Geometría Diferencial

Práctica 2 - Superficies regulares

Ejercicio 1. Mostrar que el paraboloide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ es una superficie regular y que φ y ψ son parametrizaciones locales de S:

(a) $\varphi(u, v) := (u + v, u - v, 4uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\psi(u, v) := (u \cosh v, u \operatorname{senh} v, u^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$.

Ejercicio 2. Sea S una superficie regular. Probar que si $W \subset S$ es abierto (con la topología inducida), entonces W es una superficie regular.

Ejercicio 3. Un *toro* es una superficie generada al rotar una circunferencia de radio r alrededor de una recta que pertenece al mismo plano que la circunferencia y que dista una distancia $a > r$ del centro.

Consideremos la circunferencia de centro $(0, a, 0)$ en el plano yz y rotémosla alrededor del eje z.

(a) Mostrar que el toro T así generado está dado por los puntos que satisfacen la ecuación

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2.$$

(b) Probar que T es una superficie regular.

Ejercicio 4. Mostrar que el cono de dos hojas con vértice en el origen $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no es una superficie regular.

Ejercicio 5. Sean a, b y c reales positivos. El *elipsoide* de semiejes a, b y c es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

(a) Demostrar que E es una superficie regular.

(b) Mostrar que la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) := (ax, by, cz)$ es un difeomorfismo.

(c) Construir una carta de E usando la proyección estereográfica de la esfera.

Ejercicio 6 (♣). Sean $W \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Definimos una función suave $grad(f) : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como $grad(f) = (f_x, f_y, f_z)$. Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f y $S := f^{-1}(\{a\})$, entonces para todo $p \in S$, $grad(f(p))$ es un vector no nulo ortogonal al plano tangente T_pS.

Ejercicio 7. Sea $S = \{(x, y, z) : z(z - 2) + xy = c\}$ con $c \neq -1$ ¿Es S una superficie regular? Justifique su respuesta.

Ejercicio 8 (♠). Sea S el toro obtenido al rotar una circunferencia en el plano xz de radio 1 centrada en $(2,0,0)$ alrededor del eje z, que puede parametrizarse localmente mediante $\varphi : (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow S$, con

$$\varphi(\theta,t) := ((2+\cos t)\cos\theta, (2+\cos t)\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen} t).$$

Calcular el plano tangente a lo largo de las curvas coordenadas $t=0$ y $\theta=0$. Interpretar geométricamente.

Ejercicio 9. Sea S^2 la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ y consideremos las cartas (U_i,φ_i), $i=1,2$, dadas por

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \qquad \varphi_1(u,v) = (\cos v\cos u, \cos v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v) \\ U_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}, \qquad \varphi_2(x,y) = \left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right). \end{aligned}$$

(a) Calcular las aplicaciones cambio de coordenadas $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$ y $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$.

(b) Sea $p=\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right)\in\varphi_1(U_1)\cap\varphi_2(U_2)$. Calcular las bases de T_pS^2 dadas por φ_1 y φ_2 y verificar que, efectivamente, generan el mismo plano.

Ejercicio 10. Sea S una superficie regular y consideremos dos cartas de S (U,φ) y $(\overline{U},\overline{\varphi})$ tales que $p\in\varphi(U)\cap\overline{\varphi}(\overline{U})$. Sea $w\in T_pS$ tal que en las bases asociadas a φ y $\overline{\varphi}$,

$$w=\alpha_1\varphi_u+\alpha_2\varphi_v \quad \text{y} \quad w=\beta_1\overline{\varphi}_{\overline{u}}+\beta_2\overline{\varphi}_{\overline{v}}.$$

Mostrar que las coordenadas de w están relacionadas por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial\overline{u}}{\partial v} \\ \beta_2 &= \alpha_1\frac{\partial\overline{v}}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}, \end{aligned}$$

donde $\overline{u}=\overline{u}(u,v)$ y $\overline{v}=\overline{v}(u,v)$ son las expresiones del cambio de coordenadas.

Ejercicio 11. Se llama *cilindro* a una superficie engendrada por una recta L que se mueve, conservándose paralela a sí misma, a lo largo de una curva C. Si C está dada por $\mathbf{y}(u)$ y $\mathbf{g}$ es un vector unitario en la dirección de L, entonces el cilindro viene representado por

$$\varphi(u,v)=\mathbf{y}(u)+v\mathbf{g}.$$

Las curvas de parámetro u son *traslaciones* de C en la dirección de $\mathbf{g}$. Las curvas de parámetro v son copias de L y son llamadas *generatrices* del cilindro.

Mostrar que el plano tangente es el mismo en todos los puntos de una generatriz de un cilindro.