Отчёт по лабораторной работе 5

Простейший вариант 54

Акондзо Жордани Ладди Гаэл

Содержание

1 Цель работы **5**

2 Задание **6**

3 Выполнение лабораторной работы **7**
3.1 код 10

4 Выводы **12**

Список иллюстраций

3.1 Название рисунка 11

Список таблиц

1 Цель работы

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях. Найти стационарное состояние системы.

2 Задание

Формула определения номера задания: (SnmodN)+1, где Sn — номер студбилета, N — количество заданий.

Вариант 54

Для модели «хищник-жертва»:

$$dx/dt = -0,13x(t) + 0,041x(t)y(t); dy/dt = 0,31y(t) - 0,042x(t)y(t)$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:

$$x_0 = 7, y_0 = 20$$

Найдите стационарное состояние системы.

3 Выполнение лабораторной работы

Решение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1.Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2.В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3.Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4.Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5.Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$dx/dt = ax(t) - bx(t)y(t); dy/dt = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x — число жертв, y — число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c — естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены

— bxy и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (А на рис.1), всякое же другое начальное состояние (В) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние В.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке:

$$x_0 = c/d; y_0 = a/b$$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$dx/dt = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y); dy/dt = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние В), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 (рис.2).

В случае 1 равновесное состояние А устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием А с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния А приводит не к малым колебаниям около А, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

3.1 код

Julia

```
using DifferentialEquations, Plots

# Определение функции модели хищник-жертва
function pred_prey!(du, u, p, t)
   du[1] = -0.13*u[1] + 0.04*u[1]*u[2] # изменение популяции жертв dx/dt
   du[2] = 0.31*u[2] - 0.042*u[1]*u[2] # изменение популяции хищников dy/dt
end

# Начальные условия
u0 = [7.0, 20.0] # Начальные популяции: x0 = 7, y0 = 20

# Временной интервал
tspan = (0.0, 30.0) # Интервал интегрирования от 0 до 30

# Решение дифференциального уравнения
prob = ODEProblem(pred_prey!, u0, tspan)
sol = solve(prob)

# Построение графика популяций
plot(sol, xlabel="Время", ylabel="Популяция",
     title="Модель Хищник-Жертва")

# Построение фазового портрета
plot(sol[1,:], sol[2,:], xlabel="Численность жертв",
     ylabel="Численность хищников", title="Фазовый Портрет")
savefig("predator_prey_model.png")
```

И мы получим результат (рис. 3.1).

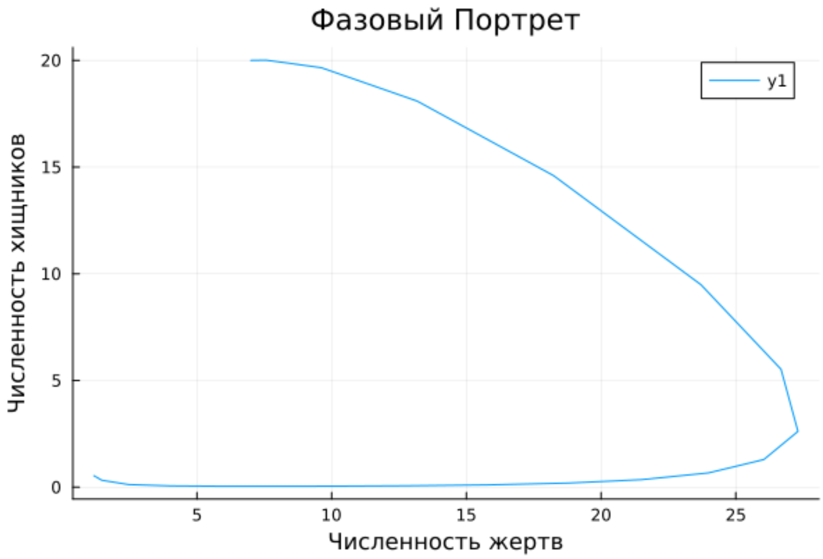

Рис. 3.1: Название рисунка

Найдем стационарное состояние системы:

$$x_0 = 0,31/0,042 = 7,38; y_0 = 0,13/0,041 = 3,17$$

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я научилась строить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях. Нашла стационарное состояние системы.