

Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

BUSTOS JORDI

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

6 | Clase I - 06/03

1.1	Integral de Riemann	6
1.1.1	Desventajas de la integral de Riemann	6
1.2	Espacios Medibles	7

12 | Clase II - 11/03

2.1	La σ -álgebra de Borel	12
2.2	Recta real extendida	14

17 | Clase III - 13/03

3.1	Funciones medibles	17
3.2	Funciones medibles en la recta extendida	20

24 | Clase IV - 20/03

4.1	Parte negativa y positiva	24
4.2	Funciones medibles entre espacios medibles	27

30 | Parciales

5.1	Primer parcial - Primera fecha	30
5.2	Primer parcial - Segunda fecha	30
5.3	Segundo parcial - Primera fecha	30
5.4	Segundo parcial - Segunda fecha	30
5.5	Segundo parcial - Tercera fecha	30

This page is intentionally left blank.

Prefacio

“Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar,
mediante el estudio,
servirle de ayuda y ornato.”

Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martínez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.

Estas notas se basan principalmente en la cursada del '99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

This page is intentionally left blank.

Clase I - 06/03

1.1 Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. A P le asignamos una norma $\|P\| = \max\{l(J_k)\}$. $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ y a cada P le podemos asignar una etiqueta, que es un vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tal que $\xi_k \in J_k$. Una partición etiquetada es un par (P, ξ) ; y le podemos asignar su suma de Riemann: $S(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)l(J_k)$.

Definición 1.1. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann si $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon$ si (P, ξ) es tal que $\|P\| \leq \delta$

Ejercicio: Probar que si f es integrable Riemann entonces es acotada.

Si f es acotada, dada una partición P del dominio de f , para cada $i \in 1, \dots, n$. Sean $M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}$ y $m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$. Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a P como $S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k l(J_k)$ y $s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k l(J_k)$. Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como $\int_a^b f(x) dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$ y $\int_a^b f(x) dx = \inf\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$.

Proposición 1.2. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f es integrable Riemann \iff es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

Nota. f es integrable Riemann si:

1. f es continua.
2. f es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.
3. f es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.
- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.
- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

Ejemplo. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ f no es integrable Riemann.

Demostración. Llamemos $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. A es numerable entonces $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ biyección. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Ahora para cada $n \geq 1$ consideramos: $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus A_n \end{cases} \quad (1.1)$$

f_n es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de A_n y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que $f_n \rightarrow f$. Sea $x \in [0, 1]$

1. Si $x \in A \rightarrow x \in A_{n_0}, n_0 \in \mathbb{N} \rightarrow (\forall n > n_0) x \in A_n \rightarrow (\forall n > n_0) f_n(x) = 1 \rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 1$.
2. Si $x \notin A \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) x \notin A_n \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) f_n(x) = 0 \rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$.

$\therefore f_n \rightarrow f$. Si conociéramos $l(A)$ y $l([0, 1] \setminus A)$ podríamos definir $\int f = 1 \times l(A) + 0 \times l([0, 1] \setminus A)$. \square

1.2 Espacios Medibles

Dado X un conjunto arbitrario no vacío. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X .

Definición 1.3 (σ -álgebra). Una familia \mathfrak{X} es una σ -álgebra si verifica:

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Si $A \in \mathfrak{X} \rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{X} \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Si \mathfrak{X} es una σ -álgebra de subconjuntos de X el par (X, \mathfrak{X}) es un espacio medible. A cada $A \in \mathfrak{X}$ lo llamaremos conjunto \mathfrak{X} -medible.

Nota. Si \mathfrak{X} es una σ -álgebra de X y $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{X}$ entonces $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{X}$. Idea de la demostración: Sea $(B_m)_{m \geq 1}$ la sucesión en \mathfrak{X} definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \emptyset & m > n \end{cases} \quad (1.2)$$

Nota. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de una σ -álgebra \mathfrak{X} entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Demostración. $\bigcup_{n \geq 1} A_n^c \in \mathfrak{X} \rightarrow (\bigcap_{n \geq 1} A_n^c)^c \in \mathfrak{X} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$. □

Ejemplo (σ -álgebras). Dado X cualquiera no vacío.

1. $\mathfrak{X} = \{\emptyset, X\}$ es una σ -álgebra.
2. $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra.
3. Sea $A \neq \emptyset \subset X$. Luego $\mathfrak{X} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ es una σ -álgebra.
4. Supongamos que X no es numerable y sea

$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable } \text{ ó } A^c \text{ es numerable}\} \quad (1.3)$$

es una σ -álgebra. Demostración ejercicio y además $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(X)$.

Lema 1.4. Dado un conjunto X , sean $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ dos σ -álgebras de X . Entonces $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ es una σ -álgebra de X . Más aún si $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ es una familia de σ -álgebras de X entonces $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i$ es una σ -álgebra de X . Demostración, ejercicio.

Proposición 1.5. Dado un conjunto X , sea $A \neq \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X) \rightarrow \exists \sigma\text{-álgebra } \sigma(A)$ que verifica:

1. $A \subseteq \sigma(A)$.
2. \mathfrak{X} es $\sigma\text{-álgebra}$ de X tal que $A \subseteq X \rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathfrak{X}$.
3. $\sigma(A)$ es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

La llamaremos $\sigma\text{-álgebra}$ generada por A .

Demostración. Sea $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X \text{ y } A \subseteq \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{P}(X) \in \Delta$. Llamemos $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathcal{C} \in \Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$. Veamos que \mathfrak{X} es una $\sigma\text{-álgebra}$ de X .

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \rightarrow \emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Sea $A \in \mathfrak{X} \rightarrow (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \rightarrow A^c \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en \mathfrak{X} el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore \mathfrak{X}$ es una $\sigma\text{-álgebra}$ que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra $\bar{\mathfrak{X}}$ $\sigma\text{-álgebra}$ que verifica las dos condiciones por la propiedad uno y dos podemos deducir que $\mathfrak{X} \subseteq \bar{\mathfrak{X}}$ y $\bar{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$. \square

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ y sea $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. La $\sigma\text{-álgebra}$ generada por A es la $\sigma\text{-álgebra}$ de Borel \mathcal{B} . A los conjuntos de \mathcal{B} los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si $\bar{A} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \rightarrow \sigma(\bar{A}) = \mathcal{B}$.

Demostración. ■ Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (a, a + n) \in \mathcal{B} \rightarrow \bar{A} \subseteq \mathcal{B}$. Luego $\sigma(\bar{A}) \subseteq \mathcal{B}$. Por ser $\sigma(\bar{A})$ la mínima $\sigma\text{-álgebra}$ que contiene a \bar{A} .

■ Dado $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sabemos que $(a, b] = (a, +\infty) \cap (b, +\infty)^c \in \sigma(\bar{A})$. Luego $(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\bar{A})$. Por lo que $A \subset \sigma(\bar{A})$. $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\bar{A})$. Por ser $\sigma(A)$ la mínima $\sigma\text{-álgebra}$ que contiene a A . \square

Ejercicio demostrar que la $\sigma\text{-álgebra}$ de Borel está generada también por las siguientes familias:

1. $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
2. $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
3. $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
4. $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

6. $\{(-\infty, \mathfrak{a}] : \mathfrak{a} \in \mathbb{R}\}.$

Luego, se puede ver que $\{\mathfrak{a}\} = \bigcap_{n \geq 1} [\mathfrak{a}, \mathfrak{a} - \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}.$

This page is intentionally left blank.

Clase II - 11/03

2.1 La σ -álgebra de Borel

A \mathbb{R}^n lo pensamos dotado de la distancia euclídea. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ son dos puntos de \mathbb{R}^n , la distancia entre ellos es

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (2.1)$$

Consideramos la topología usual de \mathbb{R}^n notada τ^n al conjunto de todos los abiertos de \mathbb{R}^n

Definición 2.1. Dados $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i (\forall i = 1, \dots, n)$ Definimos el intervalo abierto (a, b) como

$$(a, b) = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, (\forall i = 1, \dots, n)\} \quad (2.2)$$

Definición 2.2. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $\varepsilon > 0$ el ε -cubo centrado en x es el conjunto definido por

$$C(x, \varepsilon) = \prod_{i=1}^n (x_i - \frac{\varepsilon}{2}, x_i + \frac{\varepsilon}{2}) \quad (2.3)$$

Proposición 2.3. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto e $y \in C(x, \varepsilon)$ entonces

1. $(\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0) C(x, \varepsilon) \subseteq V$.
2. $x \in C(y, \varepsilon)$.
3. $C(x, \varepsilon) \subseteq C(y, 2\varepsilon)$.

Definición 2.4. La σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n es la σ -álgebra generada por

$$\mathcal{A} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n : a_i < b_i, i = 1, \dots, n\} \quad (2.4)$$

Lo notamos \mathcal{B}^n .

Queremos ver que efectivamente $\tau_n \subseteq \mathcal{B}^n$. Consideremos la clase $\beta_n = \{C(q, \frac{1}{m}) : q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$. β_n es numerable pues el conjunto de índices que enumera a β_n es

$$\underbrace{\mathbb{Q}^n \times \dots \times \mathbb{Q}^n}_{n \text{ veces}} \times \mathbb{N}$$

que es numerable.

Proposición 2.5. Dado un abierto no vacío $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existe una familia $\mathcal{A}_V \subseteq \mathcal{B}_n$ tal que $V = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

Demostración. Sabemos que \mathbb{Q}^n es denso en \mathbb{R}^n . Como V es abierto y no vacío entonces $V \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Luego $B(x, \varepsilon) \subseteq V$ y $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Por lo tanto $B(x, \varepsilon) \subset V \cap \mathbb{Q}^n$. Para cada $q \in V \cap \mathbb{Q}^n$ defino $m_q = \min\{m \in \mathbb{N} : C(q, \frac{1}{m})\} \subseteq V$. Llamemos $\mathcal{A}_V = \{C(q, \frac{1}{m_q}) : q \in V \cap \mathbb{Q}^n\}$ la cual es una familia numerable.

Veamos que $\bigcup_{q \in V \cap \mathbb{Q}^n} C(q, \frac{1}{m_q}) = V$.

- \subseteq es trivial.
- \supseteq Dado $x \in V$, $\exists m \in \mathbb{N} : C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$. Consideremos $C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$ que es un abierto no vacío. Resulta que $C(x, \frac{1}{2m}) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Sea $q \in C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq V \cap \mathbb{Q}^n$. Entonces $x \in C(q, \frac{1}{2m})$, en particular $m_q \leq 2m$, pues como $x \in C(q, \frac{1}{2m})$ implica que $C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq V$. Por lo tanto $x \in C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(q, \frac{1}{m_q}) \therefore x \in \bigcup_{q \in \mathcal{A}_V} C(q, \frac{1}{m_q}) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

□

Corolario 2.6. La σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n coincide con la $\sigma(\tau_n)$. En particular:

- Todo abierto de \mathbb{R}^n es un conjunto Boreliano.
- Todo conjunto cerrado de \mathbb{R}^n es un Boreliano por ser complemento de un abierto.
- Por último, todo subconjunto numerable de \mathbb{R}^n es un Boreliano. (Dado $x \in \mathbb{R}^n, \{x\} = \bigcap_{n \geq 1} C(x, \frac{1}{n})$).

Proposición 2.7. Dado un espacio medible (X, \mathfrak{X}) y sea $X_0 \subseteq X$, entonces

1. $\mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A = E \cap X_0 \text{ para algún } E \in \mathfrak{X}\}$ es σ -álgebra de X_0 . En particular, si $X_0 \in \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A \in \mathfrak{X}\}$, la demostración queda como ejercicio.
2. Si \mathcal{A} es una familia en partes de X tal que $\mathfrak{X} = \sigma(\mathcal{A})$ entonces $\mathfrak{X}_0 = \sigma(\mathcal{A}_0)$ donde $\mathcal{A}_0 = \{A_0 \subseteq X_0 : A_0 = A \cap X_0 \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}$.

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Si $A_0 \in \mathcal{A}_0 \rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : A_0 = A \cap X_0$. Como $A \in \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$ resulta que $A_0 = A \cap X_0 \in \mathfrak{X}_0$. Entonces $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathfrak{X}_0$.

Ahora veamos que $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. Consideramos la clase $\mathcal{G} = \{E \subseteq X : E \cap X_0 \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}$ y veamos que $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{G}$. Alcanza con probar que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$. Pues si $A \in \mathcal{A}$, $A \cap X_0 \in \mathcal{A}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \rightarrow A \in \mathcal{G}$. Si probamos que \mathcal{G} es una σ -álgebra, tendríamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$. Luego $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. \square

Ejemplo. Si $\beta \in B_n$ entonces la σ -álgebra de Borel de β , $B_n(\beta) = \{A \subseteq \beta : A \in B_n\}$ está generado por la familia de conjuntos de la forma $(a, b) \cap \beta$ para $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i (\forall i = 1, \dots, n)$.

2.2 Recta real extendida

Definición 2.8 (Recta real extendida). Definimos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Con las siguientes convenciones:

1. Dado $r \in \mathbb{R}$ tenemos que $-\infty < r < +\infty$.
2. $+\infty + \pm\infty = \pm\infty$ y $\pm\infty + \mp\infty$ no está definido.
3. $+\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ y $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$. Si $r \in \mathbb{R}$ entonces $r \cdot +\infty = +\infty$ si $r > 0$ y $r \cdot +\infty = -\infty$ si $r < 0$.
4. $0 \cdot \pm\infty = 0 = \pm\infty \cdot 0$.
5. Tampoco definimos cocientes entre infinitos o de la forma $\frac{r}{\pm\infty}$.

Nota. El producto no va a ser continuo en la recta real extendida. Si $a_n = +\infty \cdot \frac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N})$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Pero $+\infty \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty \cdot 0 = 0$.

Notemos que si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\sup(A) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, sea $\emptyset \neq L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x_{n_k} \rightarrow x\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.9. $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup(L)$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf(L)$. Ambos pertenecen a L . Además, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\alpha_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ la sucesión α_m es decreciente y $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{\alpha_m\} = \inf_{m \geq n}(\sup_{n \geq m}\{x_n\})$. Análogamente $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{\alpha_m\} = \sup_{m \geq n}(\inf_{n \geq m}\{x_n\})$.

Proposición 2.10. Propiedades de límite superior e inferior:

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Nota. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en \mathbb{R} y $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_n \rightarrow x \iff \limsup x_n = \liminf x_n = x$.

Veamos como extender \mathcal{B} a $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.11 (Borel extendida). Para cada $E \in \mathcal{B}$, sean $E_1 = E \cup \{+\infty\}$, $E_2 = E \cup \{-\infty\}$ y $E_3 = E \cup \{+\infty, -\infty\}$. Consideremos $\overline{\mathcal{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E : E \in \mathcal{B}\} = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\})$. Probar que $\overline{\mathcal{B}}$ es σ -álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$ se deja como ejercicio. Se la llama la σ -álgebra de Borel extendida.

This page is intentionally left blank.

Clase III - 13/03

3.1 Funciones medibles

Proposición 3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f es continua si $f^{-1}(V)$ es abierto de \mathbb{R}^n ($\forall V$ abierto en τ_1).

En lo que sigue vamos a considerar un espacio medible fijo de la forma (X, \mathfrak{X}) .

Notación: Dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos:

$$\{f > \alpha\} := \{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \quad (3.1)$$

Definición 3.2 (Función medible). Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible (σ -medible) si $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Lema 3.3. Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función, son equivalentes:

1. f es \mathfrak{X} -medible.
2. $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.
3. $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.
4. $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

- (1) \iff (3): $\{f \leq \alpha\} = \{f > \alpha\}^c \in \mathfrak{X}$.
- (2) \iff (4) Análogo.
- (1) \iff (2): Supongamos que f es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X}$.

$$x \in \{f \geq \alpha\} \iff f(x) \geq \alpha > \alpha - \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (3.2)$$

$$x \in \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \rightarrow \{f \geq \alpha\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X} \quad (3.3)$$

Para la vuelta supongamos que vale (2). Quiero ver que $\{f > \gamma\} \in \mathfrak{X}$. Notemos que

$$\{f > \gamma\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\} \quad (3.4)$$

$$x \in \{f > \gamma\} \iff f(x) > \gamma \iff \exists n_x \in \mathbb{N} : f(x) > \gamma + \frac{1}{n_x} \quad (3.5)$$

Luego $\bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X}$.

□

Ejemplo. Toda función constante es medible. $f : X \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = c \quad (\forall x \in X)$.

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq c \\ X & \alpha < c \end{cases} \quad (3.6)$$

□

Ejemplo. Dado $E \subseteq X$ consideremos la función característica de E . Como $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases} \quad (3.7)$$

Demostración. Consideremos $E = [0, 1]$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\{\chi_E > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq 1 \\ E & 0 \leq \alpha < 1 \\ X & \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Luego χ_E es medible $\iff E \in \mathfrak{X}$. □

Ejemplo. Si $X = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B} \rightarrow$ toda función continua es medible con respecto a la σ -álgebra de Borel.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B}_n$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona (creciente) entonces es \mathcal{B} -medible.

Ejercicio: $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible $\iff f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$.

Lema 3.4. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles, $c \in \mathbb{R}$ entonces $c \cdot f$, f^2 , $f + g$, $|f|$, $f \cdot g$, son \mathfrak{X} -medibles. $f^2 = f(x) \cdot f(x)$.

Demostración. Veamos que f^2 es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que

$$\{f^2 > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (3.9)$$

Si $\alpha < 0 \rightarrow \{f^2 > \alpha\} = X$.

Si $\alpha \geq 0 \rightarrow$

$$\{f^2 > \alpha\} = \{x \in X : f(x) \cdot f(x) > \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}\} \quad (3.10)$$

$$\{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathfrak{X} \quad (3.11)$$

$\therefore f^2$ es \mathfrak{X} -medible.

Veamos ahora que $f + g$ es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que

$$\{f + g > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (3.12)$$

Para $x \in X$ tenemos que:

$$(f + g)(x) > \alpha \iff f(x) + g(x) > \alpha \iff f(x) > r \wedge g(x) > \alpha - r \text{ para algún } r \in \mathbb{Q} \quad (3.13)$$

Entonces $\{f + g > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > \alpha - r\}) \in \mathfrak{X}$ por ser unión numerable $\therefore f + g$ es \mathfrak{X} -medible.

Por último veamos que $f \cdot g$ es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que

$$\{f \cdot g > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (3.14)$$

Sabemos que:

$$(f + g)^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible} \rightarrow f^2 + 2 \cdot f \cdot g + g^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible} \quad (3.15)$$

$$f \cdot g = \frac{1}{2} ((f + g)^2 - f^2 - g^2) \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible} \quad (3.16)$$

□

3.2 Funciones medibles en la recta extendida

Definición 3.5. Dada $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ diremos que f es \mathfrak{X} -medible si

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) = \{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad (3.17)$$

A la clase de las funciones (a valores en la recta extendida) \mathfrak{X} -medibles la denotaremos por $M(X, \mathfrak{X})$.

Nota. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X})$.

Nota. Si

$$f \in M(X, \mathfrak{X}) \rightarrow \{f = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f > n\} \in \mathfrak{X} \quad (3.18)$$

Además,

$$\{f = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f < -n\} \in \mathfrak{X} \quad (3.19)$$

Lema 3.6. Dada una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ consideremos $A_f = \{f = +\infty\}$, $B_f = \{f = -\infty\}$ y

$$\hat{f} = \begin{cases} f & x \in X \setminus (A_f \cup B) \\ 0 & x \in A_f \\ 0 & x \in B_f \end{cases} \quad (3.20)$$

$\rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff A_f, B_f \in \mathfrak{X}$ y \hat{f} es \mathfrak{X} -medible.

Demostración. Supongamos primero que $f \in M(X, \mathfrak{X})$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, ya vimos que $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$. Veamos que \hat{f} es \mathfrak{X} -medible. Quiero ver que $\{\hat{f} > \alpha\} \in \mathfrak{X}$. Si $\alpha \geq 0$ entonces

$$\{\hat{f} > \alpha\} = \{f > \alpha\} - A_f = \{f > \alpha\} \cap A_f^c \in \mathfrak{X} \quad (3.21)$$

Si $\alpha < 0$ entonces

$$\{\hat{f} < \alpha\} = \{f > \alpha\} \cup \{\hat{f} = 0\} = \{f > \alpha\} \cup (A_f \cup B_f) = \{f > \alpha\} \cup B_f \in \mathfrak{X} \quad (3.22)$$

Luego $\hat{f} \in \mathfrak{X}$. Supongamos ahora que $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$ y \hat{f} es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} > \alpha\} \cup A_f \in \mathfrak{X} \quad (3.23)$$

Si $\alpha < 0$ entonces

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} < \alpha\} \setminus B_f = \{\hat{f} < \alpha\} \cap B_f^c \in \mathfrak{X} \quad (3.24)$$

□

Corolario 3.7. Si $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$ y $c \in \mathbb{R}$. Las funciones $c \cdot f$, f^2 , $|f|$, $f \cdot g \in M(X, \mathfrak{X})$.

Nota. Dados $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$ consideremos los conjuntos

- $E_1 = \{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\} \in \mathfrak{X}.$
- $E_2 = \{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\} \in \mathfrak{X}.$

Notemos que no está definida la suma $f + g$ en $E_1 \cup E_2$. Definimos

$$f + g = \begin{cases} f + g & x \in X \setminus (E_1 \cup E_2) \\ 0 & x \in E_1 \cup E_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

La demostración de que $f + g \in M(X, \mathfrak{X})$ se deja como ejercicio.

Lema 3.8. Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n \geq 1}$ en $M(X, \mathfrak{X})$ sean f, f^*, F, F^* definidas por:

$$f(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x) \quad f^*(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (3.26)$$

$$F(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x) \quad F^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (3.27)$$

Entonces $f, f^*, F, F^* \in M(X, \mathfrak{X})$.

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\{F > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (3.28)$$

$$\{f > \alpha\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (3.29)$$

Veamos $F^* \in M(X, \mathfrak{X})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino $h_n = \sup_{m \geq n} f_m \in \mathfrak{X}$. Por ser subsucesión de funciones medibles. Luego

$$F^* = \inf_{n \geq 1} (\sup_{m \geq n} f_m) \in \mathfrak{X} \quad (3.30)$$

Análogamente para f^* . □

Corolario 3.9. Dada $(f_n)_{n \geq 1} : f_n \in M(X, \mathfrak{X}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Supongamos que la sucesión converge puntualmente a f entonces $f \in M(X, \mathfrak{X})$.

Demostración. Notemos que $f = \liminf f_n = \limsup f_n$ y aplicamos el lema anterior. □

This page is intentionally left blank.

Clase IV - 20/03

4.1 Parte negativa y positiva

Definición 4.1 (Función truncada). Dada una función $f \in M(X, \mathfrak{X})$, para cada $n \geq 1$ definimos la función truncada a $[-n, n]$ como la $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \in [-n, n] \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n \end{cases}$$

Que converge puntualmente a f .

Notemos que f_n es medible para todo $n \geq 1$. Pues

$$\{f_n > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{si } \alpha \leq -n \\ \{f < \alpha\} & \text{si } \alpha \in [-n, n] \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq n \end{cases}$$

Veamos una forma alternativa de probar el teorema de la clase anterior. Si $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$ entonces $f + g : X \rightarrow \mathbb{R} \in M(X, \mathfrak{X})$

Para cada $n \geq 1$ consideramos las funciones truncadas $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que $f_n + g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible. Queremos ver que la convergencia es puntual $\forall x \in X$.

Si $x \in E_1 = \{f = +\infty, g = -\infty\}$. Para cada $n \geq 1$, $f_n(x) = n$ y $g_n(x) = -n$ entonces $(f_n + g_n)(x) = f_n(x) + g_n(x) = 0 \quad (\forall n)$. Luego $(f_n + g_n)(x) \rightarrow 0 = f(x)$ si $x \in E_1$. Para $x \in E_2$ el desarrollo es análogo.

Si $x \in (E_1 \cup E_2)^c$ entonces

1. $f(x)g(x) \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) \in \mathbb{R}$ y $g(x) = +\infty$.
3. $f(x) = +\infty$ y $g(x) \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) = g(x) = +\infty$.

Luego $(f_n + g_n)(x) \rightarrow (f + g)(x) \quad \forall x \in (E_1 \cup E_2)^c$. Pues $f_n(x) \rightarrow f(x)$ y $g_n(x) \rightarrow g(x)$.

Definición 4.2. Dada una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definimos la parte positiva $f^+ : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y la parte negativa $f^- : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Nota. $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Nota. Si (X, \mathfrak{X}) es un espacio medible $f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{X}) = \{f \in M(X, \mathfrak{X}) : f \geq 0\}$. Notemos que $f^+ = \sup(\{f, 0\})$ y $f^- = \sup(\{-f, 0\})$. Utilizando el teorema anterior vemos que si $f^+, f^- \in M(X, \mathfrak{X})$ entonces $f = f^+ + (-f^-) \in M(X, \mathfrak{X})$.

Nota. Si $B_f = \{f = +\infty\}$,

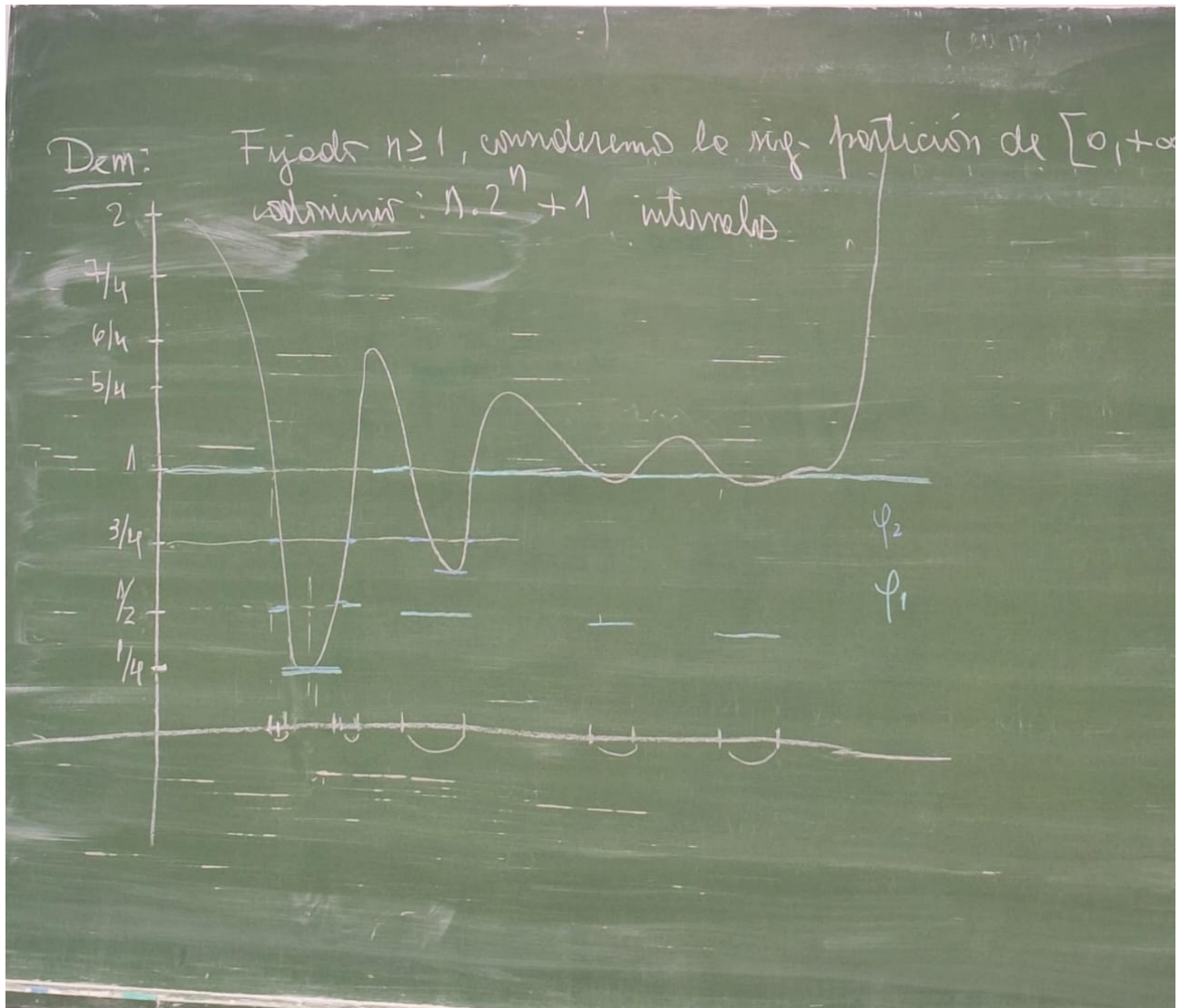
$$f^+ = \chi_{B_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (f + |f|)$$

$$f^- = \chi_{A_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (|f| - f)$$

Veamos el siguiente teorema.

Si $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$ entonces $\exists (\phi_n)_{n \geq 1} \in M^+(X, \mathfrak{X})$ tal que

1. $\phi_n \leq \phi_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$
2. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X.$
3. Para cada $n \geq 1$ se tiene que $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ toma una cantidad finita de valores.



Luego fijado el $n \in \mathbb{N}$ tenemos los intervalos

$$[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \dots, [\frac{2^{n-1}}{2^n}, \frac{2^n}{2^n}), [\frac{2^n}{2^n}, \frac{2^n+1}{2^n}), \dots, [\frac{n \cdot 2^n - 1}{2^n}, \frac{n \cdot 2^n}{2^n}), [n, +\infty]$$

Para cada $k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1$ definimos el conjunto

$$\begin{aligned} E_{k,n} &= f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})) \in \mathfrak{X} \\ &= \{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} \end{aligned}$$

Sea

$$E_{n \cdot 2^n, n} = f^{-1}([n, +\infty]) = \{x \in X : f(x) \geq n\} \in \mathfrak{X}$$

Notemos que $E_{k,n} \in \mathfrak{X} \quad \forall k$, $\bigcup_{k=0}^{n \cdot 2^n} E_{k,n} = f^{-1}([0, +\infty]) = X$ son disjuntos dos a dos. Luego definimos $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{E_{k,n}} = \frac{k}{2^n}$ si $x \in E_{k,n}$, cada x pertenece a un único $E_{k,n}$ por construcción. Entonces $\phi_n \in M^+(X, \mathfrak{X})$.

Veamos que $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, dado $x \in X$ supongamos que $f(x) < n$ entonces $\exists! k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 : x \in E_{k,n}$ (pues en el nivel n , son disjuntos). Queda como ejercicio probar que $E_{k,n} = E_{2k, n+1} \cup E_{2k+1, n+1}$.

Luego

$$\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} & \text{si } x \in E_{2k, n+1} \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x \in E_{2k+1, n+1} \end{cases}$$

$$\therefore \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x).$$

Por otro lado si $f(x) > n \rightarrow x \in E_{n \cdot 2^n, n}$ entonces $\phi_n(x) = n$.

Como ahora descomponemos $[n, +\infty]$ en $[n, n+1] \cup [n+1, +\infty]$ para ϕ_{n+1} lo tenemos como

$$\bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1} \left[\frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}}, \frac{n \cdot 2^{n+1} + k + 1}{2^{n+1}} \right) \cup [n+1, +\infty]$$

Si $x \in [n+1, +\infty]$ ya está pues $\phi_{n+1}(x) = n+1 \geq n = \phi_n(x)$.

Luego $\exists! k = 0, \dots, n \cdot 2^{n+1} : x \in E_{n \cdot 2^{n+1} + k, n+1}$ y en ese caso $\phi_{n+1}(x) = \frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}} = n + \frac{k}{2^{n+1}} \geq n = \phi_n(x)$. Por lo tanto $\phi_n \leq \phi_{n+1}$.

Por último veamos que $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X$.

1. $f(x) = +\infty$ luego $\forall n \geq 1 \quad \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty$.

2. $f(x) \in [0, +\infty)$. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0$ luego $\forall n \geq n_0 \quad \exists k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 : x \in E_{k,n}$. Entonces $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \iff 0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$.

$$\therefore \phi_n(x) \rightarrow f(x).$$

Nota. Si f está acotada (superiormente) entonces $\phi_n \rightrightarrows f$.

4.2 Funciones medibles entre espacios medibles

Definición 4.3. Dados espacios medibles (X, \mathfrak{X}) y (Y, \mathfrak{Y}) una función $f : X \rightarrow Y$ es $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ -medible si $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \mathfrak{Y}$.

Ejemplo. Si (X, \mathfrak{X}) es un espacio medible:

1. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible $\iff f$ es $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ -medible.
2. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es \mathfrak{X} -medible $\iff f$ es $(\mathfrak{X}, \overline{\mathcal{B}})$ -medible.
3. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, sean $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ las componentes de f entonces f es $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ -medible si y sólo si f_j lo es $\forall j$.

Proposición 4.4. Dados un espacio medible (X, \mathfrak{X}) y un conjunto Y , sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathfrak{X} \quad \forall A \in \mathcal{A}$ entonces f es $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$ -medible.

Demostración. Sea $Z = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{X}\} \supseteq \mathcal{A}$. Es fácil ver que Z es σ -álgebra entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq Z$. Es decir que $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \sigma(\mathcal{A})$. Luego f es $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$ -medible. \square

Proposición 4.5. Sea (X, \mathfrak{X}) , (Y, \mathfrak{Y}) , (Z, \mathfrak{Z}) espacios medibles y $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ -medible y $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ -medible respectivamente. Entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ -medible.

Demostración. Fijado $E \in \mathfrak{Z}$ tenemos que $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathfrak{X}$ pues f y g son medibles. \square

This page is intentionally left blank.

Parciales

- 5.1 Primer parcial - Primera fecha
- 5.2 Primer parcial - Segunda fecha
- 5.3 Segundo parcial - Primera fecha
- 5.4 Segundo parcial - Segunda fecha
- 5.5 Segundo parcial - Tercera fecha

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

- [1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue*. John Wiley and Sons, 1995.