

# Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

---

BUSTOS JORDI

Bustos Jordi  
jordibustos01@gmail.com

# Contenido

## 6 | Clase I - 06/03

1.1	Integral de Riemann .....	6
1.1.1	Desventajas de la integral de Riemann .....	6
1.2	Espacios Medibles .....	7

## 11 | Parciales

2.1	Primer parcial - Primera fecha .....	11
2.2	Primer parcial - Segunda fecha .....	11
2.3	Segundo parcial - Primera fecha .....	11
2.4	Segundo parcial - Segunda fecha .....	11
2.5	Segundo parcial - Tercera fecha .....	11

*This page is intentionally left blank.*

# Prefacio

“Considero a cada hombre como un deudor  
de su profesión,  
y ya que de ella recibe sustento y provecho,  
así debe procurar,  
mediante el estudio,  
servirle de ayuda y ornato.”

---

Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martínez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.

Estas notas se basan principalmente en la cursada del '99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

*This page is intentionally left blank.*

# Clase I - 06/03

## 1.1 Integral de Riemann

Sea  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Una partición  $P$  de  $[a, b]$  es un conjunto finito  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . A  $P$  le asignamos una norma  $\|P\| = \max\{l(J_k)\}$ .  $J_k = [x_{k-1}, x_k]$  y a cada  $P$  le podemos asignar una etiqueta, que es un vector  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  tal que  $\xi_k \in J_k$ . Una partición etiquetada es un par  $(P, \xi)$ ; y le podemos asignar su suma de Riemann:  $S(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)l(J_k)$ .

**Definición 1.1.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable Riemann si  $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon$  si  $(P, \xi)$  es tal que  $\|P\| \leq \delta$

Ejercicio: Probar que si  $f$  es integrable Riemann entonces es acotada.

Si  $f$  es acotada, dada una partición  $P$  del dominio de  $f$ , para cada  $i \in 1, \dots, n$ . Sean  $M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}$  y  $m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$ . Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a  $P$  como  $S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k l(J_k)$  y  $s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k l(J_k)$ . Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como  $\int_a^b f(x) dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$  y  $\int_a^b f(x) dx = \inf\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$ .

**Proposición 1.2.** Dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  es integrable Riemann  $\iff$  es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

**Nota.**  $f$  es integrable Riemann si:

1.  $f$  es continua.
2.  $f$  es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.
3.  $f$  es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

### 1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.
- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.
- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

**Ejemplo.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$   $f$  no es integrable Riemann.

**Demostración.** Llamemos  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ .  $A$  es numerable entonces  $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$  biyección. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $A_n = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$  y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ . Ahora para cada  $n \geq 1$  consideramos:  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus A_n \end{cases} \quad (1.1)$$

$f_n$  es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de  $A_n$  y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que  $f_n \rightarrow f$ . Sea  $x \in [0, 1]$

1. Si  $x \in A \rightarrow x \in A_{n_0}, n_0 \in \mathbb{N} \rightarrow (\forall n > n_0) x \in A_n \rightarrow (\forall n > n_0) f_n(x) = 1 \rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 1$ .
2. Si  $x \notin A \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) x \notin A_n \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) f_n(x) = 0 \rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$ .

$\therefore f_n \rightarrow f$ . Si conociéramos  $l(A)$  y  $l([0, 1] \setminus A)$  podríamos definir  $\int f = 1 \times l(A) + 0 \times l([0, 1] \setminus A)$ .  $\square$

## 1.2 Espacios Medibles

Dado  $X$  un conjunto arbitrario no vacío. Sea  $\mathcal{P}(X)$  el conjunto de partes de  $X$ .

**Definición 1.3 ( $\sigma$ -álgebra).** Una familia  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra si verifica:

1.  $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$ .
2. Si  $A \in \mathfrak{X} \rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$ .
3. Sea  $(A_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión en  $\mathfrak{X} \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$ .

Si  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  el par  $(X, \mathfrak{X})$  es un espacio medible. A cada  $A \in \mathfrak{X}$  lo llamaremos conjunto  $\mathfrak{X}$ -medible.

**Nota.** Si  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$  y  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{X}$  entonces  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{X}$ . Idea de la demostración: Sea  $(B_m)_{m \geq 1}$  la sucesión en  $\mathfrak{X}$  definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \emptyset & m > n \end{cases} \quad (1.2)$$

**Nota.** Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de una  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{X}$  entonces  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$ .

**Demostración.**  $\bigcup_{n \geq 1} A_n^c \in \mathfrak{X} \rightarrow (\bigcap_{n \geq 1} A_n^c)^c \in \mathfrak{X} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$ . □

**Ejemplo ( $\sigma$ -álgebras).** Dado  $X$  cualquiera no vacío.

1.  $\mathfrak{X} = \{\emptyset, X\}$  es una  $\sigma$ -álgebra.
2.  $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$  es una  $\sigma$ -álgebra.
3. Sea  $A \neq \emptyset \subset X$ . Luego  $\mathfrak{X} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$  es una  $\sigma$ -álgebra.
4. Supongamos que  $X$  no es numerable y sea

$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable } \text{ ó } A^c \text{ es numerable}\} \quad (1.3)$$

es una  $\sigma$ -álgebra. Demostración ejercicio y además  $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(X)$ .

**Lema 1.4.** Dado un conjunto  $X$ , sean  $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$  dos  $\sigma$ -álgebras de  $X$ . Entonces  $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Más aún si  $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$  es una familia de  $\sigma$ -álgebras de  $X$  entonces  $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Demostración, ejercicio.

**Proposición 1.5.** Dado un conjunto  $X$ , sea  $A \neq \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X) \rightarrow \exists \sigma$ -álgebra  $\sigma(A)$  que verifica:

1.  $A \subseteq \sigma(A)$ .
2.  $\mathfrak{X}$  es  $\sigma$ -álgebra de  $X$  tal que  $A \subseteq X \rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathfrak{X}$ .
3.  $\sigma(A)$  es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

La llamaremos  $\sigma$ -álgebra generada por  $A$ .



**Demostración.** Sea  $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X \text{ y } A \subseteq \mathcal{C}\} \neq \emptyset$  pues  $\mathcal{P}(X) \in \Delta$ . Llamemos  $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathcal{C} \in \Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$ . Veamos que  $\mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \rightarrow \emptyset, X \in \mathfrak{X}$ .
2. Sea  $A \in \mathfrak{X} \rightarrow (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \rightarrow A^c \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$ .
3. Sea  $(A_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $\mathfrak{X}$  el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore \mathfrak{X}$  es una  $\sigma$ -álgebra que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra  $\bar{\mathfrak{X}}$   $\sigma$ -álgebra que verifica las dos condiciones por la propiedad uno y dos podemos deducir que  $\mathfrak{X} \subseteq \bar{\mathfrak{X}}$  y  $\bar{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$ .  $\square$

**Ejemplo.** Consideremos  $X = \mathbb{R}$  y sea  $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ . La  $\sigma$ -álgebra generada por  $A$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$ . A los conjuntos de  $\mathcal{B}$  los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si  $\bar{A} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \rightarrow \sigma(\bar{A}) = \mathcal{B}$ .

**Demostración.** ■ Dado  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (a, a+n) \in \mathcal{B} \rightarrow \bar{A} \subseteq \mathcal{B}$ . Luego  $\sigma(\bar{A}) \subseteq \mathcal{B}$ . Por ser  $\sigma(\bar{A})$  la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\bar{A}$ .

■ Dado  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Sabemos que  $(a, b] = (a, +\infty) \cap (b, +\infty)^c \in \sigma(\bar{A})$ . Luego  $(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\bar{A})$ . Por lo que  $A \subset \sigma(\bar{A})$ .  $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\bar{A})$ . Por ser  $\sigma(A)$  la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $A$ .  $\square$

Ejercicio demostrar que la  $\sigma$ -álgebra de Borel está generada también por las siguientes familias:

1.  $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ .
2.  $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ .
3.  $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ .
4.  $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ .
5.  $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ .
6.  $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ .

Luego, se puede ver que  $\{a\} = \bigcap_{n \geq 1} [a, a + \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ .

*This page is intentionally left blank.*

# Parciales

- 2.1 Primer parcial - Primera fecha
- 2.2 Primer parcial - Segunda fecha
- 2.3 Segundo parcial - Primera fecha
- 2.4 Segundo parcial - Segunda fecha
- 2.5 Segundo parcial - Tercera fecha

*This page is intentionally left blank.*

# Bibliografía

- [1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue*. John Wiley and Sons, 1995.