

Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

BUSTOS JORDI

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

6 | Clase I - 06/03

1.1	Integral de Riemann	6
1.1.1	Desventajas de la integral de Riemann	7
1.2	Espacios Medibles	8

10 | Clase II - 11/03

2.1	La σ -álgebra de Borel	10
2.2	Recta real extendida	12

14 | Clase III - 13/03

3.1	Funciones medibles	14
3.2	Funciones medibles en la recta extendida	17

19 | Clase IV - 20/03

4.1	Parte negativa y positiva	19
4.2	Funciones medibles entre espacios medibles	23

24 | Clase V - 25/03

5.1	Medidas	24
5.1.1	Motivación	24
5.1.2	Serie de términos no negativos	25
5.1.3	Definición de medida	25

| Clase VI - 27/03

Contenido • 3

6.1	Espacio de medida	31
6.2	Generación de medida	32

35 | Clase VII - 01/04

7.1	Generación de medida (continuación)	35
7.2	Extensión de ℓ al álgebra	37

39 | Parciales

8.1	Primer parcial - Primera fecha	39
8.2	Primer parcial - Segunda fecha	39
8.3	Segundo parcial - Primera fecha	39
8.4	Segundo parcial - Segunda fecha	39
8.5	Segundo parcial - Tercera fecha	39

This page is intentionally left blank.

Prefacio

“Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar,
mediante el estudio,
servirle de ayuda y ornato.”

Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martínez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.

Estas notas se basan principalmente en la cursada del '99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

Clase I - 06/03

1.1 Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. A P le asignamos una norma $\|P\| = \max\{l(J_k)\}$. $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ y a cada P le podemos asignar una etiqueta, que es un vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tal que $\xi_k \in J_k$. Una partición etiquetada es un par (P, ξ) ; y le podemos asignar su suma de Riemann

$$S(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) l(J_k)$$

Definición 1.1 (Integrable Riemann). Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann si

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon \text{ si } (P, \xi) \text{ es tal que } \|P\| \leq \delta$$

Ejercicio: Probar que si f es integrable Riemann entonces es acotada.

Si f es acotada, dada una partición P del dominio de f , para cada $i \in 1, \dots, n$ definimos:

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} \text{ y } m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$$

Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a P como:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k l(J_k) \text{ y } s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k l(J_k)$$

Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\} \text{ y}$$
$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$$

Proposición 1.2. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f es integrable Riemann \iff es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

Observación. f es integrable Riemann si:

1. f es continua.
2. f es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.
3. f es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.
- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.
- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

Ejemplo. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ f no es integrable Riemann.

Demostración. Llamemos $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. A es numerable entonces $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ biyectiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Ahora para cada $n \geq 1$ consideramos: $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus A_n \end{cases}$$

f_n es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de A_n y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que $f_n \rightarrow f$. Sea $x \in [0, 1]$

1. Si $x \in A$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \in A_{n_0} \quad n_0 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow (\forall n > n_0) \quad x \in A_n \\ &\Rightarrow (\forall n > n_0) \quad f_n(x) = 1 \\ &\Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 1 \end{aligned}$$

2. Si $x \notin A \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x \notin A_n \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$.

$\therefore f_n \rightarrow f$. Si conociéramos $\ell(A)$ y $\ell([0, 1] \setminus A)$ podríamos definir $\int f = 1 \times \ell(A) + 0 \times \ell([0, 1] \setminus A)$. \square

1.2 Espacios Medibles

Dado X un conjunto arbitrario no vacío. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X .

Definición 1.3 (σ -álgebra). Una familia \mathfrak{X} es una σ -álgebra si verifica:

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Si $A \in \mathfrak{X} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Definición 1.4 (Conjunto Medible). Si \mathfrak{X} es una σ -álgebra de subconjuntos de X el par (X, \mathfrak{X}) es un espacio medible. A cada $A \in \mathfrak{X}$ lo llamaremos conjunto \mathfrak{X} -medible.

Observación. Si \mathfrak{X} es una σ -álgebra de X y $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{X}$ entonces $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{X}$. Idea de la demostración: Sea $(B_m)_{m \geq 1}$ la sucesión en \mathfrak{X} definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \emptyset & m > n \end{cases}$$

Observación. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de una σ -álgebra \mathfrak{X} entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Demostración. $\bigcup_{n \geq 1} A_n^c \in \mathfrak{X} \Rightarrow (\bigcap_{n \geq 1} A_n^c)^c \in \mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$. □

Ejemplo (σ -álgebras). Dado X cualquiera no vacío.

1. $\mathfrak{X} = \{\emptyset, X\}$ es una σ -álgebra.
2. $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra.
3. Sea $A \neq \emptyset \subset X$. Luego $\mathfrak{X} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ es una σ -álgebra.
4. Supongamos que X no es numerable y sea

$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable} \text{ ó } A^c \text{ es numerable}\}$$

es una σ -álgebra. Demostración ejercicio y además $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(X)$.

Lema 1.5. Dado un conjunto X , sean $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ dos σ -álgebras de X . Entonces $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ es una σ -álgebra de X . Más aún si $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ es una familia de σ -álgebras de X entonces $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i$ es una σ -álgebra de X .

Demostración. Queda como ejercicio. □

Proposición 1.6 (σ -álgebra generada por A). Dado un conjunto X , sea $A \neq \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \exists$ σ -álgebra $\sigma(A)$ que verifica:

1. $A \subseteq \sigma(A)$.
2. \mathfrak{X} es σ -álgebra de X tal que $A \subseteq X \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathfrak{X}$.
3. $\sigma(A)$ es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

Demostración. Sea $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X \text{ y } A \subseteq \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{P}(X) \in \Delta$. Llamemos $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathcal{C} \in \Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$. Veamos que \mathfrak{X} es una σ -álgebra de X .

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \Rightarrow \emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Sea $A \in \mathfrak{X} \Rightarrow (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C} \in \Delta) \Rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en \mathfrak{X} el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore \mathfrak{X}$ es una σ -álgebra que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra $\bar{\mathfrak{X}}$ σ -álgebra que verifica las dos condiciones, por la propiedad uno y dos podemos deducir que $\mathfrak{X} \subseteq \bar{\mathfrak{X}}$ y $\bar{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$. \square

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ y sea $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. La σ -álgebra generada por A es la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} . A los conjuntos de \mathcal{B} los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si $\bar{A} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \sigma(\bar{A}) = \mathcal{B}$.

Demostración. ■ Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (a, a+n) \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \mathcal{B}$. Luego $\sigma(\bar{A}) \subseteq \mathcal{B}$. Por ser $\sigma(\bar{A})$ la mínima σ -álgebra que contiene a \bar{A} .

- Dado $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sabemos que $(a, b] = (a, +\infty) \cap (b, +\infty)^c \in \sigma(\bar{A})$. Luego $(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\bar{A})$. Por lo que $A \subset \sigma(\bar{A})$. $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\bar{A})$. Por ser $\sigma(A)$ la mínima σ -álgebra que contiene a A . \square

Ejercicio demostrar que la σ -álgebra de Borel está generada también por las siguientes familias:

1. $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
2. $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
3. $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
4. $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
6. $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Luego, se puede ver que $\{a\} = \bigcap_{n \geq 1} [a, a + \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$.

Clase II - 11/03

2.1 La σ -álgebra de Borel

A \mathbb{R}^n lo pensamos dotado de la distancia euclídea. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ son dos puntos de \mathbb{R}^n , la distancia entre ellos es

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Consideramos la topología usual de \mathbb{R}^n notada τ^n al conjunto de todos los abiertos de \mathbb{R}^n .

Definición 2.1. Dados $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i (\forall i = 1, \dots, n)$ Definimos el intervalo abierto (a, b) como

$$\begin{aligned}(a, b) &= \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \\ &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, (\forall i = 1, \dots, n)\}\end{aligned}$$

Definición 2.2 (ε -cubo). Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $\varepsilon > 0$ el ε -cubo centrado en x es el conjunto definido por

$$C(x, \varepsilon) = \prod_{i=1}^n (x_i - \frac{\varepsilon}{2}, x_i + \frac{\varepsilon}{2})$$

Proposición 2.3. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto e $y \in C(x, \varepsilon)$ entonces

1. $(\forall x \in V) \quad (\exists \varepsilon > 0) : C(x, \varepsilon) \subseteq V$.
2. $x \in C(y, \varepsilon)$.
3. $C(x, \varepsilon) \subseteq C(y, 2 \cdot \varepsilon)$.

Definición 2.4 (σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n). Es la σ -álgebra generada por:

$$\mathcal{A} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n : a_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$$

Lo notamos \mathcal{B}^n .

Queremos ver que efectivamente $\tau_n \subseteq \mathcal{B}^n$. Consideremos la clase $\beta_n = \{C(q, \frac{1}{m}) : q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$. β_n es numerable pues el conjunto de índices que enumera a β_n es

$$\underbrace{\mathbb{Q}^n \times \dots \times \mathbb{Q}^n}_{n \text{ veces}} \times \mathbb{N}$$

que es numerable.

Proposición 2.5. Dado un abierto no vacío $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existe una familia $\mathcal{A}_V \subseteq \mathcal{B}_n$ tal que $V = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

Demostración. Sabemos que \mathbb{Q}^n es denso en \mathbb{R}^n . Como V es abierto y no vacío entonces $V \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Luego $B(x, \varepsilon) \subseteq V$ y $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Por lo tanto $B(x, \varepsilon) \subset V \cap \mathbb{Q}^n$.

Para cada $q \in V \cap \mathbb{Q}^n$ defino $m_q = \min\{m \in \mathbb{N} : C(q, \frac{1}{m}) \subseteq V\}$. Llamemos $\mathcal{A}_V = \{C(q, \frac{1}{m_q}) : q \in V \cap \mathbb{Q}^n\}$ la cual es una familia numerable.

Veamos que $\bigcup_{q \in V \cap \mathbb{Q}^n} C(q, \frac{1}{m_q}) = V$.

- \subseteq es trivial.
- \supseteq Dado $x \in V$, $\exists m \in \mathbb{N} : C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$. Consideremos $C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$ que es un abierto no vacío.
 Resulta que $C(x, \frac{1}{2m}) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Sea $q \in C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq V \cap \mathbb{Q}^n$
 $\Rightarrow x \in C(q, \frac{1}{2m})$, en particular $m_q \leq 2m$, pues como $x \in C(q, \frac{1}{2m})$ implica que $C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq V$.
 $\Rightarrow x \in C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(q, \frac{1}{m_q}) \therefore x \in \bigcup_{q \in \mathcal{A}_V} C(q, \frac{1}{m_q}) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

□

Corolario 2.6. La σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n coincide con la $\sigma(\tau_n)$. En particular:

- Todo abierto de \mathbb{R}^n es un conjunto Boreliano.
- Todo conjunto cerrado de \mathbb{R}^n es un Boreliano por ser complemento de un abierto.
- Por último, todo subconjunto numerable de \mathbb{R}^n es un Boreliano. (Dado $x \in \mathbb{R}^n, \{x\} = \bigcap_{n \geq 1} C(x, \frac{1}{n})$).

Proposición 2.7. Dado un espacio medible (X, \mathfrak{X}) y sea $X_0 \subseteq X$, entonces

1. $\mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A = E \cap X_0 \text{ para algún } E \in \mathfrak{X}\}$ es σ -álgebra de X_0 . En particular, si $X_0 \in \mathfrak{X} \Rightarrow \mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A \in \mathfrak{X}\}$, la demostración queda como ejercicio.
2. Si \mathcal{A} es una familia en partes de X tal que $\mathfrak{X} = \sigma(\mathcal{A})$ entonces $\mathfrak{X}_0 = \sigma(\mathcal{A}_0)$ donde $\mathcal{A}_0 = \{A_0 \subseteq X_0 : A_0 = A \cap X_0 \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}$.

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Si $A_0 \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : A_0 = A \cap X_0$. Como $A \in \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$ resulta que $A_0 = A \cap X_0 \in \mathfrak{X}_0$. Entonces $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathfrak{X}_0$.

Ahora veamos que $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. Consideramos la clase $\mathcal{G} = \{E \subseteq X : E \cap X_0 \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}$ y veamos que $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{G}$. Alcanza con probar que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$. Pues si $A \in \mathcal{A}$, $A \cap X_0 \in \mathcal{A}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \Rightarrow A \in \mathcal{G}$. Si probamos que \mathcal{G} es una σ -álgebra, tendríamos que $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$. Luego $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. \square

Ejemplo. Si $\beta \in B_n$ entonces la σ -álgebra de Borel de β , $B_n(\beta) = \{A \subseteq \beta : A \in B_n\}$ está generado por la familia de conjuntos de la forma $(a, b) \cap \beta$ para $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i$ ($\forall i = 1, \dots, n$).

2.2 Recta real extendida

Definición 2.8 (Recta real extendida). Definimos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Con las siguientes convenciones:

1. Dado $r \in \mathbb{R}$ tenemos que $-\infty < r < +\infty$.
2. $+\infty + +\infty = +\infty$ y $+\infty + -\infty$ no está definido.
3. $+\infty \cdot +\infty = +\infty$ y $+\infty \cdot -\infty = -\infty$ Si $r \in \mathbb{R}$ entonces $r \cdot +\infty = +\infty$ si $r > 0$ y $r \cdot +\infty = -\infty$ si $r < 0$.
4. $0 \cdot +\infty = 0 = +\infty \cdot 0$.
5. Tampoco definimos cocientes entre infinitos o de la forma $\frac{r}{\pm\infty}$.

Observación. El producto no va a ser continuo en la recta real extendida. Si $a_n = +\infty \cdot \frac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Pero $+\infty \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty \cdot 0 = 0$.

Notemos que si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\sup(A) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, sea $\emptyset \neq L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x_{n_k} \rightarrow x\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.9. $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup(L)$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf(L)$. Ambos pertenecen a L . Además, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\alpha_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ la sucesión α_m es decreciente y $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{\alpha_m\} = \inf_{m \geq 1}(\sup_{n \geq m}\{x_n\})$. Análogamente $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{\alpha_m\} = \sup_{m \geq 1}(\inf_{n \geq m}\{x_n\})$.

Proposición 2.10. Propiedades de límite superior e inferior:

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Observación. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en \mathbb{R} y $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_n \rightarrow x \iff \limsup x_n = \liminf x_n = x$.

Veamos como extender \mathcal{B} a $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.11 (Borel extendida). Para cada $E \in \mathcal{B}$, sean $E_1 = E \cup \{+\infty\}$, $E_2 = E \cup \{-\infty\}$ y $E_3 = E \cup \{+\infty, -\infty\}$. Consideremos $\overline{\mathcal{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E : E \in \mathcal{B}\} = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\})$. Probar que $\overline{\mathcal{B}}$ es σ -álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$ se deja como ejercicio.

Clase III - 13/03

3.1 Funciones medibles

Proposición 3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f es continua si $f^{-1}(V)$ es abierto de \mathbb{R}^n ($\forall V$ abierto en τ_1).

En lo que sigue vamos a considerar un espacio medible fijo de la forma (X, \mathfrak{X}) .

Notación: Dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos:

$$\{f > \alpha\} := \{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$$

Definición 3.2 (Función medible). Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible (σ -medible) si $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Lema 3.3. Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función, son equivalentes:

1. f es \mathfrak{X} -medible.
2. $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.
3. $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.
4. $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

- (1) \iff (3): $\{f \leq \alpha\} = \{f > \alpha\}^c \in \mathfrak{X}$.
- (2) \iff (4) Análogo.
- (1) \iff (2): Supongamos que f es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X}$.

$$\begin{aligned} x \in \{f \geq \alpha\} &\iff f(x) \geq \alpha > \alpha - \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ x \in \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} &\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \{f \geq \alpha\} &= \bigcap_{n \geq 1} \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

Para la vuelta supongamos que vale (2). Quiero ver que $\{f > \gamma\} \in \mathfrak{X}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \{f > \gamma\} &= \bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\} \\ x \in \{f > \gamma\} &\iff f(x) > \gamma \iff \exists n_x \in \mathbb{N} : f(x) > \gamma + \frac{1}{n_x} \end{aligned}$$

Luego $\bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X}$.

□

Ejemplo. Toda función constante es medible. $f : X \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = c \quad (\forall x \in X)$.

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq c \\ X & \alpha < c \end{cases}$$

□

Ejemplo. Dado $E \subseteq X$ consideremos la función característica de E . Como $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Demostración. Consideremos $E = [0, 1]$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\{\chi_E > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq 1 \\ E & 0 \leq \alpha < 1 \\ X & \alpha < 0 \end{cases}$$

Luego χ_E es medible $\iff E \in \mathfrak{X}$. □

Ejemplo. Si $X = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B} \Rightarrow$ toda función continua es medible con respecto a la σ -álgebra de Borel.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B}_n$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona (creciente) entonces es \mathcal{B} -medible.

Ejercicio: $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible $\iff f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$.

Lema 3.4. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles, $c \in \mathbb{R}$ entonces $c \cdot f$, f^2 , $f + g$, $|f|$, $f \cdot g$, son \mathfrak{X} -medibles. $f^2 = f(x) \cdot f(x)$.

Demostración. Veamos que f^2 es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\{f^2 > \alpha\} \in \mathfrak{X}$
Si $\alpha < 0 \Rightarrow \{f^2 > \alpha\} = X$.

Si $\alpha \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \{f^2 > \alpha\} &= \{x \in X : f(x) \cdot f(x) > \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}\} \\ &= \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

$\therefore f^2$ es \mathfrak{X} -medible.

Veamos ahora que $f + g$ es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que

$$\{f + g > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Para $x \in X$ tenemos que:

$$(f + g)(x) > \alpha \iff f(x) + g(x) > \alpha \iff f(x) > r \wedge g(x) > \alpha - r \text{ para algún } r \in \mathbb{Q}$$

Entonces $\{f + g > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > \alpha - r\}) \in \mathfrak{X}$ por ser unión numerable
 $\therefore f + g$ es \mathfrak{X} -medible.

Por último veamos que $f \cdot g$ es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que

$$\{f \cdot g > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Sabemos que:

$$(f + g)^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible} \Rightarrow f^2 + 2 \cdot f \cdot g + g^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible}$$

$$f \cdot g = \frac{1}{2} ((f + g)^2 - f^2 - g^2) \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible}$$

□

3.2 Funciones medibles en la recta extendida

Definición 3.5. Dada $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ diremos que f es \mathfrak{X} -medible si

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) = \{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

A la clase de las funciones (a valores en la recta extendida) \mathfrak{X} -medibles la denotaremos por $M(X, \mathfrak{X})$.

Observación. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X})$.

Observación. Si

$$f \in M(X, \mathfrak{X}) \Rightarrow \{f = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f > n\} \in \mathfrak{X}$$

Además,

$$\{f = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f < -n\} \in \mathfrak{X}$$

Lema 3.6. Dada una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ consideremos $A_f = \{f = +\infty\}$, $B_f = \{f = -\infty\}$ y

$$\hat{f} = \begin{cases} f & x \in X \setminus (A_f \cup B_f) \\ 0 & x \in A_f \\ 0 & x \in B_f \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff A_f, B_f \in \mathfrak{X}$ y \hat{f} es \mathfrak{X} -medible.

Demostración. Supongamos primero que $f \in M(X, \mathfrak{X})$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, ya vimos que $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$. Veamos que \hat{f} es \mathfrak{X} -medible.

Quiero ver que $\{\hat{f} > \alpha\} \in \mathfrak{X}$. Si $\alpha \geq 0$ entonces

$$\{\hat{f} > \alpha\} = \{f > \alpha\} - A_f = \{f > \alpha\} \cap A_f^c \in \mathfrak{X}$$

Si $\alpha < 0$ entonces

$$\{\hat{f} < \alpha\} = \{f > \alpha\} \cup \{\hat{f} = 0\} = \{f > \alpha\} \cup (A_f \cup B_f) = \{f > \alpha\} \cup B_f \in \mathfrak{X}$$

Luego $\hat{f} \in \mathfrak{X}$. Supongamos ahora que $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$ y \hat{f} es \mathfrak{X} -medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} > \alpha\} \cup A_f \in \mathfrak{X}$$

Si $\alpha < 0$ entonces

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} < \alpha\} \setminus B_f = \{\hat{f} < \alpha\} \cap B_f^c \in \mathfrak{X}$$

□

Corolario 3.7. Si $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$ y $c \in \mathbb{R}$. Las funciones $c \cdot f$, f^2 , $|f|$, $f \cdot g \in M(X, \mathfrak{X})$.

Observación. Dados $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$ consideremos los conjuntos

- $E_1 = \{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\} \in \mathfrak{X}$.
- $E_2 = \{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\} \in \mathfrak{X}$.

Notemos que no está definida la suma $f + g$ en $E_1 \cup E_2$. Definimos

$$f + g = \begin{cases} f + g & x \in X \setminus (E_1 \cup E_2) \\ 0 & x \in E_1 \cup E_2 \end{cases}$$

La demostración de que $f + g \in M(X, \mathfrak{X})$ se deja como ejercicio.

Lema 3.8. Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n \geq 1}$ en $M(X, \mathfrak{X})$ sean f, f^*, F, F^* definidas por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf_{n \geq 1} f_n(x) & f^*(x) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ F(x) &= \sup_{n \geq 1} f_n(x) & F^*(x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Entonces $f, f^*, F, F^* \in M(X, \mathfrak{X})$.

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\{F > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

$$\{f > \alpha\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Veamos $F^* \in M(X, \mathfrak{X})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino $h_n = \sup_{m \geq n} f_m \in \mathfrak{X}$. Por ser subsucesión de funciones medibles. Luego

$$F^* = \inf_{n \geq 1} (\sup_{m \geq n} f_m) \in \mathfrak{X}$$

Análogamente para f^* . □

Corolario 3.9. Dada $(f_n)_{n \geq 1} : f_n \in M(X, \mathfrak{X}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Supongamos que la sucesión converge puntualmente a f entonces $f \in M(X, \mathfrak{X})$.

Demostración. Notemos que $f = \liminf f_n = \limsup f_n$ y aplicamos el lema anterior. □

Clase IV - 20/03

4.1 Parte negativa y positiva

Definición 4.1 (Función truncada). Dada una función $f \in M(X, \mathfrak{X})$, para cada $n \geq 1$ definimos la función truncada a $[-n, n]$ como la $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \in [-n, n] \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n \end{cases}$$

Que converge puntualmente a f .

Notemos que f_n es medible para todo $n \geq 1$. Pues

$$\{f_n > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{si } \alpha \leq -n \\ \{f < \alpha\} & \text{si } \alpha \in [-n, n] \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq n \end{cases}$$

Veamos una forma alternativa de probar el teorema de la clase anterior. Si $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$ entonces $f + g : X \rightarrow \mathbb{R} \in M(X, \mathfrak{X})$

Para cada $n \geq 1$ consideramos las funciones truncadas $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que $f_n + g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible. Queremos ver que la convergencia es puntual $\forall x \in X$.

Si $x \in E_1 = \{f = +\infty, g = -\infty\}$. Para cada $n \geq 1$, $f_n(x) = n$ y $g_n(x) = -n$ entonces $(f_n + g_n)(x) = f_n(x) + g_n(x) = 0 \quad (\forall n)$. Luego $(f_n + g_n)(x) \rightarrow 0 = f(x)$ si $x \in E_1$. Para $x \in E_2$ el desarrollo es análogo.

Si $x \in (E_1 \cup E_2)^c$ entonces

1. $f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) \in \mathbb{R}$ y $g(x) = +\infty$.
3. $f(x) = +\infty$ y $g(x) \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) = g(x) = +\infty$.

Luego $(f_n + g_n)(x) \rightarrow (f + g)(x) \quad \forall x \in (E_1 \cup E_2)^c$. Pues $f_n(x) \rightarrow f(x)$ y $g_n(x) \rightarrow g(x)$.

Definición 4.2. Dada una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definimos la parte positiva $f^+ : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y la parte negativa $f^- : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Observación. $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Observación. Si (X, \mathfrak{X}) es un espacio medible $f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{X}) = \{f \in M(X, \mathfrak{X}) : f \geq 0\}$ Notemos que $f^+ = \sup(\{f, 0\})$ y $f^- = \sup(\{-f, 0\})$. Utilizando el teorema anterior vemos que si $f^+, f^- \in M(X, \mathfrak{X})$ entonces $f = f^+ + (-f^-) \in M(X, \mathfrak{X})$.

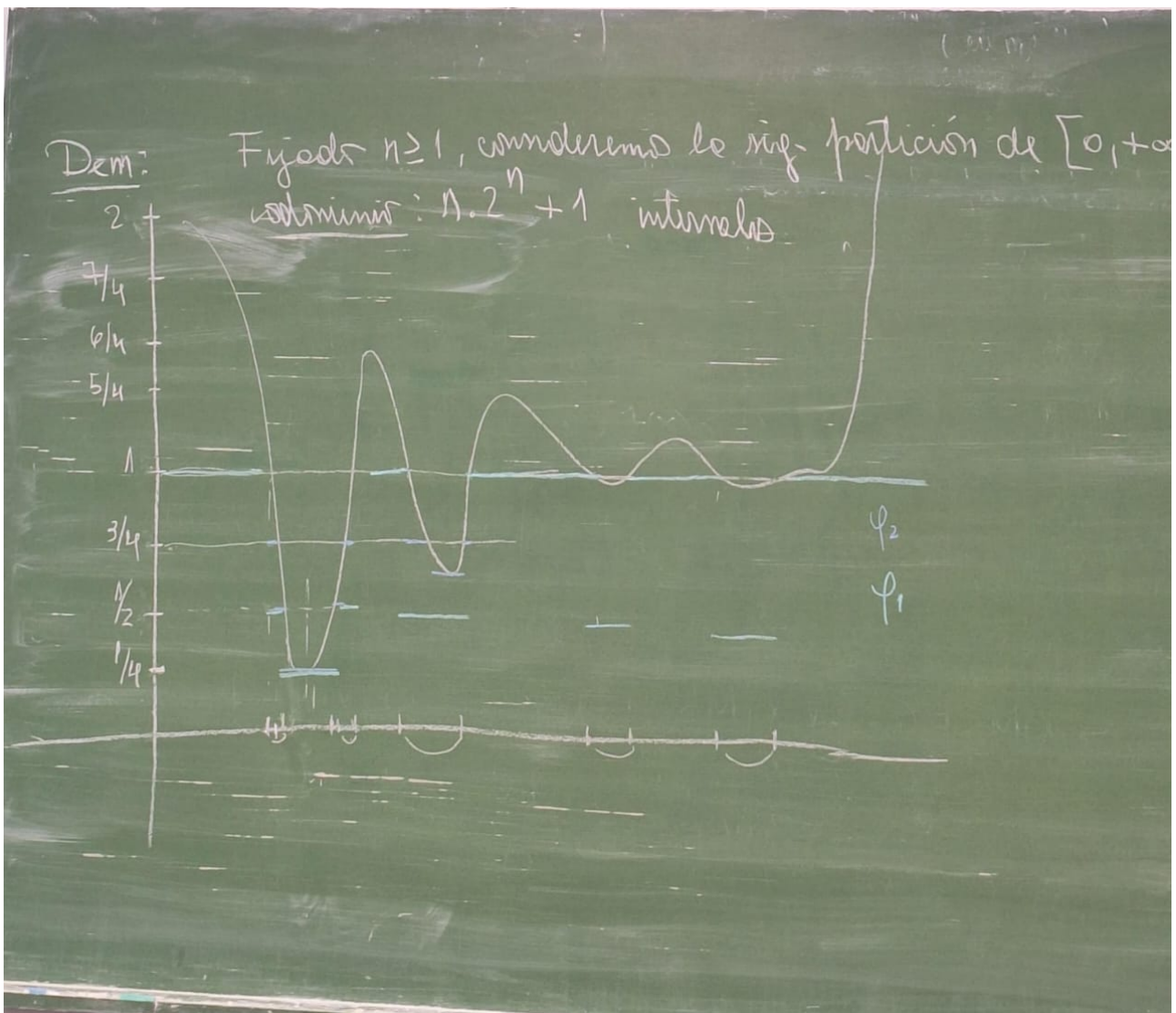
Observación. Si $B_f = \{f = +\infty\}$,

$$f^+ = \chi_{B_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (f + |f|)$$

$$f^- = \chi_{A_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (|f| - f)$$

Teorema 4.3. Si $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$ entonces $\exists(\phi_n)_{n \geq 1} \in M^+(X, \mathfrak{X})$ tal que

1. $\phi_n \leq \phi_{n+1} \quad \forall n \geq 1$.
2. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X$.
3. Para cada $n \geq 1$ se tiene que $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ toma una cantidad finita de valores.



Luego fijado el $n \in \mathbb{N}$ tenemos los intervalos

$$\left[0, \frac{1}{2^n}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \dots, \left[\frac{n \cdot 2^n - 1}{2^n}, \frac{n \cdot 2^n}{2^n}\right), \dots, \left[\frac{n \cdot 2^n - 1}{2^n}, \frac{n \cdot 2^n}{2^n}\right), [n, +\infty)$$

Para cada $k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1$ definimos el conjunto

$$\begin{aligned} E_{k,n} &= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \in \mathfrak{X} \\ &= \left\{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} \end{aligned}$$

Sea

$$E_{n \cdot 2^n, n} = f^{-1}([n, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq n\} \in \mathfrak{X}$$

Notemos que $E_{k,n} \in \mathfrak{X} \quad \forall k, \bigcup_{k=0}^{n \cdot 2^n} E_{k,n} = f^{-1}([0, +\infty)) = X$ son disjuntos dos a dos.

Luego definimos $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{E_{k,n}} = \frac{k}{2^n}$ si $x \in E_{k,n}$, cada x pertenece a un único $E_{k,n}$ por construcción.

Entonces $\phi_n \in M^+(X, \mathfrak{X})$.

Veamos que $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, dado $x \in X$ supongamos que $f(x) < n$ entonces $\exists! k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 : x \in E_{k,n}$ (pues en el nivel n , son disjuntos).

Queda como ejercicio probar que $E_{k,n} = E_{2k,n+1} \cup E_{2k+1,n+1}$.

Luego

$$\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} & \text{si } x \in E_{2k,n+1} \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x \in E_{2k+1,n+1} \end{cases}$$

$\therefore \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$.

Por otro lado si $f(x) > n \Rightarrow x \in E_{n \cdot 2^n, n}$ entonces $\phi_n(x) = n$.

Como ahora descomponemos $[n, +\infty]$ en $[n, n+1] \cup [n+1, +\infty]$ para ϕ_{n+1} lo tenemos como

$$\bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1} \left[\frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}}, \frac{n \cdot 2^{n+1} + k + 1}{2^{n+1}} \right) \cup [n+1, +\infty]$$

Si $x \in [n+1, +\infty]$ ya está pues $\phi_{n+1}(x) = n+1 \geq n = \phi_n(x)$.

Luego $\exists! k = 0, \dots, n \cdot 2^{n+1} : x \in E_{n \cdot 2^{n+1} + k, n+1}$ y en ese caso $\phi_{n+1}(x) = \frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}} = n + \frac{k}{2^{n+1}} \geq n = \phi_n(x)$. Por lo tanto $\phi_n \leq \phi_{n+1}$.

Por último veamos que $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X$.

1. $f(x) = +\infty$ luego $\forall n \geq 1 \quad \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty$.

2. $f(x) \in [0, +\infty)$. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0$ luego $\forall n \geq n_0 \quad \exists k = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 : x \in E_{k,n}$. Entonces $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \iff 0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$.

$\therefore \phi_n(x) \rightarrow f(x)$.

Observación. Si f está acotada (superiormente) entonces $\phi_n \rightrightarrows f$.

4.2 Funciones medibles entre espacios medibles

Definición 4.4. Dados espacios medibles (X, \mathfrak{X}) y (Y, \mathfrak{Y}) una función $f : X \rightarrow Y$ es $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ -medible si $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \mathfrak{Y}$.

Ejemplo. Si (X, \mathfrak{X}) es un espacio medible:

1. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathfrak{X} -medible $\iff f$ es $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ -medible.
2. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es \mathfrak{X} -medible $\iff f$ es $(\mathfrak{X}, \overline{\mathcal{B}})$ -medible.
3. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, sean $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ las componentes de f entonces f es $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ -medible si y sólo si f_j lo es $\forall j$.

Proposición 4.5. Dados un espacio medible (X, \mathfrak{X}) y un conjunto Y , sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathfrak{X} \quad \forall A \in \mathcal{A}$ entonces f es $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$ -medible.

Demostración. Sea $Z = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{X}\} \supseteq \mathcal{A}$. Es fácil ver que Z es σ -álgebra entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq Z$. Es decir que $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \sigma(\mathcal{A})$. Luego f es $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$ -medible. \square

Proposición 4.6. Sea (X, \mathfrak{X}) , (Y, \mathfrak{Y}) , (Z, \mathfrak{Z}) espacios medibles y $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ -medible y $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ -medible respectivamente. Entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ -medible.

Demostración. Fijado $E \in \mathfrak{Z}$ tenemos que $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathfrak{X}$ pues f y g son medibles. \square

Clase V - 25/03

5.1 Medidas

5.1.1. Motivación

Sea $\phi : X \rightarrow [0, +\infty]$ con $\text{Im}(\phi) = \{y_1, \dots, y_m\}$. Si $\phi^{-1}(y_i) \in \mathfrak{X}$ y conocemos $\mu(\phi^{-1}(y_i)) \in [0, +\infty]$ (la medida de cada conjunto) podemos definir

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^m y_i \cdot \mu(\phi^{-1}(y_i))$$

Si $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es \mathfrak{X} -medible, \exists una sucesión $(\phi_n)_{n \geq 1}$ con funciones así tal que $\phi_n \rightarrow f$. Entonces podremos definir

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n \, d\mu$$

Dado un espacio medible (X, \mathfrak{X}) , vamos a considerar ciertas funciones $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$: el valor $\mu(E)$ para cada $E \in \mathfrak{X}$ esté motivado por las nociones de longitud, área, volumen, probabilidad, masa, etc.

5.1.2. Series de términos no negativos

Proposición 5.1. Sea $(a_n)_{n \geq 1} \subset [0, +\infty] \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en $[0, +\infty]$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$
Además:

1. Si $(I_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de subconjuntos finitos de \mathbb{N} ($I_n \subseteq I_{n+1} \quad \forall n \geq 1$) entonces $\bigcup_{n \geq 1} I_n = \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n = \sup\{\sum_{m \in I_n} a_m : n \geq 1\}$.
2. Si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una permutación de \mathbb{N} entonces $\sum_{n \geq 1} a_{\sigma(n)} = \sum_{n \geq 1} a_n$.
3. Dado un conjunto numerable I , sea $(a_i)_{i \in I}$ una sucesión en $[0, +\infty]$ y $f : \mathbb{N} \rightarrow I$ es una biyección, consideremos la sucesión $(b_n)_{n \geq 1} = (a_{f(n)})_{n \geq 1}$, entonces podemos definir a

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n \geq 1} b_{f(n)}$$

Esto está bien definido pues si $g : \mathbb{N} \rightarrow I$ es otra biyección tal que $c_n = a_{g(n)}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} c_n &= \sum_{n \geq 1} a_{g(n)} \\ \sum_{n \geq 1} a_{\sigma(f(n))} &= \sum_{n \geq 1} b_{\sigma(n)} = \sum_{n \geq 1} b_n \end{aligned}$$

En particular si $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $[0, +\infty]$ podemos definir

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{n,m} &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m \geq 1} a_{n,m} \right) \\ &= \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{n \geq 1} a_{n,m} \right) \end{aligned}$$

5.1.3. Definición de medida

Definición 5.2 (Medida). Dado un espacio medible (X, \mathfrak{X}) , una medida en X es una función $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. (σ -aditividad) Si $(E_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en \mathfrak{X} , dos a dos disjuntos \Rightarrow

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n)$$

Observación. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{X}$ son conjuntos dos a dos disjuntos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Esto se deduce de la propiedad de σ -aditividad, pues construimos la sucesión $(E_n)_{n \geq 1}$ como $A_1, A_2, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$.

Definición 5.3 (Medida finita). Una medida es finita si $\mu(E) < +\infty \quad \forall E \in \mathfrak{X}$.

Definición 5.4 (Medida σ -finita). Una medida es σ -finita si $\exists (E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathfrak{X}$ tal que: $X = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ y $\mu(E_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$.

Ejemplo. Si $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{X} = P(X)$ y tomamos $\mu : P(X) \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $\mu(E) = 0 \quad \forall E \in P(X)$ y también es medida si la definimos como

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset \\ +\infty & \text{si } E \neq \emptyset \end{cases}$$

Luego no es finita, ni σ -finita.

Ejemplo. Sea (X, \mathfrak{X}) un espacio medible y fijemos $x_0 \in X \neq \emptyset$. Sea $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \notin E \\ 1 & \text{si } x_0 \in E \end{cases}$$

Es la medida puntual con masa uno y la notamos δ_{x_0} (δ de Dirac). Es una medida finita y es σ -aditiva pues si construimos una sucesión E_n de conjuntos disjuntos dos a dos $\mu(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) = 1$. Pues un único conjunto E_n puede contener a x_0 .

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y la medida de conteo $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ es infinito} \\ \text{card}(E) & \text{si } E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{cases}$$

Ejercicio, ver que es σ -aditiva. Es σ -finita, pero no es finita pues $\mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 1} \{n\}$ y $\mu(\{n\}) = 1$.

Ejemplo. Sea (X, \mathfrak{X}) un espacio medible, X con infinitos elementos, sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en X con $x_n \neq x_m \quad \forall n \neq m$ y $(a_n)_{n \geq 1}$ otra sucesión en $[0, +\infty]$. Definimos $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow [0, +\infty]$ como

$$\mu(E) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} : x_n \in E \\ E \in \mathfrak{X}}} a_n$$

Queda como ejercicio ver que es medida. Si \mathfrak{X} contiene a los conjuntos unitarios $\{x_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces μ es σ -finita pues $X = (\bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}) \cup (X - \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\})$ ambos medibles, luego $\mu(\{x_n\}) = a_n$ y $\mu(X - \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}) = 0$. Además es σ -finita $\iff \sum_{n \geq 1} a_n < +\infty$

Ejemplo (Medida de Lebesgue). Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$, más adelante probaremos que $\exists!$ medida $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que: $\lambda((a, b)) = b - a$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

Es σ -finita pues $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} (-n, n)$ y $\lambda((-n, n)) = 2n < +\infty$, pero no es finita pues $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. Notemos que λ puede extenderse a una σ -álgebra de \mathbb{R} más grande que \mathcal{B} , pero no puede extenderse a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Ejemplo (Medida n-dimensional de Lebesgue). Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{X} = \mathcal{B}_n$, tenemos que $\exists!$ medida $\lambda : \mathcal{B}_n \rightarrow [0, +\infty]$ tal que:

$$\lambda_n\left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ y } a_i < b_i$$

Ejemplo (Medida de Borel - Stieltjes generada por f). Si $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$, fijemos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona no decreciente y continua. Probaremos que existe una única medida $\lambda_f : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$:

$$\lambda_f((a, b)) = f(b) - f(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b$$

El ejemplo anterior es un caso particular de esta medida con $f(x) = x$.

Lema 5.5. Dado un espacio medible (X, \mathfrak{X}) y una medida $\mu : X \rightarrow [0, +\infty]$. Si $F, E \in \mathfrak{X}$ y $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$. Si además $\mu(E) < +\infty \Rightarrow \mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Demostración. Como $E \subseteq F$ entonces $F = E \cup (F - E)$, además $F - E = F \cap E^c \in \mathfrak{X}$ y $E \cap (F - E) = \emptyset$. Entonces $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E)$. Si $\mu(E) < +\infty$ entonces $\mu(F)$, $\mu(F - E)$ son o ambos finitos o ambos infinitos, luego $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$. \square

Corolario 5.6. μ es finito $\iff \mu(X) < +\infty$.

Lema 5.7. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión cualquiera en \mathfrak{X} entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} F_1 &:= A_1, F_2 := A_2 - A_1, \dots \\ F_n &:= A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = A_n - \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k\right) \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Resulta que es una sucesión en \mathfrak{X} de conjuntos disjuntos dos a dos ya que si $n > m \Rightarrow F_m \cap F_n = (A_m - \bigcup_{k=1}^{m-1} F_k) \cap F_n = \emptyset$.

Luego,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \geq 1} A_n &= \bigcup_{n \geq 1} F_n, \text{ y} \\ \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} F_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(F_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \end{aligned}$$

\square

Lema 5.8. Sea μ una medida sobre \mathfrak{X} :

1. Si $(E_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en \mathfrak{X} creciente $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$.
2. Si $(F_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente y $\mu(F_1) < +\infty \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n)$$

Ejemplo $\{x\} = \bigcap_{n \geq 1} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ y $\mu(\{x\}) = \frac{2}{n} \rightarrow 0$ si $\mu = \lambda$.

Demostración. Veamos el primer caso.

$\forall n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = E_n - E_{n-1}$, con $E_0 = \emptyset$ y $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en \mathfrak{X} tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E_n, \text{ y además } \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} E_n$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) \end{aligned}$$

Para el segundo caso si $\mu(F_1) < +\infty$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n = F_1 - F_n \Rightarrow (E_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente en \mathfrak{X} tal que

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} F_1 \cap F_n^c = F_1 \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n^c\right) = F_1 \cap \left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right)^c = F_1 - \bigcap_{n \geq 1} F_n$$

$$\begin{aligned} \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) &= \mu(F_1 - \bigcap_{n \geq 1} F_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_1 - F_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_1) - \mu(F_n) = \mu(F_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_n) \end{aligned}$$

*Por el lema anterior \therefore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_n) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right)$$

□

Notemos que en el segundo caso la condición $\mu(F_1) < +\infty$ se puede reemplazar por $\mu(F_{n_0}) < +\infty$ para algún $n_0 \geq 1$, pero no puede omitirse. Por ejemplo si $X = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$ y $\mu = \lambda$ la medida de Lebesgue, entonces llamemos $F_n = (n, +\infty)$ en este caso $\mu(F_n) = +\infty$ y $\mu(\bigcap_{n \geq 1} F_n) = \emptyset$. Aplicando estas propiedades para la medida de Lebesgue λ podemos probar que si I es un intervalo de \mathbb{R} $(a, b) : a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ y $a < b$ o $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$.

$$\lambda(I) = \begin{cases} l(I) & \text{si } I \text{ es acotado} \\ +\infty & \text{si } I \text{ es no acotado} \end{cases}$$

Clase VI - 27/03

6.1 Espacio de medida

Definición 6.1 (Espacio de medida). Un espacio de medida es una terna (X, \mathfrak{X}, μ) , donde X es un conjunto, \mathfrak{X} es una σ -álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en \mathfrak{X} .

Un espacio de probabilidad es un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. En este caso a X se lo llama espacio muestral, a \mathfrak{X} se lo llama colección de eventos y una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathfrak{X} -medible se la llama variable aleatoria.

Definición 6.2. Dado un espacio de medida (X, \mathfrak{X}, μ) , sea $P(x)$ una "propiedad" que se puede predicar de sobre los elementos $X \in \mathfrak{X}$. Diremos que $P(x)$ vale μ -casi todo punto (μ -c.t.p) si $\exists N \in \mathfrak{X}$ con $\mu(N) = 0 : P(x)$ vale $\forall x \in N^c$.

Ejemplo. $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diremos que $f = g$ μ -c.t.p si $\exists N \in \mathfrak{X}$ con $\mu(N) = 0 : f(x) = g(x) \quad \forall x \in N^c$. Por ejemplo si $(X, \mathfrak{X}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, las funciones $f = X_{\mathbb{Q}}$, y $g = 0$ son λ -c.t.p iguales ya que $f(x) = g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^c$ y $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Ejemplo. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que $f_n \rightarrow f$ μ -c.t.p si $\exists N \in \mathfrak{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in N^c$.

Definición 6.3 (Carga). Dado un espacio medible (X, \mathfrak{X}, μ) , una carga en \mathfrak{X} es una función $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. Si $(E_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en \mathfrak{X} disjuntos dos a dos entonces $\nu(\bigcup E_n) = \sum \nu(E_n)$.

Admitimos solo valores reales en la imagen para evitar situaciones del tipo $\infty + (-\infty)$. Luego $\sum_{n \geq 1} \nu(E_n)$ converge pues si definimos $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una permutación de los naturales entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \nu(E_{\sigma(n)}) &= \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_{\sigma(n)}\right) \\ &= \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \nu(E_n) \end{aligned}$$

\therefore converge incondicionalmente \rightarrow converge absolutamente.

6.2 Generación de medida

Motivación: ¿Cómo podemos construir una medida con ciertas propiedades cuando no sabemos como definirla sobre todos los conjuntos de la σ -álgebra?

Consideremos la clase \mathfrak{I} formada por los intervalos de la forma

1. $(a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
2. $(-\infty, b]$ con $b \in \mathbb{R}$.
3. (c, ∞) con $c \in \mathbb{R}$.
4. $(-\infty, \infty)$.
5. \emptyset .

Luego definimos $\ell : \mathfrak{I} \rightarrow [0, +\infty]$ dada por:

1. $\ell((a, b]) = b - a$.
2. $\ell((-\infty, b]) = +\infty$.
3. $\ell((c, \infty)) = +\infty$.
4. $\ell((-\infty, \infty)) = +\infty$.
5. $\ell(\emptyset) = 0$.

Sabemos que $\sigma(\mathfrak{I}) = \mathcal{B}$, la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} , pero no sabemos como extender la definición de ℓ a todos los conjuntos de \mathcal{B} .

La clase de \mathfrak{I} tiene estructura de semiálgebra.

Definición 6.4 (Semiálgebra). Una colección de subconjuntos \mathcal{A} de X es una semiálgebra si:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
2. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.
3. Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \bigcup_{k=1}^n S_k$ para $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{A}$ dos a dos disjuntos.

Se deja como ejercicio verificar que efectivamente \mathfrak{I} es una semiálgebra con la definición de semiálgebra de \mathbb{R} .

Lema 6.5. La función $\ell : \mathfrak{I} \rightarrow [0, +\infty]$ es finitamente aditiva, i.e, si $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{I}$ son conjuntos dos a dos disjuntos y $\bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{I} \Rightarrow \ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$.

Demostración. Supongamos $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{I}$, no vacíos, cuya unión también pertenece a \mathfrak{I} . Si alguno es no acotado, la unión también y será $\ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = +\infty = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$. Supongamos ahora que cada $I_k = (a_k, b_k]$ con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$. Luego $\bigcup_{i=1}^n I_i$ es de la forma $(a, b]$ con $a = \min(a_1, \dots, a_n)$ y $b = \max(b_1, \dots, b_n)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, si no es así reordenamos los intervalos.

De esto se sigue que $a_1 = a < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \dots < b_{n-1} = a_n < b_n = b$, pues no puede haber huecos, ya que dijimos que la unión pertenece a \mathfrak{I} . Claramente $\ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = b - a = \ell((a, b])$ y, finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ell(I_k) &= \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \\ &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) \\ &= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \dots + (b_{n-1} - a_n) + b_n \\ &= b_n - a_1 = b - a \end{aligned}$$

$$\therefore \ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i). \quad \square$$

De acuerdo con el lema anterior podríamos extender la función ℓ a una clase más grande de subconjuntos de \mathbb{R} .

Sea $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{i=1}^n I_i, \text{ para ciertos } n \in \mathbb{N}, I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{I} \text{ dos a dos disjuntos}\}$, definimos $\ell : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ como $\ell(A) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$ si $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ con las mismas condiciones que pedimos.

Observación. Queda ver que ℓ está bien definida, i.e, no depende de la forma en que se escriba A como unión de intervalos.

Definición 6.6 (Álgebra). Dado un conjunto X , una clase $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ es un álgebra si:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
2. Si $E \in \mathcal{A} \rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.
3. Si $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$.

Lema 6.7. Dada una semiálgebra $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ la clase $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A = \bigcup_{i=1}^n S_i, S_j \in \mathcal{S} \ \forall j = 1, \dots, n, \text{ dos a dos disjuntos}\}$ es un álgebra de subconjuntos de X .

Además \mathcal{A} es la menor álgebra que contiene a \mathcal{S} y se la llama álgebra generada por \mathcal{S} .

Demostración. Veamos que \mathcal{A} es cerrada bajo la intersección finita.

Sean $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ dos a dos disjuntos y $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{S}$ dos a dos disjuntos.

Llamemos $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ y $F = \bigcup_{j=1}^m F_j \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} S \cap F &= \bigcup_{i=1}^n S_i \cap \bigcup_{j=1}^m F_j \\ &= \bigcup_{i=1}^n (S_i \cap \bigcup_{j=1}^m F_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (S_i \cap F_j) \end{aligned}$$

Luego $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, sea $S_{ij} = S_i \cap F_j \in \mathcal{S}$. Además $S_{ij} \cap S_{kl} = \emptyset$ si $(i, j) \neq (k, l)$. Luego $S \cap F \in \mathcal{A}$ pues $S \cap F$ es unión finita de elementos de \mathcal{S} dos a dos disjuntos.

Ahora veamos que se cumplen las propiedades de álgebra:

1. Se cumple pues \mathcal{S} es semiálgebra.
2. Dado $A \in \mathcal{A}$, sean $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^n S_i$, dos a dos disjuntos. Entonces $A^c = \bigcap_{i=1}^n S_i^c \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n$ como $S_i \in \mathcal{S}$ y \mathcal{S} es una semiálgebra $\exists B_1^i, B_2^i, \dots, B_n^i \in \mathcal{S}$ dos a dos disjuntos tal que $S_i^c = \bigcup_{j=1}^n B_j^i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n S_i^c \in \mathcal{A}$, pues ya probamos que la intersección finita es cerrada.
3. Queda como ejercicio.

□

Clase VII - 01/04

7.1 Generación de medida (continuación)

Habíamos visto que $\ell : \mathfrak{Y} \rightarrow [0, +\infty]$ es condicionalmente finitamente aditiva. Es decir que si $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{Y}$ son conjuntos dos a dos disjuntos tal que $\bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{Y} \Rightarrow \ell(\bigcup_{k=1}^n I_k) = \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$. Queda como ejercicio ver que:

1. Si $I, J \in \mathfrak{Y}$ y $I \subseteq J$ entonces $\ell(I) \leq \ell(J)$.
2. ℓ también es condicionalmente subaditiva i.e si $I_1, \dots, I_n \in \mathfrak{Y} : \bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{Y}$ entonces $\ell(\bigcup_{k=1}^n I_k) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$.

Veamos que $\ell : \mathfrak{Y} \rightarrow [0, +\infty]$ es condicionalmente σ -aditiva i.e si $(I_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathfrak{Y}$ es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tal que $\bigcup_{n \geq 1} I_n \in \mathfrak{Y}$ entonces $\ell(\bigcup_{n \geq 1} I_n) = \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$. Hay que considerar varios casos según la forma de $I := \bigcup_{n \geq 1} I_n$.

El primer caso es cuando $I = (a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $I_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y, como $I_n \subseteq I$, $I_n = (a_n, b_n]$ con $a \leq a_n < b_n \leq b$.

Primero veamos que $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \leq \ell(I)$, fijemos $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que I_1, \dots, I_m son tales que $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, si no es así los reordenamos (son finitos).

Como son dos a dos disjuntos y son subconjuntos de I con

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < \dots \leq a_m < b_m \leq b$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \ell(I_n) &= \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) \\ &= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \dots + (b_{m-1} - a_m) + b_m \\ &\leq b_m - a_1 \leq b - a = \ell(I) \end{aligned}$$

Pues cada $(b_1 - a_2), (b_2 - a_3), \dots, (b_{m-1} - a_m)$ son negativos.

Por lo tanto la suma parcial $\sum_{n=1}^m \ell(I_n) \leq \ell(I) \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \leq \ell(I)$.

Veamos ahora que $b - a = \ell(I) \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$. Basta probar que dado $a < a' < b \Rightarrow b - a' \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$.

Fijemos un $a' \in (a, b]$ y sea $\varepsilon > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$ sea $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2 \cdot j}$.

Definamos $U_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j]$ y notemos que $[a', b] \subseteq (a, b] = \bigcup_{n \geq 1} I_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n$.

Por el Teorema de Heine-Borel $[a', b]$ es compacto y entonces $\exists m \geq 1 : [a', b] = \bigcup_{j=1}^m U_j$.

Consideremos $I'_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j] \in \mathfrak{Y} \quad \forall j = 1, \dots, m$.

Luego $(a', b] \subseteq \bigcup_{j=1}^m I'_j \Rightarrow b - a' = \ell((a', b]) \leq \ell(\bigcup_{j=1}^m I'_j)$

Si $I'_j \cap (a', b] = \emptyset$ entonces lo podemos descartar para que $\bigcup_{j=1}^m I'_j$ sea conexa y, por lo tanto, pertenezca a \mathfrak{Y} .

Luego por ser condicionalmente subaditiva tenemos que

$$\begin{aligned}
 b - a' &\leq \ell\left(\bigcup_{j=1}^m I'_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \ell(I'_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m b_j + \varepsilon_j - a_j = \sum_{j=1}^m b_j - a_j + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^m \frac{1}{2 \cdot j} \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) + \varepsilon
 \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario resulta que $b - a' \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$.

Si tomamos $a' = a + \frac{1}{n} \Rightarrow b - a = \lim_{n \rightarrow +\infty} b - (a + \frac{1}{n}) \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$

El caso dos es cuando $I = (-\infty, b]$ con $b \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $\ell(I) = +\infty$. Veamos que $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) = +\infty$.

Si algún I_{n_0} tiene $\ell(I_{n_0}) = +\infty$ ya está.

Supongamos que $\ell(I_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$, luego $I_n = (a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Fijemos $k \in \mathbb{N} : b > -k$. Luego $[-k, b] \subseteq \bigcup_{n \geq 1} I_n = I \subseteq \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n + \frac{1}{2^n})$.

Como $[k, b]$ es compacto por Teorema de Heine-Borel tenemos que $\exists m \in \mathbb{N} : [-k, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^m (a_n, b_n + \frac{1}{2^n}) \in \mathfrak{J}$.

Por el mismo argumento de antes (si hay más de una componente conexa se la descarta)

$$\begin{aligned}
 b - (-k) &= \ell([-k, b]) \\
 &\leq \ell\left(\bigcup_{n=1}^m (a_n, b_n + \frac{1}{2^n})\right) \leq \sum_{n=1}^m \ell((a_n, b_n + \frac{1}{2^n})) \\
 &= \sum_{n=1}^m (b_n + \frac{1}{2^n} - a_n) = \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) + 1
 \end{aligned}$$

Luego $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \geq b + k - 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} : b > -k \therefore$ tenemos que $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) = +\infty$.

El tercer caso es cuando $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$ y el cuarto es cuando $I = \mathbb{R}$, ambos quedan como ejercicio.

7.2 Extensión de ℓ al álgebra

Recordemos que $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{i=1}^m I_i \text{ con } I_1, \dots, I_m \in \mathfrak{I} \text{ dos a dos disjuntos}\}$ y extendamos la función ℓ a $\ell : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ como $\ell(A) = \sum_{n=1}^m \ell(I_n)$ si $A \in \mathcal{F}$.

Proposición 7.1. ℓ está bien definida.

Demostración. Supongamos que $A = \bigcup_{k=1}^{m_1} I_k^1 = \bigcup_{j=1}^{m_2} I_j^2$ con los $I_k^1, I_j^2 \in \mathfrak{I}$ dos a dos disjuntos. Fijado el $k = 1, \dots, m_1$, $I_k^1 = \bigcup_{j=1}^{m_2} I_k^1 \cap I_j^2$ con $I_k^1 \cap I_j^2 \in \mathfrak{I}$ por ser \mathfrak{I} semiálgebra y dos a dos disjuntos. Como ℓ es condicionalmente finita aditiva en \mathfrak{I} se tiene que $\ell(I_k^1) = \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_k^1 \cap I_j^2)$.

Análogamente, fijado el $j = 1, \dots, m_2$ se tiene que $\ell(I_j^2) = \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1 \cap I_j^2)$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1) &= \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_k^1 \cap I_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1 \cap I_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_j^2) \end{aligned}$$

\therefore está bien definida. □

Definición 7.2. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra. Una medida sobre \mathcal{A} es una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $(E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tal que $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{A}$ entonces $\mu(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n)$.

Lema 7.3. La función $\ell : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida sobre el álgebra \mathcal{F} .

Demostración. Bosquejo de la demostración: $\ell(\emptyset) = 0$ es trivial. Para ver que ℓ es condicionalmente σ -aditiva en \mathcal{F} , podemos seguir la siguiente estrategia:

1. Probar que ℓ es finitamente aditiva en \mathcal{F} .
2. Probar que si $E, F \in \mathcal{F}$ y $E \subseteq F$ entonces $\ell(E) \leq \ell(F)$.
3. Probar que ℓ es finitamente subaditiva.
4. Sea $(E_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tales que $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathfrak{Y}$. Veamos que $\ell(E) = \sum_{n \geq 1} \ell(E_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k^n$ con $I_k^n \in \mathfrak{Y}$ dos a dos disjuntos. Luego, $\{I_k^n : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, m_n\}$ es una colección en \mathfrak{Y} de conjuntos dos a dos disjuntos y además podemos enumerarlos en una sucesión tal que $E'_i = I_i^1$ si $i = 1, \dots, m_1$, $E'_i = I_{i-m_1}^2$ si $i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$ y así sucesivamente.

Luego $\bigcup_{n \geq 1} E'_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^n = \bigcup_{n \geq 1} E_n = E \in \mathfrak{Y}$ como ℓ es condicionalmente σ -aditiva en \mathfrak{Y} resulta que

$$\begin{aligned} \ell(E) &= \sum_{n \geq 1} \ell(E'_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} \ell(I_k^n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \ell(E_n) \end{aligned}$$

5. Deducir la σ -aditividad condicional si $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{F}$, con I_1, \dots, I_n dos a dos disjuntos y $m \geq 2$. De nuevo $E_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k^n$ con $I_k^n \in \mathfrak{Y}$ dos a dos disjuntos. $I_i = I_i \cap E = I_i \cap \bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} (I_i \cap E_n) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{k=1}^{m_n} I_i \cap I_k^n$. Luego $\ell(I_i) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} \ell(I_i \cap I_k^n) \dots$

□

Parciales

- 8.1 Primer parcial - Primera fecha
- 8.2 Primer parcial - Segunda fecha
- 8.3 Segundo parcial - Primera fecha
- 8.4 Segundo parcial - Segunda fecha
- 8.5 Segundo parcial - Tercera fecha

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

- [1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue*. John Wiley and Sons, 1995.