Geometría Diferencial

Bustos Jordi
Práctica V

30 de octubre de 2025

Ejercicio 1. Consideremos la tractriz dada por $\gamma(t) = (sen(t), 0, \ln(\tan(t/2)))$, con $t \in (\pi/2, \pi)$. La superficie de revolución obtenida al rotar la tractriz alrededor del eje z es llamada pseudoesfera. Probar que la curvatura de Gauss de la pseudoesfera es $K \equiv -1$.

Demostración. La parametrización de la pseudoesfera es

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v)) \\ &= (\operatorname{sen}(v)\cos(u), \operatorname{sen}(v)\sin(u), \ln(\tan(v/2))), \quad (u \in [0, 2\pi), v \in (\pi/2, \pi)).\end{aligned}$$

Luego, por **Ejemplo 4.8.4** se tiene que

$$K = -\frac{f''(v)}{f(v)} = -\frac{-\operatorname{sen}(v)}{\operatorname{sen}(v)} = -1.$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 2. Consideremos el hiperboloide de la ecuación $z = axy$ con $a \in \mathbb{R}$. Mostrar que en el origen la curvatura de Gauss es $K = -a^2$ y la curvatura media es $H = 0$.

Demostración. La parametrización del hiperboloide es

$$\varphi(u,v) = (u, v, auv), \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (1, 0, av), \\ \varphi_v &= (0, 1, au), \\ N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-av, -au, 1)}{\sqrt{1 + a^2u^2 + a^2v^2}}.\end{aligned}$$

Luego, la aplicación de Weingarten viene dada por:

$$\begin{aligned}W_p(\varphi_u) = -N_u &= \frac{(0, a/\sqrt{1 + a^2u^2 + a^2v^2}, au(auv)'_u)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}} = \frac{(0, a, 0)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}}, \\ W_p(\varphi_v) = -N_v &= \frac{(a/\sqrt{1 + a^2u^2 + a^2v^2}, 0, av(auv)'_v)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}} = \frac{(a, 0, 0)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Por lo que la representación matricial de W_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$[W_p] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{(1+a^2u^2+a^2v^2)^{3/2}} \\ \frac{a}{(1+a^2u^2+a^2v^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$K = \det(W_p) = -\frac{a^2}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^3} \overset{(u,v)=(0,0)}{=} -a^2,$$
$$H = 0.$$

Que es lo que queríamos demostrar. Análogamente podríamos haber definido $\gamma(t) = (t, 0, 0)$ tal que $\gamma(0) = (0, 0, 0) = p$ y $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$. Calcular

$$dN_p = \frac{d}{dt}N(\varphi(t, 0))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{(-a \cdot 0, -at, 1)}{\sqrt{1 + a^2t^2 + a^2 \cdot 0^2}}\right)\Big|_{t=0} = (0, -a, 0).$$

Por lo que $W_p(\gamma'(0)) = -dN_p(\gamma'(0)) = (0, a, 0)$ y obtenemos el mismo resultado. Lo mismo se puede hacer con $\beta(t) = (0, t, 0)$, resultando en:

$$W_p(\beta'(0)) = (a, 0, 0).$$

Por lo tanto la representación matricial de W_p en la base $\{\gamma'(0), \beta'(0)\}$ es la misma que antes y obtenemos los mismos valores para K y H. □

Ejercicio 3. Calcular la curvatura de Gauss del helicoide $\varphi(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), u)$ y mostrar que es creciente en función de la distancia al eje z.

Demostración. La parametrización del helicoide es

$$\varphi(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), u), \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

Luego,

$$\varphi_u = (-v\sin(u), v\cos(u), 1),$$
$$\varphi_v = (\cos(u), \sin(u), 0),$$
$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-\operatorname{sen} u, \cos u, -v)}{\sqrt{1 + v^2}}.$$

Luego, la aplicación de Weingarten viene dada por:

$$W_p(\varphi_u) = -N_u = \varphi_v \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + v^2}}$$
$$W_p(\varphi_v) = -N_v = \varphi_u \cdot \frac{1}{(1 + v^2)^{3/2}}.$$

Por lo tanto la representación matricial de W_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$[W_p] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$K = \det(W_p) = -\frac{1}{(1 + v^2)^2}.$$

Observamos que K depende únicamente de v que es la distancia al eje z y pues

$$\|\varphi(u, v) - (0, 0, u)\| = |v|.$$

Por lo tanto, K es creciente en función de la distancia al eje z, pues $K'(|v|) > 0$ si consideramos a K como función de la distancia al eje z. □

Ejercicio 4. Mostrar que la curvatura media H en $p \in S$ está dada por

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

donde $k_n(\theta)$ es la curvatura normal en la dirección que forma un ángulo θ con la dirección principal e_1.

Demostración. En efecto, por la **Observación 4.4.4** sabemos que si $v \in T_pS$ es unitario, $v = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta$ siendo θ el ángulo determinado por v y e_1. Entonces

$$k_n(v) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta.$$

con k_1, k_2 las curvaturas principales en p. Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} k_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi}(k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= k_1\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta + k_2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= k_1\cdot\frac{\pi}{2} + k_2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(k_1+k_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}(k_1+k_2) = \frac{k_1+k_2}{2} = H.$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 6. Mostrar que si $H \equiv 0$ sobre S y S no tiene puntos planares, entonces la aplicación de Gauss $N : S \longrightarrow S^2$ satisface

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle = -K(p)\langle w_1, w_2\rangle$$

para todo $p \in S$ y todo $w_1, w_2 \in T_pS$.

Demostración. Recordemos que $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W_p)$, si

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}$$

Se tiene que $H \equiv 0$ implica que $k_1 + k_2 = 0$ y por lo tanto $k_2 = -k_1$ y además $k_1 \neq 0$ pues no tiene puntos planares. Luego, la aplicación de Weingarten viene dada por

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0\\ 0 & -k_1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para todo $w_1, w_2 \in T_pS$ tenemos que $K(p) = \det W_p = -k_1^2$ y

$$\begin{aligned}\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle &= \langle -W_p(w_1), -W_p(w_2)\rangle = \langle W_p(w_1), W_p(w_2)\rangle\\ &= \left\langle \begin{pmatrix} k_1 & 0\\ 0 & -k_1\end{pmatrix} w_1, \begin{pmatrix} k_1 & 0\\ 0 & -k_1\end{pmatrix} w_2\right\rangle\\ &= k_1^2\langle w_1, w_2\rangle = -K(p)\langle w_1, w_2\rangle.\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 7. Sea S una superficie parametrizada por $\varphi(u,v) = (u, vu^2)$, calcular la aplicación de Weingarten W_p e indicar las curvaturas principales en un punto $p \in S$.

Demostración. Análogamente a los ejercicios anteriores, la parametrización de la superficie es

$$\varphi(u,v) = (u,v,u^2), \quad (u,v \in \mathbb{R}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (1,0,2u), \\
\varphi_v &= (0,1,0), \\
N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-2u,0,1)}{\sqrt{1+4u^2}} \\
W_p(\varphi_u) &= -N_u = \varphi_u \cdot \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2}} \\
W_p(\varphi_v) &= -N_v = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la representación matricial de W_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$[W_p] = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, las curvaturas principales son

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2}}, \\
k_2 &= 0.
\end{aligned}$$

para todo $p = \varphi(u,v) \in S$. □

Ejercicio 8. Sea S una superficie orientada. Demostrar que la suma de las curvaturas normales en un punto, en cualquier par de direcciones ortogonales, es constante.

Demostración. Sean $u, v \in T_pS$ dos direcciones ortogonales unitarias y θ el ángulo entre u y la dirección principal e_1. Entonces, debe ser

$$\begin{aligned}
u &= k_1 \cos\theta + k_2 \sin\theta \\
v &= k_1 \cos(\theta + \pi/2) + k_2 \sin(\theta + \pi/2) = -k_1 \sin\theta + k_2 \cos\theta.
\end{aligned}$$

s.p.d.g. Luego,

$$\begin{aligned}
k_n(u) &= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta, \\
k_n(v) &= k_1 \sin^2\theta + k_2 \cos^2\theta. \\
&\implies k_n(u) + k_n(v) = k_1 + k_2 = 2H
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de dos curvaturas normales en un punto en direcciones ortogonales es constantemente igual a $2H$. □