Geometría Diferencial

Bustos Jordi
Práctica V

31 de octubre de 2025

Ejercicio 1. Consideremos la tractriz dada por $\gamma(t) = (sen(t), 0, \ln(\tan(t/2)))$, con $t \in (\pi/2, \pi)$. La superficie de revolución obtenida al rotar la tractriz alrededor del eje z es llamada pseudoesfera. Probar que la curvatura de Gauss de la pseudoesfera es $K \equiv -1$.

Demostración. La parametrización de la pseudoesfera es

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v)) \\ &= (\operatorname{sen}(v)\cos(u), \operatorname{sen}(v)\sin(u), \ln(\tan(v/2))), \quad (u \in [0, 2\pi), v \in (\pi/2, \pi)).\end{aligned}$$

Luego, por **Ejemplo 4.8.4** se tiene que

$$K = -\frac{f''(v)}{f(v)} = -\frac{-\operatorname{sen}(v)}{\operatorname{sen}(v)} = -1.$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 2. Consideremos el hiperboloide de la ecuación $z = axy$ con $a \in \mathbb{R}$. Mostrar que en el origen la curvatura de Gauss es $K = -a^2$ y la curvatura media es $H = 0$.

Demostración. La parametrización del hiperboloide es

$$\varphi(u,v) = (u, v, auv), \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (1, 0, av), \\ \varphi_v &= (0, 1, au), \\ N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-av, -au, 1)}{\sqrt{1 + a^2u^2 + a^2v^2}}.\end{aligned}$$

Luego, la aplicación de Weingarten viene dada por:

$$\begin{aligned}W_p(\varphi_u) = -N_u &= \frac{(0, a/\sqrt{1 + a^2u^2 + a^2v^2}, au(auv)'_u)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}} = \frac{(0, a, 0)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}}, \\ W_p(\varphi_v) = -N_v &= \frac{(a/\sqrt{1 + a^2u^2 + a^2v^2}, 0, av(auv)'_v)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}} = \frac{(a, 0, 0)}{(1 + a^2u^2 + a^2v^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Por lo que la representación matricial de W_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$[W_p] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{(1+a^2u^2+a^2v^2)^{3/2}} \\ \frac{a}{(1+a^2u^2+a^2v^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
K &= \det(W_p) = -\frac{a^2}{(1+a^2u^2+a^2v^2)^3} \overset{(u,v)=(0,0)}{=} -a^2,\\
H &= 0.
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. Análogamente podríamos haber definido $\gamma(t) = (t,0,0)$ tal que $\gamma(0) = (0,0,0) = p$ y $\gamma'(0) = (1,0,0)$. Calcular

$$dN_p = \frac{d}{dt}N(\varphi(t,0))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{(-a\cdot 0, -at, 1)}{\sqrt{1+a^2t^2+a^2\cdot 0^2}}\right)\Big|_{t=0} = (0,-a,0).$$

Por lo que $W_p(\gamma'(0)) = -dN_p(\gamma'(0)) = (0,a,0)$ y obtenemos el mismo resultado. Lo mismo se puede hacer con $\beta(t) = (0,t,0)$, resultando en:

$$W_p(\beta'(0)) = (a,0,0).$$

Por lo tanto la representación matricial de W_p en la base $\{\gamma'(0), \beta'(0)\}$ es la misma que antes y obtenemos los mismos valores para K y H. □

Ejercicio 3. Calcular la curvatura de Gauss del helicoide $\varphi(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), u)$ y mostrar que es creciente en función de la distancia al eje z.

Demostración. La parametrización del helicoide es

$$\varphi(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), u), \quad (u,v\in\mathbb{R}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-v\sin(u), v\cos(u), 1),\\
\varphi_v &= (\cos(u), \sin(u), 0),\\
N &= \frac{\varphi_u\times\varphi_v}{\|\varphi_u\times\varphi_v\|} = \frac{(-\operatorname{sen}u, \cos u, -v)}{\sqrt{1+v^2}}.
\end{aligned}$$

Luego, la aplicación de Weingarten viene dada por:

$$\begin{aligned}
W_p(\varphi_u) &= -N_u = \varphi_v\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}\\
W_p(\varphi_v) &= -N_v = \varphi_u\cdot\frac{1}{(1+v^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la representación matricial de W_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$[W_p] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} & 0\end{pmatrix}.$$

Luego,

$$K = \det(W_p) = -\frac{1}{(1+v^2)^2}.$$

Observamos que K depende únicamente de v que es la distancia al eje z y pues

$$\|\varphi(u,v) - (0,0,u)\| = |v|.$$

Por lo tanto, K es creciente en función de la distancia al eje z, pues $K'(|v|) > 0$ si consideramos a K como función de la distancia al eje z. □

Ejercicio 4. Mostrar que la curvatura media H en $p \in S$ está dada por

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

donde $k_n(\theta)$ es la curvatura normal en la dirección que forma un ángulo θ con la dirección principal e_1.

Demostración. En efecto, por la **Observación 4.4.4** sabemos que si $v \in T_pS$ es unitario, $v = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta$ siendo θ el ángulo determinado por v y e_1. Entonces

$$k_n(v) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta.$$

con k_1, k_2 las curvaturas principales en p. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} k_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi}(k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= k_1\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta + k_2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= k_1\cdot\frac{\pi}{2} + k_2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(k_1+k_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}(k_1+k_2) = \frac{k_1+k_2}{2} = H.$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 6. Mostrar que si $H \equiv 0$ sobre S y S no tiene puntos planares, entonces la aplicación de Gauss $N : S \longrightarrow S^2$ satisface

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle = -K(p)\langle w_1, w_2\rangle$$

para todo $p \in S$ y todo $w_1, w_2 \in T_pS$.

Demostración. Recordemos que $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W_p)$, si

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $H \equiv 0$ implica que $k_1 + k_2 = 0$ y por lo tanto $k_2 = -k_1$ y además $k_1 \neq 0$ pues no tiene puntos planares. Luego, la aplicación de Weingarten viene dada por

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para todo $w_1, w_2 \in T_pS$ tenemos que $K(p) = \det W_p = -k_1^2$ y

$$\begin{aligned}
\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle &= \langle -W_p(w_1), -W_p(w_2)\rangle = \langle W_p(w_1), W_p(w_2)\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} w_1, \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} w_2 \right\rangle \\
&= k_1^2\langle w_1, w_2\rangle = -K(p)\langle w_1, w_2\rangle.
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 7. Sea S una superficie parametrizada por $\varphi(u,v) = (u, vu^2)$, calcular la aplicación de Weingarten W_p e indicar las curvaturas principales en un punto $p \in S$.

Demostración. Análogamente a los ejercicios anteriores, la parametrización de la superficie es

$$\varphi(u,v) = (u, v, u^2), \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (1, 0, 2u), \\
\varphi_v &= (0, 1, 0), \\
N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-2u, 0, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2}} \\
W_p(\varphi_u) &= -N_u = \varphi_u \cdot \frac{-2}{\sqrt{1 + 4u^2}} \\
W_p(\varphi_v) &= -N_v = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la representación matricial de W_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$[W_p] = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, las curvaturas principales son

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{-2}{\sqrt{1 + 4u^2}}, \\
k_2 &= 0.
\end{aligned}$$

para todo $p = \varphi(u,v) \in S$. □

Ejercicio 8. Sea S una superficie orientada. Demostrar que la suma de las curvaturas normales en un punto, en cualquier par de direcciones ortogonales, es constante.

Demostración. Sean $u, v \in T_pS$ dos direcciones ortogonales unitarias y θ el ángulo entre u y la dirección principal e_1. Entonces, debe ser

$$\begin{aligned}
u &= k_1 \cos\theta + k_2 \sin\theta \\
v &= k_1 \cos(\theta + \pi/2) + k_2 \sin(\theta + \pi/2) = -k_1 \sin\theta + k_2 \cos\theta.
\end{aligned}$$

s.p.d.g. Luego,

$$\begin{aligned}
k_n(u) &= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta, \\
k_n(v) &= k_1 \sin^2\theta + k_2 \cos^2\theta. \\
&\implies k_n(u) + k_n(v) = k_1 + k_2 = 2H
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de dos curvaturas normales en un punto en direcciones ortogonales es constantemente igual a $2H$. □

Ejercicio 9. Probar que una curva conexa regular $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ en un entorno coordenado $\varphi(U)$ de una superficie regular S es una línea de curvatura si y sólo si satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0.$$

Demostración. Sea S la superficie parametrizada por $\varphi(u,v)$ si tomamos la curva $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ y suponemos que es línea de curvatura, por **Proposición 4.6.2 (Olinde Rodrigues)** se tiene que

$$N'(s) = \lambda(s)\gamma'(s)$$

Con $-\lambda(s)$ la curvatura principal en la dirección de $\gamma'(s)$. Luego,

$$\begin{aligned} N'(s) &= N_u u' + N_v v' \\ &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}\varphi_u u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}\varphi_v v' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}(\varphi_u v' + \varphi_v u') \\ &= \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}v'\right)\varphi_u + \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2}v' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}u'\right)\varphi_v. \end{aligned}$$

Además, $\gamma'(s) = \varphi_u u' + \varphi_v v'$. Uniendo las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} N'(s) &= \lambda(s)\gamma'(s) \\ &= \lambda(s)(\varphi_u u' + \varphi_v v') \\ &= (\lambda(s)u')\,\varphi_u + (\lambda(s)v')\,\varphi_v. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}v'\right)\varphi_u + \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2}v' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}u'\right)\varphi_v = (\lambda(s)u')\,\varphi_u + (\lambda(s)v')\,\varphi_v.$$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}v' &= \lambda(s)u', \\ \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}u' &= \lambda(s)v'. \end{aligned}$$

Despejando λ de ambas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}v'\right]\cdot 1/u' = \lambda(s) \\ &\left[\frac{gF - fG}{EG - F^2}v' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}u'\right]\cdot 1/v' = \lambda(s) \\ \Longrightarrow\ &\left[\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}v'\right]\cdot 1/u' = \left[\frac{gF - fG}{EG - F^2}v' + \frac{eF - fE}{EG - F^2}u'\right]\cdot 1/v' \end{aligned}$$

Multiplicando por $u'v'(EG - F^2)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} &(fF - eG)(u')^2 + (eF - fE)u'v' = (gF - fG)(v')^2 + (eF - fE)u'v' \\ \Longrightarrow\ &(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0. \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. La implicación recíproca se demuestra de forma análoga. □

Ejercicio 10. Mostrar que ningún entorno de un punto de una esfera puede ser mapeado isométricamente a un plano.

Demostración. El ejercicio es trivial si utilizamos el teorema de Egregium de Gauss que nos dice que la curvatura de Gauss es invariante por isometrías. Como la curvatura de la esfera es $K > 0$ y la del plano es $K \equiv 0$ se tiene que no puede existir una isometría. □

Ejercicio 11. Probar que no existe ninguna superficie regular que admita una parametrización local cuyos coeficientes de la primera y segunda forma sean

$$E = G = 1, \qquad F = 0, \qquad e = 0, \qquad f = g = 1$$

Demostración. Supongamos que existe una superficie S regular con una parametrización local $\varphi : U \to S$ tal que

$$E = G = 1, \qquad F = 0, \qquad e = 0, \qquad f = g = 1$$

Luego, por el **Teorema de Gauss** se tiene que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 \cdot 1 - 1^2}{1 \cdot 1 - 0^2} = -1.$$

Por otro lado, como $F \equiv 0$ se tiene que, por **Proposición 4.9.7**, la curvatura de Gauss K puede ser expresada en función de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas parciales como

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left(\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v + \left(\frac{G_u - F_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right).$$

Por lo que, sustituyendo los valores de los coeficientes de la primera forma fundamental se obtiene:

$$K = -\frac{1}{2} (0_v + 0_u) = 0.$$

Llegando a una contradicción pues K no puede ser -1 y 0 a la vez. Por lo tanto, no existe ninguna superficie regular que admita una parametrización local cuyos coeficientes de la primera y segunda forma sean los dados. □

Ejercicio 12. Si S está parametrizada localmente por $\varphi : U \to S$, entonces φ es una aplicación conforme si y solo si $E = G$ y $F = 0$.

Demostración. Supongamos que es una aplicación conforme. Entonces, por definición, tenemos que

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \qquad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \qquad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.$$

Como φ es conforme, se tiene que para todo $w_1, w_2 \in T_pS$

$$\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle = \lambda(p) \langle w_1, w_2 \rangle.$$

Con $\lambda(p) > 0$. Consideremos la base canónica dada por $\{e_1, e_2\}$ en $T_{(u,v)}S$ tal que $d\varphi_p : T_{(u,v)}U \to T_pS$, luego

$$\begin{aligned}
\langle d\varphi_p(e_1), d\varphi_p(e_1) \rangle = \lambda(p) \langle e_1, e_1 \rangle &\implies E = \lambda(p), \\
\langle d\varphi_p(e_2), d\varphi_p(e_2) \rangle = \lambda(p) \langle e_2, e_2 \rangle &\implies G = \lambda(p), \\
\langle d\varphi_p(e_1), d\varphi_p(e_2) \rangle = \lambda(p) \langle e_1, e_2 \rangle &\implies F = 0.
\end{aligned}$$

pues $\varphi_u = d\varphi_p(e_1)$ y $\varphi_v = d\varphi_p(e_2)$. Por lo tanto, $E = G$ y $F = 0$. Recíprocamente, dados $x = (v_1, v_2)$, $y = (w_1, w_2) \in T_{(u,v)}U$ se tiene que

$$\begin{aligned}
d\varphi_p(x) &= v_1 \varphi_u + v_2 \varphi_v, \\
d\varphi_p(y) &= w_1 \varphi_u + w_2 \varphi_v.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\langle d\varphi_p(x), d\varphi_p(y) \rangle &= \langle v_1 \varphi_u + v_2 \varphi_v, w_1 \varphi_u + w_2 \varphi_v \rangle \\
&= v_1 w_1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + v_1 w_2 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + v_2 w_1 \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle + v_2 w_2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\
&= v_1 w_1 E + v_1 w_2 F + v_2 w_1 F + v_2 w_2 G \\
&= E(v_1 w_1 + v_2 w_2) \\
&= E \langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es conforme con $\lambda(p) = E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0$ si φ es regular. □