Geometría Diferencial

Bustos Jordi
Práctica II

3 de octubre de 2025

Ejercicio 6. Sean $W \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto y $f : W \to \mathbb{R}$ una función suave. Definimos una función suave $grad(f) : W \to \mathbb{R}^3$ como:

$$grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f y $S := f^{-1}(a)$, entonces para todo $p \in S$, $grad(f(p))$ es un vector no nulo ortogonal al plano tangente T_pS.

Demostración. Como a es un valor regular de f tenemos, por definición, que df_p es suryectiva. Supongamos que $grad(f(p)) = 0$. Entonces $df_p(v) = grad(f(p)) \cdot v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$, pero por el teorema de la dimensión tenemos que:

$$\dim(\mathrm{Im}(df_p)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(df_p)) = 3 - 3 = 0$$

Lo cual es una contradicción, pues df_p es suryectiva. Por lo tanto $\exists v \in \mathbb{R}^3$ tal que $df_p(v) \neq 0$ y entonces $grad(f(p)) \neq 0$.
Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva suave tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w \in T_pS$. Entonces $\beta = f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y

$$\beta'(0) = df_p(w) = grad(f(\alpha(0))) \cdot \alpha'(0) = grad(f(p)) \cdot w = 0$$

Pues $f(\alpha(t)) = a \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \implies \beta \equiv a \therefore \beta' \equiv 0$. Así, $grad(f(p))$ es ortogonal a T_pS. ☐