Medida e Integración
Práctica 8: Descomposición y diferenciación de medidas

Universidad Nacional de La Plata

2025

Ejercicio 1. Sea $\mathfrak{X}$ una σ-álgebra de conjuntos de X, ν una carga sobre $\mathfrak{X}$ y $E \in \mathfrak{X}$. Probar que:

(a) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathfrak{X}\}$

(b) $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathfrak{X}\}$

(c) $|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{N} |\nu(A_j)| : A_1, \dots, A_N \text{ es una partición finita de } E\right\}$

Demostración. (a) Sea $E \in \mathfrak{X}$, $\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$, donde P es el de la descomposición de Hahn. Luego,

$$E \cap P \subseteq E \Rightarrow \nu(E \cap P) = \nu^+(E) \leq \sup\{\nu(F) : F \subseteq E,\ F \in \mathfrak{X}\}$$

Además, si $F \in \mathfrak{X}$, tal que $F \subseteq E$

$$\nu(F) = \nu(F \cap P) + \nu(F \cap N) \leq \nu(F \cap P) = \nu^+(F) \leq \nu^+(E).$$

Por lo tanto,

$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathfrak{X}\}.$$

(b) Similar al caso anterior, se tiene que $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathfrak{X}\}$.

(c) Sea $E \in \mathfrak{X}$, entonces E es una partición finita de sí mismo, por lo que

$$|\nu|(E) \leq \sup\left\{\sum_{j=1}^{N} |\nu(A_j)| : A_1, \dots, A_N \text{ es una partición finita de } E\right\}$$

Además, como la partición es disjunta se tiene que

$$\sum_{i=1}^{N} |\nu|(A_i) = \sum_{i=1}^{N} \nu^+(A_i) + \nu^-(A_i) = |\nu|(E) \quad \forall E \in \mathfrak{X} \text{y toda partición finita.}$$

Por lo tanto,

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{N} |\nu(A_j)| : A_1, \dots, A_N \text{ es una partición finita de } E\right\}.$$

$\square$

Ejercicio 2. Sean μ y ν medidas finitas sobre $(X, \mathfrak{X})$. Probar que $\nu \ll \mu$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $E \in \mathfrak{X}$ y $\mu(E) < \delta$, entonces $\nu(E) < \varepsilon$.
Probar también que la hipótesis de que ν sea finita no puede omitirse. Para ello, considerar $((0,1), \mathfrak{L})$, μ la medida de Lebesgue restringida y $\nu(E) := \int_E \frac{1}{t}\, d\mu$.

Demostración. Si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $E \in \mathfrak{X}$ y $\mu(E) < \delta$, entonces $\nu(E) < \varepsilon$, si $\mu(E) = 0$, se sigue que $\nu(E) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego, $\nu \ll \mu$.
Para la otra dirección, supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{X}$ tal que $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ y $\nu(E_n) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $F_n = \bigcup_{i\geq n} E_i$, entonces $\mu(F_n) < \mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ y $\nu(F_n) \geq \varepsilon$. Como $(F_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles tenemos que

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$$
$$\nu\left(\bigcap_{n\geq 1} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n) \geq \varepsilon.$$

Por lo tanto ν no es absolutamente continua respecto a μ.
Para el ejemplo, consideremos $((0,1), \mathfrak{L})$, $\mu = \lambda$ la medida de Lebesgue restringida y $\nu(E) := \int_E \frac{1}{t}\, d\lambda$.
Notemos que $\nu \ll \lambda$, ya que si $E \in \mathfrak{L}$ y $\lambda(E) = 0$, entonces $\nu(E) = \int_E \frac{1}{t}\, d\lambda = 0$.
Sea $\varepsilon > 0$, no vale que $\exists \delta > 0$ tal que si $E \in \mathfrak{L}$ y $\lambda(E) < \delta$, entonces $\nu(E) < \varepsilon$. En efecto, si tomamos $E = (0, \delta - 1/n)$, entonces $\lambda(E) = \delta - 1/n < \delta$, pero $\int_{[0,\ \delta-1/n]} \frac{1}{t}\, d\lambda = +\infty$ para todo $\delta > 0$, luego no vale la proposición. □

Ejercicio 3. Mostrar que un conjunto M es nulo para una carga λ si y sólo si $|\lambda|(M) = 0$.

Demostración. Si M es nulo para una carga λ, entonces $\lambda(M \cap E) = 0 \quad \forall E \in \mathfrak{X}$. En particular, para P, $N \in \mathfrak{X}$ de la descomposición de Hahn, entonces $|\lambda(M)| = \lambda^+(M) + \lambda^-(M) = \lambda(M \cap P) + \lambda(M \cap N) = 0 + 0 = 0$. Por lo tanto, $|\lambda|(M) = 0$.
Para la otra dirección, si $|\lambda|(M) = 0$, entonces $\lambda^+(M) = \lambda^-(M)$, por lo que $\lambda^+(M) = \lambda^-(M) = 0$ y debe ser $\lambda(M \cap P) = 0 = \lambda(M \cap N)$. Luego,

$$\lambda(M \cap E) = \lambda(M \cap E \cap P) + \lambda(M \cap E \cap N) = 0 + 0 = 0 \quad \forall E \in \mathfrak{X}$$

□

Ejercicio 4. Sean μ_1, μ_2 y μ_3 medidas en $(X, \mathfrak{X})$. Probar que:

(a) $\mu_1 \ll \mu_1$

(b) $\mu_1 \ll \mu_2$ y $\mu_2 \ll \mu_3$ implican que $\mu_1 \ll \mu_3$

(c) Dar un ejemplo de que $\mu_1 \ll \mu_2$ no implica $\mu_2 \ll \mu_1$.

Demostración. (a) Sea $E \in \mathfrak{X}$ tal que $\mu_1(E) = 0$. Entonces $\mu_1(E) = 0$, luego $\mu_1 \ll \mu_1$.

(b) Sea $E \in \mathfrak{X}$ tal que $\mu_3(E) = 0$, entonces $\mu_2(E) = 0$ por la hipótesis $\mu_2 \ll \mu_3$. Luego, como $\mu_1 \ll \mu_2$, se tiene que $\mu_1(E) = 0$. Por lo tanto, $\mu_1 \ll \mu_3$.

(c) Cualquier medida con la medida nula es un ejemplo.

□

Ejercicio 5. Sea μ una medida finita, $\lambda \ll \mu$, y sean P_n, N_n una descomposición de Hahn para $\lambda - n\mu$. Si

$$P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n, \quad N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n,$$

mostrar que N es σ-finito para λ y que si $E \subset P$, $E \in \mathfrak{X}$, entonces o bien $\lambda(E) = 0$ o $\lambda(E) = \infty$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
&(\lambda - n\cdot\mu)(X \cap N_n) \leq 0\\
&\lambda(N_n) - n\cdot\mu(N_n) \leq 0\\
&\lambda(N_n) \leq n\cdot\mu(N_n) < n\cdot\mu(X) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

y $N = \bigcup_{n\geq 1} N_n$, podemos asumir disjuntos, luego N es σ-finito para λ.
Sea $E \subseteq P$, $E \in \mathfrak{X}$. Entonces $E \subseteq P_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\begin{aligned}
&(\lambda - n\cdot\mu)(E) = \lambda(E) - n\cdot\mu(E) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\\
&\lambda(E) \geq n\cdot\mu(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Entonces, si $n \to +\infty$ se tiene que $\lambda(E) = +\infty$ o, si $\mu(E) = 0$, entonces $\lambda(E) = 0$ por ser absolutamente continua con respecto a μ. $\square$

Ejercicio 6. Sean $X := [0,1]$ y $\mathfrak{X}$ la σ-álgebra de Borel. Mostrar que si μ es la medida de conteo sobre $\mathfrak{X}$ y λ es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{X}$, entonces λ es finita y $\lambda \ll \mu$, pero no vale la conclusión del Teorema de Radon–Nikodym.

Demostración. Claramente, $\lambda([0,\,1]) = 1 < +\infty$ y $\mu(E) = 0 \iff E = \varnothing \Rightarrow \lambda(E) = \lambda(\varnothing) = 0 \Rightarrow \lambda \ll \mu$. Supongamos que vale el TRN, entonces existe una función $f \in M^+(X,\,\mathfrak{X})$ tal que

$$\int_E f\,d\mu = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathfrak{X}.$$

Sea $x \in [0,\,1]$, entonces $E = \{x\} \in \mathcal{B}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\}} f\,d\mu = \lambda(\{x\}) &= \int f\chi_{\{x\}}\,d\mu\\
&= f(x)\mu(\{x\}) = f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,\,1].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,\,1]$, pero $(0,\,1) \in \mathcal{B}$, $\lambda((0,\,1)) = 1 \neq \int_{(0,\,1)} 0\,d\mu = 0$. $\square$

Ejercicio 7. Sean μ y ν medidas σ-finitas definidas en $(X,\mathfrak{X})$ y sea f la derivada de Radon–Nikodym de ν con respecto a μ. Probar que para toda función $g \in \mathfrak{M}^+(X,\mathfrak{X})$ se tiene que:

$$\int g\,d\nu = \int gf\,d\mu.$$

Demostración. Sea $\phi = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}$ una función simple con $a_i \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
&\int \phi\,d\nu = \sum_{i=1}^n a_i\nu(E_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{E_i} f\,d\mu\\
&\sum_{i=1}^n a_i \int \chi_{E_i} f\,d\mu = \int \sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i} f\,d\mu = \int \phi f\,d\mu
\end{aligned}$$

Sea $(\phi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones simples crecientes, no negativas, que converge puntualmente a g. Entonces $(\phi_n \cdot f)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones no negativas que convergen puntualmente a $g \cdot f$. Aplicando TCM dos veces se obtiene:

$$\int g\, d\nu = \lim \int \phi_n\, d\nu = \lim \int \phi_n f\, d\mu = \int gf\, d\mu.$$

□

Ejercicio 8. Todas las medidas consideradas a continuación sobre $(X, \mathfrak{X})$ son σ-finitas. Probar que:

(a) Si $\alpha \ll \beta$ y $\beta \ll \mu$, entonces $\alpha \ll \mu$ y

$$\frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\mu} \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

(b) Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

(c) Si $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$, entonces

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1} \mu\text{-c.t.p y } \nu\text{-c.t.p.}$$

Demostración. (a) La primera parte ya la vimos (ejercicio 4.c), para la segunda: Notemos que, por TRN,

$$\alpha(E) = \int_E h\, d\mu, \quad \alpha(E) = \int_E f\, d\beta \quad \text{y} \quad \beta(E) = \int_E g\, d\mu$$

Con h, f, g las derivadas de Radon-Nikodym. Además, aplicando el ejercicio 7 en * tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_E h\, d\mu = \int_E f\, d\beta &=^* \int_E fg\, d\mu \\ \iff \int_E h - fg d\mu &= 0 \quad \forall E \in \mathfrak{X} \\ \iff h = fg \quad &\mu\text{-c.t.p.} \end{aligned}$$

(b) Por TRN, $\nu_1(E) = \int_E f_1\, d\mu$ y $\nu_2(E) = \int_E f_2\, d\mu$, donde f_1, f_2 son las derivadas de Radon–Nikodym. Entonces,

$$(\nu_1 + \nu_2)(E) = \int_E f_1\, d\mu + \int_E f_2\, d\mu = \int_E (f_1 + f_2)\, d\mu.$$

Además, por TRN sobre $\nu_1 + \nu_2$, existe f tal que

$$\begin{aligned} (\nu_1 + \nu_2)(E) &= \int_E f\, d\mu \quad \forall E \in \mathfrak{X} \\ &= \int_E (f_1 + f_2)\, d\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f = f_1 + f_2$ μ-c.t.p. y $\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$ μ-c.t.p.

(c) Por TRN

$$\mu(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu \quad \forall A \in \mathfrak{X}$$
$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \quad \forall A \in \mathfrak{X}$$

Luego, aplicando el ejercicio 7 en * obtenemos:

$$\mu(A) = \int_A 1\, d\mu = \int_A \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu =^* \int_A \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \quad \forall A \in \mathfrak{X}$$
$$\iff \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu} = 1 \quad \mu\text{-c.t.p.} \iff \frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1} \qquad \mu\text{-c.t.p.}$$

□

Ejercicio 9. Probar que si λ y μ son medidas, con $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$ entonces $\lambda = 0$.

Demostración. Por hipótesis, existen $A,\, B \subseteq X$ tales que $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $\lambda(A) = \mu(B) = 0$. Luego, como $\lambda \ll \mu$ se tiene que $\lambda(B) = 0$. Por lo tanto $\lambda(X) = \lambda(A) + \lambda(B) = 0 + 0 = 0$. Así que $\lambda(A) = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{X}$. □

Ejercicio 10. Considere las siguientes funciones $g_i : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ y sus correspondientes medidas de Borel–Stieltjes (halladas en el ejercicio 13 de la práctica 3):

$$g_1(x) := 2x$$
$$g_2(x) := \arctan(x)$$
$$g_3(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
$$g_4(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) ¿Cuáles de esas medidas son absolutamente continuas con respecto a la medida de Borel?

(b) Hallar sus derivadas de Radon–Nikodym.

(c) ¿Cuáles de esas medidas son singulares con respecto a la medida de Borel?

(d) ¿Cuáles son finitas?

(e) ¿Con respecto a cuáles de estas medidas es absolutamente continua la medida de Borel?

Demostración. (a) Sea $g : [a,\, b] \to \mathbb{R}$. Decimos que g es **absolutamente continua** si

$$\forall(\varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0) \text{ tal que } \forall(a_i,\, b_i)_{i=1}^{n} \text{ partición finita disjunta de } [a,\, b]$$
$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon$$

Por el **Teorema 6.3.6** de *An introduction to measure and integration - Rana*, también vale que g es absolutamente continua si

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, d\lambda(t) \quad \forall x \in [a,\, b] \text{ y } f \in \mathcal{L}_1([a,\, b])$$

O equivalentemente si g es diferenciable en casi todo punto de $[a,\, b]$, su derivada es integrable y

$$g(x) = \int_a^x g'(t)\, d\lambda(t) \quad \forall x \in [a,\, b]$$

El **Teorema 9.1.5** del Rana nos dice que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función monótona creciente y absolutamente continua, entonces la medida de Lebesgue-Stieltjes inducida por F es absolutamente continua con la medida de Lebesgue si y solo si F es continua en cada intervalo acotado.

(i) g_1 es absolutamente continua tomando $\delta = \varepsilon/2$ en la definición, monótona creciente y continua en $\mathbb{R}$, por el **Teorema 9.1.5** del Rana se sigue que $\mu_{g_1} \ll \lambda$.

(ii) g_2 es absolutamente continua, ya que su derivada es $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ que es integrable en $[a,\, b]$, luego por el **Teorema 9.1.5** del Rana $\mu_{g_2} \ll \lambda$.

(iii) Como la continuidad absoluta implica la continuidad ordinaria, se sigue que g_3 no es absolutamente continua, pues no es continua en el origen, luego existe un intervalo acotado e.g $[-1,\, 1]$ tal que g_3 no es continua y entonces por el **Teorema 9.1.5** del Rana se sigue que μ_{g_3} no es absolutamente continua con respecto a λ.

(iv) g_4 es absolutamente continua, pues es diferenciable en $[a,\, b] \setminus \{0\}$, su derivada es

$$g_4'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y además, supongamos $a < 0$,

$$\begin{aligned} g_4(x) &= \int_a^0 g_4'(t)\, d\lambda(t) + \int_0^x g_4'(t)\, d\lambda(t) \\ &= \int_a^0 0\, d\lambda(t) + \int_0^x 1\, d\lambda(t) = x \quad \forall x > 0 \\ &= \int_a^x g_4'(t)\, d\lambda(t) = \int_a^x 0\, d\lambda(t) = 0 \quad \forall x \leq 0 \end{aligned}$$

Análogamente, de la continuidad y la monotonía deducimos que $\mu_{g_4} \ll \lambda$.

(b) Por el ejemplo **9.1.17**, también del Rana, se tiene que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función monótonamente creciente y absolutamente continua y μ_F la medida de Lebesgue-Stieltjes inducida por F en $(\mathbb{R},\, \mathcal{B})$, entonces $\mu_F \ll \lambda$ y

$$\frac{d\mu_F}{d\lambda}(x) = F'(x) \quad \lambda\text{-c.t.p.}$$

(i) g_1 es monótonamente creciente y absolutamente continua, por lo que $\frac{d\mu_{g_1}}{d\lambda}(x) = 2 \quad \lambda$-c.t.p.

(ii) g_2 es monótonamente creciente y absolutamente continua, por lo que $\frac{d\mu_{g_2}}{d\lambda}(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \lambda$-c.t.p.

(iii) Notemos que

$$\mu_{g_3}((a,\, b]) = g_3(b) - g_3(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b < 0 \\ 1 & \text{si } a \leq 0 < b \\ 0 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Luego,

$$\lambda\left(\bigcap_{n\geq 1}(-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n}]\right) = \lim_{n\to+\infty} \lambda((-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$$

pero

$$\mu_{g_3}\left(\bigcap_{n\geq 1}(-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n}]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{g_3}((-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n}]) = 1$$

$\therefore$ μ_{g_3} no es absolutamente continua con respecto a λ y no tiene derivada de Radon–Nikodym.

(iv) g_4 es monótonamente creciente y absolutamente continua, por lo que

$$\frac{d\mu_{g_4}}{d\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \lambda\text{-c.t.p.}$$

(c) (i) Como $\mu_{g_1} \ll \lambda$ se sigue que no es singular con respecto a λ.

(ii) Como $\mu_{g_2} \ll \lambda$ se sigue que no es singular con respecto a λ.

(iii) En este caso podemos tomar $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ tal que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \varnothing$ y

$$\mu_{g_3}(\mathbb{Q}^c) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$$

Claramente, $\mu_{g_3}(A) = 0\, \forall A \subseteq \mathbb{Q}^c$ pues

$$\mu_{g_3}(A) \leq \bigcup_{n\geq 0} \mu_{g_3}((n,\, n+1)) + \mu_{g_3}((-(n+1),\, -n)) = 0$$

Luego $\mu_{g_3} \perp \lambda$.

(iv) Análogo a (ii).

(d) (i) $\mu_{g_1}(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} 2\, d\lambda = 2 \cdot \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$, por lo que no es finita.

(ii) $\mu_{g_2}(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi < +\infty$, por lo que es finita.

(iii) $\mu_{g_3}(\mathbb{R}) \leq \mu_{g_3}(\cup_{n\geq 1}(-n,\, n]) = \text{lím}_{n\to+\infty}\, \mu_{g_3}((-n,\, n]) = \text{lím}_{n\to+\infty}\, 1 = 1 < +\infty$, por lo que es finita.

(iv) $\mu_{g_4}(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} g_4'(x)\, d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_4'(x)\, dx = \int_0^{+\infty} 1\, dx = +\infty$, por lo que no es finita, notemos debido a la igualdad λ-c.t.p podemos definir g_4' en $x = 0$ como $g_4'(0) = 0$.

(e) Sea X un conjunto medible Borel tal que $\mu_{g_i}(X) = 0$ para $i = 1, \cdots, 4$ y μ la medida de Borel. Entonces:

(i) $0 = \mu_{g_1}(X) = \int_X 2\, d\lambda = 2 \cdot \lambda(X) \Rightarrow \lambda(X) = 0 \Rightarrow \mu(X) = 0 \Rightarrow \mu \ll \mu_{g_1}$.

(ii)

(iii) Consideremos $X = [1, 2]$ medible Borel, luego, vimos que $\mu_{g_3}([1, 2]) = 0$, pero claramente $\mu([1, 2]) = 1 \neq 0$, por lo que μ no es absolutamente continua respecto a μ_{g_3}.

(iv) Consideremos $X = [-2, -1]$ medible Borel, luego, vimos que $\mu_{g_4}([-2, -1]) = 0$, pero claramente $\mu([-2, -1]) = 1 \neq 0$, por lo que μ no es absolutamente continua respecto a μ_{g_4}.

$\square$

Ejercicio 11. Sean λ_1 y λ_2 las medidas de Lebesgue sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Identificando el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ con $\mathbb{R}$, definamos las siguientes medidas sobre los borelianos de $\mathbb{R}^2$:

$$\mu_1(A) = \lambda(A_1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}) + \int_A e^{-(x^2+y^2)}\, d\lambda_2(x, y)$$
$$\mu_2(A) = \lambda_2(A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\})$$

Calcular la descomposición de Lebesgue de μ_1 respecto a μ_2.

Demostración. $\square$