Отчёт по лабораторной работе №4

Вариант 2

Акондзо Жордани Ладин Гаэл

Содержание

I.Цель работы

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора

II.Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев.

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 5x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 5sin(14t)$

На интервале $t = [0; 30]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = 1$

III. Выполнение задания

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Уравнение: $\ddot{x} + 5x = 0$

Это стандартное уравнение гармонического осциллятора, где x представляет смещение от равновесия, а $\ddot{x}$ - ускорение. Коэффициент 5 соответствует квадрату собственной частоты осциллятора ω^2.

Решение: - Уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. - Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 5 = 0$, корни которого $\lambda = \pm i\sqrt{5}$. - Общее решение уравнения будет комбинацией функций $\sin(\sqrt{5}t)$ и $\cos(\sqrt{5}t)$.

Реализация в Julia

Для решения данного уравнения в Julia, мы сначала преобразуем его в систему двух уравнений первого порядка, введя новую переменную $v = \dot{x}$, что позволит нам использовать стандартные методы для систем ОДУ.

- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Julia

Введём следующий код:

```
using DifferentialEquations
using Plots
```

```
# Определение системы ОДУ для первого случая
# Колебания гармонического осциллятора без затухания и без действия внешней силы
function harmonic_oscillator_1(du, u, p, t)
    x, v = u  # u[1] это положение x, u[2] это скорость v
    du[1] = v              # dx/dt = v
    du[2] = -5*x           # dv/dt = -5x (без затухания, без внешней силы)
end

# Начальные условия и интервал времени
u0 = [0.0, 1.0]          # x0 = 0, v0 = 1
tspan = (0.0, 30.0)       # От t = 0 до t = 30
dt = 0.05                 # Шаг времени для сохранения результатов

# Создание проблемы ОДУ
prob1 = ODEProblem(harmonic_oscillator_1, u0, tspan)

# Решение проблемы ОДУ
sol1 = solve(prob1, saveat=dt)

# Построение фазового портрета
plot(sol1, idxs=(1,2), xlabel="Положение (x)", ylabel="Скорость (v)", title="Фазовый портрет га
```

И мы получим результат:

Out[1]:

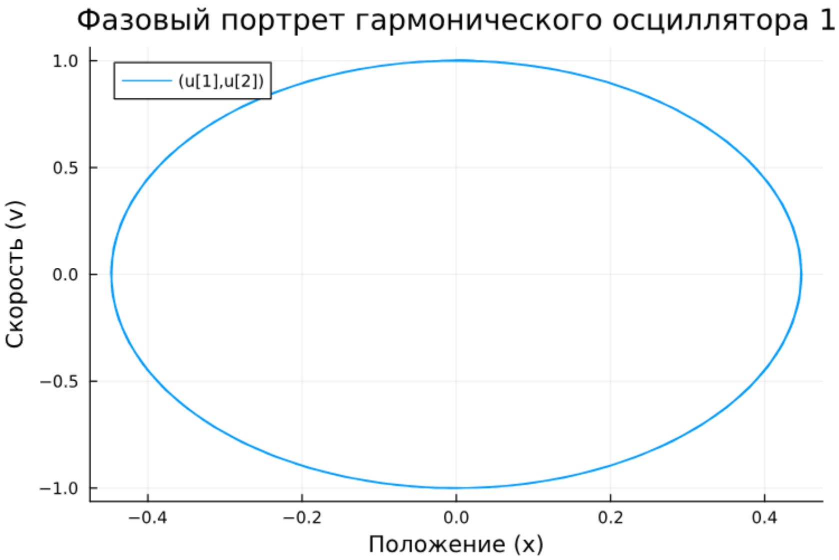

Рис. 1: Фазовый портрет гармонического осциллятора 1

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

Уравнение: \$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0\$

Здесь добавляется член затухания $2\dot{x}$, который пропорционален и противоположен скорости, моделирующий силу трения или сопротивления.

Решение: - Введем затухание $b = 2$ и собственную частоту $\omega_0^2 = 5$. - Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ имеет комплексные корни. - Решение будет включать экспоненциально затухающие термины e^{-t}, модифицированные синусоидальными и косинусоидальными функциями.

Реализация в Julia :

- Мы сначала преобразуем это уравнение второго порядка в систему первого порядка, введя $v = \dot{x}$.
- Это дает нам два уравнения: $\dot{x} = v$ и $\dot{v} = -2v - 5x$.

- Мы используем функцию ODEProblem для определения задачи решения ОДУ с начальными условиями $x_0 = 0, v_0 = 1$.
- Затем мы решаем эту задачу с помощью функции solve, указывая интервал времени и шаг сохранения результатов.
- Результаты решения используются для построения фазового портрета, показывающего зависимость скорости от положения.
- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Julia

Введём следующий код:

```
using DifferentialEquations
using Plots

# Определение системы ОДУ для второго случая
# Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действия внешней силы
function harmonic_oscillator_2(du, u, p, t)
    x, v = u  # u[1] это положение x, u[2] это скорость v
    du[1] = v              # dx/dt = v, первое уравнение системы
    du[2] = -2*v - 5*x     # dv/dt = -2v - 5x, второе уравнение системы с затуханием
end

# Начальные условия и интервал времени
u0 = [0.0, 1.0]          # x0 = 0, v0 = 1, начальное положение и начальная скорость
tspan = (0.0, 30.0)      # От t = 0 до t = 30, временной интервал для решения ОДУ
dt = 0.05                # Шаг времени для сохранения результатов

# Создание проблемы ОДУ для решения
prob2 = ODEProblem(harmonic_oscillator_2, u0, tspan)
```

```
# Решение проблемы ОДУ
sol2 = solve(prob2, saveat=dt)

# Построение фазового портрета
plot(sol2, idxs=(1,2), xlabel="Положение (x)", ylabel="Скорость (v)", title="Фазовый портрет га
```

И мы получим результат:

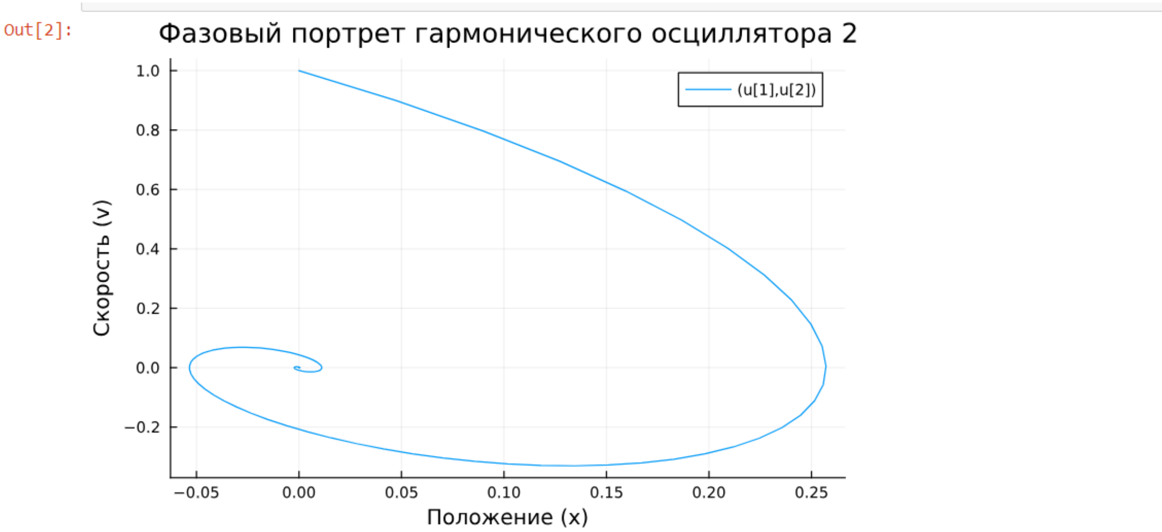

Рис. 2: Фазовый портрет гармонического осциллятора 2

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Уравнение: $\ddot{x} + 4\dot{x} + x = \sin(14t)$

Теперь система испытывает действие внешней силы, моделируемой функцией $\sin(14t)$, которая заставляет систему колебаться с внешней частотой.

Решение: - Дифференциальное уравнение включает неоднородный член $\sin(14t)$, указывающий на наличие внешнего возмущения. - Ответ будет состоять из двух частей: одна соответствует свободным (натуральным) колебаниям системы, а другая - вынужденным колебаниям из-за внешней силы. - Вынужденная часть ответа будет иметь ту же частоту, что и внешняя сила.

Реализация в Julia :

- Аналогично предыдущим случаям, мы преобразуем уравнение в систему первого порядка.
- Вводим функцию в правой части уравнения для описания внешней силы: $f(t) = \sin(14t)$.
- Определяем систему уравнений: $\dot{x} = v$ и $\dot{v} = -4v - x + f(t)$.
- Решаем систему уравнений, используя ODEProblem и solve с теми же начальными условиями и временным интервалом.
- Фазовый портрет строится по решению, иллюстрируя динамику системы под воздействием внешней силы.
- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Julia

Введём следующий код:

```
using DifferentialEquations
using Plots

# Определение системы ОДУ для третьего случая
# Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы
function harmonic_oscillator_3(du, u, p, t)
    x, v = u  # u[1] это положение x, u[2] это скорость v
    du[1] = v                          # dx/dt = v, первое уравнение системы
    du[2] = -4*v - x + sin(14*t)       # dv/dt = -4v - x + sin(14t), второе уравнение системы с зату
```

```
end

# Начальные условия и интервал времени
u0 = [0.0, 1.0]          # x0 = 0, v0 = 1, начальное положение и начальная скорость
tspan = (0.0, 30.0)      # От t = 0 до t = 30, временной интервал для решения ОДУ
dt = 0.05                # Шаг времени для сохранения результатов

# Создание проблемы ОДУ для решения
prob3 = ODEProblem(harmonic_oscillator_3, u0, tspan)

# Решение проблемы ОДУ
sol3 = solve(prob3, saveat=dt)

# Построение фазового портрета
plot(sol3, idxs=(1,2), xlabel="Положение (x)", ylabel="Скорость (v)", title="Фазовый портрет га
```

И мы получим результат:

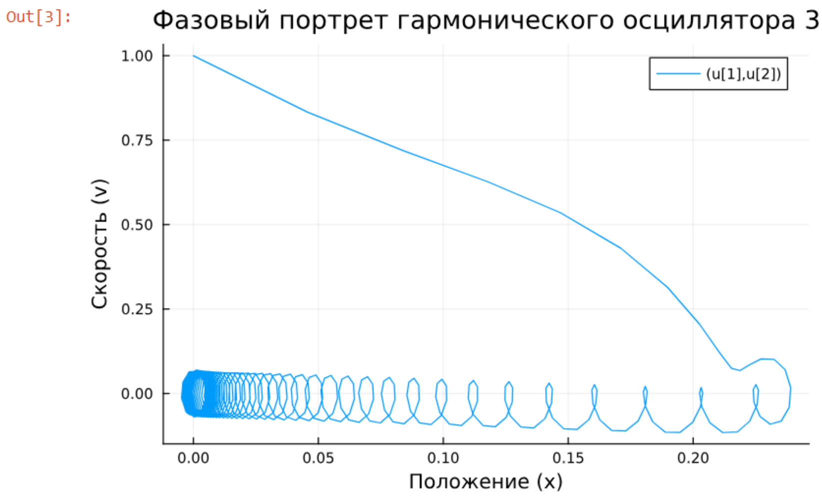

Рис. 3: Фазовый портрет гармонического осциллятора 3

IV. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы я научился строить фазовый портрет гармонического осциллятора и решать уравнения гармонического осциллятора.

V. Ответы на вопросы :

1.Простейшим видом колебательного процесса являются простые гармонические колебания, описывающиеся уравнением:

$$x = x_m cos(\omega t + \phi_0)$$

где x — смещение тела от положения равновесия, x_m — амплитуда колебаний, ω — циклическая или круговая частота, t — время.

2.Осциллятор — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

Модель математического маятника

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$$

4.Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + w_0^2 x = f(t)$$

Замена:

$$y = \dot{x}$$

Полученная система уравнений:

$$y = \dot{x}; \dot{y} = -w_0^2 x$$

5.Фазовый портрет — это полная совокупность различных фазовых траекторий.

Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.