Geometría Diferencial

Bustos Jordi
Práctica III

2 de octubre de 2025

Ejercicio 2. Sean S^2 la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ y E el elipsoide

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1\right\}$$

Definamos $f : S^2 \to E$ mediante $f(x, y, z) = (3x, 2y, z)$ y tomemos $p := \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Calcular:

- $T_p S^2$.
- $T_{f(p)} E$.
- $df_p : T_p S^2 \to T_{f(p)} E$ y su matriz asociada.

Demostración. Podemos parametrizar E y S^2 en un entorno de p y $f(p)$ mediante $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to E$ y $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to S^2$ como sigue:

$$\phi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}\right)$$
$$\psi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$$

Luego, $p = \psi\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $f(p) = \phi\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto, $T_p S^2$ está dado por:

$$\begin{aligned} T_p S^2 &= span\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} \\ &= span\left\{\left(1, 0, -\frac{3}{2}\right), \left(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} T_{f(p)} E &= span\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\ &= span\left\{\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} \end{aligned}$$

Para la construcción de df_p, consideremos $w \in T_p S^2$ y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S^2$ una curva tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = w$. Entonces:

$$df_p(w) = (f \circ \gamma)'(0) = \left(3x'(0), 2y'(0), z'(0)\right)$$

Si $w = (a, b, c)$, se sigue que $df_p(a, b, c) = (3a, 2b, c)$. Veamos ahora cuanto valen $v_0 = df_p(1, 0, -\frac{3}{2}) = (3, 0, -\frac{3}{2})$ y $v_1 = df_p(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = (0, 2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ Y escribamos a v_0, v_1 en función de la base de $T_{f(p)}E$:

$$v_0 = 3(1, 0, -\frac{1}{2}) + 0(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{4})$$
$$v_1 = 0(1, 0, -\frac{1}{2}) + 2(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{4})$$

Por lo tanto, la matriz asociada a df_p es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□