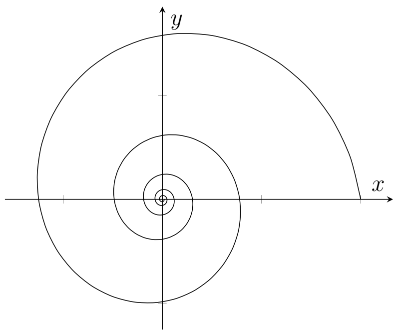
Geometría Diferencial

Práctica 1 - Curvas

Ejercicio 1. Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Probar que $\|\gamma(t)\|$ es constante sii $\gamma(t)$ y $\gamma'(t)$ son ortogonales para todo $t \in I$.

Ejercicio 2. Consideremos la *espiral logarítmica* $\gamma(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b < 0$ constantes.



Mostrar que $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma'(t) = (0, 0)$ y que γ tiene longitud de arco finita en $[t_0, \infty)$.

Ejercicio 3. Sean $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo.

(a) Probar que si $\gamma'(t)$ y $\gamma(0)$ son ortogonales a v para todo $t \in I$, entonces $\gamma(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

(b) Concluir que $\gamma(t)$ es una curva plana.

Ejercicio 4. Considerar la curva $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$, $t \in (0, \infty)$.

(a) Hallar el parámetro longitud de arco s y reparametrizar la curva con este parámetro.

(b) Calcular la curvatura de $\gamma(s)$.

Ejercicio 5. Probar que si $\gamma(t)$ es una parametrización arbitraria de una curva suave, entonces su curvatura está dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Ejercicio 6. Probar que si todas las rectas normales de una curva regular pasan por un punto fijo, entonces la traza de la curva está contenida en una circunferencia.

Ejercicio 7. Sea $\gamma(s)$ una curva suave parametrizada por longitud de arco.

(a) Probar que $\dddot{\gamma} = -\kappa^2 \mathbf{t} + \dot{\kappa}\mathbf{n} - \tau\kappa\mathbf{b}$.

(b) Probar que $\kappa^2 \tau = -\dot{\gamma} \cdot (\ddot{\gamma} \times \dddot{\gamma})$.

Ejercicio 8. Sea $\gamma(t)$ una curva suave. Usando los ejercicios anteriores, probar que en un punto donde $\kappa \neq 0$, la torsión está dada por

$$\tau(t) = -\frac{\gamma'(t) \cdot (\gamma''(t) \times \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

Ejercicio 9. Consideremos la aplicación $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t, 0, e^{-1/t^2}\right) & \text{si } t > 0 \\ \left(t, e^{-1/t^2}, 0\right) & \text{si } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

(a) Probar que γ es una curva diferenciable regular para todo t.

(b) Probar que la curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$, y que $\kappa(0) = 0$.

(c) Mostrar que τ puede definirse como $\tau \equiv 0$ aunque γ no es una curva plana.

Ejercicio 10 (♠). Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por longitud de arco, con curvatura y torsión no nulas tal que $\| \alpha(s) \| = a, \forall s \in I$. Demostrar que se cumple la siguiente ecuación

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau}\right)^2 = a^2.$$

Sugerencia: Considerar $\alpha(s) = \langle \alpha(s), t(s) \rangle t(s) + \langle \alpha(s), n(s) \rangle n(s) + \langle \alpha(s), b(s) \rangle b(s)$.

Ejercicio 11. Considerar la curva $\gamma(s) = \left(\frac{1}{2}\cos s, -\frac{1}{2}\operatorname{sen} s, \frac{\sqrt{3}}{2}s\right)$

(a) Mostrar que el parámetro s es el parámetro longitud de arco.

(b) Determinar la curvatura y la torsión de γ.

Ejercicio 12. Considerar la curva $\beta(t) = \left(2t^2 + 5, -3t, -\frac{1}{2}e^{-2t}\right)$

(a) Analizar si está parametrizada por parámetro longitud de arco.

(b) Determinar la curvatura y la torsión de β.

Ejercicio 13. Un *movimiento rígido* en $\mathbb{R}^3$ es una composición de una transformación ortogonal con determinante positivo y una traslación, i.e., es de la forma $F(x) = Ax + p$, donde $A \in \mathrm{SO}(3)$ y $p \in \mathbb{R}^3$.

Probar que la longitud de arco, la curvatura y la torsión son invariantes por movimientos rígidos.

Ejercicio 14 (♣). Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Decimos que γ es una *curva de Bertrand*[1] si existe otra curva $\gamma^* : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que las rectas normales de γ y γ^* coinciden para todo $s \in I$. En ese caso, decimos que γ y γ^* son *curvas de Bertrand* y podemos escribir

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + r\mathbf{n}_\gamma(s).$$

(a) Demostrar que r es constante, i.e., que la distancia entre puntos homólogos o correspondientes de dos curvas de Bertrand es constante.

(b) Demostrar que el ángulo que forman dos tangentes homólogas de dos curvas de Bertrand es constante.

[1]Estas curvas fueron introducidas por el matemático francés J. Bertrand (1822–1900) en 1850.

Observación: Notar que el ejercicio sigue valiendo sin que la curva esté parametrizada por longitud de arco.

Ejercicio 15. Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco cuyas curvatura y torsión no se anulan en ningún punto. Decimos que γ es una *hélice* que tiene como *eje* un vector unitario $\omega \in \mathbb{R}^3$ y *ángulo* $\theta \in [0, \pi)$ si todos los vectores tangentes a la curva forman un ángulo θ con ω.

(a) Probar que si γ es una hélice que tiene como eje al vector unitario ω y ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces el vector ω es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$, para todo $s \in I$. Calcular los coeficientes de dicha combinación lineal.

(b) Probar que γ es una hélice sii κ/τ es constante.

(c) Calcular la velocidad, la curvatura y la torsión de la curva $\gamma : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\gamma(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$. Demostrar que es una hélice y calcular su eje y su ángulo.