Notas del teórico

Medida e Integración - Francisco Martinez Pería 2025

Bustos Jordi

Bustos Jordi
jordibustos01@gmail.com

Contenido

This page is intentionally left blank.

Prefacio

“Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar,
mediante el estudio,
servirle de ayuda y ornato.”

Francis Bacon

Este libro recoge las notas tomadas durante el curso de Medida e Integración dictado por Francisco Martinez Pería en el primer cuatrimestre de 2025.
Estas notas se basan principalmente en la cursada del ’99 brindada por Jorge Samur y material del libro *The elements of integration and Lebesgue Measure* de Robert G. Bartle.

This page is intentionally left blank.

Clase I - 06/03

1.1 Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. A P le asignamos una norma $\|P\| = \text{máx}\{l(J_k)\}$. $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ y a cada P le podemos asignar una etiqueta, que es un vector $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ tal que $\xi_k \in J_k$. Una partición etiquetada es un par (P, ξ); y le podemos asignar su suma de Riemann: $S(P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) l(J_k)$.

Definición 1.1. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |S(P, \xi) - I| < \varepsilon$ si (P, ξ) es tal que $\|P\| \leq \delta$

Ejercicio: Probar que si f es integrable Riemann entonces es acotada.
Si f es acotada, dada una partición P del dominio de f, para cada $i \in 1, \cdots, n$. Sean $M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}$ y $m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$. Luego definimos la suma superior y la suma inferior asociada a P como $S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k l(J_k)$ y $s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k l(J_k)$. Entonces podemos definir suma superior e inferior de Riemann como $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \sup\{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$ y $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \inf\{s(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$.

Proposición 1.2. Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f es integrable Riemann $\iff$ es acotada y la suma superior es igual a la inferior.

Nota. f es integrable Riemann si:

1. f es continua.
2. f es continua salvo finitos puntos en los que existen los límites laterales.
3. f es monótona y acotada (en este caso pueden existir numerables discontinuidades).

1.1.1. Desventajas de la integral de Riemann

- Exige que la función oscile poco en intervalos pequeños.
- Hay funciones simples que no son integrables Riemann.
- No se comporta bien con respecto a la convergencia puntual.

Ejemplo. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ f no es integrable Riemann.

Demostración. Llamemos $A = [0,1] \bigcap \mathbb{Q}$. A es numerable entonces $\exists \sigma : \mathbb{N} \to A$ biyección. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$, $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Ahora para cada $n \geq 1$ consideramos: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \in [0,1] \setminus A_n \end{cases} \tag{1.1}$$

f_n es integrable Riemann (queda como ejercicio demostrarlo) ya que es continua salvo en los puntos de A_n y los límites laterales son siempre cero. Veamos ahora que $f_n \to f$. Sea $x \in [0,1]$

1. Si $x \in A \to x \in A_{n_0}, n_0 \in \mathbb{N} \to (\forall n > n_0) x \in A_n \to (\forall n > n_0) f_n(x) = 1 \to f_n(x) \to f(x) = 1$.
2. Si $x \notin A \to (\forall n \in \mathbb{N}) x \notin A_n \to (\forall n \in \mathbb{N}) f_n(x) = 0 \to f_n(x) \to f(x) = 0$.

$\therefore f_n \to f$. Si conocieramos $l(A)$ y $l([0,1] \setminus A)$ podríamos definir $\int f = 1 \times l(A) + 0 \times l([0,1] \setminus A)$. $\square$

1.2 Espacios Medibles

Dado X un conjunto arbitrario no vacío. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X.

Definición 1.3 (σ-álgebra)**.** Una familia $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra si verifica:

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Si $A \in X \to A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{X} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Si $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ el par $(X, \mathfrak{X})$ es un espacio medible. A cada $A \in \mathfrak{X}$ lo llamaremos conjunto $\mathfrak{X}$-medible.

Nota. Si $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de X y $A_1, \cdots A_n \in \mathfrak{X}$ entonces $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{X}$. Idea de la demostración: Sea $(B_m)_{m \geq 1}$ la sucesión en $\mathfrak{X}$ definida por

$$B_m = \begin{cases} A_m & 1 \leq m \leq n \\ \emptyset & m > n \end{cases} \tag{1.2}$$

Nota. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de una σ-álgebra $\mathfrak{X}$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

Demostración. $\bigcup_{n\geq 1} A_n^c \in \mathfrak{X} \to (\bigcap_{n\geq 1} A_n^c)^c \in \mathfrak{X} \to \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$. □

Ejemplo (σ-álgebras). Dado X cualquiera no vacío.

1. $\mathfrak{X} = \{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra.
2. $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra.
3. Sea $A \neq \emptyset \subset X$. Luego $\mathfrak{X} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ es una σ-álgebra.
4. Supongamos que X no es numerable y sea

$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable ó } A^c \text{ es numerable}\} \tag{1.3}$$

es una σ-álgebra. Demostración ejercicio y además $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(X)$.

Lema 1.4. Dado un conjunto X, sean $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ dos σ-álgebras de X. Entonces $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ es una σ-álgebra de X. Más aún si $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ es una familia de σ-álgebras de X entonces $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$ es una σ-álgebra de X. Demostración, ejercicio.

Proposición 1.5. Dado un conjunto X, sea $\mathcal{A} \neq \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X) \to \exists$σ-álgebra $\sigma(\mathcal{A})$ que verifica:

1. $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.
2. $\mathfrak{X}$ es σ-álgebra de X tal que $\mathcal{A} \subseteq X \to \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{X}$.
3. $\sigma(\mathcal{A})$ es la única que verifica ambas propiedades en simultáneo.

La llamaremos σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\Delta = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C}$ es σ-álgebra de X y $A \subseteq \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{P}(X) \in \Delta$. Llamemos $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathcal{C}\in\Delta} \mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta)\}$. Veamos que $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra de X.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta) \to \emptyset, X \in \mathfrak{X}$.
2. Sea $A \in \mathfrak{X} \to (\forall \mathcal{C} \in \Delta) A \in \mathcal{C} \to A^c \in \mathcal{C}(\forall \mathcal{C} \in \Delta) \to A^c \in \mathfrak{X}$.
3. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathfrak{X}$ el argumento es análogo a los dos anteriores.

$\therefore$ $\mathfrak{X}$ es una σ-álgebra que verifica ambas condiciones. Supongamos que existe otra $\overline{\mathfrak{X}}$ σ-álgebra que verifica las dos condiciones por la propiedad uno y dos podemos deducir que $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}$ y $\overline{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$. □

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ y sea $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. La σ-álgebra generada por A es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. A los conjuntos de $\mathcal{B}$ los llamaremos conjuntos Borelianos. Veamos que si $\overline{A} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \to \sigma(\overline{A}) = \mathcal{B}$.

Demostración.

- Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) = \bigcup_{n\geq 1}(a, a + n) \in \mathcal{B} \to \overline{A} \subseteq \mathcal{B}$. Luego $\sigma(\overline{A}) \subseteq \mathcal{B}$. Por ser $\sigma(\overline{A})$ la mínima σ-álgebra que contiene a $\overline{A}$.
- Dado $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sabemos que $(a, b] = (a, +\infty) \bigcap (b, +\infty)^c \in \sigma(\overline{A})$. Luego $(a, b) = \bigcup_{n\geq 1}(a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\overline{A})$. Por lo que $A \subset \sigma(\overline{A})$. $\mathcal{B} = \sigma(A) \subset \sigma(\overline{A})$. Por ser $\sigma(A)$ la mínima σ-álgebra que contiene a A.

□

Ejercicio demostrar que la σ-álgebra de Borel está generada también por las siguientes familias:

1. $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
2. $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
3. $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
4. $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
6. $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Luego, se puede ver que $\{a\} = \bigcap_{n\geq 1}[a, a - \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$.

This page is intentionally left blank.

Parciales

2.1 Primer parcial - Primera fecha

2.2 Primer parcial - Segunda fecha

2.3 Segundo parcial - Primera fecha

2.4 Segundo parcial - Segunda fecha

2.5 Segundo parcial - Tercera fecha

This page is intentionally left blank.

Bibliografía

[1] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue.* John Wiley and Sons, 1995.