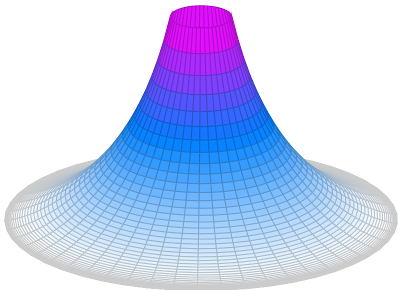
Geometría Diferencial

Práctica 5 - Curvatura

Ejercicio 1. Consideremos la *tractriz*[1] dada por

$$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t + \ln(\tan(t/2))), \quad t \in (\pi/2, \pi).$$

La superficie de revolución obtenida al rotar la curva γ alrededor del eje z es llamada *pseudoesfera*[2].



Probar que la curvatura de Gauss de la pseudoesfera es $K \equiv -1$.

Ejercicio 2. Consideremos el hiperboloide de ecuación $z = axy$, $a \in \mathbb{R}$. Mostrar que en el origen la curvatura de Gauss es $K = -a^2$ y la curvatura media es $H = 0$.

Ejercicio 3. Calcular la curvatura de Gauss del helicoide $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, u)$ y mostrar que es creciente en función de la distancia al eje Z.

Ejercicio 4. Mostrar que la curvatura media H en $p \in S$ está dada por

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta)\, d\theta,$$

donde $k_n(\theta)$ es la curvatura normal en p en la dirección que forma un ángulo θ con la dirección principal e_1.

Ejercicio 5 (Beltrami–Enneper)**.** [♣] Probar que el valor absoluto de la torsión τ de una curva asintótica[3] cuya curvatura no se anula está dado por

$$|\tau| = \sqrt{-K},$$

donde $K < 0$ es la curvatura de Gauss en el punto dado.

Sugerencia: probar que $\| N'(0) \| = |\tau(s)|$ y que $\| N'(0) \| = \sqrt{-K}$, escribiendo $\| N'(0) \|$ con las curvaturas principales.

[1] Del latín *trahere* "arrastrar". El nombre, dado por el matemático neerlandés C. Huygens (1629–1695), se debe a que representa la curva que describiría un objeto que es arrastrado en un plano por una cuerda de longitud constante cuyo otro extremo se mueve a lo largo de una recta horizontal.

[2] Nombre que le puso el matemático italiano E. Beltrami en 1868.

[3] Dado $p \in S$, una *dirección asintótica* de S en p es una dirección $v \in T_pS$ tal que $k_n(v) = 0$. Una *curva asintótica* en S es una curva conexa regular $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$, el vector tangente a C en p es una dirección asintótica.

Ejercicio 6. Mostrar que si $H \equiv 0$ sobre S y S no tiene puntos planares, entonces la aplicación de Gauss $N : S \longrightarrow S^2$ satisface

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle = -K(p)\langle w_1, w_2\rangle$$

para todo $p \in S$ y todo $w_1, w_2 \in T_pS$.

Ejercicio 7. Sea S una superficie parametrizada por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2)$, calcular la aplicación de Weingarten W_p e indicar las curvaturas principales en cada punto $p \in S$.

Ejercicio 8. Sea S una superficie orientada. Demostrar que la suma de las curvaturas normales en un punto, en cualquier par de direcciones ortogonales, es constante.

Ejercicio 9. Probar que una curva conexa regular $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ en un entorno coordenado $\varphi(U)$ de una superficie regular S es una línea de curvatura sii satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0.$$

Ejercicio 10. Mostrar que ningún entorno de un punto de una esfera puede ser mapeado isométricamente a un plano.

Ejercicio 11. Probar que no existe ninguna superficie regular que admita una parametrización local cuyos coeficientes de la primera y segunda forma sean

$$E = G = 1,\ F = 0,\ e = 0,\ f = g = 1.$$

Ejercicio 12 (♠). Si S está parametrizada localmente por $\varphi : U \to S$, entonces φ es una aplicación conforme si y solo si $E = G$ y $F = 0$.

Ejercicio 13 (♣).

(a) Sea p un punto hiperbólico. Las curvas coordenadas de la parametrización $\varphi(u, v)$ de S en p son asintóticas sí y sólo sí $e = g = 0$.

(b) Sea p un punto no umbilical. Las curvas coordenadas son líneas de curvatura sí y sólo sí $F = f = 0$.