Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

Bustos Jordi

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

This page is intentionally left blank.

Prefacio

> “Considero a cada hombre como un deudor
> de su profesión,
> y ya que de ella recibe sustento y provecho,
> así debe procurar,
> mediante el estudio,
> servirle de ayuda y ornato.”
>
> Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martinez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.
Estas notas se basan principalmente en la cursada del ’99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

Clase I - 06/03

1.1 Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. A P le asignamos una norma $\|P\| = \text{máx}\{l(J_k)\}$. $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ y a cada P le podemos asignar una etiqueta, que es un vector $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ tal que $\xi_k \in J_k$. Una partición etiquetada es un par (P, ξ); y le podemos asignar su suma de Riemann

$$S(P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) l(J_k)$$

Definición 1.1 (Integrable Riemann). Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon \text{ si } (P, \xi) \text{ es tal que } \|P\| \leq \delta$$

Ejercicio: Probar que si f es integrable Riemann entonces es acotada.

Si f es acotada, dada una partición P del dominio de f, para cada $i \in 1, \cdots, n$ definimos:

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} \text{ y } m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in J_i\}$$

Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a P como:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k l(J_k) \text{ y } s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k l(J_k)$$

Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\} \text{ y}$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \text{ínf}\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$$

Proposición 1.2. Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f es integrable Riemann $\iff$ es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

Observación. f es integrable Riemann si:

1. f es continua.

2. f es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.

3. f es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.

- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.

- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

Ejemplo. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ f no es integrable Riemann.

Demostración. Llamemos $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. A es numerable entonces $\exists \sigma : \mathbb{N} \to A$ biyectiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$, $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Ahora para cada $n \geq 1$ consideramos: $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus A_n \end{cases}$$

f_n es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de A_n y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que $f_n \to f$. Sea $x \in [0, 1]$

1. Si $x \in A$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \in A_{n_0} \quad n_0 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow (\forall n > n_0) \quad x \in A_n \\ &\Rightarrow (\forall n > n_0) \quad f_n(x) = 1 \\ &\Rightarrow f_n(x) \to f(x) = 1 \end{aligned}$$

2. Si $x \notin A \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x \notin A_n \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) \to f(x) = 0$.

$\therefore f_n \to f$. Si conocieramos $\ell(A)$ y $\ell([0, 1] \setminus A)$ podríamos definir $\int f = 1 \times \ell(A) + 0 \times \ell([0, 1] \setminus A)$. $\square$

1.2 Espacios Medibles

Dado X un conjunto arbitrario no vacío. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X.

Definición 1.3 (σ-álgebra)**.** Una familia $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra si verifica:

1. $\varnothing, X \in \mathfrak{X}$.
2. Si $A \in X \Rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Definición 1.4 (Conjunto Medible)**.** Si $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ el par $(X, \mathfrak{X})$ es un espacio medible. A cada $A \in \mathfrak{X}$ lo llamaremos conjunto $\mathfrak{X}$-medible.

Observación. Si $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de X y $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{X}$ entonces $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{X}$. Idea de la demostración: Sea $(B_m)_{m\geq 1}$ la sucesión en $\mathfrak{X}$ definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \varnothing & m > n \end{cases}$$

Observación. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de una σ-álgebra $\mathfrak{X}$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Demostración. $\bigcup_{n\geq 1} A_n^c \in \mathfrak{X} \Rightarrow (\bigcap_{n\geq 1} A_n^c)^c \in \mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$. □

Ejemplo (σ-álgebras)**.** Dado X cualquiera no vacío.

1. $\mathfrak{X} = \{\varnothing, X\}$ es una σ-álgebra.
2. $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra.
3. Sea $A \neq \varnothing \subset X$. Luego $\mathfrak{X} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$ es una σ-álgebra.
4. Supongamos que X no es numerable y sea

$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable ó } A^c \text{ es numerable}\}$$

es una σ-álgebra. Demostración ejercicio y además $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(X)$.

Lema 1.5. Dado un conjunto X, sean $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ dos σ-álgebras de X. Entonces $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ es una σ-álgebra de X. Más aún si $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ es una familia de σ-álgebras de X entonces $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$ es una σ-álgebra de X.

Demostración. Queda como ejercicio. □

Proposición 1.6 (σ-álgebra generada por A). Dado un conjunto X, sea $A \neq \varnothing \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \exists$ σ-álgebra $\sigma(A)$ que verifica:

1. $A \subseteq \sigma(A)$.
2. $\mathfrak{X}$ es σ-álgebra de X tal que $A \subseteq X \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathfrak{X}$.
3. $\sigma(A)$ es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

Demostración. Sea $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C}$ es σ-álgebra de X y $A \subseteq \mathcal{C}\} \neq \varnothing$ pues $\mathcal{P}(X) \in \Delta$. Llamemos $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathcal{C}\in\Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$. Veamos que $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de X.

1. $\varnothing, X \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta) \Rightarrow \varnothing, X \in \mathfrak{X}$.
2. Sea $A \in \mathfrak{X} \Rightarrow (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta) \Rightarrow A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathfrak{X}$ el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore$ $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra $\overline{\mathfrak{X}}$ σ-álgebra que verifica las dos condiciones, por la propiedad uno y dos podemos deducir que $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}$ y $\overline{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$. □

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ y sea $A = \{(a,\ b) : a,\ b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. La σ-álgebra generada por A es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. A los conjuntos de $\mathcal{B}$ los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si $\overline{A} = \{(a,\ +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \sigma(\overline{A}) = \mathcal{B}$.

Demostración.

- Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) = \bigcup_{n\geq 1}(a,\ a+n) \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \mathcal{B}$. Luego $\sigma(\overline{A}) \subseteq \mathcal{B}$. Por ser $\sigma(\overline{A})$ la mínima σ-álgebra que contiene a $\overline{A}$.
- Dado $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sabemos que $(a,\ b] = (a,\ +\infty) \cap (b,\ +\infty)^c \in \sigma(\overline{A})$. Luego $(a,\ b) = \bigcup_{n\geq 1}(a,\ b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\overline{A})$. Por lo que $A \subset \sigma(\overline{A})$. $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\overline{A})$. Por ser $\sigma(A)$ la mínima σ-álgebra que contiene a A.

□

Ejercicio demostrar que la σ-álgebra de Borel está generada también por las siguientes familias:

1. $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
2. $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
3. $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
4. $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
6. $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Luego, se puede ver que $\{a\} = \bigcap_{n\geq 1}[a, a - \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$.

Clase II - 11/03

2.1 La σ-álgebra de Borel

A $\mathbb{R}^n$ lo pensamos dotado de la distancia euclídea. Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ son dos puntos de $\mathbb{R}^n$, la distancia entre ellos es

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Consideramos la topología usual de $\mathbb{R}^n$ notada τ^n al conjunto de todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. Dados $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i (\forall i = 1, \cdots, n)$ Definimos el intervalo abierto (a, b) como

$$\begin{aligned}(a, b) &= \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \\ &= \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, (\forall i = 1, \cdots, n)\}\end{aligned}$$

Definición 2.2 (ε-cubo)**.** Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y $\varepsilon > 0$ el ε-cubo centrado en x es el conjunto definido por

$$C(x, \varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Proposición 2.3. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto e $y \in C(x, \varepsilon)$ entonces

1. $(\forall x \in V) \quad (\exists \varepsilon > 0) : C(x, \varepsilon) \subseteq V$.
2. $x \in C(y, \varepsilon)$.
3. $C(x, \varepsilon) \subseteq C(y, 2 \cdot \varepsilon)$.

Definición 2.4 (σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$)**.** Es la σ-álgebra generada por:

$$\mathcal{A} = \{(a,\, b) : a,\, b \in \mathbb{R}^n : a_i < b_i,\, i = 1,\, \cdots,\, n\}$$

Lo notamos $\mathcal{B}^n$.

Queremos ver que efectivamente $\tau_n \subseteq \mathcal{B}^n$. Consideremos la clase $\beta_n = \{C(q,\, \frac{1}{m}) : q \in \mathbb{Q}^n,\, m \in \mathbb{N}\}$. β_n es numerable pues el conjunto de índices que enumera a β_n es

$$\underbrace{\mathbb{Q}^n \times \cdots \times \mathbb{Q}^n}_{n \text{ veces}} \times \mathbb{N}$$

que es numerable.

Proposición 2.5. Dado un abierto no vacío $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existe una familia $\mathcal{A}_V \subseteq \mathcal{B}_n$ tal que $V = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

Demostración. Sabemos que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$. Como V es abierto y no vacío entonces $V \cap \mathbb{Q}^n \neq \varnothing$. Luego $B(x,\, \varepsilon) \subseteq V$ y $B(x,\, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \varnothing$. Por lo tanto $B(x,\, \varepsilon) \subset V \cap \mathbb{Q}^n$.
Para cada $q \in V \cap \mathbb{Q}^n$ defino $m_q = \min\{m \in \mathbb{N} : C(q, \frac{1}{m})\} \subseteq V$. Llamemos $\mathcal{A}_V = \{C(q,\, \frac{1}{m_q}) : q \in V \cap \mathbb{Q}^n\}$ la cual es una familia numerable.
Veamos que $\bigcup_{q \in V \cap \mathbb{Q}^n} C(q,\, \frac{1}{m_q}) = V$.

- $\subseteq$ es trivial.
- $\supseteq$ Dado $x \in V$, $\exists m \in \mathbb{N} : C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$. Consideremos $C(x,\, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$ que es un abierto no vacío.

  Resulta que $C(x,\, \frac{1}{2m}) \cap \mathbb{Q}^n \neq \varnothing$. Sea $q \in C(x,\, \frac{1}{2m}) \subseteq V \cap \mathbb{Q}^n$

  $\Rightarrow x \in C(q,\, \frac{1}{2m})$, en particular $m_q \leq 2m$, pues como $x \in C(q,\, \frac{1}{2m})$ implica que $C(q,\, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x,\, \frac{2}{2m}) \subseteq V$.

  $\Rightarrow x \in C(q,\, \frac{1}{2m}) \subseteq C(q,\, \frac{1}{m_q}) \therefore x \in \bigcup_{q \in \mathcal{A}_v} C(q, \frac{1}{m_q}) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

$\square$

Corolario 2.6. La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ coincide con la $\sigma(\tau_n)$. En particular:

- Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto Boreliano.
- Todo conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ es un Boreliano por ser complemento de un abierto.
- Por último, todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ es un Boreliano. (Dado $x \in \mathbb{R}^n, \{x\} = \bigcap_{n \geq 1} C(x, \frac{1}{n})$).

Proposición 2.7. Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{X})$ y sea $X_0 \subseteq \mathfrak{X}$, entonces

1. $\mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A = E \cap X_0$ para algún $E \in \mathfrak{X}\}$ es σ-álgebra de X_0. En particular, si $X_0 \in \mathfrak{X} \Rightarrow \mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A \in \mathfrak{X}\}$, la demostración queda como ejercicio.

2. Si $\mathcal{A}$ es una familia en partes de X tal que $\mathfrak{X} = \sigma(\mathcal{A})$ entonces $\mathfrak{X}_0 = \sigma(\mathcal{A}_0)$ donde $\mathcal{A}_0 = \{A_0 \subseteq X_0 : A_0 = A \cap X_0$ para algún $A \in \mathcal{A}\}$.

   Demostración. Veamos primero que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Si $A_0 \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : A_0 = \mathcal{A} \cap X_0$. Como $A \in \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$ resulta que $A_0 = A \cap X_0 \in \mathfrak{X}_0$. Entonces $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathfrak{X}_0$.

   Ahora veamos que $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. Consideramos la clase $\mathcal{G} = \{E \subseteq X : E \cap X_0 \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}$ y veamos que $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{G}$. Alcanza con probar que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$. Pues si $A \in \mathcal{A}$, $A \cap X_0 \in \mathcal{A}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \Rightarrow A \in \mathcal{G}$. Si probamos que G es una σ-álgebra, tendríamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$. Luego $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. □

Ejemplo. Si $\beta \in B_n$ entonces la σ-álgebra de Borel de β, $B_n(\beta) = \{A \subseteq \beta : A \in B_n\}$ está generado por la familia de conjuntos de la forma $(a, b) \cap \beta$ para a, $b \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i \quad (\forall i = 1, \cdots, n)$.

2.2 Recta real extendida

Definición 2.8 (Recta real extendida)**.** Definimos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Con las siguientes convenciones:

1. Dado $r \in \mathbb{R}$ tenemos que $-\infty < r < +\infty$.

2. $\pm\infty + \pm\infty = \pm\infty$ y $\pm\infty + \mp\infty$ no está definido.

3. $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$ y $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$ Si $r \in \mathbb{R}$ entonces $r \cdot +\infty = +\infty$ si $r > 0$ y $r \cdot +\infty = -\infty$. si $r < 0$.

4. $0 \cdot \pm\infty = 0 = \pm\infty \cdot 0$.

5. Tampoco definimos cocientes entre infinitos o de la forma $\frac{r}{\pm\infty}$.

Observación. El producto no va a ser continuo en la recta real extendida. Si $a_n = +\infty \cdot \frac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N})$ entonces $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Pero $+\infty \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = +\infty \cdot 0 = 0$.

Notemos que si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\sup(A) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, sea $\varnothing \neq L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x_{n_k} \to x\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.9. $\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup(L)$ y $\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf(L)$.Ambos pertenecen a L. Además, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\alpha_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ la sucesión α_m es decreciente y $\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf\{\alpha_m\} = \inf_{m \geq 1}(\sup_{n \geq m}\{x_n\})$.
Análogamente $\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup\{\alpha_m\} = \sup_{m \geq 1}(\inf_{n \geq m}\{x_n\})$.

Proposición 2.10. Propiedades de límite superior e inferior:

- $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$
- $\liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n$

Observación. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ y $x \in \overline{\mathbb{R}}, x_n \to x \iff \limsup x_n = \liminf x_n = x$.

Veamos como extender $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.11 (Borel extendida)**.** Para cada $E \in \mathcal{B}$, sean $E_1 = E \cup \{+\infty\}$, $E_2 = E \cup \{-\infty\}$ y $E_3 = E \cup \{+\infty, -\infty\}$. Consideremos $\overline{\mathcal{B}} = \{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E : E \in \mathcal{B}\} = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\})$. Probar que $\overline{\mathcal{B}}$ es σ-álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$ se deja como ejercicio.

Clase III - 13/03

3.1 Funciones medibles

Proposición 3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f es continua si $f^{-1}(V)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$ ($\forall V$ abierto en τ_1).

En lo que sigue vamos a considerar un espacio medible fijo de la forma $(X, \mathfrak{X})$.
Notación: Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos:

$$\{f > \alpha\} := \{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$$

Definición 3.2 (Función medible)**.** Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es $\mathfrak{X}$-medible (σ-medible) si $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Lema 3.3. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ una función, son equivalentes:

1. f es $\mathfrak{X}$-medible.
2. $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.
3. $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.
4. $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

- $(1) \iff (3)$: $\{f \leq \alpha\} = \{f > \alpha\}^c \in \mathfrak{X}$.
- $(2) \iff (4)$ Análogo.
- $(1) \iff (2)$: Supongamos que f es $\mathfrak{X}$-medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{X}$.

$$\begin{aligned} x \in \{f \geq \alpha\} &\iff f(x) \geq \alpha > \alpha - \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ x \in \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} &\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \{f \geq \alpha\} &= \bigcap_{n \geq 1} \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

Para la vuelta supongamos que vale (2). Quiero ver que $\{f > \gamma\} \in \mathfrak{X}$. Notemos que

$$\{f > \gamma\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\}$$

$$x \in \{f > \gamma\} \iff f(x) > \gamma \iff \exists n_x \in \mathbb{N} : f(x) > \gamma + \frac{1}{n_x}$$

Luego $\bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \gamma + \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{X}$.

□

Ejemplo. Toda función constante es medible. $f : X \to \mathbb{R} : f(x) = c \quad (\forall x \in X)$.

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} \varnothing & \alpha \geq c \\ X & \alpha < c \end{cases}$$

□

Ejemplo. Dado $E \subseteq X$ consideremos la función característica de E. Como $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Demostración. Consideremos $E = [0,1]$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\{\chi_E > \alpha\} = \begin{cases} \varnothing & \alpha \geq 1 \\ E & 0 \leq \alpha < 1 \\ X & \alpha < 0 \end{cases}$$

Luego χ_E es medible $\iff E \in \mathfrak{X}$. $\square$

Ejemplo. Si $X = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B} \Rightarrow$ toda función continua es medible con respecto a la σ-álgebra de Borel.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}, \mathfrak{X} = \mathcal{B}_n$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona (creciente) entonces es $\mathcal{B}$-medible.

Ejercicio: $f : X \to \mathbb{R}$ es $\mathfrak{X}$-medible $\iff f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$.

Lema 3.4. Sean f, $g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles, $c \in \mathbb{R}$ entonces $c \cdot f$, f^2, $f + g$, $|f|$, $f \cdot g$, son $\mathfrak{X}$-medibles. $f^2 = f(x) \cdot f(x)$.

Demostración. Veamos que f^2 es $\mathfrak{X}$-medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\{f^2 > \alpha\} \in \mathfrak{X}$
Si $\alpha < 0 \Rightarrow \{f^2 > \alpha\} = X$.
Si $\alpha \geq 0 \Rightarrow$

$$\{f^2 > \alpha\} = \{x \in X : f(x) \cdot f(x) > \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}\}$$
$$\{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f > \sqrt{\alpha}\} \in \mathfrak{X}$$

$\therefore f^2$ es $\mathfrak{X}$-medible.
Veamos ahora que $f + g$ es $\mathfrak{X}$-medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que

$$\{f + g > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Para $x \in X$ tenemos que:

$(f+g)(x) > \alpha \iff f(x) + g(x) > \alpha \iff f(x) > r \wedge g(x) > \alpha - r$ para algún $r \in \mathbb{Q}$

Entonces $\{f + g > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}}(\{f > r\} \cap \{g > \alpha - r\}) \in \mathfrak{X}$ por ser unión numerable
$\therefore f + g$ es $\mathfrak{X}$-medible.
Por último veamos que $f \cdot g$ es $\mathfrak{X}$-medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ quiero ver que

$$\{f \cdot g > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Sabemos que:

$$(f + g)^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible} \Rightarrow f^2 + 2 \cdot f \cdot g + g^2 \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible}$$

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f + g)^2 - f^2 - g^2\right) \text{ es } \mathfrak{X}\text{-medible}$$

$\square$

3.2 Funciones medibles en la recta extendida

Definición 3.5. Dada $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ diremos que f es $\mathfrak{X}$-medible si

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) = \{f > \alpha\} \in \mathfrak{X} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

A la clase de las funciones (a valores en la recta extendida) $\mathfrak{X}$-medibles la denotaremos por $M(X, \mathfrak{X})$.

Observación. Si $f : X \to \mathbb{R} \Rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X})$.

Observación. Si

$$f \in M(X, \mathfrak{X}) \Rightarrow \{f = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f > n\} \in \mathfrak{X}$$

Además,

$$\{f = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{f < -n\} \in \mathfrak{X}$$

Lema 3.6. Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ consideremos $A_f = \{f = +\infty\}$, $B_f = \{f = -\infty\}$ y

$$\hat{f} = \begin{cases} f & x \in X \setminus (A_f \cup B) \\ 0 & x \in A_f \\ 0 & x \in B_f \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff A_f, B_f \in \mathfrak{X}$ y $\hat{f}$ es $\mathfrak{X}$-medible.

Demostración. Supongamos primero que $f \in M(X, \mathfrak{X})$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, ya vimos que $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$. Veamos que $\hat{f}$ es $\mathfrak{X}$-medible.
Quiero ver que $\{\hat{f} > \alpha\} \in \mathfrak{X}$. Si $\alpha \geq 0$ entonces

$$\{\hat{f} > \alpha\} = \{f > \alpha\} - A_f = \{f > \alpha\} \cap A_f^C \in \mathfrak{X}$$

Si $\alpha < 0$ entonces

$$\{\hat{f} < \alpha\} = \{f > \alpha\} \cup \{\hat{f} = 0\} = \{f > \alpha\} \cup (A_f \cup B_f) = \{f > \alpha\} \cup B_f \in \mathfrak{X}$$

Luego $\hat{f} \in \mathfrak{X}$. Supongamos ahora que $A_f, B_f \in \mathfrak{X}$ y $\hat{f}$ es $\mathfrak{X}$-medible. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} > \alpha\} \cup A_f \in \mathfrak{X}$$

Si $\alpha < 0$ entonces

$$\{f > \alpha\} = \{\hat{f} < \alpha\} \setminus B_f = \{\hat{f} < \alpha\} \cap B_f^c \in \mathfrak{X}$$

$\square$

Corolario 3.7. Si $f,\ g \in M(X,\ \mathfrak{X})$ y $c \in \mathbb{R}$. Las funciones $c \cdot f,\ f^2,\ |f|,\ f \cdot g \in M(X,\ \mathfrak{X})$.

Observación. Dados $f,\ g \in M(X,\ \mathfrak{X})$ consideremos los conjuntos

- $E_1 = \{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\} \in \mathfrak{X}$.
- $E_2 = \{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\} \in \mathfrak{X}$.

Notemos que no está definida la suma $f + g$ en $E_1 \cup E_2$. Definimos

$$f + g = \begin{cases} f + g & x \in X \setminus (E_1 \cup E_2) \\ 0 & x \in E_1 \cup E_2 \end{cases}$$

La demostración de que $f + g \in M(X,\ \mathfrak{X})$ se deja como ejercicio.

Lema 3.8. Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ en $M(X,\ \mathfrak{X})$ sean f, f^*, F, F^* definidas por:

$$f(x) = \inf_{n\geq 1} f_n(x) \quad f^*(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$
$$F(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x) \quad F^*(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

Entonces $f, f^*, F, F^* \in M(X,\ \mathfrak{X})$.

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\{F > \alpha\} = \bigcup_{n\geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

$$\{f > \alpha\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n > \alpha\} \in \mathfrak{X}$$

Veamos $F^* \in M(X,\ \mathfrak{X})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino $h_n = \sup_{m\geq n} f_m \in \mathfrak{X}$. Por ser subsucesión de funciones medibles. Luego

$$F^* = \inf_{n\geq 1}(\sup_{m\geq n} f_m) \in \mathfrak{X}$$

Análogamente para f^*. □

Corolario 3.9. Dada $(f_n)_{n\geq 1} : f_n \in M(X,\ \mathfrak{X}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Supongamos que la sucesión converge puntualmente a f entonces $f \in M(X,\ \mathfrak{X})$.

Demostración. Notemos que $f = \liminf f_n = \limsup f_n$ y aplicamos el lema anterior. □

Clase IV - 20/03

4.1 Parte negativa y positiva

Definición 4.1 (Función truncada)**.** Dada una función $f \in M(X, \mathfrak{X})$, para cada $n \geq 1$ definimos la función truncada a $[-n, n]$ como la $f_n : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \in [-n, n] \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n \end{cases}$$

Que converge puntualmente a f.

Notemos que f_n es medible para todo $n \geq 1$. Pues

$$\{f_n > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{si } \alpha \leq -n \\ \{f < \alpha\} & \text{si } \alpha \in [-n, n] \\ \varnothing & \text{si } \alpha \geq n \end{cases}$$

Veamos una forma alternativa de probar el teorema de la clase anterior. Si $f, g \in M(X, \mathfrak{X})$ entonces $f + g : X \to \mathbb{R} \in M(X, \mathfrak{X})$
Para cada $n \geq 1$ consideramos las funciones truncadas $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$. Tenemos que $f_n + g_n : X \to \mathbb{R}$ es $\mathfrak{X}$-medible. Queremos ver que la convergencia es puntual $\forall x \in X$.
Si $x \in E_1 = \{f = +\infty, g = -\infty\}$. Para cada $n \geq 1$, $f_n(x) = n$ y $g_n(x) = -n$ entonces $(f_n + g_n)(x) = f_n(x) + g_n(x) = 0 \quad (\forall n)$. Luego $(f_n + g_n)(x) \to 0 = f(x)$ si $x \in E_1$. Para $x \in E_2$ el desarollo es análogo.
Si $x \in (E_1 \cup E_2)^c$ entonces

1. $f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) \in \mathbb{R}$ y $g(x) = + - \infty$.
3. $f(x) = + - \infty$ y $g(x) \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) = g(x) = + - \infty$.

Luego $(f_n + g_n)(x) \to (f + g)(x) \quad \forall x \in (E_1 \cup E_2)^c$. Pues $f_n(x) \to f(x)$ y $g_n(x) \to g(x)$.

Definición 4.2. Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definimos la parte positiva $f^+ : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y la parte negativa $f^- : X \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Observación. $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Observación. Si $(X, \mathfrak{X})$ es un espacio medible $f \in M(X, \mathfrak{X}) \iff f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{X}) = \{f \in M(X, \mathfrak{X}) : f \geq 0\}$ Notemos que $f^+ = \sup(\{f, 0\})$ y $f^- = \sup(\{-f, 0\})$. Utilizando el teorema anterior vemos que si $f^+, f^- \in M(X, \mathfrak{X})$ entonces $f = f^+ + (-f^-) \in M(X, \mathfrak{X})$.

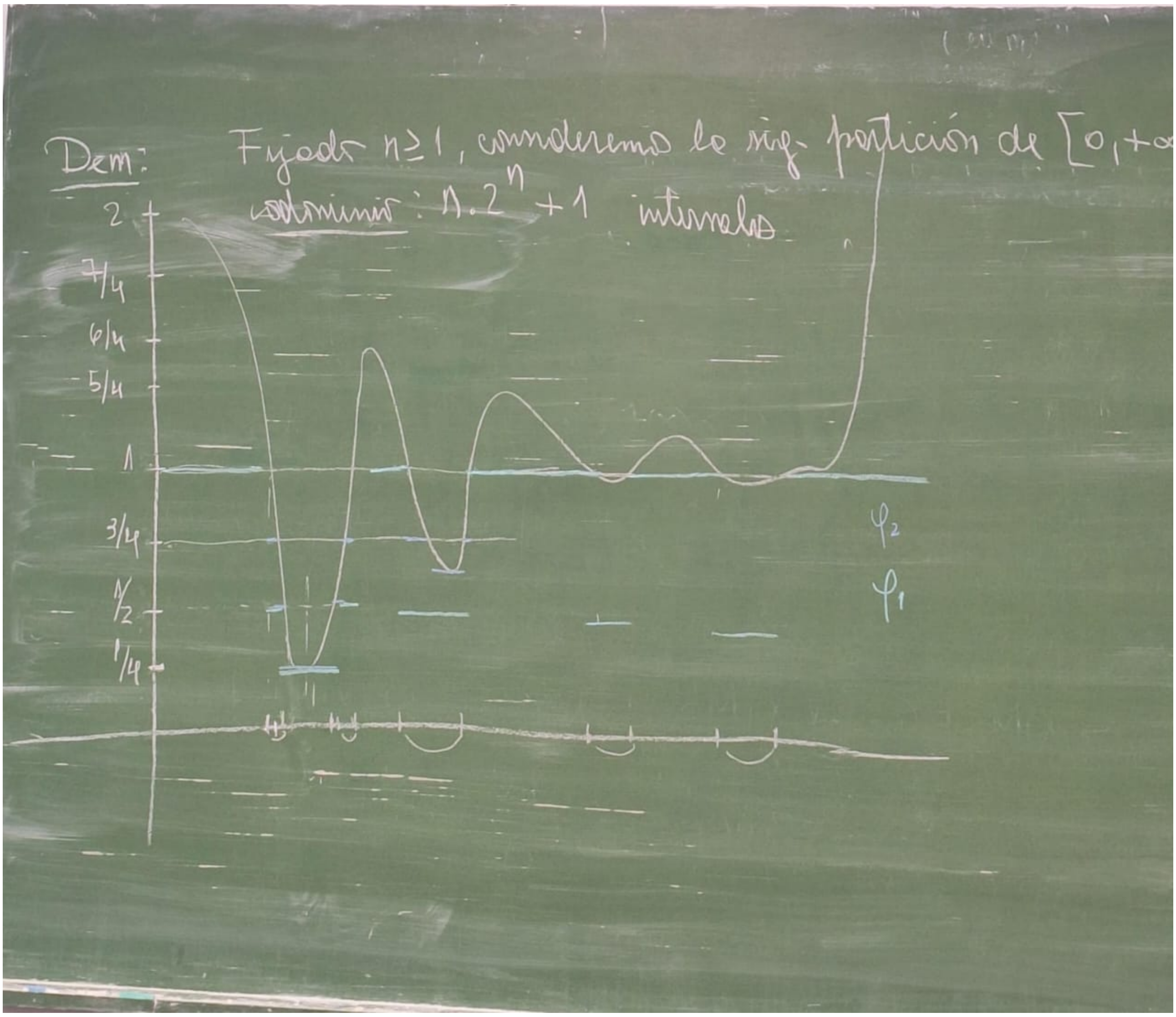
Observación. Si $B_f = \{f = +\infty\}$,

$$f^+ = \chi_{B_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (f + |f|)$$

$$f^- = \chi_{A_f^c} \cdot \frac{1}{2} \cdot (|f| - f)$$

Teorema 4.3. Si $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$ entonces $\exists (\phi_n)_{n \geq 1} \in M^+(X, \mathfrak{X})$ tal que

1. $\phi_n \leq \phi_{n+1} \quad \forall n \geq 1$.
2. $f(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X$.
3. Para cada $n \geq 1$ se tiene que $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ toma una cantidad finita de valores.



Luego fijado el $n \in \mathbb{N}$ tenemos los intervalos

$$[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \cdots, [\frac{2^{n-1}}{2^n}, \frac{2^n}{2^n}), [\frac{2^n}{2^n}, \frac{2^n+1}{2^n}), \cdots, [\frac{n\cdot 2^n - 1}{2^n}, \frac{n \cdot 2^n}{2^n}), [n, +\infty]$$

Para cada $k = 0, \cdots, n \cdot 2^n - 1$ definimos el conjunto

$$\begin{aligned} E_{k,n} &= f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})) \in \mathfrak{X} \\ &= \{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} \end{aligned}$$

Sea

$$E_{n\cdot 2^n, n} = f^{-1}([n, +\infty]) = \{x \in X : f(x) \geq n\} \in \mathfrak{X}$$

Notemos que $E_{k,n} \in \mathfrak{X} \quad \forall k$, $\bigcup_{k=0}^{n\cdot 2^n} E_{k,n} = f^{-1}([0, +\infty]) = X$ son disjuntos dos a dos.
Luego definimos $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{E_{n,k}} = \frac{k}{2^n}$ si $x \in E_{k,n}$, cada x pertenece a un único $E_{k,n}$ por construcción.
Entonces $\phi_n \in M^+(X, \mathfrak{X})$.

Veamos que $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, dado $x \in X$ supongamos que $f(x) < n$ entonces $\exists! k = 0, \cdots, n \cdot 2^n - 1 :$ $x \in E_{k,n}$ (pues en el nivel n, son disjuntos).
Queda como ejercicio probar que $E_{k,n} = E_{2k,n+1} \cup E_{2k+1,n+1}$.
Luego

$$\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} & \text{si } x \in E_{2k,n+1} \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x \in E_{2k+1,n+1} \end{cases}$$

$\therefore \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$.
Por otro lado si $f(x) > n \Rightarrow x \in E_{n \cdot 2^n, n}$ entonces $\phi_n(x) = n$.
Como ahora descomponemos $[n, +\infty]$ en $[n, n+1] \cup [n+1, +\infty]$ para ϕ_{n+1} lo tenemos como

$$\bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1} [\frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}}, \frac{n \cdot 2^{n+1+k+1}}{2^{n+1}}) \cup [n+1, +\infty]$$

Si $x \in [n+1, +\infty]$ ya está pues $\phi_{n+1}(x) = n + 1 \geq n = \phi_n(x)$.
Luego $\exists! k = 0, \cdots, n \cdot 2^{n+1} : x \in E_{n \cdot 2^{n+1} + k, n+1}$ y en ese caso $\phi_{n+1}(x) = \frac{n \cdot 2^{n+1} + k}{2^{n+1}} = n + \frac{k}{2^{n+1}} \geq$ $n = \phi_n(x)$. Por lo tanto $\phi_n \leq \phi_{n+1}$.
Por úlitmo veamos que $f(x) = lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) \quad \forall x \in X$.

1. $f(x) = +\infty$ luego $\forall n \geq 1 \quad \phi_n(x) = n \to +\infty$.
2. $f(x) \in [0, +\infty)$. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0$ luego $\forall n \geq n_0 \quad \exists k = 0, \cdots, n \cdot 2^n - 1 :$ $x \in E_{k,n}$. Entonces $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \iff 0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$.

$\therefore \phi_n(x) \to f(x)$.

Observación. Si f está acotada (superiormente) entonces $\phi_n \rightrightarrows f$.

4.2 Funciones medibles entre espacios medibles

Definición 4.4. Dados espacios medibles $(X, \mathfrak{X})$ y $(Y, \mathfrak{Y})$ una función $f : X \to Y$ es $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-medible si $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \mathfrak{Y}$.

Ejemplo. Si $(X, \mathfrak{X})$ es un espacio medible:

1. $f : X \to \mathbb{R}$ es $\mathfrak{X}$-medible $\iff$ f es $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$-medible.
2. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathfrak{X}$-medible $\iff$ f es $(\mathfrak{X}, \overline{\mathcal{B}})$-medible.
3. $f : X \to \mathbb{R}^n$, sean $f_j : X \to \mathbb{R}$ las componentes de f entonces f es $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$-medible si y sólo si f_j lo es $\forall j$.

Proposición 4.5. Dados un espacio medible $(X, \mathfrak{X})$ y un conjunto Y, sea $f : X \to Y$ una función. Si $\mathcal{A} \subseteq P(Y) : f^{-1}(A) \in \mathfrak{X} \quad \forall A \in \mathcal{A}$ entonces f es $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$-medible.

Demostración. Sea $Z = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{X}\} \supseteq \mathcal{A}$. Es fácil ver que Z es σ-álgebra entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq Z$. Es decir que $f^{-1}(E) \in \mathfrak{X} \quad \forall E \in \sigma(\mathcal{A})$. Luego f es $(\mathfrak{X}, \sigma(\mathcal{A}))$-medible. □

Proposición 4.6. Sea $(X, \mathfrak{X})$, $(Y, \mathfrak{Y})$, $(Z, \mathfrak{Z})$ espacios medibles y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-medible y $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$-medible respectivamente. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$-medible.

Demostración. Fijado $E \in \mathfrak{Z}$ tenemos que $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathfrak{X}$ pues f y g son medibles. □

Clase V - 25/03

5.1 Medidas

5.1.1. Motivación

Sea $\phi : X \to [0, +\infty]$ con $\text{Im}(\phi) = \{y_1, \cdots, y_m\}$. Si $\phi^{-1}(y_i) \in \mathfrak{X}$ y conocemos $\mu(\phi^{-1}(y_i)) \in [0, +\infty]$ (la medida de cada conjunto) podemos definir

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \mu(\phi^{-1}(y_i))$$

Si $f : X \to [0, +\infty]$ es $\mathfrak{X}$-medible, $\exists$ una sucesión $(\phi_n)_{n \geq 1}$ con funciones así tal que $\phi_n \to f$. Entonces podremos definir

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \phi_n \, d\mu$$

Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{X})$, vamos a considerar ciertas funciones $\mu : \mathfrak{X} \to [0, +\infty]$: el valor $\mu(E)$ para cada $E \in \mathfrak{X}$ esté motivado por las nociones de longitud, área, volumen, probabilidad, masa, etc.

5.1.2. Series de términos no negativos

Proposición 5.1. Sea $(a_n)_{n\geq 1} \subset [0,+\infty] \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en $[0,+\infty]$ y $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$
Además:

1. Si $(I_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ $(I_n \subseteq I_{n+1} \quad \forall n \geq 1)$ entonces $\bigcup_{n\geq 1} I_n = \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n = \sup\{\sum_{m\in I_n} a_m : n \geq 1\}$.
2. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una permutación de $\mathbb{N}$ entonces $\sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)} = \sum_{n\geq 1} a_n$.
3. Dado un conjunto numerable I, sea $(a_i)_{i\in I}$ una sucesión en $[0,+\infty]$ y $f : \mathbb{N} \to I$ es una biyección, consideremos la sucesión $(b_n)_{n\geq 1} = (a_{f(n)})_{n\geq 1}$, entonces podemos definir a

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n\geq 1} b_{f(n)}$$

Esto está bien definido pues si $g : \mathbb{N} \to I$ es otra biyección tal que $c_n = a_{g(n)}$

$$\sum_{n\geq 1} c_n = \sum_{n\geq 1} a_{g(n)}$$
$$\sum_{n\geq 1} a_{\sigma(f(n))} = \sum_{n\geq 1} b_{\sigma(n)} = \sum_{n\geq 1} b_n$$

En particular si $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $[0,+\infty]$ podemos definir

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{n,m} &= \sum_{n\geq 1}(\sum_{m\geq 1} a_{n,m}) \\ &= \sum_{m\geq 1}(\sum_{n\geq 1} a_{n,m})\end{aligned}$$

5.1.3. Definición de medida

Definición 5.2 (Medida). Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{X})$, una medida en X es una función $\mu : \mathfrak{X} \to [0,+\infty]$ tal que:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. (σ-aditividad) Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{X}$, dos a dos disjuntos $\Rightarrow$

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$$

Observación. Si $A_1, \cdots A_n \in \mathfrak{X}$ son conjuntos dos a dos disjuntos entonces

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Esto se deduce de la propiedad de σ-aditividad, pues construimos la sucesión $(E_n)_{n\geq 1}$ como $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \cdots$.

Definición 5.3 (Medida finita)**.** Una medida es finita si $\mu(E) < +\infty \quad \forall E \in \mathfrak{X}$.

Definición 5.4 (Medida σ-finita)**.** Una medida es σ-finita si $\exists (E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{X}$ tal que: $X = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ y $\mu(E_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$.

Ejemplo. Si $X \neq \varnothing$, $\mathfrak{X} = P(X)$ y tomamos $\mu : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que $\mu(E) = 0 \quad \forall E \in P(X)$ y también es medida si la definimos como

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \varnothing \\ +\infty & \text{si } E \neq \varnothing \end{cases}$$

Luego no es finita, ni σ-finita.

Ejemplo. Sea $(X, \mathfrak{X})$ un espacio medible y fijemos $x_0 \in X \neq \varnothing$. Sea $\mu : \mathfrak{X} \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \notin E \\ 1 & \text{si } x_0 \in E \end{cases}$$

Es la medida puntual con masa uno y la notamos δ_{x_0} (δ de Dirac). Es una medida finita y es σ-aditiva pues si construimos una sucesión E_n de conjuntos disjuntos dos a dos $\mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n) = 1$. Pues un único conjunto E_n puede contener a x_0.

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{X} = P(\mathbb{N})$ y la medida de conteo $\mu : P(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ es infinito} \\ \operatorname{card}(E) & \text{si } E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \end{cases}$$

Ejercicio, ver que es σ-aditiva. Es σ-finita, pero no es finita pues $\mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 1} \{n\}$ y $\mu(\{n\}) = 1$.

Ejemplo. Sea $(X, \mathfrak{X})$ un espacio medible, X con infinitos elementos, sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en X con $x_n \neq x_m \quad \forall n \neq m$ y $(a_n)_{n \geq 1}$ otra sucesión en $[0, +\infty]$. Definimos $\mu : \mathfrak{X} \longrightarrow [0, +\infty]$ como

$$\mu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \in E} a_n$$
$$E \in \mathfrak{X}$$

Queda como ejercicio ver que es medida. Si $\mathfrak{X}$ contiene a los conjuntos unitarios $\{x_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces μ es σ-finita pues $X = (\bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}) \cup (X - \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\})$ ambos medibles, luego $\mu(\{x_n\}) = a_n$ y $\mu(X - \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}) = 0$. Además es σ-finita $\iff \sum_{n \geq 1} a_n < +\infty$

Ejemplo (Medida de Lebesgue)**.** Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$, más adelante probaremos que $\exists!$ medida $\lambda : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que: $\lambda((a, b)) = b - a$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.
Es σ-finita pues $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} (-n, n)$ y $\lambda((-n, n)) = 2n < +\infty$, pero no es finita pues $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. Notemos que λ puede extenderse a una σ-álgebra de $\mathbb{R}$ más grande que $\mathcal{B}$, pero no puede extenderse a $P(\mathbb{R})$.

Ejemplo (Medida n-dimensional de Lebesgue)**.** Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{X} = \mathcal{B}_n$, tenemos que $\exists!$ medida $\lambda : \mathcal{B}_n \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que:

$$\lambda_n\left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ y } a_i < b_i$$

Ejemplo (Medida de Borel - Stieltjes generada por f). Si $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$, fijemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona no decreciente y continua. Probaremos que existe una única medida $\lambda_f : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$:

$$\lambda_f((a,b)) = f(b) - f(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b$$

El ejemplo anterior es un caso particular de esta medida con $f(x) = x$.

Lema 5.5. Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{X})$ y una medida $\mu : X \to [0, +\infty]$. Si $F, E \in \mathfrak{X}$ y $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$. Si además $\mu(E) < +\infty \Rightarrow \mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Demostración. Como $E \subseteq F$ entonces $F = E \cup (F - E)$, además $F - E = F \cap E^c \in \mathfrak{X}$ y $E \cap (F - E) = \varnothing$. Entonces $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E)$. Si $\mu(E) < +\infty$ entonces $\mu(F)$, $\mu(F-E)$ son o ambos finitos o ambos infinitos, luego $\mu(F-E) = \mu(F)-\mu(E)$. $\square$

Corolario 5.6. μ es finito $\iff$ $\mu(X) < +\infty$.

Lema 5.7. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión cualquiera en $\mathfrak{X}$ entonces

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

Demostración. Definamos

$$F_1 := A_1,\ F_2 := A_2 - A_1,\ \cdots$$
$$F_n := A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = A_n - (\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k) \quad \forall n \geq 2$$

Resulta que es una sucesión en $\mathfrak{X}$ de conjuntos disjuntos dos a dos ya que si $n > m \Rightarrow F_m \cap F_n = (A_m - \bigcup_{k=1}^{n-1} F_k) \cap F_n = \varnothing$.
Luego,

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} F_n, \text{ y}$$
$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} F_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

$\square$

Lema 5.8. Sea μ una medida sobre $\mathfrak{X}$:

1. Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{X}$ creciente $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.
2. Si $(F_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente y $\mu(F_1) < +\infty \Rightarrow$

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

Ejemplo $\{x\} = \bigcap_{n\geq 1}(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ y $\mu(\{x\}) = \dfrac{2}{n} \to 0$ si $\mu = \lambda$.

Demostración. Veamos el primer caso.
$\forall n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = E_n - E_{n-1}$, con $E_0 = \varnothing$ y $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{X}$ tal que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E_n, \text{ y además } \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} E_n$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) &= \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)\end{aligned}$$

Para el segundo caso si $\mu(F_1) < +\infty$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n = F_1 - F_n \Rightarrow (E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente en $\mathfrak{X}$ tal que

$$\bigcup_{n\geq 1} E_n = \bigcup_{n\geq 1} F_1 \cap F_n^c = F_1 \cap (\bigcup_{n\geq 1} F_n^c) = F_1 \cap (\bigcap_{n\geq 1} F_n)^c = F_1 - \bigcap_{n\geq 1} F_n$$

$$\begin{aligned}\mu(F_1) - \mu(\cap_{n\geq 1} F_n) = \mu(F_1 - \cap_{n\geq 1} F_n) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) &=^* \lim_{n\to+\infty} \mu(F_1 - F_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(F_1) - \mu(F_n) = \mu(F_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n)\end{aligned}$$

*Por el lema anterior $\therefore$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \mu(\cap_{n\geq 1} F_n)$$

$\square$

Notemos que en el segundo caso la condición $\mu(F_1) < +\infty$ se puede reemplazar por $\mu(F_{n_0}) < +\infty$ para algún $n_0 \geq 1$, pero no puede omitirse. Por ejemplo si $X = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{X} = \mathcal{B}$ y $\mu = \lambda$ la medida de Lebesgue, entonces llamemos $F_n = (n, +\infty)$ en este caso $\mu(F_n) = +\infty$ y $\mu(\bigcap_{n\geq 1} F_n) = \varnothing$.
Aplicando estas propiedades para la medida de Lebesgue λ podemos probar que si I es un intervalo de $\mathbb{R}$ $(a, b) : a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ y $a < b$ o $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$.

$$\lambda(I) = \begin{cases} l(I) & \text{si I es acotado} \\ +\infty & \text{si I es no acotado} \end{cases}$$

Clase VI - 27/03

6.1 Espacio de medida

Definición 6.1 (Espacio de medida)**.** Un espacio de medida es una terna $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, donde X es un conjunto, $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en $\mathfrak{X}$.

Un espacio de probabilidad es un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. En este caso a X se lo llama espacio muestral, a $\mathfrak{X}$ se lo llama colección de eventos y una función $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{X}$-medible se la llama variable aleatoria.

Definición 6.2. Dado un espacio de medida $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, sea $P(x)$ una "propiedad"que se puede predicar de sobre los elementos $X \in \mathfrak{X}$. Diremos que $P(x)$ vale μ-casi todo punto (μ-c.t.p) si $\exists N \in \mathfrak{X}$ con $\mu(N) = 0 : P(x)$ vale $\forall x \in N^c$.

Ejemplo. $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones diremos que $f = g \quad \mu$-c.t.p si $\exists N \in \mathfrak{X}$ con $\mu(N) = 0 : f(x) = g(x) \quad \forall x \in N^c$. Por ejemplo si $(X, \mathfrak{X}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, las funciones $f = X_{\mathbb{Q}}$, y $g = 0$ son λ-c.t.p iguales ya que $f(x) = g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^c$ y $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Ejemplo. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ diremos que $f_n \to f \quad \mu$-c.t.p si $\exists N \in \mathfrak{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in N^c$.

Definición 6.3 (Carga)**.** Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, una carga en $\mathfrak{X}$ es una función $\nu : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$:

1. $\nu(\varnothing) = 0$.
2. Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{X}$ disjuntos dos a dos entonces $\nu(\bigcup E_n) = \sum \nu(E_n)$.

Admitimos solo valores reales en la imagen para evitar situaciones del tipo $\infty + (-\infty)$. Luego $\sum_{n\geq 1} \nu(E_n)$ converge pues si definimos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutación de los naturales entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \nu(E_{\sigma(n)}) &= \nu(\bigcup_{n\geq 1} E_{\sigma(n)}) \\ &= \nu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} \nu(E_n)\end{aligned}$$

$\therefore$ converge incondicionalmente $\to$ converge absolutamente.

6.2 Generación de medida

Motivación: ¿Cómo podemos construir una medida con ciertas propiedades cuando no sabemos como definirla sobre todos los conjuntos de la σ-álgebra?
Consideremos la clase $\mathfrak{Y}$ formada por los intervalos de la forma

1. $(a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
2. $(-\infty, b]$ con $b \in \mathbb{R}$.
3. (c, ∞) con $c \in \mathbb{R}$.
4. $(-\infty, \infty)$.
5. $\varnothing$.

Luego definimos $\ell : \mathfrak{Y} \to [0, +\infty]$ dada por:

1. $\ell((a, b]) = b - a$.
2. $\ell((-\infty, b]) = +\infty$.
3. $\ell((c, \infty)) = +\infty$.
4. $\ell((-\infty, \infty)) = +\infty$.
5. $\ell(\varnothing) = 0$.

Sabemos que $\sigma(\mathfrak{Y}) = \mathcal{B}$, la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, pero no sabemos como extender la definición de ℓ a todos los conjuntos de $\mathcal{B}$.
La clase de $\mathfrak{Y}$ tiene estructura de semiálgebra.

Definición 6.4 (Semiálgebra)**.** Una colección de subconjuntos $\mathcal{A}$ de X es una semiálgebra si:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.
2. Si $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.
3. Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ para $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{A}$ dos a dos disjuntos.

Se deja como ejercicio verificar que efectivamente $\mathfrak{Y}$ es una semiálgebra con la definición de semiálgebra de $\mathbb{R}$.

Lema 6.5. La función $\ell : \mathfrak{Y} \to [0, +\infty]$ es finitamente aditivia, i.e, si $I_1, \cdots, I_n \in \mathfrak{Y}$ son conjuntos dos a dos disjuntos y $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \mathfrak{Y} \Rightarrow \ell(\bigcup_{i=1}^{n} I_n) = \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i)$.

Demostración. Supongamos $I_1, \cdots, I_n \in \mathfrak{Y}$, no vacíos, cuya unión también pertenece a $\mathfrak{Y}$. Si alguno es no acotado, la unión también y será $\ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = +\infty = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$. Supongamos ahora que cada $I_k = (a_k, b_k]$ con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$. Luego $\bigcup_{i=1}^n I_i$ es de la forma $(a, b]$ con $a = \min(a_1, \cdots, a_n)$ y $b = \max(b_1, \cdots, b_n)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, si no es así reordenamos los intervalos.
De esto se sigue que $a_1 = a < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots b_{n-1} = a_n < b_n = b$, pues no puede haber huecos, ya que dijimos que la unión pertenece a $\mathfrak{Y}$. Claramente $\ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = b - a = \ell((a, b])$ y, finalmente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \ell(I_k) &= \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \\
&= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \\
&= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \cdots + (b_{n-1} - a_n) + b_n \\
&= b_n - a_1 = b - a
\end{aligned}$$

$\therefore \ell(\bigcup_{i=1}^n I_i) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$. □

De acuerdo con el lema anterior podríamos extender la función ℓ a una clase más grande de subconjuntos de $\mathbb{R}$.
Sea $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{i=1}^n I_i$, para ciertos $n \in \mathbb{N}$, $I_1, \cdots, I_n \in \mathfrak{Y}$ dos a dos disjuntos$\}$, defimos $\ell : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ como $\ell(A) = \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$ si $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ con las mismas condiciones que pedimos.

Observación. Queda ver que ℓ está bien definida, i.e, no depende de la forma en que se escriba A como unión de intervalos.

Definición 6.6 (Álgebra). Dado un conjunto X, una clase $\mathcal{A} \in P(X)$ es un álgebra si:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.
2. Si $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.
3. Si $E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$.

Lema 6.7. Dada una semiálgebra $\mathcal{S} \subseteq P(X)$ la clase $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A = \bigcup_{i=1}^n S_i, S_j \in \mathcal{S} \quad \forall j = 1, \cdots, n$, dos a dos disjuntos$\}$ es un álgebra de subcojuntos de X.
Además $\mathcal{A}$ es la menor álgebra que contiene a $\mathcal{S}$ y se la llama álgebra generada por $\mathcal{S}$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo la intersección finita.
Sean $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}$ dos a dos disjuntos y $F_1, \cdots, F_m \in \mathcal{S}$ dos a dos disjuntos.
Llamemos $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ y $F = \bigcup_{j=1}^{m} F_j \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} S \cap F &= \bigcup_{i=1}^{n} S_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} F_j \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (S_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} F_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (S_i \cap F_j) \end{aligned}$$

Luego $\forall (i, j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, m\}$, sea $S_{ij} = S_i \cap F_j \in \mathcal{S}$. Además $S_{ij} \cap S_{kl} = \varnothing$ si $(i, j) \neq (k, l)$. Luego $S \cap F \in \mathcal{A}$ pues $S \cap F$ es unión finita de elementos de $\mathcal{S}$ dos a dos disjuntos.
Ahora veamos que se cumplen las propiedades de álgebra:

1. Se cumple pues $\mathcal{S}$ es semiálgebra.

2. Dado $A \in \mathcal{A}$, sean $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, dos a dos disjuntos. Entonces $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} S_i^c \Rightarrow \forall i = 1, \cdots, n$ como $S_i \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es una semiálgebra $\exists B_1^i, B_2^i, \cdots, B_n^i \in \mathcal{S}$ dos a dos disjuntos tal que $S_i^c = \bigcup_{j=1}^{n} B_j^i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} S_i^c \in \mathcal{A}$, pues ya probamos que la intersección finita es cerrada.

3. Queda como ejercicio.

$\square$

Clase VII - 01/04

7.1 Generación de medida (continuación)

Habíamos visto que $\ell : \mathfrak{Y} \to [0, +\infty]$ es condicionalmente finitamente aditiva. Es decir que si $I_1, \cdots, I_n \in \mathfrak{Y}$ son conjuntos dos a dos disjuntos tal que $\bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{Y} \Rightarrow \ell(\bigcup_{k=1}^n I_k) = \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$.
Queda como ejercicio ver que:

1. Si $I, J \in \mathfrak{Y}$ y $I \subseteq J$ entonces $\ell(I) \leq \ell(J)$.

2. ℓ también es condicionalmente subaditiva i.e si $I_1, \cdots, I_n \in \mathfrak{Y} : \bigcup_{i=1}^n I_k \in \mathfrak{Y}$ entonces $\ell(\bigcup_{k=1}^n I_k) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$.

Veamos que $\ell : \mathfrak{Y} \to [0, +\infty]$ es condicionalmente σ-aditiva i.e si $(I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{Y}$ es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tal que $\bigcup_{n\geq 1} I_n \in \mathfrak{Y}$ entonces $\ell(\bigcup_{n\geq 1} I_n) = \sum_{n\geq 1} \ell(I_n)$. Hay que considerar varios casos según la forma de $I := \bigcup_{n\geq 1} I_n$.
El primer caso es cuando $I = (a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $I_n \neq \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y, como $I_n \subseteq I$, $I_n = (a_n, b_n]$ con $a \leq a_n < b_n \leq b$.
Primero veamos que $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \leq \ell(I)$, fijemos $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $I_1, \cdots, I_m$ son tales que $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, si no es así los reordenamos (son finitos).
Como son dos a dos disjuntos y son subconjuntos de I con

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < \cdots \leq a_m < b_m \leq b$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \ell(I_n) &= \sum_{n=1}^{m} (b_n - a_n) \\
&= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \cdots + (b_{m-1} - a_m) + b_m \\
&\leq b_n - a_1 \leq b - a = \ell(I)
\end{aligned}$$

Pues cada $(b_1 - a_2), (b_2 - a_3), \cdots, (b_{m-1} - a_m)$ son negativos.
Por lo tanto la suma parcial $\sum_{n=1}^m \ell(I_n) \leq \ell(I) \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \leq \ell(I)$.
Veamos ahora que $b - a = \ell(I) \leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n)$. Basta probar que dado $a < a' < b \Rightarrow b - a' \leq \sum_{n\geq 1} I_n$.
Fijemos un $a' \in (a, b]$ y sea $\varepsilon > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$ sea $\varepsilon_j = \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot j}$.
Definamos $U_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j)$ y notemos que $[a', b] \subseteq (a, b] = \bigcup_{n\geq 1} I_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} U_n$.
Por el Teorema de Heine-Borel $[a', b]$ es compacto y entonces $\exists m \geq 1 : [a', b] = \bigcup_{j=1}^m U_j$.
Consideremos $I'_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j] \in \mathfrak{Y} \quad \forall j = 1, \cdots, m$.
Luego $(a', b] \subseteq \bigcup_{j=1}^m I'_j \Rightarrow b - a' = \ell((a', b]) \leq \ell(\bigcup_{j=1}^m I'_j)$
Si $I'_j \cap (a', b] = \varnothing$ entonces lo podemos descartar para que $\bigcup_{j=1}^m I'_j$ sea conexa y, por lo tanto, pertenezca a $\mathfrak{Y}$.

Luego por ser condicionalmente subaditiva tenemos que

$$\begin{aligned} b - a' &\leq \ell(\bigcup_{j=1}^{m} I'_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \ell(I'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j + \varepsilon_j - a_j = \sum_{j=1}^{m} b_j - a_j + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\cdot j} \leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario resulta que $b - a' \leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n)$.
Si tomamos $a' = a + \frac{1}{n} \Rightarrow b - a = \lim_{n\to+\infty} b - (a + \frac{1}{n}) \leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n)$
El caso dos es cuando $I = (-\infty, b]$ con $b \in \mathbb{R}$.
Sabemos que $\ell(I) = +\infty$. Veamos que $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) = +\infty$.
Si algún I_{n_0} tiene $\ell(I_{n_0}) = +\infty$ ya está.
Supongamos que $\ell(I_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$, luego $I_n = (a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Fijemos $k \in \mathbb{N} : b > -k$. Luego $[-k, b] \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n = I \subseteq \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n + \frac{1}{2^n}$.
Como $[k, b]$ es compacto por Teorema de Heine-Borel tenemos que $\exists m \in \mathbb{N} : [-k, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{m}(a_n, b_n + \frac{1}{2^n}) \in \mathfrak{Y}$.
Por el mismo argumento de antes (si hay más de una componente conexa se la descarta)

$$\begin{aligned} b - (-k) &= \ell([-k, b]) \\ &\leq \ell(\bigcup_{n=1}^{m}(a_n, b_n + \frac{1}{2^n})) \leq \sum_{n=1}^{m} \ell((a_n, b_n + \frac{1}{2^n})) \\ &= \sum_{n=1}^{m}(b_n + \frac{1}{2^n} - a_n) = \sum_{n=1}^{m}(b_n - a_n) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) + 1 \end{aligned}$$

Luego $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \geq b + k - 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} : b > -k \therefore$ tenemos que $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) = +\infty$.
El tercer caso es cuando $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$ y el cuarto es cuando $I = \mathbb{R}$, ambos quedan como ejercicio.

7.2 Extensión de ℓ al álgebra

Recordemos que $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ con $I_1, \cdots, I_m \in \mathfrak{Y}$ dos a dos disjuntos$\}$ y extendamos la función ℓ a $\ell : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ como $\ell(A) = \sum_{n=1}^{m} \ell(I_n)$ si $A \in \mathcal{F}$.

Proposición 7.1. ℓ está bien definida.

Demostración. Supongamos que $A = \bigcup_{k=1}^{m_1} I_k^1 = \bigcup_{j=1}^{m_2} I_j^2$ con los $I_k^1, I_j^2 \in \mathfrak{Y}$ dos a dos disjuntos. Fijado el $k = 1, \cdots, m_1$, $I_k^1 = \bigcup_{j=1}^{m_2} I_k^1 \cap I_j^2$ con $I_k^1 \cap I_j^2 \in \mathfrak{Y}$ por ser $\mathfrak{Y}$ semiálgebra y dos a dos disjuntos. Como ℓ es condicionalmente finita aditiva en $\mathfrak{Y}$ se tiene que $\ell(I_k^1) = \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_k^1 \cap I_j^2)$.
Análogamente, fijado el $j = 1, \cdots, m_2$ se tiene que $\ell(I_j^2) = \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1 \cap I_j^2)$. Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1) &= \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_k^1 \cap I_j^2) \\
&= \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_1} \ell(I_k^1 \cap I_j^2) \\
&= \sum_{j=1}^{m_2} \ell(I_j^2)
\end{aligned}$$

$\therefore$ está bien definida. $\square$

Definición 7.2. $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ un álgebra. Una medida sobre $\mathcal{A}$ es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Si $(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tal que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$ enotnces $\mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$.

Lema 7.3. La función $\ell : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ es una medida sobre el álgebra $\mathcal{F}$.

Demostración. Bosquejo de la demostración: $\ell(\varnothing) = 0$ es trivial. Para ver que ℓ es condicionalmente σ-aditiva en $\mathcal{F}$, podemos seguir la siguiente estrategia:

1. Probar que ℓ es finitamente aditiva en $\mathcal{F}$.
2. Probar que si $E, F \in \mathcal{F}$ y $E \subseteq F$ entonces $\ell(E) \leq \ell(F)$.
3. Probar que ℓ es finitamente subaditiva.
4. Sea $(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tales que $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathfrak{Y}$. Veamos que $\ell(E) = \sum_{n\geq 1} \ell(E_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k^n$ con $I_k^n \in \mathfrak{Y}$ dos a dos disjuntos. Luego, $\{I_k^n : n \in \mathbb{N}, k = 1, \cdots, m_n\}$ es una colección en $\mathfrak{Y}$ de conjuntos dos a dos disjuntos y además podemos enumerarlos en una sucesión tal que $E_i' = I_i^1$ si $i = 1, \cdots, m_1$, $E_i' = I_{i-m_1}^2$ si $i = m_1 + 1, \cdots, m_1 + m_2$ y así sucesivamente.

   Luego $\bigcup_{n\geq 1} E_n' = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^n = \bigcup_{n\geq 1} E_n = E \in \mathfrak{Y}$ como ℓ es condicionalmente σ-aditiva en $\mathfrak{Y}$ resulta que

$$\begin{aligned} \ell(E) &= \sum_{n\geq 1} \ell(E_n') \\ &= \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} \ell(I_k^n) \\ &= \sum_{n\geq 1} \ell(E_n) \end{aligned}$$

5. Deducir la σ-aditividad condicional si $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{F}$, con $I_1, \cdots, I_n$ dos a dos disjuntos y $m \geq 2$. De nuevo $E_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k^n$ con $I_k^n \in \mathfrak{Y}$ dos a dos disjuntos. $I_i = I_i \cap E = I_i \cap \bigcup_{n\geq 1} E_n = \bigcup_{n\geq 1}(I_i \cap E_n) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{k=1}^{m_n} I_i \cap I_k^n$.
   Luego $\ell(I_i) = \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} \ell(I_i \cap I_k^n)$...

$\square$

Clase VIII - 03/04

8.1 Extensión de la medida

Veremos que si $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una medida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ entonces $\exists$ una σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ y $\exists \mu^* : \mathcal{A}^* \to [0, +\infty]$ con $\mu^*(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Definición 8.1 (Medida exterior)**.** Dado un conjunto X, una medida exterior en X es una función $\Gamma : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tal que:

1. $\Gamma(\emptyset) = 0$.
2. $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$ si $A \subseteq B$.
3. Es σ-subaditiva i.e $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{P}(X)$ entonces

$$\Gamma\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \Gamma(E_n)$$

Teorema 8.2. Dado un conjunto X, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra y μ una medida en $\mathcal{A}$ entonces si definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ como

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n\geq 1} \mu(E_n) : A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n, E_i \in \mathcal{A}, \forall i\right\}$$

1. μ^* es una medida exterior.
2. $\mu^*(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$

Demostración. Notemos que $A \in \mathcal{P}(X)$ y la sucesión $(E_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{A}$ dada por $E_1 = X$, $E_n = \varnothing \quad \forall n \geq 2$ verifica que $\bigcup_{n\geq 1} E_n = X \supset A$ y entonces $\mu^*(A)$ está bien definida. Veamos (2), supongamos que $A \in \mathcal{A}$ y $E_1 = A$, $E_n = \varnothing \quad \forall n \geq 2$. Entonces $\mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n) = \mu(A)$ por ser el ínfimo. Por otra parte, si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión cualquiera en $\mathcal{A}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n \Rightarrow (A \cap E_n)_{n\geq 1}$ también es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{n\geq 1} A \cap E_n \in \mathcal{A}$.
Notemos que $\mu(A \cap E_i) \leq \mu(E_i)$ y luego, por la σ-subaditividad condicional de μ resulta que:

$$\begin{aligned}\mu(A) = \bigcup_{n\geq 1} A \cap E_n &\leq \sum_{n\geq 1} \mu(A \cap E_n) \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu^*(A) \geq \mu(A) \therefore \mu^*(A) = \mu(A)$. Queda como ejercicio ver que efectivamente es monótona con la inclusión.
Veamos (1), sea $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) = +\infty$, es trivial. Supongamos que $\mu^*(A_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por definición de μ^*, existe una sucesión $(E_{n,k})_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_{n,k}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{k\geq 1} \mu(E_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&\Rightarrow \{E_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \text{ verifica que:} \\
&\bigcup_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} E_{n,k} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq 1} E_{n,k} \supseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n \\
&\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n\geq} A_n\right) \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu(E_{n,k}) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \mu(E_{n,k}) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&= \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. La medida $\ell : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ sobre el álgebra $\mathcal{F}$, consideremos la medida exterior $\ell^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$. Notemos que si $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\ell^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n\geq 1}(b_n - a_n) = \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n] = \bigcup_{n\geq 1} I_n : a_n < b_n\right\}$$

Tomamos los de la semiálgebra pues los elementos del álgebra pueden ser definidos como unión de I_k disjuntos dos a dos y entonces ℓ^* tiene las siguientes propiedades:

1. Si $B \subset \mathbb{R}$ es numerable $\Rightarrow \ell^*(B) = 0$. El recíproco no es cierto.

2. Si $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \exists E \in \mathcal{B} : A \subseteq E$ y $\ell^*(A) = \ell^*(E)$. Esto no implica que $\ell^*(E - A) = 0$.
   En efecto si $\ell^*(A) = +\infty \Rightarrow E = \mathbb{R}$, si $\ell^*(A) < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $I_{n,k} = (a_k^n, b_k^n] \quad \forall k \geq 1 : A \subseteq \bigcup_{k\geq 1} I_{n,k}$ y $\sum_{k\geq 1} b_k^n - a_k^n \leq \ell^*(A) + 1/n$, por definición de ínfimo.
   Sea $E_n := \bigcup_{k\geq 1} I_{n,k} \in \mathcal{B}$ tal que
$$\ell^*(E_n) \leq \sum_{n\geq 1} \ell^*(I_{n,k}) = \sum_{k\geq 1} \ell(I_{n,k})$$
$$\sum_{k\geq 1} b_k^n - a_k^n \leq \ell^*(A) + \frac{1}{n}$$
   Sea $E := \bigcap_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{B}$. Como $A \subseteq E \Rightarrow \ell^*(A) \leq \ell^*(E)$, pero $\ell^*(E) \leq \ell^*(E_n) \leq \ell^*(A) + 1/n \quad \forall n \geq 1$.
   $\therefore \ell^*(A) = \ell^*(E)$.

Observación. Consideremos $E \subseteq \mathbb{R}$ cualquiera y para cada intervalo $I \in \mathfrak{Y}$ tomemos la medida exterior $\ell^*(E \cap I)$ y como medida interior de $E \cap I$, $\ell_* := \ell(I) - \ell^*(I \setminus E)$. Podríamos decir que E es medible con respecto a ℓ^* si
$$\begin{aligned}&\ell^*(E \cap I) = \ell_*(E \cap I) \quad \forall I \in \mathfrak{Y}\\ &\Rightarrow \ell^*(E \cap I) + \ell^*(I \setminus E) = \ell(I) = \ell^*(I) \quad \forall I \in \mathfrak{Y}\\ &E = (E \cap I) \cup (E \setminus I) \text{ y } (E \cap I) \cap (I \setminus E) = \varnothing\end{aligned}$$

8.2 Medida exterior

Definición 8.3. Dado un conjunto X, sea Γ una medida exterior sobre X, diremos que $E \subseteq X$ es Γ-medible si
$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X$$
A la colección de los conjuntos Γ-medibles la llamaremos $\mathfrak{X}(\Gamma)$.

Observación. Como Γ es una medida exterior, alcanza con ver que
$$\Gamma(A) \geq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X$$
También alcanza con considerar A con $\Gamma(A) < +\infty$.

Observación. E es Γ-medible si Γ resulta aditiva con respecto a la partición $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ con $(A \cap E) \cap (A \cap E^c) = \varnothing \quad \forall A \subset X$

Teorema 8.4 (Carathéodory)**.** Dado un conjunto X, sea Γ una medida exterior en $X \Rightarrow \mathfrak{X}(\Gamma)$ es σ-álgebra sobre X y Γ resulta σ-aditiva sobre $\mathfrak{X}(\Gamma)$ i.e $(X, \mathfrak{X}(\Gamma), \Gamma|_{\mathfrak{X}(\Gamma)})$ es un espacio de medida.

Notemos que X, $\varnothing \in \mathfrak{X}(\Gamma)$, pues dado $A \subset X$

$$\begin{aligned}
&\Gamma(A \cap \varnothing) + \Gamma(A \setminus \varnothing) = \Gamma(\varnothing) + \Gamma(A) = \Gamma(A)\\
&\Gamma(A \cap X) + \Gamma(A \setminus X) = \Gamma(A) + \Gamma(\varnothing) = \Gamma(A)\\
&\Rightarrow \varnothing, X \in \mathfrak{X}(\Gamma)
\end{aligned}$$

Veamos que Γ es cerrada por complementación, si $E \in \mathfrak{X}(\Gamma)$, dado $A \subset X$

$$\begin{aligned}
&\Gamma(A \cap E^c) + \Gamma(A \setminus E^c) = \Gamma(A \setminus E) + \Gamma(A \cap E) = \Gamma(A)\\
&E^c = X \setminus E \in \mathfrak{X}(\Gamma)
\end{aligned}$$

Dados $E, F \in \mathfrak{X}(\Gamma)$, veamos que $E \cap F \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ i.e $\Gamma(A) = \Gamma(A \cap (E \cap F)) + \Gamma(A \setminus (E \cap F))$, $\forall A \subseteq X$. Fijado el $A \subseteq X$, sea

$$\begin{aligned}
B = A \setminus (E \cap F) = A \cap (E \cap F)^c&\\
A \cap (E^c \cup F^c) &= (A \cap E^c) \cup (A \cap F^c)\\
&= (A \setminus E) \cup (A \setminus F)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&B \cap F = A \setminus (E \cap F) = (A \cap F) \setminus E\\
&B \setminus F = A \setminus (E \cup F) \cup (A \setminus F) = A \setminus F
\end{aligned}$$

Como $F \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Gamma(B) = \Gamma(A \setminus (E \cap F)) &= \Gamma(B \cap F) + \Gamma(B \setminus F)\\
&= \Gamma((A \cap F) \setminus E) + \Gamma(A \setminus F)\\
&\Rightarrow \Gamma(A \cap (E \cap F)) + \Gamma(A \setminus (E \cap F))\\
&= \Gamma(A \cap (E \cap F)) + \Gamma((A \cap F) \setminus E) + \Gamma(A \setminus F)\\
&= \Gamma(A \cap F) + \Gamma(A \setminus F) = \Gamma(A)
\end{aligned}$$

En el último paso utilizamos que tanto E como F pertenecen a $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Por lo tanto si E, $F \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow E \cap F \in \mathfrak{X}(\Gamma)$, además $E \cup F = (E^c)^c \cup (F^c)^c = (E^c \cap F^c)^c \in \mathfrak{X}(\Gamma)$. Luego por inducción, si $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathfrak{X}(\Gamma) \Rightarrow \mathfrak{X}(\Gamma)$ es un álgebra en X.
Dados E_1, $E_2 \in \mathfrak{X}(\Gamma) : E_1 \cap E_2 = \varnothing$ veamos que

$$\Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma(A \cap E_2) \quad \forall A \subset X$$

Fijemos el $A \subset X \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \Gamma(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c)\\
&= \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma((A \cap E_2) \setminus E_1)\\
&= \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma(A \cap E_2)
\end{aligned}$$

Así que por inducción si $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ disjuntos dos a dos entonces

$$\Gamma\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma(A \cap E_k) \quad \forall A \subset X$$

Ahora veamos que si $(E_n)_{n\geq 1} \subset \mathfrak{X}(\Gamma)$ son disjuntos dos a dos entonces $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \bigcup_{k=1}^{m} E_k \in \mathfrak{X}(\Gamma)$. Luego $(F_m)_{m\geq 1}$ es una sucesión creciente en $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Como Γ es monótona tenemos que $\forall A \subset X \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \Gamma(A\cap F_m)$ y $\lim_{n\to+\infty} \Gamma(A\setminus F_m) < +\infty$. Quiero ver que para cada $A \subset X$

$$\Gamma(A) = \Gamma\left(A \cap \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\right) + \Gamma\left(A \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\right)$$

Sabemos que para cada $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\Gamma(A\cap F_m) + \Gamma(A\setminus F_m) = \Gamma(A),\\
&\Gamma\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) + \Gamma(A\setminus F_m) = \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma(A\cap E_k)\right) + \Gamma(A\setminus F_m).
\end{aligned}$$

Como $F_m \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n \Rightarrow A\setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n \subset A\setminus F_m$ y

$$\Gamma\left(A \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\right) \leq \Gamma(A\setminus F_m)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Gamma(A) &= \lim_{n\to+\infty} \Gamma(A\cap F_m) + \lim_{n\to+\infty} \Gamma(A\setminus F_m)\\
&\geq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \Gamma(A\cap E_k) + \Gamma\left(A\setminus \bigcup_{k\geq 1} E_k\right)\\
&= \sum_{n\geq 1} \Gamma(A\cap E_n) + \Gamma\left(A\setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \quad *\\
&\geq \Gamma\left(\bigcup_{n\geq 1} (A\cap E_n)\right) + \Gamma\left(A\setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\\
&= \Gamma\left(A\cap \bigcup_{n\geq 1} E_n\right) + \Gamma\left(A\setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\\
&\therefore \bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathfrak{X}(\Gamma)
\end{aligned}$$

Además si en * consideramos $A = \bigcup_{n\geq 1} E_n \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Gamma(A) = \Gamma\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) &\geq \sum_{n\geq 1} \Gamma(A\cap E_n) + \Gamma(A\setminus A)\\
&= \sum_{n\geq 1} \Gamma(E_n) \quad **
\end{aligned}$$

Y la otra desigualdad sale de la σ-subaditividad de Γ. Para terminar de probar que $\mathfrak{X}(\Gamma)$ es σ-álgebra tomemos $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{X}(\Gamma)$ y quiero ver que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathfrak{X}(\Gamma)$$

Consideremos:

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \in \mathfrak{X}(\Gamma) \\ E_n &= A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \in \mathfrak{X}(\Gamma) \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

$(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos tales que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} E_n$$

Entonces por lo que probamos recién $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathfrak{X}(\Gamma) \therefore \mathfrak{X}(\Gamma)$ es σ-álgebra y por ** $\Gamma|_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$ es σ-aditiva.

Clase IX - 08/04

9.1 Extensión Caratheódory / Hahn

Definición 9.1 (Medida completa)**.** Dado un espacio de medida $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, $\mathfrak{X}$ es completa con respecto a μ si $\forall E \in \mathfrak{X}$ con $\mu(E) = 0$ vale que $\forall B \subseteq E$, $B \in \mathfrak{X}$ y $\mu(B) = 0$.

Corolario 9.2. $\mathfrak{X}(\Gamma)$ es completo con respecto a $\Gamma : \mathfrak{X}(\Gamma) \to [0, +\infty]$.

Demostración. Sea $E \in \mathfrak{X}(\Gamma) : \mu(E) = 0$ y $B \subseteq E$.
Fijado $A \subseteq X$ notemos que $A \cap B \subset E \Rightarrow \Gamma(A \cap B) = 0$. Además, $A \setminus B \subseteq A \Rightarrow \Gamma(A) \geq \Gamma(A \setminus B) = \Gamma(A \cap B) + \Gamma(A \setminus B)$. Luego, como A es arbitrario, resulta que $B \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ y $\Gamma(B) \leq \Gamma(E) = 0 \therefore \Gamma(B) = 0$. $\square$

Dada una medida μ sobre un álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, sea μ^* la medida exterior asociada a μ notaremos $\mathcal{A}^* := \mathfrak{X}(\mu^*)$.

Corolario 9.3 (Extensión de Caratheódory)**.** Si μ es una medida sobre un álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$.
2. $\mu^*(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

i.e μ^* es la extensión de Caratheódory de μ.

Demostración. Dado $E \in \mathcal{A}$ quiero ver que $E \in \mathcal{A}^*$.
Fijado el $A \subseteq X$ con $\mu(A) < +\infty$, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $(F_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{A} : E \subseteq \bigcup_{n\geq 1} F_n$ y $\sum_{n\geq 1} \mu(F_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$.
Notemos que $A \cap E = \bigcup_{n\geq 1} E \cap F_n$, $E \cap F_n \in \mathcal{A}$ y $\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E \cap F_n)$.
Por otro lado $A \setminus E = \bigcup_{n\geq 1} F_n \setminus E : F_n \setminus E \in \mathcal{A}$ y $\mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(F_n \setminus E)$ por definición de medida exterior. Luego,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) &\leq \sum_{n\geq 1} (\mu(E \cap F_n) + \mu(F_n \setminus E)) \\ &= \sum_{n\geq 1} \mu(F_n) < \mu^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitario entonces $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$ y como A es arbitrario $E \in \mathcal{A}^*$. Por lo tanto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$.
El segundo punto fue demostrado anteriormente, la medida exterior coincide con la medida interior para los elementos del álgebra. □

Definición 9.4. Si $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una medida sobre un álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ diremos que μ es σ-finita si $\exists (F_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ con $X \subseteq \bigcup_{n\geq 1} F_n$ y $\mu(F_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$.

Observación. Si $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una medida finita $\Rightarrow \exists$ una sucesión creciente $(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n$ y $\mu(E_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$. De hecho, si $(F_n)_{n\geq 1}$ verifican la definición anterior entonces $E_1 = F_1 \in \mathcal{A}$, $E_n = \bigcup_{k=1}^n F_k \in \mathcal{A}$ y $\mu(E_n) \leq \sum_{k=1}^n \mu(F_k) < +\infty \quad \forall n \geq 1$.

Teorema 9.5 (Extensión de Hahn)**.** Dada $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una medida σ-finita sobre el álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces $\exists!$ medida definida sobre $\mathcal{A}^*$ que extiende a μ.

Demostración. La existencia es consecuencia del teorema de extensión de Carathеódory. Queremos ver que $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra en $X : \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{A}^*$ y $\nu : \mathfrak{X} \to [0, +\infty]$: $\nu(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu(E) = \mu^*(E) \quad \forall E \in \mathfrak{X}$ i.e $\nu = \mu^*|_{\mathfrak{X}}$.
Fijado el $\mathfrak{X}$ y ν así, y sea $(F_n)_{n\geq 1}$ una sucesión creciente en $\mathcal{A}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{n\geq 1} F_n$ y $\mu(F_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$.
Dado $E \in \mathfrak{X}$ veamos que $\nu(E) = \mu^*(E)$. Alcanza con ver que

$$\nu(E \cap F_n) = \mu^*(E \cap F_n) \quad \forall n \geq 1$$

Pues entonces

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \lim_{n\to+\infty} \nu(E \cap F_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu^*(E \cap F_n) \\ &= \mu^*(E)\end{aligned}$$

Pues $E = \bigcup_{n\geq 1} E \cap F_n$ y $(E \cap F_n)_{n\geq 1}$ es creciente.
Si $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{E} = E \cap F_n$, notemos que $F_n \setminus E = F_n \setminus \tilde{E}$. Veamos que $\nu(\tilde{E}) = \mu^*(\tilde{E})$.
Dada una sucesión

$$\begin{aligned}(A_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{A} : \tilde{E} \subseteq \bigcup_{k\geq 1} A_k \Rightarrow \\ \nu(\tilde{E}) &\leq \nu\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} \nu(A_k) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mu(A_k) \\ &\Rightarrow \nu(\tilde{E}) \leq \mu^*(\tilde{E})\end{aligned}$$

De la misma manera $\nu(F_n \setminus \tilde{E}) \leq \mu^*(F_n \setminus \tilde{E})$. Como los $F_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu(\tilde{E}) + \nu(F_n \setminus \tilde{E}) = \nu(F_n) = \mu(F_n) = \mu^*(F_n) = \mu^*(\tilde{E}) + \mu^*(F_n \setminus \tilde{E})$. Resulta que $\nu(\tilde{E}) = \nu(E \cap F_n) = \mu^*(E \cap F_n) = \mu^*(\tilde{E})$ y $\nu(F_n \setminus \tilde{E}) = \mu^*(F_n \setminus \tilde{E})$ y tenemos

$$\nu(E \cap F_n) = \mu^*(F_n \cap E) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pues el n es arbitrario, luego tomamos $\mathfrak{X} = \mathcal{A}^*$ y $\nu(E) = \mu^*(E)$ para todo $E \in \mathfrak{X}$. □

9.2 Medida de Lebesgue

Por el teorema de extensión de Carathеódory $(\mathbb{R}, \mathcal{F}^*, \ell^*)$ es un espacio de medida completa. Como sabemos que ℓ es σ-finita, por el teorema de enxtensión de Hahn, ℓ^* es la única extensión de ℓ a la σ-álgebra $\mathcal{F}^*$, o a cualquier $\mathfrak{X} : \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}^*$.
A partir de ahora, a la medida $\ell^*|_{\mathcal{F}^*} := \lambda$ la llamaremos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{F}^*$ es la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y lo notaremos $\mathcal{L} := \mathcal{F}^*$.
Ejercicio: Probar que la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra de Borel i.e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$.
En particular, λ es la única medida sobre los Borelianos que verifica

- $\lambda((a, b)) = b - a = \lambda((a, b] - \{b\})$.

- $\lambda([a, b]) = b - a$.
- $\lambda([a, b)) = b - a$.
- $\lambda((a, b]) = b - a$.

Por supuesto la misma afirmación vale para λ sobre $\mathcal{L}$.

Observación. No se pierde demasiadad generalidad al considerar $\lambda : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$.

- $(\forall E \in \mathcal{L})(\exists B \in \mathcal{B},\, N \in \mathcal{L} : \lambda(N) = 0$ y $E = B \cup N)$.
- si $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible Lebesgue $\Rightarrow \exists g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ λ-c.t.p.

Ejercicio: λ es invariante por translaciones. Notemos que, además, esta propiedad caracteriza a la medida de Lebesgue i.e si $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ es una medida tal que

1. $\mu(B) < +\infty$ si $B \in \mathcal{B}$ es acotado.
2. μ es invariante por translaciones.

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \mu = \alpha \cdot \lambda$ i.e $\mu(B) = \alpha \cdot \lambda(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Observación. $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ es estricta (no lo probamos). La demostración está en *Real and abstract anlysis - Edwin Hewitt y Karl Stromberg.*

Parciales

10.1 Primer parcial - Primera fecha

10.2 Primer parcial - Segunda fecha

10.3 Segundo parcial - Primera fecha

10.4 Segundo parcial - Segunda fecha

10.5 Segundo parcial - Tercera fecha

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

[1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue.* John Wiley and Sons, 1995.