Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

Bustos Jordi

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

This page is intentionally left blank.

Prefacio

"Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar,
mediante el estudio,
servirle de ayuda y ornato."

Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martinez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.
Estas notas se basan principalmente en la cursada del '99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

This page is intentionally left blank.

Clase I - 06/03

1.1 Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. A P le asignamos una norma $\|P\| = \text{máx}\{l(J_k)\}$. $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ y a cada P le podemos asignar una etiqueta, que es un vector $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ tal que $\xi_k \in J_k$. Una partición etiquetada es un par (P, ξ); y le podemos asignar su suma de Riemann: $S(P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) l(J_k)$.

> **Definición 1.1.** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon$ si (P, ξ) es tal que $\|P\| \leq \delta$

Ejercicio: Probar que si f es integrable Riemann entonces es acotada.
Si f es acotada, dada una partición P del dominio de f, para cada $i \in 1, \cdots, n$. Sean $M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}$ y $m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$. Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a P como $S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k l(J_k)$ y $s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k l(J_k)$. Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$ y $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$.

> **Proposición 1.2.** Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f es integrable Riemann $\iff$ es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

> **Nota.** f es integrable Riemann si:
>
> 1. f es continua.
> 2. f es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.
> 3. f es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.
- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.
- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

Ejemplo. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ f no es integrable Riemann.

Demostración. Llamemos $A = [0,1] \bigcap \mathbb{Q}$. A es numerable entonces $\exists \sigma : \mathbb{N} \to A$ biyección. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$, $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Ahora para cada $n \geq 1$ consideramos: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0,1] \setminus A_n \end{cases} \tag{1.1}$$

f_n es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de A_n y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que $f_n \to f$. Sea $x \in [0,1]$

1. Si $x \in A \to x \in A_{n_0}, n_0 \in \mathbb{N} \to (\forall n > n_0) x \in A_n \to (\forall n > n_0) f_n(x) = 1 \to f_n(x) \to f(x) = 1$.
2. Si $x \notin A \to (\forall n \in \mathbb{N}) x \notin A_n \to (\forall n \in \mathbb{N}) f_n(x) = 0 \to f_n(x) \to f(x) = 0$.

$\therefore f_n \to f$. Si conocieramos $l(A)$ y $l([0,1] \setminus A)$ podríamos definir $\int f = 1 \times l(A) + 0 \times l([0,1] \setminus A)$. $\square$

1.2 Espacios Medibles

Dado X un conjunto arbitrario no vacío. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X.

Definición 1.3 (σ-álgebra)**.** Una familia $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra si verifica:

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Si $A \in X \to A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{X} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Si $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ el par $(X, \mathfrak{X})$ es un espacio medible. A cada $A \in \mathfrak{X}$ lo llamaremos conjunto $\mathfrak{X}$-medible.

Nota. Si $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de X y $A_1, \cdots A_n \in \mathfrak{X}$ entonces $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{X}$. Idea de la demostración: Sea $(B_m)_{m \geq 1}$ la sucesión en $\mathfrak{X}$ definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \emptyset & m > n \end{cases} \tag{1.2}$$

Nota. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de una σ-álgebra $\mathfrak{X}$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Demostración. $\bigcup_{n\geq 1} A_n^c \in \mathfrak{X} \to (\bigcap_{n\geq 1} A_n^c)^c \in \mathfrak{X} \to \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$. □

Ejemplo (σ-álgebras). Dado X cualquiera no vacío.

1. $\mathfrak{X} = \{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra.
2. $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra.
3. Sea $A \neq \emptyset \subset X$. Luego $\mathfrak{X} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ es una σ-álgebra.
4. Supongamos que X no es numerable y sea
$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable ó } A^c \text{ es numerable}\} \tag{1.3}$$
es una σ-álgebra. Demostración ejercicio y además $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(X)$.

Lema 1.4. Dado un conjunto X, sean $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ dos σ-álgebras de X. Entonces $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ es una σ-álgebra de X. Más aún si $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ es una familia de σ-álgebras de X entonces $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$ es una σ-álgebra de X. Demostración, ejercicio.

Proposición 1.5. Dado un conjunto X, sea $A \neq \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X) \to \exists\sigma$-álgebra $\sigma(A)$ que verifica:

1. $A \subseteq \sigma(A)$.
2. $\mathfrak{X}$ es σ-álgebra de X tal que $A \subseteq X \to \sigma(A) \subseteq \mathfrak{X}$.
3. $\sigma(A)$ es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

La llamaremos σ-álgebra generada por A.

Demostración. Sea $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C}$ es σ-álgebra de X y $A \subseteq \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{P}(X) \in \Delta$. Llamemos $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathcal{C}\in\Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$. Veamos que $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de X.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta) \to \emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Sea $A \in \mathfrak{X} \to (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \to A^c \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta) \to A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathfrak{X}$ el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore$ $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra $\overline{\mathfrak{X}}$ σ-álgebra que verifica las dos condiciones por la propiedad uno y dos podemos deducir que $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}$ y $\overline{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$. □

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ y sea $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. La σ-álgebra generada por A es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. A los conjuntos de $\mathcal{B}$ los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si $\overline{A} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \to \sigma(\overline{A}) = \mathcal{B}$.

Demostración.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) = \bigcup_{n\geq 1}(a, a + n) \in \mathcal{B} \to \overline{A} \subseteq \mathcal{B}$. Luego $\sigma(\overline{A}) \subseteq \mathcal{B}$. Por ser $\sigma(\overline{A})$ la mínima σ-álgebra que contiene a $\overline{A}$.
- Dado $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sabemos que $(a, b] = (a, +\infty) \bigcap (b, +\infty)^c \in \sigma(\overline{A})$. Luego $(a, b) = \bigcup_{n\geq 1}(a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\overline{A})$. Por lo que $A \subset \sigma(\overline{A})$. $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\overline{A})$. Por ser $\sigma(A)$ la mínima σ-álgebra que contiene a A.

□

Ejercicio demostrar que la σ-álgebra de Borel está generada también por las siguientes familias:

1. $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
2. $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
3. $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
4. $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

6. $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Luego, se puede ver que $\{a\} = \bigcap_{n\geq 1}[a, a - \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$.

Clase II - 11/03

2.1 La σ-álgebra de Borel

A $\mathbb{R}^n$ lo pensamos dotado de la distancia euclídea. Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ son dos puntos de $\mathbb{R}^n$, la distancia entre ellos es

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{2.1}$$

Consideramos la topología usual de $\mathbb{R}^n$ notada τ^n al conjunto de todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1. Dados $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i (\forall i = 1, \cdots, n)$ Definimos el intervalo abierto (a, b) como

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, (\forall i = 1, \cdots, n)\} \tag{2.2}$$

Definición 2.2. Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y $\varepsilon > 0$ el ε-cubo centrado en x es el conjunto definido por

$$C(x, \varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} (x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}) \tag{2.3}$$

Proposición 2.3. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto e $y \in C(x, \varepsilon)$ entonces

1. $(\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0) C(x, \varepsilon) \subseteq V$.
2. $x \in C(y, \varepsilon)$.
3. $C(x, \varepsilon) \subseteq C(y, 2\varepsilon)$.

Definición 2.4. La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ es la σ-álgebra generada por

$$\mathcal{A} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}^n : a_i < b_i, i = 1, \cdots, n\} \tag{2.4}$$

Lo notamos $\mathcal{B}^n$.

Queremos ver que efectivamente $\tau_n \subseteq \mathcal{B}^n$. Consideremos la clase $\beta_n = \{C(q, \frac{1}{m}) : q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$. β_n es numerable pues el conjunto de índices que enumera a β_n es

$$\underbrace{\mathbb{Q}^n \times \cdots \times \mathbb{Q}^n}_{n \text{ veces}} \times \mathbb{N}$$

que es numerable.

Proposición 2.5. Dado un abierto no vacío $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existe una familia $\mathcal{A}_V \subseteq \mathcal{B}_n$ tal que $V = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

Demostración. Sabemos que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$. Como V es abierto y no vacío entonces $V \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Luego $B(x, \varepsilon) \subseteq V$ y $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Por lo tanto $B(x, \varepsilon) \subset V \cap \mathbb{Q}^n$.
Para cada $q \in V \cap \mathbb{Q}^n$ defino $m_q = \min\{m \in \mathbb{N} : C(q, \frac{1}{m})\} \subseteq V$. Llamemos $\mathcal{A}_V = \{C(q, \frac{1}{m_q}) : q \in V \cap \mathbb{Q}^n\}$ la cual es una familia numerable.
Veamos que $\bigcup_{q \in V \cap \mathbb{Q}^n} C(q, \frac{1}{m_q}) = V$.

- $\subseteq$ es trivial.
- $\supseteq$ Dado $x \in V$, $\exists m \in \mathbb{N} : C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$. Consideremos $C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$ que es un abierto no vacío. Resulta que $C(x, \frac{1}{2m}) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Sea $q \in C(x, \frac{1}{2m}) \subseteq V \cap \mathbb{Q}^n$. Entonces $x \in C(q, \frac{1}{2m})$, en particular $m_q \leq 2m$, pues como $x \in C(q, \frac{1}{2m})$ implica que $C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(x, \frac{2}{2m}) \subseteq V$. Por lo tanto $x \in C(q, \frac{1}{2m}) \subseteq C(q, \frac{1}{m_q})$ $\therefore$ $x \in \bigcup_{q \in \mathcal{A}_v} C(q, \frac{1}{m_q}) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_V} B$.

□

Corolario 2.6. La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ coincide con la $\sigma(\tau_n)$. En particular:

- Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto Boreliano.
- Todo conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ es un Boreliano por ser complemento de un abierto.
- Por último, todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ es un Boreliano. (Dado $x \in \mathbb{R}^n, \{x\} = \bigcap_{n \geq 1} C(x, \frac{1}{n})$).

Proposición 2.7. Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{X})$ y sea $X_0 \subseteq \mathfrak{X}$, entonces

1. $\mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A = E \cap X_0$ para algún $E \in \mathfrak{X}\}$ es σ-álgebra de X_0. En particular, si $X_0 \in \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_0 = \{A \subseteq X_0 : A \in \mathfrak{X}\}$, la demostración queda como ejercicio.

2. Si $\mathcal{A}$ es una familia en partes de X tal que $\mathfrak{X} = \sigma(\mathcal{A})$ entonces $\mathfrak{X}_0 = \sigma(\mathcal{A}_0)$ donde $\mathcal{A}_0 = \{A_0 \subseteq X_0 : A_0 = A \cap X_0$ para algún $A \in \mathcal{A}\}$.

   Demostración. Veamos primero que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Si $A_0 \in \mathcal{A}_0 \to \exists A \in \mathcal{A} : A_0 = \mathcal{A} \cap X_0$. Como $A \in \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$ resulta que $A_0 = A \cap X_0 \in \mathfrak{X}_0$. Entonces $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathfrak{X}_0$.

   Ahora veamos que $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. Consideramos la clase $\mathcal{G} = \{E \subseteq X : E \cap X_0 \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}$ y veamos que $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{G}$. Alcanza con probar que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$. Pues si $A \in \mathcal{A}$, $A \cap X_0 \in \mathcal{A}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \to A \in \mathcal{G}$. Si probamos que G es una σ-álgebra, tendríamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$ y $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}$. Luego $\mathfrak{X}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$. $\square$

Ejemplo. Si $\beta \in B_n$ entonces la σ-álgebra de Borel de β, $B_n(\beta) = \{A \subseteq \beta : A \in B_n\}$ está generado por la familia de conjuntos de la forma $(a, b) \cap \beta$ para $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a_i < b_i (\forall i = 1, \cdots, n)$.

2.2 Recta real extendida

Definición 2.8 (Recta real extendida). Definimos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Con las siguientes convenciones:

1. Dado $r \in \mathbb{R}$ tenemos que $-\infty < r < +\infty$.

2. $\pm\infty + \pm\infty = \pm\infty$ y $\pm\infty + \mp\infty$ no está definido.

3. $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$ y $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$ Si $r \in \mathbb{R}$ entonces $r \cdot +\infty = +\infty$ si $r > 0$ y $r \cdot +\infty = -\infty$. si $r < 0$.

4. $0 \cdot \pm\infty = 0 = \pm\infty \cdot 0$.

5. Tampoco definimos cocientes entre infinitos o de la forma $\frac{r}{\pm\infty}$.

Nota. El producto no va a ser continuo en la recta real extendida. Si $a_n = +\infty \cdot \frac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N})$ entonces $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Pero $+\infty \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = +\infty \cdot 0 = 0$.

Notemos que si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \to \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\sup(A) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, sea $\emptyset \neq L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x_{n_k} \to x\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.9. $\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup(L)$ y $\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf(L)$.Ambos pertenecen a L. Además, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\alpha_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ la sucesión α_m es decreciente y $\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf\{\alpha_m\} = \inf_{m\geq n}(\sup_{n\geq m}\{x_n\})$.
Análogamente $\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup\{\alpha_m\} = \sup_{m\geq n}(\inf_{n\geq m}\{x_n\})$.

Proposición 2.10. Propiedades de límite superior e inferior:

- $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$
- $\liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n$

Nota. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ y $x \in \overline{\mathbb{R}}, x_n \to x \iff \limsup x_n = \liminf x_n = x$.

Veamos como extender $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.11 (Borel extendida)**.** Para cada $E \in \mathcal{B}$, sean $E_1 = E \cup \{+\infty\}$, $E_2 = E \cup \{-\infty\}$ y $E_3 = E \cup \{+\infty, -\infty\}$. Consideremos $\overline{\mathcal{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E : E \in \mathcal{B}\} = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\})$. Probar que $\overline{\mathcal{B}}$ es σ-álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$ se deja como ejercicio. Se la llama la σ-álgebra de Borel extendida.

This page is intentionally left blank.

Parciales

3.1 Primer parcial - Primera fecha

3.2 Primer parcial - Segunda fecha

3.3 Segundo parcial - Primera fecha

3.4 Segundo parcial - Segunda fecha

3.5 Segundo parcial - Tercera fecha

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

[1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue.* John Wiley and Sons, 1995.