Notas del teórico

Complementos de análisis matemático - Irene Drelichman 2024

Bustos Jordi

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

This page is intentionally left blank.

Clase I - 23/08

1.1 Repaso de funciones

Una función $f : A \to B$ es un objeto que consta de tres partes: un conjunto A (dominio), un conjunto B (codominio) y una regla que permite asociar todo elemento de A a un único elemento de B. Es decir, $f(x) \in B$, donde $x \in A$. Además, $f(x) = y$, lo que significa que f asigna a x el valor $f(x)$.

El gráfico de $f : A \to B$ es el subconjunto de $A \times B$ dada por $(x, f(x))$ con $x \in A$ y $f(x) \in B$. Notamos $G(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$.

Definición 1.1. $f : A \to B$ es inyectiva cuando para $x, y \in A$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Definición 1.2. $f : A \to B$ es suryectiva cuando para $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

Definición 1.3. $f : A \to B$ si es inyectiva y suryectiva.

Definición 1.4. Dados $f : A \to B$ y $X \subset A$ se llama imagen de X por f al conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

1.1.1. Propiedades

Proposición 1.5. $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$

Proposición 1.6. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. La igualdad vale si y sólo si es inyectiva.

Demostración. Sea $a \in f(X \cap Y) \Rightarrow \exists x \in X \cap Y : f(x) = b \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X)$ y $y \in Y \Rightarrow f(y) \in f(Y)$.
Si $f : A \to B$ no es inyectiva $\Rightarrow \exists x \neq y : f(x) = f(y)$. Si $X = \{x\}$, $Y = \{y\} \Rightarrow X \cap Y = \varnothing$.
$f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\}$ luego $f(X \cap Y) = \varnothing$.
Si f es inyectiva, sea $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists a \in X, b \in Y$ tal que $f(a) = f(b) = y$. Como f es inyectiva $a = b \Rightarrow a \in X \cap Y \Rightarrow y = f(a)$, $y \in f(X \cap Y) \Rightarrow f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$
$\therefore$ Si f es inyectiva son iguales. $\square$

Proposición 1.7. $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$

Proposición 1.8. $f(\varnothing) = \varnothing$

Definición 1.9. Dados $f : A \to B$ y $Y \subset B$ se llama preimagen de Y por f al conjunto $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) = y, \forall y \in Y\}$.

1.1.2. Función inversa

Sea $f : A \to B$:

Proposición 1.10. $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$

Proposición 1.11. $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$

Proposición 1.12. $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

Proposición 1.13. $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$

Proposición 1.14. $f^{-1}(B) = A$

Proposición 1.15. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

1.1.3. Composición de funciones

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \forall x \in X$, es suficiente que $f(A) \subset B$.

Proposición 1.16. Composición de funciones suryectivas/inyectivas es suryectiva/inyectiva.

Proposición 1.17. $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

Definición 1.18. La restricción de f en un subconjunto $X \subset A$ la notamos $f|_X : X \to B$.

Definición 1.19. Dada $f : A \to B$ y $g : B \to A$, g es una inversa a izquierda si y sólo si $g \circ f = id_A$. $\exists g$ si y sólo si f es inyectiva.
Análoamente para la inversa a derecha si f es suryectiva. Si f es biyectiva $\Rightarrow$ g es inversa a ambos lados y es única.

1.1.4. Familia de funciones

Sea L un conjunto de elementos que llamamos índices y representamos genéricamente con λ.

Dado un conjunto X, una familia de elementos de X con índices en L es $X : L \to x$. El valor de x en $\lambda \in L$ lo notamos x_λ y la familia $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Ejemplo. $L = \{1, 2\}$ los valores de $x : \{1, 2\} \to X$ se representan por x_1, x_2, es decir que los puedo identificar con pares ordenados (x_1, x_2) de elementos de X.

Una familia con elementos en $\mathbb{N}$ se llama sucesión. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X es una función de $x : \mathbb{N} \to X$ donde $x_n = x(n)$.

Las propiedades enunciadas previamente se pueden extender a cualquier familia de conjuntos.

1.2 Números naturales

Partimos de un conjunto $\mathbb{N}$ y una función $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple los siguientes axiomas (de Peano):
1) Es inyectiva.
2) $\mathbb{N} - S(\mathbb{N})$ tiene un solo elemento y lo llamamos 1.
3) Principio de inducción, si $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ y $\forall m \in X$ vale $S(m) \Rightarrow X = \mathbb{N}$.

El principio de inducción permite definir operaciones
La suma se define como $m + 1 = S(m)$, $m + S(n) = S(m + n)$.

Proposición 1.20. Asociatividad: sea $X = \{p \in \mathbb{N} : m+(n+p) = (m+n)+p, \forall n, m \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. $1 \in X$, $p \in X \Rightarrow m + (n + S(p)) = m + S(n + p) = S(m + (n + p)) = S((n + m) + p) = (m + n) + S(p)$. Por inducción $X = \mathbb{N}$. □

Proposición 1.21. Conmutatividad: $n + m = m + n$.

Proposición 1.22. Ley de cancelación: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$.

Proposición 1.23. Tricotomía: $m, n \in \mathbb{N}$, si $m > n, \exists p : m + p = n$. Si $m < n$, $\exists p \in \mathbb{N} : n + p = m$.

Definición 1.24. La multiplicación se define recursivamente como: $m \times 1 = m$ y $m \times (n + 1) = m \times n + m$.
Cumple la asociatividad, conmutatividad, ley de cancelación y monotonía.

Teorema 1.25. Principio de buena ordenación
Todo subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

Demostración. Llamemos $\mathbb{I}_m = \{p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n\} = [[1, m]]$ y $X = \{m \in \mathbb{N} : \mathbb{I}_m \subset \mathbb{N} - A\}$.
Si $1 \in A \Rightarrow 1$ es primer elemento. Si $1 \notin A \Rightarrow 1 \in X$ como $X \neq \mathbb{N}$ pues $X \subseteq \mathbb{N} - A$ y $A \neq \varnothing$. Por el principio de inducción $\exists m \in X$ tal que $m + 1 \notin X$, si no tendríamos que $X = \mathbb{N}$. Luego todos los elementos entre 1 y m están en $\mathbb{N} - A$ y $m + 1 \in A$, se sigue que $a = m + 1$ es primer elemento de A. □

1.3 Cuerpo

Un cuerpo es un conjunto dotado de dos operaciones, suma y producto y se denota por $\mathbb{K}$.

1.3.1. Axiomas de la suma

1) Asociatividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, (x + y) + z = x + (y + z)$.
2) Conmutatividad: $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y = y + x$.
3) Neutro: $\exists 0 \in \mathbb{K} : x + 0 = x, \forall x \in X$.
4) Opuesto: $\forall x \in X, \exists - x \in \mathbb{K} : x + (-x) = 0_{\mathbb{K}}$.

1.3.2. Axiomas del producto

1) Asociatividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, (xy)z = x(yz)$.
2) Conmutatividad: $\forall x, y \in \mathbb{K}, xy = yx$.
3) Neutro: $\exists 1 \in \mathbb{K} - \{0\} : x \cdot 1 = x, \forall x \in X$.
4) Inverso: $\forall x \in X, \exists x^{-1} \in \mathbb{K} : x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$.
Axioma de distributividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x(y + z) = xy + xz$.

Ejemplo. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$.

1.3.3. Cuerpos Ordenados

Un cuerpo ordenado es un cuerpo $\mathbb{K}$ que tiene un subconjunto $P \in \mathbb{K}$ llamado conjunto de elementos positivos de $\mathbb{K}$ que cumplen:

1) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P, xy \in P$.
2) $x \in \mathbb{K} \Rightarrow x \in P$ o $-x \in P$ o $x = 0$.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ con $P = \{p/q : p, q \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_2$ no es ordenado.

Proposición 1.26. Dado un cuerpo ordenado si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 \in P$.

En un cuerpo ordenado definimos $x < y$ para significar que $y - x \in P$.
La relación $<$ tiene las siguientes propiedades:

Proposición 1.27. Transitividad: $x < y$ y $y < z \Rightarrow x < z$.

Proposición 1.28. Tricotomía: $x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow x = y$ o $x < y$ o $x > y$.

Proposición 1.29. Monotonía de la suma $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.

Proposición 1.30. Monotonía del producto $x < y, 0 < z \Rightarrow xz < yz$.

En el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ escribimos $x \leq y$ para significar $x < y$ o $x = y$. O sea $y - x \in P \cup \{0\}$. Con esta relación se cumplen todas las propiedades anteriores y la antisimetría. $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.
Además tenemos la noción de intervalo, dados $a, b \in \mathbb{K}$ definimos $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}, [a, b), (a, b], (a, b), [a, +\infty), (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, b), [a, a] = \{a\}$.
Un subconjunto de $X \subset K$ se dice acotado inferiormente, superiormente si tiene cota inferior o cota superior. $\exists b \in \mathbb{K} : x \leq b, \forall x \in X$.

This page is intentionally left blank.

Clase II - 27/08

2.1 Cuerpo Arquimediano

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, pero esto no necesariamente implica que $\mathbb{N}$ es no acotado.

Ejemplo. $\mathbb{Q}(t)$: cuerpo de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{Q}$, $r(t) = p(t)/q(t)$, $p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$. Este cuerpo puede ser ordenado diciendo que $r(t)$ es positivo si y sólo si el coeficiente de mayor grado del polinomio pq es positivo. En este cuerpo observemos que $p(t) = t = t/1$ cumple que $\forall n \in \mathbb{N}, p(t) = t - n \in P \Rightarrow t > n, \forall n \in \mathbb{N}$. Es decir que en $\mathbb{Q}(t)$, $\mathbb{N}$ es un conjunto acotado, por ejemplo por t.

Teorema 2.1. En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ son equivalentes:
1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ no es acotado superiormente.
2) Dados $a, b \in \mathbb{K}$ con $a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : m \cdot a > b$.
3) Dado cualquier $0 < a \in \mathbb{K}, \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \dfrac{1}{a} < a$.
Cuando vale cualquiera decimos que $\mathbb{K}$ es arquimediano.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Como $\mathbb{N}$ es no acotado, dados $a, b \in \mathbb{K}$, $a > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} : m > \dfrac{b}{a}$, caso contrario $\dfrac{b}{a}$ sería cota de $\mathbb{N} \Rightarrow ma > b$
2) $\Rightarrow$ 3)
Dado $a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : ma > 1$ (tomando $b = 1$ en 2.) $\Rightarrow a > \dfrac{1}{m} > 0$
3) $\Rightarrow$ 1)
Dado $0 < a \in \mathbb{K} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{a}$, pues 3. vale para todo $\mathbb{K} \Rightarrow b < n \Rightarrow$ es no acotado (pues ningún $b > 0$ puede ser cota superior). $\square$

2.2 Supremo e ínfimo

Definición 2.2. Dados un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ y un subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ acotado superiormente, decimos que $b \in \mathbb{K}$ es supremo de X si es la menor de las cotas superiores de X en $\mathbb{K}$.

Es decir, se cumple:
1) $\forall x \in X, x \leq b$

2) Si $c \in \mathbb{K}$ y $x \leq c$, $\forall x \in X \Rightarrow b \leq c$.
3) Dado $c < b$ en $\mathbb{K}, \exists x \in X : c < x$.

Nota. 1) El supremo de un conjunto, si existe es único.
2) Si un conjunto tiene máximo, es el supremo.
3) Si $X = \varnothing$, todo $b \in \mathbb{K}$ es cota superior, como $\mathbb{K}$ no tiene primer elemento, se sigue que $\varnothing$ no tiene supremo en $\mathbb{K}$.

Definición 2.3. Dados un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ y un subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ acotado inferiormente, decimos que $b \in \mathbb{K}$ es ínfimo de X si es la mayor de las cotas inferiores de X en $\mathbb{K}$.

Es decir, se cumple:
1) $\forall x \in X, x \geq b$
2) Si $c \in \mathbb{K}$ y $x \geq c$, $\forall x \in X \Rightarrow b \geq c$.
3) Dado $c > b$ en $\mathbb{K}, \exists x \in X : b < x < c$.

Ejemplo. Dados $a < b$ en $\mathbb{K}$. Si $X = (a, b) \Rightarrow \inf(X) = a$, $\sup(X) = b$.
1) Por definición a es cota inferior y b superior.
2) $a < c \in \mathbb{K}$, no es cota inferior. En efecto, si $c \geq b$ trivial. Si $c < b \Rightarrow \dfrac{a+c}{2} \in X, a < \dfrac{a+c}{2} < c \Rightarrow a < c \therefore c$ no es cota inferior.
Luego por 1) y por 2) a es ínfimo de X.

Ejemplo. $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y = \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $\inf(Y) = 0, \sup(Y) = \dfrac{1}{2}$.
$\dfrac{1}{2} \in Y, \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \sup(Y)$.
Como $0 < \dfrac{1}{2^n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ es cota inferior. Sea $0 < c \in \mathbb{K}$, $2^n = (1+1)^n \leq 1 + n \leq \dfrac{1}{c} \Rightarrow n \leq \dfrac{1}{c} - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2^n} < c \Rightarrow c$ no puede ser cota inferior por la propiedad 3 de la arquimedianidad $\therefore 0$ es el ínfimo de Y.

El problema más serio de los racionales desde el punto de vista del análisis es que algunos conjuntos acotados de números racionales no tienen súpremo (o ínfimo) en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo. Sean $X = \{X \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$, $Y\{y \in \mathbb{Q} : y > 0, y^2 > 2\}$. Notemos que si $z > 2 \Rightarrow z^2 > 4 \Rightarrow z \notin X \Rightarrow X \subset [0, 2]$ y X es un conjunto acotado. Además $Y \subset (0, +\infty)$ por lo que es un conjunto acotado inferiormente. Veamos que $\nexists$ supremo e ínfimo en $\mathbb{Q}$.

1) Quiero ver que X no tiene máximo. Dado $x \in X$ quiero encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < 1$ y $x + r \in X \iff (x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < 2$. Como $r < 1 \Rightarrow (x+r)^2 < x^2 + 2xr + r =$

$x^2 + r(2x+1) < 2 \therefore x + r \in X$.
2) Quiero ver que Y no tiene elemento mínimo, dado $y \in Y$ tomo $r \in \mathbb{Q} : 0 < r < \dfrac{y^2-2}{2y}$

$$(y-r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2yr > 2 \tag{2.1}$$

$$y^2 - 2 > 2yr \tag{2.2}$$

$$\frac{y^2-2}{2y} > r \tag{2.3}$$

Es decir que $y - r \in Y$ e $y - r < y$

3) Si $x \in X, y \in Y \Rightarrow x < y$ $x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$.

Veamos que por 1, 2, 3 $\nexists \sup(X), \inf(Y)$. Supongamos $0 < \alpha = \sup(X)$, no puede ser $\alpha^2 < 2$ porque si no $\alpha \in X$ y X no tiene máximo. Tampoco puede ser $\alpha^2 > 2$ pues estaría en Y e Y no tiene mínimo, pues habría un $\beta \in Y$ con $\beta < \alpha$ y por 3) sería $x < \beta < \alpha, \forall x \in X$ lo que contradice que $\sup(X) = \alpha$, pues sería β el supremo. En definitiva si existiese $\sup(X) = \alpha$, debe ser $\alpha^2 = 2 \notin \mathbb{Q}$. Luego X no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Ínfimo, ejercicio (análogo).

2.3 Cuerpo completo

Definición 2.4. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado no Arquimediano, $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ es acotado superiormente.

si $b \in \mathbb{K}$ es una cota superior de $\mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} < b, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < b - 1$ o sea $b - 1$ es cota superior de $\mathbb{N} \therefore \nexists \sup(\mathbb{N})$ en $\mathbb{K}$.

Definición 2.5. Un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ se dice completo cuando dado un subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{K}$.

Nota. 1) Si el cuerpo es ordenado y completo $\Rightarrow$ es arquimediano.
2) En un cuerpo ordenado completo $\mathbb{K}$ todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo en $\mathbb{K}$.

Demostración. Sea $Y \subset \mathbb{K}$, no vacío y acotado inferiormente. Sea $X = -Y = \{-y : y \in Y\} \Rightarrow X$ es no vacío y acotado superiormente $\Rightarrow \exists \sup(X) = a \Rightarrow -a = \inf(Y)$. □

Axioma: Existe un cuerpo ordenado llamado $\mathbb{R}$.

Ejercicio: Dados $0 < a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! 0 < b \in \mathbb{R} : b^m = a$. Sugerencia Definir $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^n < a\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^n > a\}$ e imitar la demostración anterior. Probar y usar que dado $x > 0$ $\exists$ para cada $m \in \mathbb{N}$ un número real positivo que depende de x tal que $(x+d)^m \leq A_n d + x^n, \forall 0 < d < 1$..

Definición 2.6. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se dice denso en $\mathbb{R}$ si todo intervalo abierto (a, b) contiene algún punto de X.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Como $b - a > 0, \exists p \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{p} < b - a$.
Sea $A = \{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{p} \geq b\}$. Como $\mathbb{R}$ es Arquimediano, A es un conjunto de números enteros no vacío y acotado por bp. Sea m_0 el menor elemento de A entonces $b \leq \frac{m_0}{p}$ y $\frac{m_0 - 1}{p} < b$. También $\frac{m_0 - 1}{p} > 0$, si no tendríamos que

$$\frac{m_0 - 1}{p} \leq a \leq b \leq \frac{m_0}{p} \tag{2.4}$$

Luego

$$b - a \leq \frac{m_0}{p} - \frac{m_0 - 1}{p} = \frac{1}{p} \tag{2.5}$$

Absurdo! $\therefore \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. □

Ejemplo. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.
Para ver que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es denso usamos la misma idea tomando $p \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{p} < \frac{b - a}{\sqrt{2}}$ por Arquimedianidad y $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$ por longitud del intervalo. Ejercicio terminar la demostración.

2.4 Cardinalidad - introducción

Definición 2.7. Decimos que dos conjuntos X, Y tienen el mismo cardinal (coordinables o equipotentes) si $\exists f : X \to Y$ biyectiva. Notamos $X \sim Y$ o $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ o $\#X = \#Y$ y $\sim$ es una relación de equivalencia.

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Teorema 2.8. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m \iff n = m$.

Demostración. Sabemos que si $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$, entonces $\exists f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_m$ biyectiva. Supongamos que $n < m$.
Esto implica que puedo definir $g : \mathbb{I}_m \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectiva como:

$$g(k) = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq k \leq n+1, \\ 1 & \text{si } k > n+1. \end{cases}$$

$g \circ f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1} \Rightarrow$ basta probar que $\nexists$ funciones $h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectivas para probar el absurdo. Por inducción:
Si $m = 1$ luego h no puede ser suryectiva. Supongamos que vale si $1 \leq k \leq n-1$, si $\exists h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ suryectiva $\exists k : f(n) = k$. Defino una permutación r de $\mathbb{I}_{n+1}$ tal que $r(k) = n+1 \Rightarrow$
$r \circ h : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ es suryectiva y $(r \circ f)(n) = r(k) = n+1$.
$\Rightarrow$ la restricción $r \circ f|_{\mathbb{I}_{n-1}} : \mathbb{I}_{n-1} \to \mathbb{I}_n$ y es suryectiva. Abusrdo, por Hipotesis inductiva no existen suryectivas de $\mathbb{I}_{n-1} \to \mathbb{I}_n$

$\Leftarrow$ trivial. $\square$

Definición 2.9. X es finito si $\exists n : X$ es coordinable con $\mathbb{I}_n$ y escribimos $\mathtt{card}(X) = n$. Decimos que X es infinito si no existe tal n.

This page is intentionally left blank.

Clase III - 30/08

3.1 Conjuntos numerables

Definición 3.1. Un conjunto X es numerable si $X \sim \mathbb{N}$. Cada biyección se llama una enumeración de los elementos de X.

Definición 3.2. Decimos que un conjunto es a lo sumo numerable (contable) si es finito numerable.

Ejemplo. Los números pares, $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. $f(n) = 2n$, $f : \mathbb{N} \to P$ es biyectiva $\therefore$ es numerable. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{Z}$ es numerable.

Demostración. Definimos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ como $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0, \\ -2n+1 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$ y f^{-1} es una enumeración. $\square$

Teorema 3.3. Sea X un conjunto y $P(X) = \{A : A \subset X\} \Rightarrow \mathtt{card}(X) \neq \mathtt{card}(P)$

Demostración. Supongamos que $\exists f : X \to P(X)$ biyectiva, en particular, f es suryectiva.
Dado $x \in X$, puede pasar que $x \in f(X)$ o $x \notin f(X)$. Definimos $B = \{x \in X : x \notin f(X)\} \subset X$.Como f es suryectiva se tiene que $\exists y \in Y : f(y) = B$.
Si $y \notin B = f(y) \Rightarrow y \notin f(y) \Rightarrow y \in B$.
Si $y \in B = f(y) \Rightarrow y \in f(y) \Rightarrow y \notin B$.
Absurdo en ambos casos, luego $\Rightarrow \nexists f$ biyectiva $\therefore \mathtt{card}(X) \neq \mathtt{card}(P)$. $\square$

Definición 3.4. Decimos que $\mathtt{card}(X) \leq \mathtt{card}(Y)$ si $\exists f : X \to Y$ inyectiva.
$\mathtt{card}(X) < \mathtt{card}(Y)$ si $\mathtt{card}(X) < \mathtt{card}(Y)$, pero $\neg(X \sim Y)$.

Proposición 3.5. Es una relación de orden

Demostración. i) $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(X)$ porque la identidad es inyectiva.
ii) $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$, $\mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(Z) \Rightarrow \mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Z)$ pues la composición de funciones es inyectiva.
iii) $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \Rightarrow X \sim Y$. □

3.2 Cantor - Schröder - Bernstein

Teorema 3.6 (Cantor - Schröder - Bernstein)**.** Si $\exists f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ inyectivas $\Rightarrow \exists h : X \to Y$ biyectiva.

Demostración. Vamos a probar que existen dos particiones distintas de X e Y. Sea $X = X_1 \cup X_2$ y $Y = Y_1 \cup Y_2 : f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$ son biyectivas.

Podemos definir a $h : X \to Y$ como $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1, \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$ y resulta biyectiva.

Definimos $\phi(x) : P(X) \to P(X)$, $\phi(A) = X - g(Y - f(A))$. Veamos primero que ϕ es creciente (i.e $A \subseteq B \Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$.

Demostración. $A \subseteq B \iff f(A) \subseteq f(B) \iff y - f(B) \subseteq y - f(A) \iff g(y - f(B)) \subseteq g(y - f(A)) \iff X - \phi(A) \subseteq X - \phi(B)$ □

Sea $\mathcal{C} = \{C \subset X : \phi(C) \subset C\} \neq \varnothing$ pues $X \in \mathcal{C}$ y $A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \varnothing$, $A \subset C, \forall C \in \mathcal{C}$ y ϕ es creciente y tenemos que $\phi(C) \subset C \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(C) \subset C \Rightarrow \phi(C) \in A$. Además, usando otra vez que ϕ es creciente, $\phi(\phi(A)) \subset \phi(A) \Rightarrow \phi(A) \in \mathcal{C} \Rightarrow A \subset \phi(A) \Rightarrow A = \phi(A)$.

Sean $X_1 = A$, $X - X_1 = X_2 = g_2(Y_2)$
$Y_1 = f(A)$, $Y_2 = Y - f(A) \Rightarrow$
$A = \phi(A) = X - g(Y - f(A)) \iff X - A = g(Y - f(A)) \iff X - X_1 = g(Y_2) = X_2 \therefore f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$ son biyectivas. □

Ejemplo. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.

Demostración. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, f(x) = x$ es inyectiva.
Sea $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, f(\frac{a}{b}) = \mathrm{sign}(a) \cdot 2^a \cdot 3^b$ es inyectiva por Teorema Fundamental de la Aritmética. Luego por el teorema anterior $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$. □

Ejemplo. $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ es numerable.

Demostración. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(n) = (1, n)$ es inyectiva. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f((n, m)) = 2^n \cdot 3^m$ es inyectiva por Teorema Fundamental de la Aritmética $\therefore$ es numerable. □

3.3 Los Reales son no numerables

Teorema 3.7. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Supongamos que es numerable. $\Rightarrow$
$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biyectiva. A cada número real x_n le asignamos un intervalo centrado en ese punto de longitud 2^{-n}. La unión de todos esos intervalos tiene longitud menor o igual a la suma de las longitudes (se pueden superponer).

$|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Ix_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |Ix_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$. Se cubrió un intervalo de longitud 1 de toda la recta real, por lo tanto quedan reales afuera y eso es un absurdo $\therefore$ $\mathbb{R}$ no es numerable. □

Ejemplo. $A = \{(a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Es decir las sucesiones de ceros y unos no es un conjunto numerable.

Demostración. Supongamos que si es numerable $\Rightarrow$ podemos escribir
$A = \{(a_n^1)_{n\geq 1}, \cdots, (a_n^j)_{n\geq 1}, \cdots\}$, todas las sucesiones de ceros y unos están contenidas en A. La sucesión donde $a_i = 1 - a_n^n$ (en el i-ésimo lugar tiene lo contrario de lo que la n-ésima sucesión tiene en el lugar n) debería ser una de ellas, pero eso es absurdo $\therefore$ es no numerable. □

La idea del último ejemplo (argumento diagonal), se puede adaptar para probar que $(0, 1]$ es no numerable.

3.3.1. Principio de encaje de Intervalos

Teorema 3.8. Sea $\mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_2 \supset \mathbb{I}_3 \supset \cdots$ una sucesión de intervalos cerrados y acotados $\mathbb{I}_n = [a_n, b_n] \Rightarrow$
La intersección de todos es no vacía.
$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n = [a, b]$ con $a = sup(a_n), b = inf(b_n)$.

Demostración. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbb{I}_{n+1} \subset \mathbb{I}_n \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$
$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1$. El conjunto A de los a_i está acotado y B el conjunto de los b_i también.
Sea $\alpha = sup(A)$, $\beta = inf(B)$. Como $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \leq \beta \Rightarrow a_1 \leq \cdots \leq a_1 \leq \alpha \leq \beta \leq \cdots \leq b_1$.
Luego $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{I}_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} I_n$.
Además ningún $x \leq \alpha$ puede pertenecer a todos los $\mathbb{I}_n$. En efecto, si $x < \alpha = sup(A) \Rightarrow \exists a_1 \in A : x < a_1 \Rightarrow x \notin \mathbb{I}_n$.
Análogamente con el ínfimo. □

Teorema 3.9. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Supongamos que $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(n) = x_n$.
Definimos la sucesión de $\mathbb{I}_n$ de la siguiente forma:
Tomamos $[0, 1]$ y divido en 3 cerrados iguales, luego, al menos uno no contiene a x_1, lo elijo como $\mathbb{I}_1$ (si hayh dos que no lo contienen elijo alguno). Inductivamente lo divido en 3 intervalos iguales y al menos 1 de ellos no contiene a x_{n+1} y lo elijo como $\mathbb{I}_{n+1}$. Por el principio anterior la $\mathbb{I} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n \neq \varnothing$ (tiene un único elemento y la longitud de los intervalos tiende a cero).
Si $x \in \mathbb{I}$ no puede ser igual o mayor que x_1 (por construcción se los excluye en algún paso) $\Rightarrow \mathbb{R}$ es no numerable, pues ese x queda afuera. □

3.4 Propiedades

Teorema 3.10. Sea X numerable, $Y \subset X \Rightarrow Y$ es a lo sumo numerable.

Demostración. Supongamos que Y no es finito. Como $X \sim Y$ puedo pensar $X = (x_n)_{n\geq 1}$ y defino $n_1 = min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in Y\}$ e inductivamente elegimos $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$. Definimos $n_k = min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, x_n \in Y\} \Rightarrow$ Tenemos la sucesión estrictamente creciente de naturales y podemos definir $g : \mathbb{N} \to Y, g(K) = x_{n_k}$. g es inyectiva si $K \neq Y, n_k \neq n_j$ por ser estrictamente creciente y es suryectiva, si $y \in Y \Rightarrow y = x_j$. Para ningún $j \Rightarrow \exists k : n_k \leq j \leq n_k + 1$. Como $j \leq n_{k+1} = \{n > n_k : x_n \in Y\}$ debe ser $j = n_k$. □

Corolario 3.11. $f : X \to Y$ inyectiva e Y numerable $\Rightarrow X$ es a lo sumo numerable.

Demostración. f es inyectiva $\Rightarrow X \sim f(X)$ y como $f(X) \subset Y \Rightarrow$ es a lo sumo numerable por el teorema anterior. □

Teorema 3.12. $f : X \to Y$ suryectiva, X a lo sumo numerable $\Rightarrow Y$ es a lo sumo numerable.

Demostración. $f : X \to Y$ es suryectiva $\exists g : Y \to X$ inversa a derecha tal que $f \circ g = id_Y \Rightarrow f$ es inversa a izquierda de $g \Rightarrow g$ es inyectiva $\therefore$ por el corolario anterior Y es a lo sumo numerable. $\square$

Teorema 3.13. Para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea x_n un conjunto numerable $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n = X$ es numerable.

Demostración. x_n es numerable $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to x_n$ biyectiva. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ definida como $f(n, n) = f_n(n)$. Veamos que es suryectiva, dado $x \in X$, $\exists n \in \mathbb{N} : x \in x_n \Rightarrow \exists m : x = f_n(m)$ luego $X = f_n(m) = f(n, m)$. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\geq 1} x_n$ es suryectiva $\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} x_n$ es a lo sumo numerable $\therefore$ como es infinito, es numerable. $\square$

Ejemplo. $\mathbb{Q}(x) \sim \mathbb{N}$.

Demostración. $\mathbb{Q}_k[x] = \{p \in \mathbb{Q}(x) : gr(p) \leq k\}$ tenemos $f_n : \mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{Q}_n[x]$, $f(a_0, \cdots, a_{n+1}) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, cada f_n es biyectiva $\Rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$ es numerable y como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable $\therefore \mathbb{Q}(x)$ es numerable. $\square$

Definición 3.14. Un número se dice algebraico si es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros, por ejemplo $\sqrt{2}$ es raíz de $x^2 = 2$.

Definición 3.15. Si un número real no es algebraico se lo llama trascendente.

Ejercicio: demostrar que el conjunto de números algebraicos es numerable.

This page is intentionally left blank.

Clase IV - 03/09

4.1 Operaciones con cardinales

Dados dos cardinales n, m (no necesariamente finitos) y X, Y conjuntos disjuntos tales que $\mathrm{card}(X) = n$, $\mathrm{card}(Y) = m$, podemos definir:

1) **Suma:** $n + m = \mathrm{card}(X \cup Y)$.
2) **Producto:** $n \cdot m = \mathrm{card}(X \times Y)$.
3) **Potencia:** $n^m = \mathrm{card}(\{f : Y \to X\}) = \mathrm{card}(X^Y)$.

Nota. Suponer que $X \cap Y = \varnothing$ no es restrictivo porque $X \sim (X \times \{1\})$ e $Y \sim (Y \times \{2\})$, y $(X \times \{1\}) \sim (Y \times \{2\})$ y son disjuntos.

Nota. Hay que probar que la definición es independiente de los conjuntos X, Y que elegimos. Si $n = \mathrm{card}(\tilde{X})$ y $m = \mathrm{card}(\tilde{Y})$, $\tilde{X} \cap \tilde{Y} = \varnothing \Rightarrow n + m = \mathrm{card}(\tilde{X} \cup \tilde{Y})$. Vale porque existen biyecciones entre $\tilde{X}$ y X y entre Y y $\tilde{Y}$. Sea $f : X \to \tilde{X}$, $g : Y \to \tilde{Y}$ con lo cual $h : X \cup Y \to \tilde{X} \cup \tilde{Y}$ dada por

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X, \\ g(z) & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

es biyectiva. Similar para el producto y la potencia.

Supongamos $\mathrm{card}(X) = n$, $\mathrm{card}(Y) = m$, $\mathrm{card}(Z) = p$, no necesariamente finitos con X, Y, Z disjuntos dos a dos. La suma cumple las siguientes propiedades:

Proposición 4.1. 1) Conmutatividad: $n + m = m + n$, pues $X \cup Y = Y \cup X$.
2) Asociatividad: $(n + m) + p = n + (m + p)$.
3) Existencia del neutro: $0 + n = n$, $\varnothing \cup X = X$.

El producto cumple las siguientes propiedades:

Proposición 4.2. 1) Conmutatividad: $n \cdot m = m \cdot n$, pues $X \times Y \sim Y \times X$.
2) $0 \cdot n = 0$, pues $\varnothing \times X = \varnothing$.
3) $1 \cdot n = n$, pues $\{1\} \times X \sim X$. Aquí, $f : \{1\} \times X \to X$ saca el 1 y $g : X \to \{1\} \times X$ agrega el 1. Ambas funciones son biyectivas.

Proposición 4.3. Distributiva del producto en la suma: $n \cdot (m+p) = n \cdot m + n \cdot p$ porque $X \times (Y \cup Z) \sim (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

Nota. No vale la ley de cancelación: $n + m = n + p \not\Rightarrow m = p$. $n \cdot m = n \cdot p \not\Rightarrow m = p$.

Ejemplo. Si $n = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ y $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, tenemos que:
a) $n + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
$n \cdot n = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

b) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Demostración. a) Vimos que $\mathrm{card}(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \aleph_0$, $\mathrm{card}(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \aleph_0$. Y la unión de ambos conjuntos es $\mathbb{N}$. Además $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0$, así $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

b) Si pruebo que el cardinal de cualquier intervalo no degenerado (sin extremos iguales) de la recta es $\mathfrak{c}$, puedo probar que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ observando que $(0,1) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.
En efecto, $\arctan(x)$ es una biyección entre $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y hay una biyección entre este intervalo y cualquier (a,b) dada por $y = \frac{b}{\pi} \cdot (x + \frac{\pi}{2}) + a$.
Además, $(0,1)$ y $[0,1]$ son coordinables. Si $f : [0,1] \to (0,1)$ es inyectiva y por el Teorema de Cantor-Bernstein $[0,1] \sim (0,1)$.
Para probar $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, uso que $(0,1] \times (0,1] \sim (0,1]$.
Sea $g : (0,1] \to (0,1] \times (0,1]$, $g(x) = (x,1)$ es inyectiva.
$f : (0,1] \times (0,1] \to (0,1]$, $f(x,y) = 0.x_1y_1x_2y_2\cdots$ (primeros decimales).
Si $x, y \in (0,1]$, los pensamos con desarrollo decimal infinito. Como f es inyectiva, por el Teorema de Cantor-Bernstein, existe una biyección entre ellos, por lo que $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. □

Sean $n = \mathrm{card}(X)$, $m = \mathrm{card}(Y)$, $p = \mathrm{card}(Z)$, no necesariamente finitos, con X, Y, Z disjuntos dos a dos.

Proposición 4.4. $n^m \cdot n^p = n^{m+p}$

Demostración. $X^Y \times X^Z \sim X^{Y \cup Z}$.
$X^Y \times X^Z = \{(f,g) : f : Y \to X, g : Z \to X\}$.
$f \in X^{Y \cup Z}, f : Y \cup Z \to X \Rightarrow (f|_Y, f|_Z) \in X^Y \times X^Z$ inyectiva.
Dadas $f : Y \to X, g : Z \to X, h : Y \cup Z \to X$ tal que $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X, \\ g(x) & \text{si } x \in Z \end{cases}$
Como Y, Z son disjuntos por hipótesis h es inyectiva y vale por Teorema CSB.
□

Proposición 4.5. $(n^m)^p = n^{mp}$

Demostración. $f \in (X^Y)^Z, f : Z \to X^Y$, $Z \mapsto (f_Z : Y \to X)$.
$(\forall z \in Z)(\exists f_Z : Y \to X)$, si $y \in Y$, $f_Z(y)$ es $g(z, y) = f_Z(y)$ $\square$

Teorema 4.6. Sea $n = \aleph_0$ o c y sea m otro cardinal tal que $2 \leq m \leq 2^n \Rightarrow m^n = 2^n$. $(2^{\aleph_0}) = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$).

Demostración. En general si $m \leq p \Rightarrow m^m \leq p^n$ con $card(X) = m$, $card(Y) = m$, $card(Z) = p$, X, Y, Z disjuntos dos a dos.
$f : Y \to Z$ es inyectiva $\Rightarrow \forall g : X \to Y$ tenemos que $f \circ g : X \to Z$ de manera inyectiva (si $g_1 \neq g_2 \to f = g_1 \neq f \circ g_2$ porque f es inyectiva). $\square$

Nota. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim P(\mathbb{N})$ pues a cada $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ le asigno el subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ definido por $n \in A \iff f(n) = 1$

Teorema 4.7. $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es decir $2^{\aleph_0} = c$.

Demostración. $f : [0, 1] \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, f(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Siendo x_n las cifras del desarrollo en base dos de x.
Tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \Rightarrow f$ es inyectiva xq el desarrollo es único.
Ahora si $g : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1], g((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{2^n}$, $x_n \in \{0, 1\}$. No es inyectiva pues $0, 11 = 0, 10\overline{1}$. Una forma simple es pensar el desarrollo en base 3 de cada tira de 0 y 1 que no tiene ningún dos. Es decir $g((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}$ y $(0, 11)_3 \neq (0, 10\overline{1})_3 \therefore$ es inyectiva y por Teorema CSB: $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\aleph_0}$.
Otra forma es la siguiente: $S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} - \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ con $S_i = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_m = 0, \forall m > i\}$. O sea $0, 11000 \cdots$ se saca y queda solo $0, 10\overline{1}$. Cada S_i es un conjunto finito (tiene 2^i elementos) luego $\bigcup_{i\geq 1} S_i$ es numerable $\therefore$ S y $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tienen el mismo cardinal.
$g((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{2^n}$ si es inyectiva y $g : S \to [0, 1]$. $\square$

4.2 Hipótesis del continuo

$\nexists$ cardinal entre $\aleph_0$ y $c = 2^{\aleph_0}$. No se puede demostrar ni refutar.
Es independiente de la teoría de conjuntos más el axioma de elección. Gödel 1940 probó que no se puede demostrar, Cohen en 1963 que no se puede refutar.

4.3 Construcción de los Reales

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

[1] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis, 3rd Edition.* McGraw-Hill, New York, 1976.