Geometría Diferencial

Práctica 3 - Aplicaciones entre superficies, orientación

Ejercicio 1. Sean S_1 y S_2 el cilindro $x^2+y^2=1$ y el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$, respectivamente. Definamos una función $f : S_1 \longrightarrow S_2$ como $f(x,y,z) := \left((1+z^2)^{1/2}x, (1+z^2)^{1/2}y, z\right)$. Sea $p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \in S_1$, calcular T_pS_1, $T_{f(p)}S_2$, df_p y su matríz asociada.

Ejercicio 2 (♠). Sean S^2 la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ y E el elipsoide

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1\right\}.$$

Definamos $f : S^2 \longrightarrow E$ mediante $f(x,y,z) := (3x, 2y, z)$ y tomemos $p := (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$. Calcular T_pS^2, $T_{f(p)}E$, df_p y su matríz asociada.

Ejercicio 3 (Regla de la cadena)**.** Probar que si $f : S_1 \longrightarrow S_2$ y $g : S_2 \longrightarrow S_3$ son aplicaciones suaves entre superficies, entonces para cada $p \in S_1$,

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Ejercicio 4. Probar que si $f : S_1 \longrightarrow S_2$ es un difeomorfismo local entre superficies regulares, entonces $df_p : T_pS_1 \longrightarrow T_{f(p)}S_2$ es un isomorfismo lineal.

Ejercicio 5. Probar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo a algún plano.

Ejercicio 6. Decimos que una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es *conexa*[1] si cualquier par de puntos de S pueden ser unidos por una curva continua contenida en S.

(a) Probar que si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que no se anula nunca definida sobre una superficie conexa S, entonces f no cambia de signo sobre S.

(b) Probar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es una superficie regular conexa pero que el hiperboloide de dos hojas $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ es una superficie regular no conexa.

Ejercicio 7 (♣). Sean S una superficie conexa y $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Probar que si $dg_p \equiv 0$ para todo $p \in S$, entonces g es constante.

Sugerencia: recordar que un conjunto M es conexo sii el único conjunto que es no vacío, abierto y cerrado es M. Para $p_0 \in S$ con $g(p_0) = c$, considerar $M = \{p \in S : g(p) = c\}$.

Ejercicio 8. Sean S una superficie y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Decimos que $p \in S$ es un *punto crítico* de f si $df_p \equiv 0$.

Consideremos la función $f(p) = \|p - p_0\|^2$, con $p_0 \notin S$ fijo.

(a) Probar que f es suave.

(b) Demostrar que p es un punto crítico de f sii la recta que une p con p_0 es normal a S en p.

[1] En realidad, esta definición es la de *conexo por caminos*, pero ambas nociones coinciden en el caso de una superficie regular.

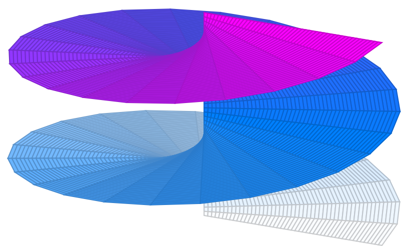
Ejercicio 9 (♣). Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 3\}$. Calcular los puntos críticos de la función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x + y$.

Ejercicio 10. Sean $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular invariante por L, i.e., $L(S) \subset S$.

(a) Probar que $dL_p(w) = L(w)$, $\forall p \in S$, $\forall w \in T_pS$.

(b) Sea $\omega \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fijo y definamos una función $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como $\varphi(p) = \omega \times p + \langle \omega, p\rangle p$. Calcular $d(\varphi \circ \tilde{L})$, donde $\tilde{L} := L|_S$

Ejercicio 11. Consideremos el *helicoide* $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, au)$, $a \neq 0$.



(a) Calcular $N(u, v)$.

(b) Si θ es el ángulo que forma el normal y el eje z, probar que $\tan\theta$ por la distancia entre el punto $\varphi(u_0, v)$ y el eje z; es una contante no nula, es decir son inversamente proporcionales.

Ejercicio 12. Sean S_1, S_2 y M superficies regulares tales que $M = S_1 \cup S_2$.

(a) Probar que si S_1 y S_2 son orientables y $S_1 \cap S_2$ es conexa, entonces M es orientable.

(b) Demostrar que si S_1 y S_2 son conexas y están orientadas mediante N_1 y N_2 de modo que existen dos puntos $p, q \in S_1 \cap S_2$ tales que $N_1(p) = N_2(p)$ y $N_1(q) \neq N_2(q)$, entonces M no es orientable.

Ejercicio 13. Consideremos el atlas de la *cinta de Möbius*[2] dado por $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, donde

$$\varphi_i(u, v) = (2 \operatorname{sen} u, 2 \cos u, 0) + v(0, \operatorname{sen}(u/2), \cos(u/2))$$

$$U_1 = (-\pi, \pi) \times (-1, 1), \quad U_2 = \left(\frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{2}\right) \times (-1, 1).$$

Mostrar que la cinta de Möbius no es orientable.

[2] Descubierta de forma independiente y casi simultáneamente por los matemáticos alemanes A. F. Möbius y J. B. Listing a mediados del siglo XIX.