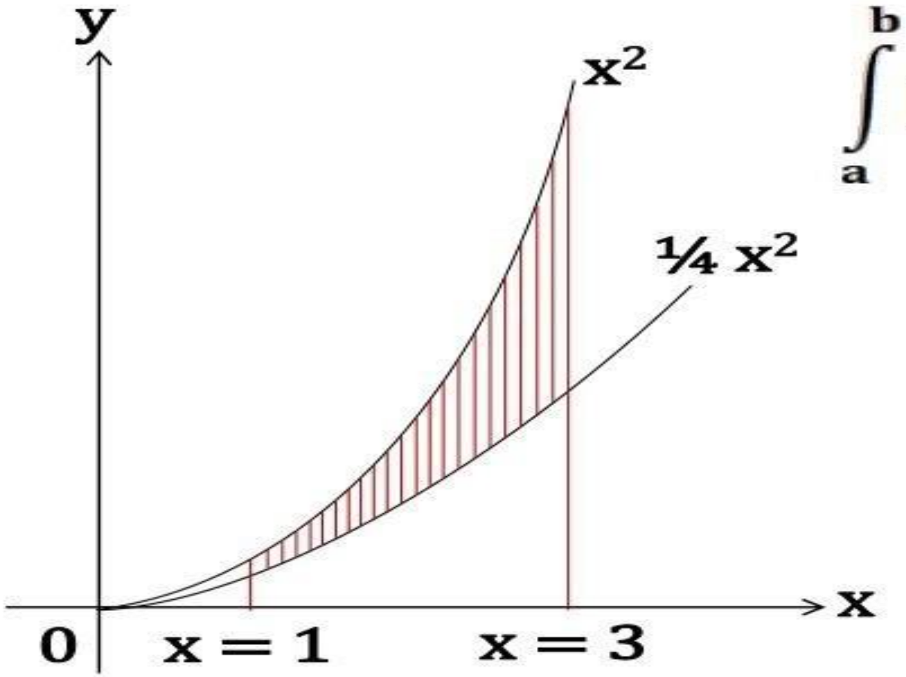
$$L = 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Contoh

Tentukan luas bidang yang dibatasi oleh

$$x^2, \frac{1}{4}x^2, x = 1 \text{ dan } x = 3$$

Penyelesaian



$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{4}x^2\right) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}\int_1^3 x^2 dx$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big]_1^3 = \frac{1}{4}(27 - 1) = \frac{13}{2}$$

Integral Parsial

Integral parsial diturunkan dari persamaan diferensial dari dua fungsi yang diberikan yang dapat dituliskan dalam

$$\frac{d}{dx}\big(u(x).v(x)\big) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

$$u(x).v(x) = \int u'(x).v(x) + u(x).v'(x)\,dx$$

$$u.v = \int u'.v\,dx + \int u.v'\,dx$$

$$\int u.v'dx = u.v - \int u'.v\,dx$$

$$Dimana\ v'(x) = \frac{dv}{du}$$

$$v'(x)dx = dv$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$u'(x)dx = du$$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Integral Parsial

Berhasil atau tidaknya pengintegralan dengan menggunakan rumus integral parsial ditentukan oleh dua hal berikut :

- memilih bagian dv sehingga v dengan segera dapat ditentukan melalui hubungan $v = \int dv$
- $\int v\, du$ harus lebih mudah di selesaikan dibandingkan $\int u\, dv$

UNIVERSITAS INSAN CITA INDONESIA

Contoh:

1. $\int 2x\,(3x-5)^6\,dx =$

Jawab :

@ Langkah pertama adalah memisalkan u dan dv lalu mencari du dan v

$u = 2x \qquad\qquad dv = (3x-5)^6\ dx$

$du = 2\ dx \qquad\qquad v = \frac{1}{21}\ (3x-5)^7$

@ Langkah kedua adalah tinggal memasukkan ke dalam rumus integral parsial

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int 2x\,(3x-5)^6 = 2x\,\frac{1}{21}\,(3x-5)^7 - \int \frac{1}{21}\,(3x-5)^7\,2\,dx$$

$$= \frac{2x}{21}\,(3x-5)^7 - \frac{2}{21.3.8}\,(3x-5)^7 + C$$

$$= \frac{2x}{21}\,(3x-5)^7 - \frac{1}{252}\,(3x-5)^8 + C$$

Latihan Soal

1. Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva y = 4x - x^2, sumbu x, dan garis x = 5
2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva y^2 = x, garis x + y = 6, dan sumbu x
3. Sketsa daerah R dan tentukan luas daerahnya.

a. R merupakan daerah yang dibatasi oleh garis y=x, y= -x dan x=1.

b. R merupakan daerah yang dibatsi oleh kurva $y = x^2$ dan garis y = 6-x

4. Hitunglah integral berikut ini

a. $\int x\sqrt{3-2x}\,dx$

b. $\int 6x(3x-1)^{-1/3}\,dx$

c. $\int x(x+4)^5\,dx$