Notas del teórico

Complementos de análisis matemático - Irene Drelichman 2024

Bustos Jordi

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

This page is intentionally left blank.

Clase I - 23/08

1.1 Repaso de funciones

Una función $f : A \to B$ es un objeto que consta de tres partes: un conjunto A (dominio), un conjunto B (codominio) y una regla que permite asociar todo elemento de A a un único elemento de B. Es decir, $f(x) \in B$, donde $x \in A$. Además, $f(x) = y$, lo que significa que f asigna a x el valor $f(x)$.

El gráfico de $f : A \to B$ es el subconjunto de $A \times B$ dada por $(x, f(x))$ con $x \in A$ y $f(x) \in B$. Notamos $G(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$.

Definición 1.1. $f : A \to B$ es inyectiva cuando para $x, y \in A$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Definición 1.2. $f : A \to B$ es suryectiva cuando para $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

Definición 1.3. $f : A \to B$ si es inyectiva y suryectiva.

Definición 1.4. Dados $f : A \to B$ y $X \subset A$ se llama imagen de X por f al conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

1.1.1. Propiedades

Proposición 1.5. $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$

Proposición 1.6. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. La igualdad vale si y sólo si es inyectiva.

Demostración. Sea $a \in f(X \cap Y) \Rightarrow \exists x \in X \cap Y : f(x) = b \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X)$ y $y \in Y \Rightarrow f(y) \in f(Y)$.
Si $f : A \to B$ no es inyectiva $\Rightarrow \exists x \neq y : f(x) = f(y)$. Si $X = \{x\}$, $Y = \{y\} \Rightarrow X \cap Y = \varnothing$.
$f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\}$ luego $f(X \cap Y) = \varnothing$.
Si f es inyectiva, sea $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists a \in X, b \in Y$ tal que $f(a) = f(b) = y$. Como f es inyectiva $a = b \Rightarrow a \in X \cap Y \Rightarrow y = f(a)$, $y \in f(X \cap Y) \Rightarrow f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$
$\therefore$ Si f es inyectiva son iguales. $\square$

Proposición 1.7. $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$

Proposición 1.8. $f(\varnothing) = \varnothing$

Definición 1.9. Dados $f : A \to B$ y $Y \subset B$ se llama preimagen de Y por f al conjunto $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) = y, \forall y \in Y\}$.

1.1.2. Función inversa

Sea $f : A \to B$:

Proposición 1.10. $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$

Proposición 1.11. $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$

Proposición 1.12. $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

Proposición 1.13. $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$

Proposición 1.14. $f^{-1}(B) = A$

Proposición 1.15. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

1.1.3. Composición de funciones

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \forall x \in X$, es suficiente que $f(A) \subset B$.

Proposición 1.16. Composición de funciones suryectivas/inyectivas es suryectiva/inyectiva.

Proposición 1.17. $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

Definición 1.18. La restricción de f en un subconjunto $X \subset A$ la notamos $f|_X : X \to B$.

Definición 1.19. Dada $f : A \to B$ y $g : B \to A$, g es una inversa a izquierda si y sólo si $g \circ f = id_A$. $\exists g$ si y sólo si f es inyectiva.
Análoamente para la inversa a derecha si f es suryectiva. Si f es biyectiva $\Rightarrow g$ es inversa a ambos lados y es única.

1.1.4. Familia de funciones

Sea L un conjunto de elementos que llamamos índices y representamos genéricamente con λ.

Dado un conjunto X, una familia de elementos de X con índices en L es $X : L \to x$. El valor de x en $\lambda \in L$ lo notamos x_λ y la familia $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Ejemplo. $L = \{1, 2\}$ los valores de $x : \{1, 2\} \to X$ se representan por x_1, x_2, es decir que los puedo identificar con pares ordenados (x_1, x_2) de elementos de X.

Una familia con elementos en $\mathbb{N}$ se llama sucesión. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X es una función de $x : \mathbb{N} \to X$ donde $x_n = x(n)$.

Las propiedades enunciadas previamente se pueden extender a cualquier familia de conjuntos.

1.2 Números naturales

Partimos de un conjunto $\mathbb{N}$ y una función $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple los siguientes axiomas (de Peano):
1) Es inyectiva.
2) $\mathbb{N} - S(\mathbb{N})$ tiene un solo elemento y lo llamamos 1.
3) Principio de inducción, si $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ y $\forall m \in X$ vale $S(m) \Rightarrow X = \mathbb{N}$.

El principio de inducción permite definir operaciones
La suma se define como $m + 1 = S(m)$, $m + S(n) = S(m + n)$.

Proposición 1.20. Asociatividad: sea $X = \{p \in \mathbb{N} : m+(n+p) = (m+n)+p, \forall n, m \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. $1 \in X$, $p \in X \Rightarrow m + (n + S(p)) = m + S(n + p) = S(m + (n + p)) = S((n + m) + p) = (m + n) + S(p)$. Por inducción $X = \mathbb{N}$. □

Proposición 1.21. Conmutatividad: $n + m = m + n$.

Proposición 1.22. Ley de cancelación: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$.

Proposición 1.23. Tricotomía: $m, n \in \mathbb{N}$, si $m > n, \exists p : m + p = n$. Si $m < n$, $\exists p \in \mathbb{N} : n + p = m$.

Definición 1.24. La multiplicación se define recursivamente como: $m \times 1 = m$ y $m \times (n + 1) = m \times n + m$.
Cumple la asociatividad, conmutatividad, ley de cancelación y monotonía.

Teorema 1.25. Principio de buena ordenación
Todo subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

Demostración. Llamemos $\mathbb{I}_m = \{p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n\} = [[1, m]]$ y $X = \{m \in \mathbb{N} : \mathbb{I}_m \subset \mathbb{N} - A\}$.
Si $1 \in A \Rightarrow 1$ es primer elemento. Si $1 \notin A \Rightarrow 1 \in X$ como $X \neq \mathbb{N}$ pues $X \subseteq \mathbb{N} - A$ y $A \neq \varnothing$. Por el principio de inducción $\exists m \in X$ tal que $m + 1 \notin X$, si no tendríamos que $X = \mathbb{N}$. Luego todos los elementos entre 1 y m están en $\mathbb{N} - A$ y $m + 1 \in A$, se sigue que $a = m + 1$ es primer elemento de A. $\square$

1.3 Cuerpo

Un cuerpo es un conjunto dotado de dos operaciones, suma y producto y se denota por $\mathbb{K}$.

1.3.1. Axiomas de la suma

1) Asociatividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, (x + y) + z = x + (y + z)$.
2) Conmutatividad: $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y = y + x$.
3) Neutro: $\exists 0 \in \mathbb{K} : x + 0 = x, \forall x \in X$.
4) Opuesto: $\forall x \in X, \exists - x \in \mathbb{K} : x + (-x) = 0_{\mathbb{K}}$.

1.3.2. Axiomas del producto

1) Asociatividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, (xy)z = x(yz)$.
2) Conmutatividad: $\forall x, y \in \mathbb{K}, xy = yx$.
3) Neutro: $\exists 1 \in \mathbb{K} - \{0\} : x \cdot 1 = x, \forall x \in X$.
4) Inverso: $\forall x \in X, \exists x^{-1} \in \mathbb{K} : x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$.
Axioma de distributividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x(y + z) = xy + xz$.

Ejemplo. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$.

1.3.3. Cuerpos Ordenados

Un cuerpo ordenado es un cuerpo $\mathbb{K}$ que tiene un subconjunto $P \in \mathbb{K}$ llamado conjunto de elementos positivos de $\mathbb{K}$ que cumplen:

1) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P, xy \in P$.
2) $x \in \mathbb{K} \Rightarrow x \in P$ o $-x \in P$ o $x = 0$.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ con $P = \{p/q : p, q \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_2$ no es ordenado.

Proposición 1.26. Dado un cuerpo ordenado si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 \in P$.

En un cuerpo ordenado definimos $x < y$ para significar que $y - x \in P$.
La relación $<$ tiene las siguientes propiedades:

Proposición 1.27. Transitividad: $x < y$ y $y < z \Rightarrow x < z$.

Proposición 1.28. Tricotomía: $x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow x = y$ o $x < y$ o $x > y$.

Proposición 1.29. Monotonía de la suma $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.

Proposición 1.30. Monotonía del producto $x < y, 0 < z \Rightarrow xz < yz$.

En el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ escribimos $x \leq y$ para significar $x < y$ o $x = y$. O sea $y - x \in P \cup \{0\}$. Con esta relación se cumplen todas las propiedades anteriores y la antisimetría. $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.
Además tenemos la noción de intervalo, dados $a, b \in \mathbb{K}$ definimos $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}, [a, b), (a, b], (a, b), [a, +\infty), (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, b), [a, a] = \{a\}$.
Un subconjunto de $X \subset K$ se dice acotado inferiormente, superiormente si tiene cota inferior o cota superior. $\exists b \in \mathbb{K} : x \leq b, \forall x \in X$.

This page is intentionally left blank.

Clase II - 27/08

2.1 Cuerpo Arquimediano

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, pero esto no necesariamente implica que $\mathbb{N}$ es no acotado.

Ejemplo. $\mathbb{Q}(t)$: cuerpo de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{Q}$, $r(t) = p(t)/q(t)$, $p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$. Este cuerpo puede ser ordenado diciendo que $r(t)$ es positivo si y sólo si el coeficiente de mayor grado del polinomio pq es positivo. En este cuerpo observemos que $p(t) = t = t/1$ cumple que $\forall n \in \mathbb{N}, p(t) = t - n \in P \Rightarrow t > n, \forall n \in \mathbb{N}$. Es decir que en $\mathbb{Q}(t)$, $\mathbb{N}$ es un conjunto acotado, por ejemplo por t.

Teorema 2.1. En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ son equivalentes:
1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ no es acotado superiormente.
2) Dados $a, b \in \mathbb{K}$ con $a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : m \cdot a > b$.
3) Dado cualquier $0 < a \in \mathbb{K}, \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \dfrac{1}{a} < a$.
Cuando vale cualquiera decimos que $\mathbb{K}$ es arquimediano.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Como $\mathbb{N}$ es no acotado, dados $a, b \in \mathbb{K}$, $a > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} : m > \dfrac{b}{a}$, caso contrario $\dfrac{b}{a}$ sería cota de $\mathbb{N} \Rightarrow ma > b$
2) $\Rightarrow$ 3)
Dado $a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : ma > 1$ (tomando $b = 1$ en 2.) $\Rightarrow a > \dfrac{1}{m} > 0$
3) $\Rightarrow$ 1)
Dado $0 < a \in \mathbb{K} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{a}$, pues 3. vale para todo $\mathbb{K} \Rightarrow b < n \Rightarrow$ es no acotado (pues ningún $b > 0$ puede ser cota superior). $\square$

2.2 Supremo e ínfimo

Definición 2.2. Dados un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ y un subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ acotado superiormente, decimos que $b \in \mathbb{K}$ es supremo de X si es la menor de las cotas superiores de X en $\mathbb{K}$.

Es decir, se cumple:

1. $\forall x \in X, x \leq b$

2. Si $c \in \mathbb{K}$ y $x \leq c$, $\forall x \in X \Rightarrow b \leq c$.

3. Dado $c < b$ en $\mathbb{K}, \exists x \in X : c < x$

Nota. 1) El supremo de un conjunto, si existe es único.
2) Si un conjunto tiene máximo, es el supremo.
3) Si $X = \varnothing$, todo $b \in \mathbb{K}$ es cota superior, como $\mathbb{K}$ no tiene primer elemento, se sigue que $\varnothing$ no tiene supremo en $\mathbb{K}$.

Definición 2.3. Dados un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ y un subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ acotado inferiormente, decimos que $b \in \mathbb{K}$ es ínfimo de X si es la mayor de las cotas inferiores de X en $\mathbb{K}$.

Es decir, se cumple:

1. $\forall x \in X, x \geq b$

2. Si $c \in \mathbb{K}$ y $x \geq c$, $\forall x \in X \Rightarrow b \geq c$.

3. Dado $c > b$ en $\mathbb{K}, \exists x \in X : b < x < c$.

Ejemplo. Dados $a < b$ en $\mathbb{K}$. Si $X = (a, b) \Rightarrow \inf(X) = a$, $\sup(X) = b$.
1) Por definición a es cota inferior y b superior.
2) $a < c \in \mathbb{K}$, no es cota inferior. En efecto, si $c \geq b$ trivial. Si $c < b \Rightarrow \dfrac{a+c}{2} \in X, a < \dfrac{a+c}{2} < c \Rightarrow a < c \therefore c$ no es cota inferior.
Luego por 1) y por 2) a es ínfimo de X.

Ejemplo. $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y = \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $\inf(Y) = 0, \sup(Y) = \dfrac{1}{2}$.
$\dfrac{1}{2} \in Y, \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \sup(Y)$.
Como $0 < \dfrac{1}{2^n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ es cota inferior. Sea $0 < c \in \mathbb{K}$, $2^n = (1+1)^n \leq 1 + n \leq \dfrac{1}{c} \Rightarrow n \leq \dfrac{1}{c} - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2^n} < c \Rightarrow c$ no puede ser cota inferior por la propiedad 3 de la arquimedianidad $\therefore 0$ es el ínfimo de Y.

El problema más serio de los racionales desde el punto de vista del análisis es que algunos conjuntos acotados de números racionales no tienen súpremo (o ínfimo) en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo. Sean $X = \{X \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$, $Y\{y \in \mathbb{Q} : y > 0, y^2 > 2\}$. Notemos que si $z > 2 \Rightarrow z^2 > 4 \Rightarrow z \notin X \Rightarrow X \subset [0, 2]$ y X es un conjunto acotado. Además $Y \subset (0, +\infty)$ por lo que es un conjunto acotado inferiormente. Veamos que $\nexists$ supremo e ínfimo en $\mathbb{Q}$.

1) Quiero ver que X no tiene máximo. Dado $x \in X$ quiero encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < 1$ y $x + r \in X \iff (x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < 2$. Como $r < 1 \Rightarrow (x+r)^2 < x^2 + 2xr + r = x^2 + r(2x+1) < 2 \therefore x + r \in X$.
2) Quiero ver que Y no tiene elemento mínimo, dado $y \in Y$ tomo $r \in \mathbb{Q} : 0 < r < \dfrac{y^2-2}{2y}$

$$(y-r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2yr > 2 \tag{2.1}$$

$$y^2 - 2 > 2yr \tag{2.2}$$

$$\frac{y^2-2}{2y} > r \tag{2.3}$$

Es decir que $y - r \in Y$ e $y - r < y$

3) Si $x \in X, y \in Y \Rightarrow x < y$ $x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$.

Veamos que por 1, 2, 3 $\nexists \sup(X), \inf(Y)$. Supongamos $0 < \alpha = \sup(X)$, no puede ser $\alpha^2 < 2$ porque si no $\alpha \in X$ y X no tiene máximo. Tampoco puede ser $\alpha^2 > 2$ pues estaría en Y e Y no tiene mínimo, pues habría un $\beta \in Y$ con $\beta < \alpha$ y por 3) sería $x < \beta < \alpha, \forall x \in X$ lo que contradice que $\sup(X) = \alpha$, pues sería β el supremo. En definitiva si existiese $\sup(X) = \alpha$, debe ser $\alpha^2 = 2 \notin \mathbb{Q}$. Luego X no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Ínfimo, ejercicio (análogo).

2.3 Cuerpo completo

Definición 2.4. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado no Arquimediano, $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ es acotado superiormente.

si $b \in \mathbb{K}$ es una cota superior de $\mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} < b, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < b - 1$ o sea $b - 1$ es cota superior de $\mathbb{N} \therefore \nexists \sup(\mathbb{N})$ en $\mathbb{K}$.

Definición 2.5. Un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ se dice completo cuando dado un subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{K}$.

Nota. 1) Si el cuerpo es ordenado y completo $\Rightarrow$ es arquimediano.
2) En un cuerpo ordenado completo $\mathbb{K}$ todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo en $\mathbb{K}$.

Demostración. Sea $Y \subset \mathbb{K}$, no vacío y acotado inferiormente. Sea $X = -Y = \{-y : y \in Y\} \Rightarrow X$ es no vacío y acotado superiormente $\Rightarrow \exists \sup(X) = a \Rightarrow -a = \inf(Y)$. □

Axioma: Existe un cuerpo ordenado llamado $\mathbb{R}$.
Ejercicio: Dados $0 < a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! 0 < b \in \mathbb{R} : b^m = a$. Sugerencia Definir $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^n < a\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^n > a\}$ e imitar la demostración anterior. Probar y usar que dado $x > 0$ $\exists$ para cada $m \in \mathbb{N}$ un número real positivo que depende de x tal que

$(x+d)^m \leq A_n d + x^n, \forall 0 < d < 1.$.

Definición 2.6. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se dice denso en $\mathbb{R}$ si todo intervalo abierto (a, b) contiene algún punto de X.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Como $b - a > 0, \exists p \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{p} < b - a$.
Sea $A = \{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{p} \geq b\}$. Como $\mathbb{R}$ es Arquimediano, A es un conjunto de números enteros no vacío y acotado por bp. Sea m_0 el menor elemento de A entonces $b \leq \frac{m_0}{p}$ y $\frac{m_0 - 1}{p} < b$. También $\frac{m_0 - 1}{p} > 0$, si no tendríamos que

$$\frac{m_0 - 1}{p} \leq a \leq b \leq \frac{m_0}{p} \tag{2.4}$$

Luego

$$b - a \leq \frac{m_0}{p} - \frac{m_0 - 1}{p} = \frac{1}{p} \tag{2.5}$$

Absurdo! $\therefore$ $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.
Para ver que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es denso usamos la misma idea tomando $p \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ por Arquimedianidad y $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$ por longitud del intervalo. Ejercicio terminar la demostración.

2.4 Cardinalidad - introducción

Definición 2.7. Decimos que dos conjuntos X, Y tienen el mismo cardinal (coordinables o equipotentes) si $\exists f : X \to Y$ biyectiva. Notamos $X \sim Y$ o $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ o $\#X = \#Y$ y $\sim$ es una relación de equivalencia.

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Teorema 2.8. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m \iff n = m$.

Demostración. Sabemos que si $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$, entonces $\exists f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_m$ biyectiva. Supongamos que $n < m$.
Esto implica que puedo definir $g : \mathbb{I}_m \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectiva como:

$$g(k) = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq k \leq n+1, \\ 1 & \text{si } k > n+1. \end{cases}$$

$g \circ f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1} \Rightarrow$ basta probar que $\nexists$ funciones $h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectivas para probar el absurdo. Por inducción:
Si $m = 1$ luego h no puede ser suryectiva. Supongamos que vale si $1 \leq k \leq n-1$, si $\exists h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectiva $\exists k : f(n) = k$. Defino una permutación r de $\mathbb{I}_{n+1}$ tal que $r(k) = n+1 \Rightarrow$
$r \circ h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ es suryectiva y $(r \circ f)(n) = r(k) = n+1$.
$\Rightarrow$ la restricción $r \circ f|_{\mathbb{I}_{n-1}} : \mathbb{I}_{n-1} \to \mathbb{I}_n$ y es suryectiva. Abusrdo, por Hipotesis inductiva no existen suryectivas de $\mathbb{I}_{n-1} \to \mathbb{I}_n$

$\Leftarrow$ trivial. □

Definición 2.9. X es finito si $\exists n$: X es coordinable con $\mathbb{I}_n$ y escribimos $\mathtt{card}(X) = n$. Decimos que X es infinito si no existe tal n.

This page is intentionally left blank.

Clase III - 30/08

3.1 Conjuntos numerables

Definición 3.1. Un conjunto X es numerable si $X \sim \mathbb{N}$. Cada biyección se llama una enumeración de los elementos de X.

Definición 3.2. Decimos que un conjunto es a lo sumo numerable (contable) si es finito numerable.

Ejemplo. Los números pares, $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. $f(n) = 2n$, $f : \mathbb{N} \to P$ es biyectiva $\therefore$ es numerable. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{Z}$ es numerable.

Demostración. Definimos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ como $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0, \\ -2n+1 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$ y f^{-1} es una enumeración. $\square$

Teorema 3.3. Sea X un conjunto y $P(X) = \{A : A \subset X\} \Rightarrow \mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(P)$

Demostración. Supongamos que $\exists f : X \to P(X)$ biyectiva, en particular, f es suryectiva.
Dado $x \in X$, puede pasar que $x \in f(X)$ o $x \notin f(X)$. Definimos $B = \{x \in X : x \notin f(X)\} \subset X$.Como f es suryectiva se tiene que $\exists y \in Y : f(y) = B$.
Si $y \notin B = f(y) \Rightarrow y \notin f(y) \Rightarrow y \in B$.
Si $y \in B = f(y) \Rightarrow y \in f(y) \Rightarrow y \notin B$.
Absurdo en ambos casos, luego $\Rightarrow \nexists f$ biyectiva $\therefore \mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(P)$. $\square$

Definición 3.4. Decimos que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ si $\exists f : X \to Y$ inyectiva.
$\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$ si $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$, pero $\neg(X \sim Y)$.

Proposición 3.5. Es una relación de orden

Demostración. i) $\mathtt{card}(X) \leq \mathtt{card}(X)$ porque la identidad es inyectiva.
ii) $\mathtt{card}(X) \leq \mathtt{card}(Y)$, $\mathtt{card}(Y) \leq \mathtt{card}(Z) \Rightarrow \mathtt{card}(X) \leq \mathtt{card}(Z)$ pues la composición de funciones es inyectiva.
iii) $\mathtt{card}(X) = \mathtt{card}(Y) \Rightarrow X \sim Y$. $\square$

3.2 Cantor - Schröder - Bernstein

Teorema 3.6 (Cantor - Schröder - Bernstein)**.** Si $\exists f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ inyectivas $\Rightarrow \exists h : X \to Y$ biyectiva.

Demostración. Vamos a probar que existen dos particiones distintas de X e Y. Sea $X = X_1 \cup X_2$ y $Y = Y_1 \cup Y_2 : f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$ son biyectivas.

Podemos definir a $h : X \to Y$ como $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1, \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$ y resulta biyectiva.

Definimos $\phi(x) : P(X) \to P(X)$, $\phi(A) = X - g(Y - f(A))$. Veamos primero que ϕ es creciente (i.e $A \subseteq B \Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$.

Demostración. $A \subseteq B \iff f(A) \subseteq f(B) \iff y - f(B) \subseteq y - f(A) \iff g(y - f(B)) \subseteq g(y - f(A)) \iff X - \phi(A) \subseteq X - \phi(B)$ $\square$

Sea $\mathcal{C} = \{C \subset X : \phi(C) \subset C\} \neq \varnothing$ pues $X \in \mathcal{C}$ y $A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \varnothing$, $A \subset C, \forall C \in \mathcal{C}$ y ϕ es creciente y tenemos que $\phi(C) \subset C \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(C) \subset C \Rightarrow \phi(C) \in A$. Además, usando otra vez que ϕ es creciente, $\phi(\phi(A)) \subset \phi(A) \Rightarrow \phi(A) \in \mathcal{C} \Rightarrow A \subset \phi(A) \Rightarrow A = \phi(A)$.

Sean $X_1 = A$, $X - X_1 = X_2 = g_2(Y_2)$
$Y_1 = f(A)$, $Y_2 = Y - f(A) \Rightarrow$
$A = \phi(A) = X - g(Y - f(A)) \iff X - A = g(Y - f(A)) \iff X - X_1 = g(Y_2) = X_2 \therefore f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$ son biyectivas. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.

Demostración. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, f(x) = x$ es inyectiva.
Sea $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, f(\frac{a}{b}) = \mathtt{sign}(a) \cdot 2^a \cdot 3^b$ es inyectiva por Teorema Fundamental de la Aritmética. Luego por el teorema anterior $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$. $\square$

Ejemplo. $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ es numerable.

Demostración. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(n) = (1, n)$ es inyectiva. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f((n, m)) = 2^n \cdot 3^m$ es inyectiva por Teorema Fundamental de la Aritmética $\therefore$ es numerable. □

3.3 Los Reales son no numerables

Teorema 3.7. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Supongamos que es numerable. $\Rightarrow$
$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biyectiva. A cada número real x_n le asignamos un intervalo centrado en ese punto de longitud 2^{-n}. La unión de todos esos intervalos tiene longitud menor o igual a la suma de las longitudes (se pueden superponer).

$|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Ix_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |Ix_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$. Se cubrió un intervalo de longitud 1 de toda la recta real, por lo tanto quedan reales afuera y eso es un absurdo $\therefore$ $\mathbb{R}$ no es numerable. □

Ejemplo. $A = \{(a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Es decir las sucesiones de ceros y unos no es un conjunto numerable.

Demostración. Supongamos que si es numerable $\Rightarrow$ podemos escribir
$A = \{(a_n^1)_{n\geq 1}, \cdots, (a_n^j)_{n\geq 1}, \cdots\}$, todas las sucesiones de ceros y unos están contenidas en A. La sucesión donde $a_i = 1 - a_n^n$ (en el i-ésimo lugar tiene lo contrario de lo que la n-ésima sucesión tiene en el lugar n) debería ser una de ellas, pero eso es absurdo $\therefore$ es no numerable. □

La idea del último ejemplo (argumento diagonal), se puede adaptar para probar que $(0, 1]$ es no numerable.

3.3.1. Principio de encaje de Intervalos

Teorema 3.8. Sea $\mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_2 \supset \mathbb{I}_3 \supset \cdots$ una sucesión de intervalos cerrados y acotados $\mathbb{I}_n = [a_n, b_n] \Rightarrow$
La intersección de todos es no vacía.
$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n = [a, b]$ con $a = sup(a_n), b = inf(b_n)$.

Demostración. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbb{I}_{n+1} \subset \mathbb{I}_n \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$
$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1$. El conjunto A de los a_i está acotado y B el conjunto de los b_i también.
Sea $\alpha = sup(A)$, $\beta = inf(B)$. Como $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \leq \beta \Rightarrow a_1 \leq \cdots \leq a_1 \leq \alpha \leq \beta \leq \cdots \leq b_1$.
Luego $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{I}_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} I_n$.
Además ningún $x \leq \alpha$ puede pertenecer a todos los $\mathbb{I}_n$. En efecto, si $x < \alpha = sup(A) \Rightarrow \exists a_1 \in A : x < a_1 \Rightarrow x \notin \mathbb{I}_n$.
Análogamente con el ínfimo. □

Teorema 3.9. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Supongamos que $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(n) = x_n$.
Definimos la sucesión de $\mathbb{I}_n$ de la siguiente forma:
Tomamos $[0, 1]$ y divido en 3 cerrados iguales, luego, al menos uno no contiene a x_1, lo elijo como $\mathbb{I}_1$ (si hayh dos que no lo contienen elijo alguno). Inductivamente lo divido en 3 intervalos iguales y al menos 1 de ellos no contiene a x_{n+1} y lo elijo como $\mathbb{I}_{n+1}$. Por el principio anterior la $\mathbb{I} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n \neq \varnothing$ (tiene un único elemento y la longitud de los intervalos tiende a cero).
Si $x \in \mathbb{I}$ no puede ser igual o mayor que x_1 (por construcción se los excluye en algún paso) $\Rightarrow \mathbb{R}$ es no numerable, pues ese x queda afuera. □

3.4 Propiedades

Teorema 3.10. Sea X numerable, $Y \subset X \Rightarrow Y$ es a lo sumo numerable.

Demostración. Supongamos que Y no es finito. Como $X \sim Y$ puedo pensar $X = (x_n)_{n\geq 1}$ y defino $n_1 = min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in Y\}$ e inductivamente elegimos $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$. Definimos $n_k = min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, x_n \in Y\} \Rightarrow$ Tenemos la sucesión estrictamente creciente de naturales y podemos definir $g : \mathbb{N} \to Y, g(K) = x_{n_k}$. g es inyectiva si $K \neq Y, n_k \neq n_j$ por ser estrictamente creciente y es suryectiva, si $y \in Y \Rightarrow y = x_j$. Para ningún $j \Rightarrow \exists k : n_k \leq j \leq n_k + 1$. Como $j \leq n_{k+1} = \{n > n_k : x_n \in Y\}$ debe ser $j = n_k$. □

Corolario 3.11. $f : X \to Y$ inyectiva e Y numerable $\Rightarrow X$ es a lo sumo numerable.

Demostración. f es inyectiva $\Rightarrow X \sim f(X)$ y como $f(X) \subset Y \Rightarrow$ es a lo sumo numerable por el teorema anterior. □

Teorema 3.12. $f : X \to Y$ suryectiva, X a lo sumo numerable $\Rightarrow Y$ es a lo sumo numerable.

Demostración. $f : X \to Y$ es suryectiva $\exists g : Y \to X$ inversa a derecha tal que $f \circ g = id_Y \Rightarrow f$ es inversa a izquierda de $g \Rightarrow g$ es inyectiva $\therefore$ por el corolario anterior Y es a lo sumo numerable. $\square$

Teorema 3.13. Para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea x_n un conjunto numerable $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n = X$ es numerable.

Demostración. x_n es numerable $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to x_n$ biyectiva. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ definida como $f(n, n) = f_n(n)$. Veamos que es suryectiva, dado $x \in X$, $\exists n \in \mathbb{N} : x \in x_n \Rightarrow \exists m : x = f_n(m)$ luego $X = f_n(m) = f(n, m)$. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\geq 1} x_n$ es suryectiva $\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} x_n$ es a lo sumo numerable $\therefore$ como es infinito, es numerable. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{Q}(x) \sim \mathbb{N}$.

Demostración. $\mathbb{Q}_k[x] = \{p \in \mathbb{Q}(x) : gr(p) \leq k\}$ tenemos $f_n : \mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{Q}_n[x]$, $f(a_0, \cdots, a_{n+1}) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, cada f_n es biyectiva $\Rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$ es numerable y como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable $\therefore \mathbb{Q}(x)$ es numerable. $\square$

Definición 3.14. Un número se dice algebraico si es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros, por ejemplo $\sqrt{2}$ es raíz de $x^2 = 2$.

Definición 3.15. Si un número real no es algebraico se lo llama trascendente.

Ejercicio: demostrar que el conjunto de números algebraicos es numerable.

This page is intentionally left blank.

Clase IV - 03/09

4.1 Operaciones con cardinales

Dados dos cardinales $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$ (no necesariamente finitos) y X, Y conjuntos disjuntos tales que $\mathtt{card}(X) = \mathfrak{n}$, $\mathtt{card}(Y) = \mathfrak{m}$, podemos definir:

1) **Suma:** $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathtt{card}(X \cup Y)$.
2) **Producto:** $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathtt{card}(X \times Y)$.
3) **Potencia:** $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} = \mathtt{card}(\{f : Y \to X\}) = \mathtt{card}(X^Y)$.

> **Nota.** Suponer que $X \cap Y = \varnothing$ no es restrictivo porque $X \sim (X \times \{1\})$ e $Y \sim (Y \times \{2\})$, y $(X \times \{1\}) \sim (Y \times \{2\})$ y son disjuntos.

> **Nota.** Hay que probar que la definición es independiente de los conjuntos X, Y que elegimos. Si $\mathfrak{n} = \mathtt{card}(\tilde{X})$ y $\mathfrak{m} = \mathtt{card}(\tilde{Y})$, $\tilde{X} \cap \tilde{Y} = \varnothing \Rightarrow \mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathtt{card}(\tilde{X} \cup \tilde{Y})$. Vale porque existen biyecciones entre $\tilde{X}$ y X y entre Y y $\tilde{Y}$. Sea $f : X \to \tilde{X}$, $g : Y \to \tilde{Y}$ con lo cual $h : X \cup Y \to \tilde{X} \cup \tilde{Y}$ dada por
> $$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X, \\ g(z) & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$
> es biyectiva. Similar para el producto y la potencia.

Supongamos $\mathtt{card}(X) = \mathfrak{n}$, $\mathtt{card}(Y) = \mathfrak{m}$, $\mathtt{card}(Z) = \mathfrak{p}$, no necesariamente finitos con X, Y, Z disjuntos dos a dos. La suma cumple las siguientes propiedades:

> **Proposición 4.1.** 1) Conmutatividad: $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, pues $X \cup Y = Y \cup X$.
> 2) Asociatividad: $(\mathfrak{n} + \mathfrak{m}) + \mathfrak{p} = \mathfrak{n} + (\mathfrak{m} + \mathfrak{p})$.
> 3) Existencia del neutro: $0 + \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, $\varnothing \cup X = X$.

El producto cumple las siguientes propiedades:

> **Proposición 4.2.** 1) Conmutatividad: $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$, pues $X \times Y \sim Y \times X$.
> 2) $0 \cdot \mathfrak{n} = 0$, pues $\varnothing \times X = \varnothing$.
> 3) $1 \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, pues $\{1\} \times X \sim X$. Aquí, $f : \{1\} \times X \to X$ saca el 1 y $g : X \to \{1\} \times X$ agrega el 1. Ambas funciones son biyectivas.

Proposición 4.3. Distributiva del producto en la suma: $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ porque $X \times (Y \cup Z) \sim (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

Nota. No vale la ley de cancelación: $n + m = n + p \not\Rightarrow m = p$. $n \cdot m = n \cdot p \not\Rightarrow m = p$.

Ejemplo. Si $n = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ y $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = c$, tenemos que:
a) $n + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
$n \cdot n = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

b) $c \cdot c = c$.
$c + c = c$.

Demostración. a) Vimos que $\mathrm{card}(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \aleph_0$, $\mathrm{card}(\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}) = \aleph_0$. Y la unión de ambos conjuntos es $\mathbb{N}$. Además $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0$, así $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

b) Si pruebo que el cardinal de cualquier intervalo no degenerado (sin extremos iguales) de la recta es c, puedo probar que $c + c = c$ observando que $(0, 1) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.
En efecto, $\arctan(x)$ es una biyección entre $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y hay una biyección entre este intervalo y cualquier (a, b) dada por $y = \frac{b}{\pi} \cdot (x + \frac{\pi}{2}) + a$.
Además, $(0, 1)$ y $[0, 1]$ son coordinables. Si $f : [0, 1] \to (0, 1)$ es inyectiva y por el Teorema de Cantor-Bernstein $[0, 1] \sim (0, 1)$.
Para probar $c \cdot c = c$, uso que $(0, 1] \times (0, 1] \sim (0, 1]$.
Sea $g : (0, 1] \to (0, 1] \times (0, 1]$, $g(x) = (x, 1)$ es inyectiva.
$f : (0, 1] \times (0, 1] \to (0, 1]$, $f(x, y) = 0.x_1y_1x_2y_2 \cdots$ (primeros decimales).
Si $x, y \in (0, 1]$, los pensamos con desarrollo decimal infinito. Como f es inyectiva, por el Teorema de Cantor-Bernstein, existe una biyección entre ellos, por lo que $c \cdot c = c$. □

Sean $n = \mathrm{card}(X)$, $m = \mathrm{card}(Y)$, $p = \mathrm{card}(Z)$, no necesariamente finitos, con X, Y, Z disjuntos dos a dos.

Proposición 4.4. $n^m \cdot n^p = n^{m+p}$

Demostración. $X^Y \times X^Z \sim X^{Y \cup Z}$.
$X^Y \times X^Z = \{(f, g) : f : Y \to X, g : Z \to X\}$.
$f \in X^{Y \cup Z}, f : Y \cup Z \to X \Rightarrow (f|_Y, f|_Z) \in X^Y \times X^Z$ inyectiva.
Dadas $f : Y \to X, g : Z \to X, h : Y \cup Z \to X$ tal que $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X, \\ g(x) & \text{si } x \in Z \end{cases}$
Como Y, Z son disjuntos por hipótesis h es inyectiva y vale por Teorema CSB.
□

Proposición 4.5. $(n^m)^p = n^{mp}$

Demostración. $f \in (X^Y)^Z, f : Z \to X^Y$, $Z \mapsto (f_Z : Y \to X)$.
$(\forall z \in Z)(\exists f_Z : Y \to X)$, si $y \in Y$, $f_Z(y)$ es $g(z, y) = f_Z(y)$ □

Teorema 4.6. Sea $n = \aleph_0$ o c y sea m otro cardinal tal que $2 \leq m \leq 2^n \Rightarrow m^n = 2^n$. $(2^{\aleph_0}) = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0})$.

Demostración. En general si $m \leq p \Rightarrow m^m \leq p^n$ con $card(X) = m$, $card(Y) = m$, $card(Z) = p$, X, Y, Z disjuntos dos a dos.
$f : Y \to Z$ es inyectiva $\Rightarrow \forall g : X \to Y$ tenemos que $f \circ g : X \to Z$ de manera inyectiva (si $g_1 \neq g_2 \to f = g_1 \neq f \circ g_2$ porque f es inyectiva). □

Nota. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim P(\mathbb{N})$ pues a cada $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ le asigno el subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ definido por $n \in A \iff f(n) = 1$

Teorema 4.7. $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es decir $2^{\aleph_0} = c$.

Demostración. $f : [0, 1] \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, f(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Siendo x_n las cifras del desarrollo en base dos de x.
Tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \Rightarrow f$ es inyectiva xq el desarrollo es único.
Ahora si $g : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1], g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{2^n}$, $x_n \in \{0, 1\}$. No es inyectiva pues $0,11 = 0,10\overline{1}$. Una forma simple es pensar el desarrollo en base 3 de cada tira de 0 y 1 que no tiene ningún dos. Es decir $g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n}$ y $(0,11)_3 \neq (0,10\overline{1})_3 \therefore$ es inyectiva y por Teorema CSB: $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\aleph_0}$.
Otra forma es la siguiente: $S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} - \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ con $S_i = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_m = 0, \forall m > i\}$. O sea $0,11000\cdots$ se saca y queda solo $0,10\overline{1}$. Cada S_i es un conjunto finito (tiene 2^i elementos) luego $\bigcup_{i \geq 1} S_i$ es numerable $\therefore S$ y $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tienen el mismo cardinal.
$g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{2^n}$ si es inyectiva y $g : S \to [0, 1]$. □

4.2 Hipótesis del continuo

$\nexists$ cardinal entre $\aleph_0$ y $c = 2^{\aleph_0}$. No se puede demostrar ni refutar.
Es independiente de la teoría de conjuntos más el axioma de elección. Gödel 1940 probó que no se puede demostrar, Cohen en 1963 que no se puede refutar.

4.3 Construcción de los Reales

Sucesiones de números racionales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ decimos que tiende a 0 si dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon, \forall n > n_0$. Notamos $a_n \to 0$.

Definición 4.8. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$. Decimos que la sucesión es de Cauchy $\iff$ dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, m > n_0, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema 4.9. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es convergente (es decir $a_n - q \to 0, q \in \mathbb{Q}$) $\Rightarrow$ es de Cauchy.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - q| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0$.
$|a_n - a_m| = |(a_n - q) + (q - a_n)| \leq |a_n - q| + |q - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\forall n, m > n_0$. □

Teorema 4.10. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es de Cauchy, eligiendo $\varepsilon = 1$
$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < 1, \forall n, m > n_0$.
En particular $|a_n - a_{n_0+1}| < 1$
$a_{n_0+1} - 1 < a_n < 1 + a_{n_0+1}, \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n| < max(|a_{n_0+1} + 1|, |a_{n_0+1} - 1|), \forall n > n_0$.
Tomo $M = max(|a_0|, \cdots, |a_{n_0}|, |a_{n_0+1} + 1|, |a_{n_0+1} - 1|)$ y vale $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Definición 4.11. Sea $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Dados $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$. Decimos que son equivalentes $\iff$ $a_n - b_n \to 0$.

Proposición 4.12. La relación anterior es de equivalencia.
i) Reflexidad: $a_n - a_n = 0 \to 0$.
ii) Simetría: $a_n - b_n \to 0 \Rightarrow b_n - a_n = -(a_n - b_n) \to 0$.
iii) Tansitividad: $\varepsilon > 0, \exists n_0 : |a_n - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0$ y $\exists n_1 : |b_n - c_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_1$.
Tomando $n > max(n_0, n_1), |a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Definición 4.13. Los números reales $\mathbb{R}$ son las clases de equivalencia $[(a_n)]$ de las sucesiones $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ por la relación anterior.

This page is intentionally left blank.

Clase V - 06/09

5.1 Construcción de los Reales

Nota. Dado $q \in \mathbb{Q}$ definimos $\tilde{q}$ como la clase de equivalencia de la sucesión constante como $(q, q, q, \cdots) \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Definición 5.1. $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathbb{R}$, $s = [(a_n)], t = [(b_n)]$ definimos $s + t = [(a_n + b_n)]$ la clase de equivalencia de $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
$s \cdot t = [(a_n b_n)]$ la clase de equivalencia de $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Veamos que están bien definidas, si $[(a_n)] = [(c_n)]$ y $[(b_n)] = [(d_n)]$.
$a_n - c_n \to 0$ y $b_n - d_n \to 0$.
$([a_n] + [(b_n)]) - ([c_n] + [d_n])) = ([a_n] - [(c_n)]) + ([b_n] - [(d_n)]) = 0 \Rightarrow$ la suma está bien definida.
$a_n b_n - c_n d_n = a_n b_n - c_n b_n + c_n b_n - c_n d_n = b_n(a_n - c_n) + c_n(b_n - d_n) \Rightarrow |a_n \cdot b_n - c_n \cdot b_n| \leq |b_n||a_n - c_n| + |c_n||b_n - d_n|$.
Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ están acotadas $\exists M : |b_n| < M$, $|c_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.
$|a_n b_n - c_n b_n| \leq M(|a_n c_n| + |b_n - d_n|) < \varepsilon, \forall n > n_0$.
Porque $a_n - c_n \to 0$, $b_n - d_n \to 0$.

Proposición 5.2. $\mathbb{R}$ es un cuerpo con esta definición.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Teorema 5.3. Dado $S \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists t \in \mathbb{R} : s \cdot t = 1$.

Demostración. $S = [(a_n)]$ sabemos que $S \notin \tilde{0}$, o sea $a_n \not\to 0$. Podría pasar que algunos de los terminos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si sean 0, lo que pasa es que $a_n \neq 0$. para n lo suficiente grande.
Como $a_n \not\to 0$, $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists$ infinitos valores de $M : |a_M - 0| > \varepsilon_1$, si $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{2}$, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de cauchy, $\exists n : |a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n, m > n_0$.
Si $M > n_0$ (puedo porque son infinitos) : $|a_M| > \varepsilon_1 \Rightarrow |a_m - a_M| < \dfrac{\varepsilon_1}{2}, \forall m > n_0$.
$-\varepsilon_1/2 < a_n - a_m < \varepsilon_1/2$ o $-\varepsilon_1/2 < a_m - a_n < \varepsilon_1/2$.
Si $a_M > 0 \Rightarrow \dfrac{\varepsilon_1}{2} < a_M - \dfrac{\varepsilon_1}{2} < a_n < a_M + \dfrac{\varepsilon_1}{2}, \forall n > n_0$.
Si $a_M < 0$, $\dfrac{\varepsilon_1}{2} < -a_M - \dfrac{\varepsilon_1}{2} < -a_n < -a_m + \dfrac{\varepsilon_1}{2} \Rightarrow a_n < -\dfrac{\varepsilon_1}{2}, \forall n > n_0$.
O sea que $\forall n > n_0, a_n$ tiene el mismo signo que a_M en particular $a_n \neq 0, \forall n > n_0$.
Sabiendo esto veamos que $\exists$ el inverso:
$S = [(a_n)] \neq 0$ por lo anterior $\exists n_0 : a_n \neq 0, \forall n > n_0$.
Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ como

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0, \\ \dfrac{1}{a_n} & \text{si } n > n_0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0, \\ 1 & \text{si } n > n_0, \end{cases} \Rightarrow$$

$(1, 1, \cdots) - (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \therefore [(a_n b_n)] = [(1, 1, \cdots)]$, es decir $t = [(b_n)]$ cumple que $t \cdot s = 1$. □

5.2 Cuerpo ordenado

Para probar que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado bajo esta definición hay que definir qué es ser positivo.
Sea $s \in \mathbb{R}$ decimos que s es positivo si $s \neq 0$ y $s = [(a_n)]$ tal que $a_n > 0 \forall n > n_0$. O sea, todos los terminos son positivos a partir de un punto.

Definición 5.4. Decimos que $s > t$ si $s - t > 0$. Ejercicio probar que está bien definido.

Veamos un ejemplo de como se prueban los axiomas de orden.

Teorema 5.5. Sean $s, t \in \mathbb{R} : s > t, r \in \mathbb{R} \Rightarrow s + r > t + r$.

Demostración. $s = [(a_n)], t = [(b_n)], r = [(c_n)]$.
Como $s > t, \exists n_0 : a_n - b_n > 0, \forall n > n_0, a_n - b_n \not\to 0 \Rightarrow (a_n + c_n) - (b_n + c_n) = a_n + b_n > 0$ y $(a_n + c_n) - (b_n + c_n) \not\to 0 \Rightarrow$
$s + r - (t + r) > 0 \Rightarrow s + r > t + r$. □

Teorema 5.6. $\mathbb{R}$ con esta construcción es Arquimediano.

Demostración. Sean $s, t > 0, s, t \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot s > t$.
Es decir si $s = [(a_n)]$, $t = [(b_n)]$ quiero ver que $[(m \cdot a_n)] > [(b_n)]$. O sea que $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$ y que $\exists n_0 : m \cdot a_n - b_n > 0, \forall n > n_0$.

Supongamos que $\forall m, n_0, \exists n > n_0 : m \cdot a_n \leq b_n$. Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy $\Rightarrow$
$\exists M \in \mathbb{Q} : b_n < M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$.
$a_n \leq \dfrac{b_n}{m} \leq \dfrac{M}{m}$, para algún $n > n_0, \forall n_0$.
Como $\mathbb{Q}$ es arquimediano, dado $\varepsilon > 0, \exists m : \dfrac{M}{m} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, elijo m así y tengo que $a_n \leq \dfrac{b_n}{m} < \dfrac{M}{m} < \dfrac{\varepsilon}{2}, n > n_0, \forall n_0$.
Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy $\exists n_0 : \forall n, k > n_0, |a_n - a_k| < \varepsilon/2$. Para este $n_0, \exists$ algún $n > n_0$ tal que $a_n < \varepsilon/2 \Rightarrow$
$\forall k > n_0, a_k - a_n < \varepsilon/2 \Rightarrow a_k < a_n + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow a_n \to 0$. Absurdo! $([a_n]) = S > 0$.

Luego $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot a_n - b_n > 0, \forall n > n_0$. Queda ver que $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$, si $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$ nada que probar. Caso contrario tomamos $m + 1$ en vez de m.
$(m+1) \cdot a_n - b_n = m \cdot a_n + a_n - b_n > a_n > 0, \forall n > n_0 \Rightarrow m \cdot a_n - b_n \to 0$ y $a_n \not\to 0 \therefore$
$\mathbb{R}$ es arquimediano. □

Teorema 5.7. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Es decir dado $r \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q} : |r - q| < \varepsilon$. $r = [(a_n)]$, con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es de Cauchy.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m > n_0$.
Elijo algún $l > n_0$ y defino $q = [(a_l, a_l, \cdots)] \Rightarrow r - q = [(a_n - a_l)]$ y $q - r = [(a_l - a_n)]$.
Como $l > n_0 \Rightarrow (\forall n > n_0)(a_n - a_l < \varepsilon)(a_l - a_n < \varepsilon) \Rightarrow |r - q| < \varepsilon$. □

5.3 R tiene la propiedad del supremo

Sea $S \subset \mathbb{R}, S \neq \varnothing, M$ cota superior de S. Vamos a construir dos sucesiones $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (l_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Como $S \neq \varnothing, \exists s_0 \in S$. Defino $u_0 = M, l_0 = s_0$.
Si ya están definidos u_m, l_m, llamo $m_n = \dfrac{l_n + u_n}{2}$ al punto medio.
i) Si m_n es cota superior de S definimos $u_{m+1} = m_n, l_{n+1} = l_n$.
ii) Si m_n no es cota superior de S definimos $u_{n+1} = u_n$ y $l_{n+1} = m_n$.
Como $s_0 < M$ es fácil ver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y que $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente. Queda como ejercicio demostrarlo.

Lema 5.8. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy de números reales.

Demostración. Por construcción se tiene que $l_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada $* \Rightarrow$
Es de cauchy.

Como $u_n > s_0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -u_n \leq s_0, (-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente $\Rightarrow$
Es de cauchy.

*

Demostración. Supongamos que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy. Entonces existe $\varepsilon > 0$:
$\forall n_0, \exists n, m \geq n_0 : l_n - l_m \geq \varepsilon$.
Como $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, $l_n - l_{n_0} \geq \varepsilon$, inductivamente consigo:
$n_1 > n_0 : l_{n_1} - l_{n_0} \geq \varepsilon$
$n_2 > n_1 : l_{n_2} - l_{n_1} \geq \varepsilon$
$\vdots$

Por otro lado por la arquimedianidad $\exists k \in \mathbb{N} : k \cdot \varepsilon > M - l_{n_0} \Rightarrow$
$l_{n_k} - l_{n_0} = (l_{n_k} - l_{n_{k-1}}) + (l_{n_{k-1}} - l_{n_{k-2}}) + \cdots + (l_{n_1} - l_{n_0}) > k \cdot \varepsilon > M - l_{n_0} \Rightarrow$
$l_{n_k} > M$. Absurdo! $\square$

$\square$

Lema 5.9. $\exists u \in \mathbb{R} : u_n \to u$.

Demostración. Sea u_n un termino de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \exists q_n \in \mathbb{Q} : |u_n - q_n| < \dfrac{1}{n}$
Consideremos $(q_1, q_2, \cdots) \subset \mathbb{Q}$.
Afirmo que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\Rightarrow$
$\exists n_0 : \forall n, m > n_0, |u_n - u_m| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Por arquimedianidad $\exists n_1 : \dfrac{1}{m}, \forall n > n_1 \Rightarrow$ si $n > max(n_0, n_1) \Rightarrow$
$|q_n - q_m| \leq |q_n - u_n| + |u_n - u_m| + |u_m - q_m| < \varepsilon \Rightarrow$
$u = [(q_n)] \in \mathbb{R}$, falta ver que $u_n \to u$.
Si $\tilde{q}_n = [(q_n, q_n, \cdots)] \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{q}_n - u \to 0$ pues q_n es de Cauchy y por construcción
$u_n - q_n < \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_n - \tilde{q}_n \to 0$ y como $\tilde{q}_n - u \to 0 \Rightarrow$
$u_n \to u$. $\square$

Lema 5.10. $l_n \to u$

Demostración. Según las posibles definiciones de l_n tenemos que:

$u_{n+1} - l_{n+1} = m_n - l_n = \dfrac{u_n + l_n}{2} - l_n = \dfrac{u_n - l_n}{2}$ o

$u_{n+1} - l_{n+1} = u_{n+1} - m_n = u_n - \dfrac{u_n - l_n}{2} = \dfrac{u_n - l_n}{2} \Rightarrow$

$u_1 - l_1 = \dfrac{1}{2}(M - s)$

$u_2 - l_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - l_1) = (\dfrac{1}{2})^2(u - s)$

$\vdots$

$u_n - l_n = (\dfrac{1}{2})^n(M - s)$

Por arquimedianidad de $\mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \dfrac{1}{2^n}(M - s) < \varepsilon, \forall n > n_0 \Rightarrow$
$u_n - l_n \to 0 \therefore l_n \to u$, pues $u_n \to u$. □

Teorema 5.11. $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del supremo.

Demostración. 1) Veamos que u es cota superior, si no $u < s, s \in S \Rightarrow \varepsilon = s - u > 0$, como $u_n \to u$ y es decreciente $\exists n : u_n - u < \varepsilon \Rightarrow u_n < u + \varepsilon = u + s - u = s$ Absurdo, por construcción u_n era cota superior de $S, \forall n$.

2) Veamos que es la menor de las cotas superiores.
Sabemos que l_n no es cota superior de S, así que $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists s_n \in S) : l_n \leq s_n$. Como $l_n \to u$ y l_n es creciente $\Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : l_n > u - \varepsilon, \forall n > n_0 \Rightarrow s_n \geq l_n > u - \varepsilon, \forall n > n_0$. Es decir que para todo $\varepsilon > 0$ tengo un s_n más grande en $S \therefore u$ es la menor de las cotas superiores. □

This page is intentionally left blank.

Clase VI - 10/09

6.1 Sucesiones

Una sucesión de números reales es una función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Notamos $x(n) = x_n$ y lo llamamos el n-ésimo término de la sucesión. Indicamos la sucesión como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_1, x_2, \cdots)$.
Una subsucesión de x es la restricción de x a un subconjunto infinito $A = \{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$.
Escribimos $(x_n)_{n\in A}$ para indicar la subsucesión.

Nota. Estrictamente la subsucesión no tiene dominio $\mathbb{N}$, pero es trivial considerarla como una función definida en $\mathbb{N}$ componiendo con $1 \mapsto x_1, 2 \mapsto x_2, \cdots$
Por esto se usa la notación $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Definición 6.1. Decimos que $a = \lim_{n\to\infty} x_n \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$.
Equivalentemente, si $\forall \varepsilon > 0$ el intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contiene a todos los términos de la sucesión salvo quizás un número finitos.

Teorema 6.2 (Unicidad del límite). Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow a = b$

Demostración. Supongamos que $a \neq b$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$.
$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$. En efecto si x pertenece a la intersección entonces $|x-a| < \varepsilon$ y $|x-b| < \varepsilon \Rightarrow$
$|b-a| \leq |a-x| + |x-b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b-a|$ Absurdo! Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$
$\exists n_0 : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \forall n > n_0 \Rightarrow$
$x_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon), \forall n > n_0 \therefore \lim_{n\to\infty} x_n \neq b$ pues vimos que son disjuntos. $\square$

Teorema 6.3. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a.

Demostración. Dado $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots)$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por hipotesis dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$. Como los índices de la subsucesión son infinitos, $\exists n_{i_0} > n_0 \Rightarrow$ si $n_i > n_{i_0} \Rightarrow |x_{n_i} - a| < \varepsilon, (n_i > n_{i_0} > n_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n_i} = a$. $\square$

Teorema 6.4. Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración. Sea $a = lim_{n\to\infty} x_n$. Tomando $\varepsilon = 1, \exists n_\varepsilon : x_n \in (a-1, a+1), \forall n > n_\varepsilon$.
$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_\varepsilon}, a-1, a+1\}$, $c = min(A)$, $d = max(A) \Rightarrow x_n \in [c, d], \forall n \in \mathbb{N} \therefore$
la sucesión es acotada. □

Teorema 6.5. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada y quiero ver que $lim_{n\to\infty} x_n = a = sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Dado $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a, a - \varepsilon$ no puede ser cota superior de $\{x_n\} \Rightarrow \exists n_0 : x_{n_0} > a - \varepsilon$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, si $n > n_0 \Rightarrow x_n > x_{n_0} > a - \varepsilon \Rightarrow$
$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore x_n \to a$.
Análogamente para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada. □

Corolario 6.6. Si una sucesión monótona tiene una subsucesión convergente $\Rightarrow$ es convergente.

Demostración. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada porque tiene una subsucesión acotada. □

Ejemplo. $x_n = a^n, a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$ o $a = 1$ la sucesión es constante.
Si $a = -1$, la sucesión diverge porque $x_{2n} \to 1$ y $x_{2n+1} \to -1$.
Si $a > 1$, la sucesión es creciente y no acotada $\Rightarrow$ diverge.
Si $a < -1$, la sucesión es decreciente y no acotada $\Rightarrow$ diverge.
Si $0 < a < 1$, la sucesión es convergente por ser subsucesión de $\frac{1}{n}$ y más aún $a^n \to 0$.
Si $-1 < a < 0$, la sucesión converge pues $|a^n| = |a|^n = a^n \to 0$.

6.2 Propiedades de límites

Teorema 6.7. Si $lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada $\Rightarrow lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$.

Demostración. $\exists c : |y_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}$, pues y_n es acotado.
Dado $\varepsilon > 0$, como $x_n \to 0, \exists n_0 : |x_n| < \varepsilon/c, \forall n > n_0 \Rightarrow$
$|x_n y_n| < c(\varepsilon/c) = \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore x_n \cdot y_n \to 0$. □

Sea $lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $lim_{n\to\infty} y_n = b$.

Proposición 6.8. $x_n + y_n \to a + b$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0$ y
$\exists n_1 \in \mathbb{N} : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_1$. Sea $n_2 = max(n_0, n_1)$
Si $n > n_2, |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Proposición 6.9. $x_n - y_n \to a - b$.

Demostración. Análogo. □

Proposición 6.10. $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.

Demostración. $x_n \cdot y_n - ab = x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b = x_n \cdot (y_n - b) + b \cdot (x_n - a)$.
Como $y_n - b \to 0$ y x_n es acotada, pues es convergente $\Rightarrow x_n \cdot (y_n - b) \to 0$. Además
$x_n - a \to 0 \Rightarrow b(x_n - a) \to 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n = a \cdot b$. □

Proposición 6.11. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$.

Demostración. Si $y_n \not\to 0 \Rightarrow y_n \neq 0$ salvo quizá finitos términos.
En efecto, como $b \neq 0$, si $\varepsilon = |b|$ resulta que $0 \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \Rightarrow$
$\exists n_\varepsilon : y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \forall n > n_\varepsilon$, luego $y_n \neq 0, \forall n > n_\varepsilon$.

Ahora escribo $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - a \cdot y_n}{y_n \cdot b}$ quiero ver que $\frac{1}{y_n \cdot b}$ es acotada.
Como $y_n \cdot b \to b^2$ si $\varepsilon = \frac{b^2}{2}, \exists n_0 : y_n \cdot b > \frac{b^2}{2}, \forall n > n_0 \Rightarrow$
$0 < \frac{1}{y_n \cdot b} < \frac{2}{b^2}, \forall n > n_0 \Rightarrow (\frac{1}{y_n \cdot b})_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. □

6.3 Ejemplo subsucesiones

Ejemplo. $x_n = \sqrt[n]{a},\ a > 0$.
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona (decreciente si $a > 1$, creciente si $0 < a < 1$) y acotada $0 < l = \text{lím}_{n \to \infty} \sqrt[n]{a}$.
Para ver que $l = 1$, considero la subsucesión $(a^{\frac{1}{n(n+1)}})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a l.
$l = \text{lím}_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \text{lím}_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{\text{lím}_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}}}{\text{lím}_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{l}{l} = 1$.
$\therefore l = 1$.

Ejemplo. $x_n = \sqrt[n]{n}$.
Veamos si es monótona. $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \iff n^{n+1} > (n+1)^{n+1} \iff n > (\frac{n+1}{n})^{n+1}$.
Esto pasa para $\forall n \geq 3$ porque $(1+\frac{1}{n})^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Se puede demostrar por inducción.
Luego, es decreciente a partir del tercer término.
Además está acotada inferiormente por $0, (\sqrt[n]{n} > 0) \therefore \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = l = \inf\{\sqrt[n]{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Como $\sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow l \geq 1$ y $l \neq 0$.
Considero la subsucesión $(2n)^{\frac{1}{2n}} \Rightarrow l^2 = (\lim_{n\to\infty}(2n)^{\frac{1}{2n}})^2 = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \cdot l$.
Luego $l^2 = l$ y $l \neq 0 \therefore l = 1$.

Nota. La definición de límite puede ser reformulada de la siguiente forma:
Dado $a \in \mathbb{R}$ es el límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ tiene complemento finito (o vacío) en $\mathbb{N}$.

Vamos a ver que $a \in \mathbb{R}$ es el límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ es subconjunto infinito de $\mathbb{N}$

Teorema 6.12. $a \in \mathbb{R}$ es el límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists$ infinitos índices $n : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Demostración. Para la ida tenemos que $a = \lim_{n\in A} x_n$, con $A = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists i_0 : x_{n_i} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \forall i > i_0$.
Como existen infinitos $i > i_0 : n_i \in A \Rightarrow \exists$ infinitos $n_i \in \mathbb{N}$ tales que $x_{n_i} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Recíprocamente si tomamos sucesivamente $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \cdots$. Puedo obtener $A = \{n_1, n_2, \cdots\} : \lim_{n\in A} x_n = a$ pues:
Sea $n_1 \in \mathbb{N} : x_{n_1} \in (a-1, a+1)$. Supongamos por inducción que $n_1 < n_2 < \cdots < n_i$ fueron definidos tales que $x_{n_2} \in (a-1/2, a+1/2), \cdots x_{n_i} \in (a-1/i, a+1/i)$.
Como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a-\frac{1}{1+i}, a+\frac{1}{1+i})\}$ es infinito, contiene algún x_n con $n > n_i$ y lo tomo como x_{n_i+1}.
Como $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_{n_i} = a$. □

6.4 Punto de acumulación

Definición 6.13. $a \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si es límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 6.14. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, digamos $\alpha \leq x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$. Si llamamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ tenemos que $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$.
Así que llamando $a_n = \inf(X_n)$, $b_n = \sup(X_n)$ tenemos que

$\alpha \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le \beta \Rightarrow$.
$\exists a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sup(\inf(X_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \inf(\sup(X_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

a se llama el límite inferior de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$a = \liminf_{n\to\infty} x_n$.

b se llama el límite superior de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$b = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Ejemplo. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 2, -1/2, 3/2, -1/3, 4/3, \cdots)$.
$(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = -\frac{1}{n}$ y $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = 1 + \frac{1}{n}$.
Luego $\inf(X_{2n-2}) = \inf(X_{2n-1}) = -\frac{1}{n}$
$\sup(X_{2n-2}) = \sup(X_{2n-1}) = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = 0$ y $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$.

This page is intentionally left blank.

Clase VII - 13/09

7.1 Límite superior e inferior

Teorema 7.1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $\Rightarrow$ $\liminf x_n$ es el menor punto de acumulación de la sucesión y $\limsup x_n$ es el mayor.

Demostración. Veamos que $a = \liminf_{n\to\infty} x_n$ es punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Como $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ (los ínfimos de X_n). Dados ε y $n_0 \in \mathbb{N}, \exists n_1 > n_0 : a-\varepsilon < a_{n_1} < a+\varepsilon$, $a_{n_1} = inf(X_{n_1}) \Rightarrow a+\varepsilon$ no puede ser cota inferior de X_{n_1}.
$\Rightarrow \exists n \geq n_1 : a_{n_1} \leq x_n \leq a+\varepsilon$, $(n \geq n_1 \geq n_0$ y $(a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon)$, luego a es punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Falta ver que si $c < a \Rightarrow c$ no es punto de acumulación.
Como $a = lim_{n\to\infty} a_n$ y $c < a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : c < a_{n_0} \leq a$. Como a_{n_0} es el ínfimo de X_{n_0} si $n \geq n_0 \Rightarrow c < a_{n_0} \geq x_n$. Tomando $\varepsilon = a_{n_0} - c \Rightarrow c+\varepsilon = a_{n_0}$ y entonces $\forall x_n : n \geq n_0, x_n \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \therefore c$ no es punto de acumulación. □

Teorema 7.2. Toda sucesión acotada de $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración. $\limsup x_n$ es punto de acumulación de x_n así que alguna subsucesión converge a él. □

Corolario 7.3. Una sucesión acotada de $\mathbb{R}$ es convergente $\iff$ $\limsup x_n = \liminf x_n$, es decir, posee un único punto de acumulación.

Demostración. Para la ida tenemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, toda subsucesión converge a lo mismo y en particular $\limsup x_n = \liminf x_n = lim_{n\to\infty} x_n$.
Para la vuelta, si $\limsup x_n = \liminf x_n = lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow$
Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : a-\varepsilon \leq a_{n_0} \leq a \leq b_{n_0} \leq a+\varepsilon$.
Como $n \geq n_0 \Rightarrow a_{n_0} \leq x_n \leq b_{n_0}$. □

7.2 Sucesiones de Cauchy

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, decimos que es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m > n_0$. Al igual que hicimos con las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy

2. Toda sucesión de Cauchy es acotada

Lema 7.4. Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión que converge a $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon/2, \forall n, m > n_0$.
Como a es el límite de una subsucesión $\exists n_1 > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon/2$.
$\Rightarrow$ si $n > n_0, |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

Teorema 7.5. Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente.

Demostración. Por ser de Cauchy es acotada, por ser acotada alguna subsucesión converge al $\limsup$ o $\liminf$ y por el lema anterior, toda la sucesión converge. □

7.3 Límites infinitos

Definición 7.6. Decimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ si dado $a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n > a \forall n > n_0$.

Definición 7.7. Decimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si dado $a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n < -a \forall n > n_0$.

Proposición 7.8. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

Demostración. Sea $A > 0, \exists c \in \mathbb{R} : c < y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n > A - c, \forall n > n_0 \Rightarrow$ Si $n > n_0, x_n + y_n > A - c + c = A \therefore \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. □

Proposición 7.9. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\exists c > 0 : y_n > c, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty$.

Demostración. Dado $A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n > A/c, \forall n > n_0 \Rightarrow$ si $n > n_0, x_n \cdot y_n > (A/c) \cdot c = A \therefore \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = +\infty$. □

Proposición 7.10. $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Demostración. Para la ida, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dado $A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1/A, \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} > A, \forall n > n_0 \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
Para la vuelta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$. Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > n_0 \Rightarrow$
$0 < x_n < \varepsilon, \forall n > n_0 \therefore \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. □

Proposición 7.11. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números positivos $\Rightarrow$
a) Si $\exists c > 0 : x_n > c, \forall n \in \mathbb{N}$ y si $\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Demostración. a) Dado $A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 < y_n < c/A, \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > (A/c) \cdot c = A, \forall n > n_0 \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
b) Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : y_n > k/\varepsilon, \forall n > n_0$, donde $k > 0$ es cota superior de $x_n \Rightarrow \forall n > n_0, 0 < \frac{x_n}{y_n} < k \cdot (\varepsilon/k) = \varepsilon \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$. □

7.4 Series numéricas

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ formamos una nueva sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dada por $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \cdots, S_n = a_1 + \cdots + a_n$; que llamamos sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Teorema 7.12. $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \Rightarrow 0 = s - s = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

Ejemplo. El recíproco del teorema anterior es falsa pues $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Demostración.

$$S_{2^n} = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}) \quad (7.1)$$

$$> 1 + 1/2 + 2/4 + 4/8 + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n/2 \quad (7.2)$$

Luego $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$. □

Teorema 7.13. $a_n \geq 0, \forall n > 0 \Rightarrow$
$\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\iff$ S_n forman una sucesión acotada.

Demostración. Por ser $a_n \geq 0$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, luego converge $\iff$ es acotada. □

Corolario 7.14 (Criterio de comparación). Sean $a_n, b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, dadas $\sum_{n\geq 1} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n \Rightarrow$
Si $\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq c \cdot b_n, \forall n > n_0 \Rightarrow$

1. Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
2. Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.

Nota. $\sum a_n$ converge $\iff$ Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq n_0} a_n$ converge.

Demostración. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la primera serie, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la segunda, $t_n = s_{n+n_0} - s_{n_0}$. □

Teorema 7.15 (Criterio de Cauchy)**.** $\sum a_n$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_0, p \in \mathbb{N}$.

Demostración. $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente. □

Definición 7.16. $\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ converge.
Si $\sum a_n$ converge y $\sum |a_n|$ diverge entonces decimos que es condicionalmente convergente.

Teorema 7.17. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración. Como $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| < \varepsilon, \forall n > n_0, p \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_0, p \in \mathbb{N} \therefore \sum a_n$ converge. □

This page is intentionally left blank.

Clase VIII - 24/09

8.1 Ejemplo de convergencia condicional

Ejemplo. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero no lo hace absolutamente.

Demostración. i) Las sumas parciales pares son:

- $S_2 = 1 - 1/2$
- $S_4 = (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4)$
- $S_6 = (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6)$

En general $S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S_{2n} < \cdots < 1$, es creciente y acotada, luego converge.
ii) Las sumas parciales impares son:

- $S_1 = 1$
- $S_3 = 1 - (1/2 - 1/3)$
- $S_5 = 1 - (1/2 - 1/3) - (1/4 - 1/5)$

En general $S_1 > S_2 > \cdots > S_{2n+1} > \cdots > 0$. Es decreciente y acotada, luego converge.
Por i) e ii) $\exists \tilde{s} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ y $\exists s\prime = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$, como $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \to 0 \Rightarrow \tilde{s} = s\prime \therefore$ la serie converge. □

8.2 Corolarios de series

Corolario 8.1. Sea $\sum b_n$ una serie convergente de términos positivos si $\exists k > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n| \leq k \cdot b_n, \forall n > n_0 \Rightarrow$
$\sum a_n$ converge absolutamente.

Demostración. Sencilla aplicación del criterio de comparación. □

Corolario 8.2. $\forall n > n_0, |a_n| \leq k \cdot c^n$ con $0 < c < 1, k > 0 \Rightarrow$
$\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración. Como $c \in (0, 1)$, $\sum c^n$ converge (serie geométrica). □

Nota. Tomando $k = 1, |a_n| \leq c^n \iff \sqrt[n]{a_n} \leq c < 1, \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$. Que esto valga para algún n_0 específico significa que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

8.3 Criterios de convergencia

8.3.1. Criterio de la raíz

Corolario 8.3. Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge absolutamente.

Nota. Si existen infinitos índices tales que $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge pues $a_n \not\to 0$.
Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ el criterio no concluye ($\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$).

8.3.2. Criterio del cociente y D'Alembert

Teorema 8.4 (Criterio del cociente). Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie tal que $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ una serie de términos positivos y convergente $\Rightarrow$
Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|}, \forall n > n_0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración.

$$\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{|b_{n_0+2}|}{|b_{n_0+1}|}, \cdots, \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \frac{|b_n|}{|b_{n-1}|}, \forall n > n_0 \tag{8.1}$$

Multiplicando todas las desigualdades obtenemos

$$\frac{|a_n|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{|b_n|}{|b_{n_0+1}|} \iff |a_n| \leq \frac{|a_{n_0+1}| \cdot b_n}{b_{n_0+1}} \tag{8.2}$$

$\therefore$ por criterio de comparación $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. □

Corolario 8.5 (Criterio de D'Alembert). Si $\exists c \in (0, 1) : \dfrac{|a_{n+1}|}{a_n} \leq c, \forall n > n_0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente.
Equivalentemente si $\limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente.

Demostración. Tomamos $b_n = c^n$ en el teorema anterior pues $\sum_{n\geq 1} c^n$ converge si $c \in (0,1)$. $\square$

Nota. Si el cociente es 1 el criterio no decide.
Si el cociente es mayor que 1 la serie diverge.

Teorema 8.6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{8.3}$$

En particular si $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y son iguales.

Demostración. Veamos que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Supongamos que no lo es $\Rightarrow$

$$\exists c : \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < c < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{8.4}$$

Por la primer desigualdad $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} < c \Rightarrow$

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < c, \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < c, \cdots, \frac{a_n}{a_{n+1}} < c \Rightarrow \tag{8.5}$$

Multiplicando termino a termino

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < c^{n-n_0} \Rightarrow a_n < \frac{a_{n_0}}{c^{n_0}} \cdot c^n \tag{8.6}$$

Llamemos $k = a_{n_0}/c^{n_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k\cdot c^n} = c \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = c$
Tendríamos que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{k\cdot c^n} = c$ Absurdo!
Luego debe ser $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$\square$

Ejemplo. Puede existir el límite de la raíz y no del cociente.

Demostración. Sean $0 < a < b$ y la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que se obtiene alternando cada término por a ó b.
$x_1 = a$, $x_2 = a \cdot b$, $x_3 = a^2 \cdot b$, $x_4 = a^2 \cdot b^2$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} b & \text{si n es par,} \\ a & \text{si no} \end{cases}$$

Luego $\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, pero $\limsup_{n\to\infty} x_n = b$, $\liminf_{n\to\infty} x_n = a$.
Por otro lado $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{a \cdot b}$. Si $x_{2k} = a^k \cdot b^k \Rightarrow \sqrt[2k]{a^k \cdot b^k} = \sqrt{a \cdot b}$.
Si $x_{2k-1} = a^k \cdot b^{k-1} \Rightarrow \sqrt[2k-1]{x_{2k-1}} = a^{\frac{k}{2k-1}} \cdot b^{\frac{k}{2k-1}} \to \sqrt{a \cdot b}$ si $k \to \infty$. □

8.3.3. Criterio de Dirichlet - Abel

Teorema 8.7. Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ no necesariamente convergente cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada.
Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos con $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \cdot b_n$ es convergente.

Demostración.

$$a_1 \cdot b_1 + \cdots a_n \cdot b_n = \tag{8.7}$$

$$a_1 \cdot (b_1 - b_2) + (a_1 + a_2) \cdot (b_2 - b_3) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{n-1}) \cdot (b_{n-1} - b_n) + (a_1 + \cdots + a_n) \cdot b_n \tag{8.8}$$

$$= S_1 \cdot (b_1 - b_2) + S_2 \cdot (b_2 - b_3) + S_3 \cdot (b_3 - b_2) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n \cdot b_n \tag{8.9}$$

$$= \sum_{i=2}^{n} S_{i-1} \cdot (b_{i-1} - b_i) + S_n \cdot b_n \tag{8.10}$$

Por hipotesis $\exists k > 0 : |S_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$ (son acotadas). Además $\sum_{n\geq 2} b_{n-1} \cdot b_n$ es una telescópica de números positivos.
Luego $\sum_{n\geq 2} S_{n-1} \cdot (b_{n-1} - b_n)$ es absolutamente converge y en particular convergente.
Como $S_n \cdot b_n \to 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 2}^{n} S_{i-1} \cdot (b_{i-1} - b_i) + S_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1}^{n} a_n \cdot b_n \therefore$ converge. □

Corolario 8.8 (Abel). Si $\sum a_n$ es convergente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente de términos positivos $\Rightarrow \sum a_n \cdot b_n$ es convergente.

Demostración. $b_n \to c$ pues es acotada inferiormente por 0 y decreciente.
Sea $(b_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que tiende a cero, podemos aplicar el teorema anterior y, luego $\sum_{n\geq 1} a_n \cdot (b_n - c) = S \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \cdot b_n = S - \sum a_n \cdot c$. □

Corolario 8.9 (Criterio de Leibniz). Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ converge.

Demostración. Aplicamos el criterio de Dirichlet pues $\sum(-1)^n$ no converge y $S_n = 0, -1$ son acotadas. $\square$

8.4 Parte positiva y negativa

Definición 8.10. Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n > 0, \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$ $q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0, \\ -a_n & \text{c.c} \end{cases} \Rightarrow p_m, q_n \geq 0, \forall n \in N, a_n = p_n - q_n$ y $|a_n| = p_n + q_n = a_n + 2 \cdot q_n = 2 \cdot p_n - a_n$.

Nota. Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ vale que:

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} p_n + \sum_{n=1}^{k} q_n \Rightarrow \tag{8.11}$$

$\sum_{n\geq 1} p_n$ y $\sum_{n\geq 1} q_n$ convergen, pues son crecientes y están acotadas por $\sum_{n\geq 1} |a_n|$.

Además si $\sum_{n\geq 1} p_n$ y $\sum_{n\geq 1} q_n$ convergen $\Rightarrow \sum a_n$ converge absolutamente.

Teorema 8.11. Si $\sum a_n$ converge condicionalmente $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} p_n$ y $\sum_{n\geq 1} q_n$ son divergentes.

Demostración. Supongamos que $\sum q_n = c \Rightarrow |a_n| = a_n + 2 \cdot q_n$

$$\sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} a_n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{k} q_n \tag{8.12}$$

Si $k \to +\infty$ luego $\sum_{n\geq 1} |a_n| = \sum_{n\geq 1} a_n + 2 \cdot c$ Absurdo! pues no converge absolutamente $\therefore \sum_{n\geq 1} q_n$ diverge. $\square$

8.5 Reordenamientos

Definición 8.12. Sea $\sum a_n$, cambiar el orden de la suma significa tomar una biyección $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y considerar la serie $\sum b_n$ como $b_n = a_{\phi(n)}$.

Teorema 8.13. Todas las reordenaciones de una serie absolutamente convergente convergen al mismo valor de la serie original.

Demostración. Sea $\sum a_n, a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección y $b_n = a_{\phi(n)}$ quiero ver que $\sum b_n = \sum a_n$.
Sea S_n las sumas parciales de a_n y T_n las de b_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamo $m = max(\phi(1), \cdots \phi(n))$. Donde $\{\phi(1), \cdots, \phi(n)\} \subseteq [[1, m]]$.
Luego $T_n = \sum_{i \geq 1} a_{\phi(i)} \leq \sum_{j \geq 1} a_j = S_m$. Luego $T_n \leq S_m$.
Análogamente con $\phi^{-1} \Rightarrow S_m \leq T_n$ luego $\lim_{n \to \infty} S_n = lim_{n \to \infty} T_n \therefore \sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} b_n$. $\square$

El caso general, $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} p_n - \sum_{n \geq 1} q_n \Rightarrow$ todo reordenamiento $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de los términos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ produce un reordenamiento de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que llamo $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De modo que son la parte positiva y negativa de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y usamos el caso anterior pues son términos de valores positivos.

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

[1] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis, 3rd Edition.* McGraw-Hill, New York, 1976.