

Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

BUSTOS JORDI

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

6 | Clase I - 06/03

1.1	Integral de Riemann	6
1.1.1	Desventajas de la integral de Riemann	6
1.2	Espacios Medibles	7

11 | Parciales

2.1	Primer parcial - Primera fecha	11
2.2	Primer parcial - Segunda fecha	11
2.3	Segundo parcial - Primera fecha	11
2.4	Segundo parcial - Segunda fecha	11
2.5	Segundo parcial - Tercera fecha	11

This page is intentionally left blank.

Prefacio

“Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar,
mediante el estudio,
servirle de ayuda y ornato.”

Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martínez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.

Estas notas se basan principalmente en la cursada del '99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

This page is intentionally left blank.

Clase I - 06/03

1.1 Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. A P le asignamos una norma $\|P\| = \max\{l(J_k)\}$. $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ y a cada P le podemos asignar una etiqueta, que es un vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tal que $\xi_k \in J_k$. Una partición etiquetada es un par (P, ξ) ; y le podemos asignar su suma de Riemann: $S(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)l(J_k)$.

Definición 1.1. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann si $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon$ si (P, ξ) es tal que $\|P\| \leq \delta$

Ejercicio: Probar que si f es integrable Riemann entonces es acotada.

Si f es acotada, dada una partición P del dominio de f , para cada $i \in 1, \dots, n$. Sean $M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}$ y $m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$. Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a P como $S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k l(J_k)$ y $s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k l(J_k)$. Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como $\int_a^b f(x) dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$ y $\int_a^b f(x) dx = \inf\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$.

Proposición 1.2. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f es integrable Riemann \iff es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

Nota. f es integrable Riemann si:

1. f es continua.
2. f es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.
3. f es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.
- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.
- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

Ejemplo. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ f no es integrable Riemann.

Demostración. Llamemos $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. A es numerable entonces $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ biyección. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Ahora para cada $n \geq 1$ consideramos: $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus A_n \end{cases} \quad (1.1)$$

f_n es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de A_n y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que $f_n \rightarrow f$. Sea $x \in [0, 1]$

1. Si $x \in A \rightarrow x \in A_{n_0}, n_0 \in \mathbb{N} \rightarrow (\forall n > n_0) x \in A_n \rightarrow (\forall n > n_0) f_n(x) = 1 \rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 1$.
2. Si $x \notin A \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) x \notin A_n \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) f_n(x) = 0 \rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$.

$\therefore f_n \rightarrow f$. Si conociéramos $l(A)$ y $l([0, 1] \setminus A)$ podríamos definir $\int f = 1 \times l(A) + 0 \times l([0, 1] \setminus A)$. \square

1.2 Espacios Medibles

Dado X un conjunto arbitrario no vacío. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X .

Definición 1.3 (σ -álgebra). Una familia \mathcal{X} es una σ -álgebra si verifica:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{X}$.
2. Si $A \in \mathcal{X} \rightarrow A^c \in \mathcal{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{X} \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

Si \mathcal{X} es una σ -álgebra de subconjuntos de X el par (X, \mathcal{X}) es un espacio medible. A cada $A \in \mathcal{X}$ lo llamaremos conjunto \mathcal{X} -medible.

Nota. Si \mathcal{X} es una σ -álgebra de X y $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ entonces $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{X}$. Idea de la demostración: Sea $(B_m)_{m \geq 1}$ la sucesión en \mathcal{X} definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \emptyset & m > n \end{cases} \quad (1.2)$$

Nota. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de una σ -álgebra \mathcal{X} entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

Demostración. $\bigcup_{n \geq 1} A_n^c \in \mathcal{X} \rightarrow (\bigcap_{n \geq 1} A_n^c)^c \in \mathcal{X} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{X}$. □

Ejemplo (σ -álgebras). Dado X cualquiera no vacío.

1. $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$ es una σ -álgebra.
2. $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra.
3. Sea $A \neq \emptyset \subset X$. Luego $\mathcal{X} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ es una σ -álgebra.
4. Supongamos que X no es numerable y sea

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable } \text{ ó } A^c \text{ es numerable}\} \quad (1.3)$$

es una σ -álgebra. Demostración ejercicio y además $\mathcal{X} \neq \mathcal{P}(X)$.

Lema 1.4. Dado un conjunto X , sean $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ dos σ -álgebras de X . Entonces $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ es una σ -álgebra de X . Más aún si $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ es una familia de σ -álgebras de X entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$ es una σ -álgebra de X . Demostración, ejercicio.

Proposición 1.5. Dado un conjunto X , sea $A \neq \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X) \rightarrow \exists \sigma$ -álgebra $\sigma(A)$ que verifica:

1. $A \subseteq \sigma(A)$.
2. \mathcal{X} es σ -álgebra de X tal que $A \subseteq X \rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathcal{X}$.
3. $\sigma(A)$ es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

La llamaremos σ -álgebra generada por A .

Demostración. Sea $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X \text{ y } A \subseteq \mathcal{C} \} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{P}(X) \in \Delta$. Llamemos $\mathcal{X} = \bigcap_{\mathcal{C} \in \Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$. Veamos que \mathcal{X} es una σ -álgebra de X .

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{X}$.
2. Sea $A \in \mathcal{X} \rightarrow (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \rightarrow A^c \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \rightarrow A^c \in \mathcal{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en \mathcal{X} el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore \mathcal{X}$ es una σ -álgebra que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra $\overline{\mathcal{X}}$ σ -álgebra que verifica las dos condiciones por la propiedad uno y dos podemos deducir que $\mathcal{X} \subseteq \overline{\mathcal{X}}$ y $\overline{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$. \square

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ y sea $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. La σ -álgebra generada por A es la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} . A los conjuntos de \mathcal{B} los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si $\overline{A} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \rightarrow \sigma(\overline{A}) = \mathcal{B}$.

Demostración. ■ Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (a, a+n) \in \mathcal{B} \rightarrow \overline{A} \subseteq \mathcal{B}$. Luego $\sigma(\overline{A}) \subseteq \mathcal{B}$. Por ser $\sigma(\overline{A})$ la mínima σ -álgebra que contiene a \overline{A} .

- Dado $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sabemos que $(a, b] = (a, +\infty) \cap (b, +\infty)^c \in \sigma(\overline{A})$. Luego $(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\overline{A})$. Por lo que $A \subset \sigma(\overline{A})$. $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\overline{A})$. Por ser $\sigma(A)$ la mínima σ -álgebra que contiene a A . \square

Ejercicio demostrar que la σ -álgebra de Borel está generada también por las siguientes familias:

1. $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
2. $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
3. $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
4. $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
6. $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Luego, se puede ver que $\{a\} = \bigcap_{n \geq 1} [a, a + \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$.

This page is intentionally left blank.

Parciales

- 2.1 Primer parcial - Primera fecha
- 2.2 Primer parcial - Segunda fecha
- 2.3 Segundo parcial - Primera fecha
- 2.4 Segundo parcial - Segunda fecha
- 2.5 Segundo parcial - Tercera fecha

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

- [1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue*. John Wiley and Sons, 1995.