Geometría Diferencial

Práctica 4 - Primera forma fundamental, isometrías

Ejercicio 1. Sea P el plano $z = 0$ y consideremos una parametrización local dada por $\varphi : U \longrightarrow P$, $\varphi(r, \theta) := (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$, donde $U := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental.

Ejercicio 2. Mostrar que el área A de una región acotada R de una superficie regular $z = f(x, y)$, con f una función suave, está dada por

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\; dxdy,$$

donde Q es la proyección ortogonal de R al plano xy.

Ejercicio 3. Supongamos que los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie S respecto de una carta $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ son

$$E = \mathrm{cotg}^2(u), \quad F = 0, \quad G = \mathrm{sen}^2(u).$$

Calcular el área encerrada por el triángulo curvilíneo T que es la imagen por φ del triángulo de $\mathbb{R}^2$ limitado por las rectas $2u = 1$, $u = v$ y $v = 1$.

Ejercicio 4. Recordemos que la catenaria puede parametrizarse localmente mediante

$$\varphi(u, v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\,\mathrm{sen}\,u, av), \quad u \in (0, 2\pi),\ v \in \mathbb{R}.$$

Mostrar que los coeficientes de la Primera Forma Fundamental en esta parametrización son

$$E = a^2\cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2\cosh^2 v.$$

Definición 0.1. Supongamos que $S \subset \mathbb{R}^3$ se obtiene al rotar una curva plana alrededor de un eje contenido en el plano sobre el que está la curva tal que no la corta. Sea C la curva parametrizada como; $\gamma(v) = (0, f(v), g(v))$; por ejemplo pensando en que está rotando alrededor del eje z. La parametrización de la superficie S será $X(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$.

Ejercicio 5 (Teorema de Pappus[1]–Guldinus[2])**.** Sean S una superficie de revolución y C su curva generatriz. Sea s el parámetro longitud de arco de C y denotemos $\rho(s)$ a la distancia al eje z desde el punto de C correspondiente a s.

Probar que el área de S está dada por

$$2\pi\int_0^L \rho(s)\; ds,$$

donde L es la longitud de la curva C.

Ejercicio 6. Calcular el área del toro generado al rotar una circunferencia de radio r alrededor de una recta que pertenece al mismo plano que la circunferencia y que dista una distancia $a > r$ del centro de dos maneras distintas:

[1]Pappus de Alejandría, matemático griego cuya obra data aproximadamente del año 320.

[2]Paul Guldin (1577–1643) fue un matemático y astrónomo suizo.

(a) Usando la parametrización local dada por

$$\varphi(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u), \quad (u,v) \in (0,2\pi)\times(0,2\pi).$$

(b) Usando el Teorema de Pappus–Guldinus.

Ejercicio 7 (♣). Decimos que las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi(u,v)$ constituyen una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.

(a) Mostrar que formar una red Tchebyshev equivale a

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

(b) Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1, \quad F = \cos\theta, \quad G = 1,$$

donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

Sugerencia: Considerar las nuevas coordenadas como $\bar{u}(u,v) = \int_{u_0}^{u} \| \varphi_u(t,v) \| \; dt$ y $\bar{v}(u,v) = \int_{v_0}^{v} \| \varphi_v(u,t) \| \; dt$ y entonces plantear $\bar{\varphi}(\bar{u},\bar{v}) = \varphi(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$ y calcular los coeficientes de la primera forma fundamental.

Ejercicio 8. Dada una curva regular en el plano xz parametrizada por $x = f(v)$, $z = g(v)$, $v \in (a,b)$ y $f(v) > 0$, considerar la superficie de revolución obtenida al rotar esta curva alrededor del eje z. Mostrar que esta superficie puede parametrizarse de manera tal que

$$E = E(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Ejercicio 9 (♠). Sean S_1, S_2 y S_3 superficies regulares. Probar que

(a) Si $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría, entonces $\varphi^{-1} : S_2 \longrightarrow S_1$ es una isometría.

(b) Si $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ y $\psi : S_2 \longrightarrow S_3$ son isometrías, entonces $\psi \circ \varphi : S_1 \longrightarrow S_3$ es una isometría.

Notar que esto dice que las isometrías de una superficie regular S forman un grupo, llamado *grupo de isometrías* de S.

Ejercicio 10. Sea $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, donde u y v son funciones diferenciables que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y,\; u_y = -v_x.$$

Consideremos el conjunto $Q = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : u_x^2 + u_y^2 = 0\right\}$. Mostrar que $\varphi : (\mathbf{R}^2 - Q) \to \mathbf{R}^2$ es una aplicación localmente conforme.