Geometría Diferencial

Bustos Jordi
Práctica I

3 de octubre de 2025

Ejercicio 1. Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por longitud de arco, con curvatura y torsión no nulas tal que $\|\alpha(s)\| = a$, para todo $s \in I$. Demostrar que se cumple la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right) = a^2$$

Demostración. Como $\|\alpha(s)\| = a$ constante, diferenciando $\alpha \cdot \alpha = a^2$ obtenemos

$$2\alpha \cdot \dot{\alpha} = 0 \implies \alpha \cdot t(s) = 0 \quad \forall s \in I$$

es decir, $t(s)$ es ortogonal a $\alpha(s)$ para todo $s \in I$. Usando la base de Frenet $\{t, n, b\}$ podemos escribir

$$\alpha(s) = A(s)n(s) + B(s)b(s)$$

Diferenciando y utilizando las fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{aligned}$$

y recordando que $t = \alpha'$ por estar parametrizada por longitud de arco, obtenemos

$$\begin{aligned} t = \dot{\alpha} &= A'n + An' + B'b + Bb' \\ &= (-A\kappa)t + (A' - B\tau)n + (B' + A\tau)b \end{aligned}$$

Comparando componentes

$$\begin{aligned} 1 + A\kappa &= 0 \\ A' - B\tau &= 0 \\ B' + A\tau &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos $A = \frac{-1}{\kappa}$ pues la curvatura es no nula y derivando $A' = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}$. Sustituyendo en la segunda ecuación

$$B = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau} \quad \tau \neq 0 \text{ por hipótesis}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\alpha(s)\|^2 &= A(s)^2 + B(s)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^2 \\ &= a^2 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □