

# Rapport de stage

## Développement d'un noyau de programmation synchrone

Jordan Ischard  
3ème année de licence Informatique  
Université d'Orléans

25 Mars 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Journal de bord</b>	<b>4</b>
2.1	Mars . . . . .	4
2.1.1	Semaine 25 au 29 Mars . . . . .	4
2.2	Avril . . . . .	4
2.2.1	Semaine du 1 au 5 Avril . . . . .	4
2.2.2	Semaine du 8 au 12 . . . . .	5
2.2.3	Semaine du 15 au 19 . . . . .	5
2.2.4	Semaine du 22 au 16 . . . . .	5
2.3	Mai . . . . .	6
2.3.1	Semaine du 29 Avril au 3 . . . . .	6
2.3.2	Semaine du 6 au 10 . . . . .	6
2.3.3	Semaine du 13 au 17 . . . . .	6
2.3.4	Semaine du 20 au 24 . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Recherche d'Informations</b>	<b>7</b>
3.1	Le Réactive ML . . . . .	7
3.2	Les $\lambda$ -calculs . . . . .	8
3.2.1	Les règles de $\beta$ -réduction . . . . .	8
3.2.2	Les règles de réduction générale . . . . .	8
3.2.3	Les règles de priorité . . . . .	8
3.2.4	Comment savoir si on a une forme normal ? . . . . .	8
3.3	ISWIM . . . . .	9
3.4	Les différentes machines traitées . . . . .	10
3.4.1	CC Machine . . . . .	10
3.4.2	SCC Machine . . . . .	10
3.4.3	CK Machine . . . . .	11
3.4.4	CEK Machine . . . . .	11
3.4.5	SECD . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>14</b>
5.1	Exemple de fonctionnement de la machine CC . . . . .	14
5.2	Exemple de fonctionnement de la machine SCC . . . . .	14
5.3	Exemple de fonctionnement de la machine CK . . . . .	15
5.4	Exemple de fonctionnement de la machine CEK . . . . .	16
5.5	Exemple de fonctionnement de la machine SECD . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>18</b>

# 1 Introduction

## 2 Journal de bord

### 2.1 Mars

#### 2.1.1 Semaine 25 au 29 Mars

Afin de me remettre dans le contexte du stage et de comprendre ces problématiques, le lundi a été entièrement consacré à la relecture et lecture des deux articles ,proposés durant l’entretien, un sur le RéactiveML[1] et un sur le ZINC[2].

Toutes mes notes, qui sont un résumé de ce que j’ai compris, sont données dans la section **Recherche d’Informations**.

Le mardi matin a servie à clarifier mes questions en une petite liste présentée lors de la réunion. La réunion s’est déroulée l’après-midi et a permis d’apporter des réponses aux questions pré-écrite le matin et à fixer des objectifs. La réunion en a fixé 2 :

1. Implémenter les  $\lambda$ -calculs
2. Implémenter la machine SECD

2 semaines m’ont été accordé pour réaliser ces objectifs dans le langage de programmation *Ocaml*. J’ai eu, pour cela, un article traitant des  $\lambda$ -calculs[3] afin de m’aider dans ma démarche.

Il a été décidé que tous les programmes seront partagé sur un github qui a pour adresse :

<https://github.com/JordanIschard/StageL3>.

Le reste de la journée a été utilisé pour commencer ce dit article.

La compréhension des  $\lambda$ -calcul a été étalé sur le reste de la semaine. Cependant l’avancement a été perturbé le mercredi à cause d’un problème de compréhension des règles de priorité dans les  $\lambda$ -calculs. Ce temps perdu en compréhension a été compensé dans l’écriture de ce rapport.

M. Dabrowski m’a aidé à régler ce problème le jeudi matin ce qui m’a permis d’assimilé en presque totalité les  $\lambda$ -calculs et de commencer l’implémentation de ceux-ci en Ocaml.

### 2.2 Avril

#### 2.2.1 Semaine du 1 au 5 Avril

L’implémentation des  $\lambda$ -calculs a presque été terminé à l’exception du parser, de l’ $\alpha$ -réduction et d’un petit bug de renommage lié à la règle de  $\beta$ -réduction suivante :

$$(\lambda X_1.M_1)[X_2 \leftarrow M_2] = (\lambda X_3.M_1[X_1 \leftarrow X_3][X_2 \leftarrow M_2])$$

où  $X_1 \neq X_2$ ,  $X_3 \notin FV(M_2)$  et  $X_3 \notin FV(M_1) \setminus X_1$

La réunion a changé les objectifs de base , en gardant le langage Ocaml, par les objectifs suivants :

1. Implémenter les  $\lambda$ -calculs
2. Implémenter la machine CC et par extension la machine SCC
3. Implémenter la machine CK et par extension la machine CEK
4. Implémenter la machine SECD

Une semaine supplémentaire m’a été accordé pour faire cela.

La compréhension des différentes machines ont été faite le lundi après la réunion, le mardi et le mercredi, toutes les informations récolté sont dans la partie traitant des différentes machines.

Cependant rien a été implémenté à cause d’un problème lié à Ocaml et Emacs. En effet, Ocaml propose un système de module pour pouvoir séparer des parties de codes dans différents fichiers.

Malheureusement après une après-midi complète de recherche sur ce sujet, Je n’ai pas réussi à trouver une solution. Un mail a donc été envoyé à M. Dabrowski et Mme Bousdira pour avoir une aide le mercredi matin.

La structure des méthodes et leurs contenus a commencé à être écrit sur papier jusqu’au jeudi midi. En effet, M. Dabrowski m’a aidé avec les modules en Ocaml. Il fallait laisser tomber emacs et son interaction dynamique et faire une compilation grâce à *ocamlbuild*.

L’implémentation du langage ISWIM a été fait le vendredi . La machine CC est presque terminé mais un bug lié aux opérations créer une erreur. L’implémentation de la machine SCC sera faite durant la semaine prochaine. Le problème de l’implémentation des  $\lambda$ -calculs a été fixé ainsi que le bug de la machine CC durant le week-end.

- 2.2.2** Semaine du 8 au 12
- 2.2.3** Semaine du 15 au 19
- 2.2.4** Semaine du 22 au 16

## **2.3 Mai**

**2.3.1 Semaine du 29 Avril au 3**

**2.3.2 Semaine du 6 au 10**

**2.3.3 Semaine du 13 au 17**

**2.3.4 Semaine du 20 au 24**

## 3 Recherche d'Informations

### 3.1 Le Réactive ML

Modèle de programmation  $\rightarrow$  concurrence coopérative

L'analyse est découpé en 2 sous analyse :

- **statique** : système de type et d'effet
- **réactive** : détecter les erreurs de concurrence

Ordonnancement coopératif\*  $\rightarrow$  *chaque processus va régulièrement "laisser la main aux autres"*

Ordonnancement préemptif  $\rightarrow$  *le système va "donner un temps de parole" à chacun*

Points fort :

- *implémentation séquentielle efficace*
- *pas de problème de parallélisme*

Points faible :

- *responsabilité de la réactivité au dev*

Le modèle réactif synchrone définit une notion de temps logique qui est une succession d'instant.

**Un programme est réactif si son exécution fait progresser les instants logique.**

**Exemple**

1. let process clock timer s =
2.   let time = ref(Unix.gettimeofday()) in
3.   loop
4.     let time' = Unix.gettimeofday() in
5.     if time' -. !time >= timer
6.     then(emit s(); time := time')
7.   end

Le problème ici est que le contenu de la boucle peut s'effectuer instantanément or il faut attendre un instant logique pour. Du coup, on doit ajouter une **pause entre la ligne 6 et 7**.

Une **condition suffisante** pour q'un **processus récursif soit réactif** est qu'il ait **toujours** au moins **un instant logique** entre l'instanciation du processus et l'appel récursif.

**Définition des termes**  $k := \bullet \mid \circ \mid \phi \mid k \parallel k \mid k + k \mid k ; k \mid \mu\phi.k \mid \text{run } k \mid k^{oo}$

## 3.2 Les $\lambda$ -calculs

### 3.2.1 Les règles de $\beta$ -réduction

- $X_1[X_1 \leftarrow M] = M$
- $X_2[X_1 \leftarrow M] = X_2$   
où  $X_1 \neq X_2$
- $(\lambda X_1.M_1)[X_1 \leftarrow M_2] = (\lambda X_1.M_1)$
- $(\lambda X_1.M_1)[X_2 \leftarrow M_2] = (\lambda X_3.M_1[X_1 \leftarrow X_3])[X_2 \leftarrow M_2]$   
où  $X_1 \neq X_2$ ,  $X_3 \notin FV(M_2)$  et  $X_3 \notin FV(M_1) \setminus X_1$
- $(M_1 M_2)[X \leftarrow M_3] = (M_1[X \leftarrow M_3] M_2[X \leftarrow M_3])$

### 3.2.2 Les règles de réduction générale

- $(\lambda X_1.M) \alpha (\lambda X_1.M[X_1 \leftarrow X_2])$  où  $X_2 \notin FV(M)$
- $((\lambda X_1.M_1)M_2) \beta M_1[X \leftarrow M_2]$
- $(\lambda X.(M X)) \eta M$  où  $X \notin FV(M)$

La réduction générale  $n = \alpha \cup \beta \cup \eta$ .

### 3.2.3 Les règles de priorité

- Application associative à gauche :  $M_1 M_2 M_3 = ((M_1 M_2)M_3)$
- Application prioritaire par rapport au abstraction :  $\lambda X.M_1 M_2 = \lambda X.(M_1 M_2)$
- Les abstractions consécutives peuvent être regroupé :  $\lambda XYZ.M = (\lambda X.(\lambda Y.(\lambda Z.M)))$

### 3.2.4 Comment savoir si on a une forme normal ?

Une expression est une forme normale si on ne peut pas réduire l'expression via une  $\beta$  ou  $\eta$  réduction.

**Théorème de la forme normale** : Si on peut réduire  $L$  tels que  $L =_n M$  et  $L =_n N$  et que  $N$  et  $M$  sont en forme normal alors  $M = N$  à  $n$  renommage près.

**Théorème de Church-Rosser ( pour  $=_n$  )** : Si on a  $M =_n N$ , alors il existe un  $L'$  tels que  $M \rightarrow_n L'$  et  $N \rightarrow_n L'$ .

Certaines lambda calcul expression n'a pas de forme normal comme :  $((\lambda x.x x) (\lambda x.x x))$ .

D'autres en ont une mais on peut rentrer dans une boucle infini de réduction si on choisi la mauvaise réduction.

Le problème est quand on évalue un argument de la fonction qui n'est jamais utilisé. Pour palier à ça, on utilise la stratégie d'appliquer toujours les  $\beta$  et  $\eta$  réduction le plus à gauche. Ces règles sont les suivantes :

- $M \rightarrow_{\bar{n}} N$  if  $M \beta N$
- $M \rightarrow_{\bar{n}} N$  if  $M \eta N$
- $(\lambda X.M) \rightarrow_{\bar{n}} (\lambda X.N)$
- $(M N) \rightarrow_{\bar{n}} (M' N)$  if  $M \rightarrow_{\bar{n}} M'$   
et  $\forall L, (M N) \beta L$  impossible et  $(M N) \eta L$  impossible
- $(M N) \rightarrow_{\bar{n}} (M N')$  if  $N \rightarrow_{\bar{n}} N'$   
et  $M$  est une forme normale  
et  $\forall L, (M N) \beta L$  impossible et  $(M N) \eta L$  impossible

Cette solution est sûr mais reste peut utilisé car elle est assez lente.



### 3.3 ISWIM

ISWIM à une grammaire étendue de la grammaire des  $\lambda$ -calcul.

$M, N, L, K =$

|  $X$  (les variables)

|  $(\lambda X.M)$

|  $(M M)$

|  $b$  (les constantes  $b$ )

|  $(o^n M \dots M)$  avec  $o^n$  les fonctions primitives

$V, U, W =$

|  $b$

|  $X$

|  $(\lambda X.M)$

Une application n'est jamais une valeur alors qu'une abstraction est toujours une valeur.

Les règles de  $\beta$ -réductions sont les mêmes que celle pour les  $\lambda$ -calcul avec 2 ajouts :

—  $b[X \leftarrow M] = b$

—  $(o^n M_1 \dots M_n)[X \leftarrow M] = (o^n M_1[X \leftarrow M] \dots M_n[X \leftarrow M])$

La réduction est la même quand lambda calcul mais on vérifie juste que la réduction est faite avec une valeur.  $((\lambda X.M) V) \beta_v M[X \leftarrow V]$ . Cette restriction permet une sorte d'ordre dans les calculs.

$\eta$  et  $\alpha$  réduction ne sont plus vue comme tel. L' $\eta$ -réduction n'est pas utilisé et l' $\alpha$ -réduction sera utilisé que pour chercher une équivalence entre deux termes.

Cependant on ajoute une  $\delta$ -réduction en plus qui va s'occuper de gérer les réductions avec opérations.

### 3.4 Les différentes machines traitées

#### 3.4.1 CC Machine

CC vient des termes **Control string** et **Context** qui représente respectivement :

- la partie du  $\lambda$ -calcul que l'on traite
- la partie du  $\lambda$ -calcul que l'on met en attente

Elle utilise le langage ISWIM.

Les règles définies pour cette machine sont les suivantes :

1.  $\langle (M N), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M, E[(\square N)] \rangle$  si  $M \notin V$
2.  $\langle (V_1 N), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M, E[(V_1 \square)] \rangle$  si  $M \notin V$
3.  $\langle (o^n V_1 \dots V_i M N \dots), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M, E[(o^n V_1 \dots V_i \square N \dots)] \rangle$  si  $M \notin V$
4.  $\langle ((\lambda X.M)V), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$
5.  $\langle (o^n b_1 \dots b_n), E \rangle \mapsto_{cc} \langle V, E \rangle$  avec  $V = \delta(o^n, b_1 \dots b_n)$
6.  $\langle V, E[(U \square)] \rangle \mapsto_{cc} \langle (U V), E \rangle$
7.  $\langle V, E[(\square N)] \rangle \mapsto_{cc} \langle (V N), E \rangle$
8.  $\langle V, E[(o^n V_1 \dots V_i \square N \dots)] \rangle \mapsto_{cc} \langle (o^n V_1 \dots V_i V N \dots), E \rangle$

La machine peut s'arrêter dans 3 états différents :

- on a une **constante**  $b$  tels que  $\langle M, \square \rangle \rightarrow_{cc} \langle b, \square \rangle$  ;
- on a une **abstraction function** tels que  $\langle M, \square \rangle \rightarrow_{cc} \langle \lambda X.N, \square \rangle$  ;
- on a un **état inconnu** soit une **erreur**.

Un exemple de la machine CC est fait dans les Annexes.

#### 3.4.2 SCC Machine

Le SCC est une simplification de règle du CC. En effet, le CC exploite uniquement les informations de la chaîne de contrôle (Control string). Du coup on combine certaines règles pour en faire qu'une.

Les règles qui définissent la machine SCC sont les suivantes :

1.  $\langle (M N), E \rangle \mapsto_{scc} \langle M, E[(\square N)] \rangle$
2.  $\langle (o^n M N \dots), E \rangle \mapsto_{scc} \langle M, E[(o^n \square N \dots)] \rangle$
3.  $\langle V, E[(\lambda X.M \square)] \rangle \mapsto_{scc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$
4.  $\langle V, E[(\square N)] \rangle \mapsto_{scc} \langle N, E[(V \square)] \rangle$
5.  $\langle b, E[(o^n, b_1, \dots, b_i, \square)] \rangle \mapsto_{scc} \langle V, E \rangle$  avec  $\delta(o^n, b_1, \dots, b_i, b) = V$
6.  $\langle V, E[(o^n, V_1, \dots, V_i, \square, N L)] \rangle \mapsto_{scc} \langle N, E[(o^n, V_1, \dots, V_i, V, \square, L)] \rangle$

De même que pour la machine CC, la machine SCC peut s'arrêter dans 3 états différents :

- on a une **constante**  $b$  tels que  $\langle M, \square \rangle \rightarrow_{scc} \langle b, \square \rangle$  ;
- on a une **abstraction function** tels que  $\langle M, \square \rangle \rightarrow_{scc} \langle \lambda X.N, \square \rangle$  ;
- on a un **état inconnu** soit une **erreur**.

Un exemple de la machine SCC est fait dans les Annexes.

### 3.4.3 CK Machine

Les machines CC et SCC fonctionnent en allant chercher le plus à l'intérieur, c'est-à-dire que si l'on a une application on va en créer une intermédiaire dans le contexte avec un trou et traité la partie gauche de cette application etc jusqu'à arriver à un état traitable pour pouvoir "reconstruire", en reprenant l'application intermédiaire. C'est le style **LIFO (Last In, First Out)**. Ce qui fait que les étapes de transition dépendent directement de la forme du 1ère élément et non de la structure générale.

Pour palier à ce problème, la machine CK ajoute un nouvelle élément le **registre de contexte d'évaluation**, nommé  $\kappa$ , qui garde la partie "le plus à l'intérieur" accessible facilement.

$$\begin{aligned} \kappa = & \text{mt} \\ & | \langle \text{fun}, V, \kappa \rangle \\ & | \langle \text{arg}, N, \kappa \rangle \\ & | \langle \text{opd}, \langle V, \dots, V, o^n \rangle, \langle N, \dots \rangle, \kappa \rangle \end{aligned}$$

Cette structure est nommé **la continuation**.

Les règles qui définisse la machine CK sont les suivantes :

1.  $\langle (M \ N), \kappa \rangle \mapsto_{ck} \langle M, \langle \text{arg}, N, \kappa \rangle \rangle$
2.  $\langle (o^n \ M \ N \dots), \kappa \rangle \mapsto_{ck} \langle M, \langle \text{opd}, \langle o^n \rangle, \langle N, \dots \rangle, \kappa \rangle \rangle$
3.  $\langle V, \langle \text{fun}, (\lambda X.M), \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle M[X \leftarrow V], \kappa \rangle$
4.  $\langle V, \langle \text{arg}, N, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle N, \langle \text{fun}, V, \kappa \rangle \rangle$
5.  $\langle b, \langle \text{opd}, \langle b_i, \dots, b_1, o^n \rangle, \langle \rangle, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle V, \kappa \rangle$  avec  $\delta(o^n, b_1, \dots, b_i, b) = V$
6.  $\langle V, \langle \text{opd}, \langle V', \dots, o^n \rangle, \langle N, L, \dots \rangle, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle N, \langle \text{opd}, \langle V, V', \dots, o^n \rangle, \langle L, \dots \rangle, \kappa \rangle \rangle$

la machine CK peut s'arrêter dans 3 états différents :

- on a une **constante b** tels que  $\langle M, mt \rangle \rightarrow_{ck} \langle b, mt \rangle$  ;
- on a une **abstraction function** tels que  $\langle M, mt \rangle \rightarrow_{ck} \langle \lambda X.N, mt \rangle$  ;
- on a un **état inconnu** soit une **erreur**.

Un exemple de la machine CK est fait dans les Annexes.

### 3.4.4 CEK Machine

Pour toutes les machines vues pour l'instant la  $\beta$ -réduction était appliquée immédiatement. Cela coûte cher surtout quand l'expression devient grande. De plus, si notre substitution n'est pas une variable elle est traité avant d'être appliqué.

Il est plus intéressant d'appliquer les substitutions quand on en a vraiment la nécessité. Pour cela, la machine CEK ajoute les clauses et un environnement  $\varepsilon$  qui va stocker les substitutions à faire.

On a alors :

$\varepsilon$  = une fonction  $\{\langle X, c \rangle, \dots\}$   $c = \{\langle M, \varepsilon \rangle \mid FV(M) \subset \text{dom}(\varepsilon)\}$   $v = \{\langle V, \varepsilon \rangle \mid \langle V, \varepsilon \rangle \in c\}$   
 $\varepsilon[X \leftarrow c] = \{\langle X, c \rangle\} \cup \{\langle Y, c' \rangle \mid \langle Y, c' \rangle \in \varepsilon \text{ et } Y \neq X\}$

$\kappa$  est renommé  $\bar{\kappa}$  et est définit par :

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} = & \text{mt} \\ & | \langle \text{fun}, V, \bar{\kappa} \rangle \\ & | \langle \text{arg}, N, \bar{\kappa} \rangle \\ & | \langle \text{opd}, \langle V, \dots, V, o^n \rangle, \langle N, \dots \rangle, \bar{\kappa} \rangle \end{aligned}$$

Les règles qui définisse la machine CEK sont les suivantes :

1.  $\langle \langle (M \ N), \varepsilon \rangle, \bar{\kappa} \rangle \mapsto_{cek} \langle \langle M, \varepsilon \rangle, \langle \text{arg}, \langle N, \varepsilon \rangle, \bar{\kappa} \rangle \rangle$
2.  $\langle \langle (o^n \ M \ N \dots), \varepsilon \rangle, \bar{\kappa} \rangle \mapsto_{cek} \langle \langle M, \varepsilon \rangle, \langle \text{opd}, \langle o^n \rangle, \langle \langle N, \varepsilon \rangle, \dots \rangle, \bar{\kappa} \rangle \rangle$
3.  $\langle \langle V, \varepsilon \rangle, \langle \text{fun}, (\lambda X1.M), \varepsilon' \rangle, \bar{\kappa} \rangle \mapsto_{cek} \langle \langle M, \varepsilon'[X1 \leftarrow \langle V, \varepsilon \rangle] \rangle, \bar{\kappa} \rangle$  si  $V \notin X$
4.  $\langle \langle V, \varepsilon \rangle, \langle \text{arg}, \langle N, \varepsilon' \rangle, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{cek} \langle \langle N, \varepsilon' \rangle, \langle \text{fun}, \langle V, \varepsilon \rangle, \bar{\kappa} \rangle \rangle$  si  $V \notin X$
5.  $\langle \langle b, \varepsilon \rangle, \langle \text{opd}, \langle \langle b_i, \varepsilon_i \rangle, \dots, \langle b_1, \varepsilon_1 \rangle, o^n \rangle, \langle \rangle, \bar{\kappa} \rangle \rangle \mapsto_{cek} \langle \langle V, \emptyset \rangle, \bar{\kappa} \rangle$  avec  $\delta(o^n, b_1, \dots, b_i, b) = V$
6.  $\langle \langle V, \varepsilon \rangle, \langle \text{opd}, \langle v', \dots, o^n \rangle, \langle \langle N, \varepsilon' \rangle, c, \dots \rangle, \bar{\kappa} \rangle \rangle \mapsto_{cek} \langle \langle N, \varepsilon' \rangle, \langle \text{opd}, \langle \langle V, \varepsilon \rangle, v', \dots, o^n \rangle, \langle c, \dots \rangle, \bar{\kappa} \rangle \rangle$  si  $V \notin X$
7.  $\langle \langle X, \varepsilon \rangle, \bar{\kappa} \rangle \mapsto_{cek} \langle c, \bar{\kappa} \rangle$  avec  $\varepsilon(X) = c$

la machine CEK peut s'arrêter dans 3 états différents :

- on a une **constante b** tels que  $\langle \langle M, \emptyset \rangle, mt \rangle \rightarrow_{cek} \langle \langle b, \varepsilon \rangle, mt \rangle$  ;
- on a une **abstraction function** tels que  $\langle \langle M, \emptyset \rangle, mt \rangle \rightarrow_{cek} \langle \langle \lambda X.N, \varepsilon \rangle, mt \rangle$  ;
- on a un **état inconnu** soit une **erreur**.

Un exemple de la machine CEK est fait dans les Annexes.

### **3.4.5 SECD**

Un exemple de la machine SECD est fait dans les Annexes.

## 4 Conclusion

## 5 Annexe

### 5.1 Exemple de fonctionnement de la machine CC

Voici un exemple de fonctionnement de la machine CC :

CC machine :  $\langle (((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda y.(+ y\ y))\ \ulcorner 1^\urcorner), [] \rangle$   
 $> \langle (M\ N), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M, E[[]\ N] \rangle$  si  $M \notin V$   
 CC machine :  $\langle ((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda y.(+ y\ y)), [([]\ \ulcorner 1^\urcorner)] \rangle$   
 $> \langle ((\lambda X.M)V), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$   
 CC machine :  $\langle (\lambda x.f\ x)[f \leftarrow \lambda y.(+ y\ y)], [([]\ \ulcorner 1^\urcorner)] \rangle$   
 CC machine :  $\langle (\lambda x.(\lambda y.(+ y\ y))\ x), [([]\ \ulcorner 1^\urcorner)] \rangle$   
 $> \langle V, E[[]\ N] \rangle \mapsto_{cc} \langle (V\ N), E \rangle$   
 CC machine :  $\langle ((\lambda x.(\lambda y.(+ y\ y))\ x)\ \ulcorner 1^\urcorner), [] \rangle$   
 $> \langle ((\lambda X.M)V), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$   
 CC machine :  $\langle ((\lambda y.(+ y\ y))\ x)[x \leftarrow \ulcorner 1^\urcorner], [] \rangle$   
 CC machine :  $\langle ((\lambda y.(+ y\ y))\ \ulcorner 1^\urcorner), [] \rangle$   
 $> \langle ((\lambda X.M)V), E \rangle \mapsto_{cc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$   
 CC machine :  $\langle (+ y\ y)[y \leftarrow \ulcorner 1^\urcorner], [] \rangle$   
 CC machine :  $\langle (+ \ulcorner 1^\urcorner\ \ulcorner 1^\urcorner), [] \rangle$   
 $> \langle (o^n\ b_1...b_n), E \rangle \mapsto_{cc} \langle V, E \rangle$  avec  $V = \delta(o^n, b_1...b_n)$   
 CC machine :  $\langle \ulcorner 2^\urcorner, [] \rangle$

### 5.2 Exemple de fonctionnement de la machine SCC

Voici un exemple de fonctionnement de la machine SCC :

SCC machine :  $\langle (((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda y.(+ y\ y))\ \ulcorner 1^\urcorner), [] \rangle$   
 $> \langle (M\ N), E \rangle \mapsto_{scc} \langle M, E[[]\ N] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle ((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda y.(+ y\ y)), [([]\ \ulcorner 1^\urcorner)] \rangle$   
 $> \langle (M\ N), E \rangle \mapsto_{scc} \langle M, E[[]\ N] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle (\lambda f.\lambda x.f\ x), [([]\ \ulcorner 1^\urcorner), ([]\ (\lambda y.(+ y\ y)))] \rangle$   
 $> \langle V, E[[]\ N] \rangle \mapsto_{scc} \langle N, E[(V\ [])] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle (\lambda y.(+ y\ y)), [([]\ \ulcorner 1^\urcorner), ((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ [])] \rangle$   
 $> \langle V, E[(\lambda X.M)\ []] \rangle \mapsto_{scc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$   
 SCC machine :  $\langle (\lambda x.f\ x)[f \leftarrow (\lambda y.(+ y\ y))], [([]\ \ulcorner 1^\urcorner)] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle (\lambda x.(\lambda y.(+ y\ y))\ x), [([]\ \ulcorner 1^\urcorner)] \rangle$   
 $> \langle V, E[[]\ N] \rangle \mapsto_{scc} \langle N, E[(V\ [])] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle \ulcorner 1^\urcorner, [((\lambda x.(\lambda y.(+ y\ y))\ x)\ [])] \rangle$   
 $> \langle V, E[(\lambda X.M)\ []] \rangle \mapsto_{scc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$   
 SCC machine :  $\langle ((\lambda y.(+ y\ y))\ x)[x \leftarrow \ulcorner 1^\urcorner], [] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle ((\lambda y.(+ y\ y))\ \ulcorner 1^\urcorner), [] \rangle$   
 $> \langle (M\ N), E \rangle \mapsto_{scc} \langle M, E[[]\ N] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle (\lambda y.(+ y\ y)), [([]\ \ulcorner 1^\urcorner)] \rangle$   
 $> \langle V, E[[]\ N] \rangle \mapsto_{scc} \langle N, E[(V\ [])] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle \ulcorner 1^\urcorner, [(\lambda y.(+ y\ y))\ []] \rangle$   
 $> \langle V, E[(\lambda X.M)\ []] \rangle \mapsto_{scc} \langle M[X \leftarrow V], E \rangle$   
 SCC machine :  $\langle (+ y\ y)[y \leftarrow \ulcorner 1^\urcorner], [] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle (+ \ulcorner 1^\urcorner\ \ulcorner 1^\urcorner), [] \rangle$   
 $> \langle (o^n\ M\ N...), E \rangle \mapsto_{scc} \langle M, E[(o^n\ []\ N...)] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle \ulcorner 1^\urcorner, (+\ []\ \ulcorner 1^\urcorner) \rangle$   
 $> \langle V, E[(o^n, V_1, ...V_i, [], N\ L)] \rangle \mapsto_{scc} \langle N, E[(o^n, V_1, ...V_i, V, [], L)] \rangle$   
 SCC machine :  $\langle \ulcorner 1^\urcorner, (+\ \ulcorner 1^\urcorner\ []) \rangle$   
 $\langle b, E[(o^n, b_1, ...b_i, [])] \rangle \mapsto_{scc} \langle V, E \rangle$  avec  $\delta(o^n, b_1, ...b_i, b) = V$   
 SCC machine :  $\langle \ulcorner 2^\urcorner, [] \rangle$

### 5.3 Exemple de fonctionnement de la machine CK

Voici un exemple de fonctionnement de la machine CK :

CK machine :  $\langle ((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda y.(+ y\ y))\ \lceil 1^\top \rceil, mt \rangle$   
 $> \langle (M\ N), \kappa \rangle \mapsto_{ck} \langle M, \langle arg, N, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle ((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda y.(+ y\ y)), \langle arg, \lceil 1^\top \rceil, mt \rangle \rangle$   
 $> \langle (M\ N), \kappa \rangle \mapsto_{ck} \langle M, \langle arg, N, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle (\lambda f.\lambda x.f\ x), \langle arg, (\lambda y.(+ y\ y)), \langle arg, \lceil 1^\top \rceil, mt \rangle \rangle \rangle$   
 $> \langle V, \langle arg, N, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle N, \langle fun, V, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle (\lambda y.(+ y\ y)), \langle fun, (\lambda f.\lambda x.f\ x), \langle arg, \lceil 1^\top \rceil, mt \rangle \rangle \rangle$   
 $> \langle V, \langle fun, (\lambda X.M), \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle M[X \leftarrow V], \kappa \rangle$   
CK machine :  $\langle (\lambda x.f\ x)[f \leftarrow (\lambda y.(+ y\ y))], \langle arg, \lceil 1^\top \rceil, mt \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle (\lambda x.(\lambda y.(+ y\ y))\ x), \langle arg, \lceil 1^\top \rceil, mt \rangle \rangle$   
 $> \langle V, \langle arg, N, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle N, \langle fun, V, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle \lceil 1^\top \rceil, \langle fun, (\lambda x.(\lambda y.(+ y\ y))\ x), mt \rangle \rangle$   
 $> \langle V, \langle fun, (\lambda X.M), \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle M[X \leftarrow V], \kappa \rangle$   
CK machine :  $\langle ((\lambda y.(+ y\ y))\ x)[x \leftarrow \lceil 1^\top \rceil], mt \rangle$   
CK machine :  $\langle ((\lambda y.(+ y\ y))\ \lceil 1^\top \rceil), mt \rangle$   
 $> \langle (M\ N), \kappa \rangle \mapsto_{ck} \langle M, \langle arg, N, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle (\lambda y.(+ y\ y)), \langle arg, \lceil 1^\top \rceil, mt \rangle \rangle$   
 $> \langle V, \langle arg, N, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle N, \langle fun, V, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle \lceil 1^\top \rceil, \langle fun, (\lambda y.(+ y\ y)), mt \rangle \rangle$   
 $> \langle V, \langle fun, (\lambda X.M), \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle M[X \leftarrow V], \kappa \rangle$   
CK machine :  $\langle (+ y\ y)[y \leftarrow \lceil 1^\top \rceil], mt \rangle$   
CK machine :  $\langle (+ \lceil 1^\top \rceil \lceil 1^\top \rceil), mt \rangle$   
 $> \langle (o^n\ M\ N\dots), \kappa \rangle \mapsto_{ck} \langle M, \langle opd, \langle o^n \rangle, \langle N, \dots \rangle, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle \lceil 1^\top \rceil, \langle opd, \langle + \rangle, \langle \lceil 1^\top \rceil \rangle, mt \rangle \rangle$   
 $> \langle V, \langle opd, \langle V', \dots o^n \rangle, \langle N, L, \dots \rangle, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle N, \langle opd, \langle V, V', \dots o^n \rangle, \langle L, \dots \rangle, \kappa \rangle \rangle$   
CK machine :  $\langle \lceil 1^\top \rceil, \langle opd, \langle \lceil 1^\top \rceil, + \rangle, \langle \rangle, mt \rangle \rangle$   
 $> \langle b, \langle opd, \langle b_i, \dots b_1, o^n \rangle, \langle \rangle, \kappa \rangle \rangle \mapsto_{ck} \langle V, \kappa \rangle$  avec  $\delta(o^n, b_1, \dots b_i, b) = V$   
CK machine :  $\langle \lceil 2^\top \rceil, mt \rangle$

## 5.4 Exemple de fonctionnement de la machine CEK

Voici un exemple de fonctionnement de la machine CEK :

[illegible]



## 5.5 Exemple de fonctionnement de la machine SECD

## 6 Bibliographie

- [1] *Réactivité des systèmes coopératifs : le cas Réactive ML* de Louis Mandrel et Cédric Pasteur
- [2] *The ZINC experiment : an economical implementation of the ML language* de Xavier Leroy
- [3] *Programming Languages And Lambda Calculi* de Mathias Felleisen et Matthew Flatt