

# Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

---

BUSTOS JORDI

Bustos Jordi  
jordibustos01@gmail.com

# Contenido

## 6 | Clase I - 06/03

1.1	Integral de Riemann .....	6
1.1.1	Desventajas de la integral de Riemann .....	7
1.2	Espacios Medibles .....	8

## 11 | Clase II - 11/03

2.1	La $\sigma$ -álgebra de Borel .....	11
2.2	Recta real extendida .....	13

## 15 | Clase III - 13/03

3.1	Funciones medibles .....	15
3.2	Funciones medibles en la recta extendida .....	18

## 21 | Clase IV - 20/03

4.1	Parte negativa y positiva .....	21
4.2	Funciones medibles entre espacios medibles .....	25

## 26 | Clase V - 25/03

5.1	Medidas .....	26
5.1.1	Motivación .....	26
5.1.2	Series de términos no negativos .....	27
5.1.3	Definición de medida .....	27

## | Clase VI - 27/03

Contenido • 3

6.1	Espacio de medida .....	33
6.2	Generación de medida .....	34

## 37 | Clase VII - 01/04

7.1	Generación de medida (continuación) .....	37
7.2	Extensión de $\ell$ al álgebra .....	39

## 41 | Clase VIII - 03/04

8.1	Extensión de la medida .....	41
8.2	Medida exterior .....	43

## 47 | Clase IX - 08/04

9.1	Extensión Caratheódory / Hahn .....	47
9.2	Medida de Lebesgue .....	49

## 51 | Parciales

10.1	Primer parcial - Primera fecha .....	51
10.2	Primer parcial - Segunda fecha .....	51
10.3	Segundo parcial - Primera fecha .....	51
10.4	Segundo parcial - Segunda fecha .....	51
10.5	Segundo parcial - Tercera fecha .....	51

*This page is intentionally left blank.*

# Prefacio

“Considero a cada hombre como un deudor  
de su profesión,  
y ya que de ella recibe sustento y provecho,  
así debe procurar,  
mediante el estudio,  
servirle de ayuda y ornato.”

---

Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martínez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.

Estas notas se basan principalmente en la cursada del '99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

# Clase I - 06/03

## 1.1 Integral de Riemann

Sea  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Una partición  $P$  de  $[a, b]$  es un conjunto finito  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . A  $P$  le asignamos una norma  $\|P\| = \max\{l(J_k)\}$ .  $J_k = [x_{k-1}, x_k]$  y a cada  $P$  le podemos asignar una etiqueta, que es un vector  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  tal que  $\xi_k \in J_k$ . Una partición etiquetada es un par  $(P, \xi)$ ; y le podemos asignar su suma de Riemann

$$S(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)l(J_k)$$

**Definición 1.1 (Integrable Riemann).** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable Riemann si

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon \text{ si } (P, \xi) \text{ es tal que } \|P\| \leq \delta$$

**Proposición 1.2.** Si  $f$  es integrable Riemann entonces es acotada.

**Demostración.** Ejercicio. □

Si  $f$  es acotada, dada una partición  $P$  del dominio de  $f$ , para cada  $i \in 1, \dots, n$  definimos:

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} \text{ y } m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$$

Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a  $P$  como:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k l(J_k) \text{ y } s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k l(J_k)$$

Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\} \text{ y}$$
$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$$

**Proposición 1.3.** Dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  es integrable Riemann  $\iff$  es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

**Observación.**  $f$  es integrable Riemann si:

1.  $f$  es continua.
2.  $f$  es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.
3.  $f$  es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

### 1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.
- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.
- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

**Ejemplo.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$   $f$  no es integrable Riemann.

**Demostración.** Llamemos  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ .  $A$  es numerable entonces  $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$  biyectiva. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $A_n = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$  y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ . Ahora para cada  $n \geq 1$  consideramos:  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus A_n \end{cases}$$

$f_n$  es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de  $A_n$  y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que  $f_n \rightarrow f$ . Sea  $x \in [0, 1]$

1. Si  $x \in A$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \in A_{n_0} \quad n_0 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow (\forall n > n_0) \quad x \in A_n \\ &\Rightarrow (\forall n > n_0) \quad f_n(x) = 1 \\ &\Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 1 \end{aligned}$$

2. Si  $x \notin A \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x \notin A_n \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$ .

$\therefore f_n \rightarrow f$ . Si conociéramos  $\ell(A)$  y  $\ell([0, 1] \setminus A)$  podríamos definir  $\int f = 1 \times \ell(A) + 0 \times \ell([0, 1] \setminus A)$ .  $\square$

## 1.2 Espacios Medibles

Dado  $X$  un conjunto arbitrario no vacío. Sea  $\mathcal{P}(X)$  el conjunto de partes de  $X$ .

**Definición 1.4 ( $\sigma$ -álgebra).** Una familia  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra si verifica:

1.  $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$ .
2. Si  $A \in \mathfrak{X} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$ .
3. Sea  $(A_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $\mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$ .

**Definición 1.5 (Conjunto Medible).** Si  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  el par  $(X, \mathfrak{X})$  es un espacio medible. A cada  $A \in \mathfrak{X}$  lo llamaremos conjunto  $\mathfrak{X}$ -medible.

**Observación.** Si  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$  y  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{X}$  entonces  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{X}$ .

**Demostración.** Sea  $(B_m)_{m \geq 1}$  la sucesión en  $\mathfrak{X}$  definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \emptyset & m > n \end{cases}$$

Luego  $\bigcup_{m \geq 1} B_m = \bigcup_{i=1}^n A_n \in \mathfrak{X}$  por definición de  $\sigma$ -álgebra. □

**Observación.** Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de una  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{X}$  entonces  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$ .

**Demostración.**  $\bigcup_{n \geq 1} A_n^c \in \mathfrak{X} \Rightarrow (\bigcap_{n \geq 1} A_n^c)^c \in \mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$ . □

**Ejemplo ( $\sigma$ -álgebras).** Dado  $X$  cualquiera no vacío.

1.  $\mathfrak{X} = \{\emptyset, X\}$  es una  $\sigma$ -álgebra.
2.  $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$  es una  $\sigma$ -álgebra.
3. Sea  $A \neq \emptyset \subset X$ . Luego  $\mathfrak{X} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$  es una  $\sigma$ -álgebra.

**Ejemplo.** Supongamos que  $X$  no es numerable y sea

$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable ó } A^c \text{ es numerable}\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra tal que  $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(X)$ .



**Demostración.** 1.  $\emptyset$  es numerable y  $X^c = \emptyset$  es numerable  $\Rightarrow \emptyset, X \in \mathfrak{X}$ .

2. Sea  $A \in \mathfrak{X}$ . Si  $A$  es numerable entonces  $A^c \in \mathfrak{X}$ , pues  $(A^c)^c$  es numerable. Si  $A$  es no numerable, tal que  $A \in \mathfrak{X} \Rightarrow A^c$  es numerable y  $A^c \in \mathfrak{X}$ .

3. Sea  $(A_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $\mathfrak{X}$ . Tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  es numerable o  $A_n^c$  lo es. Luego si todos los  $A_n$  son numerables,  $\bigcup_{n \geq 1} A_n$  es numerable y luego  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$ . Por otro lado, si existe al menos un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $A_{n_0}$  es no numerable, entonces  $\bigcup_{n \geq 1} A_n$  es no numerable, pero  $\bigcap_{n \geq 1} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$  es tal que  $A_{n_0}^c$  es numerable y por lo tanto  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$ .

□

**Lema 1.6.** Dado un conjunto  $X$ , sean  $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$  dos  $\sigma$ -álgebras de  $X$ . Entonces  $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Más aún si  $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$  es una familia de  $\sigma$ -álgebras de  $X$  entonces  $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

**Demostración.** Sean  $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$   $\sigma$ -álgebras de  $X$ .

1.  $\emptyset, X \in \mathfrak{X}_1$  y  $\mathfrak{X}_2 \Rightarrow \emptyset, X \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ .

2. Sea  $A \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$  entonces  $A^c \in \mathfrak{X}_1$  y  $A^c \in \mathfrak{X}_2$ . Luego  $A^c \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ .

3. Sea  $(A_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ . Entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}_1$  y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}_2$ . Luego  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ .

Para demostrar lo último, aplicamos inducción sobre  $n \in \mathbb{N}$ , donde el caso base es  $n = 2$ , que acabamos de probar. □

**Proposición 1.7 ( $\sigma$ -álgebra generada por  $A$ ).** Dado un conjunto  $X$ , sea  $A \neq \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \exists$   $\sigma$ -álgebra  $\sigma(A)$  que verifica:

1.  $A \subseteq \sigma(A)$ .

2.  $\mathfrak{X}$  es  $\sigma$ -álgebra de  $X$  tal que  $A \subseteq X \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathfrak{X}$ .

3.  $\sigma(A)$  es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

**Demostración.** Sea  $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X \text{ y } A \subseteq \mathcal{C}\} \neq \emptyset$  pues  $\mathcal{P}(X) \in \Delta$ . Llamemos  $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathcal{C} \in \Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$ . Veamos que  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \Rightarrow \emptyset, X \in \mathfrak{X}$ .
2. Sea  $A \in \mathfrak{X} \Rightarrow (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \Rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$ .
3. Sea  $(A_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $\mathfrak{X}$  el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore \mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra  $\tilde{\mathfrak{X}}$   $\sigma$ -álgebra que verifica las dos condiciones, por la propiedad uno y dos podemos deducir que  $\mathfrak{X} \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}$  y  $\tilde{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$ .  $\square$

**Ejemplo.** Consideremos  $X = \mathbb{R}$  y sea  $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ . La  $\sigma$ -álgebra generada por  $A$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$ . A los conjuntos de  $\mathcal{B}$  los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si  $\bar{A} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \sigma(\bar{A}) = \mathcal{B}$ .

**Demostración.** ■ Dado  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (a, a + n) \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \mathcal{B}$ . Luego  $\sigma(\bar{A}) \subseteq \mathcal{B}$ . Por ser  $\sigma(\bar{A})$  la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\bar{A}$ .

- Dado  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Sabemos que  $(a, b] = (a, +\infty) \cap (b, +\infty)^c \in \sigma(\bar{A})$ . Luego  $(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\bar{A})$ . Por lo que  $A \subset \sigma(\bar{A})$ .  $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\bar{A})$ . Por ser  $\sigma(\bar{A})$  la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\bar{A}$ .  $\square$

Ejercicio demostrar que la  $\sigma$ -álgebra de Borel está generada también por las siguientes familias:

1.  $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ .
2.  $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ .
3.  $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ .
4.  $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ .
5.  $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ .
6.  $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ .

Luego, se puede ver que  $\{a\} = \bigcap_{n \geq 1} [a, a + \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ .

# Clase II - 11/03

## 2.1 La $\sigma$ -álgebra de Borel

A  $\mathbb{R}^n$  lo pensamos dotado de la distancia euclídea. Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  son dos puntos de  $\mathbb{R}^n$ , la distancia entre ellos es

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Consideramos la topología usual de  $\mathbb{R}^n$  notada  $\tau^n$  al conjunto de todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.1.** Dados  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i < b_i (\forall i = 1, \dots, n)$  Definimos el intervalo abierto  $(a, b)$  como

$$\begin{aligned} (a, b) &= \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \\ &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, (\forall i = 1, \dots, n)\} \end{aligned}$$

**Definición 2.2 ( $\varepsilon$ -cubo).** Dados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\varepsilon > 0$  el  $\varepsilon$ -cubo centrado en  $x$  es el conjunto definido por

$$C(x, \varepsilon) = \prod_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2}, x_i + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

**Proposición 2.3.** Sea  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto e  $y \in C(x, \varepsilon)$  entonces

1.  $(\forall x \in V) \quad (\exists \varepsilon > 0) : C(x, \varepsilon) \subseteq V$ .
2.  $x \in C(y, \varepsilon)$ .
3.  $C(x, \varepsilon) \subseteq C(y, 2 \cdot \varepsilon)$ .

**Definición 2.4** ( $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ). Es la  $\sigma$ -álgebra generada por:

$$\mathcal{A} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n : a_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$$

Lo notamos  $\mathcal{B}^n$ .

Queremos ver que efectivamente  $\tau_n \subseteq \mathcal{B}^n$ . Consideremos la clase  $\beta_n = \{C(q, \frac{1}{m}) : q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$ .  $\beta_n$  es numerable pues el conjunto de índices que enumera a  $\beta_n$  es

$$\underbrace{\mathbb{Q}^n \times \dots \times \mathbb{Q}^n}_{n \text{ veces}} \times \mathbb{N}$$

que es numerable.

**Proposición 2.5.** Dado un abierto no vacío  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  existe una familia  $\mathcal{A}_V \subseteq \mathcal{B}_n$  tal que  $V = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$ .

**Demostración.** Sabemos que  $\mathbb{Q}^n$  es denso en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $V$  es abierto y no vacío entonces  $V \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$ . Luego  $B(x, \varepsilon) \subseteq V$  y  $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $B(x, \varepsilon) \subset V \cap \mathbb{Q}^n$ .

Para cada  $q \in V \cap \mathbb{Q}^n$  defino  $m_q = \min\{m \in \mathbb{N} : C(q, \frac{1}{m}) \subseteq V\}$ . Llamemos  $\mathcal{A}_V = \{C(q, \frac{1}{m_q}) : q \in V \cap \mathbb{Q}^n\}$  la cual es una familia numerable.

Veamos que  $\bigcup_{q \in V \cap \mathbb{Q}^n} C(q, \frac{1}{m_q}) = V$ .

- $\subseteq$  es trivial.
- $\supseteq$  Dado  $x \in V$ ,  $\exists m \in \mathbb{N} : C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$ . Consideremos  $C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$  que es un abierto no vacío.

Resulta que  $C(x, \frac{1}{2m}) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$ . Sea  $q \in C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq V \cap \mathbb{Q}^n$

$\Rightarrow x \in C(q, \frac{1}{2m})$ , en particular  $m_q \leq 2m$ , pues como  $x \in C(q, \frac{1}{2m})$  implica que  $C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq V$ .

$\Rightarrow x \in C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(q, \frac{1}{m_q}) \therefore x \in \bigcup_{q \in \mathcal{A}_V} C(q, \frac{1}{m_q}) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$ .

□

**Corolario 2.6.** La  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$  coincide con la  $\sigma(\tau_n)$ . En particular:

- Todo abierto de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto Boreliano.
- Todo conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  es un Boreliano por ser complemento de un abierto.
- Por último, todo subconjunto numerable de  $\mathbb{R}^n$  es un Boreliano. (Dado  $x \in \mathbb{R}^n, \{x\} = \bigcap_{n \geq 1} C(x, \frac{1}{n})$ ).

**Proposición 2.7.** Dado un espacio medible  $(X, \mathfrak{X})$  y sea  $X_0 \subseteq X$ , entonces

1.  $\mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A = E \cap X_0 \text{ para algún } E \in \mathfrak{X}\}$  es  $\sigma$ -álgebra de  $X_0$ . En particular, si  $X_0 \in \mathfrak{X} \Rightarrow \mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A \in \mathfrak{X}\}$ , la demostración queda como ejercicio.
2. Si  $\mathcal{A}$  es una familia en partes de  $X$  tal que  $\mathfrak{X} = \sigma(\mathcal{A})$  entonces  $\mathfrak{X}_0 = \sigma(\mathcal{A}_0)$  donde  $\mathcal{A}_0 = \{A_0 \subseteq X_0 : A_0 = A \cap X_0 \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}$ .

**Demostración.** Veamos primero que  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$ . Si  $A_0 \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : A_0 = A \cap X_0$ . Como  $A \in \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$  resulta que  $A_0 = A \cap X_0 \in \mathfrak{X}_0$ . Entonces  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$ . Por lo tanto  $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathfrak{X}_0$ .

Ahora veamos que  $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$ . Consideramos la clase  $\mathcal{G} = \{E \subseteq X : E \cap X_0 \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}$  y veamos que  $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{G}$ . Alcanza con probar que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ . Pues si  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap X_0 \in \mathcal{A}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \Rightarrow A \in \mathcal{G}$ . Si probamos que  $\mathcal{G}$  es una  $\sigma$ -álgebra, tendríamos que  $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{G}$  y  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$  y  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$ . Luego  $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$ .  $\square$

**Ejemplo.** Si  $\beta \in B_n$  entonces la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\beta$ ,  $B_n(\beta) = \{A \subseteq \beta : A \in B_n\}$  está generado por la familia de conjuntos de la forma  $(a, b) \cap \beta$  para  $a, b \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i < b_i$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ).

## 2.2 Recta real extendida

**Definición 2.8 (Recta real extendida).** Definimos  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Con las siguientes convenciones:

1. Dado  $r \in \mathbb{R}$  tenemos que  $-\infty < r < +\infty$ .
2.  $+\infty + +\infty = +\infty$  y  $+\infty + -\infty$  no está definido.
3.  $+\infty \cdot +\infty = +\infty$  y  $+\infty \cdot -\infty = -\infty$  Si  $r \in \mathbb{R}$  entonces  $r \cdot +\infty = +\infty$  si  $r > 0$  y  $r \cdot +\infty = -\infty$  si  $r < 0$ .
4.  $0 \cdot +\infty = 0 = +\infty \cdot 0$ .
5. Tampoco definimos cocientes entre infinitos o de la forma  $\frac{r}{\pm\infty}$ .

**Observación.** El producto no va a ser continuo en la recta real extendida. Si  $a_n = +\infty \cdot \frac{1}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . Pero  $+\infty \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty \cdot 0 = 0$ .

Notemos que si  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$  y  $\sup(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Dada una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ , sea  $\emptyset \neq L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x_{n_k} \rightarrow x\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ .

**Definición 2.9.**  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup(L)$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf(L)$ . Ambos pertenecen a  $L$ . Además, si para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $\alpha_n = \sup\{x_n : n \geq m\}$  la sucesión  $\alpha_m$  es decreciente y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{\alpha_m\} = \inf_{m \geq 1}(\sup_{n \geq m}\{x_n\})$ . Análogamente  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{\alpha_m\} = \sup_{m \geq 1}(\inf_{n \geq m}\{x_n\})$ .

**Proposición 2.10.** Propiedades de límite superior e inferior:

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

**Observación.** Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $\mathbb{R}$  y  $x \in \overline{\mathbb{R}}, x_n \rightarrow x \iff \limsup x_n = \liminf x_n = x$ .

Veamos como extender  $\mathcal{B}$  a  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Definición 2.11 (Borel extendida).** Para cada  $E \in \mathcal{B}$ , sean  $E_1 = E \cup \{+\infty\}$ ,  $E_2 = E \cup \{-\infty\}$  y  $E_3 = E \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Consideremos  $\overline{\mathcal{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E : E \in \mathcal{B}\} = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\})$ .  $\overline{\mathcal{B}}$  es  $\sigma$ -álgebra de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Demostración.** 1.  $\emptyset \in \mathcal{B} \Rightarrow \emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{R} \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \Rightarrow \overline{\mathbb{R}} \in \overline{\mathcal{B}}$ .

2.

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{B} &\Rightarrow E^c \in \mathcal{B} \Rightarrow E^c \in \overline{\mathcal{B}} \\ E_1 = E \cup \{+\infty\} : E \in \mathcal{B} &\Rightarrow E_1^c = E^c \cap [-\infty, +\infty) \in \overline{\mathcal{B}} \\ E_2 = E \cup \{-\infty\} : E \in \mathcal{B} &\Rightarrow E_2^c = E^c \cap (-\infty, +\infty] \in \overline{\mathcal{B}} \\ E_3 = E \cup \{+\infty, -\infty\} : E \in \mathcal{B} &\Rightarrow E_3^c = E^c \cap (-\infty, +\infty) = E^c \in \overline{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

3. Sea  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \overline{\mathcal{B}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \cap \mathbb{R} &\in \mathcal{B} \Rightarrow \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \cap \mathbb{R} \right) \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \overline{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

□

# Clase III - 13/03

## 3.1 Funciones medibles

**Proposición 3.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  es continua si  $f^{-1}(V)$  es abierto de  $\mathbb{R}^n$  ( $\forall V$  abierto en  $\tau_1$ ).

En lo que sigue vamos a considerar un espacio medible fijo de la forma  $(X, \mathfrak{X})$ .

Notación: Dada una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos:

$$\{f > \alpha\} := \{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$$

**Definición 3.2 (Función medible).** Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible ( $\sigma$ -medible) si  $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$ .

**Lema 3.3.** Dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, son equivalentes:

1.  $f$  es  $\mathfrak{X}$ -medible.
2.  $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$ .
3.  $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$ .
4.  $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$ .

**Demostración.** Sea  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $\iff$  (3):  $\{f \leq \alpha\} = \{f > \alpha\}^c \in \mathfrak{X}$ .
- (2)  $\iff$  (4) Análogo.
- (1)  $\iff$  (2): Supongamos que  $f$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  quiero ver que  $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X}$ .

$$\begin{aligned} x \in \{f \geq \alpha\} &\iff f(x) \geq \alpha > \alpha - \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ x \in \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} &\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \{f \geq \alpha\} &= \bigcap_{n \geq 1} \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

Para la vuelta supongamos que vale (2). Quiero ver que  $\{f > \gamma\} \in \mathfrak{X}$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \{f > \gamma\} &= \bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\} \\ x \in \{f > \gamma\} &\iff f(x) > \gamma \iff \exists n_x \in \mathbb{N} : f(x) > \gamma + \frac{1}{n_x} \end{aligned}$$

Luego  $\bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X}$ .

□

**Ejemplo.** Toda función constante es medible.  $f : X \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = c \quad (\forall x \in X)$ .

**Demostración.** Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq c \\ X & \alpha < c \end{cases}$$

□

**Ejemplo.** Dado  $E \subseteq X$  consideremos la función característica de  $E$ . Como  $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$



**Demostración.** Consideremos  $E = [0, 1]$ . Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\{\chi_E > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq 1 \\ E & 0 \leq \alpha < 1 \\ X & \alpha < 0 \end{cases}$$

Luego  $\chi_E$  es medible  $\iff E \in \mathfrak{X}$ . □

**Ejemplo.** Si  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{X} = \mathcal{B} \Rightarrow$  toda función continua es medible con respecto a la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Ejemplo.**  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{X} = \mathcal{B}_n$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona (creciente) entonces es  $\mathcal{B}$ -medible.

**Proposición 3.4.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible  $\iff f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. Luego definimos  $E = \{F \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(F) \in \mathfrak{X}\}$  que es  $\sigma$ -álgebra. Si  $A = \{(\alpha, +\infty)\}$ ,  $\sigma(A) = \mathcal{B}$  y por ser  $f$   $\mathfrak{X}$ -medible,  $f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathfrak{X}$ . Luego,  $(\alpha, +\infty) \in E$  y  $\sigma(A) = \mathcal{B} \subseteq E$  por ser la menor  $\sigma$ -álgebra, entonces se tiene que  $\forall B \in \mathcal{B} \quad f^{-1}(B) \in \mathfrak{X}$ .

Supongamos ahora que  $f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \quad \forall B \in \mathcal{B}$ . Como  $(\alpha, +\infty) \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathfrak{X}$  y  $f$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. □

**Lema 3.5.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles,  $c \in \mathbb{R}$  entonces  $c \cdot f, f^2, f + g, |f|, f \cdot g$ , son  $\mathfrak{X}$ -medibles.  $f^2 = f(x) \cdot f(x)$ .

**Demostración.** Veamos que  $f^2$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  quiero ver que  $\{f^2 > \alpha\} \in \mathfrak{X}$ .  
Si  $\alpha < 0 \Rightarrow \{f^2 > \alpha\} = X$ .

Si  $\alpha \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\{f^2 > \alpha\} &= \{x \in X : f(x) \cdot f(x) > \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}\} \\ \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\} &\in \mathfrak{X}\end{aligned}$$

$\therefore f^2$  es  $\mathfrak{X}$ -medible.

Veamos ahora que  $f + g$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  quiero ver que

$$\{f + g > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Para  $x \in X$  tenemos que:

$$(f + g)(x) > \alpha \iff f(x) + g(x) > \alpha \iff f(x) > r \wedge g(x) > \alpha - r \text{ para algún } r \in \mathbb{Q}$$

Entonces  $\{f + g > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > \alpha - r\}) \in \mathfrak{X}$  por ser unión numerable

$\therefore f + g$  es  $\mathfrak{X}$ -medible.

Por último veamos que  $f \cdot g$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  quiero ver que

$$\{f \cdot g > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Sabemos que:

$$(f + g)^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible} \Rightarrow f^2 + 2 \cdot f \cdot g + g^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible}$$

$$f \cdot g = \frac{1}{2} ((f + g)^2 - f^2 - g^2) \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible}$$

□

## 3.2 Funciones medibles en la recta extendida

**Definición 3.6.** Dada  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  diremos que  $f$  es  $\mathfrak{X}$ -medible si

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) = \{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

A la clase de las funciones (a valores en la recta extendida)  $\mathfrak{X}$ -medibles la denotaremos por  $M(X, \mathfrak{X})$ .

**Observación.** Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X})$ .

**Observación.** Si

$$f \in M(X, \mathfrak{X}) \Rightarrow \{f = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f > n\} \in \mathfrak{X}$$

Además,

$$\{f = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f < -n\} \in \mathfrak{X}$$

**Lema 3.7.** Dada una función  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  consideremos  $A_f = \{f = +\infty\}$ ,  $B_f = \{f = -\infty\}$  y

$$\hat{f} = \begin{cases} f & x \in X \setminus (A_f \cup B_f) \\ 0 & x \in A_f \\ 0 & x \in B_f \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff A_f, B_f \in \mathfrak{X}$  y  $\hat{f}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible.

**Demostración.** Supongamos primero que  $f \in M(X, \mathfrak{X})$ . Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ya vimos que  $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$ . Veamos que  $\hat{f}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible.

Quiero ver que  $\{\hat{f} > \alpha\} \in \mathfrak{X}$ . Si  $\alpha \geq 0$  entonces

$$\{\hat{f} > \alpha\} = \{f > \alpha\} - A_f = \{f > \alpha\} \cap A_f^c \in \mathfrak{X}$$

Si  $\alpha < 0$  entonces

$$\{\hat{f} < \alpha\} = \{f > \alpha\} \cup \{\hat{f} = 0\} = \{f > \alpha\} \cup (A_f \cup B_f) = \{f > \alpha\} \cup B_f \in \mathfrak{X}$$

Luego  $\hat{f} \in M(X, \mathfrak{X})$ . Supongamos ahora que  $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$  y  $\hat{f}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} > \alpha\} \cup A_f \in \mathfrak{X}$$

Si  $\alpha < 0$  entonces

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} < \alpha\} \setminus B_f = \{\hat{f} < \alpha\} \cap B_f^c \in \mathfrak{X}$$

□

**Corolario 3.8.** Si  $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Las funciones  $c \cdot f$ ,  $f^2$ ,  $|f|$ ,  $f \cdot g \in M(X, \mathfrak{X})$ .

**Observación.** Dados  $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$  consideremos los conjuntos

- $E_1 = \{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\} \in \mathfrak{X}$ .
- $E_2 = \{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\} \in \mathfrak{X}$ .

Notemos que no está definida la suma  $f + g$  en  $E_1 \cup E_2$ . Definimos

$$f + g = \begin{cases} f + g & x \in X \setminus (E_1 \cup E_2) \\ 0 & x \in E_1 \cup E_2 \end{cases}$$

$f + g \in M(X, \mathfrak{X})$

**Demostración.** Ejercicio. □

**Lema 3.9.** Dada una sucesión de funciones  $(f_n)_{n \geq 1}$  en  $M(X, \mathfrak{X})$  sean  $f, f^*, F, F^*$  definidas

por:

$$f(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x) \quad f^*(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$F(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x) \quad F^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Entonces  $f, f^*, F, F^* \in M(X, \mathfrak{X})$ .

**Demostración.** Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\{F > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

$$\{f > \alpha\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Veamos  $F^* \in M(X, \mathfrak{X})$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  defino  $h_n = \sup_{m \geq n} f_m \in \mathfrak{X}$ . Por ser subsucesión de funciones medibles. Luego

$$F^* = \inf_{n \geq 1} (\sup_{m \geq n} f_m) \in \mathfrak{X}$$

Análogamente para  $f^*$ . □

**Corolario 3.10.** Dada  $(f_n)_{n \geq 1} : f_n \in M(X, \mathfrak{X}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ . Supongamos que la sucesión converge puntualmente a  $f$  entonces  $f \in M(X, \mathfrak{X})$ .

**Demostración.** Notemos que  $f = \liminf f_n = \limsup f_n$  y aplicamos el lema anterior. □

# Clase IV - 20/03

## 4.1 Parte negativa y positiva

**Definición 4.1 (Función truncada).** Dada una función  $f \in M(X, \mathfrak{X})$ , para cada  $n \geq 1$  definimos la función truncada a  $[-n, n]$  como la  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \in [-n, n] \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n \end{cases}$$

Que converge puntualmente a  $f$ .

Notemos que  $f_n$  es medible para todo  $n \geq 1$ . Pues

$$\{f_n > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{si } \alpha \leq -n \\ \{f < \alpha\} & \text{si } \alpha \in [-n, n] \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq n \end{cases}$$

Veamos una forma alternativa de probar el teorema de la clase anterior. Si  $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$  entonces  $f + g : X \rightarrow \mathbb{R} \in M(X, \mathfrak{X})$

Para cada  $n \geq 1$  consideramos las funciones truncadas  $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Tenemos que  $f_n + g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible. Queremos ver que la convergencia es puntual  $\forall x \in X$ .

Si  $x \in E_1 = \{f = +\infty, g = -\infty\}$ . Para cada  $n \geq 1$ ,  $f_n(x) = n$  y  $g_n(x) = -n$  entonces  $(f_n + g_n)(x) = f_n(x) + g_n(x) = 0 \quad (\forall n)$ . Luego  $(f_n + g_n)(x) \rightarrow 0 = f(x)$  si  $x \in E_1$ . Para  $x \in E_2$  el desarrollo es análogo.

Si  $x \in (E_1 \cup E_2)^c$  entonces

1.  $f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(x) \in \mathbb{R}$  y  $g(x) = +\infty$ .
3.  $f(x) = +\infty$  y  $g(x) \in \mathbb{R}$ .
4.  $f(x) = g(x) = +\infty$ .

Luego  $(f_n + g_n)(x) \rightarrow (f + g)(x) \quad \forall x \in (E_1 \cup E_2)^c$ . Pues  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  y  $g_n(x) \rightarrow g(x)$ .

**Definición 4.2.** Dada una función  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definimos la parte positiva  $f^+ : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  y la parte negativa  $f^- : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  como

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

**Observación.**  $f = f^+ - f^-$  y  $|f| = f^+ + f^-$ .

**Observación.** Si  $(X, \mathfrak{X})$  es un espacio medible  $f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{X}) = \{f \in M(X, \mathfrak{X}) : f \geq 0\}$  Notemos que  $f^+ = \sup(\{f, 0\})$  y  $f^- = \sup(\{-f, 0\})$ . Utilizando el teorema anterior vemos que si  $f^+, f^- \in M(X, \mathfrak{X})$  entonces  $f = f^+ + (-f^-) \in M(X, \mathfrak{X})$ .

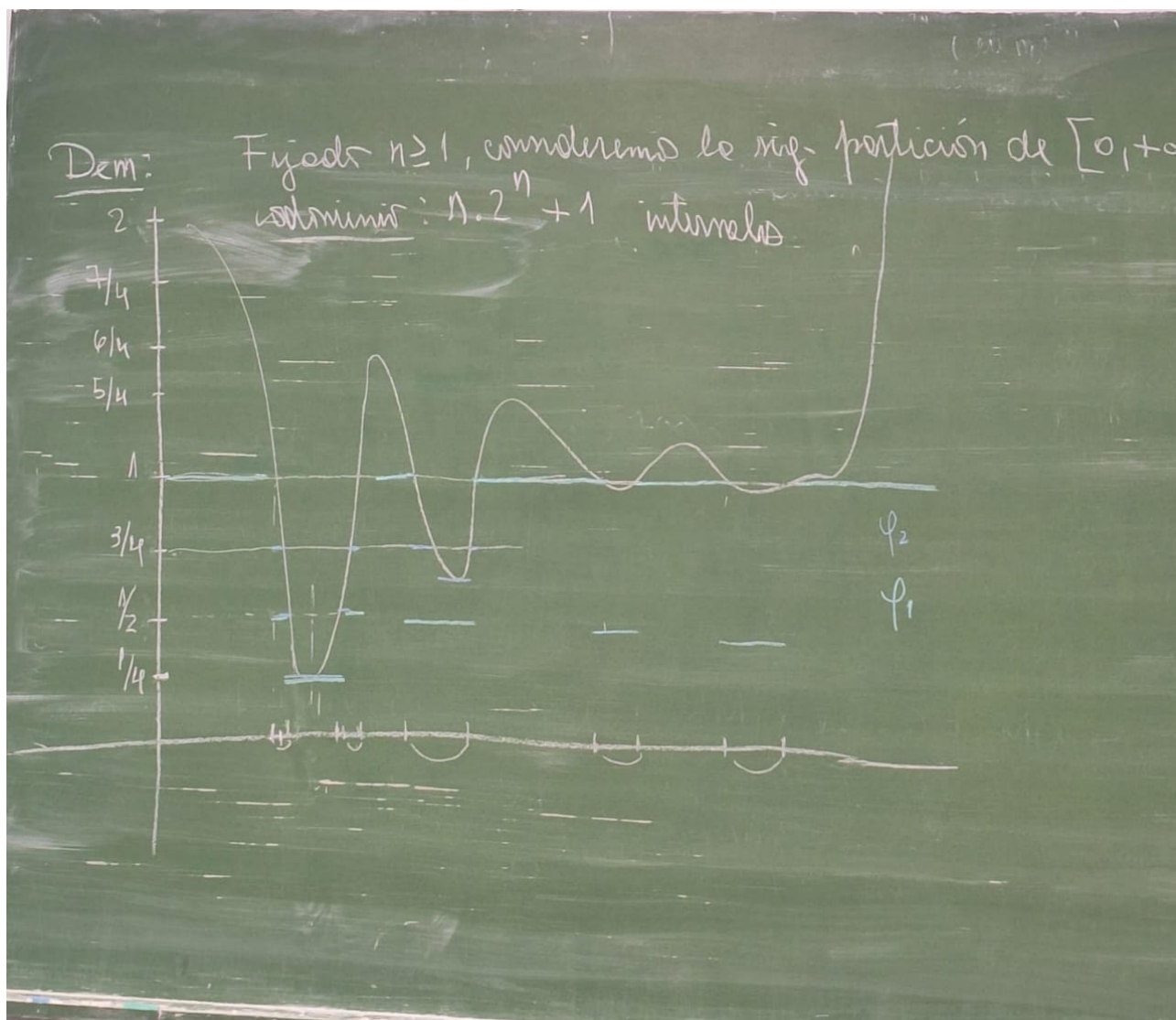
**Observación.** Si  $B_f = \{f = +\infty\}$ ,

$$f^+ = \chi_{B_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (f + |f|)$$

$$f^- = \chi_{A_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (|f| - f)$$

**Teorema 4.3.** Si  $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$  entonces  $\exists(\phi_n)_{n \geq 1} \in M^+(X, \mathfrak{X})$  tal que

1.  $\phi_n \leq \phi_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ .
2.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X$ .
3. Para cada  $n \geq 1$  se tiene que  $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  toma una cantidad finita de valores.



Luego fijado el  $n \in \mathbb{N}$  tenemos los intervalos

$$[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \dots, [\frac{n \cdot 2^n - 1}{2^n}, \frac{n \cdot 2^n}{2^n}), [n, +\infty)$$

Para cada  $k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1$  definimos el conjunto

$$\begin{aligned} E_{k,n} &= f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})) \in \mathfrak{X} \\ &= \{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} \end{aligned}$$

Sea

$$E_{n \cdot 2^n, n} = f^{-1}([n, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq n\} \in \mathfrak{X}$$

Notemos que  $E_{k,n} \in \mathfrak{X} \quad \forall k, \bigcup_{k=0}^{n \cdot 2^n} E_{k,n} = f^{-1}([0, +\infty)) = X$  son disjuntos dos a dos.

Luego definimos  $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{E_{k,n}} = \frac{k}{2^n}$  si  $x \in E_{k,n}$ , cada  $x$  pertenece a un único  $E_{k,n}$  por construcción.

Entonces  $\phi_n \in M^+(X, \mathfrak{X})$ .

Veamos que  $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ , dado  $x \in X$  supongamos que  $f(x) < n$  entonces  $\exists! k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 : x \in E_{k,n}$  (pues en el nivel  $n$ , son disjuntos).

Queda como ejercicio probar que  $E_{k,n} = E_{2k,n+1} \cup E_{2k+1,n+1}$ .

Luego

$$\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} & \text{si } x \in E_{2k,n+1} \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x \in E_{2k+1,n+1} \end{cases}$$

$\therefore \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$ .

Por otro lado si  $f(x) > n \Rightarrow x \in E_{n \cdot 2^n, n}$  entonces  $\phi_n(x) = n$ .

Como ahora descomponemos  $[n, +\infty]$  en  $[n, n+1] \cup [n+1, +\infty]$  para  $\phi_{n+1}$  lo tenemos como

$$\bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1} \left[ \frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}}, \frac{n \cdot 2^{n+1} + k + 1}{2^{n+1}} \right) \cup [n+1, +\infty]$$

Si  $x \in [n+1, +\infty]$  ya está pues  $\phi_{n+1}(x) = n+1 \geq n = \phi_n(x)$ .

Luego  $\exists! k = 0, \dots, n \cdot 2^{n+1} : x \in E_{n \cdot 2^{n+1} + k, n+1}$  y en ese caso  $\phi_{n+1}(x) = \frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}} = n + \frac{k}{2^{n+1}} \geq n = \phi_n(x)$ . Por lo tanto  $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ .

Por último veamos que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X$ .

1.  $f(x) = +\infty$  luego  $\forall n \geq 1 \quad \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty$ .

2.  $f(x) \in [0, +\infty)$ . Consideremos  $n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0$  luego  $\forall n \geq n_0 \quad \exists k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 : x \in E_{k,n}$ . Entonces  $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \iff 0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ .

$\therefore \phi_n(x) \rightarrow f(x)$ .

**Observación.** Si  $f$  está acotada (superiormente) entonces  $\phi_n \rightrightarrows f$ .



## 4.2 Funciones medibles entre espacios medibles

**Definición 4.4.** Dados espacios medibles  $(X, \mathfrak{X})$  y  $(Y, \mathfrak{Y})$  una función  $f : X \rightarrow Y$  es  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ -medible si  $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \mathfrak{Y}$ .

**Ejemplo.** Si  $(X, \mathfrak{X})$  es un espacio medible:

1.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible  $\iff f$  es  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ -medible.
2.  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es  $\mathfrak{X}$ -medible  $\iff f$  es  $(\mathfrak{X}, \overline{\mathcal{B}})$ -medible.
3.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sean  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  las componentes de  $f$  entonces  $f$  es  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ -medible si y sólo si  $f_j$  lo es  $\forall j$ .

**Proposición 4.5.** Dados un espacio medible  $(X, \mathfrak{X})$  y un conjunto  $Y$ , sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Si  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathfrak{X} \quad \forall A \in \mathcal{A}$  entonces  $f$  es  $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$ -medible.

**Demostración.** Sea  $Z = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{X}\} \supseteq \mathcal{A}$ . Es fácil ver que  $Z$  es  $\sigma$ -álgebra entonces  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq Z$ . Es decir que  $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \sigma(\mathcal{A})$ . Luego  $f$  es  $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$ -medible.  $\square$

**Proposición 4.6.** Sea  $(X, \mathfrak{X})$ ,  $(Y, \mathfrak{Y})$ ,  $(Z, \mathfrak{Z})$  espacios medibles y  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  funciones  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ -medible y  $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ -medible respectivamente. Entonces  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ -medible.

**Demostración.** Fijado  $E \in \mathfrak{Z}$  tenemos que  $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathfrak{X}$  pues  $f$  y  $g$  son medibles.  $\square$

# Clase V - 25/03

## 5.1 Medidas

### 5.1.1. Motivación

Sea  $\phi : X \rightarrow [0, +\infty]$  con  $\text{Im}(\phi) = \{y_1, \dots, y_m\}$ . Si  $\phi^{-1}(y_i) \in \mathfrak{X}$  y conocemos  $\mu(\phi^{-1}(y_i)) \in [0, +\infty]$  (la medida de cada conjunto) podemos definir

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^m y_i \cdot \mu(\phi^{-1}(y_i))$$

Si  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  es  $\mathfrak{X}$ -medible,  $\exists$  una sucesión  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  con funciones así tal que  $\phi_n \rightarrow f$ . Entonces podremos definir

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n \, d\mu$$

Dado un espacio medible  $(X, \mathfrak{X})$ , vamos a considerar ciertas funciones  $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$  : el valor  $\mu(E)$  para cada  $E \in \mathfrak{X}$  esté motivado por las nociones de longitud, área, volumen, probabilidad, masa, etc.

### 5.1.2. Series de términos no negativos

**Proposición 5.1.** Sea  $(a_n)_{n \geq 1} \subset [0, +\infty] \Rightarrow$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge en  $[0, +\infty]$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$   
Además:

1. Si  $(I_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión creciente de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  ( $I_n \subseteq I_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ ) entonces  $\bigcup_{n \geq 1} I_n = \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n = \sup\{\sum_{m \in I_n} a_m : n \geq 1\}$ .
2. Si  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es una permutación de  $\mathbb{N}$  entonces  $\sum_{n \geq 1} a_{\sigma(n)} = \sum_{n \geq 1} a_n$ .
3. Dado un conjunto numerable  $I$ , sea  $(a_i)_{i \in I}$  una sucesión en  $[0, +\infty]$  y  $f : \mathbb{N} \rightarrow I$  es una biyección, consideremos la sucesión  $(b_n)_{n \geq 1} = (a_{f(n)})_{n \geq 1}$ , entonces podemos definir a

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n \geq 1} b_{f(n)}$$

Esto está bien definido pues si  $g : \mathbb{N} \rightarrow I$  es otra biyección tal que  $c_n = a_{g(n)}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} c_n &= \sum_{n \geq 1} a_{g(n)} \\ \sum_{n \geq 1} a_{\sigma(f(n))} &= \sum_{n \geq 1} b_{\sigma(n)} = \sum_{n \geq 1} b_n \end{aligned}$$

En particular si  $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  y  $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $[0, +\infty]$  podemos definir

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{n,m} &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{m \geq 1} a_{n,m} \right) \\ &= \sum_{m \geq 1} \left( \sum_{n \geq 1} a_{n,m} \right) \end{aligned}$$

### 5.1.3. Definición de medida

**Definición 5.2 (Medida).** Dado un espacio medible  $(X, \mathfrak{X})$ , una medida en  $X$  es una función  $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. ( $\sigma$ -aditividad) Si  $(E_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión en  $\mathfrak{X}$ , dos a dos disjuntos  $\Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n)$$

**Observación.** Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{X}$  son conjuntos dos a dos disjuntos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Esto se deduce de la propiedad de  $\sigma$ -aditividad, pues construimos la sucesión  $(E_n)_{n \geq 1}$  como  $A_1, A_2, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$ .

**Definición 5.3 (Medida finita).** Una medida es finita si  $\mu(E) < +\infty \quad \forall E \in \mathfrak{X}$ .

**Definición 5.4 (Medida  $\sigma$ -finita).** Una medida es  $\sigma$ -finita si  $\exists (E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathfrak{X}$  tal que:  $X = \bigcup_{n \geq 1} E_n$  y  $\mu(E_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$ .

**Ejemplo.** Si  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathfrak{X} = P(X)$  y tomamos  $\mu : P(X) \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $\mu(E) = 0 \quad \forall E \in P(X)$  y también es medida si la definimos como

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset \\ +\infty & \text{si } E \neq \emptyset \end{cases}$$

Luego no es finita, ni  $\sigma$ -finita.

**Ejemplo.** Sea  $(X, \mathfrak{X})$  un espacio medible y fijemos  $x_0 \in X \neq \emptyset$ . Sea  $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \notin E \\ 1 & \text{si } x_0 \in E \end{cases}$$

Es la medida puntual con masa uno y la notamos  $\delta_{x_0}$  ( $\delta$  de Dirac). Es una medida finita y es  $\sigma$ -aditiva pues si construimos una sucesión  $E_n$  de conjuntos disjuntos dos a dos  $\mu(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) = 1$ . Pues un único conjunto  $E_n$  puede contener a  $x_0$ .

**Ejemplo.** Sea  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  y la medida de conteo  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$  tal que

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ es infinito} \\ \text{card}(E) & \text{si } E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{cases}$$

Ejercicio, ver que es  $\sigma$ -aditiva. Es  $\sigma$ -finita, pero no es finita pues  $\mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 1} \{n\}$  y  $\mu(\{n\}) = 1$ .

**Ejemplo.** Sea  $(X, \mathfrak{X})$  un espacio medible,  $X$  con infinitos elementos, sea  $(x_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $X$  con  $x_n \neq x_m \quad \forall n \neq m$  y  $(a_n)_{n \geq 1}$  otra sucesión en  $[0, +\infty]$ . Definimos  $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$  como

$$\mu(E) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} : x_n \in E \\ E \in \mathfrak{X}}} a_n$$

Queda como ejercicio ver que es medida. Si  $\mathfrak{X}$  contiene a los conjuntos unitarios  $\{x_n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $\mu$  es  $\sigma$ -finita pues  $X = (\bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}) \cup (X - \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\})$  ambos medibles, luego  $\mu(\{x_n\}) = a_n$  y  $\mu(X - \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}) = 0$ . Además es  $\sigma$ -finita  $\iff \sum_{n \geq 1} a_n < +\infty$

**Ejemplo (Medida de Lebesgue).** Si  $X = \mathbb{R}$  y  $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$ , más adelante probaremos que  $\exists!$  medida  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:  $\lambda((a, b)) = b - a$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ .

Es  $\sigma$ -finita pues  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} (-n, n)$  y  $\lambda((-n, n)) = 2n < +\infty$ , pero no es finita pues  $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$ . Notemos que  $\lambda$  puede extenderse a una  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}$  más grande que  $\mathcal{B}$ , pero no puede extenderse a  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

**Ejemplo (Medida n-dimensional de Lebesgue).** Sea  $X = \mathbb{R}^n$  y  $\mathfrak{X} = \mathcal{B}_n$ , tenemos que  $\exists!$  medida  $\lambda : \mathcal{B}_n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

$$\lambda_n\left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ y } a_i < b_i$$

**Ejemplo (Medida de Borel - Stieltjes generada por  $f$ ).** Si  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$ , fijemos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona no decreciente y continua. Probaremos que existe una única medida  $\lambda_f : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  :

$$\lambda_f((a, b)) = f(b) - f(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b$$

El ejemplo anterior es un caso particular de esta medida con  $f(x) = x$ .

**Lema 5.5.** Dado un espacio medible  $(X, \mathfrak{X})$  y una medida  $\mu : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Si  $F, E \in \mathfrak{X}$  y  $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$ . Si además  $\mu(E) < +\infty \Rightarrow \mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$ .

**Demostración.** Como  $E \subseteq F$  entonces  $F = E \cup (F - E)$ , además  $F - E = F \cap E^c \in \mathfrak{X}$  y  $E \cap (F - E) = \emptyset$ . Entonces  $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E)$ . Si  $\mu(E) < +\infty$  entonces  $\mu(F)$ ,  $\mu(F - E)$  son o ambos finitos o ambos infinitos, luego  $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$ .  $\square$

**Corolario 5.6.**  $\mu$  es finito  $\iff \mu(X) < +\infty$ .

**Lema 5.7.** Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión cualquiera en  $\mathfrak{X}$  entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

**Demostración.** Definamos

$$\begin{aligned} F_1 &:= A_1, F_2 := A_2 - A_1, \dots \\ F_n &:= A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = A_n - \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k\right) \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Resulta que es una sucesión en  $\mathfrak{X}$  de conjuntos disjuntos dos a dos ya que si  $n > m \Rightarrow F_m \cap F_n = (A_m - \bigcup_{k=1}^{m-1} F_k) \cap F_n = \emptyset$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \geq 1} A_n &= \bigcup_{n \geq 1} F_n, \text{ y} \\ \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} F_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(F_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 5.8.** Sea  $\mu$  una medida sobre  $\mathfrak{X}$ :

1. Si  $(E_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión en  $\mathfrak{X}$  creciente  $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ .
2. Si  $(F_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión decreciente y  $\mu(F_1) < +\infty \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n)$$

Ejemplo  $\{x\} = \bigcap_{n \geq 1} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$  y  $\mu(\{x\}) = \frac{2}{n} \rightarrow 0$  si  $\mu = \lambda$ .

**Demostración.** Veamos el primer caso.

$\forall n \in \mathbb{N}$  sea  $A_n = E_n - E_{n-1}$ , con  $E_0 = \emptyset$  y  $(A_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión en  $\mathfrak{X}$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Entonces

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E_n, \text{ y además } \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} E_n$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) \end{aligned}$$

Para el segundo caso si  $\mu(F_1) < +\infty$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$  definimos  $E_n = F_1 - F_n \Rightarrow (E_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión creciente en  $\mathfrak{X}$  tal que

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} F_1 \cap F_n^c = F_1 \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n^c\right) = F_1 \cap \left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right)^c = F_1 - \bigcap_{n \geq 1} F_n$$

$$\begin{aligned} \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) &= \mu(F_1 - \bigcap_{n \geq 1} F_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_1 - F_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_1) - \mu(F_n) = \mu(F_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_n) \end{aligned}$$

\*Por el lema anterior  $\therefore$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_n) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right)$$

□

Notemos que en el segundo caso la condición  $\mu(F_1) < +\infty$  se puede reemplazar por  $\mu(F_{n_0}) < +\infty$  para algún  $n_0 \geq 1$ , pero no puede omitirse. Por ejemplo si  $X = \mathbb{R}$  y  $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$  y  $\mu = \lambda$  la medida de Lebesgue, entonces llamemos  $F_n = (n, +\infty)$  en este caso  $\mu(F_n) = +\infty$  y  $\mu(\bigcap_{n \geq 1} F_n) = \emptyset$ . Aplicando estas propiedades para la medida de Lebesgue  $\lambda$  podemos probar que si  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$   $(a, b) : a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  y  $a < b$  o  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ .

$$\lambda(I) = \begin{cases} l(I) & \text{si } I \text{ es acotado} \\ +\infty & \text{si } I \text{ es no acotado} \end{cases}$$



# Clase VI - 27/03

## 6.1 Espacio de medida

**Definición 6.1 (Espacio de medida).** Un espacio de medida es una terna  $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ , donde  $X$  es un conjunto,  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  y  $\mu$  es una medida en  $\mathfrak{X}$ .

Un espacio de probabilidad es un espacio de medida tal que  $\mu(X) = 1$ . En este caso a  $X$  se lo llama espacio muestral, a  $\mathfrak{X}$  se lo llama colección de eventos y una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{X}$ -medible se la llama variable aleatoria.

**Definición 6.2.** Dado un espacio de medida  $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ , sea  $P(x)$  una "propiedad" que se puede predicar de sobre los elementos  $X \in \mathfrak{X}$ . Diremos que  $P(x)$  vale  $\mu$ -casi todo punto ( $\mu$ -c.t.p) si  $\exists N \in \mathfrak{X}$  con  $\mu(N) = 0 : P(x)$  vale  $\forall x \in N^c$ .

**Ejemplo.**  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones diremos que  $f = g$   $\mu$ -c.t.p si  $\exists N \in \mathfrak{X}$  con  $\mu(N) = 0 : f(x) = g(x) \quad \forall x \in N^c$ . Por ejemplo si  $(X, \mathfrak{X}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , las funciones  $f = X_{\mathbb{Q}}$ , y  $g = 0$  son  $\lambda$ -c.t.p iguales ya que  $f(x) = g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^c$  y  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ .

**Ejemplo.** Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  diremos que  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -c.t.p si  $\exists N \in \mathfrak{X}$  con  $\mu(N) = 0$  tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in N^c$ .

**Definición 6.3 (Carga).** Dado un espacio medible  $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ , una carga en  $\mathfrak{X}$  es una función  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ :

1.  $\nu(\emptyset) = 0$ .
2. Si  $(E_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión en  $\mathfrak{X}$  disjuntos dos a dos entonces  $\nu(\bigcup E_n) = \sum \nu(E_n)$ .

Admitimos solo valores reales en la imagen para evitar situaciones del tipo  $\infty + (-\infty)$ . Luego  $\sum_{n \geq 1} \nu(E_n)$  converge pues si definimos  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una permutación de los naturales entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \nu(E_{\sigma(n)}) &= \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_{\sigma(n)}\right) \\ &= \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \nu(E_n) \end{aligned}$$

$\therefore$  converge incondicionalmente  $\rightarrow$  converge absolutamente.

## 6.2 Generación de medida

Motivación: ¿Cómo podemos construir una medida con ciertas propiedades cuando no sabemos como definirla sobre todos los conjuntos de la  $\sigma$ -álgebra?

Consideremos la clase  $\mathfrak{I}$  formada por los intervalos de la forma

1.  $(a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .
2.  $(-\infty, b]$  con  $b \in \mathbb{R}$ .
3.  $(c, \infty)$  con  $c \in \mathbb{R}$ .
4.  $(-\infty, \infty)$ .
5.  $\emptyset$ .

Luego definimos  $\ell : \mathfrak{I} \rightarrow [0, +\infty]$  dada por:

1.  $\ell((a, b]) = b - a$ .
2.  $\ell((-\infty, b]) = +\infty$ .
3.  $\ell((c, \infty)) = +\infty$ .
4.  $\ell((-\infty, \infty)) = +\infty$ .
5.  $\ell(\emptyset) = 0$ .

Sabemos que  $\sigma(\mathfrak{I}) = \mathcal{B}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$ , pero no sabemos como extender la definición de  $\ell$  a todos los conjuntos de  $\mathcal{B}$ .

La clase de  $\mathfrak{I}$  tiene estructura de semiálgebra.

**Definición 6.4 (Semiálgebra).** Una colección de subconjuntos  $\mathcal{A}$  de  $X$  es una semiálgebra si:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ .
3. Si  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \bigcup_{k=1}^n S_k$  para  $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{A}$  dos a dos disjuntos.

Se deja como ejercicio verificar que efectivamente  $\mathfrak{I}$  es una semiálgebra con la definición de semiálgebra de  $\mathbb{R}$ .

**Lema 6.5.** La función  $\ell : \mathfrak{I} \rightarrow [0, +\infty]$  es finitamente aditiva, i.e, si  $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{I}$  son conjuntos dos a dos disjuntos y  $\bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{I} \Rightarrow \ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$ .

**Demostración.** Supongamos  $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{I}$ , no vacíos, cuya unión también pertenece a  $\mathfrak{I}$ . Si alguno es no acotado, la unión también y será  $\ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = +\infty = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$ . Supongamos ahora que cada  $I_k = (a_k, b_k]$  con  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ,  $a_k < b_k$ . Luego  $\bigcup_{i=1}^n I_i$  es de la forma  $(a, b]$  con  $a = \min(a_1, \dots, a_n)$  y  $b = \max(b_1, \dots, b_n)$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , si no es así reordenamos los intervalos.

De esto se sigue que  $a_1 = a < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \dots < b_{n-1} = a_n < b_n = b$ , pues no puede haber huecos, ya que dijimos que la unión pertenece a  $\mathfrak{I}$ . Claramente  $\ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = b - a = \ell((a, b])$  y, finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ell(I_k) &= \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \\ &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) \\ &= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \dots + (b_{n-1} - a_n) + b_n \\ &= b_n - a_1 = b - a \end{aligned}$$

$$\therefore \ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i). \quad \square$$

De acuerdo con el lema anterior podríamos extender la función  $\ell$  a una clase más grande de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{i=1}^n I_i, \text{ para ciertos } n \in \mathbb{N}, I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{I} \text{ dos a dos disjuntos}\}$ , definimos  $\ell : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  como  $\ell(A) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$  si  $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$  con las mismas condiciones que pedimos.

**Observación.** Queda ver que  $\ell$  está bien definida, i.e, no depende de la forma en que se escriba  $A$  como unión de intervalos.

**Definición 6.6 (Álgebra).** Dado un conjunto  $X$ , una clase  $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$  es un álgebra si:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$ .
3. Si  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$ .

**Lema 6.7.** Dada una semiálgebra  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  la clase  $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A = \bigcup_{i=1}^n S_i, S_j \in \mathcal{S} \ \forall j = 1, \dots, n, \text{ dos a dos disjuntos}\}$  es un álgebra de subconjuntos de  $X$ .

Además  $\mathcal{A}$  es la menor álgebra que contiene a  $\mathcal{S}$  y se la llama álgebra generada por  $\mathcal{S}$ .

**Demostración.** Veamos que  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo la intersección finita.

Sean  $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$  dos a dos disjuntos y  $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{S}$  dos a dos disjuntos.

Llamemos  $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$  y  $F = \bigcup_{j=1}^m F_j \in \mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} S \cap F &= \bigcup_{i=1}^n S_i \cap \bigcup_{j=1}^m F_j \\ &= \bigcup_{i=1}^n (S_i \cap \bigcup_{j=1}^m F_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (S_i \cap F_j) \end{aligned}$$

Luego  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ , sea  $S_{ij} = S_i \cap F_j \in \mathcal{S}$ . Además  $S_{ij} \cap S_{kl} = \emptyset$  si  $(i, j) \neq (k, l)$ . Luego  $S \cap F \in \mathcal{A}$  pues  $S \cap F$  es unión finita de elementos de  $\mathcal{S}$  dos a dos disjuntos.

Ahora veamos que se cumplen las propiedades de álgebra:

1. Se cumple pues  $\mathcal{S}$  es semiálgebra.
2. Dado  $A \in \mathcal{A}$ , sean  $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$  tal que  $A = \bigcup_{i=1}^n S_i$ , dos a dos disjuntos. Entonces  $A^c = \bigcap_{i=1}^n S_i^c \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n$  como  $S_i \in \mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}$  es una semiálgebra  $\exists B_1^i, B_2^i, \dots, B_n^i \in \mathcal{S}$  dos a dos disjuntos tal que  $S_i^c = \bigcup_{j=1}^n B_j^i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n S_i^c \in \mathcal{A}$ , pues ya probamos que la intersección finita es cerrada.
3. Queda como ejercicio.

□

# Clase VII - 01/04

## 7.1 Generación de medida (continuación)

Habíamos visto que  $\ell : \mathfrak{Y} \rightarrow [0, +\infty]$  es condicionalmente finitamente aditiva. Es decir que si  $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{Y}$  son conjuntos dos a dos disjuntos tal que  $\bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{Y} \Rightarrow \ell(\bigcup_{k=1}^n I_k) = \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$ . Queda como ejercicio ver que:

1. Si  $I, J \in \mathfrak{Y}$  y  $I \subseteq J$  entonces  $\ell(I) \leq \ell(J)$ .
2.  $\ell$  también es condicionalmente subaditiva i.e si  $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{Y} : \bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{Y}$  entonces  $\ell(\bigcup_{k=1}^n I_k) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$ .

Veamos que  $\ell : \mathfrak{Y} \rightarrow [0, +\infty]$  es condicionalmente  $\sigma$ -aditiva i.e si  $(I_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathfrak{Y}$  es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tal que  $\bigcup_{n \geq 1} I_n \in \mathfrak{Y}$  entonces  $\ell(\bigcup_{n \geq 1} I_n) = \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$ . Hay que considerar varios casos según la forma de  $I := \bigcup_{n \geq 1} I_n$ .

El primer caso es cuando  $I = (a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $I_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y, como  $I_n \subseteq I$ ,  $I_n = (a_n, b_n]$  con  $a \leq a_n < b_n \leq b$ .

Primero veamos que  $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \leq \ell(I)$ , fijemos  $m \in \mathbb{N}$  y supongamos que  $I_1, \dots, I_m$  son tales que  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ , si no es así los reordenamos (son finitos).

Como son dos a dos disjuntos y son subconjuntos de  $I$  con

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < \dots \leq a_m < b_m \leq b$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \ell(I_n) &= \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) \\ &= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \dots + (b_{m-1} - a_m) + b_m \\ &\leq b_m - a_1 \leq b - a = \ell(I) \end{aligned}$$

Pues cada  $(b_1 - a_2), (b_2 - a_3), \dots, (b_{m-1} - a_m)$  son negativos.

Por lo tanto la suma parcial  $\sum_{n=1}^m \ell(I_n) \leq \ell(I) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \leq \ell(I)$ .

Veamos ahora que  $b - a = \ell(I) \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$ . Basta probar que dado  $a < a' < b \Rightarrow b - a' \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$ .

Fijemos un  $a' \in (a, b]$  y sea  $\varepsilon > 0$ , para cada  $j \in \mathbb{N}$  sea  $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2 \cdot j}$ .

Definamos  $U_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j]$  y notemos que  $[a', b] \subseteq (a, b] = \bigcup_{n \geq 1} I_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n$ .

Por el Teorema de Heine-Borel  $[a', b]$  es compacto y entonces  $\exists m \geq 1 : [a', b] = \bigcup_{j=1}^m U_j$ .

Consideremos  $I'_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j] \in \mathfrak{Y} \quad \forall j = 1, \dots, m$ .

Luego  $(a', b] \subseteq \bigcup_{j=1}^m I'_j \Rightarrow b - a' = \ell((a', b]) \leq \ell(\bigcup_{j=1}^m I'_j)$

Si  $I'_j \cap (a', b] = \emptyset$  entonces lo podemos descartar para que  $\bigcup_{j=1}^m I'_j$  sea conexa y, por lo tanto, pertenezca a  $\mathfrak{Y}$ .

Luego por ser condicionalmente subaditiva tenemos que

$$\begin{aligned}
 b - a' &\leq \ell\left(\bigcup_{j=1}^m I'_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \ell(I'_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m b_j + \varepsilon_j - a_j = \sum_{j=1}^m b_j - a_j + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^m \frac{1}{2 \cdot j} \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) + \varepsilon
 \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  era arbitrario resulta que  $b - a' \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$ .

Si tomamos  $a' = a + \frac{1}{n} \Rightarrow b - a = \lim_{n \rightarrow +\infty} b - (a + \frac{1}{n}) \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$

El caso dos es cuando  $I = (-\infty, b]$  con  $b \in \mathbb{R}$ .

Sabemos que  $\ell(I) = +\infty$ . Veamos que  $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) = +\infty$ .

Si algún  $I_{n_0}$  tiene  $\ell(I_{n_0}) = +\infty$  ya está.

Supongamos que  $\ell(I_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$ , luego  $I_n = (a_n, b_n]$ ,  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Fijemos  $k \in \mathbb{N} : b > -k$ . Luego  $[-k, b] \subseteq \bigcup_{n \geq 1} I_n = I \subseteq \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n + \frac{1}{2^n})$ .

Como  $[k, b]$  es compacto por Teorema de Heine-Borel tenemos que  $\exists m \in \mathbb{N} : [-k, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^m (a_n, b_n + \frac{1}{2^n}) \in \mathfrak{J}$ .

Por el mismo argumento de antes (si hay más de una componente conexa se la descarta)

$$\begin{aligned}
 b - (-k) &= \ell([-k, b]) \\
 &\leq \ell\left(\bigcup_{n=1}^m (a_n, b_n + \frac{1}{2^n})\right) \leq \sum_{n=1}^m \ell((a_n, b_n + \frac{1}{2^n})) \\
 &= \sum_{n=1}^m (b_n + \frac{1}{2^n} - a_n) = \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) + 1
 \end{aligned}$$

Luego  $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \geq b + k - 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} : b > -k \therefore$  tenemos que  $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) = +\infty$ .

El tercer caso es cuando  $(a, +\infty)$  con  $a \in \mathbb{R}$  y el cuarto es cuando  $I = \mathbb{R}$ , ambos quedan como ejercicio.

## 7.2 Extensión de $\ell$ al álgebra

Recordemos que  $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{i=1}^m I_i \text{ con } I_1, \dots, I_m \in \mathfrak{I} \text{ dos a dos disjuntos}\}$  y extendamos la función  $\ell$  a  $\ell : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  como  $\ell(A) = \sum_{n=1}^m \ell(I_n)$  si  $A \in \mathcal{F}$ .

**Proposición 7.1.**  $\ell$  está bien definida.

**Demostración.** Supongamos que  $A = \bigcup_{k=1}^{m_1} I_k^1 = \bigcup_{j=1}^{m_2} I_j^2$  con los  $I_k^1, I_j^2 \in \mathfrak{I}$  dos a dos disjuntos. Fijado el  $k = 1, \dots, m_1$ ,  $I_k^1 = \bigcup_{j=1}^{m_2} I_k^1 \cap I_j^2$  con  $I_k^1 \cap I_j^2 \in \mathfrak{I}$  por ser  $\mathfrak{I}$  semiálgebra y dos a dos disjuntos. Como  $\ell$  es condicionalmente finita aditiva en  $\mathfrak{I}$  se tiene que  $\ell(I_k^1) = \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_k^1 \cap I_j^2)$ .

Análogamente, fijado el  $j = 1, \dots, m_2$  se tiene que  $\ell(I_j^2) = \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1 \cap I_j^2)$ . Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1) &= \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_k^1 \cap I_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1 \cap I_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_j^2) \end{aligned}$$

$\therefore$  está bien definida. □

**Definición 7.2.**  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  un álgebra. Una medida sobre  $\mathcal{A}$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Si  $(E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$  es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tal que  $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{A}$  entonces  $\mu(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n)$ .

**Lema 7.3.** La función  $\ell : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida sobre el álgebra  $\mathcal{F}$ .

**Demostración.** Bosquejo de la demostración:  $\ell(\emptyset) = 0$  es trivial. Para ver que  $\ell$  es condicionalmente  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{F}$ , podemos seguir la siguiente estrategia:

1. Probar que  $\ell$  es finitamente aditiva en  $\mathcal{F}$ .
2. Probar que si  $E, F \in \mathcal{F}$  y  $E \subseteq F$  entonces  $\ell(E) \leq \ell(F)$ .
3. Probar que  $\ell$  es finitamente subaditiva.
4. Sea  $(E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$  una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tales que  $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathfrak{Y}$ . Veamos que  $\ell(E) = \sum_{n \geq 1} \ell(E_n)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k^n$  con  $I_k^n \in \mathfrak{Y}$  dos a dos disjuntos. Luego,  $\{I_k^n : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, m_n\}$  es una colección en  $\mathfrak{Y}$  de conjuntos dos a dos disjuntos y además podemos enumerarlos en una sucesión tal que  $E'_i = I_i^1$  si  $i = 1, \dots, m_1$ ,  $E'_i = I_{i-m_1}^2$  si  $i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$  y así sucesivamente.

Luego  $\bigcup_{n \geq 1} E'_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^n = \bigcup_{n \geq 1} E_n = E \in \mathfrak{Y}$  como  $\ell$  es condicionalmente  $\sigma$ -aditiva en  $\mathfrak{Y}$  resulta que

$$\begin{aligned} \ell(E) &= \sum_{n \geq 1} \ell(E'_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} \ell(I_k^n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \ell(E_n) \end{aligned}$$

5. Deducir la  $\sigma$ -aditividad condicional si  $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{F}$ , con  $I_1, \dots, I_n$  dos a dos disjuntos y  $m \geq 2$ . De nuevo  $E_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k^n$  con  $I_k^n \in \mathfrak{Y}$  dos a dos disjuntos.  $I_i = I_i \cap E = I_i \cap \bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} (I_i \cap E_n) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{k=1}^{m_n} I_i \cap I_k^n$ . Luego  $\ell(I_i) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} \ell(I_i \cap I_k^n) \dots$

□



# Clase VIII - 03/04

## 8.1 Extensión de la medida

Veremos que si  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida sobre un álgebra  $\mathcal{A}$  entonces  $\exists$  una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}^*$  tal que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$  y  $\exists \mu^* : \mathcal{A}^* \rightarrow [0, +\infty]$  con  $\mu^*(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$ .

**Definición 8.1 (Medida exterior).** Dado un conjunto  $X$ , una medida exterior en  $X$  es una función  $\Gamma : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\Gamma(\emptyset) = 0$ .
2.  $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$  si  $A \subseteq B$ .
3. Es  $\sigma$ -subaditiva i.e  $(E_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión en  $\mathcal{P}(X)$  entonces

$$\Gamma\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \Gamma(E_n)$$

**Teorema 8.2.** Dado un conjunto  $X$ ,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  un álgebra y  $\mu$  una medida en  $\mathcal{A}$  entonces si definimos  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  como

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) : A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} E_n, E_i \in \mathcal{A}, \forall i \right\}$$

1.  $\mu^*$  es una medida exterior.
2.  $\mu^*(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$

**Demostración.** Notemos que  $A \in \mathcal{P}(X)$  y la sucesión  $(E_n)_{n \geq 1}$  en  $\mathcal{A}$  dada por  $E_1 = X$ ,  $E_n = \emptyset \quad \forall n \geq 2$  verifica que  $\bigcup_{n \geq 1} E_n = X \supset A$  y entonces  $\mu^*(A)$  está bien definida. Veamos (2), supongamos que  $A \in \mathcal{A}$  y  $E_1 = A$ ,  $E_n = \emptyset \quad \forall n \geq 2$ . Entonces  $\mu^*(A) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) = \mu(A)$  por ser el ínfimo. Por otra parte, si  $(E_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión cualquiera en  $\mathcal{A}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} E_n \Rightarrow (A \cap E_n)_{n \geq 1}$  también es una sucesión en  $\mathcal{A}$  tal que  $A = \bigcup_{n \geq 1} A \cap E_n \in \mathcal{A}$ .

Notemos que  $\mu(A \cap E_i) \leq \mu(E_i)$  y luego, por la  $\sigma$ -subaditividad condicional de  $\mu$  resulta que:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A \cap E_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A \cap E_n) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mu^*(A) \geq \mu(A) \therefore \mu^*(A) = \mu(A)$ . Queda como ejercicio ver que efectivamente es monótona con la inclusión.

Veamos (1), sea  $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$ . Si  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) = +\infty$ , es trivial. Supongamos que  $\mu^*(A_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por definición de  $\mu^*$ , existe una sucesión  $(E_{n,k})_{k \geq 1} \subset \mathcal{A}$  tal que  $A_n \subseteq \bigcup_{k \geq 1} E_{n,k}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{k \geq 1} \mu(E_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &\Rightarrow \{E_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \text{ verifica que:} \\ &\quad \bigcup_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} E_{n,k} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} E_{n,k} \supseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n \\ &\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mu(E_{n,k}) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \mu(E_{n,k}) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Ejemplo.** La medida  $\ell : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  sobre el álgebra  $\mathcal{F}$ , consideremos la medida exterior  $\ell^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ . Notemos que si  $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\ell^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} (b_n - a_n) = \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n] = \bigcup_{n \geq 1} I_n : a_n < b_n \right\}$$

Tomamos los de la semiálgebra pues los elementos del álgebra pueden ser definidos como unión de  $I_k$  disjuntos dos a dos y entonces  $\ell^*$  tiene las siguientes propiedades:

1. Si  $B \subset \mathbb{R}$  es numerable  $\Rightarrow \ell^*(B) = 0$ . El recíproco no es cierto.

2. Si  $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \exists E \in \mathcal{B} : A \subseteq E$  y  $\ell^*(A) = \ell^*(E)$ . Esto no implica que  $\ell^*(E - A) = 0$ .

En efecto si  $\ell^*(A) = +\infty \Rightarrow E = \mathbb{R}$ , si  $\ell^*(A) < +\infty$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una sucesión  $I_{n,k} = (a_k^n, b_k^n] \quad \forall k \geq 1 : A \subseteq \bigcup_{k \geq 1} I_{n,k}$  y  $\sum_{k \geq 1} b_k^n - a_k^n \leq \ell^*(A) + 1/n$ , por definición de ínfimo.

Sea  $E_n := \bigcup_{k \geq 1} I_{n,k} \in \mathcal{B}$  tal que

$$\begin{aligned} \ell^*(E_n) &\leq \sum_{n \geq 1} \ell^*(I_{n,k}) = \sum_{k \geq 1} \ell(I_{n,k}) \\ \sum_{k \geq 1} b_k^n - a_k^n &\leq \ell^*(A) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Sea  $E := \bigcap_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{B}$ . Como  $A \subseteq E \Rightarrow \ell^*(A) \leq \ell^*(E)$ , pero  $\ell^*(E) \leq \ell^*(E_n) \leq \ell^*(A) + 1/n \quad \forall n \geq 1$ .

$\therefore \ell^*(A) = \ell^*(E)$ .

**Observación.** Consideremos  $E \subseteq \mathbb{R}$  cualquiera y para cada intervalo  $I \in \mathfrak{I}$  tomemos la medida exterior  $\ell^*(E \cap I)$  y como medida interior de  $E \cap I$ ,  $\ell_* := \ell(I) - \ell^*(I \setminus E)$ . Podríamos decir que  $E$  es medible con respecto a  $\ell^*$  si

$$\begin{aligned} \ell^*(E \cap I) &= \ell_*(E \cap I) \quad \forall I \in \mathfrak{I} \\ \Rightarrow \ell^*(E \cap I) + \ell^*(I \setminus E) &= \ell(I) = \ell^*(I) \quad \forall I \in \mathfrak{I} \\ E &= (E \cap I) \cup (E \setminus I) \text{ y } (E \cap I) \cap (I \setminus E) = \emptyset \end{aligned}$$

## 8.2 Medida exterior

**Definición 8.3.** Dado un conjunto  $X$ , sea  $\Gamma$  una medida exterior sobre  $X$ , diremos que  $E \subseteq X$  es  $\Gamma$ -medible si

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X$$

A la colección de los conjuntos  $\Gamma$ -medibles la llamaremos  $\mathfrak{X}(\Gamma)$ .

**Observación.** Como  $\Gamma$  es una medida exterior, alcanza con ver que

$$\Gamma(A) \geq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X$$

También alcanza con considerar  $A$  con  $\Gamma(A) < +\infty$ .

**Observación.**  $E$  es  $\Gamma$ -medible si  $\Gamma$  resulta aditiva con respecto a la partición  $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$  con  $(A \cap E) \cap (A \cap E^c) = \emptyset \quad \forall A \subset X$

**Teorema 8.4 (Carathéodory).** Dado un conjunto  $X$ , sea  $\Gamma$  una medida exterior en  $X \Rightarrow \mathfrak{X}(\Gamma)$  es  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$  y  $\Gamma$  resulta  $\sigma$ -aditiva sobre  $\mathfrak{X}(\Gamma)$  i.e.  $(X, \mathfrak{X}(\Gamma), \Gamma|_{\mathfrak{X}(\Gamma)})$  es un espacio de medida.

Notemos que  $X, \emptyset \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ , pues dado  $A \subset X$

$$\begin{aligned}\Gamma(A \cap \emptyset) + \Gamma(A \setminus \emptyset) &= \Gamma(\emptyset) + \Gamma(A) = \Gamma(A) \\ \Gamma(A \cap X) + \Gamma(A \setminus X) &= \Gamma(A) + \Gamma(\emptyset) = \Gamma(A) \\ \Rightarrow \emptyset, X &\in \mathfrak{X}(\Gamma)\end{aligned}$$

Veamos que  $\Gamma$  es cerrada por complementación, si  $E \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ , dado  $A \subset X$

$$\begin{aligned}\Gamma(A \cap E^c) + \Gamma(A \setminus E^c) &= \Gamma(A \setminus E) + \Gamma(A \cap E) = \Gamma(A) \\ E^c &= X \setminus E \in \mathfrak{X}(\Gamma)\end{aligned}$$

Dados  $E, F \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ , veamos que  $E \cap F \in \mathfrak{X}(\Gamma)$  i.e  $\Gamma(A) = \Gamma(A \cap (E \cap F)) + \Gamma(A \setminus (E \cap F))$ ,  $\forall A \subseteq X$ . Fijado el  $A \subseteq X$ , sea

$$\begin{aligned}B &= A \setminus (E \cap F) = A \cap (E \cap F)^c \\ A \cap (E^c \cup F^c) &= (A \cap E^c) \cup (A \cap F^c) \\ &= (A \setminus E) \cup (A \setminus F)\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}B \cap F &= A \setminus (E \cap F) = (A \cap F) \setminus E \\ B \setminus F &= A \setminus (E \cup F) \cup (A \setminus F) = A \setminus F\end{aligned}$$

Como  $F \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Gamma(B) &= \Gamma(A \setminus (E \cap F)) = \Gamma(B \cap F) + \Gamma(B \setminus F) \\ &= \Gamma((A \cap F) \setminus E) + \Gamma(A \setminus F) \\ &\Rightarrow \Gamma(A \cap (E \cap F)) + \Gamma(A \setminus (E \cap F)) \\ &= \Gamma(A \cap (E \cap F)) + \Gamma((A \cap F) \setminus E) + \Gamma(A \setminus F) \\ &= \Gamma(A \cap F) + \Gamma(A \setminus F) = \Gamma(A)\end{aligned}$$

En el último paso utilizamos que tanto  $E$  como  $F$  pertenecen a  $\mathfrak{X}(\Gamma)$ . Por lo tanto si  $E, F \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow E \cap F \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ , además  $E \cup F = (E^c)^c \cup (F^c)^c = (E^c \cap F^c)^c \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ . Luego por inducción, si  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow \mathfrak{X}(\Gamma)$  es un álgebra en  $X$ .

Dados  $E_1, E_2 \in \mathfrak{X}(\Gamma) : E_1 \cap E_2 = \emptyset$  veamos que

$$\Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma(A \cap E_2) \quad \forall A \subset X$$

Fijemos el  $A \subset X \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= \Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) \\ &= \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma((A \cap E_2) \setminus E_1) \\ &= \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma(A \cap E_2)\end{aligned}$$

Así que por inducción si  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\Gamma)$  disjuntos dos a dos entonces

$$\Gamma\left(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \Gamma(A \cap E_k) \quad \forall A \subset X$$

Ahora veamos que si  $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathfrak{X}(\Gamma)$  son disjuntos dos a dos entonces  $\bigcup_{m \geq 1} F_m = \bigcup_{k=1}^m E_k \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ . Luego  $(F_m)_{m \geq 1}$  es una sucesión creciente en  $\mathfrak{X}(\Gamma)$ . Como  $\Gamma$  es monótona tenemos que  $\forall A \subset X \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(A \cap F_m)$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(A \setminus F_m) < +\infty$ . Quiero ver que para cada  $A \subset X$

$$\Gamma(A) = \Gamma\left(A \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right)\right) + \Gamma\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right)\right)$$

Sabemos que para cada  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(A \cap F_m) + \Gamma(A \setminus F_m) &= \Gamma(A), \\ \Gamma\left(A \cap \bigcup_{k=1}^m E_k\right) + \Gamma(A \setminus F_m) &= \left(\sum_{k=1}^m \Gamma(A \cap E_k)\right) + \Gamma(A \setminus F_m). \end{aligned}$$

Como  $F_m \subseteq \bigcup_{n \geq 1} E_n \Rightarrow A \setminus \bigcup_{n \geq 1} E_n \subset A \setminus F_m$  y

$$\Gamma\left(A \setminus \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right)\right) \leq \Gamma(A \setminus F_m)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(A \cap F_m) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(A \setminus F_m) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \Gamma(A \cap E_k) + \Gamma\left(A \setminus \bigcup_{k \geq 1} E_k\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \Gamma(A \cap E_n) + \Gamma\left(A \setminus \bigcup_{n \geq 1} E_n\right) * \\ &\geq \Gamma\left(\bigcup_{n \geq 1} (A \cap E_n)\right) + \Gamma\left(A \setminus \bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \\ &= \Gamma\left(A \cap \bigcup_{n \geq 1} E_n\right) + \Gamma\left(A \setminus \bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \\ &\therefore \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathfrak{X}(\Gamma) \end{aligned}$$

Además si en \* consideramos  $A = \bigcup_{n \geq 1} E_n \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \Gamma\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \geq \sum_{n \geq 1} \Gamma(A \cap E_n) + \Gamma(A \setminus A) \\ &= \sum_{n \geq 1} \Gamma(E_n) ** \end{aligned}$$

Y la otra desigualdad sale de la  $\sigma$ -subaditividad de  $\Gamma$ . Para terminar de probar que  $\mathfrak{X}(\Gamma)$  es  $\sigma$ -álgebra tomemos  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathfrak{X}(\Gamma)$  y quiero ver que

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}(\Gamma)$$

Consideremos:

$$E_1 = A_1 \in \mathfrak{X}(\Gamma)$$

$$E_n = A_n \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \in \mathfrak{X}(\Gamma) \quad \forall n \geq 2$$

$(E_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tales que

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} E_n$$

Entonces por lo que probamos recién  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}(\Gamma) \therefore \mathfrak{X}(\Gamma)$  es  $\sigma$ -álgebra y por  $** \Gamma|_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$  es  $\sigma$ -aditiva.

# Clase IX - 08/04

## 9.1 Extensión Caratheódory / Hahn

**Definición 9.1 (Medida completa).** Dado un espacio de medida  $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ,  $\mathfrak{X}$  es completa con respecto a  $\mu$  si  $\forall E \in \mathfrak{X}$  con  $\mu(E) = 0$  vale que  $\forall B \subseteq E$ ,  $B \in \mathfrak{X}$  y  $\mu(B) = 0$ .

**Corolario 9.2.**  $\mathfrak{X}(\Gamma)$  es completo con respecto a  $\Gamma : \mathfrak{X}(\Gamma) \rightarrow [0, +\infty]$ .

**Demostración.** Sea  $E \in \mathfrak{X}(\Gamma) : \mu(E) = 0$  y  $B \subseteq E$ .

Fijado  $A \subseteq X$  notemos que  $A \cap B \subseteq E \Rightarrow \Gamma(A \cap B) = 0$ . Además,  $A \setminus B \subseteq A \Rightarrow \Gamma(A) \geq \Gamma(A \setminus B) = \Gamma(A \cap B) + \Gamma(A \setminus B)$ . Luego, como  $A$  es arbitrario, resulta que  $B \in \mathfrak{X}(\Gamma)$  y  $\Gamma(B) \leq \Gamma(E) = 0 \therefore \Gamma(B) = 0$ .  $\square$

Dada una medida  $\mu$  sobre un álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , sea  $\mu^*$  la medida exterior asociada a  $\mu$  notaremos  $\mathcal{A}^* := \mathfrak{X}(\mu^*)$ .

**Corolario 9.3 (Extensión de Caratheódory).** Si  $\mu$  es una medida sobre un álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , entonces

1.  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ .
2.  $\mu^*(A) = \mu(A)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

i.e  $\mu^*$  es la extensión de Caratheódory de  $\mu$ .

**Demostración.** Dado  $E \in \mathcal{A}$  quiero ver que  $E \in \mathcal{A}^*$ .

Fijado el  $A \subseteq X$  con  $\mu(A) < +\infty$ , sea  $\varepsilon > 0$  y consideremos  $(F_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $\mathcal{A} : E \subseteq \bigcup_{n \geq 1} F_n$  y  $\sum_{n \geq 1} \mu(F_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$ .

Notemos que  $A \cap E = \bigcup_{n \geq 1} E \cap F_n$ ,  $E \cap F_n \in \mathcal{A}$  y  $\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(E \cap F_n)$ .

Por otro lado  $A \setminus E = \bigcup_{n \geq 1} F_n \setminus E : F_n \setminus E \in \mathcal{A}$  y  $\mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(F_n \setminus E)$  por definición de medida exterior. Luego,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) &\leq \sum_{n \geq 1} (\mu(E \cap F_n) + \mu(F_n \setminus E)) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu(F_n) < \mu^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario entonces  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$  y como  $A$  es arbitrario  $E \in \mathcal{A}^*$ . Por lo tanto  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ .

El segundo punto fue demostrado anteriormente, la medida exterior coincide con la medida interior para los elementos del álgebra.  $\square$

**Definición 9.4.** Si  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida sobre un álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  diremos que  $\mu$  es  $\sigma$ -finita si  $\exists (F_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$  con  $X \subseteq \bigcup_{n \geq 1} F_n$  y  $\mu(F_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$ .

**Observación.** Si  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida finita  $\Rightarrow \exists$  una sucesión creciente  $(E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$  tal que  $X \subseteq \bigcup_{n \geq 1} E_n$  y  $\mu(E_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$ . De hecho, si  $(F_n)_{n \geq 1}$  verifican la definición anterior entonces  $E_1 = F_1 \in \mathcal{A}$ ,  $E_n = \bigcup_{k=1}^n F_k \in \mathcal{A}$  y  $\mu(E_n) \leq \sum_{k=1}^n \mu(F_k) < +\infty \quad \forall n \geq 1$ .

**Teorema 9.5 (Extensión de Hahn).** Dada  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una medida  $\sigma$ -finita sobre el álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , entonces  $\exists!$  medida definida sobre  $\mathcal{A}^*$  que extiende a  $\mu$ .



**Demostración.** La existencia es consecuencia del teorema de extensión de Caratheodory. Queremos ver que  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $X$ :  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{A}^*$  y  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$ :  $\nu(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu(E) = \mu^*(E) \quad \forall E \in \mathfrak{X}$  i.e  $\nu = \mu^*|_{\mathfrak{X}}$ .

Fijado el  $\mathfrak{X}$  y  $\nu$  así, y sea  $(F_n)_{n \geq 1}$  una sucesión creciente en  $\mathcal{A}$  tal que  $X \subseteq \bigcup_{n \geq 1} F_n$  y  $\mu(F_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$ .

Dado  $E \in \mathfrak{X}$  veamos que  $\nu(E) = \mu^*(E)$ . Alcanza con ver que

$$\nu(E \cap F_n) = \mu^*(E \cap F_n) \quad \forall n \geq 1$$

Pues entonces

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(E \cap F_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(E \cap F_n) \\ &= \mu^*(E) \end{aligned}$$

Pues  $E = \bigcup_{n \geq 1} E \cap F_n$  y  $(E \cap F_n)_{n \geq 1}$  es creciente.

Si  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{E} = E \cap F_n$ , notemos que  $F_n \setminus E = F_n \setminus \tilde{E}$ . Veamos que  $\nu(\tilde{E}) = \mu^*(\tilde{E})$ .

Dada una sucesión

$$\begin{aligned} (A_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{A} : \tilde{E} &\subseteq \bigcup_{k \geq 1} A_k \Rightarrow \\ \nu(\tilde{E}) &\leq \nu\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k \geq 1} \nu(A_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mu(A_k) \\ &\Rightarrow \nu(\tilde{E}) \leq \mu^*(\tilde{E}) \end{aligned}$$

De la misma manera  $\nu(F_n \setminus \tilde{E}) \leq \mu^*(F_n \setminus \tilde{E})$ . Como los  $F_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu(\tilde{E}) + \nu(F_n \setminus \tilde{E}) = \nu(F_n) = \mu(F_n) = \mu^*(F_n) = \mu^*(\tilde{E}) + \mu^*(F_n \setminus \tilde{E})$ . Resulta que  $\nu(\tilde{E}) = \nu(E \cap F_n) = \mu^*(E \cap F_n) = \mu^*(\tilde{E})$  y  $\nu(F_n \setminus \tilde{E}) = \mu^*(F_n \setminus \tilde{E})$  y tenemos

$$\nu(E \cap F_n) = \mu^*(F_n \cap E) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pues el  $n$  es arbitrario, luego tomamos  $\mathfrak{X} = \mathcal{A}^*$  y  $\nu(E) = \mu^*(E)$  para todo  $E \in \mathfrak{X}$ .  $\square$

## 9.2 Medida de Lebesgue

Por el teorema de extensión de Caratheodory  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}^*, \ell^*)$  es un espacio de medida completa. Como sabemos que  $\ell$  es  $\sigma$ -finita, por el teorema de extensión de Hahn,  $\ell^*$  es la única extensión de  $\ell$  a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}^*$ , o a cualquier  $\mathfrak{X} : \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}^*$ .

A partir de ahora, a la medida  $\ell^*|_{\mathcal{F}^*} := \lambda$  la llamaremos la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$  y  $\mathcal{F}^*$  es la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y lo notaremos  $\mathcal{L} := \mathcal{F}^*$ .

Ejercicio: Probar que la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel i.e  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ .

En particular,  $\lambda$  es la única medida sobre los Borelianos que verifica

$$\blacksquare \lambda((a, b)) = b - a = \lambda((a, b] - \{b\}).$$

- $\lambda([a, b]) = b - a$ .
- $\lambda([a, b)) = b - a$ .
- $\lambda((a, b]) = b - a$ .

Por supuesto la misma afirmación vale para  $\lambda$  sobre  $\mathcal{L}$ .

**Observación.** No se pierde demasiada generalidad al considerar  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ .

- $(\forall E \in \mathcal{L})(\exists B \in \mathcal{B}, N \in \mathcal{L} : \lambda(N) = 0 \text{ y } E = B \cup N)$ .
- si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es medible Lebesgue  $\Rightarrow \exists g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible Borel tal que  $f = g$   $\lambda$ -c.t.p.

Ejercicio:  $\lambda$  es invariante por translaciones. Notemos que, además, esta propiedad caracteriza a la medida de Lebesgue i.e si  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida tal que

1.  $\mu(B) < +\infty$  si  $B \in \mathcal{B}$  es acotado.
2.  $\mu$  es invariante por translaciones.

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \mu = \alpha \cdot \lambda$  i.e  $\mu(B) = \alpha \cdot \lambda(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}$

**Observación.**  $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$  es estricta (no lo probamos). La demostración está en *Real and abstract analysis* - Edwin Hewitt y Karl Stromberg.

# Parciales

- 10.1 Primer parcial - Primera fecha
- 10.2 Primer parcial - Segunda fecha
- 10.3 Segundo parcial - Primera fecha
- 10.4 Segundo parcial - Segunda fecha
- 10.5 Segundo parcial - Tercera fecha

*This page is intentionally left blank.*

# Bibliografía

- [1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue*. John Wiley and Sons, 1995.