

Modélisation et analyse mathématique de la dynamique d'une crise bancaire et son impact sur le développement économique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques.

Option : Analyse

Par :

BUWA MBOUOBDA Jordan Kevin

Matricule : CM-UDS-17SCI0691

Titulaire d'une Licence en Mathématiques

Sous la direction de :

TADMONT Calvin

Maître de Conférences

Université de Dschang

Juillet 2022

Dédicace

*Je dédie ce travail à :
ma très chère maman DJOMMOU Georgette,
mes frères et sœurs.*

Remerciements

Ce travail porte mon nom mais je n'aurais jamais pu le faire seul. C'est pourquoi j'adresse mes remerciements à :

- ♣ Dieu notre Seigneur pour son amour envers moi et sa protection,
- ♣ Mon encadreur **Pr. TADMON Calvin**, pour ses multiples conseils. Sa passion pour les sciences mathématiques et la simplicité avec laquelle il les aborde sont pour moi une source de motivation et d'encouragement,
- ♣ Tous les enseignants du Département de Mathématiques et Informatique de L'Université de Dschang pour leur encadrement et la qualité de la formation j'ai reçue depuis le niveau 1,
- ♣ Dr NJIKE T. Eric Rostand pour sa bienveillance, son encadrement et ses encouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire,
- ♣ Ma chère maman DJOMMOU Georgette pour son amour, ses prières, ses conseils, et ses soutiens financiers tout au long de cette année,
- ♣ Mes oncles et tantes pour leurs encouragements, leurs conseils et leur aide financière,
- ♣ Mes frères et sœurs TCHUENKO Rolande Nadège, SIMO Élodie Blanase, KAMDEM Janvier Romaric et MOTENG Ghislain Landry pour les conseils, l'aide et la coopération pendant la rédaction de ce mémoire,
- ♣ Mes amis TEBECK Brian, NGAKAM Marie Noël, Rita DJUINE, SEPA NANA Cyrille, DJOUKOUO Marcela, TCHO Hubert, ATONFACK Guérin pour l'aide et la coopération pendant l'élaboration de ce travail,
- ♣ La famille FONCHA spécialement maman FONCHA Mary, M. et Mme AKAH pour leurs conseils et encouragements,
- ♣ Mes camarades de classe NGALAMO Junior Parfait, MOUKAM MBOGNE Loveline, TEMFACK Dhorasso, DONGMO Franck, TAMBE Félix, KAMMEGNE Brice,

NGONGANG Danielle et tous mes camarades de promotion pour leur esprit d'équipe. Je tiens à préciser que ceci n'est pas une liste exhaustive des personnes qui m'ont soutenues pour l'élaboration de ce travail, il y'a des personnes dont les noms ne sont pas mentionnés et qui ont activement participé à l'aboutissement de ce mémoire. À tous ceux-là, j'adresse mes remerciements les plus sincères.

Table des matières

| | |
|--|----------|
| Dédicace | i |
| Remerciements | ii |
| Abréviations et Notations | vi |
| Résumé | x |
| Title | xi |
| Abstract | xii |
| Introduction | 1 |
| 1 Revue de littérature sur les crises bancaires et rappels de quelques outils mathématiques | 2 |
| 1.1 Historique | 2 |
| 1.1.1 Les crises des XVII^e et XVIII^e siècles | 2 |
| 1.1.2 Les crises financières de 1800 à 1914 | 3 |
| 1.1.3 La crise de 1929 et la Grande Dépression | 3 |
| 1.1.4 Les crises de 1970 à nos jours | 4 |
| 1.2 Revue de la littérature | 5 |
| 1.2.1 Le modèle SEI de Tianshu Jiang <i>et al.</i> [5] | 5 |
| 1.2.2 Le modèle de Bucci <i>et al.</i> [3] | 6 |
| 1.2.3 Le modèle de Tadmon-Njike [15] | 6 |
| 1.3 Rappels de probabilités et processus stochastiques | 7 |
| 1.3.1 Probabilités | 7 |
| 1.3.2 Processus stochastiques | 12 |
| 1.4 Les équations différentielles stochastiques | 14 |
| 1.4.1 Intégrales et formule d'Itô | 15 |
| 1.4.2 Définitions et exemples | 21 |
| 1.4.3 Existence et unicité des solutions | 23 |
| 1.4.4 Stabilité pour les équations différentielles stochastiques | 28 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | Présentation du modèle et étude du cas déterministe | 30 |
| 2.1 | Élaboration du modèle | 30 |
| 2.1.1 | Contagion financière dans le système bancaire | 30 |
| 2.1.2 | Dynamique de croissance économique | 31 |
| 2.1.3 | Modèle | 33 |
| 2.1.4 | Existence et unicité des solutions | 35 |
| 2.1.5 | Points d'équilibre et stabilité | 37 |
| 2.2 | Simulations | 41 |
| 3 | Étude du modèle stochastique | 45 |
| 3.1 | Existence et unicité des solutions | 45 |
| 3.2 | Stabilité | 49 |
| 3.3 | Simulations | 54 |
| | Conclusion | 57 |
| | Bibliographie | 59 |
| | Annexe | a |

Abréviations et Notations

Abréviations

CEMAC : Communauté Économique et Monétaire de l'Afrique Centale

CMS : Compagnie des Mers du Sud

EDS : Équations Différentielles Stochastiques

p.s. : presque sûrement

SEI : Susceptible-Exposed-Infectious

Notations

Ω : Univers des possibilités

\mathcal{F} : Tribu sur Ω

\mathbb{P} : fonction de $\mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour toute famille d'ensembles disjoints $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ (i.e $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

\mathcal{B}^d : σ -algèbre de Borel

$\mathbb{E}[X]$: espérance mathématique de la variable aléatoire X où X est intégrable pour la mesure \mathbb{P}

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$: filtration sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i.e famille croissante de sous σ -algèbres de \mathcal{F}

\limsup : limite supérieure

\liminf : limite inférieure

$a \wedge b = \min(a, b)$

$a \vee b = \max(a, b)$

$\langle X, X \rangle_t$: variation quadratique du processus stochastique $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$

$\mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$, $0 \leq a < b < \infty$: ensemble des processus $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptés, $f = \{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$, tel que

$$\|f\|_{a,b}^2 = \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right] < \infty$$

$\mathcal{M}_0([a, b], \mathbb{R})$, $0 \leq a < b < \infty$: ensemble de processus stochastiques, $g = \{g(t)\}_{a \leq t \leq b}$, tel qu'il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ de $[a, b]$ et des variables aléatoires bornées ε_i ,

$0 \leq i \leq k-1$ tels que ε_i est $\{\mathcal{F}_t\}$ -mesurable et :

$$g(t) = \varepsilon_0 \mathbb{I}_{[t_0, t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$: Ensemble de processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptés $f = \{f(t)\}_{t \geq 0}$, tels que

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \quad p.s. \quad \text{pour tout } T > 0$$

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$: Ensemble de processus matriciels de taille $d \times m$, $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptés $f = \{f(t)\}_{t \geq 0}$, tels que

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \quad p.s. \quad \text{pour tout } T > 0$$

$\mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$: l'espace des fonctions réelles $V = V(x, t)$ définies sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ qui sont 2 fois différentiable en la 1^{ère} variable et une fois différentiable en la seconde variable.

$$\nabla_x := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$$

$$V_x = \nabla_x V := \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right)$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d}, \quad d \in \mathbb{N}^*$$

Liste des tableaux

| | | |
|---|----------------------------------|----|
| 1 | Tableau des paramètres | 34 |
| 2 | Valeur des paramètres | 42 |

Table des figures

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Niveau de l'économie en cas d'extinction de la crise. | 42 |
| 2 | Niveau de l'économie en cas de persistance de la crise. | 43 |
| 3 | Comparaison du niveau de l'économie et du système bancaire en extinction/- persistance de la crise. | 43 |
| 4 | Niveau de l'économie en cas d'extinction de la crise : cas stochastique. | 54 |
| 5 | Niveau de l'économie en cas de persistance de la crise : cas stochastique. | 55 |
| 6 | Comparaison système stochastique/déterministe en cas d'extinction de crise. | 55 |
| 7 | Comparaison système stochastique/déterministe en cas de persistance de crise. | 56 |

Résumé

Résumé

Les multiples crises économiques et financières qui ont eu lieu dans le monde ont montré à quel point aucune économie n'est assez forte pour supporter les dommages causés. Vue la complexité de ces crises tant dans leurs origines que dans leurs conséquences, de nombreux chercheurs se sont donnés pour mission de comprendre les différents mécanismes conduisant à ces crises, ainsi que leurs effets sur l'économie des pays concernés. Ce mémoire s'inscrit dans cette initiative et entend donner une modélisation des crises bancaires et leurs impacts sur le développement économique. Nous proposons de ce fait un modèle stochastique de la dynamique des crises ainsi que des simulations à l'aide des méthodes d'Euler et Runge-Kutta. Nos résultats montrent qu'en période de crise, le capital par habitant est plus faible qu'en absence de crise. Nous recommandons aux décideurs politiques de contrôler les relations qu'entretiennent les banques dans le but de prévenir d'éventuelles crises.

Mots clés : Crises bancaires, développement économique, modèle stochastique, simulations.

Title

Modeling and mathematical analysis of the dynamics of a banking crisis and its impact on economic development

Abstract

Abstract

The multiple economic and financial crises which took place in the world have shown how no economy is strong enough to withstand the damage caused. Given the complexity of these crises, both in their origins and in their consequences, many researchers have taken on the task of understanding the different mechanisms leading to these crises, as well as their effects on the economy of the countries concerned. This Master's thesis is part of this initiative and intends to provide a model of banking crises and their impact on economic development. We propose a stochastic model of the dynamics of crises as well as a simulation using the Euler and Runge-Kutta methods. Our results show that during crisis periods, capital per capita is lower than in non-crisis periods. We recommend that policy makers monitor the relationship between banks in order to prevent future crises.

Keywords : Banking crisis, economic development, stochastic model, simulations.

Introduction

De la crise des bulbes de tulipes au **XVII^e** à la crise des subprimes de 2007, le monde a fait face à de nombreuses crises financières qui sont loin d'être prévisibles chaque fois qu'elles surviennent et qui mettent à mal de nombreux pays y compris les grandes puissances. Selon Clément Mathonnat [12], une crise bancaire désigne une situation dans laquelle on observe des signes significatifs de faiblesse dans le système bancaire, qui s'explique par une forte dégradation de la valeur des actifs détenus par la banque et/ou par un retrait massif des dépôts pouvant conduire à une hausse importante du nombre d'établissements en faillite, ainsi qu'à une forte contraction de l'offre de crédit. Dans la littérature on met en évidence le lien entre l'intermédiation bancaire et la croissance économique. Une étude menée au Cameroun en 2017 montre que le développement financier fait croître l'économie (Janice Tieguhong Puatwoe et Serge Mandiefe Piabuo [14]). Bucci et ses co-auteurs (2019) [2] identifient trois canaux suivant lesquels l'intermédiation bancaire affecte la croissance économique : le capital physique, le capital humain et les progrès technologiques. Ensuite, ils proposent un modèle dans lequel ils mesurent l'impact de l'intermédiation bancaire sur la croissance économique par le capital physique. Cependant l'on n'a pas dans la littérature un modèle prenant en compte le capital humain. Au regard de la littérature, on peut se poser la question de savoir quel est l'impact des crises bancaires sur la croissance économique si l'on prend en compte le capital humain. Pour répondre à cette question, nous proposons un modèle stochastique de la dynamique d'une crise bancaire ainsi que son impact sur le développement économique. Nous utilisons la fonction de production de Cobb-Douglas [4] dans lequel nous intégrons le capital humain en utilisant le modèle de Lucas [10] et modélisons le capital par habitant. Notre travail se présente comme suit : le chapitre 1 se divise en deux parties, la première est consacrée aux crises bancaires et développement économique. Nous y présentons une historique des crises ayant frappés le monde et quelques modèles pour l'étude des crises bancaires. La deuxième partie est consacrée aux rappels d'outils mathématiques utiles pour l'analyse de notre modèle stochastique. Le chapitre 2 présente notre modèle et donne une étude du modèle déterministe. Des simulations sont effectuées pour illustrer les résultats théoriques obtenus. Enfin, le chapitre 3 est consacrée à l'étude de notre modèle stochastique proposé. Nous faisons également des simulations pour illustrer nos résultats.

Revue de littérature sur les crises bancaires et rappels de quelques outils mathématiques

PARTIE I : Crises bancaires

Dans cette partie, nous présentons d'une part un petit historique des crises ayant frappé le monde surtout celles qui ont conduit aux crises bancaires et d'autre part nous présentons quelques modèles mathématiques de crises bancaires.

1.1 Historique

1.1.1 Les crises des XVII^e et XVIII^e siècles

Cette période de l'histoire a été marquée par la crise hollandaise des bulbes de tulipes et celle du système de John Law et de la Compagnie des Mers du Sud.

Le début des années 1630 est caractérisé par la présence d'une liquidité abondante dans l'économie hollandaise, où une population de très riches marchands souhaitent faire fructifier leur argent. C'est sur les bulbes de tulipes, venant d'Asie et introduit en Europe au **XVI^e** siècle par l'intermédiaire des Turcs que va se porter leur attention. Ces bulbes étaient considérés à cette époque comme marque d'une certaine supériorité dans la hiérarchie sociale. La hausse du prix des bulbes de tulipes commença dès 1634, mais c'est entre 1635 et 1636 que va se former une véritable bulle spéculative qui éclata le 3 février 1637. L'offre des bulbes de tulipes devint très rapidement inférieure à la demande et les transactions restantes sont réalisées à des prix inférieurs. Cette crise financière impacta fortement la solvabilité des marchands qui se sont engagés sur le marché des bulbes tulipes. Toutefois, cette crise n'eût qu'un impact limité sur l'économie hollandaise. Celle-ci a conduit principalement à l'appauvrissement des riches investisseurs, notamment les marchands.

Concernant les crises du système de John Law et de la Compagnie des Mers du Sud (CMS) elles ont eu lieu au début du **XVIII^e** siècle. En France, suite aux guerres (guerre de dévolution, guerre de Hollande, guerre des Réunions, guerre de la ligue de Augsbourg et la guerre de Succession d'Espagne) contre les voisins menées par Louis **XIV**, la monarchie fait face à un grave problème de surendettement. De même en Angleterre en raisons de multiples

dépenses engagées pour mener ces guerres, ses finances se trouvent fortement déficitaires. Les Anglais et les Français ont donc de grandes difficultés à se refinancer. Pour faire face à ces problèmes, les deux États ont mis en œuvre deux systèmes ingénieux qui permirent de relever les finances mais pas pour longtemps. En France, l'écossais John Law instaure le système de monnaie papier en remplacement des pièces d'or et d'argent. Son système se base sur l'articulation entre l'État français, une compagnie de commerce et une banque d'État qui disposait du monopole l'émission des billets en circulation. En Angleterre le système établi s'appuyait sur deux entités l'État britannique et la Compagnie des Mers du Sud. Dans les deux pays la dette publique était substituée aux actions des compagnies de commerce. De ce fait la demande devint de plus en plus grande et le prix des actions était en croissance. Lorsque les investisseurs décidèrent de vendre leurs actions, la compagnie s'est retrouvée dans l'incapacité de les acheter au prix en cours, ce qui causa la chute des systèmes de Law et de la CMS.

1.1.2 Les crises financières de 1800 à 1914

Cette période est notamment marquée par la Révolution Industrielle, qui débuta à la fin du **XVIII^e** siècle et les crises qui ont eu lieu en cette période sont liées à cette révolution. Durant cette période il y a eu pas moins de 10 crises [12] (Nous pouvons citer les crises de 1825, 1847, 1857, 1866, 1873, 1882, 1890, 1900, 1903 et 1907). Comme nous l'avons dit plus haut la plupart de ces crises sont étroitement liées à la Révolution Industrielle. Celles de 1837 et de 1892 sont nées suite aux spéculations sur la navigation maritime et la construction du canal du Panama respectivement. Les spéculations portant sur les compagnies minières sont à l'origine des crises de 1825, 1890 et 1895 pour l'or, ainsi que de 1889 et 1907 pour le cuivre. La spéculation sur les voies de chemin de fer pendant la Révolution Industrielle a été à l'origine du plus grand nombre de crises financières à l'instar de celles de 1847, 1857, 1866, 1873, 1882, 1890, 1900 et 1907. Ces crises ont causé la faillite de nombreuses banques et d'importantes compagnies de chemin de fer.

1.1.3 La crise de 1929 et la Grande Dépression

Durant les années 1920 qui précédaient la crise, les États-Unis se trouvent dans un contexte de prospérité économique. Le revenu des ménages a accru et les entreprises faisaient de plus en plus de profit, ce qui favorisa la montée de la spéculation. Les cours boursiers croissaient. En 1927 les choses allaient de plus en plus vite, l'indice de Dow Jones passa de 191 à 300 points entre 1927 et 1928. Mais toute cette utopie prît fin le «jeudi noir», 24 Octobre 1929 date du krach boursier. Le krach ruina un plus grand nombre d'épargnants et spéculateurs en comparaison aux crises du siècle passé. Les conséquences sur l'économie furent vraiment désastreuses. Les entreprises et les ménages qui s'étaient fortement endettés pour prendre part à la spéculation se sont retrouvés entrain de réduire leurs dépenses, ce

qui avait pour conséquence de réduire la demande globale. Les banques étant aussi en difficulté réduisirent leurs offres de crédit ce qui causa la faillite de nombreuses entreprises. La production industrielle diminua de moitié entre 1929 et 1932, augmentant de manière considérable le taux de chômage. La population voyant l'évolution des choses se mit dans une ruée vers les banques provoquant la faillite de celles-ci. À cette époque les pays d'Europe connaissaient encore de nombreuses difficultés liées à la première guerre mondiale de 1914. Le président des États-Unis Herbert Hoover décida en juillet 1931 de récupérer tous les fonds prêtés à l'Allemagne pour les reconstructions qui lui ont été imposées au traité de Versailles, de réduire les exportations en vue de redresser l'économie de son pays. Mais cette décision a eu pour conséquence de plonger l'Allemagne dans une crise sévère. Les ménages se trouvaient dans l'impossibilité de retirer leur argent dans les banques, les entreprises ne parvenaient plus à payer leurs employés donc étaient obligés d'en licencier une partie, ce qui augmenta le niveau de chômage. Les gens avaient désormais recours à la soupe populaire pour se nourrir. C'est sans doute ce climat qui a favorisé l'installation du nazisme. La crise se propagea dans d'autres pays d'Europe et d'Amérique jusqu'à devenir mondiale. Cette dépression prit fin au début de l'année 1939 l'année de début de la deuxième guerre mondiale.

1.1.4 Les crises de 1970 à nos jours

À la fin de la deuxième guerre mondiale, l'économie du monde s'est stabilisée, cela est sans doute dû aux différents accords de paix signés après la guerre. Mais à partir de 1971 les choses vont encore basculer. De multiples crises éclatent un peu partout et bouleversent les économies. Cette période est marquée par des multiples crises comme la crise américaine des Saving and Loans qui provoqua une crise bancaire durant toute la décennie des années 1980 et entraîna en 1984 la faillite de la banque Continental Illinois National Bank and Trust Company. On a également la crise japonaise qui est née suite à la mise en place des politiques de dérégularisation de l'activité du système financier et l'offre de crédit abondante due à la politique monétaire expansionniste de la banque centrale du Japon (voir [12]). Il y'a aussi le krach de 1987 qui se produit le 19 octobre, la chute de l'indice de Dow Jones était beaucoup plus importante que celle du jeudi noir. Néanmoins les banques centrales ont eu recours à une politique monétaire expansionniste, ce qui a permis que la crise boursière ne dégénère en crise bancaire. Nous pouvons également citer la crise des subprimes de 2007 qui débuta aux États-Unis. En effet, les subprimes désignent de prêts immobiliers accordés aux emprunteurs dont les revenus ne permettent pas de rembourser leur prêts en opposition aux primes. Après l'explosion de la bulle d'internet en 2000, la banque centrale américaine, la FED (Federal Reserve) décide de baisser les taux d'intérêts pour relancer l'économie ce qui augmente la liquidité des banques et de ce fait l'offre de crédit. Cette décision favorable permet aux américains d'avoir des prêts immobiliers à de taux d'intérêts bas. Durant la première moitié des années 2000, le prix de l'immobilier croissait rapidement et les revenus

des américains ne suivaient pas le même rythme. Les accords de prêts étaient transformés en actifs financiers (titrisation) et vendus aux banques d'investissement ; la croissance des prix de l'immobilier faisait monter la spéculation. Ainsi les banques accordent de plus en plus de prêts subprimes et ne s'inquiètent pas de la solvabilité des emprunteurs puisqu'ils pouvaient saisir les maisons en cas de non paiement et placer les accords de prêts sur les marchés financiers. La bulle spéculative éclata en 2007 lorsque les revenus des américains devenaient trop faibles pour accéder aux prêts et plongea le monde dans une crise sévère car les actifs immobiliers ont brusquement perdu leurs valeurs. Cette crise causa la faillite de la grande banque Lehmann Brothers le 15 septembre 2008.

1.2 Revue de la littérature

De nombreux chercheurs se sont intéressés aux crises bancaires et à leur impact sur le développement économique et ont fait des travaux dans le but de comprendre ces crises. Nous allons présenter quelques uns.

1.2.1 Le modèle SEI de Tianshu Jiang *et al.*[5]

Ce modèle s'inspire du modèle épidémiologique *SEI* et considère la crise comme une maladie se propageant dans la population qui ici, représente le système bancaire. On compartimente le système bancaire en trois parties dont la somme donne N :

- les banques en fonctionnement normal S
- les banques en possibilité de crise (exposées) E
- les banques en crise (infectées) I

Ce modèle est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} S' &= bN - dS - K\frac{SI}{N} + \gamma I, \\ E' &= K\frac{SI}{N} - dE - \epsilon\frac{EI}{N}, \\ I' &= \epsilon\frac{EI}{N} - (d + \gamma + \alpha)I, \end{cases} \quad (1.1)$$

où b représente la proportion de banques naissantes, d est la proportion de banques en faillite, K est le ratio de contact entre S et I tandis que ϵ est le ratio de contact entre E et I , γ est la proportion de banques en crise devenant des banques en fonctionnement normal et α est la proportion de banques qui sortent du système bancaire à cause de la crise.

Les auteurs de [5] étudient la stabilité du point d'équilibre du système en présence ou non d'impulsions et trouvent les paramètres qui peuvent être modifiés par les politiques économiques en vue d'améliorer la situation du système bancaire.

1.2.2 Le modèle de Bucci *et al.* [3]

Ici, le système bancaire est compartimenté en deux parties : les banques spéculatives S_t et les banques non spéculatives N_t et l'ensemble donnent le nombre de banques fonctionnant dans le système bancaire à l'instant t soit $B_t = N_t + S_t$. Ensuite, on pose $s_t = \frac{S_t}{B_t}$ et $n_t = \frac{N_t}{B_t}$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{n}_t &= b(1 - n_t) + \eta s_t - (\theta - d)n_t s_t, \\ \dot{s}_t &= \theta n_t s_t - (\eta + b)s_t - ds_t(1 - s_t), \end{cases} \quad (1.2)$$

où b est la fraction de banques naissantes dans le système bancaire, η représente le taux de décroissance de l'exposition au risque, d est la probabilité de faillite bancaire, θ est le nombre moyen de contact entre les banques spéculatives et les banques non spéculatives.

Par la suite ces auteurs ont modélisé le capital par habitant à travers l'équation

$$\dot{k}_t = van_t^\beta k_t^\alpha - (\delta + n)k_t$$

où n est le taux auquel croît la main d'œuvre, δ est le taux de dépréciation du capital, α est l'élasticité du capital par rapport à la production (voir fonction de production de Cobb-Douglas [4]), β est l'efficacité de l'activité d'intermédiation bancaire à affecter la production, a est un paramètre scalaire et v est le taux auquel les agents partagent leur revenus (en investissant). En combinant cette équation au système (1.2), on a :

$$\begin{cases} \dot{n}_t &= b(1 - n_t) + \eta s_t - (\theta - d)n_t s_t, \\ \dot{s}_t &= \theta n_t s_t - (\eta + b)s_t - ds_t(1 - s_t), \\ \dot{k}_t &= van_t^\beta k_t^\alpha - (\delta + n)k_t. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce modèle décrit la dynamique de la contagion financière au sein du système bancaire et mesure son impact sur la croissance économique. Les auteurs montrent au passage l'existence de points d'équilibre ainsi que la stabilité de ceux-ci.

1.2.3 Le modèle de Tadmon-Njike [15]

Ce modèle s'inspire en grande partie du modèle précédent et représente d'une certaine façon le modèle stochastique de l'équation (1.3). Le système correspondant est :

$$\begin{cases} dH(t) &= \left(bN(t) - \theta \frac{H(t)D(t)}{N(t)} + \xi D(t) \right) dt - \sigma \frac{H(t)D(t)}{N(t)} dW_t, \\ dD(t) &= \left(\theta \frac{H(t)D(t)}{N(t)} - (\xi + g)D(t) \right) dt + \sigma \frac{H(t)D(t)}{N(t)} dW_t, \\ dk(t) &= \left(\lambda_0 \left(\frac{H(t)}{N(t)} \right)^\tau k^\alpha(t) - (\delta_0 + p)k(t), \right) dt \end{cases}$$

où $\lambda_0 = a$, b , $\delta_0 = \delta$, $\tau = \beta$, α , $p = n$ ont été définis dans le modèle précédent, θ précédemment défini devient $\theta + \sigma dW_t$, où $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ est le mouvement Brownien (dW_t est vue comme

le bruit blanc) et σ représente l'intensité du bruit, ξ est le taux de banques en crise qui deviennent saines, a est le taux de banques qui fusionnent ou ferment et g est la probabilité de faillite d'une banque. Comme dans les parties précédentes, les points d'équilibre sont déterminés et leur stabilité démontrée.

PARTIE II : Les équations différentielles stochastiques

La plupart des phénomènes du monde réel qui nous entoure conduit souvent à des équations différentielles. Il arrive des fois qu'un (ou plusieurs) paramètre(s) de ces équations subisse(nt) l'effet d'un aléa (bruit blanc) plus ou moins important. C'est quand des équations différentielles contiennent de telles paramètres qu'elles sont appelées **équations différentielles stochastiques**. Ainsi, les équations différentielles stochastiques sont des modèles des systèmes faisant intervenir deux types de forces : une force déterministe et une force aléatoire. Dans cette partie, il sera question pour nous de présenter la théorie des équations différentielles stochastiques. Pour ce faire nous allons donner quelques définitions d'une part et les notions de solutions fortes et faibles d'autre part.

1.3 Rappels de probabilités et processus stochastiques

1.3.1 Probabilités

Définition 1.3.1. Notons Ω l'ensemble de toutes les possibilités (un élément quelconque de Ω sera souvent noté ω et on l'appellera aléa). On dira aussi que Ω est l'univers du possible. Un évènement est une partie de Ω .

Notons que tous les éléments de Ω ne sont pas forcément réalisables (observables). On note par \mathcal{F} la famille de toutes parties de Ω qui contiennent les éléments qui sont réalisables. La famille \mathcal{F} est une σ -algèbre si elle a les propriétés suivantes :

- i. $\emptyset \in \mathcal{F}$, où \emptyset désigne l'ensemble vide.
- ii. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, où $A^c = \Omega \setminus A$
- iii. $\{A_i\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Remarque 1.3.1.1. Soit \mathcal{F} une σ -algèbre de Ω , la paire (Ω, \mathcal{F}) est appelée espace mesurable et les éléments de \mathcal{F} sont appelés ensembles \mathcal{F} -mesurables au lieu d'évènement.

Définition 1.3.2. Soit C une famille de sous ensembles de Ω . On désigne par $\sigma(C)$ la σ -algèbre engendrée par C . C'est la plus petite (au sens de l'inclusion) σ -algèbre contenant C ou encore c'est l'intersection de tous les σ -algèbres contenant C .

Exemple 1.3.1. Si $\Omega = \mathbb{R}^d$ et C la famille de tous les ouverts de \mathbb{R}^d alors, $\sigma(C) = \mathcal{B}^d$ est appelé la σ -algèbre de Borel et les éléments de $\sigma(C)$ sont appelés ensembles de Borel.

Définition 1.3.3. Une fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite \mathcal{F} -mesurable si

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

La fonction X est aussi appelée variable aléatoire réelle \mathcal{F} -mesurable.

Une fonction vectorielle X de Ω vers \mathbb{R}^d , $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_d(\omega))^T$ est dite \mathcal{F} -mesurable si tous ses éléments X_i sont \mathcal{F} -mesurables.

Définition 1.3.4. Soit $A \subset \Omega$. La fonction indicatrice de A est la fonction \mathbb{I}_A définie par :

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Remarque 1.3.1.2. La fonction \mathbb{I}_A est \mathcal{F} -mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

Définition 1.3.5. Soient (Ω, \mathcal{F}) et (Ω', \mathcal{F}') deux espaces mesurables. Une fonction $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ est dite $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -mesurable si $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\} \in \mathcal{F}$ pour tout $A' \in \mathcal{F}'$.

Définition 1.3.6. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction. La σ -algèbre $\sigma(X)$ engendrée par X est la plus petite σ -algèbre contenant les ensembles $\{\omega : X(\omega) \in U\}$, $U \subset \mathbb{R}^d$, U ouvert. On écrit :

$$\sigma(X) = \sigma(\{\omega : X(\omega) \in U\} : U \subset \mathbb{R}^d, U \text{ ouvert}).$$

On a évidemment X est $\sigma(X)$ -mesurable, et $\sigma(X)$ est la plus petite σ -algèbre avec cette propriété.

Lemme 1.3.1. (De Doob-Dynkin) Si $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont deux fonctions, alors Y est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement s'il existe une fonction mesurable de Borel $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $Y = g(X)$.

Définition 1.3.7. Une mesure de probabilité \mathbb{P} sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour toute famille d'ensembles disjoints $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ (i.e $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Proposition 1.3.1. Soit une liste au plus dénombrable d'évènements A_1, A_2, \dots telle que $\forall i, j \geq 1, A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$ et $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Soit B un évènement de Ω , alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

.

Proposition 1.3.2. *Si A et B sont deux évènements tels que $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

Définition 1.3.8. *(Variable aléatoire) Une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans un ensemble E est une application \mathcal{F} -mesurable de Ω dans E .*

On notera v.a.r. pour les v.a. à valeurs réelles.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si X est une v.a.r. et intégrable pour la mesure de probabilité \mathbb{P} , alors le nombre

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

est appelé espérance mathématique de X . La variance de X est donnée par : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. Pour tout $p > 0$, on définit le moment d'ordre p de X (s'il existe) par : $\mathbb{E}[|X|^p]$.

Propriété 1.3.1.1. *Soit $L^p = L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ la famille de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d , X telle que $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$, ($p \in]0, \infty[$). On a :*

- i. $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$ pour tout $X \in L^1$,
- ii. $|\mathbb{E}[X^T Y]| \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}$, pour $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $X \in L^p$ et $Y \in L^q$,
- iii. $(\mathbb{E}[|X + Y|^p])^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}[|Y|^p])^{\frac{1}{p}}$ pour $p > 1$, $X, Y \in L^p$,
- vi. $\mathbb{P}(\{\omega : |X(\omega)| \geq c\}) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{c^p}$, $c \in \mathbb{R}_+^*$, $X \in L^p$,
- v. $(\mathbb{E}[|X|^r])^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$ pour tout $0 < r < p < \infty$, $X \in L^p$.

Définition 1.3.9. *(Espace probabilisé complet) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On pose*

$$\bar{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega : \exists B, C \in \mathcal{F} \text{ tel que } B \subset A \subset C, \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)\}.$$

Alors $\bar{\mathcal{F}}$ est appelé la complétude de \mathcal{F} . Si $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit **complet**. Sinon on peut prolonger la probabilité \mathbb{P} à $\bar{\mathcal{F}}$ en définissant $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$ pour $A \in \bar{\mathcal{F}}$, où $B, C \in \mathcal{F}$ avec la propriété $B \subset A \subset C$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$. Ainsi, $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet et appelé complétude de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Lois de probabilités usuelles

Lois discrètes

1. La **loi uniforme** : soit E un ensemble fini de cardinal n . X est une variable uniforme sur E si $\forall x \in E$, on a : $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$.
2. **Loi de Bernouilli** de paramètre $p \in [0, 1]$, noté $\mathcal{B}(p)$: X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
3. **Loi binomiale** de paramètre n, p ($n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$) notée $\mathcal{B}(n, p)$: X à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ telle que $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

4. **Loi géométrique** de paramètre $p \in [0, 1]$ notée $\mathcal{G}(p) : X$ à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

5. **Loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ noté $\mathcal{P}(\lambda) : X$ à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Lois continues

1. **Loi uniforme** sur $[a, b]$ ($a < b$) notée $\mathcal{U}([a, b])$ de densité $x \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$.
2. **Loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ notée $\mathcal{E}(\lambda)$ de densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
3. **Loi gaussienne** (ou **normale** ou **de Gauss**) de moyenne $m \in \mathbb{R}$, de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et de densité la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Théorèmes limites

Définition 1.3.10. Soient X et X_n des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d .

- S'il existe un ensemble \mathbb{P} -négligeable ($A \subset \Omega$ est \mathbb{P} -négligeable si $\exists B \in \mathcal{F}/A \subset B$ et $\mathbb{P}(B) = 0$) $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $\omega \notin \Omega_0$ la suite $\{X_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$ au sens usuel de \mathbb{R}^d , alors $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge **presque sûrement** vers X ou converge avec la probabilité 1. On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ p.s.
- Si pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge **en probabilité** ou **converge stochastiquement** vers X .
- Si $\forall n$ $X_n, X \in L^p$ et $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0$, alors $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers X dans L^p** .
- Si pour toute fonction réelle continue et bornée $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)]$ alors $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X **au sens des distributions**.

Théorème 1.3.1. [11] (Convergence monotone) Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n].$$

Théorème 1.3.2. [11] (Convergence dominée) Soit $p \geq 1$, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et $Y \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$. Supposons que $|X_n| \leq Y$ p.s. et $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X en probabilité. Alors $X \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X dans L^p et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$.

Définition 1.3.11. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$A, B \in \mathcal{F}$. A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Deux σ -algèbres \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont dites indépendantes si pour tout $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$ on a $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. On définit la limite supérieure de cette suite par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n$$

Lemme 1.3.2. [11] (Borel-Cantelli)

- Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n) = 0$. Ceci veut dire qu'il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et une variable aléatoire entière k_0 telle que pour tout $\omega \in \Omega_0$ on a $\omega \notin A_k$, lorsque $k \geq k_0$.
- Si une suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ est indépendante et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$, alors $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n) = 1$. Ceci veut dire qu'il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ il existe une sous-suite $\{A_{n_i}\}$ tel que ω appartient à chaque A_{n_i} .

Définition 1.3.12. Soient $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est la quantité :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que X est \mathcal{F} -mesurable, soit \mathcal{G} une sous σ -algèbre de \mathcal{F} , ainsi (Ω, \mathcal{G}) est un espace mesurable. En général X n'est pas \mathcal{G} -mesurable. Nous cherchons maintenant une variable aléatoire Y qui soit \mathcal{G} -mesurable telle que :

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_G X] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_G Y] \quad \text{i.e.} \quad \int_G Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_G X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Par le théorème de Radon-Nikodym il existe un tel Y et il est unique p.s. Il est appelé l'espérance conditionnelle de X sachant la σ -algèbre \mathcal{G} et on écrit :

$$Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

Si \mathcal{G} est la σ -algèbre engendrée par la variable aléatoire Y , alors on écrit $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|Y]$.

Exemple 1.3.2. Comme exemple considérons X une v.a.r. et une collection d'ensembles $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ avec $\bigcup_k A_k = \Omega$, $A_k \cap A_i = \emptyset$ si $k \neq i$. Soit $\mathcal{G} = \sigma(\{A_k\})$ i.e \mathcal{G} est engendré par $\{A_k\}$. Alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_k \frac{\mathbb{I}_{A_k} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_k} X]}{\mathbb{P}(A_k)}.$$

En d'autres termes si $\omega \in A_k$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_k} X]}{\mathbb{P}(A_k)}.$

Propriété 1.3.1.2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $X, Y \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soient aussi $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1$ et \mathcal{G}_2 trois sous σ -algèbres de \mathcal{F} , $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$,
2. $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$,
3. X est \mathcal{G} -mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$,
4. $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$,
5. $X = c = \text{cste} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = c$,
6. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$,
7. X est \mathcal{G} -mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. En particulier $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$,
8. Si $\sigma(X)$ et \mathcal{G} sont indépendants alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$; en particulier, X et Y indépendants $\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$,
9. $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$.

1.3.2 Processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une filtration est une famille $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ croissante de sous σ -algèbres de \mathcal{F} (i.e $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ pour tout $0 \leq t < s < \infty$). La filtration est dite continue à droite si $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \forall t \geq 0$. Quand l'espace des probabilités est complet, la filtration est décrite comme «satisfaisant les conditions usuelles» si elle est continue à droite et \mathcal{F}_0 contient tous les ensembles \mathbb{P} -négligeables.

Dans la suite, on travaillera dans les espaces probabilisés complets muni d'une filtration qui satisfait les conditions usuelles. On définit également $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$; c'est la σ -algèbre engendré par $\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

Définition 1.3.13. Une famille $\{X_t\}_{t \in I}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d est appelée un processus stochastique d'ensemble d'indices I . Pour chaque $t \in I$ on a une variable aléatoire $\Omega \ni \omega \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ qui est un chemin possible du processus.

Définition 1.3.14. Une variable aléatoire $\tau : \Omega \mapsto [0, \infty]$ est appelée $\{\mathcal{F}_t\}$ -temps d'arrêt (ou tout simplement temps d'arrêt) si $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

Soit τ un temps d'arrêt, on définit :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\},$$

qui est une sous σ -algèbre de \mathcal{F} .

Soient τ et ρ deux temps d'arrêts tels que $\tau \leq \rho$ p.s. Alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\rho$.

Définition 1.3.15. Un processus stochastique $\{M_t\}_{t \geq 0}$ intégrable, $\{\mathcal{F}_t\}$ -adapté à valeurs dans \mathbb{R}^d est appelé martingale si $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ p.s. pour tout $0 \leq s < t < \infty$.

Théorème 1.3.3. [11] Soit $\{M_t\}_{t \geq 0}$ une martingale à valeurs dans \mathbb{R}^d et soient τ et ρ deux temps d'arrêts. Alors

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\rho] = M_{\tau \wedge \rho}.$$

En particulier si τ est un temps d'arrêt, alors $\mathbb{E}[M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s] = M_{\tau \wedge s}$ p.s. $\forall t \geq s$.

Le processus $M^\tau = \{M_{\tau \wedge t}\}$ est toujours une martingale par rapport à la même filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Théorème 1.3.4. [11] (Inégalités de Doob) Soit $\{M_t\}_{t \geq 0}$ une martingale de \mathbb{R}^d et soit $[a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R}_+

- i. Si $p \geq 1$ et $M_t \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ alors $\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \sup_{a \leq t \leq b} |M_t(\omega)| \geq c \right\} \right) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_b|^p]}{c^p},$
- ii. Si $p > 1$ et $M_t \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ alors $\mathbb{E}[\sup_{a \leq t \leq b} |M_t|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_b|^p].$

Mouvement Brownien

Le nom de **mouvement Brownien** est le nom donné aux mouvements irréguliers des grains de pollen en suspension dans l'eau observé par le botaniste écossais Robert Brown. Le mouvement avait été plus tard expliqué par les collisions aléatoires avec les molécules d'eau. Pour décrire mathématiquement ce mouvement, il est naturel d'utiliser le concept d'un processus stochastique $B_t(\omega)$, interprété comme la position du grain de pollen ω à l'instant t .

Définition 1.3.16. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé munie d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Un mouvement Brownien (standard) unidimensionnel est un processus stochastique réel continue et $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté $\{B_t\}_{t \geq 0}$ ayant les propriétés suivantes :

- i. $B_0 = 0$ p.s.
- ii. Pour $0 \leq s < t < \infty$, la variation $B_t - B_s$ suit une loi normale de moyenne zéro et de variance $t - s$,
- iii. Pour $0 \leq s < t < \infty$, la variation $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s .

Si $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien et $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$, alors les variations $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq k$ sont indépendants et on dit que le mouvement Brownien est à variations indépendantes. De plus, la loi de $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ dépend uniquement de la différence $t_i - t_{i-1}$ et on dit que le mouvement Brownien est à variation stationnaires.

Posons $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ pour tout $t \geq 0$. La filtration $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle générée par $\{B_t\}_{t \geq 0}$. Donc $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t \geq 0}$. Cependant si $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ est une «grande» filtration au sens où $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$ et $B_t - B_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s lorsque $0 \leq s < t < \infty$, alors $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Les mouvements Browniens possèdent plusieurs propriétés parmi lesquelles nous avons : soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien

- $\{-B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.
- Soit $c > 0$, on pose $X_t = \frac{B_{ct}}{\sqrt{c}}$, pour tout $t \geq 0$. Alors $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_{ct}\}_{t \geq 0}$.
- $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale continue de carré intégrable et sa variation quadratique est $\langle B, B \rangle_t = t$ pour tout $t \geq 0$
- La loi forte des grands nombres permet d'écrire $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0$.
- Pour presque tout $\omega \in \Omega$, le chemin possible d'un mouvement Brownien $B_*(\omega)$ n'est nulle part différentiable.
- Pour presque tout $\omega \in \Omega$, le chemin possible d'un mouvement Brownien $B_*(\omega)$ est localement Hölder-continue d'exposant δ si $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Cependant pour presque tout $\omega \in \Omega$, $B_*(\omega)$ n'est nulle part Hölder-continue pour un exposant $\delta \geq \frac{1}{2}$.

Théorème 1.3.5. *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a :*

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} &= 1, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log(t)}} &= 1, \\ \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} &= -1, \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log(t)}} &= -1. \end{aligned}$$

Définition 1.3.17. *Un processus stochastique $\{B_t = \{B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d\}\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien si chaque $\{B_t^i\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien unidimensionnel et $\{B_t^1\}, \dots, \{B_t^d\}$ sont indépendants.*

Soit $\{B_t = \{B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d\}\}_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien. on a $\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij}t$ pour $1 \leq i, j \leq d$, où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

1.4 Les équations différentielles stochastiques

Dans cette partie nous présenterons les équations différentielles stochastiques qui sont des outils principaux de l'analyse du modèle que nous proposons. Nous commencerons par définir l'intégrale stochastique, ensuite s'en suivra la formule d'Itô. Pour finir nous donnerons quelques résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques.

1.4.1 Intégrales et formule d'Itô

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé munie d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions usuelles. Soit $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur l'espace probabilisé et adapté à la filtration.

Définition 1.4.1. Soit $0 \leq a < b < \infty$. On note $\mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de tous les processus stochastiques réels $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptés $f = \{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$ tel que :

$$\|f\|_{a,b}^2 = \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right] < \infty.$$

L'espace $\mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{a,b}$ est un espace de Banach.

Définition 1.4.2. [11] Un processus stochastique réel $g = \{g(t)\}_{a \leq t \leq b}$ est appelé processus simple (ou élémentaire) s'il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ de $[a, b]$ et des variables aléatoires bornées $\varepsilon_i, 0 \leq i \leq k-1$ tels que ε_i soit $\{\mathcal{F}_t\}$ -mesurable et

$$g(t) = \varepsilon_0 \mathbb{I}_{[t_0, t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i \mathbb{I}_{[t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Notons par $\mathcal{M}_0([a, b], \mathbb{R})$ la famille de tels processus stochastiques. On a clairement $\mathcal{M}_0([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$.

Définition 1.4.3. [11] Pour un processus stochastique simple g ayant la forme précédente i.e appartenant à $\mathcal{M}_0([a, b], \mathbb{R})$, on pose $\int_a^b g(t) dB_t = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$.

Il s'agit de l'**intégrale stochastique** de g par rapport au mouvement Brownien $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ ou encore l'**intégrale d'Itô** de g .

L'intégrale stochastique $\int_a^b g(t) dB_t$ est \mathcal{F}_b -mesurable.

Lemme 1.4.1. [11] Si $g \in \mathcal{M}_0([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b g(t) dB_t \right] = 0$$

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_a^b g(t) dB_t \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b |g(t)|^2 dt \right]$$

Preuve : Puisque ε_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable et $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ est indépendante de \mathcal{F}_{t_i} , alors

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b g(t) dB_t \right] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E} [\varepsilon_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E} [\varepsilon_i] \underbrace{\mathbb{E} [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]}_0 = 0$$

. De plus, notons que $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ est indépendant de $\varepsilon_i \varepsilon_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ pour $i < j$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left| \int_a^b g(t) dB_t \right|^2 \right] &= \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1}} \mathbb{E} [\varepsilon_i \varepsilon_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ k-1}}^{k-1} \mathbb{E} [\varepsilon_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ k-1}}^{k-1} \mathbb{E} [\varepsilon_i^2] \mathbb{E} [(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ k-1}}^{k-1} \mathbb{E} [\varepsilon_i^2 (t_{i+1} - t_i)] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_a^b |g(t)|^2 dt \right].
\end{aligned}$$

Lemme 1.4.2. [11] Soient $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_0([a, b], \mathbb{R})$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ alors $c_1 g_1 + c_2 g_2 \in \mathcal{M}_0([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\int_a^b (c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)) dB_t = c_1 \int_a^b g_1(t) dB_t + c_2 \int_a^b g_2(t) dB_t$$

.

Lemme 1.4.3. [11] Pour tout $f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$, il existe une suite $\{g_n\}_n$ de processus simples tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt \right] = 0$$

.

Définition 1.4.4. [11] (Intégrale d'Itô) Soit $f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$, l'intégrale d'Itô de f par rapport à $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ est définie par $\int_a^b f(t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) dB_t$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, où $\{g_n\}_n$ est la suite de processus simples tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt \right] = 0.$$

La définition précédente est indépendante de la suite de processus simples choisie.

Théorème 1.4.1. [11] Soient $f, g \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\int_a^b f(t) dB_t$ est \mathcal{F}_b -mesurable,
2. $\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dB_t \right] = 0$,
3. $\mathbb{E} \left[\left| \int_a^b f(t) dB_t \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right]$,
4. $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dB_t = \alpha \int_a^b f(t) dB_t + \beta \int_a^b g(t) dB_t$.

Théorème 1.4.2. [11] Soit $f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dB_t | \mathcal{F}_a \right] = 0$$

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_a^b f(t) dB_t \right|^2 \middle| \mathcal{F}_a \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \middle| \mathcal{F}_a \right] = \int_a^b \mathbb{E} [|f(t)|^2 | \mathcal{F}_a] dt$$

Lemme 1.4.4. [11] Soit $f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$ et ε une variable aléatoire réelle bornée, alors $\varepsilon f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\int_a^b \varepsilon f(t) dB_t = \varepsilon \int_a^b f(t) dB_t$$

Preuve : Il est clair que $\varepsilon f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$. En effet $\|\varepsilon f\|_{a,b}^2 = \int_a^b |\varepsilon(t) f(t)|^2 dt$
 $= \int_a^b \varepsilon^2(t) |f(t)|^2 dt \leq C \int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty$
 où $C = \max_{a \leq t \leq b} \{\varepsilon^2(t)\}$. Si f est un processus simple alors on a le résultat. Pour $f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$, soit $\{g_n\}_n$ une suite de processus simples telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt \right] = 0$. Si on applique notre relation avec chaque g_n et on passe à la limite pour $n \rightarrow \infty$ on a le résultat.

Preuve du théorème : Par définition de l'espérance conditionnelle, la première relation du théorème est vraie si et seulement si :

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{I}_A \int_a^b f(t) dB_t \right] = 0 \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}_a.$$

$$\text{Mais on a } \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_A \int_a^b f(t) dB_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b \mathbb{I}_A f(t) dB_t \right] = 0.$$

La deuxième relation du théorème se démontre de manière similaire.

Soit $T > 0$ et $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$, pour $0 \leq a < b \leq T$. $\{f(t)\}_{a \leq t \leq b} \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$. Donc $\int_a^b f(t) dB_t$ est bien définie. On a $\int_a^b f(t) dB_t + \int_b^c f(t) dB_t = \int_a^c f(t) dB_t$ si $0 \leq a < b \leq T$.

Définition 1.4.5. [11] Soit $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$, on pose $I(t) = \int_0^t f(s) dB_s$ pour $0 \leq t \leq T$, où $I(0) = \int_0^0 f(s) dB_s = 0$.

$I(t)$ est appelé l'intégrale indéfinie d'Itô de f . $\{I(t)\}$ est $\{\mathcal{F}_t\}$ -adapté.

Théorème 1.4.3. [11] Si $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$ alors l'intégrale indéfinie $\{I(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de carré intégrable relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_t$. En particulier,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) dB_s \right|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \int_0^T |f(s)|^2 ds.$$

Théorème 1.4.4. [11] Soit $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$. Alors, l'intégrale indéfinie $I = \{I(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de carré intégrable est sa variation quadratique est donnée par :

$$\langle I, I \rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

Théorème 1.4.5. [11] Soit $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$ et soient ρ, τ deux temps d'arrêts tels que $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$. Alors

$$\mathbb{E} \left[\int_{\rho}^{\tau} f(s) dB_s \right] = 0,$$

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\rho}^{\tau} f(s) dB_s \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\rho}^{\tau} |f(s)|^2 dB_s \right].$$

Théorème 1.4.6. [11] Soit $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$ et soient ρ et τ deux temps d'arrêts tels que $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$. Alors

$$\mathbb{E} \left[\int_{\rho}^{\tau} f(s) dB_s | \mathcal{F}_{\rho} \right] = 0,$$

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\rho}^{\tau} f(s) dB_s \right|^2 | \mathcal{F}_{\rho} \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\rho}^{\tau} |f(s)|^2 dB_s | \mathcal{F}_{\rho} \right].$$

Lemme 1.4.5. [11] Soit $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$ et soit τ un temps d'arrêt tel que $0 \leq \tau \leq T$. Alors, $\int_0^{\tau} f(s) dB_s = I(\tau)$ où $\{I(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est l'intégrale indéfinie de la fonction f .

Corollaire 1.4.1. [11] Soient $f, g \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$, soient τ et ρ deux temps d'arrêts tels que $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$ alors

$$\mathbb{E} \left[\int_{\rho}^{\tau} f(s) dB_s \int_{\rho}^{\tau} g(s) dB_s | \mathcal{F}_{\rho} \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\rho}^{\tau} f(s) g(s) dB_s | \mathcal{F}_{\rho} \right].$$

.

Formule d'Itô

Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien uni-dimensionnel défini sur l'espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Soit $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ l'espace des processus à valeurs dans \mathbb{R}^d mesurables et $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptés $f = \{f(t)\}_{t \geq 0}$ tel que $\int_0^T |f(s)| ds < +\infty$ pour tout $T > 0$.

Définition 1.4.6. [11] Un processus d'Itô unidimensionnel est un processus continu adapté $x(t)$ sur $t \geq 0$ de la forme

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) dB_s,$$

où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. On dira aussi que $x(t)$ admet une différentielle stochastique $dx(t)$ sur $t \geq 0$ de la forme

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t. \quad (1.4)$$

Soit $\mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, l'espace des fonctions réelles $V = V(x, t)$ définies sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ qui sont 2 fois différentiables en la 1^{ère} variable et une fois différentiable en la seconde.

Si $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, on pose

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right)$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}$$

Pour $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, on a $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$.

Théorème 1.4.7. [11] (Formule d'Itô unidimensionnelle) Soit $x(t)$ un processus d'Itô sur $t \geq 0$ de différentielle

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t,$$

où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Soit $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Alors $V(x(t), t)$ est un processus d'Itô de différentielle

$$dV(x(t), t) = \left[V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t), t)g^2(t) \right] dt + V_x(x(t), t)g(t)dB_t \quad p.s.$$

Définition 1.4.7. [11] Un processus d'Itô d -unidimensionnel est un processus à valeurs dans \mathbb{R}^d continu adapté $x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))^T$ sur $t \geq 0$ de la forme :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dB_s,$$

où $f = (f_1, \dots, f_d)^T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ et $g = (g_{i,j})_{d \times m} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d \times m})$. On a également la forme différentielle

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (1.5)$$

Théorème 1.4.8. [11] (Formule d'Itô multidimensionnel) Soit $x(t)$ un d -dimensionnel processus d'Itô sur $t \geq 0$ avec la forme

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t,$$

où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$. Soit $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Alors $V(x(t), t)$ est aussi un processus d'Itô dont la différentielle s'écrit :

$$dV(x(t), t) = \left[V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}\text{trace} \left(g^T(t)V_{xx}(x(t), t)g(t) \right) \right] dt + V_x(x(t), t)g(t)dB(t) \quad p.s.,$$

$$\text{avec les conventions} \begin{cases} dtdt = 0, \\ dB_i dB_i = dt, \\ dB_i dt = 0, \\ dB_i dB_j = 0 \quad \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Théorème 1.4.9. [11] (Formule d'intégration par parties) Soit $x(t)$, $t \geq 0$ un processus d'Itô unidimensionnel de différentielle stochastique

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t),$$

où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{1 \times m})$. Soit $y(t)$, $t \geq 0$ un processus continu adapté de variation finie. Alors

$$d[x(t)y(t)] = y(t)dx(t) + x(t)dy(t), \quad (1.6)$$

ou encore

$$x(t)y(t) - x(0)y(0) = \int_0^t y(s) [f(s)ds + g(s)dB(s)] + \int_0^t x(s)dy(s).$$

Exemple 1.4.1. Soit $B(t)$ le mouvement Brownien unidimensionnel. Pour calculer l'intégrale stochastique

$$\int_0^t B(s)dB(s),$$

on applique la formule d'Itô à $B^2(t)$ (i.e. soit $V(x, t) = x^2$ et $x(t) = B(t)$), et on obtient

$$d(B^2(t)) = 2B(t)dB(t) + dt$$

Donc

$$B^2(t) = 2 \int_0^t B(s)dB(s) + t$$

ce qui implique que

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2} [B^2(t) - t].$$

Exemple 1.4.2. Soit $B(t)$ le mouvement Brownien unidimensionnel. Pour calculer l'intégrale stochastique

$$\int_0^t e^{-s/2+B(s)}dB(s),$$

on pose $V(x, t) = e^{-t/2+x}$ et $x(t) = B(t)$ et par la formule d'Itô on obtient

$$d[e^{-t/2+B(t)}] = -\frac{1}{2}e^{-t/2+B(t)}dt + e^{-t/2+B(t)}dB(t) + \frac{1}{2}e^{-t/2+B(t)}dt = e^{-t/2+B(t)}dB(t)$$

ce qui permet d'avoir

$$\int_0^t e^{-s/2+B(s)}dB(s) = e^{-t/2+B(t)} - 1.$$

Soit $B(t) = (B_1(t), \dots, B_m(t))^T$, $t \geq 0$ le mouvement Brownien en dimension m défini sur l'espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Théorème 1.4.10. [11] Soit $p \geq 2$. Soit $g \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$ tel que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |g(s)|^p ds \right] < +\infty.$$

Alors

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T g(s) dB(s) \right|^p \right] \leq \left(\frac{p(p-1)}{2} \right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} \mathbb{E} \left[\int_0^T |g(s)|^p ds \right].$$

En particulier, pour $p = 2$ on a l'égalité.

Théorème 1.4.11. [11] Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g(s) dB(s) \right|^p \right] \leq \left(\frac{p^3}{2(p-1)} \right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} \mathbb{E} \left[\int_0^T |g(s)|^p ds \right].$$

Théorème 1.4.12. Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$. on pose pour $t \geq 0$

$$x(t) = \int_0^t g(s) dB(s) \quad \text{et} \quad A(t) = \int_0^t |g(s)|^2 ds.$$

Alors pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives universelles C_p, K_p (dépendant uniquement de p), tels que :

$$C_p \mathbb{E} \left[|A(t)|^{\frac{p}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|^p \right] \leq K_p \mathbb{E} \left[|A(t)|^{\frac{p}{2}} \right],$$

pour tout $t \geq 0$. En particulier on prend

$$\begin{cases} C_p = (p/2)^p, & K_p = (32/p)^{\frac{p}{2}} & \text{si } 0 < p < 2; \\ C_p = 1, & K_p = 4 & \text{si } p = 2; \\ C_p = (2p)^{-\frac{p}{2}}, & K_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{\frac{p}{2}} & \text{si } p > 2. \end{cases}$$

Théorème 1.4.13. [11] Soit $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{1 \times m})$, et soient T, α, β des constantes positives. Alors

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\int_0^t g(s) dB(s) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t |g(s)|^2 ds \right] > \beta \right\} \right) \leq e^{-\alpha\beta}.$$

1.4.2 Définitions et exemples

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet de filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions usuelles. Soit $B(t) = (B_1(t), \dots, B_m(t))^T$, $t \geq 0$ un mouvement Brownien en dimension m défini dans l'espace.

Soit $0 \leq t_0 \leq T < +\infty$. Soit x_0 une variable aléatoire \mathcal{F}_{t_0} -mesurable à valeurs dans \mathbb{R}^d telle que

$\mathbb{E} [|x_0|^2] < +\infty$. Soit $f : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ deux fonctions Borel-mesurables. Considérons l'équation différentielle stochastique vectorielle du type Itô

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \quad \text{sur } t_0 \leq t \leq T \quad (1.7)$$

de valeur initiale $x(t_0) = x_0$. Par définition de la différentielle stochastique, cette équation est équivalente à l'équation intégrale stochastique suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds + \int_{t_0}^t g(x(s), s)dB(s) \quad \text{sur } t_0 \leq t \leq T. \quad (1.8)$$

Définition 1.4.8. [11] Un processus stochastique $\{x(t)\}_{t_0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est appelé solution de l'équation (1.7) s'il a les propriétés suivantes :

- i. $\{x(t)\}$ est continu et \mathcal{F}_t -adapté
- ii. $\{f(x(t), t)\} \in \mathcal{L}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ et $\{g(x(t), t)\} \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$,
- iii. L'équation (1.8) marche pour tout $t \in [t_0, T]$ avec la probabilité 1.

Une solution $\{x(t)\}$ est dite unique si toute autre solution $\{\tilde{x}(t)\}$ est indistinguishable de $\{x(t)\}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(\{x(t) = \tilde{x}(t) \text{ pour tout } t_0 \leq t \leq T\}) = 1.$$

Exemple 1.4.3. Soit $B(t)$, $t \geq 0$ le mouvement Brownien unidimensionnel. On définit le processus stochastique à deux dimensions

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = (\cos(B(t)), \sin(B(t)))^T \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (1.9)$$

Le processus $x(t)$ est appelé mouvement Brownien sur le cercle unité. Nous allons à présent montrer que $x(t)$ satisfait une équation différentielle stochastique linéaire. En appliquant la formule d'Itô, on a :

$$\begin{cases} dx_1(t) &= -\sin(B(t))dB(t) - \frac{1}{2}\cos(B(t))dt = -\frac{1}{2}x_1(t)dt - x_2(t)dB(t), \\ dx_2(t) &= \cos(B(t))dB(t) - \frac{1}{2}\sin(B(t))dt = -\frac{1}{2}x_2(t)dt + x_1(t)dB(t). \end{cases}$$

C'est-à-dire en notation vectorielle,

$$dx(t) = -\frac{1}{2}x(t)dt + Kx(t)dB(t), \quad \text{où } K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4.4. La charge $Q(t)$ au temps t à un point fixe dans un circuit électrique satisfait l'équation différentielle du second ordre

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = F(t), \quad (1.10)$$

où L est l'inductance, R la résistance, C la capacitance et $F(t)$ la source de potentiel. On suppose que la source de potentiel est soumise à un bruit environnemental décrit par $F(t) = G(t) + \alpha\dot{B}(t)$, où $\dot{B}(t)$ est le bruit blanc(i.e. $B(t)$ est un mouvement Brownien) et α est l'intensité du bruit.

Ainsi l'équation (1.10) devient

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = G(t) + \alpha\dot{B}(t) \quad (1.11)$$

Introduisons le processus bidimensionnel $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = (Q(t), \dot{Q}(t))^T$.

Alors l'équation (1.11) peut être exprimé comme une équation d'Itô

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt, \\ dx_2(t) = \frac{1}{L} \left(-\frac{1}{C}x_1(t) - Rx_2(t) + G(t) \right) dt + \frac{\alpha}{L}dB(t). \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$dx(t) = [Ax(t) + H(t)]dt + KdB(t),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/CL & -R/L \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ G(t)/L \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha/L \end{pmatrix}.$$

1.4.3 Existence et unicité des solutions

Théorème 1.4.14. [11] Supposons qu'il existe deux constantes positives \bar{K} et K telles que

i. (Condition de Lipschitz) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [t_0, T]$

$$|f(x, t) - f(y, t)|^2 \vee |g(x, t) - g(y, t)|^2 \leq \bar{K} |x - y|^2; \quad (1.12)$$

ii. (Condition de croissance linéaire) Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$

$$|f(x, t)|^2 \vee |g(x, t)|^2 \leq K (1 + |x|^2). \quad (1.13)$$

Alors, il existe une unique solution $x(t)$ de l'équation (1.7), et cette solution reste dans $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Lemme 1.4.6. [11] Supposons que la condition de croissance linéaire (1.13) soit vérifiée. Si $x(t)$ est une solution de l'équation (1.7), alors

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)|^2 \right] \leq (1 + 3\mathbb{E} [|x_0|^2]) e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}. \quad (1.14)$$

En particulier, $x(t)$ reste dans $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Lemme 1.4.7. [8] (Inégalité de Gronwall) Soient $m, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$. Supposons que pour $c \geq 0$, on a

$$m(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(s)m(s)ds \quad \text{pour tout } 0 \leq t_0 \leq t.$$

Alors,

$$m(t) \leq c \exp \left(\int_{t_0}^t v(s)ds \right).$$

Preuve du lemme 1.4.6. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le temps d'arrêt

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in [t_0, T] : |x(t)| \geq n\}.$$

τ_n est croissante vers T p.s. Posons $x_n(t) = x(t \wedge \tau_n)$ pour $t \in [t_0, T]$. Alors $x_n(t)$ satisfait l'équation

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_n(s), s) \mathbb{I}_{[[t_0, \tau_n]]}(s) ds + \int_{t_0}^t g(x_n(s), s) \mathbb{I}_{[[t_0, \tau_n]]}(s) dB(s).$$

En utilisant l'inégalité $|a + b + c|^2 \leq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$, l'inégalité de Hölder et la condition (1.13), on montre que

$$|x_n(t)|^2 \leq 3|x_0|^2 + 3K(t - t_0) \int_{t_0}^t (1 + |x_n(s)|^2) ds + 3 \left| \int_{t_0}^t g(x_n(s), s) \mathbb{I}_{[[t_0, \tau_n]]}(s) dB(s) \right|^2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_n(s)|^2 \right] &\leq 3\mathbb{E} [|x_0|^2] + 3K(T - t_0) \int_{t_0}^t (1 + \mathbb{E} [|x_n(s)|^2]) ds \\ &\quad + 12\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t |g(x_n(s), s)|^2 \mathbb{I}_{[[t_0, \tau_n]]}(s) ds \right] \\ &\leq 3\mathbb{E} [|x_0|^2] + 3K(T - t_0 + 4) \int_{t_0}^t (1 + \mathbb{E} [|x_n(s)|^2]) ds \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$1 + \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_n(s)|^2 \right] \leq 1 + 3\mathbb{E} [|x_0|^2] + 3K(T - t_0 + 4) \int_{t_0}^t \left[1 + \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |x_n(r)|^2 \right] \right] ds.$$

L'inégalité de Gronwall permet ensuite d'écrire

$$1 + \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_n(t)|^2 \right] \leq (1 + 3\mathbb{E} [|x_0|^2]) e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}.$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq t \leq \tau_n} |x(t)|^2 \right] \leq (1 + 3\mathbb{E} [|x_0|^2]) e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}.$$

Finalement, on a l'inégalité souhaitée en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$.

Preuve du théorème 1.4.14. Unicité. Soient $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ deux solutions de l'équation (1.7). Par le lemme 1.4.6, ils appartiennent à $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$. On a

$$x(t) - \tilde{x}(t) = \int_{t_0}^t [f(x(s), s) - f(\tilde{x}(s), s)] ds + \int_{t_0}^t [g(x(s), s) - g(\tilde{x}(s), s)] dB(s).$$

$$\begin{aligned} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 &\leq 2 \left| \int_{t_0}^t [f(x(s), s) - f(\tilde{x}(s), s)] ds \right|^2 + 2 \left| \int_{t_0}^t [g(x(s), s) - g(\tilde{x}(s), s)] dB(s) \right|^2 \\ &\leq 2(t - t_0) \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(\tilde{x}(s), s)|^2 ds \\ &\quad + 2 \left| \int_{t_0}^t [g(x(s), s) - g(\tilde{x}(s), s)] dB(s) \right|^2 \\ &\quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq 2(t - t_0) \bar{K} \int_{t_0}^t |x(s) - \tilde{x}(s)|^2 ds + 2 \left| \int_{t_0}^t [g(x(s), s) - g(\tilde{x}(s), s)] dB(s) \right|^2. \end{aligned}$$

D'après la condition (1.12)

On a donc

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s) - \tilde{x}(s)|^2 &\leq 2(t - t_0) \bar{K} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \int_{t_0}^t |x(s) - \tilde{x}(s)|^2 ds \\ &+ 2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left| \int_{t_0}^t [g(x(s), s) - g(\tilde{x}(s), s)] dB(s) \right|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s) - \tilde{x}(s)|^2 \right] &\leq 2(t - t_0) \bar{K} \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} \int_{t_0}^t |x(s) - \tilde{x}(s)|^2 ds \right] \\ &+ 2 \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} \left| \int_{t_0}^t [g(x(s), s) - g(\tilde{x}(s), s)] dB(s) \right|^2 \right] \\ &\leq 2(t - t_0) \bar{K} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t \sup_{t_0 \leq r \leq s} |x(r) - \tilde{x}(r)|^2 ds \right] \\ &+ 8 \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t |g(x(s), s) - g(\tilde{x}(s), s)|^2 ds \right] \\ &\quad \text{d'après le théorème 1.4.12} \\ &\leq 2(t - t_0) \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t \sup_{t_0 \leq r \leq s} |x(r) - \tilde{x}(r)|^2 ds \right] \\ &+ 8 \bar{K} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t |x(r) - \tilde{x}(r)|^2 ds \right] \\ &\leq 2(t - t_0) \bar{K} \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |x(r) - \tilde{x}(r)|^2 \right] ds \\ &+ 8 \bar{K} \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |x(r) - \tilde{x}(r)|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s) - \tilde{x}(s)|^2 \right] \leq 2(T + 4) \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq r \leq s} |x(r) - \tilde{x}(r)|^2 \right] ds,$$

car $t - t_0 \leq T$.

D'après le lemme 1.4.7 on a

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s) - \tilde{x}(s)|^2 \right] = 0.$$

Ainsi, $x(t) = \tilde{x}(t)$ pour tout $t_0 \leq t \leq T$ presque sûrement. Ce qui achève la preuve de l'unicité.

Existence. Posons $x_0(t) = x_0$ et définissons inductivement $x_n(t)$ par :

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_{n-1}(s), s) ds + \int_{t_0}^t g(x_{n-1}(s), s) dB(s) \quad \text{pour } t \in [t_0, T]. \quad (1.15)$$

On a $x_0(\cdot) \in \mathcal{M}([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ et pour tout $n \geq 1$ on a $x_n(\cdot) \in \mathcal{M}([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$. En effet de (1.15) on a :

$$\mathbb{E} [|x_n(t)|^2] \leq C_0 + 3K(T + 1) \int_{t_0}^t \mathbb{E} [|x_{n-1}(s)|^2] ds, \quad (1.16)$$

où $C_0 = 3\mathbb{E}[|x_0|^2] + 3KT(T+1)$. Il suit de (1.16) que pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq k} \mathbb{E}[|x_n(t)|^2] &\leq C_0 + 3K(T+1) \int_{t_0}^t \max_{1 \leq n \leq k} \mathbb{E}[|x_{n-1}(s)|^2] ds \\ &\leq C_0 + 3K(T+1) \int_{t_0}^t \left(\mathbb{E}[|x_0|^2] + \max_{1 \leq n \leq k} \mathbb{E}[|x_{n-1}(s)|^2] \right) ds \\ &\leq C_1 + 3K(T+1) \int_{t_0}^t \max_{1 \leq n \leq k} \mathbb{E}[|x_n(s)|^2] ds, \end{aligned}$$

où $C_1 = C_0 + 3KT(T+1)\mathbb{E}[|x_0(s)|^2]$. Le lemme 1.4.7 implique que

$$\max_{1 \leq n \leq k} \mathbb{E}[|x_n(s)|^2] \leq C_1 e^{3KT(T+1)}.$$

Puisque k est arbitraire, on doit avoir

$$\mathbb{E}[|x_n(s)|^2] \leq C_1 e^{3KT(T+1)} \quad \text{pour tout } t_0 \leq t \leq T, n \geq 1. \quad (1.17)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)|^2 &= |x_1(t) - x_0|^2 \\ &\leq 2 \left| \int_{t_0}^t f(x_0, s) ds \right|^2 + 2 \left| \int_{t_0}^t g(x_0, s) dB(s) \right|^2. \end{aligned}$$

En passant l'espérance et en utilisant la condition de croissance (1.13) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|x_1(t) - x_0(t)|^2] &\leq 2K(t - t_0)^2 (1 + \mathbb{E}[|x_0|^2]) + 2K(t - t_0) (1 + \mathbb{E}[|x_0|^2]) \leq C, \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $C = 2K(T - t_0 + 1)(T - t_0) (1 + \mathbb{E}[|x_0|^2])$. Maintenant nous allons montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2] \leq \frac{C[M(t - t_0)]^n}{n!} \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq T. \quad (1.19)$$

Nous allons montrer cela par récurrence. En vertu de (1.18), (1.19) marche pour $n = 0$. Supposons que l'équation (1.19) soit vraie pour tout $n \geq 1$ et montrons que ça reste vraie pour $n + 1$. On a :

$$\begin{aligned} |x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)|^2 &\leq 2 \left| \int_{t_0}^t [f(x_{n+1}(s), s) - f(x_n(s), s)] ds \right|^2 \\ &\quad + 2 \left| \int_{t_0}^t [g(x_{n+1}(s), s) - g(x_n(s), s)] dB(s) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

En passant l'espérance et en utilisant la condition de Lipschitz (1.12) on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)|^2] &\leq 2K(t - t_0 + 1) \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 ds \right] \\ &\leq M \int_{t_0}^t \mathbb{E}[|x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2] ds \\ &\leq M \int_{t_0}^t \frac{C[M(s - t_0)]^n}{n!} ds = \frac{C[M(t - t_0)]^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire (1.19) est valable pour tout $n \geq 0$.

En outre, en remplaçant n par $n - 1$ dans (1.20), on voit que

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 &\leq 2\bar{K}(T - t_0) \int_{t_0}^T |x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 ds \\ &\quad + \sup_{t_0 \leq t \leq T} |g(x_n(s), s) - g(x_{n-1}(s), s)| dB(s). \end{aligned}$$

En passant l'espérance et en utilisant l'équation (1.19), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \right] &\leq 2\bar{K}(T - t_0 + 4) \int_{t_0}^T \mathbb{E} [|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2] ds \\ &\leq 4M \int_{t_0}^T \frac{C[M(s - t_0)]^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{4C[M(T - t_0)]^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| > \frac{1}{2^n} \right\} \leq \frac{4C[4M(T - t_0)]^n}{n!}.$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} 4C[4M(T - t_0)]^n/n! < \infty$, le lemme 1.3.2 affirme que pour tout $\omega \in \Omega$ il existe un entier positif $n_0 = n_0(\omega)$ tel que

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{lorsque } n \geq n_0.$$

Il suit que avec la probabilité 1, les sommes partielles

$$x_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} [x_{i+1}(t) - x_i(t)] = x_n(t)$$

convergent uniformément sur $[t_0, T]$. Notons la limite par $x(t)$. $x(t)$ est \mathcal{F}_t -adapté. D'un autre côté, on voit de (1.19) que pour tout t , $\{x_n(t)\}_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans L^2 . Donc on a aussi $x_n(t) \rightarrow x(t)$ dans L^2 . En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ dans (1.17) on a

$$\mathbb{E} [|x(t)|^2] \leq C_1 e^{3KT(T+1)} \quad \text{pour tout } t_0 \leq t \leq T.$$

De ce fait, $x(\cdot) \in \mathcal{M}^2([t_0; \mathbb{R}^d])$. Il reste à montrer que $x(t)$ satisfait l'équation (1.8). Notons que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \int_{t_0}^t f(x_n(s), s) ds - \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds \right|^2 \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_0}^t g(x_n(s), s) dB(s) - \int_{t_0}^t g(x(s), s) dB(s) \right|^2 \right] \\ &\leq \bar{K}(T - t_0 + 1) \int_{t_0}^t \mathbb{E} [|x_n(s) - x(s)|^2] ds \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Maintenant on peut faire tendre $n \rightarrow +\infty$ dans (1.15) pour avoir :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds + \int_{t_0}^t g(x(s), s) dB(s) \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq T,$$

ce qui achève la preuve.

1.4.4 Stabilité pour les équations différentielles stochastiques

Soit l'équation différentielle stochastique

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \quad \text{sur } t_0 \leq t. \quad (1.21)$$

On considère l'équation (1.21). Supposons que les conditions (1.12) et (1.13) sont vérifiées c'est-à-dire (1.21) admet une unique solution. Supposons également que

$$f(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad g(0, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq t_0$$

Ainsi, l'équation (1.21) admet $x(t) \equiv 0$ correspondant à la condition initiale $x(t_0) = 0$. Cette solution est appelée solution triviale ou point d'équilibre.

Soit $0 < h \leq \infty$. On note par $\mathcal{C}^{2,1}(S_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ la famille de fonctions positives $V = V(x, t)$ définies sur $S_h \times \mathbb{R}_+$ telles qu'elles sont deux fois différentiables en x et une fois en t .

On définit l'opérateur différentiel L associé à l'équation (1.21) par

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [g(x, t)g^T(x, t)]_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si L agit sur $V \in \mathcal{C}^{2,1}(S_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, alors

$$LV(x, t) = V_t(x, t) + V_x(x, t)f(x, t) + \frac{1}{2} \text{trace} [g^T(x, t)V_{xx}(x, t)g(x, t)].$$

Par la formule d'Itô, si $x(t) \in S_h$ alors

$$dV(x(t), t) = LV(x(t), t)dt + V_x(x(t), t)g(x(t), t)dB(t).$$

Définition 1.4.9. [11]

1. La solution triviale de l'équation (1.21) est **stochastiquement stable** ou **stable en probabilité** si pour tout $\epsilon \in]0, 1[$ et $r > 0$ il existe un $\delta = \delta(\epsilon, r, t_0) > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \{ |x(t; t_0, x_0)| < r \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \} \geq 1 - \epsilon$$

lorsque $|x_0| < \delta$. Sinon elle est dite **stochastiquement instable**

2. La solution triviale est dite **stochastiquement asymptotiquement stable** si elle est **stochastiquement stable** et en plus pour tout $\epsilon \in]0, 1[$ il existe un $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, t_0) > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0 \right\} \geq 1 - \epsilon$$

lorsque $|x_0| < \delta_0$.

3. La solution triviale est dite **stochastiquement asymptotiquement stable au sens large** si elle est **stochastiquement stable** et en plus, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0)| = 0 \right\} = 1.$$

Théorème 1.4.15. *S'il existe une fonction définie positive $V \in \mathcal{C}^{2,1}(S_h \times [t_0, +\infty[; \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$LV(x, t) \leq 0$$

pour tout $(x, t) \in S_h \times [t_0, +\infty[$, alors la solution triviale est stochastiquement stable.

Théorème 1.4.16. *[11] S'il existe une fonction décroissante définie positive $V \in \mathcal{C}^{2,1}(S_h \times [t_0, +\infty[; \mathbb{R}_+)$ telle que $LV(x, t)$ est définie négative, alors la solution triviale de l'équation (1.21) est **stochastiquement asymptotiquement stable**.*

Théorème 1.4.17. *[11] S'il existe une fonction radiale décroissante, non borné et définie positive $V \in \mathcal{C}^{2,1}(S_h \times [t_0, +\infty[; \mathbb{R}_+)$ telle que $LV(x, t)$ est définie négative, alors, la solution triviale de (1.21) est **stochastiquement asymptotiquement stable au sens large**.*

Définition 1.4.10. *Le générateur d'un processus d'Itô (voir équation (1.5)) est l'opérateur différentiel*

$$L = \sum_{i=1}^d f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (gg^T)_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Proposition 1.4.1. *(Formule de Dynkin). Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus d'Itô de générateur L , $x \in \mathbb{R}^d$, τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}[\tau] < +\infty$, et $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact. Alors*

$$\mathbb{E}[\varphi(X_\tau)] = \varphi(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau (L\varphi)(X_s) ds\right]. \quad (1.22)$$

Conclusion

Ce chapitre a été l'occasion pour nous de présenter l'historique des crises qui ont frappé le monde, de présenter quelques modèles mathématiques sur les crises bancaires et enfin quelques outils mathématiques utiles pour l'analyse du modèle que nous proposerons. Le chapitre 2 est consacré à l'étude du modèle déterministe.

Présentation du modèle et étude du cas déterministe

Partie I :Modèle de crise bancaire

L'étude des crises bancaires vécues permet de prédire quand les prochaines crises vont apparaître et l'ampleur de leurs dégâts à partir de paramètres spécifiques. Dans ce travail nous allons élaborer un modèle de crise bancaire basé sur les systèmes dynamiques. L'analyse de ce modèle va nous permettre sous certaines conditions de contrôler les crises bancaires. Nous présenterons tout d'abord le modèle stochastique proposé par Tadmon-Njike [15] et ensuite nous allons définir la dynamique de croissance économique en prenant en compte le capital humain, ce que nous allons combiner au modèle stochastique pour ressortir le modèle que nous étudierons dans la suite.

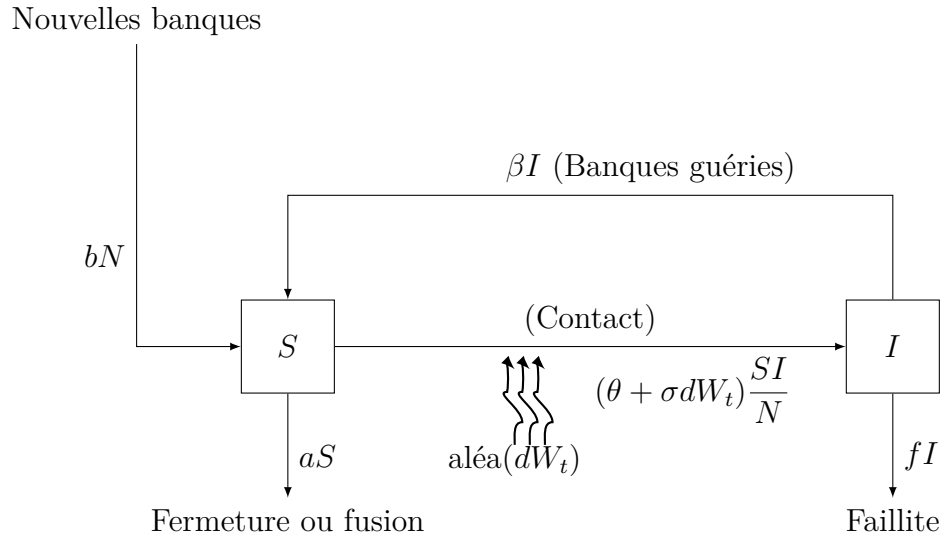
2.1 Élaboration du modèle

Ici, nous utilisons le modèle de Tadmon-Njike [15] et nous intégrons le capital humain pour formuler le nôtre.

2.1.1 Contagion financière dans le système bancaire

Nous supposons que le système bancaire est constitué de deux classes de banques : les banques saines S et les banques en crise I . Pour tout $t \geq 0$, $S(t)$, $I(t)$ et $N(t)$ désignent respectivement le nombre de banques saines, de banques en crise et le nombre total de banques dans le système bancaire au temps t de sorte que $N(t) = S(t) + I(t)$. On désigne par $b \in]0, 1[$ la proportion de banques naissantes dans le système, $a \in]0, 1[$ le taux suivant lequel les banques saines ferment ou fusionnent, $\beta \in]0, 1[$ le taux suivant lequel les banques en crises deviennent saines, $f \in]0, 1[$ la probabilité de faillite d'une banque en crise. Le taux de transmission $\theta \in]0, 1[$ est perturbé par un effet aléatoire et devient $\theta + \sigma dW_t$ avec $\sigma > 0$ l'intensité du bruit, où $(W_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement Brownien standard. Le nombre de contacts aléatoires entre les banques saines et les banques en crise par unité de temps est $\frac{S(t)I(t)}{N(t)}$. La dynamique de contagion financière est régie par le système suivant :

$$\begin{cases} dS(t) &= \left(bN(t) - \theta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} + \beta I(t) - aS(t) \right) dt - \sigma \frac{S(t)I(t)}{N(t)} dW_t, \\ dI(t) &= \left(\theta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - (\beta + f)I(t) \right) dt + \sigma \frac{S(t)I(t)}{N(t)} dW_t, \\ dN(t) &= (bN(t) - fI(t) - aS(t)) dt. \end{cases} \quad (2.1)$$



2.1.2 Dynamique de croissance économique

Dans cette partie, nous allons modéliser la croissance économique en prenant en compte le capital humain.

2.1.2.1 Capital humain

Le **capital humain** est l'ensemble des connaissances, aptitudes, expériences, talents et qualités accumulées par une personne, une équipe, une organisation ou un groupe d'organisations et qui déterminent leur capacité à travailler ou à produire pour eux-mêmes ou pour les autres. Nous utilisons le modèle de Lucas [10] et émettons les hypothèses suivantes.

- On considère une population qui évolue à un taux constant. A la date t il y a N_t agents.
- À chaque période les agents décident de passer $u(t)$ unités de temps à travailler dans le processus de production et $1 - u(t)$ à s'éduquer(se former). Ainsi, à chaque date t il y a :
 - * $u(t)N_t$ agents qui travaillent dans le processus de production
 - * $(1 - u(t))N_t$ agents en formation

En un an, un agent peut par exemple mettre 10 mois pour travailler et 2 mois pour se former.

- Lorsque les agents sont en formation, ils font progresser leur capital humain individuel $h(t)$ de la façon suivante :

$$\dot{h}(t) = B(1 - u(t))h(t). \quad (2.2)$$

Ici $h(t)$ est le niveau de capital déjà acquis au temps t , $1 - u(t)$ est la durée de formation et B l'efficacité de la formation.

- Comme chaque travailleur est doté à chaque instant d'un montant de capital humain obtenu en se formant, le stock global de capital humain dans le processus de production est $u(t)h(t)N_t$

2.1.2.2 Croissance économique

Pour décrire la dynamique de croissance économique nous émettons les hypothèses suivantes :

- La fonction de production est celle proposée par Cobb-Douglas [4] définie par :

$$Y(t) = K^\alpha(t)(A(t)L(t))^{1-\alpha}. \quad (2.3)$$

Ici $Y(t)$ est la production de toute l'économie au temps t ,

$K(t)$ est le stock de capital au temps t ,

$A(t)$ est le facteur de productivité au temps t ,

$L(t)$ est le nombre de travailleurs ou la main-d'œuvre au temps t et α représente l'élasticité du capital par rapport à la production.

Si on prend en compte le capital humain, la production devient :

$$Y(t) = K^\alpha(t)(A(t)u(t)h(t)L(t))^{1-\alpha}. \quad (2.4)$$

- On suppose que la durée du travail des agents dans le processus de production est une constante appartenant à $]0, 1[$: $u(t) = \tau$. Donc

$$Y(t) = \tau^{1-\alpha} K^\alpha(t)(A(t)h(t)L(t))^{1-\alpha}. \quad (2.5)$$

- L'investissement $E(t)$ au temps t est une fraction de la production soit $E(t) = \eta(t)Y(t)$, avec $\eta(t) \in]0, 1[$ la fraction de production économisée au temps t .
- La variation du capital est donné par :

$$\dot{K}(t) = E(t) - \delta_0 K(t) = \eta(t)Y(t) - \delta_0 K(t), \quad (2.6)$$

où $\delta_0 \in]0, 1[$ est le taux de dépréciation du capital.

Dans ce travail nous approximations la croissance économique par le capital par habitant

$k = \frac{K}{A\tau hL}$. En dérivant par rapport au temps on a :

$$\begin{aligned}\dot{k} &= \tau \left(\frac{\dot{K}AhL}{(ALh\tau)^2} - \frac{K\dot{A}Lh}{(ALh\tau)^2} - \frac{KA\dot{L}h}{(ALh\tau)^2} - \frac{KAL\dot{h}}{(ALh\tau)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{\dot{K}}{ALh} - \frac{K\dot{A}}{A^2Lh} - \frac{K\dot{L}}{AL^2h} - \frac{KB(1-\tau)h}{ALh^2} \right).\end{aligned}$$

En divisant les deux membres par k on obtient :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} - B(1-\tau). \quad (2.7)$$

— On suppose que la productivité est constante et la main-d'œuvre à croissance exponentielle i.e $\dot{A} = 0$ et $\frac{\dot{L}}{L} = p$. Alors la croissance économique peut être modélisée par :

$$\dot{k}(t) = \eta(t)k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1-\tau))k(t).$$

Puisque les banques agissent dans l'économie comme des intermédiaires collectant des fonds des personnes qui souhaitent épargner pour ensuite les donner à ceux qui veulent investir, nous supposons que la fraction de revenu épargnée est fonction de la densité des banques qui ne sont pas en crise dans le système bancaire. C'est-à-dire $\eta(t) = \eta\left(\frac{S(t)}{N(t)}\right)$. Nous supposons par la suite que

$$\eta(t) = \kappa \left(\frac{S(t)}{N(t)} \right)^\lambda$$

où $\kappa > 0$ est un paramètre scalaire et $\lambda > 0$ mesure l'efficacité de l'activité d'intermédiation à affecter la productivité. On a donc :

$$\dot{k}(t) = \kappa \left(\frac{S(t)}{N(t)} \right)^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1-\tau))k(t). \quad (2.8)$$

2.1.3 Modèle

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} dS(t) &= \left(bN(t) - \theta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} + \beta I(t) - aS(t) \right) dt - \sigma \frac{S(t)I(t)}{N(t)} dW_t, \\ dI(t) &= \left(\theta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - (\beta + f)I(t) \right) dt + \sigma \frac{S(t)I(t)}{N(t)} dW_t, \\ dN(t) &= (bN(t) - fI(t) - aS(t)) dt, \\ dk(t) &= \left(\kappa \left(\frac{S(t)}{N(t)} \right)^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1-\tau))k(t) \right) dt. \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous allons maintenant changer de variables afin d'étudier aisément notre modèle. Posons :

$$x(t) = \frac{S(t)}{N(t)}, \quad y(t) = \frac{I(t)}{N(t)}$$

On obtient :

$$\begin{cases} dx(t) &= \left((b + (f - \theta)x(t)y(t) + \beta y(t) - (a + b)x(t) + ax^2(t)) dt - \sigma x(t)y(t)dW_t, \right. \\ dy(t) &= \left(((\theta + a)x(t)y(t) - (\beta + f + b)y(t) + fy^2(t)) dt + \sigma x(t)y(t)dW_t, \right. \\ dk(t) &= \left(\kappa x^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t) \right) dt. \end{cases} \quad (2.10)$$

Si on utilise le fait que $x + y = 1$, on a :

$$\begin{cases} dx &= ((f - a - \theta)xy + (b + \beta)y) dt - \sigma xy dW_t, \\ dy &= ((a + \theta - f)xy - (b + \beta)y) dt + \sigma xy dW_t, \\ dk &= (\kappa(1 - y)^\lambda k^\alpha - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k) dt. \end{cases} \quad (2.11)$$

$x, y \in (0, 1), \quad x + y = 1 \text{ et } k \geq 0$

Pour $\sigma = 0$, on a le cas déterministe :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (f - a - \theta)xy + (b + \beta)y, \\ \dot{y} &= (a + \theta - f)xy - (b + \beta)y, \\ \dot{k} &= \kappa(1 - y)^\lambda k^\alpha - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k. \end{cases} \quad (2.12)$$

$x, y \in]0, 1[, \quad x + y = 1 \text{ et } k \geq 0.$

TABLE 1 – Tableau des paramètres

| Paramètres | Définition |
|-----------------------|--|
| $a \in]0, 1[$ | Taux de fusion de banques saines |
| $b \in]0, 1[$ | Proportion de banque naissantes |
| $f \in]0, 1[$ | Probabilité de faillite d'une banque en crise |
| $p > 0$ | Paramètre de croissance de la main-d'œuvre |
| $B > 0$ | Efficacité de la formation des agents |
| $\alpha > 0$ | Élasticité du capital par rapport à la production |
| $\beta \in]0, 1[$ | Taux auquel les banques en crises deviennent saines |
| $\sigma > 0$ | Intensité du bruit |
| $\tau \in]0, 1[$ | Temps de productivité de la main-d'œuvre |
| $\lambda > 0$ | Efficacité de l'activité d'intermédiation à affecter la productivité |
| $\delta_0 \in]0, 1[$ | Taux de dépréciation du capital |
| $\theta \in]0, 1[$ | Taux de transmission de la crise |
| κ | Constante positive |

Partie II : Étude du modèle déterministe (2.12)

Dans cette partie on étudie le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (f - a - \theta)xy + (b + \beta)y, \\ \dot{y} &= (a + \theta - f)xy - (b + \beta)y, \\ \dot{k} &= \kappa(1 - y)^\lambda k^\alpha - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k. \end{cases} \quad (2.13)$$

2.1.4 Existence et unicité des solutions

$$\text{Posons } f(x, y, k) = \begin{pmatrix} (f - a - \theta)xy + (b + \beta)y \\ (a + \theta - f)xy - (b + \beta)y \\ \kappa(1 - y)^\lambda k^\alpha - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, k) \\ f_2(x, y, k) \\ f_3(x, y, k) \end{pmatrix}$$

avec $f_1(x, y, k) = -f_2(x, y, k) = (f - a - \theta)xy + (b + \beta)y$ et $f_3(x, y, k) = \kappa(1 - y)^\lambda k^\alpha - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k$.

Proposition 2.1.1. *Le système*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f_1(x, y, k), \\ \dot{y}(t) &= f_2(x, y, k), \\ \dot{k}(t) &= f_3(x, y, k), \\ x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0, \\ k(0) &= k_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

admet localement une unique solution pour tout $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$ et $k_0 \geq 0$ et cette solution est positive ($x(t), y(t), k(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$).

Démonstration. f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 dans $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0, k \geq 0\}$. Donc, f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}_+^3 . Par conséquent, f est localement de Lipschitz dans \mathbb{R}_+^3 . Ainsi, pour tout $(x(0), y(0), k(0)) \in \mathbb{R}_+^3$, le problème de Cauchy (2.14) admet localement une unique solution.

Par ailleurs, nous allons montrer que pour des conditions initiales positives les solutions sont toujours positives. En effet soient $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ et $k(0) = k_0 > 0$ les conditions initiales de (2.14), on a :

$$\dot{y}(t) = (a + \theta - f)x(t)y(t) - (b + \beta)y(t).$$

Pour $y \neq 0$ divisons l'équation précédente par y . On obtient

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = (a + \theta - f)x(t) - (b + \beta).$$

En intégrant de 0 à t on a :

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{y(s)} ds = \int_0^t ((a + \theta - f)x(s) - (b + \beta)) ds,$$

ce qui donne

$$\ln y(t) - \ln y(0) = \int_0^t ((a + \theta - f)x(s) - (b + \beta)) ds. \quad (2.15)$$

En passant l'exponentielle de part et d'autre de (2.15) on a :

$$y(t) = y_0 \exp \left(\int_0^t ((a + \theta - f)x(s) - (b + \beta)) ds \right) > 0 \quad \text{car } y_0 \geq 0$$

Pour $x \neq 0$ on a également

$$x(t) = x_0 \exp \left(\int_0^t \left((a + \theta - f)y(s) + (b + \beta) \frac{y(s)}{x(s)} \right) ds \right) \geq 0$$

Donc $x(t) \geq 0$ et $y(t) \geq 0$. Ainsi, comme $x(t) + y(t) = 1$, on a $0 \leq x(t) \leq 1$, $0 \leq y(t) \leq 1$ $t \in [0; T[$.

De même, pour $k \neq 0$

$$k(t) = k_0 \exp \left(\int_0^t (\kappa(1 - y(s))^\lambda k^{\alpha-1}(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))) ds \right) \geq 0.$$

Donc pour des conditions initiales positives, x , y et k sont des fonctions positives.

En outre, pour $k(t) > 0$, on a

$\dot{k}(t) = \kappa(1 - y(t))^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t)$. En multipliant cette équation par $(1 - \alpha)k^{-\alpha}(t)$ ($k(t)$ étant positif), on a

$$(1 - \alpha)k^{-\alpha}(t)\dot{k}(t) = (1 - \alpha)\kappa(1 - y(t))^\lambda - (1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))k^{1-\alpha}(t).$$

Comme $0 \leq y(t) \leq 1$ on a $0 \leq 1 - y(t) \leq 1$.

Donc

$$(1 - \alpha)k^{-\alpha}(t)\dot{k}(t) = \frac{d}{dt} (k^{1-\alpha}(t)) \leq (1 - \alpha)\kappa - (1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)),$$

$$\begin{aligned} k^{1-\alpha}(t) &\leq k_0^{1-\alpha} \exp \left(\int_0^t -(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)) ds \right) \\ &+ \int_0^t \kappa(1 - \alpha) \exp \left(\int_0^t -(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)) du \right) ds \\ &\leq k_0^{1-\alpha} \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) \\ &+ \kappa(1 - \alpha) \int_0^t \exp((s - t)(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) ds \\ &\leq k_0^{1-\alpha} \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) \\ &+ \frac{\kappa(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} (1 - \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)))) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} k^{1-\alpha}(t) &\leq \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right) \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) \\ &+ \frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}. \end{aligned}$$

Si

$$k_0 \leq \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

alors

$$k^{1-\alpha}(t) \leq \frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ainsi,

$$k(t) \leq \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Donc la solution $(x(t), y(t), k(t))$ est bornée pour certaines conditions initiales et l'ensemble

$$\Gamma = \left\{ (x, y, k) \in \mathbb{R}_+^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq k \leq \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} \quad (2.16)$$

est positivement invariant.

On déduit que pour de bonnes conditions initiales la solution de (2.14) est globale.

2.1.5 Points d'équilibre et stabilité

Proposition 2.1.2. *Le système (2.12) admet un équilibre sans crise et un équilibre avec crise qui existe lorsque $a + \theta > b + \beta + f$.*

Démonstration. Les points d'équilibres de (2.12) sont les points vérifiant

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{k} = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} (f - a - \theta)xy + (b + \beta)y &= 0, \\ \kappa(1 - y)^\lambda k^\alpha - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k &= 0. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} y = 0 & \text{ou} & x = \frac{b + \beta}{a + \theta - f} \\ k = 0 & \text{ou} & k = \left(\frac{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}{\kappa(1 - y)^\lambda} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \end{cases}$$

Comme $x + y = 1$, on a :

$$\begin{cases} x = 1 & \text{et} & y = 0 & \text{ou} & x = \frac{b + \beta}{a + \theta - f} & \text{et} & y = 1 - \frac{b + \beta}{a + \theta - f}, \\ k = 0 & \text{ou} & k = \left(\frac{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}{\kappa(1 - y)^\lambda} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \end{cases}$$

On a $k \neq 0$ par définition de la variable k , le capital par habitant ne peut être nul (chaque individu possède un capital). Le capital par habitant représente les biens d'un individu sous toutes ses formes (argent, maison, ordinateur etc...)

$$* \quad y = 0 \Rightarrow k = \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$* \quad x = \frac{b + \beta}{a + \theta - f} < 1 \quad (\text{Par définition de la variable } x).$$

$$\text{Donc } k = \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}.$$

On a deux points d'équilibres :

- l'équilibre sans crise $E_0 = \left(1, 0, \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)$

- l'équilibre avec crise

$$E_1 = \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f}, 1 - \frac{b + \beta}{a + \theta - f}, \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha}} \right) \text{ qui existe pour}$$

$$0 \leq \frac{b + \beta}{a + \theta - f} \leq 1.$$

Théorème 2.1.1. *On considère le système (2.12). On a :*

- i. *Si $a + \theta < b + \beta + f$ alors E_0 est stable. Il est instable sinon.*
- ii. *Si $a + \theta \geq b + \beta + f$ alors E_1 existe et est stable.*

On énonce ce lemme utile pour la preuve

Lemme 2.1.1. [8] *Soit $m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $v, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et*

$$m'(t) \leq v(t)m(t) + h(t), \quad m(t_0) = c \geq 0, \quad t \geq t_0,$$

alors,

$$m(t) \leq c \exp \left[\int_{t_0}^t v(s) ds \right] + \int_{t_0}^t h(s) \exp \left[\int_s^t v(u) du \right] ds, \quad t \geq t_0.$$

Démonstration. Considérons la deuxième équation du système (2.12) c'est-à-dire

$$\dot{y} = (a + \theta - f)xy - (b + \beta)y$$

Comme $x + y = 1$, on a :

$$\dot{y} = (a + \theta - f)(1 - y)y - (b + \beta)y.$$

Ce qui donne

$$\dot{y} = -(a + \theta - f)y^2 + (a + \theta - f - b - \beta)y$$

Donc

$$\dot{y} = -a_0 y^2 + a_1 y, \tag{2.17}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 &= a + \theta - f \\ a_1 &= a + \theta - f - b - \beta. \end{cases}$$

En divisant les deux membres de (2.17) par $\frac{-a_0 y^2(t) + a_1 y(t)}{dt}$, on obtient

$$\frac{dy(t)}{-a_0 y^2(t) + a_1 y(t)} = dt.$$

Maintenant en décomposant $\frac{1}{-a_0 y^2 + a_1 y}$ en éléments simples et en primitivant, on obtient :

$$\ln y - \ln(-a_0 y + a_1) = a_1 t + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$\frac{y(t)}{-a_0 y(t) + a_1} = K e^{a_1 t}.$$

D'où

$$y(t) = \frac{a_1 K e^{a_1 t}}{1 + a_0 K e^{a_1 t}}.$$

- Si $a_1 < 0$ c'est-à-dire $a + \theta < b + \beta + f$,

alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$ car $x(t) + y(t) = 1$.

Comme $y(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} t \geq t_0 &\Rightarrow |y(t)| \leq \epsilon, \\ t \geq t_0 &\Rightarrow -\epsilon \leq -y(t) \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Considérons la troisième équation de (2.12).

On a

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \kappa(1 - y(t))^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t) \\ &\leq \kappa(1 + \epsilon)^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t). \end{aligned}$$

Comme k est positif, alors

$$(1 - \alpha)k^{-\alpha}(t)\dot{k}(t) \leq \kappa(1 - \alpha)(1 + \epsilon)^\lambda - (1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))k^{1-\alpha}(t).$$

Puisque $\frac{d}{dt}(k^{1-\alpha}(t)) = (1 - \alpha)k^{-\alpha}(t)\dot{k}(t)$, on a alors

$$\frac{d}{dt}(k^{1-\alpha}(t)) \leq \kappa(1 - \alpha)(1 + \epsilon)^\lambda - (1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))k^{1-\alpha}(t).$$

D'après le lemme 2.1.1,

$$\begin{aligned} k^{1-\alpha}(t) &\leq k^{1-\alpha}(0) \exp\left(\int_0^t -(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)) ds\right) \\ &\quad + \int_0^t \kappa(1 - \alpha)(1 + \epsilon)^\lambda \exp\left(\int_0^t -(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)) du\right) du \\ &\Rightarrow k^{1-\alpha}(t) \leq k^{1-\alpha}(0) \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) \\ &\quad + \frac{\kappa(1 + \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} (1 - \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)))) . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} k^{1-\alpha}(t) &\leq \frac{\kappa(1 + \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \\ &\quad + \left(k^{1-\alpha}(0) - \frac{\kappa(1 + \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}\right) \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))). \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup k^{1-\alpha}(t) \leq \frac{\kappa(1+\epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1-\tau))}.$$

D'autre part, en vertu de (2.18), on a

$$\dot{k}(t) = \kappa(1 - y(t))^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t).$$

Ce qui implique que

$$\dot{k}(t) \geq \kappa(1 - \epsilon)^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t).$$

Multiplions les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $-(1 - \alpha)k^{-\alpha}(t)$ (Puisque $k(t)$ est positif), on a

$$(1 - \alpha)k^{-\alpha}(t)\dot{k}(t) \leq -\kappa(1 - \alpha)(1 - \epsilon)^\lambda - (1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))(-k^{1-\alpha}(t)).$$

C'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}(-k^{1-\alpha}(t)) \leq \kappa(1 - \alpha)(1 - \epsilon)^\lambda - (1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))(-k^{1-\alpha}(t)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} -k^{1-\alpha}(t) &\leq -k^{1-\alpha}(0) \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) \\ &\quad - \frac{\kappa(1 - \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} (1 - \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau)))) . \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} -k^{1-\alpha}(t) &\leq -\frac{\kappa(1 - \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \\ &\quad + \left(\frac{\kappa(1 - \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} - k^{1-\alpha}(0) \right) \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) . \end{aligned}$$

Par suite en multipliant par -1 on a

$$\begin{aligned} k^{1-\alpha}(t) &\geq \frac{\kappa(1 - \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \\ &\quad + \left(k^{1-\alpha}(0) - \frac{\kappa(1 - \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right) \exp(-t(1 - \alpha)(\delta_0 + p + B(1 - \tau))) . \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf k^{1-\alpha}(t) \geq \frac{\kappa(1 - \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}.$$

On a

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup k^{1-\alpha}(t) \leq \frac{\kappa(1 + \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf k^{1-\alpha}(t) \geq \frac{\kappa(1 - \epsilon)^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}. \end{cases}$$

En faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k^{1-\alpha}(t) = \frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}.$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$

- Si $a_1 \geq 0 \Rightarrow a + \theta \geq b + \beta + f \Rightarrow \frac{b + \beta}{a + \theta - f} \leq 1.$

E_1 existe et $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1 - \frac{b + \beta}{a + \theta - f}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{b + \beta}{a + \theta - f}. \end{cases}$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1 - \frac{b + \beta}{a + \theta - f}$, alors $\forall \epsilon > 0, \exists t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$

$$t \geq t_0 \Rightarrow \left| y(t) - 1 + \frac{b + \beta}{a + \theta - f} \right|.$$

$$t \geq t_0 \Rightarrow \frac{b + \beta}{a + \theta - f} - 1 - \epsilon \leq -y(t) \leq \frac{b + \beta}{a + \theta - f} - 1 + \epsilon$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \kappa(1 - y(t))^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t) \\ &\geq \kappa \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f} + \epsilon \right)^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t). \end{aligned}$$

Ceci conduit à $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup k^{1-\alpha}(t) \leq \frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f} + \epsilon \right)^\lambda, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf k^{1-\alpha}(t) \geq \frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f} - \epsilon \right)^\lambda. \end{cases}$

En faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k^{1-\alpha}(t) = \frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f} \right)^\lambda.$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{b + \beta}{a + \theta - f} \right)^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}.$ On conclut que pour $a_1 < 0$, l'équilibre E_0 est globalement asymptotiquement stable, pour $a_1 \geq 0$, il est instable. L'équilibre E_1 est globalement asymptotiquement stable

2.2 Simulations

Les résultats obtenus théoriquement vont se justifier dans cette partie à travers des simulations numériques utilisant la méthode d'Euler réalisées sur le logiciel Python.

Voici ci-dessous (Tableau 2) les valeurs des paramètres utilisées pour nos simulations.

| Paramètres | Valeurs | Source |
|------------|---------|-------------------------|
| a | 0.01 | Tadmon-Njike[15] |
| b | 0.03 | Bucci <i>et al.</i> [3] |
| f | 0.02 | Bucci <i>et al.</i> [3] |
| p | 0.001 | Tadmon-Njike[15] |
| B | 0.5 | Supposé |
| α | 0.33 | Bucci <i>et al.</i> [3] |
| β | 0.1 | Bucci <i>et al.</i> [3] |
| σ | 0.2 | Supposé |
| τ | 5/6 | Supposé |
| λ | 1 | Bucci <i>et al.</i> [3] |
| δ_0 | 0.1 | Tadmon-Njike[15] |
| κ | 0.2 | Bucci <i>et al.</i> [3] |

TABLE 2 – Valeur des paramètres

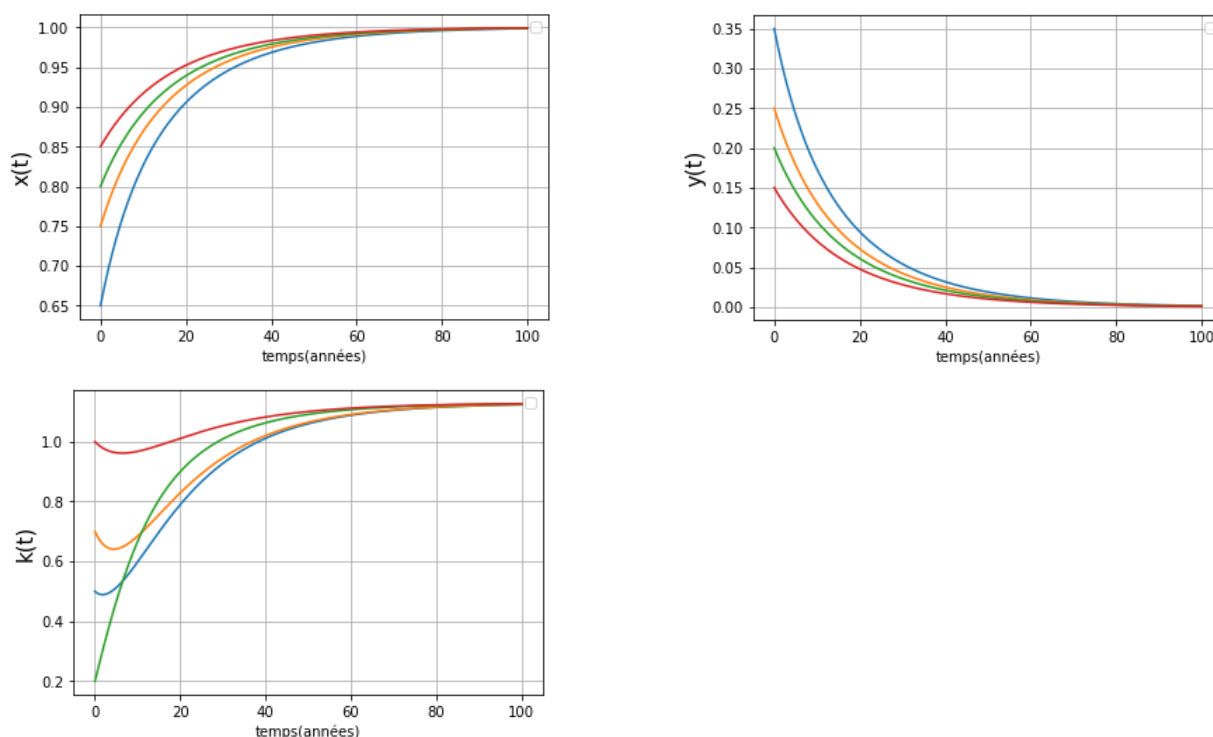


FIGURE 1 – Niveau de l'économie en cas d'extinction de la crise.

La Figure 1 illustre la stabilité du point d'équilibre sans crise E_0 tel que défini par le théorème 2.1.1. On constate que pour $a + \theta = 0.01 + 0.09 = 0.1$, $b + \beta + f = 0.15$, et de bonnes conditions initiales les fonctions x , y et k convergent vers 1, 0 et 1.1293 respectivement. Cela signifie la fin de la crise dans le système bancaire.

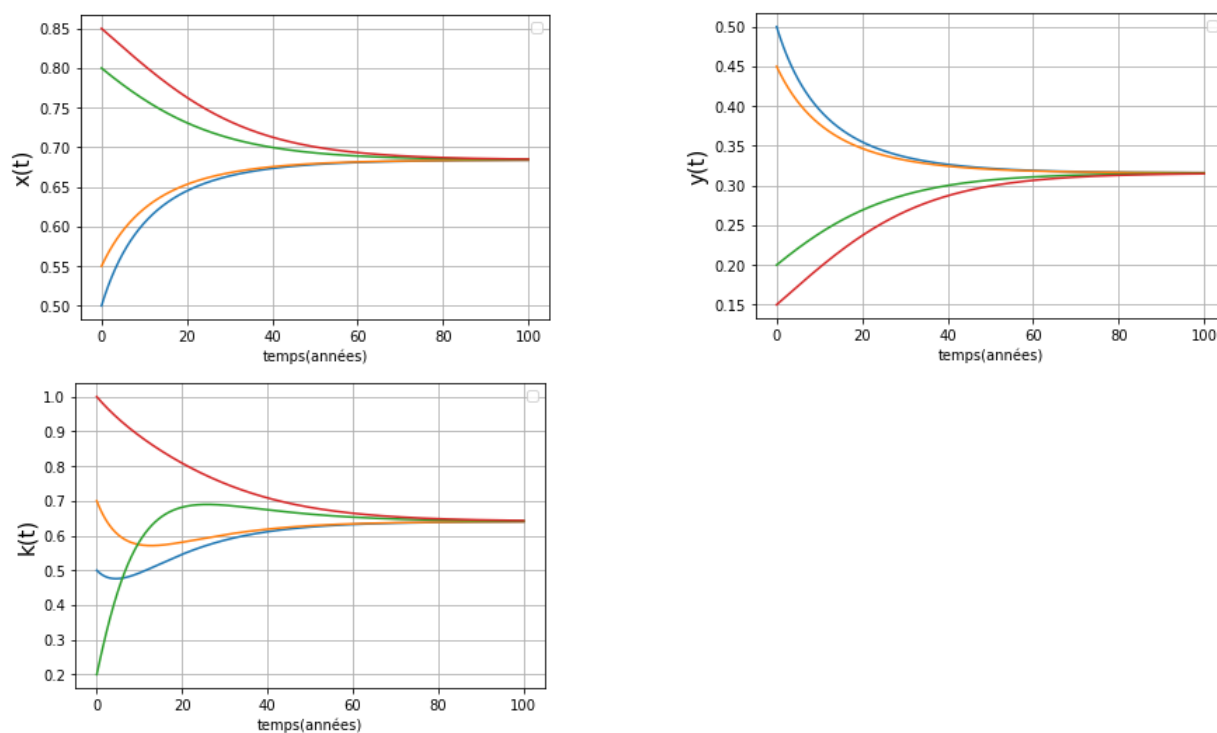


FIGURE 2 – Niveau de l'économie en cas de persistance de la crise.

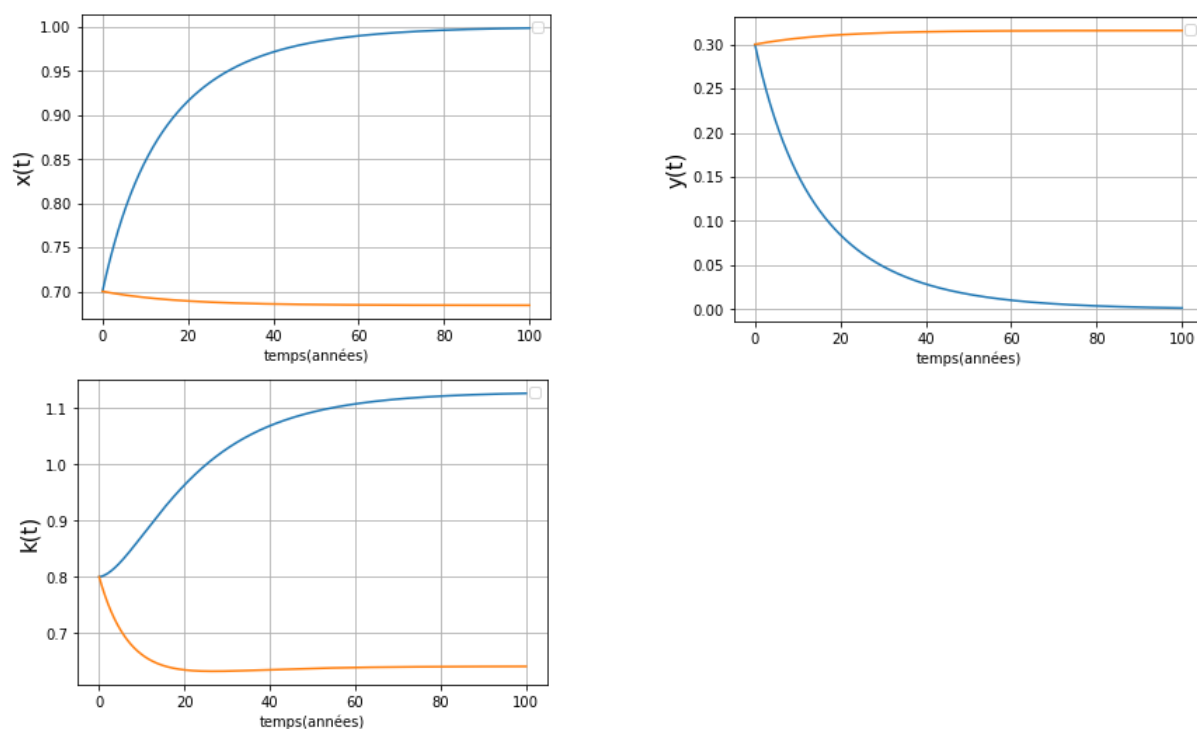


FIGURE 3 – Comparaison du niveau de l'économie et du système bancaire en extinction/persistance de la crise.

La Figure 2 illustre la situation du système en cas de persistance de crise. Ici, le système converge vers l'équilibre "infecté", c'est-à-dire tend vers une position où la crise est toujours présente mais en proportion constante.

La Figure 3 quant à elle montre les différences entre les variables de notre modèle déterministe dans les cas de persistance et d'extinction de la crise bancaire.

Étude du modèle stochastique

Dans tout ce chapitre on considère un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration vérifiant les conditions usuelles.

Dans cette partie on étudie le modèle suivant :

$$\begin{cases} dx(t) &= ((f - a - \theta)x(t)y(t) + (b + \beta)y(t)) dt - \sigma x(t)y(t)dW_t, \\ dy(t) &= ((a + \theta - f)x(t)y(t) - (b + \beta)y(t)) dt + \sigma x(t)y(t)dW_t, \\ dk(t) &= (\kappa(1 - y(t))^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t)) dt. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1 Existence et unicité des solutions

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ k(t) \end{pmatrix}, \quad f(X(t)) = \begin{pmatrix} (f - a - \theta)x(t)y(t) + (b + \beta)y(t) \\ (a + \theta - f)x(t)y(t) - (b + \beta)y(t) \\ \kappa(1 - y(t))^\lambda k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau))k(t) \end{pmatrix},$$

$$g(X(t)) = \begin{pmatrix} -\sigma x(t)y(t) \\ \sigma x(t)y(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (3.1) s'écrit

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW_t. \quad (3.2)$$

Proposition 3.1.1. Soit $X_0 = (x(0), y(0), k(0)) \in \mathbb{R}_+^3$ une variable aléatoire tel que $\mathbb{E}[X_0] < +\infty$. L'équation (3.2) avec $X(0) = X_0$ admet localement une unique solution et pour tout $X_0 \in \Gamma$ la solution reste dans Γ avec la probabilité 1 où Γ est donné par (2.16).

Démonstration. f et g sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 donc sont localement de Lipschitz. Alors pour tout triplet $(x(0), y(0), k(0))$ (condition initiale) il existe localement un unique processus $X = \{X(t), t \in [0, T_e]\}$ solution de (3.2).

En outre, on montre que l'ensemble Γ est positivement invariant avec la probabilité 1. En effet, pour toute condition initiale $(x(0), y(0), k(0)) \in \Gamma$ la solution $(x(t), y(t), k(t)) \in \Gamma$.

Il suffit de montrer que pour toute solution $(x(t), y(t), k(t)) \in \Gamma$ on a $T_e = +\infty$. Soit q_0 suffisamment grand tel que $x(0), y(0) \in \left[\frac{1}{q_0}, 1\right]$ et $k(0) \in \left[\frac{1}{q_0}, \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]$.

Pour tout $q \geq q_0$ on définit le temps d'arrêt

$$\tau_q = \inf A_q \quad \text{où} \quad A_q = \left\{ t \in [0, T_e[\mid \min(x(t), y(t), k(t)) \leq \frac{1}{q} \right\}.$$

Soit $t \in A_{q+1}$, on a $\min(x(t), y(t), k(t)) \leq \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{q}$ donc $t \in A_q$. On a alors $A_{q+1} \subset A_q$. D'où $\inf A_q \leq \inf A_{q+1}$, et donc $\tau_q \leq \tau_{q+1}$.

Puisque $\tau_q \leq T_e$ et $\{\tau_q\}_{q \geq q_0}$ est croissante alors $\{\tau_q\}_{q \geq q_0}$ est convergente. Posons $\tau = \lim_{q \rightarrow +\infty} \tau_q$.

On a donc $\tau \leq T_e$ donc si $\tau = +\infty$ alors $T_e = +\infty$. Supposons par l'absurde que $\tau \neq +\infty$, de ce fait, il existe $T > 0$ et $\epsilon \in]0, 1[$ tel que $\mathbb{P}(\tau < T) \geq \epsilon$.

Donc il existe $q_1 \geq q_0$ tel que

$$\mathbb{P}(\tau_q < T) \geq \epsilon \quad \text{pour tout} \quad q \geq q_1.$$

On définit sur $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, k > 0\}$ la fonction V par

$$V(x, y, k) = \ln \left(\left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) + \ln(xyk).$$

Appliquons la formule d'Itô à V on a :

$$dV(X) = \nabla_x V(X) \cdot g(X) dW_t + \left(\nabla_x V \cdot f(X) + \frac{\partial V(X)}{\partial t} + \frac{1}{2} g^T(X) H_V(X) g(X) \right) dt,$$

où $\nabla_x V(X) = \left(\frac{\partial V(X)}{\partial x}, \frac{\partial V(X)}{\partial y}, \frac{\partial V(X)}{\partial k} \right)^T$ et

$$H_V(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(X)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V(X)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V(X)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V(X)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V(X)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V(X)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V(X)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V(X)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 V(X)}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_x V(X) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{k} \right)^T,$$

$$H_V(X) = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/k^2 \end{pmatrix}$$

et $\frac{\partial V(X)}{\partial t} = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
dV(X) &= \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sigma xy \\ \sigma xy \\ 0 \end{pmatrix} dW_t + \\
&\left(\begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f-a-\theta)xy + (b+\beta)y \\ (a+\theta-f)xy - (b+\beta)y \\ \kappa(1-y)^\lambda k^\alpha - (\delta_0 + p + B(1-\tau))k \end{pmatrix} \right) dt + \\
&\left(0 + \begin{pmatrix} -\sigma xy \\ \sigma xy \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma xy \\ \sigma xy \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt \\
dV(X) &= \sigma(x-y)dW_t + ((f-a-\theta)y + (b+\beta)y/x + (a+\theta-f)x - (b+\beta)) dt \\
&+ \left(\kappa(1-y)^\lambda k^{\alpha-1} - (\delta_0 + p + B(1-\tau)) - \frac{1}{2}\sigma^2(x^2 + y^2) \right) dt \\
&= \left(-(2b+2\beta+\delta_0+p+B(1-\tau)+a+\theta-f) + \frac{b+\beta}{x} + 2(a+\theta-f)x \right) dt \\
&+ \left(\kappa(1-y)^\lambda k^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\sigma^2(x^2 + y^2) \right) dt + \sigma(x-y)dW_t.
\end{aligned}$$

D'où

$$dV(X) = LV(X)dt + \sigma(x-y)dW_t, \quad (3.3)$$

où

$$\begin{aligned}
LV(x, y, k) &= -(2b+2\beta+\delta_0+p+B(1-\tau)+a+\theta-f) + \frac{b+\beta}{x} + 2(a+\theta-f)x \\
&+ \kappa(1-y)^\lambda k^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\sigma^2(x^2 + y^2).
\end{aligned}$$

Posons $G(x, y, k) = LV(x, y, k) - \frac{b+\beta}{x}$, on a $LV(x, y, k) > G(x, y, k)$.

Comme G est une fonction continue et Γ est un compact, elle atteint ses bornes donc il existe $M_0, m \in \mathbb{R}$ tel que

$$m < G(x, y, k) < M_0 \quad \text{pour tout } (x, y, k) \in \Gamma.$$

Ainsi, il existe $M < 0$ tel que

$$G(x, y, k) > M \quad \text{pour tout } (x, y, k) \in \Gamma.$$

Intégrons (3.3) de 0 à $\tau_q \wedge T = \min(T, \tau_q)$ pour tout $q \geq q_0$ pour avoir

$$\int_0^{T \wedge \tau_q} dV(X(s)) = \int_0^{T \wedge \tau_q} LV(X(s))ds + \int_0^{T \wedge \tau_q} \sigma(x(s) - y(s))dW_s.$$

D'où

$$V(X(T \wedge \tau_q)) - V(X(0)) = \int_0^{T \wedge \tau_q} LV(x(s), y(s), k(s))ds + \int_0^{T \wedge \tau_q} \sigma(x(s))dW_s - \int_0^{T \wedge \tau_q} \sigma(y(s))dW_s.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(X(T \wedge \tau_q))] - V(X(0)) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} LV(x(s), y(s), k(s)) ds \right] + \\ &\quad \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} \sigma x(s) dW_s \right] - \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} \sigma y(s) dW_s \right]. \end{aligned}$$

On a

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} \sigma x(s) dW_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} \sigma y(s) dW_s \right] = 0$$

car $x, y \in \mathcal{M}^2([0, T_e]; \mathbb{R})$.

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(X(T \wedge \tau_q))] - V(X(0)) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} LV(x(s), y(s), k(s)) ds \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} G(x(s), y(s), k(s)) ds \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} M ds \right] \geq M(T \wedge \tau_q) > -\infty. \end{aligned}$$

Posons $\Omega_q = \{\omega \in \Omega | \tau_q(\omega) < T\}$ pour $q \geq q_1$. Soit \mathbb{I}_{Ω_q} la fonction indicatrice de Ω_q . On a $\mathbb{P}(\Omega_q) \geq \epsilon$.

D'un autre côté, puisque $y \leq 1$ et $k \leq \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, on a

$$\begin{aligned} V(x, y, k) &= \ln \left(\left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) + \ln(xyk) \\ &\leq \ln \left(\left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) + \ln(x) + \ln(1) \\ &\quad + \ln \left(\left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \\ &\leq \ln(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(x(T \wedge \tau_q), y(T \wedge \tau_q), k(T \wedge \tau_q))] &\leq \mathbb{E}[\ln(x(T \wedge \tau_q))] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\Omega_q} \ln(x(\tau_q, \omega))] \\ &\leq \epsilon \ln \left(\frac{1}{q} \right). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} M(T \wedge \tau_q) &\leq \mathbb{E}[V(x(T \wedge \tau_q), y(T \wedge \tau_q), k(T \wedge \tau_q))] - V(x(0), y(0), k(0)) \\ &\leq \epsilon \ln \left(\frac{1}{q} \right) - V(x(0), y(0), k(0)). \end{aligned}$$

En faisant tendre $q \rightarrow +\infty$, on a $M(T \wedge \tau_q) \leq -\infty$, ce qui permet d'avoir

$$-\infty \geq M(T \wedge \tau_q) > -\infty.$$

Par suite,

$$+\infty \leq T \wedge \tau_q < +\infty.$$

D'où $T = +\infty$ et donc $\tau = +\infty$ on conclut que $T_e = +\infty$.

L'ensemble Γ est positivement invariant avec la probabilité 1.

3.2 Stabilité

Ici nous étudions le comportement de la solution au fil des années.

Posons

$$\begin{aligned}\phi_1(y) &= (a + \theta - f)(1 - y) - (b + \beta) - \frac{\sigma^2(1 - y)^2}{2}, \\ \phi_2(x) &= (a + \theta - f)x - (b + \beta) - \frac{\sigma^2 x^2}{2}.\end{aligned}$$

On a

$$\phi_1(0) = \phi_2(1) = a + \theta - \left(f + b + \beta + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Proposition 3.2.1. *Si $\phi_1(0) < 0$ alors la solution $(x(t), y(t), k(t))$ tend presque sûrement vers $E_0 = \left(1, 0, \left(\frac{\kappa}{\delta_0 + p + B(1 - \tau)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$ quand t tend vers $+\infty$. Ceci signifie qu'au bout d'un certain temps la crise disparaît presque sûrement.*

Démonstration. Supposons $\phi_1(0) < 0$ i.e $a + \theta < \left(f + b + \beta + \frac{\sigma^2}{2}\right)$. Comme ϕ_1 est continue, nous pouvons choisir un $\rho > 0$ suffisamment petit tel que $\phi_1(0) + \rho < 0$.

Considérons la fonction de Lyapunov $\psi(x, y) = y^\delta$ où $\delta \in]0, 1[$ est à déterminer. Appliquons la formule d'Itô à ψ pour avoir

$$\begin{aligned}d\psi(x, y) &= \delta \sigma x y^\delta dW_t + \left[\delta((a + \theta - f)x - (b + \beta))y^\delta + \frac{1}{2}\delta(\delta - 1)y^\delta \sigma^2 x^2 \right] dt \\ &= \left[\delta \left((a + \theta - f)x - (b + \beta) - \frac{\sigma^2(1 - y)^2}{2} \right) y^\delta \right] dt \\ &+ \left[\delta \frac{\sigma^2(1 - y)^2}{2} y^\delta + \frac{1}{2}\delta(\delta - 1)y^\delta \sigma^2(1 - y)^2 \right] dt + \delta \sigma x y^\delta dW_t \\ &= \left[\delta \left((a + \theta - f)x - (b + \beta) - \frac{\sigma^2(1 - y)^2}{2} \right) y^\delta + \frac{\sigma^2(1 - y)^2}{2} \delta^2 \right] dt + \delta \sigma x y^\delta dW_t.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$d\psi(x, y) = L\psi(x, y)dt + \delta \sigma x y^\delta dW_t$$

$$\text{avec } L\psi(x, y) = \delta \left((a + \theta - f)x - (b + \beta) - \frac{\sigma^2(1 - y)^2}{2} \right) y^\delta + \frac{\sigma^2(1 - y)^2}{2} \delta^2.$$

Pour w , constante appartenant à $]0, 1[$, on note

$$\Gamma_w^1 = \{(x, y) : 1 - w < x \leq 1, 0 \leq y < w\}$$

Par continuité de ϕ_1 on peut choisir $w \in]0, 1[$ suffisamment petit, tel que pour tout $y \in [0, w[$

$$\phi_1(y) \leq \phi_1(0) + \frac{\rho}{2}.$$

En outre, soit $\delta \in]0, 1[$ suffisamment petit tel que pour tout $(x, y) \in \Gamma_w^1$, on a :

$$\frac{1}{2}\delta\sigma^2(1-y)^2 \leq \frac{\rho}{2} \quad (\text{Propriété d'Archimède}).$$

Ainsi, lorsque δ et w sont suffisamment petits, pour tout $(x, y) \in \Gamma_w^1$, on a

$$L\psi(x, y) \leq \delta(\phi_1(0) + \rho)\psi(x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Gamma_w^1.$$

Ainsi, pour tout $\gamma > 0$ il existe $w_1 \in (0, w)$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)\right) \geq 1 - \gamma \quad (3.4)$$

pour tout $(x(0), y(0)) \in \Gamma_{w_1}^1$.

De plus, on montre que toute solution $(x(t), y(t), k(t))$ commençant dans Γ est telle que $(x(t), y(t))$ doit se retrouver dans $\Gamma_{w_1}^1$. On définit $T_{w_1} = \inf\{t > 0 : y(t) \leq w_1\}$.

Considérons la fonction $\Psi(x, y) = -(y+1)^N$ où N est un très grand nombre tel que

$$y(1-y^2)(a+\theta-f) - (b+\beta)(1+y)y + \frac{1}{2}\sigma^2(N-1)y^2(1-y^2) \geq w_1 \quad (3.5)$$

pour tout $y \in [w_1, 1[$.

En appliquant la formule d'Itô à Ψ , on a :

$$\begin{aligned} d\Psi(x, y) &= \left(-N(1+y)^{N-1}((a+\theta-f)xy - (b+\beta)y) - \frac{1}{2}N(N-1)(1+y)^{N-2}\sigma^2x^2y^2 \right) dt \\ &\quad - N\sigma xy(1+y)^{N-1}dW_t \\ &= \left[-N(1+y)^{N-2} \left(((1+y)(1-y)(a+\theta-f)xy - (b+\beta)y) + \frac{1}{2}(N-1)\sigma^2x^2y^2 \right) \right] dt \\ &\quad - N\sigma xy(1+y)^{N-1}dW_t \\ &= L\Psi(x, y)dt - N\sigma xy(1+y)^{N-1}dW_t, \end{aligned}$$

avec

$$L\Psi(x, y) = -N(1+y)^{N-2} \left(((1+y)(1-y)(a+\theta-f)xy - (b+\beta)y) + \frac{1}{2}(N-1)\sigma^2x^2y^2 \right).$$

En vertu de (3.5) et du fait que $(1+y)^{N-2} \geq 1$ (car N est assez grand) on a $L\Psi(x, y) \leq -Nw_1$ pour tout $y \in [w_1, 1[$

Par la formule de Dynkin (proposition 1.4.1), et la bornitude $(1+y)^{N-1}xy$, on a ;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Psi(x(T_{w_1}), y(T_{w_1}))] &= \Psi(x(0), y(0)) + \mathbb{E}\left[\int_0^{T_{w_1}} L\Psi(x(t), y(t))dt\right] \\ &\leq \Psi(x(0), y(0)) - Nw_1\mathbb{E}[T_{w_1}]. \end{aligned}$$

On déduit de (3.4) que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)\right) \geq 1 - \gamma \quad \text{pour tout } (x(0), y(0)) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Comme γ est arbitraire, on a

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)\right) \geq 1 - \gamma \quad \text{pour tout } (x(0), y(0)) \in [0, 1] \times [0, 1]. \quad (3.6)$$

De (3.6) on déduit que pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $M_2 > 0$ tel que pour $t > M_2$

$$1 - \epsilon \leq 1 - y(t) \leq 1 + \epsilon.$$

En procédant comme dans le cas déterministe, on montre que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad p.s..$$

On déduit que pour $a + \theta < f + b + \beta + \frac{\sigma^2}{2}$ la crise meurt et $(x(t), y(t), k(t))$ tend vers $\left(1, 0, \left(\frac{\kappa}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$ presque sûrement quand t tend vers $+\infty$.

Proposition 3.2.2. *Si $a + \theta > f + b + \beta + \frac{\sigma^2}{2}$ alors la solution $(x(t), y(t), k(t))$ tend presque sûrement vers $E_2 = \left(x_0, 1 - x_0, 0, \left(\frac{\kappa x_0^\lambda}{(\delta_0 + p + B(1 - \tau))}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$ quand t tend vers $+\infty$. Ceci signifie que la crise persiste.*

Démonstration. Nous allons montrer que le polynôme $\phi_2(x)$ admet deux racines réelles dont une seule appartient à $]0, 1[$.

$$\Delta = (a + \theta - f)^2 - 2(b + \beta)^2 \sigma^2 > \left(b + \beta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \geq 0$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left(b + \beta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2(b + \beta)\sigma^2 &= (b + \beta)^2 - \sigma^2(b + \beta) + \frac{\sigma^4}{4} + 2(b + \beta)\sigma^2 \\ &= (b + \beta)^2 + (b + \beta)\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{4} \\ &= \left(b + \beta + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 < (a + \theta - f)^2 \quad (\text{par hypothèse}). \end{aligned}$$

D'où

$$\left(b + \beta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2(b + \beta)\sigma^2 < (a + \theta - f)^2.$$

C'est-à-dire

$$\left(b + \beta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 < (a + \theta - f)^2 - 2(b + \beta)\sigma^2.$$

Ainsi, l'équation $\phi_2(x) = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 définies par :

$$x_1 = \frac{a + \theta - f - \sqrt{(a + \theta - f)^2 - 2(b + \beta)\sigma^2}}{\sigma^2},$$

$$x_2 = \frac{a + \theta - f + \sqrt{(a + \theta - f)^2 - 2(b + \beta)\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

On a $x_1 + x_2 = \frac{2(a + \theta - f)}{\sigma^2} > 0$ et $x_1 x_2 = \frac{2(b + \beta)}{\sigma^2} > 0$.

Donc les solutions x_1 et x_2 sont strictement positifs et $x_1 < x_2$.

Comme $\phi_2(0) = -(b + \beta) < 0$ et $\phi_2(1) = a + \theta - \left(f + b + \beta + \frac{\sigma^2}{2}\right) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de dire qu'au moins une des deux valeurs x_1 et x_2 est dans $]0, 1[$. Si $x_1, x_2 \in]0, 1[$ on aurait $\phi_2(1) = -\frac{\sigma^2}{2}(1 - x_1)(1 - x_2) < 0$ ce qui contredit le fait que $\phi_2(1) > 0$. Donc l'unique solution dans $]0, 1[$ est x_1 .

Nous prouvons que les valeurs de $x(t)$ pour $t \geq 0$ oscillent autour de x_1 presque sûrement *i.e.*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) < x_1 < \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t).$$

- Prouvons que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) > x_1$.

Si cela n'était pas vrai, il existerait $\epsilon \in]0, 1[$ petit tel que $\mathbb{P}(\Omega_1) > \epsilon$ où

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t, \omega) \leq x_0 - 2\epsilon\}.$$

Par suite pour chaque $\omega \in \Omega_1$, il existe $T_1 = T_1(\omega)$ tel que

$$x(t, \omega) \leq x_0 - \epsilon \quad \text{pour tout } t \geq T_1(\omega).$$

On a $\phi'_2(x_0) = \sqrt{(a + \theta - f)^2 - 2(b + \beta)\sigma^2} > 0$, ϕ_2 étant une parabole et comme $\phi_2(x_0) > 0$ alors ϕ_2 est croissante sur $\left]-\infty, \frac{a + \theta - f}{\sigma^2}\right]$ et on a

$$\phi_2(x(t, \omega)) \leq \phi_2(x_0 - \epsilon) \quad \text{pour tout } t \geq T_1(\omega). \quad (3.7)$$

D'autres part le théorème des grands nombres pour les martingales permet de dire qu'il existe $\Omega_2 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma x(s, \omega) dW(s, \omega) = 0. \quad (3.8)$$

Maintenant fixons $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. De l'équation (3.7) pour $t \geq T_1(\omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(y(t, \omega)) &= \ln(y(0)) + \int_0^{T_1(\omega)} \phi_2(x(s, \omega)) ds \\
&+ \int_{T_1(\omega)}^t \phi_2(x(s, \omega)) ds + \int_0^t \sigma x(s, \omega) dW(s, \omega) \\
&\leq \ln(y(0)) + \int_0^{T_1(\omega)} \phi_2(x(s, \omega)) ds \\
&+ (t - T_1(\omega)) \phi_2(x_0 - \epsilon) + \int_0^t \sigma x(s, \omega) dW(s, \omega).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

En utilisant (3.8) et (3.9) on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln(y(t, \omega))}{t} \leq \phi_2(x_0 - \epsilon) < 0.$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, \omega) = 0$ et on déduit $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \omega) = 1$. (ce qui contredit le fait que $x(t, \omega) \leq x_0 - \epsilon$ pour tout $t \geq T_1(\omega)$.)

Ainsi on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup x(t) > x_1$.

- Prouvons maintenant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf x(t) < x_1$.

Si ce n'est pas vrai, alors il existe $\epsilon_1 \in]0, 1[$ petit tel que $\mathbb{P}(\Omega_3) > \epsilon_1$ où

$$\Omega_3 = \{\omega \in \Omega : \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf x(t, \omega) \geq x_0 + 2\epsilon_1\}.$$

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega_3$ il existe un $T_2 = T_2(\omega)$ tel que

$$x(t, \omega) \geq x_0 + \epsilon_1 \quad \text{pour tout } t \geq T_2(\omega).$$

Maintenant, fixons $\omega \in \Omega_2 \cap \Omega_3$. On a

$$\begin{aligned}
\ln(y(t, \omega)) &= \ln(y(0)) + \int_0^{T_2(\omega)} \phi_2(x(s, \omega)) ds \\
&+ \int_{T_2(\omega)}^t \phi_2(x(s, \omega)) ds + \int_0^t \sigma x(s, \omega) dW(s, \omega) \\
&\geq \ln(y(0)) + \int_0^{T_2(\omega)} \phi_2(x(s, \omega)) ds + (t - T_2(\omega)) \phi_2(x_1 - \epsilon) \\
&+ \int_0^t \sigma x(s, \omega) dW(s, \omega).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant (3.8) et (3.10) on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{\ln(y(t, \omega))}{t} \geq \phi_2(x_1 - \epsilon) > 0.$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, \omega) = +\infty$. Ceci contredit $y(t, \omega) \leq 1$. On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf x(t) < x_1$.

$$\text{Donc } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1 & p.s. \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1 - x_1 & p.s. \end{cases}$$

Ceci signifie que $y(t)$ oscille autour de $1 - x_1 \neq 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donc la crise persiste.

On a pour k :

$$dk(t) = \kappa x^\lambda(t) k^\alpha(t) - (\delta_0 + p + B(1 - \tau)) k(t)$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1$ p.s., on montre que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \left(\frac{\kappa x_0^\lambda}{\delta_0 + p + B(1 - \tau)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ p.s..}$$

3.3 Simulations

Dans cette partie nous faisons la simulation des résultats obtenus précédemment. On considère les mêmes valeurs que ceux du tableau (2).

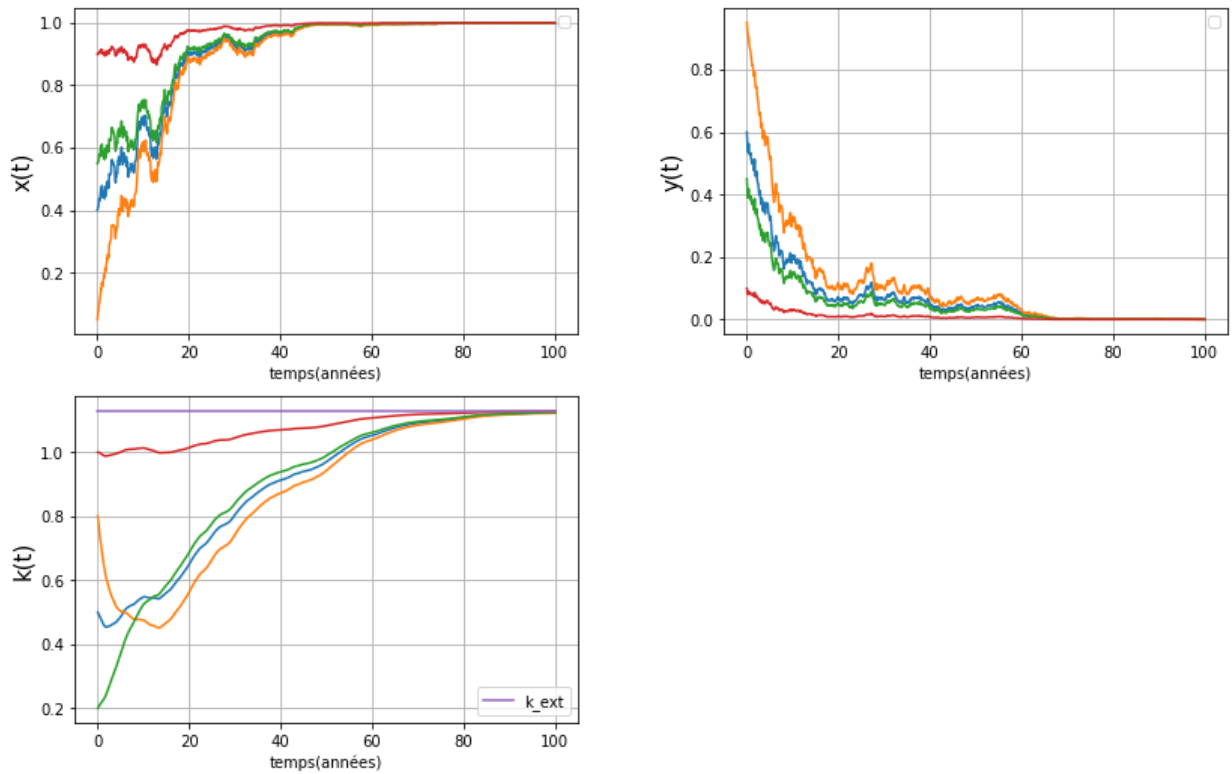


FIGURE 4 – Niveau de l'économie en cas d'extinction de la crise : cas stochastique.

La figure (4) montre la convergence des solutions du modèle (2.11) tel que définit par la proposition 3.2.1. On constate que pour $a + \theta = 0.01 + 0.09 = 0.1$, $b + \beta + f = 0.15$ les fonctions x , y et k convergent presque sûrement vers 1, 0 et 1.1293 respectivement. Cela signifie la fin de la crise dans le système bancaire.

Lorsque $\theta = 0.2$, la crise persiste et les fonctions x , y et k oscillent respectivement autour de $x_0 \simeq 0.7421951$, $y_0 = 1 - x_0 \simeq 0.2578049$ et $k_0 = \left(\frac{x_0^\lambda \kappa}{\delta_0 + p + B(1 - \tau)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \simeq 0.7237994$

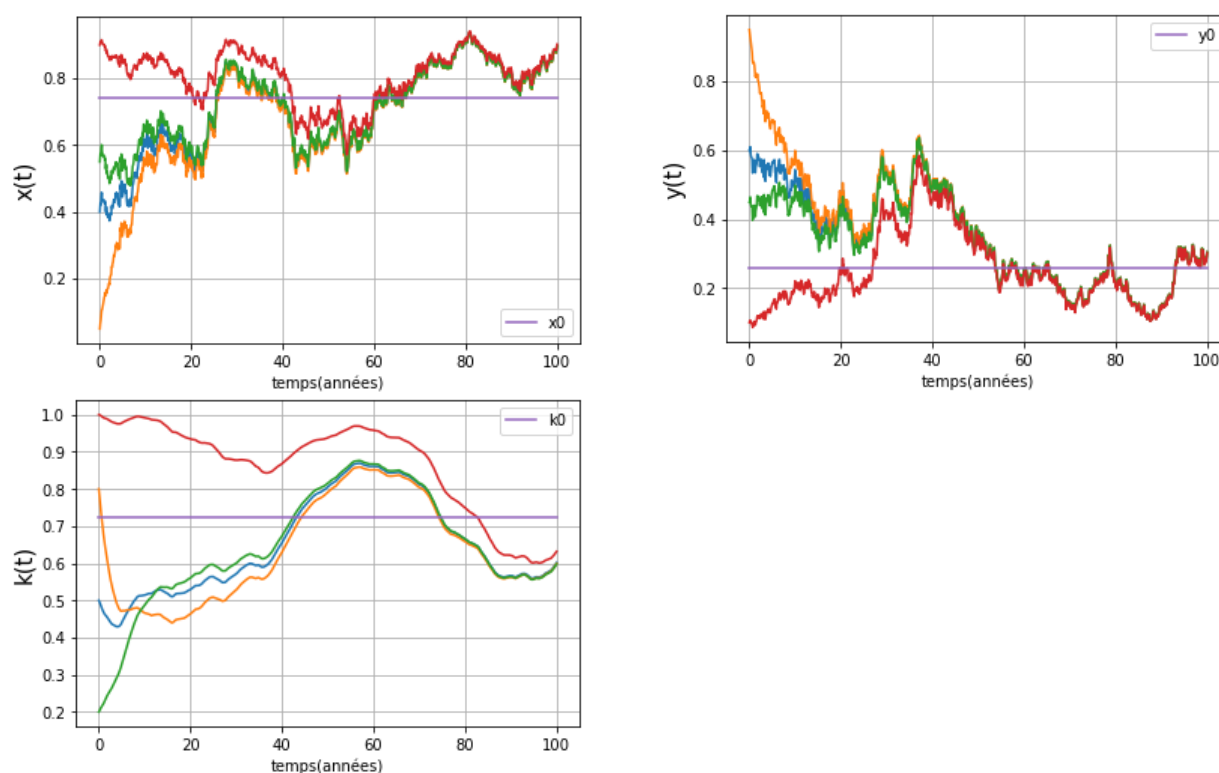


FIGURE 5 – Niveau de l'économie en cas de persistance de la crise : cas stochastique.

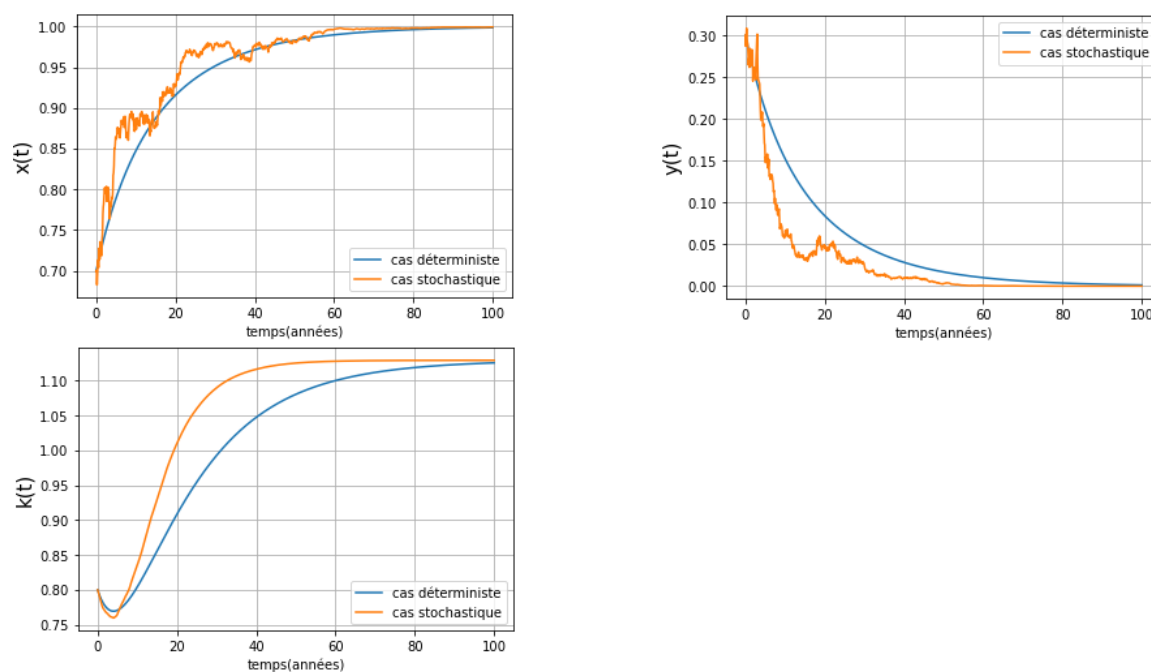


FIGURE 6 – Comparaison système stochastique/déterministe en cas d'extinction de crise.

Les figures 6 et 7 comparent les résultats obtenus du cas déterministe au cas stochastique dans les situations de disparition et de persistance de la crise respectivement. On constate que dans le cas stochastique, en cas de disparition ou de persistance de la crise, l'économie oscille

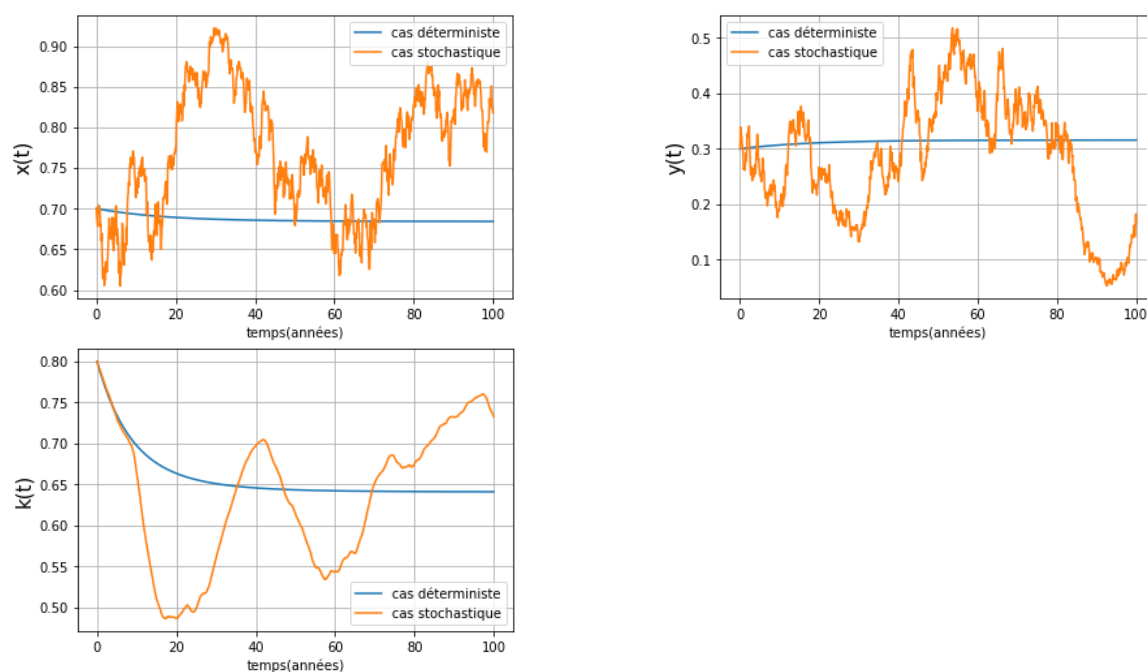


FIGURE 7 – Comparaison système stochastique/déterministe en cas de persistance de crise.

autour des valeurs qui sont relativement supérieures à celles trouvées au cas déterministe.

Conclusion

Parvenu au terme de notre travail, où il était question pour nous d'étudier l'influence des crises bancaires sur le développement économique, il ressort que les crises peuvent être contrôlées si l'on applique de bonnes politiques économiques. Nous avons tour à tour présenté notre modèle en nous inspirant de celui de Tadmon-Njike [15] dans lequel nous avons pris en compte le capital humain. Nous avons ensuite étudié le modèle déterministe où nous avons mis en évidence l'existence de deux points d'équilibre : un équilibre correspondant à un système sans crise et un équilibre avec crise. Nous avons établi l'existence d'un ensemble positivement invariant pour les solutions de notre système et montré la stabilité asymptotique de nos deux points d'équilibre. En effet si nous posons $\mathcal{R}_0 = \frac{b + \beta}{a + \theta - f}$, on constate que pour $\mathcal{R}_0 < 1$, le système converge vers l'équilibre sans crise. Dans le cas $\mathcal{R}_0 \geq 1$, nous constatons l'existence et la stabilité asymptotique de l'équilibre avec crise. Nous avons fait des simulations numériques en utilisant le schéma d'Euler pour vérifier les résultats théoriques obtenus. Ensuite, nous avons étudié le modèle stochastique où nous avons découvert que l'ensemble positivement invariant pour le système déterministe l'est aussi avec la probabilité 1 pour le système stochastique. Nous avons examiné le comportement à long terme de notre système et découvert qu'il oscille soit autour de l'équilibre sans crise dont nous avons parlé plus haut soit autour d'un état sans crise que nous avons déterminé. Les simulations numérique y afférentes utilisent le schéma numérique implicite de Runge-Kutta d'ordre 1.0 (voir Kloeden[7]). À partir de ces résultats, nous avons constaté que le capital par habitant est plus important en absence de crise que lorsqu'il y en a. Nous recommandons aux décideurs politiques de contrôler les relations qu'entretiennent les banques entre elles pour prévenir la mondialisation des crises.

À l'issue de ce travail, de nouvelles perspectives s'offrent à nous à savoir :

- Étudier la dynamique d'une crise au sein d'une banque.
- Appliquer notre modèle au système bancaire de la zone CEMAC.

Bibliographie

- [1] C. Antonin and C. Blot. "Peut-on se relever d'une crise bancaire ? analyse comparée de l'irlande et de l'islande". *OFCE Les notes du blog*, (25) :1–7, 2013.
- [2] G. Bazot, E. Jeffers, O. Ouyahia, et al. "Les banques coopératives sont-elles plus résistantes ? l'exemple de la crise financière de 2007-2009". In *34th Symposium in Money, Banking and Finance, Groupement de Recherche Européen "Monnaie Banque Finance", Nanterre, France*, 2017.
- [3] A. Bucci, D. La Torre, D. Liuzzi, and S. Marsiglio. "Financial contagion and economic development : An epidemiological approach". *Journal of Economic Behavior and Organization*, 162 :211–228, 2019.
- [4] C. W. Cobb and P. H. Douglas. "A theory of production". 1928.
- [5] T. Jiang, M. Zhou, B. Shen, W. Xuan, S. Wen, T. Shao, and L. Jianquan. "Dynamics in bank crisis model". *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- [6] Z. Jin and Z.-e. Ma. "The SIR epidemical models with continuous and impulsive vaccinations". *Journal-North China Institute of Technology*, 24(4) :235–243, 2003.
- [7] P. E. Kloeden and E. Platen. "Stochastic differential equations". In *Numerical solution of stochastic differential equations*, pages 103–160. Springer, 1992.
- [8] V. Lakshmikantham, S. Leela, and A. A. Martynyuk. "*Stability analysis of nonlinear systems*". Springer, 1989.
- [9] X. Liao, L. Wang, and P. Yu. "*Stability of dynamical systems*". Elsevier, 2007.

- [10] R. E. Lucas Jr. "On the mechanics of economic development". *Journal of monetary economics*, 22(1) :3–42, 1988.
- [11] X. Mao. "*Stochastic differential equations and applications*". Elsevier, 2007.
- [12] C. Mathonnat. "*Développement financier et crises bancaires : une analyse de l'effet exercé par la taille et l'activité des intermédiaires financiers sur l'origine et les conséquences des crises bancaires*". PhD thesis, Université Clermont Auvergne, 2017.
- [13] B. Oksendal. "*Stochastic differential equations : an introduction with applications*". Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] J. T. Puatwoe and S. M. Piabuo. "Financial sector development and economic growth : evidence from cameroon". *Financial Innovation*, 3(1) :1–18, 2017.
- [15] C. Tadmon and E. R. Njike Tchaptchet. "Impact of financial crisis on economic growth : A stochastic model". *Stochastics and Quality Control*, 37(1) :45–63, 2022.

Annexe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N=25; time=100;
b=0.03; a=0.01; f_=0.02; beta=0.1;
theta1=0.2; theta=0.09; lam=1;
delta0=0.1; kappa=0.2; p=0.001; alpha=0.33;
sigma=0.00; sigma1=0.15;
B=0.5 ; tau=5/6 ;

#Runge-Kutta's method for solving SDE
dt=0.1
tim=time/dt
def f(x,y):
f1=(a+theta-f_)*x*y-(b+beta)*y
return f1
def g(x,y):
g1=sigma*x*y
return g1
def j1(x,y):
p1=x+dt*f(x,y)+g(x,y)*(dt)**(0.5)
return p1
def j2(x,y):
p2=y-dt*f(x,y)-g(x,y)*(dt)**(0.5)
return p2
y=np.ones((tim+1),dtype='float')
x=np.ones((tim+1),dtype='float')
```

```

y[0]=0.3
x[0]=1-y[0]
k=np.ones((tim+1),dtype='float')
k[0]=0.8

dW = np.sqrt(dt)*np.random.randn(len(x));
for tt in range(0,len(x)-1) :

# Calcul de la part de banques en crise
y[tt+1]=y[tt]+dt*f(x[tt],y[tt])+g(x[tt],y[tt])*dW[tt]+\
0.5*(g(j1(x[tt],y[tt]),j2(x[tt],y[tt]))\
-g(x[tt],y[tt]))*(dW[tt]**2-dt)*dt**(-0.5)

# Calcul de la part de banques saines
x[tt+1]=x[tt]-dt*f(x[tt],y[tt])-g(x[tt],y[tt])*dW[tt]-\
0.5*(g(j1(x[tt],y[tt]),j2(x[tt],y[tt]))\
-g(x[tt],y[tt]))*(dW[tt]**2-dt)*dt**(-0.5);

# Calcul du niveau de l'economie
k[tt+1]=k[tt]+dt*kappa*(1-y[tt])**lam*k[tt]**alpha\
-dt*(delta0+p+B*(1-tau))*k[tt]

t=np.array(np.linspace(0,100,tim+1))
plt.plot(t,k)
plt.xlabel("temps(années)")
plt.ylabel("k(t)", Fontsize=15)
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()

```