Notas del teórico

Complementos de análisis matemático - Irene Drelichman 2024

Bustos Jordi

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

110 | Clase XXI - 15/11

115 | Clase XXII - 22/11

118 | Parciales

This page is intentionally left blank.

Prefacio

> "Considero a cada hombre como un deudor
> de su profesión,
> y ya que de ella recibe sustento y provecho,
> así debe procurar,
> mediante el estudio,
> servirle de ayuda y ornato."
>
> Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Complementos de Análisis Matemático dictado por Irene Drelichman en el segundo cuatrimestre de 2024.
Las clases 1 a 8, junto con la primera parte de la clase 9, abarcan la primera mitad del curso. Las clases 9 a 22 cubren la segunda mitad, que incluye temas de diferenciación, integración y ecuaciones diferenciales, los cuales no fueron evaluados en la práctica. Se tomaron dos exámenes parciales, uno por cada mitad del curso.
Las clases 9 a 11 (hasta la mitad) cubren los conceptos básicos de Topología. Desde la segunda mitad de la clase 11 hasta la 14 se aborda la continuidad. Los teoremas de la función inversa e implícita se tratan en las clases 15 y 16. La integración se desarrolla en las clases 17 a 19. Las clases 20 a 22 (hasta la mitad) se dedican a las sucesiones de funciones, y finalmente, se introducen las ecuaciones diferenciales.
Estas notas se basan principalmente en material de los libros *Principles of Mathematical Analysis* de Walter Rudin, *Curso de análise vol.1* de Elon Lages Lima, *Cálculo y Análisis* de Larotonda (para la demostración del teorema de la función inversa e implícita) y *Calculus* de Tom M. Apostol.

Clase I - 23/08

1.1 Repaso de funciones

Una función $f : A \to B$ es un objeto que consta de tres partes: un conjunto A (dominio), un conjunto B (codominio) y una regla que permite asociar todo elemento de A a un único elemento de B. Es decir, $f(x) \in B$, donde $x \in A$. Además, $f(x) = y$, lo que significa que f asigna a x el valor $f(x)$.
El gráfico de $f : A \to B$ es el subconjunto de $A \times B$ dada por $(x, f(x))$ con $x \in A$ y $f(x) \in B$. Notamos $G(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$.

Definición 1.1 (Inyectividad). $f : A \to B$ es inyectiva cuando para

$$x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Definición 1.2 (Suryectividad). $f : A \to B$ es suryectiva cuando para

$$(\forall y \in B) \quad (\exists x \in A) \quad f(x) = y$$

Definición 1.3 (Biyectividad). $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.

Definición 1.4 (Imagen). Dados $f : A \to B$ y $X \subset A$ se llama imagen de X por f al conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

1.1.1. Propiedades

Proposición 1.5. $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$

Proposición 1.6. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. La igualdad vale $\iff$ si es inyectiva.

Demostración. Sea $a \in f(X \cap Y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\exists x \in X \cap Y : f(x) = b \Rightarrow \\ &x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \text{ e } y \in Y \Rightarrow f(y) \in f(Y)\end{aligned}$$

Si $f : A \to B$ no es inyectiva $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\exists x \neq y : f(x) = f(y) \\ &\text{Si } X = \{x\},\ Y = \{y\} \Rightarrow X \cap Y = \varnothing \\ &f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\} \Rightarrow f(X \cap Y) = \varnothing\end{aligned}$$

Si f es inyectiva, sea $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\exists a \in X, b \in Y : f(a) = f(b) = y \\ &\text{Como } f \text{ es inyectiva} \Rightarrow a = b \Rightarrow a \in X \cap Y \\ &\Rightarrow y = f(a) \Rightarrow y \in f(X \cap Y) \\ &\Rightarrow f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)\end{aligned}$$

$\therefore$ Si f es inyectiva son iguales. □

Proposición 1.7. $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$

Proposición 1.8. $f(\varnothing) = \varnothing$

Definición 1.9. Dados $f : A \to B$ y $Y \subset B$ se llama preimagen de Y por f al conjunto $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) = y, \forall y \in Y\}$.

1.1.2. Función inversa

Sea $f : A \to B$:

Proposición 1.10. $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$

Proposición 1.11. $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$

Proposición 1.12. $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

Proposición 1.13. $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$

Proposición 1.14. $f^{-1}(B) = A$

Proposición 1.15. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

1.1.3. Composición de funciones

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \forall x \in X$, es suficiente que $f(A) \subset B$.

Proposición 1.16. Composición de funciones suryectivas/inyectivas es suryectiva/inyectiva.

Proposición 1.17. $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

Definición 1.18. La restricción de f en un subconjunto $X \subset A$ la notamos $f|_X : X \to B$.

Definición 1.19. Dada $f : A \to B$ y $g : B \to A$, g es una inversa a izquierda si y sólo si $g \circ f = id_A$. $\exists g$ si y sólo si f es inyectiva.
Análogamente para la inversa a derecha, si f es suryectiva.
Si f es biyectiva $\Rightarrow$ g es inversa a ambos lados y es única.

1.1.4. Familia de funciones

Sea L un conjunto de elementos que llamamos índices y representamos genéricamente con λ. Dado un conjunto X, una familia de elementos de X con índices en L es $X : L \to x$. El valor de x en $\lambda \in L$ lo notamos x_λ y la familia $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Ejemplo. $L = \{1, 2\}$ los valores de $x : \{1, 2\} \to X$ se representan por x_1, x_2, es decir que los puedo identificar con pares ordenados (x_1, x_2) de elementos de X.

Una familia con elementos en $\mathbb{N}$ se llama sucesión. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X es una función de $x : \mathbb{N} \to X$ donde $x_n = x(n)$.
Las propiedades enunciadas previamente se pueden extender a cualquier familia de conjuntos.

1.2 Números naturales

Partimos de un conjunto $\mathbb{N}$ y una función $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple los siguientes axiomas (de Peano):

1. Es inyectiva.
2. $\mathbb{N} - S(\mathbb{N})$ tiene un solo elemento y lo llamamos 1.
3. Principio de inducción, si $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ y $\forall m \in X$ vale $S(m) \Rightarrow X = \mathbb{N}$.

El principio de inducción permite definir operaciones
La suma se define como $m+1=S(m)$, $m+S(n)=S(m+n)$.

Proposición 1.20. Asociatividad: sea $X=\{p\in\mathbb{N}: m+(n+p)=(m+n)+p, \forall n,m\in\mathbb{N}\}$.

Demostración. $1\in X$, $p\in X\Rightarrow$

$$m+(n+S(p))=m+S(n+p)=S(m+(n+p))=S((n+m)+p)=(m+n)+S(p)$$

$\therefore$ Por inducción $X=\mathbb{N}$. $\square$

Proposición 1.21. Conmutatividad: $n+m=m+n$.

Proposición 1.22. Ley de cancelación: $m+n=m+p\Rightarrow n=p$.

Proposición 1.23. Tricotomía: $m,n\in\mathbb{N}$, si $m>n, \exists p: m+p=n$. Si $m<n$, $\exists p\in\mathbb{N}:$ $n+p=m$.

Definición 1.24. La multiplicación se define recursivamente como: $m\times 1=m$ y $m\times(n+1)=m\times n+m$.
Cumple la asociatividad, conmutatividad, ley de cancelación y monotonía.

Teorema 1.25 (Principio de buena ordenación)**.** Todo subconjunto no vacío $A\subset\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

Demostración. Llamemos $\mathbb{I}_m=\{p\in\mathbb{N}: 1\leq p\leq n\}=[[1,m]]$ y $X=\{m\in\mathbb{N}: \mathbb{I}_m\subset\mathbb{N}-A\}$.
Si $1\in A\Rightarrow 1$ es primer elemento. Si $1\notin A\Rightarrow 1\in X$ como $X\neq\mathbb{N}$ pues $X\subseteq\mathbb{N}-A$ y $A\neq\varnothing$. Por el principio de inducción $\exists m\in X$ tal que $m+1\notin X$, si no tendríamos que $X=\mathbb{N}$. Luego todos los elementos entre 1 y m están en $\mathbb{N}-A$ y $m+1\in A$, se sigue que $a=m+1$ es primer elemento de A. $\square$

1.3 Cuerpo

Un cuerpo es un conjunto dotado de dos operaciones, suma y producto y se denota por $\mathbb{K}$.

1.3.1. Axiomas de la suma

1) Asociatividad: $\forall x,y,z\in\mathbb{K}, (x+y)+z=x+(y+z)$.
2) Conmutatividad: $\forall x,y\in\mathbb{K}, x+y=y+x$.
3) Neutro: $\exists 0\in\mathbb{K}: x+0=x, \forall x\in X$.
4) Opuesto: $\forall x\in X, \exists -x\in\mathbb{K}: x+(-x)=0_{\mathbb{K}}$.

1.3.2. Axiomas del producto

1) Asociatividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, (xy)z = x(yz)$.
2) Conmutatividad: $\forall x, y \in \mathbb{K}, xy = yx$.
3) Neutro: $\exists 1 \in \mathbb{K} - \{0\} : x \cdot 1 = x, \forall x \in X$.
4) Inverso: $\forall x \in X, \exists x^{-1} \in \mathbb{K} : x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$.
Axioma de distributividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x(y + z) = xy + xz$.

Ejemplo. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$.

1.3.3. Cuerpos Ordenados

Un cuerpo ordenado es un cuerpo $\mathbb{K}$ que tiene un subconjunto $P \in \mathbb{K}$ llamado conjunto de elementos positivos de $\mathbb{K}$ que cumplen:

1. $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P, xy \in P$.
2. $x \in \mathbb{K} \Rightarrow x \in P$ o $-x \in P$ o $x = 0$.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ con $P = \{p/q : p, q \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_2$ no es ordenado.

Proposición 1.26. Dado un cuerpo ordenado si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 \in P$.

En un cuerpo ordenado definimos $x < y$ para significar que $y - x \in P$.
La relación $<$ tiene las siguientes propiedades:

Proposición 1.27. Transitividad: $x < y$ y $y < z \Rightarrow x < z$.

Proposición 1.28. Tricotomía: $x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow x = y$ o $x < y$ o $x > y$.

Proposición 1.29. Monotonía de la suma $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.

Proposición 1.30. Monotonía del producto $x < y, 0 < z \Rightarrow xz < yz$.

En el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ escribimos $x \leq y$ para significar $x < y$ o $x = y$. O sea $y - x \in P \cup \{0\}$.
Con esta relación se cumplen todas las propiedades anteriores y la antisimetría. $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.
Además tenemos la noción de intervalo, dados $a, b \in \mathbb{K}$ definimos $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}, [a, b), (a, b], (a, b), [a, +\infty), (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, b), [a, a] = \{a\}$.
Un subconjunto de $X \subset K$ se dice acotado inferiormente, superiormente si tiene cota inferior o cota superior. $\exists b \in \mathbb{K} : x \leq b, \forall x \in X$.

Clase II - 27/08

2.1 Cuerpo Arquimediano

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, pero esto no necesariamente implica que $\mathbb{N}$ es no acotado.

Ejemplo. $\mathbb{Q}(t)$: cuerpo de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{Q}$, $r(t) = p(t)/q(t)$, $p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$. Este cuerpo puede ser ordenado diciendo que $r(t)$ es positivo si y sólo si el coeficiente de mayor grado del polinomio pq es positivo. En este cuerpo observemos que $p(t) = t = t/1$ cumple que $\forall n \in \mathbb{N}, p(t) = t - n \in P \Rightarrow t > n, \forall n \in \mathbb{N}$. Es decir que en $\mathbb{Q}(t)$, $\mathbb{N}$ es un conjunto acotado, por ejemplo por t.

Teorema 2.1. En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ son equivalentes:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ no es acotado superiormente.
2. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ con $a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : m \cdot a > b$.
3. Dado cualquier $0 < a \in \mathbb{K}, \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \dfrac{1}{n} < a$.
4. $\mathbb{K}$ es arquimediano.

Demostración. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado.

1) $\Rightarrow$ 2) Como $\mathbb{N}$ es no acotado, dados $a, b \in \mathbb{K}$, $a > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} : m > \dfrac{b}{a}$, caso contrario $\dfrac{b}{a}$ sería cota de $\mathbb{N} \Rightarrow ma > b$

2) $\Rightarrow$ 3) Dado $a > 0$, tomamos $b = 1$ y por 2) $\exists n \in \mathbb{N} : ma > 1 \Rightarrow a > \dfrac{1}{m} > 0$.

3) $\Rightarrow$ 1) Dado $0 < a \in \mathbb{K} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{a}$, pues 3. vale para todo $\mathbb{K} \Rightarrow b < n \Rightarrow$ es no acotado (pues ningún $b > 0$ puede ser cota superior).

$\square$

2.2 Supremo e ínfimo

Definición 2.2 (Supremo)**.** Dados un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ y un subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ acotado superiormente, decimos que $b \in \mathbb{K}$ es supremo de X si es la menor de las cotas superiores de X en $\mathbb{K}$.

Es decir, se cumple:

1. $\forall x \in X, x \leq b$
2. Si $c \in \mathbb{K}$ y $x \leq c$, $\forall x \in X \Rightarrow b \leq c$.
3. Dado $c < b$ en $\mathbb{K}, \exists x \in X : c < x$

Observación. 1. El supremo de un conjunto, si existe es único.

2. Si un conjunto tiene máximo, es el supremo.
3. Si $X = \varnothing$, todo $b \in \mathbb{K}$ es cota superior, como $\mathbb{K}$ no tiene último elemento, se sigue que $\varnothing$ no tiene supremo en $\mathbb{K}$.

Definición 2.3 (Ínfimo)**.** Dados un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ y un subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ acotado inferiormente, decimos que $b \in \mathbb{K}$ es ínfimo de X si es la mayor de las cotas inferiores de X en $\mathbb{K}$.

Es decir, se cumple:

1. $\forall x \in X, x \geq b$
2. Si $c \in \mathbb{K}$ y $x \geq c$, $\forall x \in X \Rightarrow b \geq c$.
3. Dado $c > b$ en $\mathbb{K}, \exists x \in X : b < x < c$.

Ejemplo. Dados $a < b$ en $\mathbb{K}$. Si $X = (a, b) \Rightarrow \inf(X) = a$, $\sup(X) = b$.

1. Por definición a es cota inferior y b superior.
2. $a < c \in \mathbb{K}$, no es cota inferior. En efecto, si $c \geq b$ trivial. Si $c < b \Rightarrow \frac{a+c}{2} \in X$, $a < \frac{a+c}{2} < c \Rightarrow a < c \therefore c$ no es cota inferior.

Luego por 1) y por 2) a es ínfimo de X.

Ejemplo. Sea $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y = \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $\inf(Y) = 0, \sup(Y) = \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \in Y,\ \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sup(Y)$$

Como $0 < \dfrac{1}{2^n}(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 0$ es cota inferior. Sea

$$\begin{aligned} &0 < c \in \mathbb{K}, 2^n = (1+1)^n \leq 1 + n \leq \frac{1}{c} \\ &\Rightarrow n \leq \frac{1}{c} - 1 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < c \end{aligned}$$

$\Rightarrow c$ no puede ser cota inferior por la propiedad 3 de la arquimedianidad $\therefore 0$ es el ínfimo de Y.

El problema más serio de los racionales desde el punto de vista del análisis es que algunos conjuntos acotados de números racionales no tienen súpremo (o ínfimo) en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo. Sean $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$, $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0, y^2 > 2\}$. Notemos que si $z > 2 \Rightarrow z^2 > 4 \Rightarrow z \notin X \Rightarrow X \subset [0, 2]$ y X es un conjunto acotado. Además $Y \subset (0, +\infty)$ por lo que es un conjunto acotado inferiormente. Veamos que $\nexists$ supremo e ínfimo en $\mathbb{Q}$.

1. Quiero ver que X no tiene máximo. Dado $x \in X$ quiero encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < 1$ y $x + r \in X \iff (x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < 2$. Como $r < 1 \Rightarrow (x+r)^2 < x^2 + 2xr + r = x^2 + r(2x+1) < 2 \therefore x + r \in X$.

2. Quiero ver que Y no tiene elemento mínimo, dado $y \in Y$ tomo $r \in \mathbb{Q} : 0 < r < \dfrac{y^2-2}{2y}$.

$$\begin{aligned}(y-r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2yr &> 2\\ y^2 - 2 &> 2yr\\ \frac{y^2-2}{2y} &> r\end{aligned}$$

   Es decir que $y - r \in Y$ e $y - r < y$.

3. Si $x \in X, y \in Y \Rightarrow x < y \Rightarrow x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$.

Veamos que por 1, 2, 3 $\nexists \sup(X), \inf(Y)$. Supongamos $0 < \alpha = \sup(X)$, no puede ser $\alpha^2 < 2$ porque si no $\alpha \in X$ y X no tiene máximo. Tampoco puede ser $\alpha^2 > 2$ pues estaría en Y e Y no tiene mínimo, pues habría un $\beta \in Y$ con $\beta < \alpha$ y por 3) sería $x < \beta < \alpha, \forall x \in X$ lo que contradice que $\sup(X) = \alpha$, pues sería β el supremo. En definitiva si existiese $\sup(X) = \alpha$, debe ser $\alpha^2 = 2 \notin \mathbb{Q}$. Luego X no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Ínfimo, ejercicio (análogo).

2.3 Cuerpo completo

Definición 2.4. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado no Arquimediano, $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ es acotado superiormente.

Si $b \in \mathbb{K}$ es una cota superior de $\mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} < b, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < b - 1$ o sea $b - 1$ es cota superior de $\mathbb{N} \therefore \nexists \sup(\mathbb{N})$ en $\mathbb{K}$.

Definición 2.5 (Cuerpo Completo). Un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ se dice completo cuando dado un subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{K}$.

Observación. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado completo. Entonces:

1. Es arquimediano.

2. Dado un subconjunto no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo en $\mathbb{K}$.

Demostración. Sea $Y \subset \mathbb{K}$, no vacío y acotado inferiormente. Sea $X = -Y = \{-y : y \in Y\} \Rightarrow X$ es no vacío y acotado superiormente $\Rightarrow \exists \sup(X) = a \Rightarrow -a = \inf(Y)$. $\square$

Axioma: Existe un cuerpo ordenado llamado $\mathbb{R}$.
Ejercicio: Dados $0 < a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! 0 < b \in \mathbb{R} : b^m = a$. Sugerencia Definir $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^n < a\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^n > a\}$ e imitar la demostración anterior. Probar y usar que dado $x > 0$ $\exists$ para cada $m \in \mathbb{N}$ un número real positivo que depende de x tal que $(x + d)^m \leq A_n d + x^n, \forall 0 < d < 1$..

Definición 2.6 (Conjunto Denso)**.** Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se dice denso en $\mathbb{R}$ si todo intervalo abierto (a, b) contiene algún punto de X.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Como $b - a > 0, \exists p \in \mathbb{N} : 0 < \dfrac{1}{p} < b - a$.
Sea $A = \{m \in \mathbb{Z} : \dfrac{m}{p} \geq b\}$. Como $\mathbb{R}$ es Arquimediano, A es un conjunto de números enteros no vacío y acotado por bp. Sea m_0 el menor elemento de A entonces $b \leq \dfrac{m_0}{p}$ y $\dfrac{m_0 - 1}{p} < b$. También $\dfrac{m_0 - 1}{p} > a$, si no tendríamos que

$$\frac{m_0 - 1}{p} \leq a \leq b \leq \frac{m_0}{p}$$

Luego,

$$b - a \leq \frac{m_0}{p} - \frac{m_0 - 1}{p} = \frac{1}{p}$$

Absurdo! $\therefore$ $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.
Para ver que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es denso usamos la misma idea tomando $p \in \mathbb{N} : 0 < \dfrac{1}{p} < \dfrac{b - a}{\sqrt{2}}$ por Arquimedianidad y $\dfrac{\sqrt{2}}{p} < b - a$ por longitud del intervalo. Ejercicio terminar la demostración.

2.4 Cardinalidad - introducción

Definición 2.7. Decimos que dos conjuntos X, Y tienen el mismo cardinal (coordinables o equipotentes) si $\exists f : X \to Y$ biyectiva. Notamos $X \sim Y$ o $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ o $\#X = \#Y$ y $\sim$ es una relación de equivalencia.

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Teorema 2.8. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m \iff n = m$.

Demostración. Sabemos que si $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$, entonces $\exists f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_m$ biyectiva. Supongamos que $n < m$. Esto implica que puedo definir $g : \mathbb{I}_m \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectiva como:

$$g(k) = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq k \leq n+1, \\ 1 & \text{si } k > n+1. \end{cases}$$

Dada $g \circ f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ basta probar que $\nexists$ funciones $h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectivas para probar el absurdo. Por inducción Si $m = 1$, h no puede ser suryectiva. Supongamos que vale para $1 \leq k \leq n-1$. Si $\exists h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectiva, entonces $\exists k : f(n) = k$. Definimos una permutación r de $\mathbb{I}_{n+1}$ tal que $r(k) = n+1$. Por lo tanto, $r \circ h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ es suryectiva y $(r \circ f)(n) = r(k) = n+1$. Esto implica que la restricción

$$r \circ f|_{\mathbb{I}_{n-1}} : \mathbb{I}_{n-1} \to \mathbb{I}_n$$

es suryectiva. Esto es un absurdo, ya que por la hipótesis inductiva no existen funciones suryectivas de $\mathbb{I}_{n-1} \to \mathbb{I}_n$.
El caso $\Leftarrow$ es trivial. $\square$

Definición 2.9. X es finito si $\exists n : X$ es coordinable con $\mathbb{I}_n$ y escribimos $\mathrm{card}(X) = n$. Decimos que X es infinito si no existe tal n.

Clase III - 30/08

3.1 Conjuntos numerables

Definición 3.1 (Conjunto numerable)**.** Un conjunto X es numerable si $X \sim \mathbb{N}$. Cada biyección se llama una enumeración de los elementos de X.

Definición 3.2 (Conjunto a lo sumo numerable)**.** Decimos que un conjunto es a lo sumo numerable (contable) si es finito numerable.

Ejemplo. Los números pares, $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. $f(n) = 2n$, $f : \mathbb{N} \to P$ es biyectiva $\therefore$ es numerable. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{Z}$ es numerable.

Demostración. Definimos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ como $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0, \\ -2n+1 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$ y f^{-1} es una enumeración. $\square$

Teorema 3.3. Sea X un conjunto y $P(X) = \{A : A \subset X\} \Rightarrow \mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(P)$

Demostración. Supongamos que $\exists f : X \to P(X)$ biyectiva, en particular, f es suryectiva.
Dado $x \in X$, puede pasar que $x \in f(X)$ o $x \notin f(X)$. Definimos $B = \{x \in X : x \notin f(X)\} \subset X$.Como f es suryectiva se tiene que $\exists y \in Y : f(y) = B$.
Si $y \notin B = f(y) \Rightarrow y \notin f(y) \Rightarrow y \in B$.
Si $y \in B = f(y) \Rightarrow y \in f(y) \Rightarrow y \notin B$.
Absurdo en ambos casos, luego $\Rightarrow \nexists f$ biyectiva $\therefore \mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(P)$. $\square$

Definición 3.4. Decimos que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ si $\exists f : X \to Y$ inyectiva.
$\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$ si $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$, pero $\neg(X \sim Y)$.

Proposición 3.5. Es una relación de orden

Demostración.

- $\mathtt{card}(X) \leq \mathtt{card}(X)$ porque la identidad es inyectiva.
- $\mathtt{card}(X) \leq \mathtt{card}(Y)$, $\mathtt{card}(Y) \leq \mathtt{card}(Z) \Rightarrow \mathtt{card}(X) \leq \mathtt{card}(Z)$ pues la composición de funciones es inyectiva.
- $\mathtt{card}(X) = \mathtt{card}(Y) \Rightarrow X \sim Y$.

□

3.2 Cantor - Schröder - Bernstein

Teorema 3.6 (Cantor - Schröder - Bernstein)**.** Si $\exists f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ inyectivas $\Rightarrow \exists h : X \to Y$ biyectiva.

Demostración. Vamos a probar que existen dos particiones distintas de X e Y. Sea $X = X_1 \cup X_2$ y $Y = Y_1 \cup Y_2 : f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$ son biyectivas. Podemos definir a $h : X \to Y$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1, \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$$

Que es biyectiva. Definimos $\phi(x) : P(X) \to P(X)$, $\phi(A) = X - g(Y - f(A))$. Veamos primero que ϕ es creciente i.e $A \subseteq B \Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$.

Demostración. $A \subseteq B \iff f(A) \subseteq f(B) \iff y - f(B) \subseteq y - f(A) \iff g(y - f(B)) \subseteq g(y - f(A)) \iff X - \phi(A) \subseteq X - \phi(B)$ □

Sea $\mathcal{C} = \{C \subset X : \phi(C) \subset C\} \neq \varnothing$ pues $X \in \mathcal{C}$ y $A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \varnothing$, $A \subset C, \forall C \in \mathcal{C}$ y ϕ es creciente y tenemos que $\phi(C) \subset C \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(C) \subset C \Rightarrow \phi(C) \in A$. Además, usando otra vez que ϕ es creciente, $\phi(\phi(A)) \subset \phi(A) \Rightarrow \phi(A) \in \mathcal{C} \Rightarrow A \subset \phi(A) \Rightarrow A = \phi(A)$. Sean $X_1 = A$, $X - X_1 = X_2 = g_2(Y_2)$
$Y_1 = f(A)$, $Y_2 = Y - f(A) \Rightarrow$
$A = \phi(A) = X - g(Y - f(A)) \iff X - A = g(Y - f(A)) \iff X - X_1 = g(Y_2) = X_2 \therefore f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$ son biyectivas. □

Ejemplo. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.

Demostración. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, f(x) = x$ es inyectiva.
Sea $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, f\left(\frac{a}{b}\right) = \mathtt{sign}(a) \cdot 2^a \cdot 3^b$ es inyectiva por Teorema Fundamental de la Aritmética. Luego por el teorema anterior $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$. □

Ejemplo. $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ es numerable.

Demostración. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(n) = (1, n)$ es inyectiva. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f((n, m)) = 2^n \cdot 3^m$ es inyectiva por Teorema Fundamental de la Aritmética $\therefore$ es numerable. □

3.3 Los Reales son no numerables

Teorema 3.7. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Supongamos que es numerable $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biyectiva. A cada número real x_n le asignamos un intervalo centrado en ese punto de longitud 2^{-n}. La unión de todos esos intervalos tiene longitud menor o igual a la suma de las longitudes (se pueden superponer).

$$\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{x_n} \right| \leq \sum_{n \geq 1} |I_{x_n}| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$$

Se cubrió un intervalo de longitud 1 de toda la recta real, por lo tanto quedan reales afuera y eso es un absurdo $\therefore \mathbb{R}$ no es numerable. $\square$

Ejemplo. $A = \{(a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Es decir las sucesiones de ceros y unos no es un conjunto numerable.

Demostración. Supongamos que si es numerable $\Rightarrow$ podemos escribir
$A = \{(a_n^1)_{n\geq 1}, \cdots, (a_n^j)_{n\geq 1}, \cdots\}$, todas las sucesiones de ceros y unos están contenidas en A. La sucesión donde $a_i = 1 - a_n^n$ (en el i-ésimo lugar tiene lo contrario de lo que la n-ésima sucesión tiene en el lugar n) debería ser una de ellas, pero eso es absurdo $\therefore$ es no numerable. $\square$

La idea del último ejemplo (argumento diagonal), se puede adaptar para probar que $(0,1]$ es no numerable.

3.3.1. Principio de encaje de Intervalos

Teorema 3.8. Sea $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ una sucesión de intervalos cerrados y acotados $I_n = [a_n, b_n] \Rightarrow$ La intersección de todos es no vacía y $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b]$ con $a = \mathrm{sup}(a_n), b = \mathrm{inf}(b_n)$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $I_{n+1} \subseteq I_n$ con $I_n = [a_n, b_n]\, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1\, \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego A y B están acotados y podemos llamar $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \text{ínf}(B)$ con $\alpha \leq \beta$. Luego,

$$\begin{aligned}
&a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow [\alpha, \beta] \subseteq I_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow [\alpha, \beta] \subseteq \bigcap_{n \geq 1} I_n \\
&\Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \varnothing
\end{aligned}$$

Notemos que si $x < \alpha$ entonces $\exists a_i \in A$ tal que $x < a_i \Rightarrow x \notin I_i \Rightarrow x \notin \bigcap_{n \geq 1} I_n$. Análogamente si $x < \beta \therefore \bigcap_{n \geq 1} I_n = [\alpha, \beta]$. □

Teorema 3.9. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Supongamos que $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(n) = x_n$.
Definimos la sucesión de $\mathbb{I}_n$ de la siguiente forma:
Tomamos $[0, 1]$ y divido en 3 cerrados iguales, luego, al menos uno no contiene a x_1, lo elijo como $\mathbb{I}_1$ (si hayh dos que no lo contienen elijo alguno). Inductivamente lo divido en 3 intervalos iguales y al menos 1 de ellos no contiene a x_{n+1} y lo elijo como $\mathbb{I}_{n+1}$. Por el principio anterior la $\mathbb{I} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n \neq \varnothing$ (tiene un único elemento y la longitud de los intervalos tiende a cero).
Si $x \in \mathbb{I}$ no puede ser igual o mayor que x_1 (por construcción se los excluye en algún paso) $\Rightarrow \mathbb{R}$ es no numerable, pues ese x queda afuera. □

3.4 Propiedades

Teorema 3.10. Sea X numerable, $Y \subset X \Rightarrow Y$ es a lo sumo numerable.

Demostración. Supongamos que Y no es finito. Como $X \sim Y$ puedo pensar $X = (x_n)_{n\geq 1}$ y defino

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in Y\}$$

E inductivamente elegimos $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$. Definimos $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, x_n \in Y\} \Rightarrow$ Tenemos la sucesión estrictamente creciente de naturales y podemos definir $g : \mathbb{N} \to Y, g(K) = x_{n_k}$. g es inyectiva si $K \neq Y, n_k \neq n_j$ por ser estrictamente creciente y es suryectiva, si $y \in Y \Rightarrow y = x_j$. Para ningún $j \Rightarrow \exists k : n_k \leq j \leq n_k + 1$. Como $j \leq n_{k+1} = \{n > n_k : x_n \in Y\}$ debe ser $j = n_k$. □

Corolario 3.11. $f : X \to Y$ inyectiva e Y numerable $\Rightarrow X$ es a lo sumo numerable.

Demostración. f es inyectiva $\Rightarrow X \sim f(X)$ y como $f(X) \subset Y \Rightarrow$ es a lo sumo numerable por el teorema anterior. □

Teorema 3.12. $f : X \to Y$ suryectiva, X a lo sumo numerable $\Rightarrow Y$ es a lo sumo numerable.

Demostración. $f : X \to Y$ es suryectiva $\exists g : Y \to X$ inversa a derecha tal que $f \circ g = id_Y \Rightarrow f$ es inversa a izquierda de $g \Rightarrow g$ es inyectiva $\therefore$ por el corolario anterior Y es a lo sumo numerable. □

Teorema 3.13. Para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea x_n un conjunto numerable $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n = X$ es numerable.

Demostración. x_n es numerable $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to x_n$ biyectiva. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ definida como $f(n, n) = f_n(n)$. Veamos que es suryectiva, dado $x \in X$, $\exists n \in \mathbb{N} : x \in x_n \Rightarrow \exists m : x = f_n(m)$ luego $X = f_n(m) = f(n, m)$. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\geq 1} x_n$ es suryectiva $\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} x_n$ es a lo sumo numerable $\therefore$ como es infinito, es numerable. □

Ejemplo. $\mathbb{Q}(x) \sim \mathbb{N}$.

Demostración. $\mathbb{Q}_k[x] = \{p \in \mathbb{Q}(x) : gr(p) \leq k\}$ tenemos $f_n : \mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{Q}_n[x]$, $f(a_0, \cdots, a_{n+1}) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, cada f_n es biyectiva $\Rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$ es numerable y como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable $\therefore \mathbb{Q}(x)$ es numerable. □

Definición 3.14. Un número se dice algebraico si es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros, por ejemplo $\sqrt{2}$ es raíz de $x^2 = 2$.

Definición 3.15. Si un número real no es algebraico se lo llama trascendente.

Ejercicio: demostrar que el conjunto de números algebraicos es numerable.

Clase IV - 03/09

4.1 Operaciones con cardinales

Dados dos cardinales n, m (no necesariamente finitos) y X, Y conjuntos disjuntos tales que $\mathrm{card}(X) = n$, $\mathrm{card}(Y) = m$, podemos definir:

1. **Suma:** $n + m = \mathrm{card}(X \cup Y)$.
2. **Producto:** $n \cdot m = \mathrm{card}(X \times Y)$.
3. **Potencia:** $n^m = \mathrm{card}(\{f : Y \to X\}) = \mathrm{card}(X^Y)$.

Observación. Suponer que $X \cap Y = \varnothing$ no es restrictivo porque $X \sim (X \times \{1\})$ e $Y \sim (Y \times \{2\})$, y $(X \times \{1\}) \sim (Y \times \{2\})$ y son disjuntos.

Observación. Hay que probar que la definición es independiente de los conjuntos X, Y que elegimos. Si $n = \mathrm{card}(\tilde{X})$ y $m = \mathrm{card}(\tilde{Y})$, $\tilde{X} \cap \tilde{Y} = \varnothing \Rightarrow n + m = \mathrm{card}(\tilde{X} \cup \tilde{Y})$. Vale porque existen biyecciones entre $\tilde{X}$ y X y entre Y y $\tilde{Y}$. Sea $f : X \to \tilde{X}$, $g : Y \to \tilde{Y}$ con lo cual $h : X \cup Y \to \tilde{X} \cup \tilde{Y}$ dada por

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X, \\ g(z) & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

es biyectiva. Similar para el producto y la potencia.

Supongamos $\mathrm{card}(X) = n$, $\mathrm{card}(Y) = m$, $\mathrm{card}(Z) = p$, no necesariamente finitos con X, Y, Z disjuntos dos a dos.

Proposición 4.1. La suma cumple las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad: $n + m = m + n$, pues $X \cup Y = Y \cup X$.
2. Asociatividad: $(n + m) + p = n + (m + p)$.
3. Existencia del neutro: $0 + n = n$, $\varnothing \cup X = X$.

Proposición 4.2. El producto cumple las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad: $n \cdot m = m \cdot n$, pues $X \times Y \sim Y \times X$.
2. $0 \cdot n = 0$, pues $\varnothing \times X = \varnothing$.

3. $1 \cdot n = n$, pues $\{1\} \times X \sim X$. Aquí, $f : \{1\} \times X \longrightarrow X$ saca el 1 y $g : X \longrightarrow \{1\} \times X$ agrega el 1. Ambas funciones son biyectivas.

Proposición 4.3. Distributiva del producto en la suma: $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ porque $X \times (Y \cup Z) \sim (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

Observación. No vale la ley de cancelación:

$$n + m = n + p \not\Rightarrow m = p$$
$$n \cdot m = n \cdot p \not\Rightarrow m = p$$

Ejemplo. Si $n = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ y $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = c$, tenemos que:

1. *a)* $n + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
   b) $n \cdot n = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
2. *a)* $c \cdot c = c$.
   b) $c + c = c$.

Demostración. 1. Vimos que

$$\mathrm{card}(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \aleph_0, \mathrm{card}(\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}) = \aleph_0$$

La unión de ambos conjuntos es $\mathbb{N}$. Además $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0$, así $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

2. Si pruebo que el cardinal de cualquier intervalo no degenerado (sin extremos iguales) de la recta es c, puedo probar que $c + c = c$ observando que $(0, 1) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.
   En efecto, $\arctan(x)$ es una biyección entre $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y hay una biyección entre este intervalo y cualquier (a, b) dada por $y = \frac{b}{\pi} \cdot (x + \frac{\pi}{2}) + a$.
   Además, $(0, 1)$ y $[0, 1]$ son coordinables. Si $f : [0, 1] \longrightarrow (0, 1)$ es inyectiva y por el Teorema de Cantor-Bernstein $[0, 1] \sim (0, 1)$.
   Para probar $c \cdot c = c$, uso que $(0, 1] \times (0, 1] \sim (0, 1]$.
   Sea $g : (0, 1] \longrightarrow (0, 1] \times (0, 1]$, $g(x) = (x, 1)$ es inyectiva.
   $f : (0, 1] \times (0, 1] \longrightarrow (0, 1]$, $f(x, y) = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots$ (primeros decimales).
   Si $x, y \in (0, 1]$, los pensamos con desarrollo decimal infinito. Como f es inyectiva, por el Teorema de Cantor-Bernstein, existe una biyección entre ellos, por lo que $c \cdot c = c$.

$\square$

Sean $n = \mathrm{card}(X)$, $m = \mathrm{card}(Y)$, $p = \mathrm{card}(Z)$, no necesariamente finitos, con X, Y, Z disjuntos dos a dos.

Proposición 4.4. $n^m \cdot n^p = n^{m+p}$

Demostración. $X^Y \times X^Z \sim X^{Y \cup Z}$.
$X^Y \times X^Z = \{(f, g) : f : Y \to X, g : Z \to X\}$.
$f \in X^{Y \cup Z}, f : Y \cup Z \to X \Rightarrow (f|_Y, f|_Z) \in X^Y \times X^Z$ inyectiva.
Dadas $f : Y \to X, g : Z \to X, h : Y \cup Z \to X$ tal que $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X, \\ g(x) & \text{si } x \in Z \end{cases}$
Como Y, Z son disjuntos por hipótesis h es inyectiva y vale por Teorema CSB.
$\square$

Proposición 4.5. $(n^m)^p = n^{mp}$

Demostración. $f \in (X^Y)^Z, f : Z \to X^Y$, $Z \mapsto (f_Z : Y \to X)$.
$(\forall z \in Z)(\exists f_Z : Y \to X)$, si $y \in Y$, $f_Z(y)$ es $g(z, y) = f_Z(y)$ $\square$

Teorema 4.6. Sea $n = \aleph_0$ o c y sea m otro cardinal tal que $2 \leq m \leq 2^n \Rightarrow m^n = 2^n$. $(2^{\aleph_0}) = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$.

Demostración. En general si $m \leq p \Rightarrow m^m \leq p^n$ con $\mathrm{card}(X) = m$, $\mathrm{card}(Y) = m$, $\mathrm{card}(Z) = p$, X, Y, Z disjuntos dos a dos.
$f : Y \to Z$ es inyectiva $\Rightarrow \forall g : X \to Y$ tenemos que $f \circ g : X \to Z$ de manera inyectiva (si $g_1 \neq g_2 \to f = g_1 \neq f \circ g_2$ porque f es inyectiva). $\square$

Observación. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim P(\mathbb{N})$ pues a cada $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ le asigno el subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ definido por $n \in A \iff f(n) = 1$

Teorema 4.7. $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es decir $2^{\aleph_0} = c$.

Demostración. $f : [0, 1] \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, f(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Siendo x_n las cifras del desarrollo en base dos de x.
Tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \Rightarrow f$ es inyectiva xq el desarrollo es único.
Ahora si $g : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1], g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{2^n}$, $x_n \in \{0, 1\}$. No es inyectiva pues $0,11 = 0,10\overline{1}$. Una forma simple es pensar el desarrollo en base 3 de cada tira de 0 y 1 que no tiene ningún dos. Es decir $g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n}$ y $(0,11)_3 \neq (0,10\overline{1})_3 \therefore$ es inyectiva y por Teorema CSB: $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\aleph_0}$.
Otra forma es la siguiente: $S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} - \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ con $S_i = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_m = 0, \forall m > i\}$. O sea $0, 11000\cdots$ se saca y queda solo $0, 10\overline{1}$. Cada S_i es un conjunto finito (tiene 2^i elementos) luego $\bigcup_{i \geq 1} S_i$ es numerable $\therefore$ S y $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tienen el mismo cardinal.
$g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{2^n}$ si es inyectiva y $g : S \to [0, 1]$. $\square$

4.2 Hipótesis del continuo

$\nexists$ cardinal entre $\aleph_0$ y $c = 2^{\aleph_0}$. No se puede demostrar ni refutar.
Es independiente de la teoría de conjuntos más el axioma de elección. Gödel 1940 probó que no se puede demostrar, Cohen en 1963 que no se puede refutar.

4.3 Construcción de los Reales

Sucesiones de números racionales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$. Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0 si dado

$$\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

Notamos $a_n \to 0$.

Definición 4.8 (Sucesión de Cauchy). Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$. Decimos que la sucesión es de Cauchy $\iff$ dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n,\ m > n_0,\ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema 4.9. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es convergente (es decir $a_n - q \to 0, q \in \mathbb{Q}$) $\Rightarrow$ es de Cauchy.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - q| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0\\
&|a_n - a_m| = |(a_n - q) + (q - a_m)|\\
&\le |a_n - q| + |q - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n,\ m > n_0
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.10. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es de Cauchy, eligiendo $\varepsilon = 1$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < 1, \forall n,\ m > n_0$$

En particular $|a_n - a_{n_0+1}| < 1$

$$\begin{aligned}
&a_{n_0+1} - 1 < a_n < 1 + a_{n_0+1}, \forall n > n_0\\
&\Rightarrow |a_n| < \max(|a_{n_0+1} + 1|,\ |a_{n_0+1} - 1|) \quad \forall n > n_0
\end{aligned}$$

Tomo $M = \max(|a_0|, \cdots, |a_{n_0}|, |a_{n_0+1} + 1|, |a_{n_0+1} - 1|)$ y vale $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Definición 4.11. Sea $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Dados $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$. Decimos que son equivalentes $\iff$ $a_n - b_n \to 0$.

Proposición 4.12. La relación anterior es de equivalencia.

- Reflexiva: $a_n - a_n = 0 \to 0$.
- Simétrica: $a_n - b_n \to 0 \Rightarrow b_n - a_n = -(a_n - b_n) \to 0$.
- Transitiva: $\varepsilon > 0, \exists n_0 : |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0$ y $\exists n_1 : |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_1$. Tomando $n > max(n_0, n_1), |a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Definición 4.13. Los números reales $\mathbb{R}$ son las clases de equivalencia $[(a_n)]$ de las sucesiones $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ por la relación anterior.

Clase V - 06/09

5.1 Construcción de los Reales

Observación. Dado $q \in \mathbb{Q}$ definimos $\tilde{q}$ como la clase de equivalencia de la sucesión constante como $(q, q, q, \cdots) \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Definición 5.1. $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathbb{R}$, $s = [(a_n)], t = [(b_n)]$ definimos:

- $s + t = [(a_n + b_n)]$ la clase de equivalencia de $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $s \cdot t = [(a_n b_n)]$ la clase de equivalencia de $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Veamos que están bien definidas, si:

$$[(a_n)] = [(c_n)] \text{ y } [(b_n)] = [(d_n)] \Rightarrow a_n - c_n \to 0 \text{ y } b_n - d_n \to 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
([a_n] + [(b_n)]) - ([c_n] + [d_n]) &= ([a_n] - [(c_n)]) + ([b_n] - [(d_n)]) \\
&= 0 \\
&\Rightarrow \text{la suma está bien definida.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n b_n - c_n d_n &= a_n b_n - c_n b_n + c_n b_n - c_n d_n \\
&= b_n(a_n - c_n) + c_n(b_n - d_n) \\
&\Rightarrow |a_n \cdot b_n - c_n \cdot b_n| \leq |b_n||a_n - c_n| + |c_n||b_n - d_n|.
\end{aligned}$$

Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están acotadas $\exists M : |b_n| < M$, $|c_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.
$|a_n b_n - c_n b_n| \leq M(|a_n - c_n| + |b_n - d_n|) < \varepsilon, \forall n > n_0$.
Porque $a_n - c_n \to 0$, $b_n - d_n \to 0$.

Proposición 5.2. $\mathbb{R}$ es un cuerpo con esta definición.

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 5.3. Dado $s \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists t \in \mathbb{R} : s \cdot t = 1$.

Demostración. $s = [(a_n)]$ sabemos que $s \notin \tilde{0}$, o sea $a_n \not\to 0$. Podría pasar que algunos de los terminos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si sean 0, lo que pasa es que $a_n \neq 0.$ para n lo suficiente grande.
Como $a_n \not\to 0$, $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists$ infinitos valores de $M : |a_M - 0| > \varepsilon_1$, si $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de cauchy, $\exists n : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m > n_0$.
Si $M > n_0$ (puedo porque son infinitos) : $|a_M| > \varepsilon_1 \Rightarrow |a_m - a_M| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \forall m > n_0$.
$-\varepsilon_1/2 < a_n - a_m < \varepsilon_1/2$ o $-\varepsilon_1/2 < a_m - a_n < \varepsilon_1/2$.
Si $a_M > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{2} < a_M - \frac{\varepsilon_1}{2} < a_n < a_M + \frac{\varepsilon_1}{2}, \forall n > n_0$.
Si $a_M < 0$, $\frac{\varepsilon_1}{2} < -a_M - \frac{\varepsilon_1}{2} < -a_n < -a_m + \frac{\varepsilon_1}{2} \Rightarrow a_n < -\frac{\varepsilon_1}{2}, \forall n > n_0$.
O sea que $\forall n > n_0, a_n$ tiene el mismo signo que a_M en particular $a_n \neq 0, \forall n > n_0$.
Sabiendo esto veamos que $\exists$ el inverso:
$S = [(a_n)] \neq 0$ por lo anterior $\exists n_0 : a_n \neq 0, \forall n > n_0$.
Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ como

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0, \\ \dfrac{1}{a_n} & \text{si } n > n_0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0, \\ 1 & \text{si } n > n_0, \end{cases} \Rightarrow$$

$(1, 1, \cdots) - (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \therefore [(a_n b_n)] = [(1, 1, \cdots)]$, es decir $t = [(b_n)]$ cumple que $t \cdot s = 1$. □

5.2 Cuerpo ordenado

Para probrar que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado bajo esta definición hay que definir qué es ser positivo.
Sea $s \in \mathbb{R}$ decimos que s es positivo si $s \neq 0$ y $s = [(a_n)]$ tal que $a_n > 0 \forall n > n_0$. O sea, todos los terminos son positivos a partir de un punto.

Definición 5.4. Decimos que $s > t$ si $s - t > 0$. Ejercicio probrar que está bien definido.

Veamos un ejemplo de como se prueban los axiomas de orden.

Teorema 5.5. Sean $s, t \in \mathbb{R} : s > t, r \in \mathbb{R} \Rightarrow s + r > t + r$.

Demostración. $s = [(a_n)], t = [(b_n)], r = [(c_n)]$.
Como $s > t, \exists n_0 : a_n - b_n > 0, \forall n > n_0, a_n - b_n \not\to 0 \Rightarrow (a_n + c_n) - (b_n + c_n) = a_n + b_n > 0$ y $(a_n + c_n) - (b_n + c_n) \not\to 0 \Rightarrow$
$s + r - (t + r) > 0 \Rightarrow s + r > t + r$. □

Teorema 5.6. $\mathbb{R}$ con esta construcción es Arquimediano.

Demostración. Sean $s, t > 0, s, t \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot s > t$.
Es decir si $s = [(a_n)]$, $t = [(b_n)]$ quiero ver que $[(m \cdot a_n)] > [(b_n)]$. O sea que $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$ y que $\exists n_0 : m \cdot a_n - b_n > 0, \forall n > n_0$.

Supongamos que $\forall m, n_0, \exists n > n_0 : m \cdot a_n \leq b_n$. Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\Rightarrow$ $\exists M \in \mathbb{Q} : b_n < M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$.
$a_n \leq \dfrac{b_n}{m} \leq \dfrac{M}{m}$, para algún $n > n_0, \forall n_0$.
Como $\mathbb{Q}$ es arquimediano, dado $\varepsilon > 0, \exists m : \dfrac{M}{m} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, elijo m así y tengo que $a_n \leq \dfrac{b_n}{m} < \dfrac{M}{m} < \dfrac{\varepsilon}{2}, n > n_0, \forall n_0$.
Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\exists n_0 : \forall n, k > n_0, |a_n - a_k| < \varepsilon/2$. Para este $n_0, \exists$ algún $n > n_0$ tal que $a_n < \varepsilon/2 \Rightarrow$
$\forall k > n_0, a_k - a_n < \varepsilon/2 \Rightarrow a_k < a_n + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow a_n \to 0$. Absurdo! $([a_n]) = S > 0$.

Luego $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot a_n - b_n > 0, \forall n > n_0$. Queda ver que $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$, si $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$ nada que probar. Caso contrario tomamos $m + 1$ en vez de m.
$(m+1) \cdot a_n - b_n = m \cdot a_n + a_n - b_n > a_n > 0, \forall n > n_0 \Rightarrow m \cdot a_n - b_n \to 0$ y $a_n \not\to 0 \therefore$ $\mathbb{R}$ es arquimediano. □

Teorema 5.7. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Es decir dado $r \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q} : |r - q| < \varepsilon$. $r = [(a_n)]$, con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es de Cauchy.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m > n_0$.
Elijo algún $l > n_0$ y defino $q = [(a_l, a_l, \cdots)] \Rightarrow r - q = [(a_n - a_l)]$ y $q - r = [(a_l - a_n)]$.
Como $l > n_0 \Rightarrow (\forall n > n_0)(a_n - a_l < \varepsilon)(a_l - a_n < \varepsilon) \Rightarrow |r - q| < \varepsilon$. □

5.3 R tiene la propiedad del supremo

Sea $S \subset \mathbb{R}, S \neq \varnothing, M$ cota superior de S. Vamos a construir dos sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (l_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Como $S \neq \varnothing, \exists s_0 \in S$. Defino $u_0 = M, l_0 = s_0$.
Si ya están definidos u_m, l_m, llamo $m_n = \dfrac{l_n + u_n}{2}$ al punto medio.
i) Si m_n es cota superior de S definimos $u_{m+1} = m_n, l_{n+1} = l_n$.
ii) Si m_n no es cota superior de S definimos $u_{n+1} = u_n$ y $l_{n+1} = m_n$.
Como $s_0 < M$ es fácil ver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Queda como

ejercicio demostrarlo.

Lema 5.8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy de números reales.

Demostración. Por construcción se tiene que $l_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada $*\Rightarrow$
Es de cauchy.

Como $u_n > s_0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -u_n \leq s_0, (-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente $\Rightarrow$
Es de cauchy.

*

Demostración. Supongamos que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy. Entonces existe $\varepsilon > 0 : \forall n_0, \exists n, m \geq n_0 : l_n - l_m \geq \varepsilon$.
Como $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, $l_n - l_{n_0} \geq \varepsilon$, inductivamente consigo:
$n_1 > n_0 : l_{n_1} - l_{n_0} \geq \varepsilon$
$n_2 > n_1 : l_{n_2} - l_{n_1} \geq \varepsilon$
$\vdots$

Por otro lado por la arquimedianidad $\exists k \in \mathbb{N} : k \cdot \varepsilon > M - l_{n_0} \Rightarrow$
$l_{n_k} - l_{n_0} = (l_{n_k} - l_{n_{k-1}}) + (l_{n_{k-1}} - l_{n_{k-2}}) + \cdots + (l_{n_1} - l_{n_0}) > k \cdot \varepsilon > M - l_{n_0} \Rightarrow$
$l_{n_k} > M$. Absurdo! □

□

Lema 5.9. $\exists u \in \mathbb{R} : u_n \to u$.

Demostración. Sea u_n un termino de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \exists q_n \in \mathbb{Q} : |u_n - q_n| < \dfrac{1}{n}$
Consideremos $(q_1, q_2, \cdots) \subset \mathbb{Q}$.
Afirmo que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\Rightarrow$
$\exists n_0 : \forall n, m > n_0, |u_n - u_m| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Por arquimedianidad $\exists n_1 : \dfrac{1}{m}, \forall n > n_1 \Rightarrow$ si $n > max(n_0, n_1) \Rightarrow$
$|q_n - q_m| \leq |q_n - u_n| + |u_n - u_m| + |u_m - q_m| < \varepsilon \Rightarrow$
$u = [(q_n)] \in \mathbb{R}$, falta ver que $u_n \to u$.
Si $\tilde{q}_n = [(q_n, q_n, \cdots)] \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{q}_n - u \to 0$ pues q_n es de Cauchy y por construcción $u_n - q_n < \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_n - \tilde{q}_n \to 0$ y como $\tilde{q}_n - u \to 0 \Rightarrow$
$u_n \to u$. □

Lema 5.10. $l_n \to u$

Demostración. Según las posibles definiciones de l_n tenemos que:

$$\begin{aligned}
&u_{n+1} - l_{n+1} = m_n - l_n = \frac{u_n + l_n}{2} - l_n = \frac{u_n - l_n}{2} \text{ o bien}\\
&u_{n+1} - l_{n+1} = u_{n+1} - m_n = u_n - \frac{u_n - l_n}{2} = \frac{u_n - l_n}{2} \Rightarrow\\
&u_1 - l_1 = \frac{1}{2}(M - s)\\
&u_2 - l_2 = \frac{1}{2}(u_1 - l_1) = (\frac{1}{2})^2(u - s)\\
&\vdots\\
&u_n - l_n = (\frac{1}{2})^n(M - s)
\end{aligned}$$

Por arquimedianidad de $\mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0,\ \frac{1}{2^n}(M - s) < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \Rightarrow$$

$u_n - l_n \to 0 \therefore l_n \to u$, pues $u_n \to u$. □

Teorema 5.11. $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del supremo.

Demostración. 1) Veamos que u es cota superior, si no $u < s, s \in S \Rightarrow \varepsilon = s - u > 0$, como $u_n \to u$ y es decreciente $\exists n : u_n - u < \varepsilon \Rightarrow u_n < u + \varepsilon = u + s - u = s$ Absurdo, por construcción u_n era cota superior de $S, \forall n$.

2) Veamos que es la menor de las cotas superiores.
Sabemos que l_n no es cota superior de S, así que $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists s_n \in S) : l_n \leq s_n$. Como $l_n \to u$ y l_n es creciente $\Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : l_n > u - \varepsilon, \forall n > n_0 \Rightarrow s_n \geq l_n > u - \varepsilon, \forall n > n_0$. Es decir que para todo $\varepsilon > 0$ tengo un s_n más grande en $S \therefore u$ es la menor de las cotas superiores. □

Clase VI - 10/09

6.1 Sucesiones

Una sucesión de números reales es una función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Notamos $x(n) = x_n$ y lo llamamos el n-ésimo término de la sucesión. Indicamos la sucesión como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_1, x_2, \cdots)$.
Una subsucesión de x es la restricción de x a un subconjunto infinito $A = \{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$. Escribimos $(x_n)_{n\in A}$ para indicar la subsucesión.

Observación. Estrictamente la subsucesión no tiene dominio $\mathbb{N}$, pero es trivial considerarla como una función definida en $\mathbb{N}$ componiendo con $1 \mapsto x_1, 2 \mapsto x_2, \cdots$
Por esto se usa la notación $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Definición 6.1. Decimos que $a = \lim_{n\to\infty} x_n \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$.
Equivalentemente, si $\forall \varepsilon > 0$ el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contiene a todos los términos de la sucesión salvo quizás un número finitos.

Teorema 6.2 (Unicidad del límite)**.** Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow a = b$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - a| < \varepsilon$ y $|x_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > \max(n_0, n_1)$. Luego,

$$\begin{aligned} |a-b| &\leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \ \forall n > \max(n_0, n_1) \\ &\Rightarrow |a - b| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 6.3. Si $lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a.

Demostración. Dado $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots)$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por hipotesis dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$. Como los índices de la subsucesión son infinitos, $\exists n_{i_0} > n_0 \Rightarrow$ si $n_i > n_{i_0} \Rightarrow |x_{n_i} - a| < \varepsilon, (n_i > n_{i_0} > n_0) \Rightarrow lim_{n\to\infty} x_{n_i} = a$. $\square$

Teorema 6.4. Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración. Sea $a = lim_{n\to\infty} x_n$. Tomando $\varepsilon = 1, \exists n_\varepsilon : x_n \in (a-1, a+1), \forall n > n_\varepsilon$.
$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_\varepsilon}, a-1, a+1\}$, $c = min(A)$, $d = max(A) \Rightarrow x_n \in [c, d], \forall n \in \mathbb{N} \therefore$ la sucesión es acotada. □

Teorema 6.5. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada y quiero ver que $lim_{n\to\infty} x_n = a = sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Dado $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a, a - \varepsilon$ no puede ser cota superior de $\{x_n\} \Rightarrow \exists n_0 : x_{n_0} > a - \varepsilon$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, si $n > n_0 \Rightarrow x_n > x_{n_0} > a - \varepsilon \Rightarrow$
$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore x_n \to a$.
Análogamente para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada. □

Corolario 6.6. Si una sucesión monótona tiene una subsucesión convergente $\Rightarrow$ es convergente.

Demostración. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada porque tiene una subsucesión acotada. □

Ejemplo. $x_n = a^n, a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$ o $a = 1$ la sucesión es constante.
Si $a = -1$, la sucesión diverge porque $x_{2n} \to 1$ y $x_{2n+1} \to -1$.
Si $a > 1$, la sucesión es creciente y no acotada $\Rightarrow$ diverge.
Si $a < -1$, la sucesión es decreciente y no acotada $\Rightarrow$ diverge.
Si $0 < a < 1$, la sucesión es convergente por ser subsucesión de $\dfrac{1}{n}$ y más aún $a^n \to 0$.
Si $-1 < a < 0$, la sucesión converge pues $|a^n| = |a|^n = a^n \to 0$.

6.2 Propiedades de límites

Teorema 6.7. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$.

Demostración. $\exists c : |y_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}$, pues y_n es acotado.
Dado $\varepsilon > 0$, como $x_n \to 0, \exists n_0 : |x_n| < \varepsilon/c, \forall n > n_0 \Rightarrow$
$|x_n y_n| < c(\varepsilon/c) = \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore x_n \cdot y_n \to 0$. □

Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.

Proposición 6.8. $x_n + y_n \to a + b$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0$ y
$\exists n_1 \in \mathbb{N} : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_1$. Sea $n_2 = max(n_0, n_1)$
Si $n > n_2, |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Proposición 6.9. $x_n - y_n \to a - b$.

Demostración. Análogo. □

Proposición 6.10. $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.

Demostración. $x_n \cdot y_n - ab = x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b = x_n \cdot (y_n - b) + b \cdot (x_n - a)$.
Como $y_n - b \to 0$ y x_n es acotada, pues es convergente $\Rightarrow x_n \cdot (y_n - b) \to 0$. Además
$x_n - a \to 0 \Rightarrow b(x_n - a) \to 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n = a \cdot b$. □

Proposición 6.11. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$.

Demostración. Si $y_n \not\to 0 \Rightarrow y_n \neq 0$ salvo quizá finitos términos. En efecto, como $b \neq 0$, si $\varepsilon = |b|$ resulta que $0 \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \Rightarrow$

$$\exists n_\varepsilon : y_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

Luego $y_n \neq 0, \forall n > n_\varepsilon$. Ahora escribo

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - a \cdot y_n}{y_n \cdot b}$$

Quiero ver que $\dfrac{1}{y_n \cdot b}$ es acotada. Como

$$y_n \cdot b \to b^2 \text{ si } \varepsilon = \frac{b^2}{2}\ \exists n_0 : y_n \cdot b > \frac{b^2}{2}, \forall n > n_0 \Rightarrow$$
$$0 < \frac{1}{y_n \cdot b} < \frac{2}{b^2} \quad \forall n > n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{y_n \cdot b}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada.}$$

□

6.3 Ejemplo subsucesiones

Ejemplo. $x_n = \sqrt[n]{a},\ a > 0$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona (decreciente si $a > 1$, creciente si $0 < a < 1$) y acotada $0 < l = \text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.
Para ver que $l = 1$, considero la subsucesión $(a^{\frac{1}{n(n+1)}})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a l.
$l = \text{lím}_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \text{lím}_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} = \frac{\text{lím}_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}}{\text{lím}_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{l}{l} = 1$.
$\therefore l = 1$.

Ejemplo. $x_n = \sqrt[n]{n}$.
Veamos si es monótona. $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \iff n^{n+1} > (n+1)^{n+1} \iff n > (\dfrac{n+1}{n})^{n+1}$.
Esto pasa para $\forall n \geq 3$ porque $(1+\frac{1}{n})^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Se puede demostrar por inducción.
Luego, es decreciente a partir del tercer término.
Además está acotada inferiormente por $0, (\sqrt[n]{n} > 0) \therefore \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = l = \inf\{\sqrt[n]{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Como $\sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow l \geq 1$ y $l \neq 0$.
Considero la subsucesión $(2n)^{\frac{1}{2n}} \Rightarrow l^2 = (\lim_{n\to\infty}(2n)^{\frac{1}{2n}})^2 = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \cdot l$.
Luego $l^2 = l$ y $l \neq 0 \therefore l = 1$.

Observación. La definición de límite puede ser reformulada de la siguiente forma:
Dado $a \in \mathbb{R}$ es el límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ tiene complemento finito (o vacío) en $\mathbb{N}$.

Vamos a ver que $a \in \mathbb{R}$ es el límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ es subconjunto infinito de $\mathbb{N}$

Teorema 6.12. $a \in \mathbb{R}$ es el límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists$ infinitos índices $n : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Demostración. Para la ida tenemos que $a = \lim_{n\in A} x_n$, con $A = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists i_0 : x_{n_i} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \forall i > i_0$.
Como existen infinitos $i > i_0 : n_i \in A \Rightarrow \exists$ infinitos $n_i \in \mathbb{N}$ tales que $x_{n_i} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Recíprocamente si tomamos sucesivamente $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \cdots$. Puedo obtener $A = \{n_1, n_2, \cdots\} : \lim_{n\in A} x_n = a$ pues:
Sea $n_1 \in \mathbb{N} : x_{n_1} \in (a-1, a+1)$. Supongamos por inducción que $n_1 < n_2 < \cdots < n_i$ fueron definidos tales que $x_{n_2} \in (a-1/2, a+1/2), \cdots x_{n_i} \in (a-1/i, a+1/i)$.
Como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a - \frac{1}{1+i}, a + \frac{1}{1+i})\}$ es infinito, contiene algún x_n con $n > n_i$ y lo tomo como x_{n_i+1}.
Como $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_{n_i} = a$. □

6.4 Punto de acumulación

Definición 6.13. $a \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si es límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 6.14. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, digamos $\alpha \leq x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$. Si llamamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ tenemos que $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$.
Así que llamando $a_n = \inf(X_n)$, $b_n = \sup(X_n)$ tenemos que
$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta \Rightarrow$.
$\exists a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sup(\inf(X_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \inf(\sup(X_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

a se llama el límite inferior de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$a = \liminf_{n\to\infty} x_n$.

b se llama el límite superior de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$b = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Ejemplo.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 2, -1/2, 3/2, -1/3, 4/3, \cdots),$$
$$(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = -\frac{1}{n},\ (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = 1 + \frac{1}{n},$$
$$\text{Luego, } \inf(X_{2n-2}) = \inf(X_{2n-1}) = -\frac{1}{n},$$
$$\sup(X_{2n-2}) = \sup(X_{2n-1}) = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = 0,\ \limsup_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Clase VII - 13/09

7.1 Límite superior e inferior

Teorema 7.1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $\Rightarrow \liminf x_n$ es el menor punto de acumulación de la sucesión y $\limsup x_n$ es el mayor.

Demostración. Veamos que $a = \liminf_{n\to\infty} x_n$ es punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Como $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ (los ínfimos de X_n). Dados ε y $n_0 \in \mathbb{N}, \exists n_1 > n_0 : a - \varepsilon < a_{n_1} < a + \varepsilon$, $a_{n_1} = \inf(X_{n_1}) \Rightarrow a + \varepsilon$ no puede ser cota inferior de X_{n_1}.
$\Rightarrow \exists n \geq n_1 : a_{n_1} \leq x_n \leq a + \varepsilon$, $(n \geq n_1 \geq n_0$ y $(a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon)$, luego a es punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Falta ver que si $c < a \Rightarrow c$ no es punto de acumulación.
Como $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $c < a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : c < a_{n_0} \leq a$. Como a_{n_0} es el ínfimo de X_{n_0} si $n \geq n_0 \Rightarrow c < a_{n_0} \geq x_n$. Tomando $\varepsilon = a_{n_0} - c \Rightarrow c + \varepsilon = a_{n_0}$ y entonces $\forall x_n : n \geq n_0, x_n \notin (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \therefore c$ no es punto de acumulación. $\square$

Teorema 7.2. Toda sucesión acotada de $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración. $\limsup x_n$ es punto de acumulación de x_n así que alguna subsucesión converge a él. $\square$

Corolario 7.3. Una sucesión acotada de $\mathbb{R}$ es convergente $\iff \limsup x_n = \liminf x_n$, es decir, posee un único punto de acumulación.

Demostración. Para la ida tenemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, toda subsucesión converge a lo mismo y en particular $\limsup x_n = \liminf x_n = lim_{n\to\infty} x_n$.
Para la vuelta, si $\limsup x_n = \liminf x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow$
Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : a - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a \leq b_{n_0} \leq a + \varepsilon$.
Como $n \geq n_0 \Rightarrow a_{n_0} \leq x_n \leq b_{n_0}$. $\square$

7.2 Sucesiones de Cauchy

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, decimos que es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m > n_0$. Al igual que hicimos con las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy

2. Toda sucesión de Cauchy es acotada

Lema 7.4. Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión que converge a $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon/2, \forall n, m > n_0$.
Como a es el límite de una subsucesión $\exists n_1 > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon/2$.
$\Rightarrow$ si $n > n_0, |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

Teorema 7.5. Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente.

Demostración. Por ser de Cauchy es acotada, por ser acotada alguna subsucesión converge al $\limsup$ o $\liminf$ y por el lema anterior, toda la sucesión converge. □

7.3 Límites infinitos

Definición 7.6. Decimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ si dado $a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n > a \forall n > n_0$.

Definición 7.7. Decimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si dado $a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n < -a \forall n > n_0$.

Proposición 7.8. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

Demostración. Sea $A > 0, \exists c \in \mathbb{R} : c < y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n > A - c, \forall n > n_0 \Rightarrow$ Si $n > n_0, x_n + y_n > A - c + c = A \therefore \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. □

Proposición 7.9. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\exists c > 0 : y_n > c, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty$.

Demostración. Dado $A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n > A/c, \forall n > n_0 \Rightarrow$ si $n > n_0, x_n \cdot y_n > (A/c) \cdot c = A \therefore \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = +\infty$. □

Proposición 7.10. $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Demostración. Para la ida, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dado $A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1/A, \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} > A, \forall n > n_0 \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
Para la vuelta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > n_0 \Rightarrow 0 < x_n < \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. □

Proposición 7.11. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números positivos $\Rightarrow$

1. Si $\exists c > 0 : x_n > c, \forall n \in \mathbb{N}$ y si $\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

Demostración. 1. Dado $A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 < y_n < c/A, \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > (A/c) \cdot c = A, \forall n > n_0 \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

2. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : y_n > k/\varepsilon, \forall n > n_0$, donde $k > 0$ es cota superior de $x_n \Rightarrow \forall n > n_0, 0 < \frac{x_n}{y_n} < k \cdot (\varepsilon/k) = \varepsilon \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

$\square$

7.4 Series numéricas

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ formamos una nueva sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dada por $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \cdots, S_n = a_1 + \cdots + a_n$; que llamamos sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Teorema 7.12. $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \Rightarrow \\ &0 = s - s = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo. El recíproco del teorema anterior es falso pues $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Demostración.

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}) \\ &> 1 + 1/2 + 2/4 + 4/8 + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n/2 \end{aligned}$$

Luego $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$. $\square$

Teorema 7.13. $a_n \geq 0, \forall n > 0 \Rightarrow$

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge } \iff S_n \text{ forman una sucesión acotada.}$$

Demostración. Por ser $a_n \geq 0$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, luego converge $\iff$ es acotada. $\square$

Teorema 7.14 (Criterio de Cauchy). $\sum a_n$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_0, p \in \mathbb{N}$.

Demostración. $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente. $\square$

Teorema 7.15 (Criterio de comparación). Sean $a_n, b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, dadas $\sum_{n\geq 1} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n \Rightarrow$ Si

$$\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq c \cdot b_n, \forall n > n_0 \Rightarrow$$

(a) Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.

(b) Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.

Notemos que $\sum a_n$ converge $\iff$ Dado $n_0 \in \mathbb{N}, \sum_{n\geq n_0} a_n$ converge, por lo que solo nos interesa la cola de la sucesión.

Demostración. Si $\sum b_n$ es convergente entonces es de Cauchy y dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple:

$$\sum_{m=n}^{n+p} b_m < \varepsilon$$

Luego,

$$\left|\sum_{m=n}^{n+p} a_m\right| \leq \sum_{m=n}^{n+p} |a_n| \leq \sum_{m=n}^{n+p} b_m < \varepsilon$$

Por lo que $\sum a_n$ es de Cauchy y, por lo tanto, es convergente. Finalmente, (b) se deduce de (a). $\square$

Definición 7.16. $\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ converge.
Si $\sum a_n$ converge y $\sum |a_n|$ diverge entonces decimos que es condicionalmente convergente.

Teorema 7.17. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración. Como $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| < \varepsilon, \forall n > n_0, p \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_0, p \in \mathbb{N} \therefore \sum a_n$ converge. $\square$

Clase VIII - 24/09

8.1 Ejemplo de convergencia condicional

Ejemplo. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero no lo hace absolutamente.

Demostración. i) Las sumas parciales pares son:

- $S_2 = 1 - 1/2$
- $S_4 = (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4)$
- $S_6 = (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6)$

En general $S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S_{2n} < \cdots < 1$, es creciente y acotada, luego converge.
ii) Las sumas parciales impares son:

- $S_1 = 1$
- $S_3 = 1 - (1/2 - 1/3)$
- $S_5 = 1 - (1/2 - 1/3) - (1/4 - 1/5)$

En general $S_1 > S_2 > \cdots > S_{2n+1} > \cdots > 0$. Es decreciente y acotada, luego converge.
Por i) e ii) $\exists \tilde{s} = \text{lím}_{n\to\infty} S_{2n}$ y $\exists s' = \text{lím}_{n\to\infty} S_{2n+1}$, como $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0 \Rightarrow \tilde{s} = s'$ $\therefore$ la serie converge. □

8.2 Corolarios de series

Corolario 8.1. Sea $\sum b_n$ una serie convergente de términos positivos si $\exists k > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n| \leq k \cdot b_n, \forall n > n_0 \Rightarrow$
$\sum a_n$ converge absolutamente.

Demostración. Sencilla aplicación del criterio de comparación. □

Corolario 8.2. $\forall n > n_0, |a_n| \leq k \cdot c^n$ con $0 < c < 1, k > 0 \Rightarrow \sum a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración. Como $c \in (0, 1), \sum c^n$ converge (serie geométrica). □

Observación. Tomando $k = 1, |a_n| \leq c^n \iff \sqrt[n]{a_n} \leq c < 1, \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$. Que esto valga para algún n_0 específico significa que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

8.3 Criterios de convergencia

Corolario 8.3 (Criterio de la raíz). Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge absolutamente.

Observación.

1. Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge, pues existen infinitos índices tales que $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ y entonces $a_n \not\to 0$.
2. Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ el criterio no concluye ($\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$).
3. Si $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \exists \beta \in (0, 1) : \alpha < \beta < 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta, \forall n > N \Rightarrow |a_n| < \beta^n, \forall n > N$$

   Como $0 < \beta < 1$ la serie $\sum \beta^n$ converge, por el criterio de comparación $\sum a_n$ converge absolutamente.

Teorema 8.4 (Criterio del cociente). Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie tal que $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ una serie de términos positivos y convergente $\Rightarrow$
Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|}, \forall n > n_0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración.

$$\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{|b_{n_0+2}|}{|b_{n_0+1}|}, \cdots, \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \frac{|b_n|}{|b_{n-1}|}, \forall n > n_0$$

Multiplicando todas las desigualdades obtenemos

$$\frac{|a_n|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{|b_n|}{|b_{n_0+1}|} \iff |a_n| \leq \frac{|a_{n_0+1}| \cdot b_n}{b_{n_0+1}}$$

$\therefore$ por criterio de comparación $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. □

Corolario 8.5 (Criterio de D'Alembert). Si $\exists c \in (0, 1) : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c, \forall n > n_0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente.
Equivalentemente si $\limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Si el cociente es 1 el criterio no decide y si es mayor que 1 la serie diverge.

Demostración. Tomamos $b_n = c^n$ en el teorema anterior pues $\sum_{n\geq 1} c^n$ converge si $c \in (0, 1)$. □

Teorema 8.6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

En particular si $\exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y son iguales.

Demostración. Veamos que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
Supongamos que no lo es $\Rightarrow$

$$\exists c : \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < c < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Por la primer desigualdad $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c \Rightarrow$

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < c, \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < c, \cdots, \frac{a_n}{a_{n+1}} < c \Rightarrow$$

Multiplicando termino a termino

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < c^{n-n_0} \Rightarrow a_n < \frac{a_{n_0}}{c^{n_0}} \cdot c^n$$

Llamemos $k = a_{n_0}/c^{n_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k\cdot c^n} = c \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = c$$

Tendríamos que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{k\cdot c^n} = c$$

Absurdo! Luego debe ser $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

$\square$

Ejemplo. Puede existir el límite de la raíz y no del cociente.

Demostración. Sean $0 < a < b$ y la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que se obtiene alternando cada término por a ó b

$$x_1 = a, x_2 = a \cdot b, x_3 = a^2 \cdot b, x_4 = a^2 \cdot b^2$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} b & \text{si } n \text{ es par,} \\ a & \text{si no} \end{cases}$$

Luego $\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, pero $\limsup_{n\to\infty} x_n = b$, $\liminf_{n\to\infty} x_n = a$.
Por otro lado $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{a \cdot b}$. Si $x_{2k} = a^k \cdot b^k \Rightarrow \sqrt[2k]{a^k \cdot b^k} = \sqrt{a \cdot b}$.
Si $x_{2k-1} = a^k \cdot b^{k-1} \Rightarrow \sqrt[2k-1]{x_{2k-1}} = a^{\frac{k}{2k-1}} \cdot b^{\frac{k}{2k-1}} \to \sqrt{a \cdot b}$ si $k \to \infty$. □

8.3.1. Criterio de Dirichlet - Abel

Teorema 8.7. Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ no necesariamente convergente cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada.
Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos con $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \cdot b_n$ es convergente.

Demostración.

$$a_1 \cdot b_1 + \cdots a_n \cdot b_n =$$

$$a_1 \cdot (b_1 - b_2) + (a_1 + a_2) \cdot (b_2 - b_3) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{n-1}) \cdot (b_{n-1} - b_n) + (a_1 + \cdots + a_n) \cdot b_n$$

$$= S_1 \cdot (b_1 - b_2) + S_2 \cdot (b_2 - b_3) + S_3 \cdot (b_3 - b_2) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n \cdot b_n$$

$$= \sum_{i=2}^{n} S_{i-1} \cdot (b_{i-1} - b_i) + S_n \cdot b_n$$

Por hipotesis $\exists k > 0 : |S_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$ (son acotadas). Además $\sum_{n\geq 2} b_{n-1} \cdot b_n$ es una telescópica de números positivos.
Luego $\sum_{n\geq 2} S_{n-1} \cdot (b_{n-1} - b_n)$ es absolutamente converge y en particular convergente.
Como $S_n \cdot b_n \to 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 2}^{n} S_{i-1} \cdot (b_{i-1} - b_i) + S_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1}^{n} a_n \cdot b_n \therefore$ converge. □

Corolario 8.8 (Abel). Si $\sum a_n$ es convergente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente de términos positivos $\Rightarrow \sum a_n \cdot b_n$ es convergente.

Demostración. $b_n \to c$ pues es acotada inferiormente por 0 y decreciente.
Sea $(b_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que tiende a cero, podemos aplicar el teorema anterior y, luego $\sum_{n\geq 1} a_n \cdot (b_n - c) = S \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \cdot b_n = S - \sum a_n \cdot c$. $\square$

Corolario 8.9 (Criterio de Leibniz). Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $b_n \to 0 \Rightarrow \sum(-1)^n b_n$ converge.

Demostración. Aplicamos el criterio de Dirichlet pues $\sum(-1)^n$ no converge y $S_n = 0, -1$ son acotadas. $\square$

8.4 Parte positiva y negativa

Definición 8.10. Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n > 0, \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$
$q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0, \\ -a_n & \text{c.c} \end{cases} \Rightarrow p_m, q_n \geq 0, \forall n \in N, a_n = p_n - q_n$ y $|a_n| = p_n + q_n = a_n + 2 \cdot q_n = 2 \cdot p_n - a_n$.

Observación. Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ vale que

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} p_n + \sum_{n=1}^{k} q_n \Rightarrow$$

$$\sum_{n\geq 1} p_n, \sum_{n\geq 1} q_n$$

convergen, pues son crecientes y están acotadas por $\sum_{n\geq 1} |a_n|$. Además si $\sum_{n\geq 1} p_n$ y $\sum_{n\geq 1} q_n$ convergen $\Rightarrow \sum a_n$ converge absolutamente.

Teorema 8.11. Si $\sum a_n$ converge condicionalmente $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} p_n$ y $\sum_{n\geq 1} q_n$ son divergentes.

Demostración. Supongamos que

$$\sum q_n = c \Rightarrow |a_n| = a_n + 2 \cdot q_n$$

$$\sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} a_n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{k} q_n$$

Si $k \to +\infty$ luego $\sum_{n\geq 1} |a_n| = \sum_{n\geq 1} a_n + 2 \cdot c$ Absurdo! pues no converge absolutamente $\therefore \sum_{n\geq 1} q_n$ diverge. □

8.5 Reordenamientos

Definición 8.12. Sea $\sum a_n$, cambiar el orden de la suma significa tomar una biyección $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y considerar la serie $\sum b_n$ como $b_n = a_{\phi(n)}$.

Teorema 8.13. Todas las reordenaciones de una serie absolutamente convergente convergen al mismo valor de la serie original.

Demostración. Sea $\sum a_n, a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección y $b_n = a_{\phi(n)}$ quiero ver que $\sum b_n = \sum a_n$.
Sea S_n las sumas parciales de a_n y T_n las de b_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamo $m = max(\phi(1), \cdots \phi(n))$. Donde $\{\phi(1), \cdots, \phi(n)\} \subseteq [[1, m]]$.
Luego $T_n = \sum_{i\geq 1} a_{\phi(i)} \leq \sum_{j\geq 1} a_j = S_m$. Luego $T_n \leq S_m$.
Análogamente con $\phi^{-1} \Rightarrow S_m \leq T_n$ luego $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n \therefore \sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} b_n$. □

El caso general, $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} p_n - \sum_{n\geq 1} q_n \Rightarrow$ todo reordenamiento $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de los términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ produce un reordenamiento de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que llamo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De modo que son la parte positiva y negativa de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y usamos el caso anterior pues son términos de valores positivos.

Teorema 8.14. Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge condicionalmente. Dado $c \in \mathbb{R}, \exists$ reordenamiento $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de los términos de $\sum_{n\geq 1} a_n$ tal que $\sum_{n\geq 1} b_n = c$.

Demostración. Como a_n converge condicionalmente entonces $a_n \to 0 \Rightarrow p_n, q_n \to 0$, pero $\sum_{n\geq 1} p_n = \sum_{n\geq 1} q_n = +\infty$.
Reordenemos la serie tomando $p_1, p_2, \cdots, p_{n_1}$ donde n_1 es el menor índice tal que $p_1 + \cdots + p_{n_1} > c, (T_1)$.
Similarmente $-q_1, -q_2, \cdots, q_{n_2}$ donde n_2 es el menor índice tales que $\sum_{i=1}^{n_1} p_i + \sum_{i=1}^{n_2} q_i < c, (T_2)$.
Seguimos con el menor n_3 tal que $\sum_{i=1}^{n_1} p_i + \sum_{i=1}^{n_2} q_i + \sum_{i=1}^{n_3} p_i > c, (T_3)$, etc.
Veamos que las sumas parciales T_n de este reordenamiento tienden a 0.
$\forall i$ impar tenemos que $T_{n_i+1} < c < T_i \Rightarrow$
$0 < T_{n_i} - c \leq p_{n_i} \Rightarrow 0 < c - T_{n_i} < q_{n_i}$ y como $\lim_{i\to\infty} p_{n_i} = 0 = \lim_{i\to\infty} q_{n_i} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} T_{n_i} = c$.
Además para i impar si $n_i < n < n_{i+1} \Rightarrow T_{n_i+1} \leq T_n \leq T_{n_i}$ y para i par, si $n_i < n < n_{i+1} \Rightarrow T_{n_i+1} \leq T_n \leq T_{n_i}$
$\therefore \lim_{n\to\infty} T_n = c$. $\square$

Clase IX - 27/09

9.1 Topología Euclídea

Definición 9.1. La norma euclídea es la función $\|\cdot\|$ que en cada punto $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ toma el valor $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Propiedades:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > 0$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Proposición 9.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** Dados x, $y \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Demostración. Ejercicio □

Definición 9.3. La distancia euclídea es la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : d(x, y) = \|x - y\|$. Tenemos que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

1. $d(x, y) > 0$ y $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Demostración.

1. $d(x, y) = \|x - y\| > 0, d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)\| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.
3. $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - z + y - y\| \leq \|x - y\| + \|z - y\| = d(x, y) + d(y, z)$.

□

9.1.1. Conjuntos abiertos

Definición 9.4. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la bola abierta centrada en x de radio r es el conjunto $B_r(x) = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$.

Definición 9.5. Un subconjunto $U \subset R^n$ es abierto si $\forall x \in U, \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$.

Lema 9.6. La bola abierta $B_r(x)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $s = r - d(x, y), y \in B_r(x)$. Si $z \in B_s(y) \Rightarrow$
$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s = r$
Luego $z \in B_r(x) \Rightarrow B_s(y) \subset B_r(x) \therefore$ es abierto. □

Proposición 9.7. Un subconjunto propio $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto $\iff$ $\forall x \in U$ se tiene que $\inf\{d(x, y) : y \in \mathbb{R}^n - U\} > 0$.
El ínfimo existe pues el conjunto es no vacío y acotado inferiormente.

Demostración. Para la ida tenemos que si U es abierto

$$\Rightarrow (\forall x \in U) \quad \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$$

Si $y \in R^n - U \Rightarrow y \notin B_r(x)$ por lo que $d(x, y) > r > 0$ y r es una cota inferior mínima positiva del conjunto, pues si $d(x, y) < r \Rightarrow y \in B_r(x)$ absurdo!

Para la vuelta tomemos $s = \inf\{d(x, y) : y \in \mathbb{R}^n - U\} > 0$. Consideremos $B_{\frac{s}{2}}(x)$. Si z pertenece a esa bola entonces $d(x, z) < \frac{s}{2} < s \Rightarrow$
$d(x, z) \notin \{d(x, y) : y \in R^n - U\}$ pues si no sería el ínfimo, se sigue que $z \in U$ y entonces $B_{\frac{s}{2}}(x) \subset U \therefore U$ es abierto. □

Proposición 9.8. Propiedades de conjuntos abiertos:

1. $\varnothing, \mathbb{R}^n$ son abiertos.
2. Intersección de una familia finita y no vacía de $\mathbb{R}^n$ de subconjuntos abiertos es un conjunto abierto.
3. La unión de una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es abierto.

Demostración.
1. Por definición
2. $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i, U_i \subset \mathbb{R}^n$, abierto. Tomando $B_r(x)$ con $r = \min(r_1, \cdots, r_k)$ y listo.
3. Si u es una familia de abiertos de $\mathbb{R}^n$ y U su unión, dado $x \in U$ tiene que haber algún $V \in u$ tal que $x \in V$. Por ser V abierto $\exists r > 0 : B_r(x) \subset V \subset U \therefore U$ es abierto.

□

Notemos que la hipotesis de que la familia sea finita en la intersección es necesaria pues si definimos $U_n = (1 - \dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} U_n = \{1\}$ que no es abierto.

Definición 9.9. La topología Euclídea es el conjunto de todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 9.10. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es abierto $\iff$ es la unión de una familia de bolas abiertas.

Demostración. Para la ida: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $\mathfrak{u}$ la familia de bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ contenidas en U. Si llamamos $\tilde{U}$ a la unión de todas basta ver que $\tilde{U} = U$.

$\subset$) Inmediato.

$\supset$) Dado $x \in U, \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$ por ser U abierto y $B_r(x) \in \mathfrak{u} \Rightarrow B_r(x) \subset \tilde{U} \Rightarrow U \subset \tilde{U}$ pues vale $\forall x \in U$.

La vuelta es la proposición anterior. □

9.1.2. Interior de un conjunto

Definición 9.11 (Interior). $X \subset \mathbb{R}^n$ decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es interior a X si $\exists r > 0 : B_r(x) \subset X$. El interior del conjunto X, que notamos X°, es el conjunto de puntos interiores de X.

Observación. Si $X^\circ \subset X, X$ es abierto $\iff X^\circ = X$.

Proposición 9.12. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. X° es abierto y coincide con la unión de todos los subconjuntos abiertos de X. En particular X° es el mayor abierto contenido en X.

Demostración. Sea U la unión de todos los subconjuntos abiertos de X, veamos que $U = X^\circ$.
i) Si $x \in X^\circ, \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$, como $B_r(x)$ es abierto $B_r(x) \subset U$ por lo que $X^\circ \subset U$.
ii) Si $x \in U \Rightarrow \exists V \subset X$ abierto tal que $x \in X$, como V es abierto $\exists r > 0 : B_r(x) \subset V \subset X \Rightarrow X^\circ$ por definición de punto interior, luego $U \subset X^\circ$.
$\therefore X^\circ = U$. □

Corolario 9.13. Si $X \subset Y \Rightarrow X^\circ \subset Y^\circ$.

Demostración. $X^\circ \subset X \subset Y$. Como Y° es el mayor abierto contenido en Y se sigue que $X^\circ \subset Y^\circ \subset Y$. □

9.1.3. Propiedades del interior

Proposición 9.14. $(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ$.

Demostración. $(X \cap Y)^\circ \subset X \cap Y \Rightarrow X^\circ \cap Y^\circ$ es abierto $\Rightarrow (X^\circ \cap Y^\circ) \subset (X \cap Y)^\circ$.
$X \cap Y \subset X \Rightarrow (X \cap Y)^\circ \subset X^\circ$ y $X \cap Y \subset Y \Rightarrow (X \cap Y)^\circ \subset Y^\circ \Rightarrow$
$(X \cap Y)^\circ \subset X^\circ \cap Y^\circ$. □

Proposición 9.15. $X^\circ \cup Y^\circ \subset (X \cup Y)^\circ$.

Demostración. $X^\circ \subset X \subset X \cup Y$ y $Y^\circ \subset Y \subset X \cup Y \Rightarrow$
$X^\circ \cup Y^\circ \subset (X \cup Y) \Rightarrow X^\circ \cup Y^\circ \subset (X \cup Y)^\circ$, pues $X^\circ \cup Y^\circ$ es abierto. □

Notemos que la inclusión puede ser estricta pues sea $X = (-1, 1)$, $Y = [1, 2] \Rightarrow$
$1 \notin X^\circ \cup Y^\circ = (-1, 1) \cup (1, 2)$, pero $1 \in (X \cup Y)^\circ = (-1, 2)$.

9.2 Entorno

Definición 9.16 (Entorno)**.** Sea $x \in \mathbb{R}^n$, un entorno de x es un subconjunto $N \subset R^n : x \in N^\circ$.

Proposición 9.17. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es abierto $\iff$ es un entorno de cada uno de sus puntos.

Demostración. Si U es entorno de cada uno de sus puntos entonces $U \subset U^\circ \Rightarrow U = U^\circ \therefore$ es abierto. □

Proposición 9.18. El interior de un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos de los que X es entorno.

Demostración. Sea U el conjunto de puntos de X de los que X es un entorno. Si $x \in U \Rightarrow X$ es el entorno de x y $x \in X^\circ \Rightarrow U \subset X^\circ$. Si $x \in X^\circ \Rightarrow X$ es un entorno de $x \Rightarrow x \in U \Rightarrow X^\circ \subset U$. □

9.3 Conjunto Cerrado

Definición 9.19 (Conjunto cerrado)**.** Un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice cerrado si su complemento es abierto ($R^n - F$ es abierto).

Proposición 9.20. Propiedades de los conjuntos cerrados:

1. $\varnothing, \mathbb{R}^n$ son cerrados.
2. La unión finita de conjuntos cerrados es cerrado.
3. La intersección de una familia arbitraria de cerrados es cerrada.

Demostración.

1. $(\mathbb{R}^n)^c = \varnothing$ y $\varnothing^c = \mathbb{R}^n$ abiertos.
2. Si $F_1, \cdots, F_k \subset R^n$ son cerrados $\Rightarrow (F_1 \cup \cdots \cup F_k)^c = F_1^c \cap \cdots \cap F_k^c$ y cada F_i es abierto.
3. Si F es una familia de cerrados $(\bigcap_{f \in F} f)^c = (\bigcup_{f \in F} f^c)$ que es abierto.

□

Definición 9.21. Si $x \in R^n, r > 0$ llamamos bola cerrada centrada en x de radio r al conjunto $\overline{B_r x} = \overline{B(r,x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$.

Proposición 9.22. Veamos que la bola cerrada es, efectivamente, cerrada.

Demostración. Si $y \in \mathbb{R}^n - \overline{B_r(x)}$ tenemos que $d(x,y) > r$. Llamamos $0 < r_1 = d(x,y) - r$ y queremos que $B_{r_1}(y) \subset R^n - \overline{B_r(x)}$.
Sea $z \in B_{r_1}(y)$ por desigualdad triangular:
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
$d(x,z) \geq d(x,y) - d(z,y) > d(x,y) - r_1 = r \Rightarrow z \notin \overline{B_r(x)} \therefore B_{r_1}(y) \subset \mathbb{R}^n - \overline{B_r(x)}$. □

9.3.1. Clausura

Definición 9.23 (Clausura). La clausura de un subconjunto $X \subset R^n$ es la intersección $\overline{X}$ de todos los subconjuntos cerrados de R^n que contienen a X.

Proposición 9.24. Sea $X \subset R^n \Rightarrow \overline{X}$ es el menor subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ que contiene a X en el sentido de que es contenido en todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ que contiene a X.

Corolario 9.25. Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\iff \overline{X} = X$.

Demostración. Si X es cerrado, contiene a X y luego $\overline{X} \subset X$, como $X \subset \overline{X} \Rightarrow X = \overline{X}$.
Si $X = \overline{X} \Rightarrow X$ es cerrado, pues $\overline{X}$ es cerrado. □

Proposición 9.26. $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$.

Demostración. $X \subset Y \subset \overline{Y}$, pero como $\overline{X}$ es el menor cerrado que contiene a $X \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$. □

Proposición 9.27. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Demostración. $X \subset X \cup Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{X \cup Y}$
$Y \subset X \cup Y \Rightarrow \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y} \Rightarrow$
$\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$.
Para la otra contención notemos que $X \subset \overline{X}$ y $Y \subset \overline{Y} \Rightarrow X \cup Y \subset \overline{X} \cup \overline{Y} \Rightarrow \overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$. □

Proposición 9.28. $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Demostración. $X \cap Y \subset X \subset \overline{X}$ y $X \cap Y \subset Y \subset \overline{Y} \Rightarrow X \cap Y \subset \overline{X} \cap \overline{Y} \Rightarrow \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.
Pues es el menor de los cerrados. □

Proposición 9.29. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

1. $x \in \overline{X}$.
2. $\forall r > 0, B_r(x) \cap X \neq \varnothing$.
3. $\forall$ entorno abierto N de x, $N \cap X \neq \varnothing$.
4. $\forall$ entorno N de x, $N \cap X \neq \varnothing$.

Demostración. 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) son inmediatos.
2) $\Rightarrow$ 1) Por contrarrecíproco, supongamos que $x \notin \overline{X}$ de manera tal que $\exists$ F cerrado tal que $x \in F$ y $X \subset F$ (si no estaría en la clasura) $\Rightarrow x \in F^c$ que es abierto $\Rightarrow \exists r > 0, B_r(x) \subset F^c, B_r(X) \cap X \subset B_r(x) \cap F = \varnothing$.
1) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que existe N entorno de x tal que $N \cap X = \varnothing$. El conjunto $U = N^\circ$ es abierto y $x \in U$. Además $U \subset N \subset X^c \Rightarrow X \subset U^c$ que es cerrado y $x \notin U^c \Rightarrow x \notin \overline{X}$. □

Ejemplo. Si $\mathbb{Q}^n$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que tienen todas sus coordenadas racionales $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. 1) $\overline{\mathbb{Q}^n} \subseteq \mathbb{R}^n : \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$, que es cerrado $\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}^n} \subseteq \mathbb{R}^n$.
2) $\mathbb{R}^n \subseteq \overline{\mathbb{Q}^n}$: Si $x \in \mathbb{R}^n$ y U es entorno abierto de $x, U \cap \mathbb{Q}^n \neq \varnothing$ (1) $\iff$ 2)). Como U es abierto $\exists r > 0 : B_r(x) \subset U$.
Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ elijo un racional q_i en el intervalo $(x_i - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_i + \frac{r}{\sqrt{n}}) : |x_i - q_i| < \frac{r}{\sqrt{n}} \Rightarrow d(x, q) < r$. Sabemos que existe porque ya probamos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow q \in B_r(x) \subset U \Rightarrow U \cap \mathbb{Q}^n \neq \varnothing$ pues al menos q está allí $\forall U$ entorno abierto de X.
$\therefore \mathbb{R}^n \subset \mathbb{Q}^n$. □

Clase X - 01/10

10.1 Punto de acumulación

Definición 10.1 (Punto de acumulación). $X \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in X$ es de acumulación si pertenece a $\overline{X - \{x\}}$.

Definición 10.2 (Conjunto derivado). El conjunto derivado de X es el conjunto de todos los puntos de acumulación de X y lo notamos X'.

Proposición 10.3. Dados $X \subset \mathbb{R}^n, x \in X$, son equivalentes:

1. x es un punto de acumulación.
2. $\forall r > 0, B_r(x)$ contiene un punto de X distinto de x.
3. Todo entorno abierto de x contiene un punto de X distinto de x.
4. Todo entorno de x contiene un punto de X distinto de x.

Demostración. 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) son inmediatos.
2) $\Rightarrow$ 1) Por contrarrecíproco: $x \in X$ no es punto de acumulación de X luego $x \in (\overline{X - \{x\}})^c$. Como ese conjunto es abierto $\exists r > 0, B_r(x) \subset (\overline{X - \{x\}})^c \Rightarrow B_r(x) \cap (X - \{x\}) \subset B_r(x) \cap (\overline{X - \{x\}}) = \varnothing$.
1) $\Rightarrow$ 4) Sea $x \in X'$ y N un entorno de x. Como $x \in \overline{X - \{x\}} \Rightarrow N \cap (X - \{x\}) \neq \varnothing$. □

Proposición 10.4. Si $X \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{X} = X \cup X'$.

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ sabemos que $X \subset \overline{X}$. Por otro lado si $x \in X' \Rightarrow$
Para cualquier entorno N de X, $N \cap X \subset N \cap (\overline{X - \{x\}}) \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in \overline{X} \Rightarrow X' \subset \overline{X} \Rightarrow X \cup X' \subset \overline{X}$.

Sea $x \in \overline{X}$ y supongamos que $x \notin X$. Para cada entorno N de X tenemos que $N \cap (X - \{x\}) = N \cap X \neq \varnothing \Rightarrow x \in X'$, luego $\overline{X} \subset X \cup X'$.
$\therefore \overline{X} = X \cup X'$. □

Proposición 10.5. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Un punto x es punto de acumulación de $X \iff \forall$ entorno abierto de X contiene infinitos elementos de x.

Demostración. $\Leftarrow$) Si todo entorno abierto de x contiene infinitos elementos de X entonces hay alguno distinto de x y $x \in X'$.
$\Rightarrow$) Sea $x \in X'$ y N un entorno abierto de $x \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset N$.
Construyamos una sucesión de puntos $(x_n)_{n\in N}$ pertenecientes a $N \cap X$ y tales que $d(x_n, x) > d(x_{n+1}, x) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
$x_1 \neq x$, si $n > 0$ y ya elegimos $x_1, \cdots x_n : d(x_1, x) > \cdots > 0, \forall i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Como $B_{d(x_n,x)}(x)$ es un entorno abierto de x y $x \in X'$ contiene algún punto distinto de x, lo llamo x_{n+1}.
Tenemos entonces que $d(x_n, x) > d(x_{n+1}, x) > 0 \Rightarrow$ los términos de la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ son todos diferentes de x, distintos dos a dos y pertenecen a $B_r(x)$.
$\therefore (x_n)_{n\in N} \subset N \cap X$ es infinito. □

Proposición 10.6. $X \subset \mathbb{R}^n, (X')' \subset X'$.

Demostración. $x \in (X')'$ y N un entorno abierto de x. Sabemos que N contiene un punto $y \in X'$ distinto de x. Luego contiene infinitos puntos de $X \therefore x \in X'$. □

Corolario 10.7. El conjunto derivado de todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado.

Demostración. $\overline{X'} = X' \cup (X')' = X' \therefore$ es cerrado. □

Definición 10.8 (Conjunto perfecto)**.** $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto perfecto $\iff X = X'$.

Definición 10.9 (Punto aislado)**.** $X \subset \mathbb{R}^n, x \in X$ es aislado en X si $\exists N$ un entorno de $x : N \cap X = \{x\}$.

Definición 10.10 (Conjunto discreto)**.** Un conjunto es discreto $\iff$ todos sus puntos son aislados.

Ejemplo. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ es discreto.

10.2 Sucesiones en varias dimensiones

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in N} \subset \mathbb{R}^n$ converge a un punto $L \in \mathbb{R}^n$ si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \forall n > n_0, d(x_n, L) < \varepsilon$.

Lema 10.11. Si una sucesión tiene límite en $\mathbb{R}^n$ es único.

Demostración. Supongamos que converge a L y a L' con $L \neq L' \Rightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n > n_0), d(x_n, L) < \varepsilon$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N}) : (\forall n > n_1), d(x_n, L') < \varepsilon$
$d(L, L') \leq d(L, x_n) + d(x_n, L') \leq 2 \cdot \varepsilon, \forall n > max(n_0, n_1)$.
Sea $\varepsilon = d(L, L')/2 \Rightarrow d(L, L') < d(L, L')$ Absurdo! □

Proposición 10.12. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}^n$ son equivalentes:

1. $L = \lim_{n\to\infty} x_n$
2. $\forall r > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x_n \in B_r(L)$
3. $\forall$ entorno abierto N de $L, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x_n \in N$
4. $\forall$ entorno N de $L, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x_n \in N$

Demostración. 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) son inmediatos de la definición de límite.
1) $\Rightarrow$ 4) Sea N un entorno de L. Como $L \in N^\circ, \exists r > 0 : B_r(L) \subset N^\circ$ y como $\lim_{n\to\infty} x_n = L \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, d(L, x_n) < r \Rightarrow$
$x_n \in B_r(x), \forall n > n_0 \therefore x_n \in N, \forall n > n_0$. □

Proposición 10.13. Ejercicio: Demostrar las siguientes propiedades en $\mathbb{R}^n$.

1. Toda sucesión convergente es acotada.
2. Suma de sucesiones convergentes es convergente y el límite de la suma es la suma de los límites.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ convergen $\Rightarrow (x_n \cdot \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \lambda_n$.

Proposición 10.14. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n, x_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) \in \mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

1. La sucesión converge en $\mathbb{R}^n$.
2. $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, (x_{n_i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$.

Si se cumplen y además $\lim_{n\to\infty} = L$ y $\lim_{n\to\infty} x_{n_i} = L_i, \forall i \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow L = (L_1, \cdots, L_n)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ y $L = (L_1, \cdots, L_n)$, si $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $\varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0, d(x_n, L) < \varepsilon \Rightarrow$
$\forall n > n_0, d(x_{n_i}, L_i) < \varepsilon \therefore \lim_{n\to\infty} x_{n_i} = L_i$.
2) $\Rightarrow$ 1) Si $\lim_{n\to\infty} x_{n_i} = L_i, \forall i \in \{1, \cdots, m\}$. Llamo $L = (L_1, \cdots, L_m)$.
Dado $\varepsilon > 0, \exists n_i \in \mathbb{N} : \forall n > n_i, d(x_{n_i}, L_i) < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow n_0 = max(n_1, \cdots, n_m)$ y $n > n_0$,
$d(x_n, L) = (d(x_{n_1}, L_1)^2 + \cdots + d(x_{n_m}, L_m)^2) < (\dfrac{\varepsilon^2}{n} + \cdots + \dfrac{\varepsilon^2}{n})^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$.
$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = L$. □

10.3 Conjuntos compactos

Teorema 10.15. Un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\iff$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ y $x_n \to x, x \in F$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y supongamos que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, $x_n \to L \in F^c$. Como F^c es abierto, entonces $\exists r > 0 : B_r(X) \subset F^c \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \subset F^c, \forall n > n_0$. Absurdo pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$.
$\Leftarrow$) Si $F \subset \mathbb{R}^n$ no es cerrado $\exists x \in F'$ y $x \notin F$. Como x es punto de acumulación $\forall n > n_0 \in \mathbb{N}, B_{\frac{1}{n}}(x) \cap X \neq \varnothing$ y elijamos un punto x_n allí. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ y $d(x_n, n) < \dfrac{1}{n}, \forall n > n_0 \therefore x_n \to x \notin F$. □

Ejemplo. $(0, 1]$ no es cerrado pues $\dfrac{1}{n} \to 0$ y $\dfrac{1}{n} \in (0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 10.16 (Relativamente compacto)**.** Un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice relativamente compacto si toda sucesión en F posee una subsucesión convergente.

Definición 10.17 (Compacto)**.** Un conjunto se dice compacto si además de ser relativamente compacto cumple que está acotado.

Proposición 10.18. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es relativamente compacto $\iff$ es acotado.

Demostración. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ no acotado $\Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y_n \in F : \|y_n\| > n$$

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente cualquiera entonces la sucesión $(y_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, pues $\|y_{f(n)}\| > f(n) \geq n$ y $\therefore$ no converge. Luego F no es relativamente compacto.

Supongamos ahora que F es acotado, digamos que $\exists k > 0 : F \subset B_k(0)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en F.
Para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m = (x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots, x_{m_n})$. Si $L = \{1, \cdots, n\} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \|x_{m_i}\| \leq \|x_m\| < k$, es decir que las sucesiones $(x_{m_1})_{m\in\mathbb{N}}, \cdots, (x_{m_n})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ son acotadas.
En particular $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la subsucesión $(x_{f(m)_1})_{m\in\mathbb{N}}$ converge. Es decir que 1 es un elemento del conjunto D de todos los $f \in \{1, \cdots, n\}$ con la propiedad: "Hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \forall i \in \{1, \cdots, f\}$ la sucesión $(x_{f(m)_i})_{m\in\mathbb{N}}$ converge".
Sea $k = \max D$ y $k < n$. Como $k \in D, \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$ la sucesión $(x_{f(m)_i})_{m\in\mathbb{N}}$ converge.
Por otro lado $(x_{f(m)_{k+1}})_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada $\Rightarrow$ Hay una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $(x_{g(f(m))_{k+1}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge.
Entonces las $k+1$ sucesiones convergen y $g(f(m))$ generan subsucesiones que convergen a lo mismo.
Sea $h = g \circ f$ estrictamente creciente, entonces $k+1 \in D$ absurdo pues $k = \max D$.
Luego $k = n \Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que
$(x_{f(m)_1})_{m\in\mathbb{N}}, \cdots, (x_{f(m)_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen $\therefore$ F es relativamente compacto. $\square$

Corolario 10.19. $F \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\iff$ es cerrado y acotado.

Clase XI - 04/10

11.1 (Continuación) Conjuntos Compactos

Definición 11.1 (Cubrimiento). Sea $X \subset R^n$. Una familia U de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es un cubrimiento de X si $X \subset \bigcup_{u \in U} u$ y es un cubrimiento abierto si todo subconjunto de U es abierto.

Definición 11.2 (Subcubrimiento). Un subcubrimiento de U es un cubrimiento V de X tal que $V \subset U$.

Teorema 11.3 (Lindelöf). Todo cubrimiento abierto de algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ admite a lo sumo un subcubrimiento a lo sumo numerable.

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y U un cubrimiento abierto de X.

- Si $X = \varnothing \Rightarrow \varnothing$ es un subcubrimiento de U a lo sumo numerable.
- Si $X \neq \varnothing \Rightarrow U \neq \varnothing \Rightarrow$ Podemos fijar $U_0 \in U$.

Para cada $q \in \mathbb{Q}^n$ y sea $s \in \mathbb{Q} > 0$. Elegimos un elemento $U(q,s)$ de U de la siguiente forma:

1. Si hay elementos de U que contienen a $B_s(q)$ elegimos cualquiera de ellos y lo llamamos $u(q,s)$.
2. Si no hay ninguno ponemos $U(q,s) = U_0$.

Sea $x \in X$ como U es un cubrimiento abierto de X, $\exists u \in U$ abierto tal que $x \in u \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset u$.
Si tomamos $q \in \mathbb{Q}^n : q \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ y $s \in Q : d(x,q) < s < \dfrac{r}{2} \Rightarrow x \in B_s(q)$ y $B_s(q) \subset B_r(x) \subset u$.
Así que hay elementos de U que contienen a $B_s(q)$ y por lo tanto $x \in B_s(q) \subset U(q,s)$.
Esto prueba que $V = \{U(q,s) : q \in \mathbb{Q}^n, s \in Q > 0\}$ es un subcubrimiento de U y es numerable pues $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n$ es numerable y la función $Q^n \times \mathbb{Q} > 0 \to V$, $(q,s) \mapsto U(q,s)$, es suryectiva $\therefore V$ es a lo sumo numerable. $\square$

Corolario 11.4. Un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\iff$ $\forall$ cubrimiento abierto de F admite un subcubrimiento finito.

Demostración. Para la ida sea $F \subset \mathbb{R}^n$ compacto, U un cubrimiento abierto de F. Por Lindelöf hay un subcubrimiento a lo sumo numerable V de U y $\exists f : \mathbb{N} \to V$ suryectiva. Por el absurdo supongamos que U no contiene subcubrimiento finito de F. En particular si $m \in \mathbb{N}, V_m = \{f(1), \cdots, f(m)\} \in V$ no es subcubrimiento de F, por ser finito

$$\Rightarrow \exists x_m \in F - \bigcup_{i=1}^{m} f(i)$$

De esta forma tenemos una sucesión de elementos de F, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
Como F es compacto $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $(x_{h(m)})_{m\in\mathbb{N}} \to L \in F$.
Como V es un cubrimiento de F y f es sobreyectiva $\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : L \in f(s)$. Por otro lado como $\lim_{n\to\infty} x_m = L$ y $f(s)$ es un entorno de $L, \exists m_0 \in \mathbb{N} : x_{h(m)} \in f(s), \forall m > m_0$.
Como $m < h(s+m_0) \Rightarrow x_{h(s+m_0)} \in f(s)$ Absurdo!
$x_{h(m_0+s)} \in F - \bigcup_{i=1}^{h(s+m_0)} f(i)$ que es disjunto con $f(s)$ pues $s < h(s+m_0)$.
$\therefore V$ y, por lo tanto, U contienen un subcubrimiento finito.

Para la vuelta supongamos que todo cubrimiento abierto de F admite un subcubrimiento finito, pero que F no es compacto.
Hay una sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset F$ que no tiene ninguna subsucesión convergente. Si $x \in F$, no hay ningua subsucesión de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a x y, por lo tanto, $\exists r_x > 0 : S_x = \{m \in \mathbb{N} : x_m \in B_r(x)\}$ es finito.
El conjunto $U = \{B_{r_x}(x) : x \in F\}$ es un cubrimiento abierto de F.
Por hipotesis hay un subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_k\}$ tal que $\{B_{r_{y_1}}(y_1), \cdots, B_{r_{y_k}}(y_k)\}$ es subcubrimiento de F.
En particular $\forall m \in \mathbb{N}, \exists i \in \{1, \cdots, k\} : x_m \in B_{r_{y_i}}(y_i) \Rightarrow$
$m \in S_y \therefore \mathbb{N} \subset S_{y_1} \cup \cdots \cup S_{y_k}$ Absurdo! pues los S_{y_i} son finitos. $\square$

Proposición 11.5. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Si U es un cubrimiento abierto de K entonces $\exists \delta > 0$: si $x, y \in K, d(x,y) < \delta \Rightarrow \exists u \in U$ abierto tal que $x, y \in u$.
δ se llama número de Lebesgue del cubrimiento U.

Demostración. Sea U un cubrimiento abierto de K. Para cada $x \in K, \exists U_x \in U : x \in U_x$. Como U_x es abierto $\exists r_x > 0 : B_{r_k}(x) \subset U_x$.
El conjunto $U' = \{B_{\frac{r_x}{2}} : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K. U' posee un subcubrimiento finito.
$\exists x_1, \cdots, x_k : K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$.
Veamos que $\delta = \frac{1}{2} \cdot min(r_{x_1}, \cdots, r_{x_k})$ es un número de Lebesgue:
Sean $x, y \in K : d(x,y) < \delta \Rightarrow$
$\exists i \in \{1, \cdots, m\} : x \in B_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i) \Rightarrow \|x_i - y\| \leq \|x_i - x\| + \|x + y\| \leq \frac{r_{x_i}}{2} + \delta < \frac{r_{x_i}}{2} + \frac{r_{x_i}}{2} = r_{x_i} \Rightarrow$
$x, y \in B_{r_{x_i}}(x_i) \subset U_{x_i}$ que es abierto de U. □

11.2 Propiedades de límites

Definición 11.6 (Límite). $A \subset \mathbb{R}^n, x_0$ un punto de acumulación de A y $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función, decimos que $y \in R^n$ es límite de f en x_0 si:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in A)$ si $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - y\| < \varepsilon$.

Lema 11.7. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in A'$, $f : A \to \mathbb{R}^k$ tiene como muhco un único límite en x_0.

Demostración. Sea $y, y' \in \mathbb{R}^k$: son límite de f en $x_0 \in A'$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \|y - y'\| > 0$.
$\Rightarrow \exists \delta_1, \delta_2 : 0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - y\| < \varepsilon$
$0 < \|x - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(x) - y'\| < \varepsilon$.
Si $\delta = min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow$ Si $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$
$\|f(x) - y\| + \|f(x) - y'\| < 2 \cdot \varepsilon$
$\|y - y'\| < 2 \cdot \varepsilon = \|y - y'$ Absurdo!
$\therefore$ el límite es único. □

Proposición 11.8. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A', f : A \to \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^k$ son equivalentes:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : f(B_\delta(x_0)) \cap (A - \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(y)$
3. $\forall$ entorno V de y, $\exists$ un entorno U de x_0 tal que $f(U \cap (A - \{x_0\})) \subset V$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Dado

$$\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - y\| < \varepsilon$$

Si

$$x \in B_\delta(x_0) \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow x \in A, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$$

$$\|f(x) - y\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(y) \therefore f(B_\delta(x_0)) \cap (A - \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(y)$$

2) $\Rightarrow$ 3) Si V es un entorno de $y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(y) \subset V$. Por hipótesis

$$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x_0) \cap (A - \{x_0\})) \subset B_\varepsilon(y)$$

Tomo $U = B_\delta(x_0)$ que es un entorno de x.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\varepsilon > 0$. Como $B_\varepsilon(y)$ es un entorno de y. Por hipótesis $\exists$ un entorno U de $x_0 : f(U \cap (A - \{x_0\})) \subset B_\varepsilon(y)$. Como U es entorno de $x_0, \exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset U$.
Si $x \in A$ es tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow x \in B_\delta(x_0) \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow$ $\|f(x) - y\| < \varepsilon$
$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = y$. □

Proposición 11.9. $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A', f : A \to \mathbb{R}^k, \lim_{x \to x_0} f(x) = y \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{x_0\}, x_n \to x_0, (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A - \{x_0\}, x_n \to x_0$. Dado

$$\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), y) < \varepsilon$$

Además

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x_0) < \delta, \forall n > n_0$$

$$\Rightarrow d(f(x_n), y) < \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to y$$

$\Leftarrow$) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A - \{x_0\}, x_n \to x_0, (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to y$.
Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq y$. Luego $\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0, d(x, x_0) < \delta$, pero $d(f(x), y) \geq \varepsilon$.
En particular consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A - \{x_0\}$ y podemos encontrar $d(x_n, x_0) < \delta, \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$ pues $x_n \to x_0$.
Luego $d(f(x_n), y) \geq \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \not\to y$. □

Proposición 11.10. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A', f, g : A \to \mathbb{R}^k, h : A \to \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = y, \lim_{x\to x_0} g(x) = z \Rightarrow$
   $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = y + z$.
2. $\lim_{x\to x_0} h(x) = r \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) \cdot f(x) = r \cdot y$
3. $\lim_{x\to x_0} h(x) = r \neq 0, h(x) \neq 0 (\forall x \in A) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to x_0} h(x)} = \dfrac{1}{r}$.

Proposición 11.11. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A', f : A \to \mathbb{R}^k, \lim_{x\to x_0} f(x) = y$.

1. Si $z \neq y, \exists r > 0 : z \in f(B_r(x_0) - (A - \{x_0\}))$.
2. Si $y > 0 \Rightarrow \exists r > 0 : f(x) > 0, \forall x \in (B_r(x_0) - (A - \{x_0\}))$.
3. $\exists r > 0 : f$ es acotada sobre $B_r(x_0) \cap A$, o sea, $\{f(x) : x \in B_r(x_0) \cap A\}$ está acotado superiormente.

Demostración. 1. $y \neq z \Rightarrow d(y,z) > 0 \Rightarrow \exists r > 0 : 0 < d(x,x_0) < r \Rightarrow d(f(x),y) < d(y,z)$.

2. $x \in B_r(x_0) \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow 0 < d(x,x_0) < r \Rightarrow d(f(x),y) < d(z,y) \therefore f(x) \neq z$, o sea, $z \in f(B_r(x_0) \cap (A - \{x_0\}))$.

3. Sea $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists r > 0 : \forall x \in A$ vale que $0 < d(x,x_0) < r \Rightarrow d(f(x),y) < 1 \Rightarrow$
Si $x \in B_r(x_0) \cap (A - \{x_0\})$, $\|f(x)\| = \|f(x)+y-y\| \leq \|f(x)-y\| + \|y\| < 1 + \|y\|$.
$\therefore$ si $x_0 \notin A$, $1 + \|y\|$ es cota superior para $\{f(x) : x \in B_r(x) \cap A\}$.
Si $x_0 \in A \Rightarrow 1 + \|y\| + \|f(x_0)\|$ es cota superior. La definición del límite no sirve para x_0, por eso se separa en casos.

$\square$

Teorema 11.12 (Teorema del Sandwich)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A'$ y $f, g, h : A \to \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, si:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = y \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = y$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
&0 < d(x,x_0) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x),y) < \varepsilon \\
&0 < d(x,x_0) < \delta_2 \Rightarrow d(h(x),y) < \varepsilon \\
&\text{Sea } \delta = \min(\delta_1,\delta_2) \Rightarrow \exists x \in A : 0 < d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \\
&y - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < y + \varepsilon \Rightarrow d(g(x),y) < \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x \to x_0} g(x) = y$. $\square$

Clase XII - 08/10

12.1 Límites en varias dimensiones

Proposición 12.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}^k, f = (f_1, \cdots, f_k), y = (y_1, \cdots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ son equivalentes:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$.
2. $\forall i \in \{1, \cdots, k\}, \lim_{x \to x_0} f_i(x) = y_i$.

Demostración.

- Para la ida $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in A), 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), y) < \varepsilon$. Luego, si $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f_i(x) - y_i) < d(f(x) - y) < \varepsilon \therefore \lim_{x \to x_0} f_i(x) = y_i$.
- Para la vuelta, sea $\varepsilon > 0, (\forall i \in \{1, \cdots, k\})(\exists \delta_i > 0) : (\forall x \in A) 0 \leq d(x, x_0) < \delta_i$. $\Rightarrow d(f_i(x) - y_i) < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$. Si $\delta = min(\delta_i, i = 1, \cdots, k)$ y $0 \leq d(x, x_0) < \delta$. $\Rightarrow d(f(x) - y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - y_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \dfrac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon$.

$\square$

Definición 12.2 (Límites laterales)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}^k$.

1. Si x_0 es un punto de acumulación de $A_{x_0}^{+} = A \cap [x_0, +\infty)$ y la restricción $f|_{A_{x_0}^{+}} \to \mathbb{R}$ tiene límite igual a y en $x_0 \Rightarrow$ decimos que y es límite por derecha de f en $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^{+}} f(x) = y$.
2. Si x_0 es un punto de acumulación de $A_{x_0}^{-} = A \cap (-\infty, x_0]$ y la restricción $f|_{A_{x_0}^{-}} \to \mathbb{R}$ tiene límite igual a y en $x_0 \Rightarrow$ decimos que y es límite por izquierda de f en $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^{-}} f(x) = y$.

12.2 Continuidad en un punto

Definición 12.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A$ decimos que $f : A \to \mathbb{R}^k$ es continua en $x_0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \forall x \in A$ vale que $0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Lema 12.4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A \Rightarrow f : A \to \mathbb{R}^k$ es continua en $x_0 \iff$ o bien x_0 es aislado en A o bien $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Demostración. Si f es continua en x_0 y x_0 no es aislado en A quiero ver que entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Como $\forall x \in A$ vale que $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Entonces $0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0) < \varepsilon$. Si x_0 es punto asilado de $A \Rightarrow \exists \delta > 0, B_\delta(x_0) \cap A = \{x_0\}$ y vale que $\forall x \in A : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, pues $d(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$. Si x_0 no es punto aislado de A. Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ y si $x = x_0$ claramente $d(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$. □

Definición 12.5 (Entorno relativo). Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que V es un entorno de x relativo a A si $\exists N \subset \mathbb{R}^n$ entorno de $x : V = A \cap N$.

Definición 12.6 (Abierto relativo). Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ decimos que U es abierto relativo a A si $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $U = \tilde{U} \cap A$.

Definición 12.7 (Cerrado relativo). Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ decimos que F es un cerrado relativo a A si $\exists \tilde{F} \subset \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $F = \tilde{F} \cap A$.

Proposición 12.8. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A, f : A \to \mathbb{R}^k$ son equivalentes:

1. f es continua en x_0.
2. Para todo entorno V de $x_0, \exists$ un entorno U de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subset V$.
3. Para todo entorno V de $f(x_0)$, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un entorno de x_0 relativo a A.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Sea V un entorno de $f(x_0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0) : B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$. Como f es continua en x_0, $(\exists \delta > 0) : (\forall x \in A)$ vale que $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Si $U = A \cap B_\delta(x_0)$ que es un entorno de x_0 relativo de A y si $x \in U \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V \therefore f(U) \subset V$.
b) $\Rightarrow$ c) Sea V un entorno de $f(x_0)$, por hipótesis $\exists U$ entorno de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subset V \Rightarrow U \subset f^{-1}(V)$. Luego $f^{-1}(V)$ es un entorno de x_0 relativo a A.
c) $\Rightarrow$ a) Sea $\varepsilon > 0$ como $B_\varepsilon(f(x_0))$ es un entorno de $f(x_0)$. Por hipótesis $\exists U$ entorno de x_0 relativo a $A : f(U) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Es decir que $\exists U_0 \subset \mathbb{R}^n$ entorno de $x_0 : U = A \cap U_0$. Si $\delta > 0$ es tal que $B_\delta(x_0) \subset U_0$ y $x \in A$ cumple que $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow x \in B_\delta(x_0) \cap A \subset U_0 \cap A = U \therefore f(x) \in f(U) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. □

Proposición 12.9. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^k \Rightarrow f$ es continua en $x_0 \iff$ cada vez que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ converge a $x_0 \Rightarrow f((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ converge a $f(x_0)$.

Demostración. Para la ida supongamos f continua en x_0 y $x_n \to x_0, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Sea $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Además $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $(\forall n > n_0)(d(x_n, x_0)) < \delta$ (tomando $\varepsilon = \delta$ en la definición) $\Rightarrow d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \therefore$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Para la vuelta supongamos que f no es continua en x_0, x_0 no es punto aislado de A y $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A : d(x_n, x_0) < \delta$, pero $d(f(x), f(x_0)) >$ ε, es decir que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$. □

Proposición 12.10. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A, f : A \to \mathbb{R}^k$ continua en x_0. Si $B \subset A, x_0 \in B \Rightarrow$ $f|_B : B \to \mathbb{R}^k$ es continua en x_0.

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 12.11. $A \subset \mathbb{R}^k, x_0 \in A$:

1. $f, g : A \to \mathbb{R}^k, h : A \to \mathbb{R}$ continuas en $x_0 \Rightarrow f + g : A \to \mathbb{R}^k, h \cdot f : A \to \mathbb{R}^k$ son continuas.
2. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 y $\forall x \in A, f(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$ es continua en x_0.

Demostración. Ejercicio □

Proposición 12.12. Sea $A \subset \mathbb{R}^k, x_0 \in A, f : A \to \mathbb{R}^k$ continua en x_0.

1. $f(x_0) \neq y_0 \Rightarrow \exists U$ entorno de x_0 relativo a A tal que $y_0 \neq f(U)$.
2. $k \in \mathbb{R} : f(x_0) < k \Rightarrow \exists U$ entorno de x_0 relativo a A : $f(x) < k \forall x \in U$.
3. $\exists U$ entorno de x_0 relativo a A : f es acotada en U, o sea, $f(U)$ es acotado.

Demostración.
1. Sea $r = d(f(x_0), y_0) > 0 \Rightarrow B_r(f(x_0))$ es un entorno de $f(x_0)$. Por ser f continua en $x_0, \exists U$ entorno relativo a A. $f(U) \subset B_r(x_0)$ e $y_0 \notin f(U)$.
2. Como $(-\infty, k)$ es un entorno de $f(x_0), \exists U$ entorno de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subset (-\infty, k)$ es decir que $\forall x \in U, f(x) < k$.
3. Si $r = \|f(x_0)\|, B_r(0)$ es un entorno de $f(x_0) \Rightarrow \exists U$ entorno de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subset B_r(0) \therefore f(U)$ es un conjunto acotado.

□

12.3 Composición de funciones

Teorema 12.13. Sea $A \subset R^l, B \subset \mathbb{R}^k, f : A \to \mathbb{R}^k, g : B \to \mathbb{R}^l : f(A) \subset B$. Sea $g \circ f : A \to$ $\mathbb{R}^l$. Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ es continua en x_0.

Demostración. Sea W un entorno de $g(f(x_0))$. Como g es continua en $f(x_0)\exists V$ un entorno de $f(x_0)$ relativo a B tal que $g(V) \subset W \Rightarrow \exists V_0 \in \mathbb{R}^k : V = V_0 \cap B$. Así que V_0 es entorno de $f(x_0)$ en $\mathbb{R}^k$. Como f es continua en $x_0, \exists U$ entorno de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subset V_0$. Como $f(A) \subset B$, por hipótesis $\Rightarrow f(U) \subset V_0 \cap B = V$ y $\therefore g(f(U)) \subset g(V) \subset W$ y $g \circ f$ es continua en x_0. □

Proposición 12.14. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A \Rightarrow f : A \to \mathbb{R}^k$ es continua en $x_0 \iff$ cada una de sus componentes $f_1, \cdots, f_k : A \to \mathbb{R}$ son continuas en x_0.

Demostración. Ejercicio □

12.4 Continuidad global

Definición 12.15 (Continuidad global)**.** $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}^k$ es continua globalmente is es continua $\forall x \in A$.

Proposición 12.16. $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}^k$ continua $\iff$ cada vez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A, x_n \to x \in A$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x$.

Demostración. Inmediato. □

Proposición 12.17. $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}^k$ son equivalentes:

1. f es continua.
2. $\forall V \subset \mathbb{R}^k$ abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto relativo a A.
3. $\forall F \subset \mathbb{R}^k$ cerrado, $f^{-1}(V)$ es cerrado relativo a A.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Si $x \in f^{-1}(V)$, f es continua en x y V es un entorno de $f(x)$. Por lo que $\exists U$ entorno de x relativo a $A : f(U) \subset V$. Luego $U \subset f^{-1}(V)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es un entorno de x relativo a A y $f^{-1}(V)$ es abierto relativo a A.
2) $\Rightarrow$ 3) Si $F \subset \mathbb{R}^k$ es cerrado, entonces F^c es abierto y $f^{-1}(F^c)$ es abierto relativo a A por hipótesis, pero $f^{-1}(F) = A - f^{-1}(F^c)$. Luego $f^{-1}(F)$ es cerrado relativo a A.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea $x \in A$. V entorno de $f(x) \Rightarrow f^{-1}(\mathbb{R}^k - V^\circ)$ es un cerrado relativo a $A \Rightarrow f^{-1}(V^\circ) = A - f^{-1}(\mathbb{R}^k - V^\circ)$ es abierto relativo a A y $f(f^{-1}(V^\circ) \subset V$. Luego f es continua en x, pues dado un entorno de x, $f^{-1}(V^\circ)$ encontramos un conjunto donde la imagen ”se mete adentro”. □

Corolario 12.18. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}^k$ continuas.

1. $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto en A y $\{x \in A : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en A.
2. $\{x \in A : f(x) > 0\}$ es abierto en A.

Demostración.

1. Sea $h : A \to \mathbb{R}^k$, $h = f - g$ es continua y $\mathbb{R}^k - \{0\}$ es abierto $\Rightarrow h^{-1}(\mathbb{R}^k - \{0\}) = \{x \in A : f(x) - g(x) \neq 0\}$ es abierto en A. Como $\{0\}$ es cerrado $\Rightarrow h^{-1}(\{0\}) = \{x \in A : f(x) - g(x) = 0\}$ es cerrado.
2. Como f es continua y $(0, +\infty)$ es abierto, luego $f^{-1}((0, +\infty)) = \{x \in A : f(x) > 0\}$ es abierto en A.

□

Observación. La imagen por una función continua de un conjunto abierto o cerrado puede no ser ni abierto ni cerrado. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es continua, $\mathbb{R}$ es abierto y cerrado y $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$ que no es ni abierto ni cerrado.

Clase XIII - 15/10

13.1 Gráficas continuas

Definición 13.1. Sea $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}^k$ el gráfico de f es el subconjunto de $A \times \mathbb{R}^k$ dado por $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$.

Proposición 13.2. Si f es continua, G_f es cerrado en $A \times \mathbb{R}^k$.

Demostración. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G_f$ y $p_n \to p \in A \times \mathbb{R}^k$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos poner $p_n = (x_n, y_n)$ con $y_n = f(x_n)$. Si $p = (x, y)$ tiene que ser $x_n \to x, y_n \to y$. Como f es continua $f(x_n) \to f(x)$, pero como $y_n = f(x_n) \to y = f(x) \Rightarrow p = (x, y) \in G_f$. □

Proposición 13.3. Si G_f es cerrado en $A \times \mathbb{R}^k$ y f es acotada $\Rightarrow$ f es continua.

Demostración. Como f es acotada $\exists k : f(x) \in B_k(0) \subset \mathbb{R}^k, \forall x \in A$. Sea $x_0 \in A$ queremos ver que f es continua en x_0. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x_0$ y supongamos que $f(x_n) \not\to f(x_0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0), h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\|f(x_{h(n)}) - f(x_0)) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $p_n = (x_{h(n)}, f(x_{h(n)})) \in G_f$. Como $x_{h(n)}$ converge, es acotada, $\exists L > 0 : x_{h(n)} \in B_L(0), \forall n \in \mathbb{N}$. Luego $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada pues toma valores en $B_L(0)$ o $B_k(0)$, por lo que existe ϕ estrictamente creciente tal que $(p_{\phi_{h(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $p \in R^n \times \mathbb{R}^k$. Supongamos que $p = (x_0', y) \Rightarrow x_{\phi_{h(n)}} \to x_0'$ y $f(x_{\phi_{h(n)}}) \to y$. Como $x_{\phi_{h(n)}}$ es subsubsucesión de $x_n \to x_0' = x_0 \in A$. Se tiene que $\lim_{n\to+\infty} p_{\phi_{h(n)}} \in A \times \mathbb{R}^k$. Como estamos suponiendo que G_f es cerrado entonces $x_0, y \in G_f$, es decir $y = f(x_0)$, pero entonces $f(x_{\phi_{h(n)}}) \to f(x_0)$. Absurdo! □

Proposición 13.4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, D \subset A : A \subset \overline{D}$ (D es denso en A) y sean $f, g : A \to \mathbb{R}^k$ continuas si $f|_D = g|_D \Rightarrow f = g$.

Demostración. Sea $x \in A$, como $A \subset \overline{D}(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset D : x_n \to x$. Como f, g son continuas en x, $f(x_n) \to f(x)$, $g(x_n) \to g(x)$. Como $f|_D = g|_D \Rightarrow f(x_n) = g(x_n), \forall n \in N \therefore f(x) = g(x)$. $\square$

13.2 Teorema de Weierstrass

Teorema 13.5 (Weiertrass)**.** Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y no vacío. Una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ es acotada superiormente y más aún $\exists y \in K : f(x) \leq f(y) (\forall x \in K)$.

Demostración. Si f no es acotada superiormente para cada $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in K : f(x_n) \geq n$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ que es compacto $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} = \alpha \in K$. Como f es continua en $\alpha, f(x_n) \to f(\alpha)$ y como es convergente, tiene que ser acotada. Absurdo, pues $f(x_{\phi(n)}) \geq h(n) \geq n (\forall n \in \mathbb{N}) \therefore f$ es acotada superiormente.
Sea ahora $F = \{f(x) : x \in K\}$ este conjunto está acotado superiormente y es no vacío, $\exists s = \sup(F) \Rightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K : f(y_n) \to s$. Como K es compacto $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $y_{\phi(n)} \to y \in K$. Como f es continua en $y \Rightarrow f(y_{\phi(n)}) \to f(y) \Rightarrow f(y) = s$. Luego $f(y)$ es cota superior de F y $f(y) \in F \therefore$ alcanza valor máximo. $\square$

Observación. Vale para acotada inferiormente y valor mínimo.

Teorema 13.6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y f una función continua $\Rightarrow f(K)$ es compacto.

Demostración. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que toma valores en la imagen $f(K)$. Para cada $n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K : y_n = f(x_n)$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ y K es compacto, $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $x_{\phi(n)} \to x \in K$. Como f es continua en $x \Rightarrow f(x_{\phi(n)}) \to f(x)$. Como $f(x_{\phi(n)}) = f(y_n)$, probamos que toda sucesión contenida en $f(K)$ tiene una subsucesión convergente con límite contenido en $f(K) \therefore f(K)$ es compacto. $\square$

13.3 Teorema del valor intermedio

Teorema 13.7 (Valor intermedio)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua entonces $\forall y$ entre $f(a)$ y $f(b), \exists x \in [a, b] : f(x) = y$.

Demostración. Si $f(a) = f(b)$ no hay nada que probar.
Supongamos que $f(a) < f(b) \Rightarrow$ Sea $y \in (f(a), f(b))$ y consideremos a $U = \{x \in [a,b] : f(x) < y\} \neq \emptyset$. Luego U es acotado y entonces $\exists \alpha = \sup(U)$ y $\alpha \in [a,b] \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U : x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n) \to f(\alpha)$ pues f es continua. Como $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in U)(f(x_n) < y) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leq y$. Quiero ver que $f(\alpha) = y$. Si fuese $f(\alpha) < y \Rightarrow \alpha \in U$. Además, como $y < f(b)$ y $\alpha \in [a,b]$ tiene que ser $\alpha < b$. Como f es continua, U es abierto relativo a $[a,b]$ así que $\exists r > 0 : B_r(\alpha) \cap [a,b] \subset U$. Si $s = \frac{1}{2}\min(r, b-\alpha) \Rightarrow \alpha + s \in B_r(\alpha)$ y $a \leq \alpha + s \leq b \Rightarrow \alpha + s \in U \Rightarrow f(\alpha + s) < y$
Absurdo pues $\alpha = \sup(U)$ $\therefore f(\alpha) = y$. □

13.4 Convexidad

Definición 13.8 (Convexidad). Decimos que $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si siempre que $x, y \in C$ y $t \in [0,1]$ se tiene que $(1-t)x + ty \in C$. Geométricamente, C es convexo si dados dos puntos cualquiera en C, el segmento que los une también está contenido en C.

Ejemplo. Si $x \in \mathbb{R}^n, r > 0, B_r(x)$ es convexo.

Demostración. $y, z \in B_r(x), t \in [0,1] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|(1-t)y + tz - x\| &= \|(1-t)y + tz - (1-t)x - tx\| \\ &\leq \|(1-t)(y-x)\| + \|t(z-x)\| \\ &\leq (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| < (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

$\therefore (1-t)y + tz \in B_r(x) (\forall t \in [0,1])$. □

Proposición 13.9. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : C \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ si $a, b \in C$ e y está entre $f(a)$ y $f(b) \Rightarrow \exists \alpha \in C : f(\alpha) = y$.

Demostración. Sea $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \sigma(t) = (1-t)a + tb \Rightarrow \sigma$ es continua y $\sigma([0,1]) \subset C \Rightarrow g = f \circ \sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $g(0) = f(a), g(1) = f(b) \Rightarrow y$ está entre $g(a)$ y $g(b)$ así que $\exists \beta \in [0,1] : g(\beta) = y$. Si llamo $\alpha = \sigma(\beta) \Rightarrow f(\alpha) = f(\sigma(\beta)) = g(\beta) = y$. □

Definición 13.10. Decimos que $C \subset \mathbb{R}^n$ es arco-conexo si $\forall x, y \in \mathbb{C}, \exists \sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $Im(\sigma) \subset C$ y $\sigma(0) = x, \sigma(1) = y$. Geométricamente, puedo unir dos puntos del conjunto por una curva continua contenida en él.

Observación. Todo conjunto convexo es arco-conexo en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 13.11. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ arco-conexo y sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua, si $a, b \in A$ e y está entre $f(a)$ y $f(b) \Rightarrow \exists \alpha \in A : f(\alpha) = y$.

Demostración. Como A es arco-conexo $\exists \sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $\sigma(0) = a, \sigma(1) = b$. Si $g = f \circ \sigma : [0,1] \to \mathbb{R} \Rightarrow g$ es continua y $g(0) = f(a), g(1) = f(b)$. Así que $\exists \beta \in [0,1] : g(\beta) = y \Rightarrow \alpha = \sigma(\beta) \Rightarrow f(\alpha) = f(\sigma(\beta)) = g(\beta) = y$. $\square$

Observación. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ y que $f : A \to \mathbb{R}^n$ es una función continua para la que no vale el Teorema de valor intermedio. $\exists a, b \in A$ e y entre $f(a)$ y $f(b) : \nexists \alpha \in A : f(\alpha) = y \Rightarrow \exists U = \{x \in A : f(x) = y\}, V = \{x \in A : f(x) > y\}$. Son abiertos en A, no vacíos, disjuntos y $A = U \cup V$.

Definición 13.12 (Conexo)**.** $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si $\nexists U, V$ abiertos en A, no vacíos tales que $U \cap V = \varnothing$ y $U \cup V = A$.

Proposición 13.13. $A \subset \mathbb{R}^n, A \neq \varnothing$ es conexo $\iff$ el único subconjunto no vacío U de A que es simultáneamente abierto y cerrado en A es A mismo.

Demostración. Si A no es conexo $\exists U, V$ abiertos, no vacíos en A tales que $U \cap V = \varnothing$ y $U \cup V = A$. Luego $U \neq \varnothing, U \neq A$ y U es abierto y cerrado en A. Por otro lado si A es conexo y U es un subconjunto $U \neq \varnothing$ de A abierto y cerrado en $A \Rightarrow V = A - U$ es abierto en A y cumple que $U \cap V = \varnothing, U \cup V = A, V = \varnothing \Rightarrow U = A$. $\square$

Teorema 13.14. $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo y $f : A \to \mathbb{R}^k$ continua entonces $f(A)$ es conexo.

Demostración. U, V dos abiertos de $f(A) : f(A) = U \cup V, U \cap V = \varnothing \Rightarrow \exists U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^k$ abiertos tales que $U = U_0 \cap f(A), V = V_0 \cap f(A)$. Como f es continua, $f^{-1}(V_0), f^{-1}(U_0)$ son abiertos relativos en A. $U_0 \cap V_0 = \varnothing$. Además $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ y $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = A$. Pero como A es conexo o $U = \varnothing$ o $V = \varnothing \therefore f(A)$ es conexo. $\square$

Proposición 13.15. A una familia de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$. Si cada vez que $B, C \in A$ vale que son no disjuntos $\Rightarrow \bigcup_{a \in A} a$ es conexo.

Clase XIV - 18/10

14.1 Conjuntos Conexos y Arco-conexos

Teorema 14.1. Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no vacío y arco-conexo es conexo.

Demostración. Sea $A \neq \emptyset, a_0 \in A$. Cada vez que $a \in A, \exists \sigma_a : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ con valores en A continua y tal que $\sigma_a(0) = a_0$ y $\sigma_a(1) = a$. Como $[0,1]$ es conexo, $\sigma_a([0,1])$ es conexo, contiene a a y a a_0 y está contenido en A. Luego $\bigcup_{a \in A} \sigma_a([0,1]) = A \therefore$ es conexo. $\square$

Corolario 14.2. $\mathbb{R}^n$ es conexo y, en particular, los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son abiertos y cerrados son $\emptyset, \mathbb{R}^n$.

Teorema 14.3. Un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío es arco-conexo $\iff$ es conexo.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, no vacío y conexo y sea $x_0 \in A$. Considero el conjunto U de todos los puntos de A para los que hay una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ con valores en A tales que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x$. Vamos a ver que $U = A$. Supongamos que $x \in U$. Como A es abierto, $\exists r > 0 : B_r(x) \subset A$. Si y es un punto cualquiera de $B_r(x) \Rightarrow t : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ es continua, verifica que $t(0) = x_0, t(1) = y$ y toma valores en A.

$$t(\alpha) = \begin{cases} \sigma(2\alpha) & \text{si } \alpha \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2 - 2\alpha)x + (2t - 1)y & \text{si } \alpha \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Luego $y \in U \Rightarrow B_r(x) \subset U \Rightarrow U$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\therefore$ es abierto en A. Veamos que U también es cerrado en A. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U : u_n \to u$ quiero ver que $u \in U$. Como A es abierto $\exists s > 0 : B_s(u) \subset A$ y como $u_n \to u, \exists m : u_m \in B_s(u)$. Como $u_n \subset U, \exists \sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua, con valores en A y tal que $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = u_m$. Como antes, $t : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ es continua, toma valores en A.

$$t(\alpha) = \begin{cases} \sigma(2\alpha) & \text{si } \alpha \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2 - 2\alpha)u_m + (2t - 1)u & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$\Rightarrow t(0) = x_0$, $t_1 = u \Rightarrow u \in U$.
En definitiva U es abierto y cerrado en $A, U \neq \emptyset, x_0 \in U$ y como A es conexo, debe ser $U = A$ y A es arco-conexo. $\square$

14.2 Continuidad uniforme

Definición 14.4 (Continuidad uniforme)**.** $f : A \to \mathbb{R}^k$ es uniformemente continua si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x, y \in A), \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Ejemplo.

1. $f(x) = x$. Tomando $\varepsilon = \delta$ en la definición.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = sen(x)$, f es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $x = 0$. Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in \mathbb{R}$ si $|z - 0| < \delta \Rightarrow |sen(z) - 0| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |2 \cdot \sin(\dfrac{x-y}{2}) \cdot \cos(\dfrac{x+y}{2})| < 2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
3. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\dfrac{\pi}{x})$. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $|x_n - x_{n+1}| < \dfrac{1}{n}$, pero $|f(x_n) - f(x_{n+1})| = 2 (\forall n \in \mathbb{N})$. Esto implica que $\nexists \delta > 0 : (\forall x, y \in (0, +\infty)) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pues δ debería ser menor que $\dfrac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N}) \therefore f$ no es uniformemente continua.

Teorema 14.5. f continua, $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, K compacto $\Rightarrow f$ es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua $(\forall x \in K)(\exists \delta_x > 0) : (\forall x_0 \in K) : \|x - x_0\| < \delta_x \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $U = \{B_{\delta_x} : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K. Como K es compacto U tiene un número de Lebesgue, $\exists \delta > 0 : x, y \in K$ y $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \exists u \in U : x, y \in u$. Dados $x, y \in K : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \exists z \in K : x, y \in B_{\delta_z}(z) \Rightarrow \|f(x) - f(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|f(y) - f(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(z) - (f(y) - f(z))\| \leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(y) - f(z)\| < \varepsilon$$

$\therefore f$ es uniformemente continua. $\square$

Teorema 14.6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^k$ uniformemente continua $\Rightarrow \exists!$ función continua $\bar{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}^k : \bar{f}(x) = f(x)(\forall x \in A)$ y $\bar{f}$ es uniformemente continua.

Demostración.

1. Afirmo que dado $x_0 \in \bar{A}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, $x_n \to x_0 \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Luego $\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n, m > n_0)\|x_n - x_m\| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow$

$$\|x_0 - x_m\| + \|x_m - x_0\| < \delta \iff \|x_n - x_m\| < \delta \iff \|f(x_n) - f(x_m)\| < \varepsilon$$

$\therefore (f(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ es de Cauchy.

2. Afirmo que sea $x_0 \in \bar{A}$, $\exists! L_x \in \mathbb{R}^k : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to L_x$. En efecto, supongamos que $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ y $f(x_n) \to L_x$ y $f(y_n) \to L_y$. Como f es uniformemente continua en A, $\exists \delta > 0 : (\forall u, v \in A) : \|u - v\| < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| < \varepsilon$. Como $x_n \to x_0$ e $y_n \to x_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n, m > n_0)(\|x_n - x_0\| < \frac{\delta}{2})(\|y_n - x_0\| < \frac{\delta}{2})$

$$\Rightarrow \|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x_n) - f(y_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Luego como $\|f(x_n) - L_x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $\|f(y_n) - L_y\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $(\forall n > n_0) \therefore \|L_x - L_y\| < \varepsilon$.

3. Acabamos de ver que $\exists \bar{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}^k : f(x) = L_x$ Veamos que a) $f(A) \subset \bar{f}|_A$ b) $\bar{f}$ es uniformemente continua en $\bar{A}$.

   a) Sea $x \in A$, $x_n = x$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x) = L_x = \bar{f}(x)$, $(f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es constante $f(x) = \bar{f}(x)$.

   b) Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sean $u, v \in \bar{A}$: $\|u - v\| < \delta \Rightarrow \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bar{A}$ con $u_n \to u$, $v_n \to v$, $f(u_n) \to \bar{f}(u)$, $f(v_n) \to \bar{f}(v)$. Luego $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \|f(u_n) - \bar{f}(u)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $\|f(v_n) - \bar{f}(v)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Además $\|u_n - u\| < \frac{1}{2} \cdot (\delta - \|u - v\|)$, $\|v_n - v\| < \frac{1}{2} \cdot (\delta - \|u - v\|)$, $(\forall n > n_0)$. Luego

$$\|u_n - v_n\| < \|u_n - u\| + \|v_n - v\| + \|u - v\| < \delta \Rightarrow$$

$$\|\bar{f}(u) - \bar{f}(v)\| < \|\bar{f}(u) - f(u_n)\| + \|f(u_n) - f(v_n)\| + \|f(v_n) - \bar{f}(v)\| < \varepsilon$$

   $\therefore \bar{f}$ es uniformemente continua.

4. Veamos por último la unicidad, si $g : \bar{A} \to \mathbb{R}^k$ continua y $g(x) = f(x)(\forall x \in A) \Rightarrow g|_A = \bar{f}|_A$. En efecto, como $A \subset \bar{A} \Rightarrow \bar{f} = g$.

$\square$

14.3 Diferenciación

Definición 14.7. Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y sea $p \in A^\circ$ si $T_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal que verifica:

$$\lim_{x\to p}\frac{\|F(x)-F(p)-T_p(x-p)\|}{\|x-p\|}=0\Rightarrow$$

Decimos que F es diferenciable en p. A la transformación lineal la llamamos diferencial de F en p y lo notamos DF_p.

Si $F=(f_1,\cdots,f_n)$ con $f_i:A\to\mathbb{R}$ $i\in\{1,\cdots,n\}$, F es diferenciable en $p \iff$ cada f_i es diferenciable en p. Además la diferencial de F es la matriz que se obtiene al poner como filas los gradientes de f_i.

$$DF_p=\begin{pmatrix}\nabla f_1(p)\\ \vdots\\ \nabla f_n(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p)\end{pmatrix}$$

También podemos observar que si F es diferenciable en P y $v\in\mathbb{R}^n\Rightarrow\alpha(t)=p+t\cdot v$.

$$\begin{aligned}0&=\lim_{t\to 0}\frac{\|F(p+t\cdot v)-F(p)-DF_p(t\cdot v)\|}{|t|}\\ &=\lim_{t\to 0}\|\frac{F(p+tv)-F(p)}{t}-DF_p(v)\|\\ \iff\ & DF_p(v)=\lim_{t\to 0}\frac{F(p+t\cdot v)-F(p)}{t}\ (\forall v\in\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

Observación. Si $G,H:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ son diferenciables podemos considerar su producto escalar como $F(x)=\langle G(x),H(x)\rangle$ que es diferenciable.
Además:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{F(p+tx)-F(p)}{t}=\\ &\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\langle G(p+tx),H(p+tx)\rangle-\langle G(p),H(p)\rangle)\\ &\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\langle G(p+tx),H(p+tx)\rangle-\langle G(p),H(p+tx)\rangle+\langle G(p),H(p+tx)\rangle-\langle G(p),H(p)\rangle)\\ &\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\langle G(p+tx)-G(p),H(p+tx)\rangle+\langle G(p),H(p+tx)-H(p)\rangle)\\ &\langle DG_p(x),H(p)\rangle+\langle G(p),DH_p\rangle\Rightarrow\\ &D\langle G,H\rangle_p=\langle DG_p(x),H)(p)\rangle+\langle G(p),DH_p(x)\rangle\end{aligned}$$

Lema 14.8. Si $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es transformación lineal, $\exists c>0:\|T(x)\|<c\|x\|$ $(\forall x\in\mathbb{R}^n)$. Al mínimo de estas constantes lo llamamos $\|T\|_\infty$. Vale que $\|T\|_\infty=max_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\|$ en particular $\|T\|\leq\|T\|_\infty\|x\|$.

Demostración. T es lineal, luego T es continua. Tomar norma también es continua así que $x \mapsto \|Tx\|$ es continua. Como $\overline{B_1(0)}$ es compacto la función alcanza máximo. Digamos $\|T\|_\infty = max_{x \in B_r(0)} \|Tx\| \Rightarrow x \neq 0$
$\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|T\|_\infty \Rightarrow \|Tx\| \leq \|x\| \|T\|_\infty$ por como la elegimos es la mejor cota. $\square$

Lema 14.9. La función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}$ es una norma.

1. $\|T\|_\infty > 0$, $\|T\|_\infty = 0 \iff T = 0$.
2. $|\lambda| \|T\|_\infty = \|\lambda T\|_\infty$.
3. $\|T + S\| \leq \|T\|_\infty + \|S\|_\infty$.

Demostración.

1. $\|T\|_\infty > 0$ es trivial. Si $T = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow \|Tx\|_\infty = 0$ y si $\|T\|_\infty \neq 0 \Rightarrow Tx = 0 (\forall x \in \overline{B_1(0)}$ pues por linealidad si

$$x \neq 0 \Rightarrow Tx = T(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\| T(\frac{x}{x}) = 0 \therefore T = 0$$

2. Trivial
3. $S + T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dado $x \in \overline{B_1(0)}$

$$\begin{aligned} \|(S+T)(x)\| &= \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|x\| \cdot (\|Tx\|_\infty + \|Sx\|_\infty) \\ &\leq \|Tx\|_\infty + \|Sx\|_\infty \therefore \|(T+S)(x)\|_\infty \leq \|T\|_\infty + \|S\|_\infty \end{aligned}$$

$\square$

Lema 14.10. Si $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable con $p \in A^\circ$, $\exists R > 0$ y $c_r > 0 : x \in B_r(p) \Rightarrow \|F(x) - F(p)\| \leq c_r \|x - p\|$ Esto implica la continuidad uniforme en $B_r(p)$.

Demostración. Como F es diferenciable en p, $\exists B_r(p)$ donde el cociente de diferenciabilidad es menor que 1.

$$\begin{aligned} \frac{\|F(x) - F(p)\|}{\|x - p\|} &\leq \frac{\|F(x) - F(p) - DF_p(x-p)\|}{\|x - p\|} + \frac{\|DF_p(x-p)\|}{\|x-p\|} \\ &< 1 + \frac{\|DF_p(x-p)\|_\infty \|x-p\|}{\|x-p\|} = 1 + \|DF_p(x-p)\|_\infty \end{aligned}$$

Si $x \in B_r(p) \Rightarrow$. Luego $c_r = 1 + \|DF_p(x-p)\|_\infty \Rightarrow \|F(X) - F(p)\| \leq c_r \|x - p\|$ $(\forall x \in B_r(p))$. $\square$

Clase XV - 25/09

TODO

15.1 Preliminares función inversa

15.2 Teorema de la función inversa

Clase XVI - 29/09

TODO

16.1 Teorema de la función implícita

Clase XVII - 01/10

17.1 Integral de Riemann

Consideremos $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada. Digamos $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Una partición de $[a, b]$ es un subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ y $b \in P$. Escribimos $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ y por convención $t_0 = a$, $t_n = b$ y $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Notamos m_i, M_i al ínfimo y al supremo de f en $[t_{i-1}, t_i]$ $i \in \{1, \cdots, n\}$ de la partición.

$$s(f, P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1})$$
$$S(f, P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1})$$

Vale que $m(b - a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b - a)$

Definición 17.1. Si P, G son particiones de un mismo intervalo y $P \subset G$ decimos que G es más fina que P.

Lema 17.2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea P, G particiones del intervalo, si $P \subset G \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, G)$ y $S(f, G) \leq S(f, P)$.

Demostración. Si $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ y $G = \{t_0, t_1, \cdots, t_{i-1}, r, t_i, \cdots, t_n\}$. Si $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]}(f)$, $m' = \inf_{[t_{i-1}, r]}(f)$, $m'' = \inf_{[r, t_i]}(f) \Rightarrow m_i \leq m'$, $m_i \leq m''$.

$$\begin{aligned} s(f, G) - s(f, P) &= m'(r - t_{i-1}) + m''(t_i - r) - m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= (m' - m)(r - t_{i-1}) + (m'' - m_i)(t_i - r) \geq 0 \end{aligned}$$

Análogamente para sumas superiores. Iterando en S_i, $P \subset G$ se ve que $s(f, P) \leq s(f, G)$. $\square$

Corolario 17.3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada si P, G son particiones de $[a, b]$ vale que $s(f, P) \leq S(f, G)$

Demostración. Como $P \cup G$ refina a P y a $Q \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, P \cup G) \leq S(f, P \cup G) \leq S(f, G)$ $\square$

Definición 17.4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, definimos su integral inferior como

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_P s(f, P)$$

Donde el supremo es sobre todas las particiones P de $[a, b]$. Es decir $\forall$ partición P de $[a, b]$,

$s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Además dado $\varepsilon > 0$ $\exists P : \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq s(f,P) + \varepsilon$.

Definición 17.5. Análogamente se define la integral superior de f como

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = \inf_P S(f,P)$$

Lema 17.6. Sea $a < c < b$. Si consideramos solo las particiones de $[a,b]$ que contengan a c, los valores de la integral superior e inferior no cambian.

Demostración. Dada una partición de $[a,b]$. Si le agrego c tengo otra partición P' : $s(f,P) \leq s(f,P') \Rightarrow$
Por un lado el supremo sobre todas las particiones es mayor o igual que el supremo de las particiones que contienen a c, pero dada cualquier particiones que no contiene a c, hay una que la refina y si lo contienen (agregando a c) y la suma inferior es mayor o igual entonces el supremo es igual sobre los dos conjuntos. □

Teorema 17.7. Sea $a < c < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$
$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_a^{\overline{c}} f(x)\,dx + \int_c^{\overline{b}} f(x)\,dx$$

Demostración. Si A, B son los conjuntos de sumas inferiores de $f|_{[a,c)}$ y $f|_{[c,b]}$ $\Rightarrow$ $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ es el conjunto de las sumas inferiores de f respecto a particiones de $[a,b]$ que contienen a $c \Rightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

Análogamente para las sumas superiores. □

Proposición 17.8. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotadas $\Rightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx$$

$$\leq \int_a^{\overline{b}} f(x) + g(x)\,dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx + \int_a^{\overline{b}} g(x)\,dx$$

Demostración. Sea $m_i(f)$, $m_i(g)$, $m_i(f+g)$ los ínfimos de f, g, $f+g$ respectivamente en $[t_{i-1}, t_i]$ de una partición $P \Rightarrow m_i(f+g) \geq m_i(f) + m_i(g)$.
Por un lado tenemos que

$$\underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\, dx \geq s(f, P) + s(g, P)$$

y por otro lado dadas dos particiones P, G

$$s(f, P) + s(g, G) \leq s(f, P \cup G) + s(g, P \cup G) \leq \underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx + \underline{\int_a^b} g(x)\, dx = \sup_{P,G}(s(f, P) + s(g, G)) \leq \underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\, dx$$

$\square$

Proposición 17.9. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotadas $\Rightarrow$ Si $c > 0$

$$\underline{\int_a^b} cf(x)\, dx = c \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

y

$$\overline{\int_a^b} cf(x)\, dx = c \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Si $c < 0$

$$\underline{\int_a^b} cf(x)\, dx = c \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

y

$$\overline{\int_a^b} cf(x)\, dx = c \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Demostración. $m_i(cf) = cm(f)$ y $M_i(cf) = cM_i(f)$ si $c > 0$ y $m_i(cf) = cM_i(f)$ y $M_i(cf) = cm_i(f)$ si $c < 0$ por propiedades de supremo e ínfimo. $\square$

Proposición 17.10. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotadas $\Rightarrow$ si $f(x) \leq g(x)$ $(\forall x \in [a, b]) \Rightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)\, dx$$

y

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

Demostración. Si $f(x) \leq g(x)$ $(\forall x \in [a,b]) \Rightarrow m_i(f) \leq m_i(g)$ y $M_i(f) \leq M_i(g)$ $\forall$ partición P de $[a,b] \Rightarrow s(f,P) \leq s(g,P)$ y $S(f,P) \leq s(g,P) \Rightarrow$ vale para la integral. □

Definición 17.11 (Integrable)**.** Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice integrable si

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Ejemplo. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ No es integrable.

Demostración. Para cualquier partición de $[a,b]$, $m_i = 0$, $M_i = 1$ en todos los intervalos de la partición $\Rightarrow s(f,P) = 0$, $S(f,P) = b - a$ $(\forall P)$. $\square$

Observación. Si dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada llamamos σ al conjunto de sumas inferiores y $\sum$ al de las superiores, decir que f es integrable signifca que $\sup \sigma = \inf \sum$. En particular esto pasa $\iff$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $\quad \exists s \in \sigma$, $S \in \sum : S - s < \varepsilon$.

Demostración. Ejercicio $\square$

Definición 17.12 (Oscilación)**.** Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, definimos su oscilación en $X \subset [a,b]$ como $\omega(f(X)) = \sup(f(X)) - \inf(f(X))$.

Observación. $\omega(f(X)) = \sup(\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\})$.

Demostración. Ejercicio $\square$

Teorema 17.13. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes

1. f es integrable.
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists P, G)$ particiones de $[a, b]$ tales que $S(f, G) - s(f, P) < \varepsilon$.
3. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists P)$ partición de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.
4. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\})$ partición de $[a, b] : \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$

Demostración. kSea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada,

i (1) $\iff$ (2) Es el lema anterior.

ii (3 $\iff$ (4)) Vale porque $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) = S(f, P) - s(f, P)$.

iii (3) $\Rightarrow$ (2) Trivial.

iv (2) $\Rightarrow$ (3) Si $S(f, G) - s(f, P) < \varepsilon$ tomando $P_0 = P \cup G$.

$$\begin{aligned} s(f, P) \leq s(f, P_0) \leq S(f, P_0) \leq S(f, Q) \\ \Rightarrow S(f, P_0) - s(f, P_0) < \varepsilon \end{aligned}$$

□

17.2 Continuidad e integración

Teorema 17.14. Sean f, g integrables $\Rightarrow$

1. Para $a < c < b$, $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son integrables y $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ y vale la recíproca.
2. $(\forall c \in \mathbb{R})$ cf es integrable y $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.
3. $f+g$ es integrable y la integral de la suma es la suma de las integrales.
4. Si $f(x) \leq g(x)$ $(\forall x \in [a,b]) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
5. $|f(x)|$ es integrable y además $|\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$.
6. El producto es integrable.

Demostración. 1, 2, 3, 4 equivalente a las demostraciones de suma superior e inferior. 5) $||f(x)|-|f(y)|| \leq |f(x)-f(y)|$. Para cualquier $x \in [a,b]$ vale que $\omega(|f|,X) \leq \omega(f,X)$. En particular $\forall P$ partición de $[a,b]$ $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$ $\therefore$ $|f|$ es integrable y como además $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow$$
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

6) Dada una partición P de $[a,b]$ sean $\omega_i(f\cdot g)$, $\omega_i(f)$, $\omega_i(g)$ las oscilaciones de las funciones en $[t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned}
|fg(x) - fg(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y) + f(x)g(y) - f(x)g(y)| \\
&\leq |f(x)|\cdot|g(x)-g(y)| + |g(y)|\cdot|f(x)-f(y)| \\
&\leq k\omega(g) + k\omega(f) = k(\omega(g)+\omega(f))
\end{aligned}$$

Luego $f\cdot g$ es integrable. □

Teorema 17.15. Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua es integrable.

Demostración. Como $[a, b]$ es compacto, f es acotada y uniformemente continua. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$.
Sea $n \in \mathbb{N} : \dfrac{b - a}{n} < \delta$ y consideremos la partición de $[a, b]$ dada por $t_i = a + i \cdot \dfrac{b - a}{n}$ con $i \in \{0, \cdots, n\} \Rightarrow$ si $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ vale que $|f(x) - f(y)| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_{i-1} - t_i) < \varepsilon \therefore f$ es integrable. □

Teorema 17.16. Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Si para cada $c \in [a, b)$ $f|_{[a,c]}$ es integrable $\Rightarrow f$ es integrable.

Demostración. Sea $|f(x)| \leq k$ $(\forall x \in [a, b])$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $c \in [a, b)$ tal que $k \cdot (b - c) < \frac{\varepsilon}{4}$. Como $f|_{[a,c]}$ es integrable $\exists \{t_0, \cdots, t_n\}$ partición de $[a, c]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si agrego $t_{n+1} = b$ tengo una partición de $[a, b]$ y $\omega_{n+1} \leq 2 \cdot k$. Luego $\omega_{n+1} \cdot (t_{n+1} - t_n) = \omega_{n+1} \cdot (b - c) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. □

Corolario 17.17. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si para $a < b < c < d$ cualesquiera $f|_{[b,c]}$ es integrable $\Rightarrow f$ es integrable.

Corolario 17.18. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y tiene finitas discontinuidades entonces es integrable.

Demostración. Sea $t_0, \cdots, t_n$ los puntos donde f es discontinua $\Rightarrow f$ es integrable en $[t_{i-1}, t_i]$ por ser continua en $[c, d]$ con $t_{i-1} < c < d < t_i$. □

Ejemplo. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } (p, q) = 1. \end{cases}$$

f es discontinua en un conjunto infinito (los racionales de $[a, b]$), pero es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, $F = \{x \in [a, b] : f(x) \geq \dfrac{\varepsilon}{b-a}\}$ es finito. Tomemos una partición de $[a, b]$ tal que la suma de los intervalos de P que contienen a un punto de F sea menor que $\varepsilon \Rightarrow F \cap [t_{i-1}, t_i] = \varnothing \Rightarrow 0 \leq f(x) < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow M_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
$S(f, P) = \sum M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum M_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon + \dfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) < 2 \cdot \varepsilon$.
Donde la primer suma es sobre los intervalos que contienen algún punto de F y la segunda sobre los que no. Luego $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$ y $f(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$. Por lo tanto $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. □

Clase XVIII - 05/10

18.1 Teorema fundamental del cálculo

Teorema 18.1 (Teorema Fundamental del Cálculo). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Si f es continua en $c \in [a, b] \Rightarrow F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en c y $f(x) = F'(c)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= |\frac{1}{h}| \cdot \left|\int_c^{c+h} f(t)\,dt - h \cdot f(c)\right| \\ &\leq \frac{1}{h} \cdot \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt*\end{aligned}$$

Como f es continua es continua en $c \Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$ tenemos que $* \leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon \Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$$

Para $h < 0$ es análogo, luego $\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c) \Rightarrow F'(c) = f(c)$. □

Corolario 18.2 (Regla de Barrow). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y tiene una primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Demostración. Para cualquier partición de $[a, b]$, $P = \{t_0, \cdots, t_n\} \Rightarrow F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(t_i) - F(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n F(\alpha_i)(t_i - t_{i-1})$ $(\alpha_i \in (t_i, t_{i-1}))(\forall i)$ Por teorema del valor medio.
Si m_i' y M_i' son el ínfimo y supremo de F' en $[t_i, t_{i-1}] \Rightarrow m_i' \leq \alpha_i \leq M_i' \Rightarrow$

$$s(F', P) \leq F(b) - F(a) \leq S(F', P) \Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

□

Definición 18.3. Sea $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, llamamos norma de una partición $(|P|)$ a la mayor longitud de $|t_i - t_{i-1}|$ de los intervalos de P.

Teorema 18.4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada $\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$: si $|P| < \delta \Rightarrow S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$

Demostración. Supongamos que f es positiva en $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists P_0 = \{t_0, \cdots, t_n\}$ partición de $[a, b]$ tal que $S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$.
Sea M el supremo de f en $[a, b]$ y $\delta : 0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2nM}$. Si P es una partición de norma menor que δ. Llamo $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ a los intervalos de P contenidos en algún intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P_0 y $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ a los demás. Cada uno de estos intervalos contienen al menos un punto t_i en su interior, así que son como mucho n. Entonces $S(f, P) = \sum_\alpha M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_\beta M_\beta(r_\beta - r_{\beta-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) + M\delta n$. Si $[r_{\tilde{\alpha}}, r_{\tilde{\alpha}-1}] \subset [t_{i-1}, t_i]$ con i fijo

$$\sum_{\tilde{\alpha}} M_{\tilde{\alpha}}(r_{\tilde{\alpha}} - r_{\tilde{\alpha}-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}) \Rightarrow$$

$$S(f, P) < S(f, P_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

Para el caso general (sin pedir f positiva, como f es acotada $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)+c \geq 0$ $(\forall x \in [a, b])$, si $g(x) = f(x)+c \Rightarrow S(g, P) = S(f, P)+c(b-a)$ y además $\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + c(b-a)$ y se reduce al caso anterior. $\square$

Corolario 18.5. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} S(f, P)$.
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} s(f, P)$.

Demostración. $-s(f, P) = S(-f, P) \Rightarrow -\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} -f(x)\,dx$. $\square$

Definición 18.6 (Partición punteada)**.** Es una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ en la que elegimos un punto α_i en cada $[t_{i-1}, t_i]$ lo anotamos P^*.

Definición 18.7. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y P^* una partición punteada, definimos la suma de Riemann de f asociada a P^* como $\sum(f, P^*) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)(t_i - t_{i-1})$.

Definición 18.8. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, decimos que $I = \lim_{|P|\to 0} \sum(f, P^*)$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : |\sum(f, P^*) - I| < \varepsilon$ $(\forall P^*) : |P^*| < \delta$.

Teorema 18.9. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada $\Rightarrow \exists I = \lim_{|P|\to 0} \sum(f, P^*) \iff f$ es integrable y en ese caso $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Demostración. Si f es integrable, por el corolario anterior

$$\lim_{|P|\to 0} s(f,P) = \lim_{|P|\to 0} S(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Como

$$s(f,P) \leq \sum(f,P^*) \leq S(f,P) \Rightarrow \lim_{|P|\to 0} \sum(f,P^*) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Recíprocamente supongamos que el límite existe $\Rightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)\exists P = \{t_0, \cdots, t_n\}$: $|\sum(f,P^*) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$ cualquiera sea la forma de puntear la partición P.
Fijemos P y elijamos dos formas de puntearla, para la primera forma elijamos α_i : $f(\alpha_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{4\cdot n\cdot(t_i - t_{i-1})}$. Esto me da P^* tal que $\sum(f,P^*) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4} = s(f,P) + \frac{\varepsilon}{4}$.
Análogamente, elegimos la segunda $\tilde{P} : S(f,P) - \frac{\varepsilon}{4} < \sum(f,\tilde{P}) \Rightarrow$

$$\sum(f,\tilde{P}) - \frac{\varepsilon}{4} < s(f,P) \leq S(f,P) < \sum(f,\tilde{P}) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$\Rightarrow s(f,P)$ y $S(f,P)$ están en $(I - \frac{\varepsilon}{2}, I + \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \therefore f$ es integrable y $\int_a^b f(x)\,dx = I$. $\square$

Ejemplo. Sea $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Sabemos que

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \{1, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \cdots, \frac{2\cdot n}{n}\}$. En cada intervalo $[\frac{n+i-1}{n}, \frac{n+i}{n}]$, $i = 1, \cdots, n$. Elijo $\alpha_i = \frac{n+i}{n}$. Luego

$$f(\alpha_i) = f(\frac{n+i}{n}) = \frac{n}{n+i}, \text{ y } t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum(f, P^*) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n}{n+i} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+i}$$

y

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln(2)$$

18.2 Integral de Riemann en varias dimensiones

- Sean $I_1, \cdots I_n$ intervalos de $\mathbb{R}$ el conjunto $I \subset \mathbb{R}^n$ dado por $I_1 \times \cdots \times I_n = I$. Se llama intervalo n-dimensional.
- Se admite el caso degenerado en que uno o más de los I_k se reduce a un solo punto.
- Si todos los I_k son abiertos o cerrados o acotados, entonces I tiene la misma propiedad en $\mathbb{R}^n$.
- Notamos con $|I|$ a la medida de los intervalos, con la siguiente propiedad $|I| = |I_1| \cdots |I_n|$ con $|I_k|$ la longitud de I_k.
- Si I es compacto de $\mathbb{R}^n$ y P_k es una partición de $I_k \Rightarrow P = P_1 \times \cdots \times P_n$ es una partición de I.
- Una partición P' se dice más fina que P si $P \subset P'$.

Definición 18.10. Sea f acotada en un intervalo compacto. Si P es una partición de I que define n subintervalos $I_1, \cdots, I_n \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha_k \in I_k$, una suma de Riemann de f asociada a P es una suma de la forma $\sum(f, P^*) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)|I_k|$.
Decimos que f es integrable Riemann en I si $\exists A \in R : (\forall \varepsilon > 0)(\exists P_\varepsilon)$ partición de $I : (\forall P)$ más fina que P_ε se tiene que $|\sum(f, P^*) - A| < \varepsilon$. Notamos

$$A = \int_I f(x)\,dx = \int\int \cdots \int_I f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$$

Definición 18.11. Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto, si P es una partición de I que define n subintervalos $I_1, \cdots I_n \subset \mathbb{R}^n$ definimos $m_k = m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$ y $M_k = M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in I_k\}$. Las sumas inferiores y superiores son $s(f,P) = \sum m_k |I_k|$ y $S(f,P) = \sum M_k |I_k|$. La integral superior e inferior de Riemann son

$$\overline{\int_I} f(x)\,dx = \inf(S(f,P))$$

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx = \sup(s(f,P))$$

Mantienen las propiedades de $\mathbb{R}$.

Teorema 18.12. $I \subset \mathbb{R}^n$ compacto, son equivalentes:

1. f es integrable en I.
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists P_\varepsilon)$ de $I : P$ refina a P_ε $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.
3. $\underline{\int_I} f(x)\,dx = \overline{\int_I} f(x)\,dx$.

Demostración. Ejercicio, es equivalente a las demostraciones en $\mathbb{R}$. □

Teorema 18.13. Sea f definida en un compacto $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\underline{\int\int_K} f(x,y)\,dxdy &\leq \underline{\int_a^b}\Big(\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy\Big)dx \\
&\leq \overline{\int_a^b}\,\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dxdy \leq \overline{\int\int_K} f(x,y)\,dxdy
\end{aligned}
$$

Demostración. Si $F(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy$ $(\forall x \in [a, b]) \Rightarrow |F(x)| \leq M(d-c)$, $M = \sup_Q f$. Llamo $\bar{I} = \overline{\int_a^b} F(x)\,dx = \overline{\int_a^b}(\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy)dx$ y $\underline{I} = \underline{\int_a^b} F(x)\,dx = \underline{\int_a^b}(\underline{\int_c^d} f(x,y)\,dy)dx$ Si $P_1 = \{x_0, \cdots, x_n\}$ partición de $[a, b]$, $P_2 = \{y_0, \cdots, y_m\}$ partición de $[c, d]$. $P_1 \times P_2$ es una partición de Q con $n \cdot m$ intervalos Q_{ij}. Luego

$$
\bar{I}_{ij} = \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\Big(\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\Big)dx \text{ y } \underline{I}_{ij} = \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\Big(\underline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\Big)dx
$$

Como $\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^m \overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\overline{\int_a^b}\Big(\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy\Big)dx &= \overline{\int_a^b}\Big(\sum_{j=1}^m \overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\Big)dx \\
&\leq \sum_{j=1}^m \overline{\int_a^b}\Big(\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\Big)dx = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\Big(\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\Big)dx \\
&\Rightarrow \bar{I} \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \overline{I_{ij}} \text{ y}, \\
&\underline{I} \geq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \underline{I_{ij}}
\end{aligned}
$$

Si escribimos $m_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in Q\}$ y $M_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in Q\} \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
m_{ij}(y_j - y_{j-1}) &\leq \overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \\
m_{ij}|Q_{ij}| &\leq \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\Big(\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\Big)dx \leq M_{ij}|Q_{ij}| \\
&\Rightarrow s(f, P) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(f, P)
\end{aligned}
$$

Como esto vale para cualquier partición P de $Q \Rightarrow$

$$
\underline{\int\int_Q} f \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \overline{\int\int_Q} f
$$

$\square$

Observación. También tenemos que

1. Vale reemplazando $\overline{\int_c^d}$ por $\underline{\int_c^d}$.
2. $\int \underline{\int_K} f(x,y)\,dxdy \le \underline{\int_c^d}(\overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx)dy \le \overline{\int_c^d}\,\overline{\int_a^b} f(x,y)\,dxdy \le \int \overline{\int_K} f(x,y)\,dxdy$
3. Valen reemplazando $\overline{\int_a^b}$ por $\underline{\int_a^b}$.
4. Si $\exists \int\int_K f(x,y)\,dxdy \Rightarrow$

$$\int\int_K f(x,y)\,dxdy = \int_a^b (\underline{\int_c^d} f(x,y)\,dy)dx$$
$$= \int_c^d \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d (\overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx)dy$$

La demostración de 1) Es análoga $F(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)\,dy$, 2) y 3) Análogo cambiando x por y y 4) es consecuencia de las anteriores.

18.3 Teorema de Fubini

Corolario 18.14 (Fubini). Si f es continua en Q

$$\int\int_Q f = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\,dx)dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\,dx)dy$$

Definición 18.15. Sea S un subconjunto de un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$. Para cada partición P de I definimos $\underline{J}(S,P)$ como la suma de las medidas de los subintervalos definidos por la partición que solo contienen los puntos interiores de S y la medida $\overline{J}(S,P)$ como la suma de las medidas de los intervalos que contienen puntos de $\overline{S}$.

Definición 18.16. $\underline{c}(S) = \sup_P \underline{J}(S,P)$ contenido de Jordan del interior de S. $\overline{c}(S) = \inf_P \overline{J}(S,P)$ contenido de Jordan superior.

Definición 18.17 (Contenido de Jordan)**.** Si $\overline{c}(S) = \underline{c}(S)$ notamos $c(S)$ y se llama contenido de Jordan. Decimos que S es medible Jordan.

Observación.

1. Se puede ver que $\overline{c}(S)$ y $\underline{c}(S)$ solo dependen de S y no de I.
2. $0 \leq \underline{c}(S) \leq \overline{c}(S)$.
3. Si S es tal que $c(S) = 0 \Rightarrow \underline{c}(S) = \overline{c}(S) = 0$. Así que S se puede cubrir con finitos intervalos cuyas medidas suman menos que ε, $\forall \varepsilon > 0$.

Clase XIX - 08/10

19.1 Ejemplo de medida de Jordan

Ejemplo. $X = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ con $a < b$ no tiene contenido nulo.

Demostración. Si fuese $c(X) = 0$, Dado $0 < \varepsilon < b - a$ $\exists$ partición P de $[a, b]$ tal que la suma de las longitudes de los intervalos de P que contienen puntos de X sería $< \varepsilon$. Como la suma de todas las longitudes de todos los intervalos de P tiene que ser $b - a$ alguno tendría puntos racionales, absurdo! $\square$

Lema 19.1. $X \subset [a, b]$ Si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ abiertos $I_1, \cdots, I_k$ y un subconjunto finito $F \subset X$: $X - F = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ y $|I_1| + \cdots + |I_k| \mapsto \varepsilon$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists F \subset X$ finito en intervalos abiertos $I_1, \cdots, I_k$ tales que $\sum_{i=1}^{k} |I_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $X - F \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Por otro lado, podemos encontrar intervalos abiertos $I_{k+1}, \cdots, I_n$: $F \subset I_{k+1} \cup \cdots \cup I_n$ y $\sum_{j=k+1}^{n} |I_j| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_n$ y $\sum_{i=1}^{n} |I_i| < \varepsilon \therefore c(X) = 0$. $\square$

Ejemplo. El conjunto de Cantor tiene contenido nulo.

Demostración. Por el lema anterior vale que $C \subset F_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y la suma de las longitudes de los intervalos de F_n es $1 - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n} (\frac{2}{3})^i = (\frac{2}{3})^{n+1} < \varepsilon$ $\forall n > n_0 \Rightarrow c(C) = 0$. $\square$

Teorema 19.2. $S \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{c}(\partial S) = \overline{c}(S) - \underline{c}(S)$. En particular S es medible Jordan $\iff$ ∂S tiene contenido de Jordan nulo.

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto que contiene a $\overline{S}$ $\Rightarrow$ Para toda partición P de I, $J(\partial S, P) = \overline{J}(S,P) - \underline{J}(S,P) \Rightarrow \overline{J}(\partial S, P) \geq \overline{c}(S) - \underline{c}(S) \Rightarrow \overline{c}(\partial S) \geq \overline{c}(S) - \underline{c}(S)$. Para la desigualdad opuesta, dado $\varepsilon > 0$ sea P_1 tal que $\overline{J}(S, P_1) < \overline{c}(S) + \frac{\varepsilon}{2}$ y sea P_2 tal que $\underline{J}(S, P_2) > \underline{c}(S) - \frac{\varepsilon}{2}$. Si $P = P_1 \cup P_2$, como refinar aumenta las sumas interiores y achica las exteriores

$$\overline{c}(\partial S) \leq \overline{J}(\partial S, P) = \overline{J}(S,P) - \underline{J}(S,P) \leq \overline{J}(S,P_1) - \underline{J}(S,P_2) \leq \overline{c}(S) - \underline{(c)}(S) + \varepsilon$$

Como vale $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \overline{c}(\partial S) \leq \overline{c}(S) - \underline{c}(S)$. □

y juntando las dos desigualdades se tiene que $\overline{\partial S} = \overline{c}(S) - \underline{c}(S)$.

Definición 19.3 (Medida de Lebesgue). Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue 0 si $\forall \varepsilon > 0$ S se puede cubrir por a lo sumo numerables intervalos cuyas medidas suman menos que ε. Notamos $|S| = 0$.

Ejemplo. Si $c(X) = 0 \Rightarrow |X| = 0$, por ejemplo el conjunto de Cantor.

Ejemplo. $|\mathbb{Q}| = 0$, más aún, toda unión numerable de conjuntos de medida nula, tiene medida nula.

Demostración. Numero a los racionales, digamos $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots\}$ y dado $\varepsilon > 0$ tomo para uno el intervalo $I_k = (r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \bigcup_{k+1}^{+\infty} I_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Si ahora $F = \{F_1, F_2, \cdots\}$ son conjuntos de medida nula, dado $\varepsilon > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ puedo elegir un cubrimiento por a lo sumo numerables intervalos abiertos tales que la suma de sus medidas sea menor que $\frac{\varepsilon}{2^k}$ $\Rightarrow$ la unión de todos los intervalos es numerable y la suma de todas las medidas es menor que ε. □

TODO: Terminar esta clase

19.2 Integrabilidad y medida de Jordan

19.3 Integración en conjuntos

Clase XX - 12/11

20.1 Sucesiones de funciones

Definición 20.1 (Convergencia puntual). $X \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f_n : X \to \mathbb{R} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $f : X \to \mathbb{R}$ si $(\forall x \in X)$:

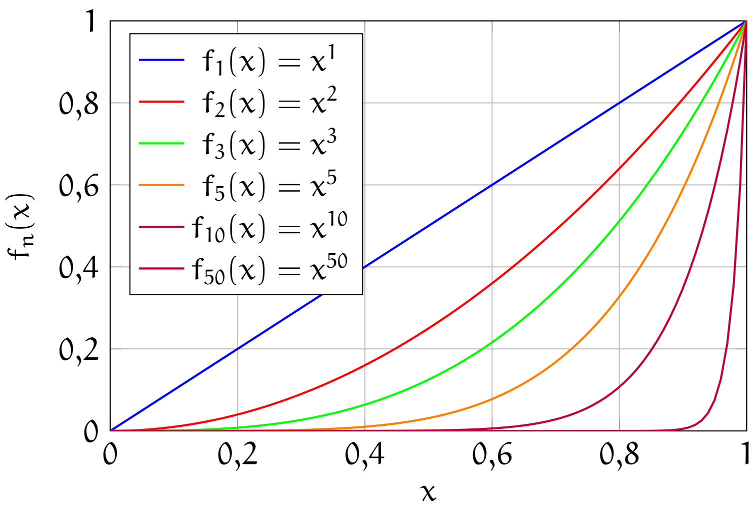
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Ejemplo. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En efecto, si $x \in [0,1)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Por otro lado si $x = 1$, $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

Funciones $f_n(x) = x^n$ en $[0,1]$



Ejemplo. $f_n : [0, 2\cdot\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos(nx)$ no converge puntualmente pues si $x = \pi$, $f_n(\pi) = (-1)^n$ y $\nexists \lim_{n\to+\infty} f_n(\pi)$.

Notemos que si $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f : X \to \mathbb{R} \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ (\forall n > n_0)$, pero n_0 depende de ε y de x. Si ε está fijo puede ser que ningún $n_0 \in \mathbb{N}$ sirva $\forall x \in X$.

Ejemplo. Tomemos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$. Si:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\, \exists x \in [0,\, 1) : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$$
$$\iff |x^n - 0| \geq \frac{1}{2}$$

En efecto pues dado $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 1} x^n = 1$.

Definición 20.2 (Convergencia uniforme)**.** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ si $(\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n > n_0)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Notamos $f_n \rightrightarrows f$.

De la definición se desprende que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y solo si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Ejemplo. Por el ejemplo anterior $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ no converge uniformemente. Consideremos $f_n : [0, 1-\delta]$ con $\delta \in (0,1) \Rightarrow$ la convergencia a $f(x) = 0$ es uniforme. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ quiero ver que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x^n - 0| = x^n < \varepsilon \quad \forall n > n_0\, \forall x \in [0, 1-\delta].$$

Como x^n es creciente entonces

$$\begin{aligned}
&0 \leq x^n \leq (1-\delta)^n \\
&\text{Como } \lim_{n\to+\infty} (1-\delta)^n = 0 \\
&\Rightarrow \text{Dado } \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : |(1-\delta)^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \\
&\Rightarrow |x^n - 0| \leq |(1-\delta)^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \quad \forall x \in [0,\, 1-\delta]
\end{aligned}$$

$\therefore$ la convergencia es uniforme.

Definición 20.3 (Sucesión de Cauchy)**.** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ es de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathrm{N} : \forall n, m > n_0, \forall x \in X$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Teorema 20.4. Una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente convergente $\iff$ es de Cauchy.

Demostración. Para la ida tomemos $\varepsilon > 0$, luego $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall n > n_0)(\forall x \in X)$ por hipótesis. Luego si $n, m > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(\forall x \in X)$.
Para la vuelta tenemos que $\forall x \in X$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que converge a un límite que llamo $f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $(\forall n, m > n_0)$. $\forall x \in X$ fijado el x y el n tomamos $m \to +\infty \therefore |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(\forall x \in X)(\forall n > n_0) \therefore$ la convergencia es uniforme. □

$f = \sum f_n$ es un caso particular del límite. $f : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$. $f = \lim_{n\to+\infty} S_n$, S_n la suma parcial, luego

$$\sum f_n \rightrightarrows f \iff (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |S_{n+1}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall n > n_0)\,(\forall x \in X)$$

Definición 20.5 (Convergencia normal)**.** Decimos que $\sum f_n : X \to \mathbb{R}$ converge normalmente si

$$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum a_n < +\infty \text{ y}$$
$$|f_n(x)| < a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X).$$

Ejemplo. $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ es normalmente convergente pues $|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Teorema 20.6 (Test de Weierstrass)**.** Si $\sum f_n$ es normalmente convergente $\Rightarrow \sum |f_n|$ y $\sum f_n$ son uniformemente convergentes.

Demostración. X el dominio de todas las $f_i \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in X) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| &= |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \\ &\leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \\ &\leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon \end{aligned}$$

Por la hipótesis de la convergencia normal $\therefore \sum f_n$ y $\sum |f_n|$ convergen uniformemente.

□

Notemos que la convergencia normal implica la convergencia uniforme que a su vez implica la convergencia puntual, pero el camino inverso no vale.

Ejemplo. Sea $f_n : [1, +\infty)$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in [n, n+1], \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Si llamamos $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ a $f(x) = \frac{1}{x}$. Afirmo que $\sum_{n\geq 1} f_n \rightrightarrows f$. En efecto, pues

$$\begin{aligned} &0 \leq f(x) - S_n < \frac{1}{n} \quad (\forall x \in [1, +\infty)) \text{ pues si} \\ &x \leq n+1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{ y } S_n = \frac{1}{x} \text{ i.e } x \in [1, n+1) \Rightarrow \text{ la suma parcial no se anula,} \\ &x > n+1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{ y } S_n = 0 \text{ i.e no aparece en la suma.} \end{aligned}$$

Pero no converge normalmente en $[1, +\infty)$, pues si fuese $f(x) \leq a_n$ $(\forall x \in [1, +\infty))$ tomando $x = n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq a_n \Rightarrow \sum a_n = +\infty$ y no puede ser normal la serie.

Observación. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nos preguntamos si el límite en x y en n son intercambiables. La respuesta en general es no.

Ejemplo. $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } 0 \le x < 1. \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} x^n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Teorema 20.7. Sea a un punto de acumulación de X. Si la sucesión $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ y $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n) \Rightarrow$

1. $\exists \lim_{n\to\infty} L_n$.
2. $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

Es decir que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

Siempre que los límites de adentro existan y el de la sucesión de funciones sea uniforme.

Demostración. Para ver que $\exists \lim_{n\to\infty} L_n = L$. Probemos que L_n es de Cauchy.

1. Dado $\varepsilon > 0$, como $f_n \rightrightarrows f$, entonces

$$\begin{aligned} &\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall n > n_0)(\forall x \in X) \\ &\text{Si } m, n > n_0, \exists x \in X : |L_m - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y } |L_n - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &\Rightarrow |L_n - L_m| \le |L_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - L_m| \\ &\qquad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

2. Veamos que si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n$ verifica $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Dado $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\exists n_0 \in \mathbb{N} : |L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n > n_0 \quad \forall x \in X \\ &\text{Si } n > n_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \,:\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pues } \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n \\ &\Rightarrow \text{ Si } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Corolario 20.8. Sea $a \in X$ punto de acumulación. Si

1. $\sum f_n \rightrightarrows f$ en X
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$

$\Rightarrow \sum L_n < +\infty$ y $\sum L_n = \lim_{x \to a} f(x)$. Es decir que

$$\lim_{x \to a} \left(\sum f_n(x) \right) = \sum \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$$

Siempre que $\sum f_n$ sea uniformemente convergente.

Notemos que el teorema también vale si $a = +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$

Siempre que los límites de adentro existan y la convergencia de la sucesión de funciones sea uniforme. La demostración queda como ejercicio.

Teorema 20.9. Si $f_n \rightrightarrows f$ y todas las f_n son continuas en $a \in X \Rightarrow f$ es continua en a.

Demostración. Si a es punto aislado es inmediato. Si $a \in X' \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a) \end{aligned}$$

□

Si el límite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es continuo y las funciones de la sucesión sí, el límite no puede ser uniforme. Por otro lado que el límite sea continuo tampoco alcanza para que la convergencia sea uniforme.

Definición 20.10 (Convergencia monótona)**.** Decimos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge monótonamente a f, si $(\forall x \in X)$ la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y $f_n(x) \to f(x)$.

Teorema 20.11. Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Si una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monótonamente a una función continua $f : X \to \mathbb{R} \Rightarrow$ la convergencia es uniforme.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, definamos

$$\begin{aligned} K_n &= \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ &= |f_n(x) - f(x)|^{-1}([\varepsilon, +\infty)) \end{aligned}$$

Como f_n, f son continuas, K_n es cerrado de $X \Rightarrow K_n$ es compacto $(\forall n \in \mathbb{N})$. Afirmo que como (f_n) es monótona, $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$. En efecto, si

1. $f_1 < f_2 < \cdots < f_n < \cdots < f \Rightarrow -f_1 > -f_2 \Rightarrow f - f_1 > |f - f_2| \Rightarrow K_1 \supset K_2 \cdots$.
2. $f_1 > f_2 > \cdots > f_n > \cdots < f \Rightarrow f_1 - f > |f - f_2| \Rightarrow K_1 \supset K_2 \cdots$.

Pero además debe ser $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \varnothing$ porque si no $|f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ absurdo $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : K_{n_0} = \varnothing \Rightarrow K_n = \varnothing$ $(\forall n > n_0) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $(\forall n > n_0)(\forall x \in X)$. □

Corolario 20.12. Una serie convergente de funciones no negativas, continuas, definidas en un compacto es uniformemente convergente $\iff \sum f_n(x)$ es continua en un compacto.

Demostración. $S_n = f_1 + \cdots + f_n$ es una sucesión monótona pues son no negativas. □

20.2 Integración de sucesiones de funciones

Teorema 20.13. Si $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables que convergen uniformemente a $f : [a, b] \to \mathbb{R} \Rightarrow$ es integrable y vale que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Demostración. Sean D_n y D los conjuntos de discontinuidad de f_n y f. Si $x \notin D_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow x \notin D$, pues el límite uniforme es continuo en los puntos de discontinuidad. Luego $D \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ Como $|D_n| = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, pues son integrables, tenemos que $|D| = 0 \Rightarrow f$ es integrable. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $(\forall x \in [a, b])(\forall n > n_0)$. Luego $(\forall n > n_0)$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Es decir que $\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$. □

Corolario 20.14. Si $\sum f_n \rightrightarrows f$ y las f_n son integrables $\Rightarrow$ la suma es integrable y $\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$ en otras palabras, la serie se puede integrar término a término.

Observación. Si $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables y convergen puntualmente a f en $[a, b]$

puede pasar que f no sea integrable por ejemplo si $\mathbb{Q} \cap [a, b] = \{r_1, \cdots\}$ y

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, \cdots, r_n\}, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Luego $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \Rightarrow f_n \to f$ en $[a, b]$, cada f_n es integrable, pero f no lo es.

Observación. $f_n \to f$ en $[a, b]$, f_n y f son integrables, pero $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$. Por ejemplo si $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^{n+1} & \text{si } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$ Luego si $f : [0, 1] \to \{0\}$, $f(x) = 0 \Rightarrow f_n \to f$, pero $\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx$.

Clase XXI - 15/11

21.1 Diferenciación de sucesiones de funciones

Teorema 21.1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones derivables en $[a,b]$. Si $\exists c \in [a,b]$: $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y si las derivadas f'_n convergen uniformemente en $[a,b]$, digamos $f'_n \rightrightarrows g_n \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$ y $f' = g$. Es decir que $(\text{lím}_{n\to+\infty} f_n)' = (\text{lím}_{n\to+\infty} f'_n)$ siempre que las derivadas converjan uniformemente.

Demostración. Veamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Vamos a usar Teorema de Valor Medio aplicado en $f_m - f_n$.

$$(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(c) - f_n(c)) = (x-c)(f'_m(d) - f'_n(d)) \; (\forall x \in [a,b])(d \in (x,c))$$

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_m(c) + (x-c)(f'_m(d) - f'_n(d)) \Rightarrow$$

Como f'_n, f'_m convergen uniformemente y $f_n(c)$, $f_m(c)$ convergen $\therefore$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Entonces f_n converge uniformemente, digamos $f_n \rightrightarrows f$. Reescribo la igualdad anterior con x_0 en vez de c.

$$\frac{f_m(x_0) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))}{x - x_0} = f'_m(d) - f'_n \;\; d \in (x, x_0)$$

$$\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} = f'_m(d) - f'_n(d)$$

Sea $q_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ y $q(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ con $x \neq x_0$. Por la igualdad anterior $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\therefore q_n \rightrightarrows q$. Así que

$$\text{lím}_{x\to x_0} (\text{lím}_{n\to+\infty} q_n(x)) = \text{lím}_{n\to+\infty} (\text{lím}_{x\to x_0} q_n(x)) = q(x)$$

O sea,

$$\text{lím}_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{lím}_{n\to+\infty} q_n(x_0) = g(x_0) \Rightarrow f' = g$$

$\square$

Corolario 21.2. Sea $\sum_{n\geq 1} f_n$, f_i derivable en $[a,b]$ $\forall i$. Si $\sum_{n\geq 1} f_n(c)$ converge con $c \in [a,b]$ y $\sum f'_n = g \Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$ y f es derivable con $f' = g$.

21.2 Series de potencia

Una serie de la forma $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ se llama serie de potencias. Por simplicidad consideramos $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y el caso general se reduce a éste por un cambio de variables.

Teorema 21.3. Sea $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, o bien converge solo en $x = 0$ o bien $\exists r > 0$ (puede ser $+\infty$) tal que converge absolutamente en el intervalo $(-r, r)$ y diverge en $(-r, r)^c$. Además $\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Demostración. Si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow (\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada, así que tampoco lo es $(|x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$, $x \neq 0 \Rightarrow |a_n x|^n \not\to 0 \Rightarrow$ diverge salvo en $x = 0$. Si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}|x| = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ $\sum a_n x^n$ converge absolutamente en $\mathbb{R}$. Si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} \in (0, +\infty) \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|x^n} =$ $|x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$. Luego si $\frac{|x|}{r} < 1$ Por el criterio la serie converge absolutamente $\Rightarrow -r < x < r \Rightarrow \sum a_n x^n$ converge $\forall x \in (-r, r)$. □

Teorema 21.4. Una serie de potencias converge uniformemente en todo intervalo compacto contenido en su intervalo de convergencia.

Demostración. Sea $(-r, r)$ el intervalo de convergencia de $\sum a_n x^n$ y $0 < s < r$. $(\forall x \in [-s, s])$ vale que $|a_n x^n| \leq |a_n| s^n$ y como $\sum a_n s^n$ converge absolutamente, por el criterio de Weierstrass la serie $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-s, s]$. □

Corolario 21.5. La función $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum a_n x^n$ es continua en el intervalo de convergencia $(-r, r)$.

Notemos que una serie de potencias puede no converger uniformemente en $(-r, r)$. En efecto si una serie de funciones continuas converge uniformemente en un conjunto, también converge uniformemente en su clasura. La demostración queda como ejercicio.

Ejemplo. $\sum x^n$ no converge uniformemente en $(-1, 1)$ porque tendría que converger en $|x| = 1$.

Lema 21.6. Sea $\sum_p \alpha_p$ una serie no necesariamente convergente, con sumas parciales acotadas. Es decir que si $S_p = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ $\exists k > 0 : |S_p| \leq k$ $(\forall p \in \mathbb{N})$. Si además $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_p \geq 0$ es decreciente $\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}$ vale que $|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| \leq k b_1$.

Demostración.

$$|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| = |S_1 b_1 + (S_2 - S_1)b_2 + \cdots (S_p - S_{p-1})b_p|$$

$$= |S_1(b_1 - b_2) + \cdots + S_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + S_p b_p| \leq k b_1$$

□

Teorema 21.7 (Abel). Sea $\sum a_n x^n$ con radio de convergencia $0 < r < +\infty$. Si $\sum a_n r^n$ converge $\Rightarrow \sum a_n x^n$ converge en $[0, r]$. En particular $\lim_{x \to r^-}(\sum a_n x^n) = \sum a_n r^n$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n+1} r^{n+1} + \cdots + a_{n+p} r^{n+p}| < \varepsilon$ $(\forall p \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$. Si llamo $\alpha_p = a_{n+p} r^{n+p}$ $(\forall p \in \mathbb{N})(n > n_0) \Rightarrow \alpha_p$ cumplen las hipótesis del lema anterior con $k = \varepsilon$, $(\forall x \in [0, r])$ tenemos que

$$|a_{n+1} r^{n+1} + \cdots + a_{n+p} r^{n+p}| = |\alpha_1 \frac{x}{r} + \cdots + \alpha_p (\frac{x}{r})^p| (\frac{x}{r})^n$$

Así que usando el lema para $b_p = (\frac{x}{r})^p$, vale que $\forall n > n_0$, $\forall x \in [0, r]$

$$|a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_{n+p} x^{n+p}| < \varepsilon \cdot (\frac{x}{r} \cdot (\frac{x}{r})^n) \leq \varepsilon$$

$\therefore \sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, r] \Rightarrow \sum a_n x^n = f(x)$ es continua en $[0, r] \Rightarrow$ $\sum a_n r^n = f(r) = \lim_{x \to r^-} f(x) = \lim_{x \to r^-}(\sum a_n x^n)$. □

Observación.

1. El mismo resultado vale con $-r$ en lugar de r tomando $\sum (-1)^n a_n r^n$.
2. $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en su intervalo de convergencia si y sólo si converge en los bordes.

Teorema 21.8. Si $\sum a_n x^n$ converge en $[\alpha, \beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta \sum a_n x^n dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$.

Demostración. Debe ser $[\alpha, \beta] \subset [-r, r] \Rightarrow$ por el Teorema de Abel la convergencia es uniforme. □

Notemos que si $\sum a_n x^n$ no converge en el extremo r de su intervalo de convergencia igual se puede integrar término a término la integral impropia. $\int_0^r \sum a_n x^n dx$ si $\sum \frac{a_n \cdot r^{n+1}}{n+1}$ converja. Esto es porque $\int_0^r \sum a_n x^n dx = \lim_{t \to r^-} \int_0^t (\sum a_n x^n) dx =$ $\lim_{t \to r^-} \sum \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum \frac{a_n \cdot r^{n+1}}{n+1}$.

Teorema 21.9. $f(x) = \sum a_n x^n$ es derivable en todo el intervalo de convergencia $(-r, r)$ y $f'(x) = \sum a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ con mismo radio.

Demostración. Sabemos que la serie converge uniformemente en todo intervalo compacto contenido en $(-r, r)$ y que podemos derivar término a término la serie original si la serie de derivadas converge uniformemente. Basta ver que $\sum a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ tienen el mismo intervalo de convergencia. $\sum a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ converge $\iff x \sum a_n x^{n-1} = \sum a_n x^n$ converge. Esta serie tiene $\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot n} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. $\square$

Corolario 21.10. $f(x) = \sum a_n x^n$ tiene derivadas de cualquier orden en todo su intervalo de convergencia y sus derivadas sucesivas se pueden calcular derivando término a término. Entonces $\forall x \in (-r, r)(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow f^k(x) = \sum n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n \cdot x^{n-k}$. En particular $a_k = \dfrac{f^k(0)}{k!}$. Así que la serie de potencias que converge a f en $(-r, r)$ es su serie de Taylor alrededor de $x = 0$.

21.3 Familias equicontinuas

Dada una familia E de funciones continuas con dominio común queremos ver cuando podemos garantizar que toda sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en E tiene una subsucesión uniformemente convergente.

A diferencia de lo que ocurre con sucesiones numéricas no basta con que la sucesión sea acotada. Por ejemplo si $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n(1 - x^n) \Rightarrow f_n \to 0$, pero $f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Así que ninguna subsucesión puede converger uniformemente a 0.

Definición 21.11 (Equicontinuidad)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$ y E una familia de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ dado $x_0 \in X$, decimos que la familia E es equicontinua en x_0 si dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $(\forall f \in E)$ con el mismo δ $(\forall f)$.

Una familia (o sucesión) es equicontinua si es equicontinua en todo punto del dominio.

Teorema 21.12. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ continuas, $f : X \to \mathbb{R}$ y $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall x \in X)$ $(\forall n > n_0)$ por la convergencia uniforme. Como f y f_n son continuas $\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta_i \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall i \in \{1, \cdots, n_0\})$. Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n_0}) \Rightarrow$ Si $n > n_0$ y $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$\square$

Ejemplo. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ es equicontinua en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo. $f_n(x) = nx$ no es equicontinua en ningún $x_0 \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\forall \delta > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \delta \Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{n}$ cumple que $|x - x_0| = \frac{1}{n} < \delta$, pero $|f_n(x) - f_n(x_0)| = |nx - nx_0| = |nx_0 + 1 - nx_0| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Clase XXII - 22/11

22.1 Equicontinuidad uniforme

Teorema 22.1. Si E es una familia de funciones derivables en I : $\exists c > 0 : |f'(x)| \leq c$ $(\forall f \in E)(\forall x \in I) \Rightarrow E$ es equicontinua en I.

Demostración. Sea $x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Si $x \in I$ y $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} < \varepsilon$ $(\forall f \in E)$ usando Teorema del Valor Medio. $\square$

Más en general, con el mismo argumento, se ve que si $\forall x \in I$, $\exists c_x > 0$ y un intervalo I_x tal que $x \in I_x \subset I$ y $|f'(y)| \leq c_x$ $(\forall f \in E)(\forall y \in I_x) \Rightarrow E$ es equicontinua.

Definición 22.2 (Equicontinuidad uniforme). Una familia E de funciones, $f : X \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente equicontinua si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $(\forall f \in E)$

Ejemplo. E es una familia de funciones derivables en I y $|f'(x)| \leq c$ $(\forall f \in E) \Rightarrow E$ es uniformemente equicontinua

Ejemplo. Una familia formada por una única función continua, pero no uniformemente continua es una familia equicontinua, pero no uniformemente.

Teorema 22.3. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda familia de funciones $f : K \to \mathbb{R}$ equicontinua es uniformemente equicontinua.

Demostración. Si E no fuese uniformemente equicontinua, $\exists \varepsilon > 0 : (\forall n \in \mathbb{N})$, x_n, $y_n \in K$, $f_n \in E : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} < \delta$, pero $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que $x_n \to x \in K$ (K es compacto) y como $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$ tenemos que $y_n \to x$.
Como la familia E es equicontinua en x, $\exists \delta > 0 : z \in K$ y $|x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall f \in E) \Rightarrow |f_n(x_n) - f_n(y_n)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(y_n) - f(x)| < \varepsilon$ $(\forall n > n_0 \in \mathbb{N})$, pues $|x_n - x| < \delta$ y $|y_n - x| < \delta$ Absurdo! $\square$

Teorema 22.4. Si una sucesión equicontinua de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge puntualmente en un subconjunto denso $D \subset X \Rightarrow f_n$ converge uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset X$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ quiero ver que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $(\forall m, n > n_0)(\forall x \in K)$. Luego $\forall d \in D$, $\exists n_d \in \mathbb{N} : |f_m(d) - f_n(d)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n, m > n_d)$.
Por otro lado $\forall y \in K$, $\exists$ un intervalo abierto I_y (centrado en y) tal que $|f_n(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall x, z \in X \cap I_y)(\forall n \in \mathbb{N})$. Como K es compacto del cubrimiento $K \subset \bigcup_{y \in K} I_y$ podemos extraer un subcubrimiento finito $K \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_p$.
Como D es denso en X, en cada intervalo I_i podemos elegir $d_i \in D \cap I_i$. Sea $n_0 = max(n_{d_1}, \cdots n_{d_p}) \Rightarrow$ si $n, m > n_0$ y $x \in K \Rightarrow \exists i : x \in I_i$ así que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(d_i)| + |f_m(d_i) - f_n(d_i)| + |f_n(d_i) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$\therefore$ es uniformemente equicontinua. $\square$

Definición 22.5 (Acotada puntualmente)**.** Una familia E de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice puntualmente acotada si $\forall x \in X$, $\exists c_x > 0 : |f(x)| \leq c_x$ $(\forall f \in E)$.

Definición 22.6 (Uniformemente acotada)**.** Se dice uniformemente acotada si $\exists c > 0 : |f(x)| < c$ $(\forall f \in E)(\forall x \in X)$.

Teorema 22.7 (Cantor - Tijonov)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$ numerable. Toda sucesión puntualmente acotada de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ posee una subsucesión puntualmente convergente.

Demostración. Sea $X = \{x_1, \cdots\}$ como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, tiene una subsucesión convergente $\Rightarrow \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $a_1 = \lim_{n\in\mathbb{N}_1} f_n(x_1)$.
Como $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}_1}$ es acotada, $\exists\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito tal que $\exists a_2 = \lim_{n\in\mathbb{N}_2} f_n(x_2)$. Así siguiendo para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos $\mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_i \supset \cdots$, tales que $\lim_{n\in\mathbb{N}_i} f_n(x_i) = a_i$.
Definimos a $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ tomando como i-ésimo elemento de $\mathbb{N}^*$ al i-ésimo elemento de $\mathbb{N}_i \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N})(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}^*}$ es a partir del i-ésimo elemento una subsucesión de $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}_i}$ converge $\therefore$ Esto prueba que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\forall x_i \in X$. $\square$

Teorema 22.8 (Arzelà - Ascoli)**.** Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto, toda sucesión equicontinua y puntualmente acotada de funciones $f_n : K \to \mathbb{R}$ posee una subsucesión uniformemente convergente.

Demostración. Como $K \subset \mathbb{R}$, $\exists X \subset K$ numerable y denso en K. Por el teorema anterior, como X es numerable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión puntualmente convergente en X (por ser f_n puntualmente acotada). Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua y converge puntualmente en $X \subset K$ denso, converge uniformemente en K por ser compacto. $\square$

22.2 Ecuaciones diferenciales

TODO

Parciales

23.1 Primer parcial - Primera fecha - 14/10

1. Dada $f : X \to Y$. Mostrar que f es inyectiva $\iff$ $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo par de conjuntos $A, B \subseteq X$.

2. Considerar K un cuerpo ordenado y $f : K \to K$ definida por $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Calcular, en el caso que existan: $\inf(f(\mathbb{Z}))$ y $\sup(f(\mathbb{Z}))$.

3. Considerar $B \subseteq A$ conjuntos no vacíos de números reales. Se sabe que A está acotado superiormente y que $\forall x \in A, \exists y \in B : x \leq y$. Demostrar que $\sup A = \sup B$.

4. Demostrar, usando la definición que $\dfrac{4^n - 6}{4^{n+1} + 10} \to \dfrac{1}{4}$.

5. Decidir si las siguientes sucesiones son convergentes. En caso afirmativo, determinar su límite.

   a) $a_1 = -\dfrac{3}{2}, 3 \cdot a_{n+1} = 2 + a_n^3$. Dar un valor de a_1 para que la sucesión converja a -2.

   b) $b_1 = 1, b_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{b_n}$.

6. Considerar una sucesión (a_n) de términos positivos tal que $a_n \to L$. Demostrar que

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \to L$$

7. Considerar (a_n) y (b_n) sucesiones acotadas superiormente mostrar que

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

   Dar un ejemplo donde la desigualdad sea estricta.

8. Considerar (a_n) sucesión de términos positivos tal que $\sum a_n$ es convergente. Decidir si la siguiente serie es convergente o divergente: $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$.

23.2 Primer parcial - Segunda fecha - 28/10

1. Considerar (a_n) y (b_n) tales que $a_n \to M$ y $b_n \to L \neq 0$. Demostrar usando la definición que $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{M}{L}$.
2. Considerar $f : X \to Y$ y $B \subset Y$. Demostrar que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Dar un ejemplo donde la desigualdad sea estricta.
3. Decidir si la sucesión $b_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{b_n}}$ con $b_1 = 1$ es convergente. En caso afirmativo, determinar su límite.
4. Considerar (x_n) la sucesión acotada tal que $\liminf x_n = \limsup x_n = L$. Demostrar que $x_n \to L$.
5. Decidir si $\sum \dfrac{n! \cdot e^n}{n^{n+1}}$ es convergente o divergente.
6. Considerar (a_n) una sucesión decreciente tal que $\sum a_n$ es convergente. Demostrar que $na_n \to 0$.
7. Considerar $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$. Demostrar que $\sum a_n$ converge $\iff$ $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ converge.

23.3 Segundo parcial - Primera fecha - 20/12

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_n(x) = f(nx), \forall n \in \mathbb{N} : (f_n)$ es equicontinua en 0. Demostrar que f es constante.

2. Considerar F cerrado y K compacto en $\mathbb{R}^n$ tales que $F \cap K = \varnothing$. Demostrar que $d(F, K) > 0$.
   Se define $d(F, K) = inf\{d(f, k) : f \in F, k \in K\}$.
   Dar un ejemplo donde F y G sean cerrados disjuntos tales que $d(F, G) = 0$.

3. Considerar $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to R$ una función tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists g_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\forall x \in X$ se cumple que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Mostrar que f es continua.

4.
   a) Considerar $f_n : X \to Y$ tales que $f_n \rightrightarrows f$ y $g : Y \to Z$ uniformemente continua. Demostrar que $g \circ f_n \rightrightarrows g \circ f$.
   b) Considerar $g_n : Y \to Z$ tales que $g_n \rightrightarrows g$ y $f : X \to Y$. Es cierto que $g_n \circ f \rightrightarrows g \circ f$?

5.
   a) Demostrar que $x^n(1 - x)$ converge uniformemente a 0 en $[0, 1]$.
   b) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes series en el intervalo $[0, 1]$.
      1) $\sum_{n \geq 1} x^n(1 - x)$
      2) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n x^n(1 - x)$

23.4 Segundo parcial - Segunda fecha - 10/02/2025

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   a) f es continua.

   b) $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ se cumple que $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$.

2. Considerar $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$. Estudiar, por definición, la convergencia puntual y uniforme de (f_n) y (f_n').

3. Considerar $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una sucesión de funciones uniformemente continuas que convergen uniformemente a una función $f : A \to \mathbb{R}^m$. Demostrar que f es uniformemente continua.

4. Considerar, para $n \geq 2$, las funciones $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\ln(n)}$ definidas en $[0,1]$.

   a) Mostrar que (f_n) converge uniformemente.

   b) Mostrar que (f_n) es equicontinua en $[0,1]$.

5. Considerar $A \subseteq \mathbb{R}^2$ conexo y no acotado. Demostrar que para todo $a \in A$ y $r > 0$, el conjunto $\{x \in A : d(x,a) = r\}$ es no vacío.

23.5 Segundo parcial - Tercera fecha - 21/02/2025

1. Sean $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuas. Si $(f_n) \rightrightarrows f$ entonces $\forall$ sucesión $(x_n) \subseteq E$ y $x \in E$ tal que $x_n \to x$ entonces $f_n(x_n) \to f(x)$.

2. Considerar $f_n \rightrightarrows f$ en $[a, +\infty]$. Suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = a_n$ para $a_n \in \mathbb{R}$. Probar que existe el $\lim_{n\to+\infty} a_n$. Vale lo mismo si se cambia $f_n \rightrightarrows f$ por $f_n \to f$?

3. Considerar A y B conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}$. Mostrar que si A es compacto y B es cerrado entonces $A + B$ es cerrado.

4. Demostrar que la clausura de un conjunto conexo es conexa.

5. Decidir si las siguientes sucesiones de funciones son equicontinuas en los dominios indicados.

   a) $f_n(x) = n$ en $\mathbb{R}$.

   b) $g_n(x) = x + n$ en $\mathbb{R}$.

   c) $h_n(x) = nx$ en $\mathbb{R}$.

6. Coonsiderar (f_n) y (g_n) dos sucesiones de funciones equicontinuas en un conjunto X. Mostrar que la sucesión de funciones $(f_n + g_n)$ es equicontinua en X. Es cierto para la sucesión de funciones del producto?

7. Estudiar la convergencia uniforme de las funciones $f_n(x) = \dfrac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$ en $[0, 1]$ y en $[1, +\infty)$.

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

[1] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis, 3rd Edition.* McGraw-Hill, New York, 1976.

[2] Elon Lages Lima. *Curso de Análise, Vol.1.* IMPA, Río de Janeiro, 2014.

[3] Tom Mike Apostol. *Calculus.* John Wiley and Sons, New York, 1967.

[4] Gabriel Larotonda. *Cálculo y Análisis.* Universidad de Buenos Aires, 2010.